Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

12,3 (1971)

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПРЕДСТАВИМОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ СУММЫ СИНГУЛЯРНОЙ И АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

О. ДЕМУТ, Прага

В классической математике всякая функция ограниченной вариации представима в виде суммы сингулярной и абсолютно непрерывной функции [1]. В настоящей работе показано, как дело обстоит в конструктивной математике.

В следующем мы пользуемся определениями и обозначениями из [7] и [8] .

Замечание 1. Пусть φ функция, $\alpha(\varphi)$, а q абсолютно непрерывная на $0 \Delta 1$ функция. Тогда $\alpha(-\varphi)$ и по теореме 6.8 из [3] для любой полигональной функции $\mathcal{F}$ выполнено $\exists u \, Var(u, \varphi + \mathcal{F}, 0 \Delta 1)$. Для всякого РЧ a функция $q - h_a$ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$ и, следовательно, существуют последовательности полигональных функций $\{\mathcal{F}_n\}_n$ и КДЧ $\{v_n\}_n$ и $\{u_n\}_n$ такие, что

$$\forall n \, (Var(v_n, q - h_a - \mathcal{F}_n, 0 \Delta 1) \,\&\, v_n < \frac{1}{n} \,\&$$

$$\& \, Var(u_n, \varphi + \mathcal{F}_n, 0 \Delta 1)) .$$

Последовательность $\{u_n\}_n$ сходится к вариации функции

AMS, Primary 02E99 Ref.Ž. 2.644.2
Secondary 26A30, 26A45

$\varphi + g - h_a$ на $0 \Delta 1$. Таким образом, верно $\alpha(\varphi + g)$.

Замечание 2. Пусть $\mathcal{G}$ S-множество, образованное последовательностью сегментов $\{H_n\}_n$. Тогда, по определению, ряд $\sum_n |H_n|$ сходится к мере $\mathcal{G}$ и, следовательно, для всяких КДЧ ξ и η, $0 \le \xi < \eta \le 1$, сходится ряд

(1) $\sum_n (max(min(\text{Эп}(H_n), \eta), \xi) - max(min(\text{Эл}(H_n), \eta), \xi))$.

Пусть u сумма этого ряда. Для всякого НЧ p существует S-множество $\mathcal{G}^p$ меры меньшей чем $u + \frac{1}{p}$, для которого выполнено $\forall x (x \in \xi \Delta \eta \,\&\, x \in \mathcal{G} \supset x \in \mathcal{G}^p)$.

Итак, если $u < |\xi \Delta \eta|$, то согласно доказательству теоремы 2.4 из [4] $\exists v(\xi < v < \eta \,\&\, \neg(v \in \mathcal{G}))$.

Существует алгорифм $\nu\langle\mathcal{G}\rangle$ такой, что для всяких КДЧ ξ и η, $0 \le \xi < \eta \le 1$, верно $!\nu\langle\mathcal{G}\rangle(\xi \Delta \eta)$ и $\nu\langle\mathcal{G}\rangle(\xi \Delta \eta)$ является суммой ряда (1).

Заметим, что $\nu\langle\mathcal{G}\rangle(0 \Delta 1)$ - мера $\mathcal{G}$ и

$$\forall x y z (0 \le x < y < z \le 1 \supset \nu\langle\mathcal{G}\rangle(x \Delta y) +$$

$$+ \nu\langle\mathcal{G}\rangle(y \Delta z) = \nu\langle\mathcal{G}\rangle(x \Delta z) \le |x \Delta z|) .$$

Замечание 3. Части 1б), 2 - 4) леммы 3 из [8] верны для любой функции f такой, что $\alpha(f)$.

Действительно, пусть v и w КДЧ. Часть 1б) непосредственно следует из $\forall x (|x - v| = (x - v)^+ +$

$$+ (x - v)^- \,\&\, x - v = (x - v)^+ - (x - v)^- \,\&$$

$$\& (w \le v \supset (x - v)^+ \le (x - w)^+ \,\&\, (x - w)^- \le (x - v)^-)).$$

В доказательстве части 4) не используется предположение

(2) $$f = f/\Phi \;.$$

В части II а) доказательства леммы выведена без использования (2) формула (8) из [8]. Ввиду того, что это доказательство можно повторить для произвольного сегмента, содержащегося в $0 \Delta 1$, верно (5) из [8]. Аналогично доказывается остаток части 2) и часть 3).

<u>Обозначение</u>. Пусть f функция, $\alpha(f)$, а v КДЧ, $0 \leq v$. Мы обозначим $f_{\{v\}} \rightleftharpoons f - V^{+}\langle f, v\rangle + V^{-}\langle f, -v\rangle$, $f_{\{1,v\}} \rightleftharpoons V^{+}\langle f, 0\rangle - V^{+}\langle f, v\rangle$ и $f_{\{2,v\}} \rightleftharpoons V^{-}\langle f, 0\rangle - V^{-}\langle f, -v\rangle$.

<u>Лемма 1</u>. Пусть f функция, $\alpha(f)$, а u, v и x КДЧ, $0 \leq v$. Тогда

1) $\alpha(V^{+}\langle f, u\rangle) \,\&\, \alpha(V^{-}\langle f, u\rangle)$,

$$V^{+}\langle V^{+}\langle f, u\rangle, x\rangle = V^{+}\langle f + V^{-}\langle f, u\rangle, u + x\rangle =$$

$$= V^{+}\langle f, \max(u, u + x)\rangle + h_{x-} \;,$$

$$V^{+}\langle V^{-}\langle f, u\rangle, x\rangle = V^{-}\langle f - V^{+}\langle f, u\rangle, u - x\rangle =$$

$$= V^{-}\langle f, \min(u, u - x)\rangle + h_{x-} \;,$$

$$V^{-}\langle V^{+}\langle f, u\rangle, x\rangle = V^{-}\langle f + V^{-}\langle f, u\rangle, u + x\rangle =$$

$$= V^{-}\langle f, \max(u, u + x)\rangle - V^{-}\langle f, u\rangle \;,$$

$$V^{-}\langle V^{-}\langle f, u\rangle, x\rangle = V^{+}\langle f - V^{+}\langle f, u\rangle, u - x\rangle =$$

$$V^{+}\langle f, \min(u, u - x)\rangle - V^{+}\langle f, u\rangle \;;$$

2) $\alpha(f_{\{v\}})\ \&\ \alpha(f_{\{1,v\}})\ \&\ \alpha(f_{\{2,v\}})$,

(3) $f_{\{v\}} = f(0) + f_{\{1,v\}} - f_{\{2,v\}}$,

$V^+\langle f_{\{v\}}, 0\rangle = f_{\{1,v\}}$, $V^-\langle f_{\{v\}}, 0\rangle = f_{\{2,v\}}$,

$\forall i x y\ (1 \leq i \leq 2 \& x \leq y \supset 0 \leq f_{\{i,v\}}(y) -$

$- f_{\{i,v\}}(x) \leq v.(y-x))$

и, следовательно, $\forall x y\ (|f_{\{v\}}(y) - f_{\{v\}}(x)| \leq v.|y-x|)$;

3) функции $f_{\{v\}}$, $f_{\{1,v\}}$ и $f_{\{2,v\}}$ абсолютно непрерывны на $0 \Delta 1$;

