Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

12,3 (1971)

О СУПЕРПОЗИЦИЯХ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

О. ДЕМУТ, Прага

Г.М. Фихтенгольц доказал в [1], что суперпозиция двух абсолютно непрерывных функций абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда она имеет ограниченную вариацию. В настоящей статье доказан конструктивный аналог этой теоремы и в примере построены абсолютно непрерывные конструктивные функции такие, что их суперпозиция не является абсолютно непрерывной, хотя она удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, является функцией слабо ограниченной вариации. Теорема 3 содержит усиление основного результата из [8].

В следующем мы пользуемся определениями и обозначениями из [6] - [8].

<u>Определения</u>. Пусть f и g функции, а p и q НЧ. Тогда

а) $f * g$ обозначает функцию такую, что $\forall x (f * g(x) = f(g(x)))$;

б) $\mathcal{a}(f, p, q)$ обозначает: для любой системы неперекрывающихся рациональных сегментов $\{a_i \triangle b_i\}_{i=1}^{k}$

AMS, Primary 02E99 Ref.Ž. 2.644.2
Secondary 26A72, 26A42

выполнено $(\forall i\,(1 \leq i \leq s \supset 0 \leq a_i < b_i \leq 1)\ \&$
$\&\ \sum_{i=1}^{s} |a_i \Delta b_i| < \frac{1}{q} \supset \sum_{i=1}^{s} |f(b_i) - f(a_i)| < \frac{1}{p})$;

в) $\mathcal{A}_{\text{кл}}(f) \rightleftharpoons \forall n \neg\neg \exists m\, \mathcal{A}(f, n, m)$;

г) $f_{<p>}$ обозначает функцию такую, что

$$\forall i x\,(1 \leq i \leq p\ \&\ \frac{i-1}{p} \leq x \leq \frac{i}{p} \supset f_{<p>}(x) =$$
$$= f(\frac{i-1}{p}) + p \cdot (f(\frac{i}{p}) - f(\frac{i-1}{p})) \cdot (x - \frac{i-1}{p}))\ ;$$

д) $\mathcal{B}(f, p, q)$ обозначает: для всякой B -системы РЧ $\{c_i\}_{i=0}^{r}$ выполнено $W(f - f_{<q>}, \{c_i\}_{i=0}^{r}) < \frac{1}{p}$.

<u>Замечание</u>. Пусть f функция.

1) Ясно, что $\mathcal{A}(f) \equiv \forall n \exists m\, \mathcal{A}(f, n, m)$ и, следовательно, $\mathcal{A}(f) \supset \mathcal{A}_{\text{кл}}(f)$.

2) Если $\alpha(f)$, то согласно лемме 1 из [8] и теореме 6.8 из [3] $\forall k \exists x\, Var(x, f - f_{<k>}, 0 \Delta 1)$ и, следовательно, мы при помощи принципа А. Маркова получаем

$$\forall n \neg\neg \exists m\, \mathcal{B}(f, n, m) \supset \forall n \exists m\, \mathcal{B}(f, n, m)\ .$$

3) Из $\forall n \exists m\, \mathcal{B}(f, n, m)$ непосредственно следует абсолютная непрерывность функции f .

<u>Теорема 1</u>. Пусть f и g абсолютно непрерывные на $0 \Delta 1$ функции такие, что $\forall x\,(0 \leq x \leq 1 \supset 0 \leq g(x) \leq 1)\ \&\ \exists k \forall x y\,(|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|)$.
Тогда функция $f * g$ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$.

Лемма 1. Пусть φ и g функции ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ а p НЧ, для которых выполнено

(1) $\forall x\,(0 \le x \le 1 \supset 0 \le g(x) \le 1)\ \&$

$\&\ \forall xy\,(|\varphi(x) - \varphi(y)| \le p \cdot |x - y|)$.

Тогда $\exists x\ Var\,(x, \varphi * g, 0 \Delta 1)$.

Доказательство. Согласно нашим предположениям и теореме 6.8 из [3] существуют КДЧ u и функция v такие, что

(2) $Var\,(u, g, 0 \Delta 1)\ \&\ \forall xy\,(0 \le x < y \le 1 \supset$

$\supset Var\,(v(y) - v(x), \varphi, x \Delta y))$.

1) Пусть m НЧ. По определению вариации существует B - система РЧ $\{a_i\}_{i=0}^{\varkappa}$, для которой выполнено

(3) $$u - \frac{1}{2mp} < \sum_{j=1}^{\varkappa} |g(a_j) - g(a_{j-1})| \le u .$$

Пусть j НЧ, $1 \le j \le \varkappa$. Мы определим

$\xi_j \rightleftharpoons min(g(a_{j-1}), g(a_j))$ и $\eta_j \rightleftharpoons max(g(a_{j-1}), g(a_j))$.

Согласно теореме 1.3 из [3] существует слово R_j такое, что $(R_j \,\text{Ɪ}\, \Lambda \supset v(\eta_j) - v(\xi_j) < \frac{1}{2m\varkappa