4) функция f абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$ тогда и только тогда, когда

(4) $(V^+\langle f, m\rangle(0 \Delta 1) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0) \& (V^-\langle f, -m\rangle(0 \Delta 1) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0)$;

5) если последовательности КДЧ $\{V^+\langle f, m\rangle(0 \Delta 1)\}_m$ и $\{V^-\langle f, -m\rangle(0 \Delta 1)\}_m$ сходятся, то существуют неубывающие неотрицательные функции $f_{\{+\}}$ и $f_{\{-\}}$ такие, что

(5) $(V^+\langle f, m\rangle \searrow_{m\to\infty} f_{\{+\}}) \& (V^-\langle f, -m\rangle \searrow_{m\to\infty} f_{\{-\}})$,

функция $f - f_{\{+\}} + f_{\{-\}}$ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$, выполнено $\alpha(f_{\{+\}} - f_{\{-\}})$, $\alpha(f_{\{+\}})$, $\alpha(f_{\{-\}})$ и

$\forall x\ (V\langle f_{\{+\}}, x\rangle = f_{\{+\}} + h_{|x|} \& V\langle f_{\{-\}}, x\rangle = f_{\{-\}} + h_{|x|})$.

<u>Доказательство</u>. В следующем (✱) обозначает ссылку на лемму 3 из [8] и замечание 3.

I) Согласно (✱) из $\alpha(f)$ следует $\alpha(f - V^+\langle f, u\rangle) \& \alpha(f + V^-\langle f, u\rangle)$ и ввиду

$f = f(0) + h_u + V^+\langle f, u\rangle - V^-\langle f, u\rangle$ и замечания 1 верно 1).

II) На основании I) получаем $\alpha(f + V^-\langle f, -v\rangle)$,

$$(6)\qquad V^+\langle f + V^-\langle f, -v\rangle, v\rangle = V^+\langle f, v\rangle$$

и, следовательно, $\alpha(f_{\{v\}})$. Из $f = f(0) + V^+\langle f, 0\rangle - V^-\langle f, 0\rangle$ следует (3). Согласно 1), (ж) и (6) верно

$$V^+\langle f_{\{v\}}, 0\rangle = V^+\langle f + V^-\langle f,-v\rangle - V^+\langle f + V^-\langle f,-v\rangle, v\rangle, 0\rangle =$$

$$= V^+\langle f + V^-\langle f,-v\rangle, 0\rangle - V^+\langle f + V^-\langle f,-v\rangle, v\rangle =$$

$$= V^+\langle f, 0\rangle - V^+\langle f, v\rangle = f_{\{1,v\}} \quad .$$

Аналогично можно доказать $V^-\langle f_{\{v\}}, 0\rangle = f_{\{2,v\}}$. Отсюда мы ввиду $\alpha(f_{\{v\}})$ и 1) получаем $\alpha(f_{\{1,v\}})\ \&\ \alpha(f_{\{2,v\}})$.

Пусть x и y КДЧ, $0 \le x < y \le 1$. Тогда согласно (ж) и 1)

$$V^+\langle f, 0\rangle(x\Delta y) - v.(y-x) \le (V^+\langle f, 0\rangle(x\Delta y) -$$

$$- v.(y-x))^+ \le V^+\langle V^+\langle f, 0\rangle, v\rangle(x\Delta y) =$$

$$= V^+\langle f, v\rangle(x\Delta y),\ V^+\langle f, v\rangle(x\Delta y) \le V^+\langle f, 0\rangle(x\Delta y)$$

и, следовательно, $0 \le f_{\{1,v\}}(y) - f_{\{1,v\}}(x) \le v.(y-x)$. Аналогично выполнено $0 \le f_{\{2,v\}}(y) - f_{\{2,v\}}(x) \le v.(y-x)$. Таким образом, мы доказали 2). Часть 3) утверждения леммы непосредственно следует из 2) и теоремы из [8].

III) a) Если f абсолютно непрерывна, то согласно теореме из [8] и (ж) верно (4).

б) Пусть верно (4). Тогда мы ввиду 3) и того, что для всякого НЧ n выполнено

$$V\langle f - f_{\{n\}}, 0\rangle(0\Delta 1) = V\langle V^{+}\langle f, n\rangle - V^{-}\langle f, -n\rangle, 0\rangle(0\Delta 1)$$
$$\le V^{+}\langle f, n\rangle(0\Delta 1) + V^{-}\langle f, -n\rangle(0\Delta 1),$$

сразу получаем, что f абсолютно непрерывна.

IV) Согласно (ж) $\{V^{+}\langle f, n\rangle\}_n$ и $\{V^{-}\langle f, -n\rangle\}_n$ невозрастающие последовательности неубывающих неотрицательных функций. Пусть сходятся последовательности КДЧ $\{V^{+}\langle f, n\rangle(0\Delta 1)\}_n$ и $\{V^{-}\langle f, -n\rangle(0\Delta 1)\}_n$. Тогда существуют неубывающие неотрицательные функции $f_{\{+\}}$ и $f_{\{-\}}$ такие, что (5). Ввиду (ж) для любого НЧ n функции $V^{+}\langle f, n\rangle - f_{\{+\}}$ и $V^{-}\langle f, -n\rangle - f_{\{-\}}$ являются неубывающими и, следовательно, если $\{c_i\}_{i=0}^{\tau}$ В-система РЧ, то

$$W(f - f_{\{+\}} + f_{\{-\}} - f_{\{n\}}, \{c_i\}_{i=0}^{\tau}) = W(V^{+}\langle f, n\rangle - f_{\{+\}} -$$
$$- (V^{-}\langle f, -n\rangle - f_{\{-\}}), \{c_i\}_{i=0}^{\tau}) \le (V^{+}\langle f, n\rangle(0\Delta 1) -$$
$$- (f_{\{+\}}(1) - f_{\{+\}}(0))) +$$
$$+ (V^{-}\langle f, -n\rangle(0\Delta 1) - (f_{\{-\}}(1) - f_{\{-\}}(0))).$$

Таким образом, из 3) и (5) следует абсолютная непрерывность функции $f - f_{\{+\}} + f_{\{-\}}$ и согласно замечанию 1) верно $\alpha(f_{\{+\}} - f_{\{-\}})$.

Ввиду 1) для всякого НЧ n выполнено

$$V^{+}\langle V^{+}\langle f, 0\rangle, n\rangle = V^{+}\langle f, n\rangle, V^{+}\langle V^{-}\langle f, 0\rangle, n\rangle =$$
$$= V^{-}\langle f, -n\rangle, V^{-}\langle V^{+}\langle f, 0\rangle, -n\rangle = V^{-}\langle V^{-}\langle f, 0\rangle, -n\rangle = 0$$

и, следовательно, $(V^+\langle f,0\rangle)_{\{+\}} = f_{\{+\}}$,
$(V^+\langle f,0\rangle)_{\{-\}} = 0$, $(V^-\langle f,0\rangle)_{\{+\}} = f_{\{-\}}$ $(V^-\langle f,0\rangle)_{\{-\}} = 0$.
Отсюда мы по выше доказанному получаем $\alpha(f_{\{+\}})$ &
& $\alpha(f_{\{-\}})$.

Согласно (ж) и 1) для всякого НЧ n и КДЧ x выполнено

$$V\langle V^+\langle f,n\rangle,x\rangle = V^+\langle V^+\langle f,n\rangle,x\rangle +$$
$$+ V^-\langle V^+\langle f,n\rangle,x\rangle = V^+\langle f,\max(n,n+x)\rangle + h_{x-} +$$
$$+ V^-\langle f,\max(n,n+x)\rangle - V^-\langle f,n\rangle =$$
$$= V^+\langle f,\max(n,n+x)\rangle + h_{x-} - f + h_{\max(n,n+x)} +$$
$$+ V^+\langle f,\max(n,n+x)\rangle + f - h_n - V^+\langle f,n\rangle =$$
$$= V^+\langle f,n\rangle + h_{|x|} + 2.(V^+\langle f,\max(n,n+x)\rangle - V^+\langle f,n\rangle)$$

и, следовательно,

$$|V\langle f_{\{+\}},x\rangle - f_{\{+\}} - h_{|x|}| \le |V\langle V^+\langle f,n\rangle,x\rangle -$$
$$- V^+\langle f,n\rangle - h_{|x|}| + 2.(V^+\langle f,n\rangle - f_{\{+\}}) \le$$
$$\le 2.|V^+\langle f,\max(n,n+x)\rangle - V^+\langle f,n\rangle| + 2.(V^+\langle f,n\rangle -$$
$$- f_{\{+\}}) \le 2.(V^+\langle f,\max(n,n+x)\rangle - f_{\{+\}}) + 4.(V^+\langle f,n\rangle - f_{\{+\}}).$$

Отсюда мы сразу получаем $\forall x\,(V\langle f_{\{+\}},x\rangle = f_{\{+\}} + h_{|x|})$.
Ввиду доказанного и $(V^-\langle f,0\rangle)_{\{+\}} = f_{\{-\}}$ верно
также $\forall x\,(V\langle f_{\{-\}},x\rangle = f_{\{-\}} + h_{|x|})$.

<u>Определения</u>. 1) Пусть φ функция, t и m НЧ, а
$\mathcal{J}$ S-множество. Тогда мы посредством $C(\varphi,t,\mathcal{J},m)$

обозначим: мера $\mathcal{S}$ меньше чем $\frac{1}{3^t}$ и выполнено

$$\forall x y\, (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg (x \in \mathcal{S}) \,\&\, |y - x| < \frac{1}{m} \supset$$

$$\supset |\varphi(y) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{t} \cdot |y - x|) .$$

2) Функцию φ назовем сингулярной, если φ - функция ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ и для любого НЧ t существуют НЧ n_t и S-множество $\mathcal{S}^t$ такие, что $C(\varphi, t, \mathcal{S}^t, n_t)$.

Замечание 4. Если φ_1 и φ_2 сингулярные функции и $\varphi_1 - \varphi_2$ функция ограниченной вариации на $0 \Delta 1$, то по замечанию 1 из [6] $\varphi_1 - \varphi_2$ сингулярная функция.

Лемма 2. Если φ сингулярная функция, то

1) для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно $D(0, \varphi, x)$ и

2) выполнено $\alpha(\varphi)$ и для любой абсолютно непрерывной функции g верно $\alpha(\varphi + g)$ и $V\langle \varphi + g, 0\rangle = V\langle \varphi, 0\rangle + V\langle g, 0\rangle$. В частности,

(7) $$\forall x\, (V\langle \varphi, x\rangle = V\langle \varphi, 0\rangle + h_{|x|}) .$$

Доказательство. а) Часть 1) утверждения непосредственно следует из определения сингулярной функции и замечания 1 из [6] .

б) Пусть w и x КДЧ, а m НЧ, $Var(w, \varphi, 0 \Delta 1) \,\&\, |x| < m$.

Существуют S-множество $\mathcal{S}$ и НЧ n и l такие, что $C(\varphi, 6m, \mathcal{S}, n)$ и для $n_1 \geq 8 \cdot 3^{n+l+6m}$ выполнено

(8) $$w - \frac{1}{6m} < W(\varphi, \{\frac{i}{n_1}\}_{i=0}^{n_1}) .$$

Тогда $\sum_{i=1}^{n_1} \nu\langle\mathcal{Y}\rangle(\frac{i-1}{n_1}\Delta\frac{i}{n_1}) = \nu\langle\mathcal{Y}\rangle(0\Delta 1) < \frac{1}{3^{6m}}$

и, следовательно, согласно теореме 1.3 из [3] существуют дизъюнктные возрастающие системы НЧ $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ такие, что $\mathcal{E}$ содержит не больше чем $n_1 \cdot \frac{9}{8\cdot 3^{6m}}$ НЧ и выполнено

$$\forall i((1\le i\le n_1 \equiv (i\in\mathcal{D} \vee i\in\mathcal{E}))\ \&$$

$$\&\ (i\in\mathcal{D} \supset \nu\langle\mathcal{Y}\rangle(\frac{i-1}{n_1}\Delta\frac{i}{n_1}) < \frac{1}{n_1})\ \&$$

$$(i\in\mathcal{E} \supset \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{n_1} < \nu\langle\varphi\rangle(\frac{i-1}{n_1}\Delta\frac{i}{n_1}))) \ .$$

Согласно замечанию 2 мы получаем

$$\sum_{i\in\mathcal{D}} |x|\cdot\frac{1}{n_1} \le \sum_{i\in\mathcal{D}} |\varphi(\frac{i}{n_1}) - \varphi(\frac{i-1}{n_1}) - x\ .$$

$$.(\frac{i}{n_1} - \frac{i-1}{n_1})| + 2.\sum_{i\in\mathcal{D}}\frac{2}{6m}\cdot\frac{1}{n_1} - \sum_{i\in\mathcal{D}}|\varphi(\frac{i}{n_1}) - \varphi(\frac{i-1}{n_1})| ,$$

$$\sum_{i\in\mathcal{E}}|\varphi(\frac{i}{n_1}) - \varphi(\frac{i-1}{n_1})| \le \sum_{i\in\mathcal{E}}|\varphi(\frac{i}{n_1}) - \varphi(\frac{i-1}{n_1}) -$$

$$- x.(\frac{i}{n_1} - \frac{i-1}{n_1})| + |x|.\sum_{i\in\mathcal{E}}\frac{1}{n_1} < \sum_{i\in\mathcal{E}}|\varphi(\frac{i}{n_1}) -$$

$$-\varphi(\frac{i-1}{n_1}) - x.(\frac{i}{n_1} - \frac{i-1}{n_1})| - \sum_{i\in\mathcal{E}}|x|.\frac{1}{n_1} + \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3^{6m}}\cdot m$$

и, следовательно, по (8)

$$w + |x| - \frac{1}{m} < W(\varphi - h_x, \{\frac{i}{n_1}\}_{i=0}^{n_1}) \ .$$

С другой стороны, для любой В-системы РЧ $\{c_i\}_{i=0}^{r}$ верно

$$W(\varphi - h_x, \{c_i\}_{i=0}^{r}) \le W(\varphi, \{c_i\}_{i=0}^{r}) + |x| \le w + |x| \ .$$

Итак, $\mathrm{Var}\,(w + |x|,\ \varphi - h_x,\ 0\Delta 1)$.

Мы доказали $\alpha(\varphi)$ и для любого КДЧ x – $V\langle\varphi, x\rangle(0\Delta 1) = V\langle\varphi, 0\rangle(0\Delta 1) + |x|$. Но тогда ввиду $\forall x y (0 \leq x < y \leq 1 \supset V\langle \varphi, x \rangle (x \Delta y) \leq V\langle \varphi, 0 \rangle (x \Delta y) + |x| \cdot (y - x))$ и теоремы 6.8 из [3] верно

$$V\langle \varphi, x \rangle = V\langle \varphi, 0 \rangle + h_{|x|} .$$

Из доказанного нами (7) следует по замечанию 1 остаток 2).

<u>Теорема 1</u>. Функция φ является сингулярной тогда и только тогда, когда $\alpha(\varphi)$ и

$$(9) \quad \forall x (V\langle \varphi; x \rangle (0 \Delta 1) = V\langle \varphi, 0 \rangle (0 \Delta 1) + |x|) .$$

<u>Замечание 5</u>. В классической математике для всякой сингулярной функции φ верно (9).

<u>Лемма 3</u>. Пусть ψ неубывающая функция, $\alpha(\psi)$, k целое число, $0 \leq k$, а p и s НЧ такие, что $1 \leq s \leq 3^k$ и

$$\psi\left(\frac{s}{3^k}\right) - \psi\left(\frac{s-1}{3^k}\right) + \frac{1}{3^{2p+9}} \cdot \frac{1}{3^k} = V\left\langle \psi, \frac{1}{3^{2p+9}} \right\rangle \left(\frac{s-1}{3^k} \Delta \frac{s}{3^k} \right) .$$

Тогда можно построить НЧ l_0, $p + 4 < l_0$, такое, что для любого НЧ l, $l_0 \leq l$, существует возрастающая система НЧ $\mathscr{C}$, для которй выполнено

$$\forall i (i \in \mathscr{C} \supset (s-1) \cdot 3^l + 1 < i < s \cdot 3^l \,\&$$

$$(10) \quad \& \forall j (i - 1 \leq j \leq i + 1 \supset \psi\left(\frac{j}{3^{k+l}}\right) - \psi\left(\frac{j-1}{3^{k+l}}\right) < \frac{1}{3^{2p+8}} \cdot \frac{1}{3^{k+l}})) \,\& \sum_{i \in \mathscr{C}} \left| \frac{i-1}{3^{k+l}} \Delta \frac{i}{3^{k+l}} \right| = \left(1 - \frac{1}{3^{p+2}}\right) \cdot \frac{1}{3^k} .$$

<u>Доказательство</u>. Существует НЧ l_0, $p + 4 < l_0$, такое, что для всякого НЧ l, $l_0 \leq l$, верно

$$\psi\left(\frac{s}{3^k}\right)-\psi\left(\frac{s-1}{3^k}\right)+\frac{1}{3^{2p+9}}\cdot\frac{1}{3^k}-$$
$$-\frac{1}{3^{3p+13+k}}<\sum_{i=(s-1)\cdot 3^l+1}^{s\cdot 3^l}\left|\psi\left(\frac{i}{3^{k+l}}\right)-\psi\left(\frac{i-1}{3^{k+l}}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3^{2p+9}}\cdot\left(\frac{i}{3^{k+l}}-\frac{i-1}{3^{k+l}}\right)\right| .$$

Пусть l НЧ, $l_0 \leq l$. Мы определим $i_1 \rightleftharpoons (s-1)\cdot 3^l+1$ и $i_2 \rightleftharpoons s\cdot 3^l$.

Допустим, что

(11) $$\forall i\,(i_1 \leq i \leq i_2 \supset (A(i) \vee B(i))) ,$$

где $\forall i\,((A(i) \rightleftharpoons i_1 \leq i \leq i_2 \,\&\, (\psi(\frac{i}{3^{k+l}})-\psi(\frac{i-1}{3^{k+l}}) < \frac{1}{3^{2p+9}}\cdot\frac{1}{3^{k+l}})) \,\&\, (B(i) \rightleftharpoons i_1 \leq i \leq i_2 \,\&\, \neg A(i)))$.

Тогда мы получаем

$$\psi\left(\frac{s}{3^k}\right)-\psi\left(\frac{s-1}{3^k}\right)+\frac{1}{3^{2p+9}}\cdot\frac{1}{3^k}-\frac{1}{3^{3p+13+k}}<$$
$$<\sum_{B(i)}\left(\psi\left(\frac{i}{3^{k+l}}\right)-\psi\left(\frac{i-1}{3^{k+l}}\right)\right)-\sum_{B(i)}\frac{1}{3^{2p+9}}\cdot\frac{1}{3^{k+l}}+$$
$$+\sum_{A(i)}\frac{1}{3^{2p+9}}\cdot\frac{1}{3^{k+l}}-\sum_{A(i)}\left(\psi\left(\frac{i}{3^{k+l}}\right)-\psi\left(\frac{i-1}{3^{k+l}}\right)\right)$$

и, следовательно,

$$0 \leq 2\cdot\sum_{A(i)}\left(\psi\left(\frac{i}{3^{k+l}}\right)-\psi\left(\frac{i-1}{3^{k+l}}\right)\right)+2\cdot\frac{1}{3^{2p+9}}\cdot$$
$$\cdot\sum_{B(i)}\frac{1}{3^{k+l}}<\frac{1}{3^{3p+13+k}}$$

и

$$\sum_{A(i)}\frac{1}{3^{k+l}}=\frac{1}{3^k}-\sum_{B(i)}\frac{1}{3^{k+l}}>\frac{1}{3^k}\left(1-\frac{1}{3^{p+4}}\right) .$$

Как мы знаем, верно двойное отрицание (11). Согласно принципу А. Маркова и {18} из [2] существуют возрастающие системы НЧ $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ и $\mathcal{C}_3$ такие, что

$$\forall i(i\in \mathcal{C}_0 \supset A(i))\ \&\ \sum_{i\in\mathcal{C}_0}\frac{1}{3^{k+l}} > \frac{1}{3^k}\cdot\left(1-\frac{1}{3^{p+4}}\right)\ \&$$

$$\&\ \forall ij\,(1\le j\le 3\supset$$

$$\supset (i\in\mathcal{C}_j \equiv (i_1 < i < i_2\ \&\ i\in\mathcal{C}_0\ \&\ \exists m(i+j=3m)))).$$

Пусть λ число элементов $\mathcal{C}_0$ и для НЧ j, $1\le j\le 3$, λ_j - число элементов $\mathcal{C}_j$, а τ_j число тех НЧ i из $\mathcal{C}_j$, для которых верно $i-1\in\mathcal{C}_0\ \&\ i+1\in\mathcal{C}_0$. Тогда мы имеем $3^l\cdot\left(1-\frac{1}{3^{p+4}}\right) < \lambda \le \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2$,

$\forall j(1\le j\le 3\supset \lambda_j-\tau_j\le 3^l-\lambda)$ и, следовательно,

$\tau_1+\tau_2+\tau_3 > 3^l\cdot\left(1-\frac{1}{3^{p+2}}\right)$. Итак, существует требуемая система $\mathcal{C}$.

<u>Лемма 4</u>. Пусть ψ неубывающая функция, k, l, p и s НЧ, а $\mathcal{C}$ возрастающая система НЧ такие, что $p+4<l\ \&\ 1<s<3^k$, $\forall m\left(s-1\le m\le s+1\supset \psi\left(\frac{m}{3^k}\right)-\psi\left(\frac{m-1}{3^k}\right)<\frac{1}{3^{2p+6}}\cdot\frac{1}{3^k}\right)$ и (10). Тогда существуют дизъюнктные возрастающие системы НЧ $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ такие, что

$$\forall i\,((i\in\mathcal{E}_1\supset i\in\mathcal{C})\ \&\ ((s-1)\cdot 3^l+1\le i\le s\cdot 3^l \equiv$$

$$\equiv (i\in\mathcal{E}_1 \vee i\in\mathcal{E}_2)))\ \&\ \sum_{i\in\mathcal{E}_2}\left|\frac{i-1}{3^{k+l}}\,\Delta\,\frac{i}{3^{k+l}}\right| = \frac{1}{3^{p+1}}\cdot\frac{1}{3^k}\ \&$$

$$\&\ \forall i\,x\,y\left(i\in\mathcal{E}_1\ \&\ \frac{s-2}{3^k}\le x\le\frac{i-1}{3^{k+l}}<\frac{i}{3^{k+l}}\le y\le\right.$$

$$\left.\le\frac{s+1}{3^k}\supset 0\le\psi(y)-\psi(x)<\frac{1}{3^p}\cdot(y-x)\right).$$

Доказательство. Для всяких НЧ i и j, $0 \le j \le 3$, и ЦЧ q и t мы обозначим

$$u_j \rightleftharpoons (s-2+j) \cdot 3^{l} ,$$

$$(u_0 < i \le u_3 \supset \xi_i \rightleftharpoons 3^{k+l} \cdot (\psi(\frac{i}{3^{k+l}}) - \psi(\frac{i-1}{3^{k+l}}))) ,$$

$$Z(i, q, t) \rightleftharpoons i \in \mathscr{C} \,\&\, u_0 < q \le i \le t \le u_3 ,$$

$$(Z(i, q, t) \supset \eta_{i,q,t} \rightleftharpoons \frac{1}{t-q+1} \cdot \sum_{m=q}^{t} \xi_m) \text{ и}$$

$$(i \in \mathscr{C} \supset \xi_i \rightleftharpoons \max_{Z(i,q,t)} \eta_{i,q,t}) .$$

Систему $\mathscr{C}$ можно согласно теореме 1.3 из [3] разделить в две группы $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ такие, что

$$\forall i ((i \in \mathscr{B}_1 \supset \xi_i < \frac{1}{3^{p+1}}) \,\&\, (i \in \mathscr{B}_2 \supset \frac{1}{3^{p+2}} < \xi_i)) .$$

Пусть λ_j число элементов $\mathscr{B}_j$ $(1 \le j \le 2)$. Ввиду (10) выполнено $\lambda_1 + \lambda_2 = 3^{l} \cdot (1 - \frac{1}{3^{p+2}})$.

Заметим, что $\forall i\, q\, t\, x\, y\, (Z(i, q, t) \,\&\, \frac{q-1}{3^{k+l}} \le x \le$

$$\le \frac{q}{3^{k+l}} < \frac{i}{3^{k+l}} \le \frac{t-1}{3^{k+l}} \le y \le \frac{t}{3^{k+l}} \supset 0 \le \frac{\psi(y) - \psi(x)}{y-x} \le$$

$$\le \eta_{i,q,t} \cdot \frac{y - x + \frac{2}{3^{k+l}}}{y-x} \le 3 \cdot \eta_{i,q,t} \le 3 \cdot \xi_i)$$

и, следовательно,

$$\forall i\, x\, y\, (i \in \mathscr{C} \,\&\, \frac{s-2}{3^{k}} \le x \le \frac{i-1}{3^{k+l}} < \frac{i}{3^{k+l}} \le y \le$$

$$\le \frac{s+1}{3^{k}} \supset 0 \le \frac{\psi(y) - \psi(x)}{y-x} \le 3 \cdot \xi_i) .$$

Таким образом, для завершения доказательства достаточно показать, что $\lambda_2 \le 3^{l} \cdot \frac{1}{3^{p+2}}$.

Допустим, что $\mathscr{B}_2$ непустая система. Тогда можно построить систему троек НЧ $\{ i_j \,\square\, q_j \,\square\, t_j \}_{j=1}^{r}$ такую, что $\{ t_j - q_j + 1 \}_{j=1}^{r}$ – невозрастающая система НЧ,

$$\forall j (1 \le j \le r \supset Z(i_j, q_j, t_j) \;\&$$

$$\& \; \frac{1}{3^{p+2}} < \eta_{i_j, q_j, t_j} \;\&\; (j < r \supset$$

$$\supset \forall m (1 \le m \le j \supset \neg (q_m - (t_m - q_m + 1) \le$$

$$\le i_{j+1} \le t_m + (t_m - q_m + 1))))) \;\&$$

$$\& \; \forall i (i \in \mathscr{C} \;\&\; \forall j (1 \le j \le r \supset \neg (q_j - (t_j - q_j + 1) \le$$

$$\le i \le t_j + (t_j - q_j + 1))) \supset i \in \mathcal{B}_1) .$$

Тогда $\{ \frac{q_j - 1}{3^{k+\ell}} \,\Delta\, \frac{t_j}{3^{k+\ell}} \}_{j=1}^{r}$ система дизъюнктных сегментов, выполнено

$$\sum_{m=1}^{r} \frac{t_m - q_m + 1}{3^{p+2}} < \sum_{m=1}^{r} \sum_{j=q_m}^{t_m} \xi_j \le \sum_{j=u_1+1}^{u_2} \xi_j =$$

$$= 3^{k+\ell} \cdot (\psi(\frac{s+1}{3^k}) - \psi(\frac{s-2}{3^k})) < 3^{\ell} \cdot \frac{3}{3^{2p+6}}$$

и, следовательно, $\lambda_2 \le 3 \cdot \sum_{m=1}^{r} (t_m - q_m + 1) < 3^{\ell} \cdot \frac{1}{3^{p+2}}$.

<u>Доказательство теоремы 1</u>. I) Если φ сингулярная функция, то по лемме 2 выполнено $\alpha(\varphi)$ и (9).

II) Пусть верно $\alpha(\varphi)$ и (9). Тогда, как показано в доказательстве леммы 2, выполнено (7). Согласно лемме 1 $\alpha(V^+\langle \varphi, 0 \rangle) \;\&\; \alpha(V^-\langle \varphi, 0 \rangle)$. Если x КДЧ, то мы на основании (7) и леммы 1 получаем

$$V \langle V^+ \langle \varphi, 0 \rangle, x \rangle = V^+ \langle V^+ \langle \varphi, 0 \rangle, x \rangle +$$

$+ V^-\langle V^+\langle\varphi, 0\rangle, x\rangle = V^+\langle\varphi, x+\rangle + h_{x-} +$

$+ V^-\langle\varphi, x+\rangle - V^-\langle\varphi, 0\rangle = V\langle\varphi, x^+\rangle + h_{x-} -$

$- V^-\langle\varphi, 0\rangle = V\langle\varphi, 0\rangle + h_{x+} + h_{x-} - V\langle\varphi, 0\rangle =$

$= V^+\langle\varphi, 0\rangle + h_{|x|}$

и, аналогично, $V\langle V^-\langle\varphi, 0\rangle, x\rangle = V^-\langle\varphi, 0\rangle + h_{|x|}$.

Ввиду замечания 4 для завершения доказательства достаточно показать, что если ψ неубывающая функция, для которой верно $\alpha(\psi) \& \forall x (V\langle\psi, x\rangle = V\langle\psi, 0\rangle + h_{|x|})$, то ψ является сингулярной.

Пусть t НЧ. Мы построим S-множество $\mathcal{G}$ и НЧ m такие, что $C(\psi, t, \mathcal{G}, m)$.

1) Определим $k_1 \rightleftharpoons 0$, $p_1 \rightleftharpoons t+1$ и $s_1 \rightleftharpoons 1$. Тогда согласно лемме 3 существуют НЧ l_1, $p_1 + 4 < l_1$, и возрастающая система НЧ a_1 такие, что

$$\forall i (i \in a_1 \supset 1 < i < 3^{l_1} \& \forall j (i-1 \le j \le i+1 \supset$$

$$\supset \psi\left(\frac{j}{3^{l_1}}\right) - \psi\left(\frac{j-1}{3^{l_1}}\right) < \frac{1}{3^{2t+10}} \cdot \frac{1}{3^{l_1}})) \&$$

$$\& \sum_{i \in a_1} \left| \frac{i-1}{3^{l_1}} \Delta \frac{i}{3^{l_1}} \right| \ge 1 - \frac{1}{3^{t+2}} .$$

В $\mathcal{G}$ мы на первом шаге включим все сегменты

$$\frac{i-1}{3^{l_1}} \Delta \frac{i}{3^{l_1}}, \quad 1 \le i \le 3^{l_1} \& \neg (i \in a_1) ,$$

и определим $k_2 \rightleftharpoons k_1 + l_1$.

2) Пусть m НЧ, $1 < m$, пусть уже построены НЧ k_m и возрастающая система НЧ a_{m-1} такие, что сегменты системы $\{\frac{s-1}{3^{k_m}} \Delta \frac{s}{3^{k_m}}\}_{s \in a_{m-1}}$ не перекрываются

с сегментами пока включенными в $\mathcal{J}$ и вместе с ними покрывают $0 \Delta 1$ и выполнено

$$\forall i \, (i \in a_{m-1} \supset 1 < i < 3^{k_m} \;\&$$

$$\& \; \forall j \, (i-1 \leq j \leq i+1 \supset \psi(\frac{j}{3^{k_m}}) - \psi(\frac{j-1}{3^{k_m}}) <$$

$$< \frac{1}{3^{2t+2m+6}} \cdot \frac{1}{3^{k_m}})) \& \sum_{i \in a_{m-1}} \left| \frac{i-1}{3^{k_m}} \Delta \frac{i}{3^{k_m}} \right| \geq 1 - \frac{3^{m-1}-1}{2 \cdot 3^{t+m}} .$$

Мы определим $p_m \rightleftharpoons t + m$ и для всякого НЧ s, $s \in a_{m-1}$, к ψ, k_m, p_m и s применим леммы 3 и 4. Мы получим НЧ l_m, $t + m + 4 < l_m$, и для всякого $s \in a_{m-1}$ дизъюнктные возрастающие системы НЧ $\mathcal{C}_{m,s,1}$ и $\mathcal{C}_{m,s,2}$ такие, что

$$\forall i \, (i \in \mathcal{C}_{m,s,1} \supset (s-1) \cdot 3^{l_m} + 1 < i < s \cdot 3^{l_m} \;\&$$

$$\& \; \forall j \, (i-1 \leq j \leq i+1 \supset \psi(\frac{j}{3^{k_{m+1}}}) - \psi(\frac{j-1}{3^{k_{m+1}}}) <$$

$$< \frac{1}{3^{2t+2m+8}} \cdot \frac{1}{3^{k_{m+1}}}) \; \& \; \forall x y \, (\frac{s-2}{3^{k_m}} \leq x \leq \frac{i-1}{3^{k_{m+1}}} <$$

$$< \frac{i}{3^{k_{m+1}}} \leq y \leq \frac{s+1}{3^{k_m}} \supset 0 \leq \psi(y) - \psi(x) <$$

$$< \frac{1}{3^{t+m}} \cdot (y-x))) \; \& \; \forall i \, ((s-1) \cdot 3^{l_m} + 1 \leq i \leq s \cdot 3^{l_m} \equiv$$

$$\equiv (i \in \mathcal{C}_{m,s,1} \vee i \in \mathcal{C}_{m,s,2})) \;\&$$

$$\& \sum_{i \in \mathcal{C}_{m,s,2}} \left| \frac{i-1}{3^{k_{m+1}}} \Delta \frac{i}{3^{k_{m+1}}} \right| = \frac{1}{3^{t+m+1}} \cdot \frac{1}{3^{k_m}} ,$$

где $k_{m+1} \rightleftharpoons k_m + l_m$.

В $\mathcal{J}$ мы на этом шаге включим все сегменты

$\frac{i-1}{3^{k_{m+1}}} \Delta \frac{i}{3^{k_{m+1}}}$, где $\exists s \, (s \in a_{m-1} \;\&\; i \in \mathcal{C}_{m,s,2})$

Сумма длин этих сегментов не больше чем $\frac{1}{3^{t+m+1}}$ и, следовательно, если мы посредством a_m обозначим возрастающую систему НЧ, которая является объединением систем $\mathcal{E}_{m,s,1}$, $s \in a_{m-1}$, то

$$\sum_{i \in a_m} \left| \frac{i-1}{3^{k_{m+1}}} \Delta \frac{i}{3^{k_{m+1}}} \right| \geq 1 - \frac{3^{m-1}-1}{2.3^{t+m}} - \frac{1}{3^{t+m+1}} = 1 - \frac{3^m - 1}{2.3^{t+m+1}} .$$

Заметим, что сегменты пока включенные в $\mathcal{S}$ не перекрываются с сегментами системы $\{\frac{i-1}{3^{k_{m+1}}} \Delta \frac{i}{3^{k_{m+1}}}\}_{i \in a_m}$ и вместе с ними покрывают $0 \Delta 1$.

Итак, $\mathcal{S}$ S -множество меры меньшей чем $\frac{1}{3^t}$.

Пусть x КДЧ, $x \in 0 \Delta 1$ & $\neg (x \in \mathcal{S})$. Тогда существует последовательность НЧ $\{i_m\}_m$ такая, что

$$\forall m \left(\frac{i_m - 1}{3^{k_{m+1}}} < x < \frac{i_m}{3^{k_{m+1}}} \ \& \ i_m \in a_m \right) .$$

Пусть x и y КДЧ, $x < x < y$ & $|y - x| < \frac{1}{3^{k_2}}$. Если существует НЧ m такое, что $\frac{1}{3^{k_{m+1}}} \leq y - x < \frac{1}{3^{k_m}}$, то $2 \leq m$ & $i_m \in a_m$ и, следовательно,

$$0 \leq \psi(y) - \psi(x) \leq \psi\left(\max\left(\frac{i_m}{3^{k_{m+1}}}, y\right)\right) -$$

$$- \psi\left(\min\left(x, \frac{i_m - 1}{3^{k_{m+1}}}\right)\right) < \frac{1}{3^{t+m}} \cdot \left(y - x + \frac{1}{3^{k_{m+1}}}\right) \leq$$

$$\leq \frac{2}{3^{t+m}} \cdot (y - x) \leq \frac{2}{3^{t+2}} \cdot (y - x) .$$

Ввиду

$\neg\neg \exists m \left(\frac{1}{3^{k_{m+1}}} \leq y - x < \frac{1}{3^{k_m}} \right) \& \forall v w (v \leq w \equiv \neg\neg (v \leq w))$

верно $0 \leq \psi(y) - \psi(x) \leq \frac{1}{3^{t+1}} \cdot (y - x)$.

Согласно теореме Г. Цейтина [2] ψ непрерывна и мы получаем

$$\forall x y\,(x \le z \le y \;\&\; |y - x| < \frac{1}{3^{k_2}} \supset$$

$$\supset 0 \le \psi(y) - \psi(x) \le \frac{1}{3^{t+1}} \cdot (y - x))\,.$$

Таким образом, выполнено $C(\psi, t, \mathcal{Y}, 3^{k_2})$.

Теорема 2. Функция ψ представима в виде $\varphi + g$, где φ сингулярная функция, а g абсолютно непрерывная функция, тогда и только тогда, когда верно $\alpha(\psi)$ и сходятся последовательности КДЧ $\{V^+\langle\psi, m\rangle(0\triangle 1)\}_m$ и $\{V^-\langle\psi, -m\rangle(0\triangle 1)\}_m$.

Доказательство. I) Пусть $\psi = \varphi + g$, где φ и g обладают описанными свойствами. Тогда согласно [8], лемме 2 и замечанию 3 выполнено $\alpha(g) \;\&\; \alpha(\psi)$ и для всякого КДЧ v верно

$$V^+\langle\psi, v\rangle(0\triangle 1) + V^-\langle\psi, v\rangle(0\triangle 1) = V\langle\psi, v\rangle(0\triangle 1) =$$

$$= V\langle\varphi + g - h_v, 0\rangle(0\triangle 1) = V\langle\varphi, 0\rangle(0\triangle 1) +$$

$$+ V\langle g, v\rangle(0\triangle 1) = V^+\langle\varphi, 0\rangle(0\triangle 1) + V^-\langle\varphi, 0\rangle(0\triangle 1) +$$

$$+ V^+\langle g, v\rangle(0\triangle 1) + V^-\langle g, v\rangle(0\triangle 1) \quad \text{и}$$

$$V^+\langle\psi, v\rangle(0\triangle 1) - V^-\langle\psi, v\rangle(0\triangle 1) = \psi(1) - \psi(0) - v =$$

$$= \varphi(1) - \varphi(0) + (g(1) - g(0) - v) =$$

$$= V^+\langle\varphi, 0\rangle(0\triangle 1) - V^-\langle\varphi, 0\rangle(0\triangle 1) +$$

$$+ V^+\langle g, v\rangle(0\triangle 1) - V^-\langle g, v\rangle(0\triangle 1)\,.$$

Но тогда

$$V^+\langle\psi, v\rangle(0\triangle 1) = V^+\langle\varphi, 0\rangle(0\triangle 1) + V^+\langle g, v\rangle(0\triangle 1)$$
$$\text{и } V^-\langle\psi, v\rangle(0\triangle 1) = V^-\langle\varphi, 0\rangle(0\triangle 1) + V^-\langle g, v\rangle(0\triangle 1)\,.$$

Отсюда мы на основании части 4) леммы 1 получаем

$V^+\langle\psi,m\rangle(0\Delta 1) \xrightarrow[m\to\infty]{} V^+\langle\varphi,0\rangle(0\Delta 1)$ и

$V^-\langle\psi,-m\rangle(0\Delta 1) \xrightarrow[m\to\infty]{} V^-\langle\varphi,0\rangle(0\Delta 1)$.

II) Пусть ψ функция такая, что $\alpha(\psi)$ и сходятся последовательности КДЧ $\{V^+\langle\psi,m\rangle(0\Delta 1)\}_m$ и $\{V^-\langle\psi,-m\rangle(0\Delta 1)\}_m$. Тогда согласно части 5 леммы 1 и теореме 1 существуют сингулярные функции $\psi_{\{+\}}$ и $\psi_{\{-\}}$ такие, что $\alpha(\psi_{\{+\}}-\psi_{\{-\}})$ и функция $\psi-\psi_{\{+\}}+\psi_{\{-\}}$ является абсолютно непрерывной на $0\Delta 1$. На основании замечания 4 знаем, что $\psi_{\{+\}}-\psi_{\{-\}}$ - сингулярная функция.

<u>Следствие</u>. Пусть ψ функция, для которой верно $\alpha(\psi)$ и сходятся последовательности КДЧ

$\{V^+\langle\psi,m\rangle(0\Delta 1)\}_m$ и $\{V^-\langle\psi,-m\rangle(0\Delta 1)\}_m$. Тогда существует $\{G_m\}_m \in L_1$ такое, что для почти всех КДЧ x из $0\Delta 1$ выполнено $\exists z(P(z,\{G_m\}_m,x)\ \&$ $\&\ D(z,\psi,x))$.

<u>Доказательство</u>. Достаточно использовать теорему 2, лемму 2 и теорему 2 из [5].

<u>Обозначение</u>. Для любых функции ψ, КДЧ y и НЧ m - $\beta\langle y,m\rangle$ функция такая, что $\forall x(\beta\langle y,m\rangle(x)=min(max(y-\frac{1}{m},0,x),1,y+\frac{1}{m}))$, а $\psi * \beta\langle y,m\rangle$ - суперпозиция функций ψ и $\beta\langle y,m\rangle$.

<u>Лемма 5</u>. Пусть ψ функция такая, что $(\alpha(\psi)\vee\forall y(0\le y\le 1\supset\neg\neg\exists m\ \alpha(\psi*\beta\langle y,m\rangle)))$.

Тогда ψ представима в виде суммы сингулярной и абсолютно непрерывной функции в том и только том случае, если ψ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$.

<u>Доказательство</u>. Заметим, что $(\mathfrak{a}(\psi) \supset$

$$\supset \forall y m (0 \leq y \leq 1 \supset \mathfrak{a}(\psi * \beta \langle y, m \rangle))) \,\&\, (\alpha(\psi) \supset$$

$$\supset \forall y m (0 \leq y \leq 1 \supset \alpha(\psi * \beta \langle y, m \rangle))) .$$

Пусть $\psi = \varphi + g$, где φ сингулярная функция, а функция g абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$. Тогда по теореме 2 из [5] и лемме 2 для всяких КДЧ y, $0 \leq y \leq 1$, и НЧ m для почти всех КДЧ x из сегмента $max(y - \frac{1}{m}, 0) \Delta min(y + \frac{1}{m}, 1)$ верно $\exists z (D(z, g, x) \,\&\, D(z, \psi, x))$. Следовательно, согласно теореме 2, [5] и теореме из [8]

$$(12) \quad \forall y (0 \leq y \leq 1 \supset \neg\neg \exists m \forall x (|x - y| \leq \frac{1}{m} \supset$$
$$\supset g(x) - g(y) = \psi(x) - \psi(y))) .$$

Мы докажем $\psi = g + \psi(0) - g(0)$.

Допустим, что для КДЧ z, $0 < z \leq 1$, выполнено $\neg (g(z) - g(0) = \psi(z) - \psi(0))$. Тогда можно построить последовательность сегментов $\{u_n \Delta v_n\}_n$ и КДЧ y такие, что

$$\forall n (0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq y \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 1 \,\&\, \neg (g(v_n) - g(u_n) =$$
$$= \psi(v_n) - \psi(u_n)) \,\&\, |u_{n+1} \Delta v_{n+1}| = \frac{1}{2} \cdot |u_n \Delta v_n|).$$

Но это противоречит (12).

<u>Замечание 6</u>. 1) Каждая из неубывающих функций $\mathcal{F}$, построенных в примерах 1 - 3 из [7], удовлетворяет предположениям леммы 5, но не является абсолютно непрерывной

на $0 \Delta 1$ (см. [5]).

2) Если ψ функция, а Φ покрытие такие, что $\psi = \psi / \Phi$, то ψ удовлетворяет предположениям леммы 5.

<u>Пример</u>. Существует неубывающая функция ψ такая, что

1) для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно $D(0, \psi, x)$,

2) ψ не является сингулярной функцией, и

3) ψ нельзя представить в виде суммы сингулярной и абсолютно непрерывной функции.

<u>Доказательство</u>. Пусть f неубывающая функция, являющаяся конструктивным аналогом функции Θ из [1], стр. 232-3. Тогда $f(0) = 0 \,\&\, f(1) = 1$ и для всякого НЧ n существует система дизъюнктных рациональных сегментов, содержащихся в $0 \Delta 1$, $\mathcal{D}_n$ такая, что сумма длин сегментов из $\mathcal{D}_n$ равна $(\frac{2}{3})^n$, f является постоянной на всяком сегменте, который не перекрывается с сегментами из $\mathcal{D}_n$, и $0 \Delta \frac{1}{3^n} \in \mathcal{D}_n \,\&\, \frac{3^n - 1}{3^n} \Delta 1 \in \mathcal{D}_n$.

Пусть Φ покрытие, $\forall m \, (\sum_{i=1}^{m} |\Phi_i| < \frac{1}{2})$.

Легко построить неубывающую функцию ψ такую, что

$$\forall k x \, (x \in \Phi_k \supset \psi(x) = \text{Эл}(\Phi_k) + |\Phi_k| \cdot f(\frac{x - \text{Эл}(\Phi_k)}{|\Phi_k|}))\,.$$

Тогда выполнено

$$\forall x k \, ((x = \text{Эл}(\Phi_k) \vee x = \text{Эп}(\Phi_k)) \supset \psi(x) = x)\,.$$

Для всяких НЧ m и p мы посредством $\mathcal{E}_{m,p}$ обозначим систему сегментов

$(\text{Эл}(\Phi_p)+a\cdot|\Phi_p|)\Delta(\text{Эл}(\Phi_p)+b\cdot|\Phi_p|)$, где $a \Delta b \in \mathcal{D}_m$.

Для НЧ t пусть $\mathcal{Y}^t$ S -множество, образованное сегментами систем $\mathcal{E}_{t+k,k}$, $1 \leq k$. Тогда мера $\mathcal{Y}^t$ меньше чем $(\frac{2}{3})^t$ и выполнено $\forall x(x \in 0\Delta 1 \,\&\, \neg(x \in \mathcal{Y}^t) \supset D(0,\psi,x))$. Итак, мы доказали 1).

Допустим, что ψ сингулярная функция. Тогда для всякого НЧ t существуют S -множество $\mathcal{U}^t$ и НЧ m_t такие, что $C(\psi, t, \mathcal{U}^t, m_t)$. Можно построить НЧ k и систему дизъюнктных сегментов $\{e_{2i-1} \;\Delta\; e_{2i}\}_{i=1}^{\tau}$ такие, что сегменты объединения этой системы с системой $\{\Phi_j\}_{j=1}^{k+1}$ не перекрываются, содержатся в $0 \Delta 1$ и покрывают сегмент $0 \Delta 1$ и выполнено

$$\forall i\,(1 \leq i \leq \tau \supset |e_{2i-1} \,\Delta\, e_{2i}| < \frac{1}{m_3}).$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\tau} |e_{2i-1} \,\Delta\, e_{2i}| > \frac{1}{2} \,\&$$

$$\&\, \forall l\,(1 \leq l \leq 2\tau \supset \exists m\,(e_l = \text{Эл}(\Phi_m)))\,\&$$

$$\&\, \forall i\,(1 \leq i \leq \tau \supset |e_{2i-1} \,\Delta\, e_{2i}| = \psi(e_{2i}) - \psi(e_{2i-1})).$$

Пусть i НЧ, $1 \leq i \leq \tau$. Если $\nu(\mathcal{U}^3)(e_{2i-1} \Delta e_{2i}) < |e_{2i-1} \Delta e_{2i}|$, то мы ввиду $C(\psi, 3, \mathcal{U}^3, m_3)$ имеем $|e_{2i-1} \Delta e_{2i}| = \psi(e_{2i}) - \psi(e_{2i-1}) \leq \frac{1}{3}\cdot(e_{2i} - e_{2i-1})$, что невозможно.

Итак,

$$\forall i\,(1 \le i \le r \supset \nu\langle \mathcal{Y}^3\rangle(e_{2i-1} \Delta e_{2i}) = |e_{2i-1} \Delta e_{2i}|)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2} < \sum_{i=1}^{r} |e_{2i-1} \Delta e_{2i}| = \sum_{i=1}^{r} \nu\langle \mathcal{Y}^3\rangle(e_{2i-1} \Delta e_{2i}) \le$$
$$\le \nu\langle \mathcal{Y}^3\rangle(0 \Delta 1) < \frac{1}{3^3} \ .$$

Таким образом, верно 2).

На основании 1) и 2), леммы 2 и теоремы 6 из [5], сразу получаем 3).

Литература

[1] НАТАНСОН И.П.: Теория функций вещественной переменной, Москва, 1957.

[2] ЦЕЙТИН Г.С.: Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах, Проблемы конструктивного направления в математике 2 (сборник работ), Труды Мат.инст.им.В.А.Стеклова т. LXVII (1962), 295-361.

[3] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д.: Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, там же, стр. 385-457.

[4] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д. и ЦЕЙТИН Г.С.: О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, там же, стр. 458-502.

[5] ДЕМУТ О.: Пространства L_R и S в конструктивной математике, Comment.Math.Univ. Carolinae 10(1969), 261-284.

[6] ДЕМУТ О.: Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, Comment.Math.Univ. Carolinae 10(1969),463-492.

[7] ДЕМУТ О.: Об интегрируемости производных от конструктивных функций,Comment.Math.Univ. Carolinae 11(1970),667-690.

[8] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций, Comment.Math.Univ.Carolinae 11(1970),705-725.

(Oblatum 24.2. 1971)

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova universita
Sokolovská 83, Praha Karlín
Československo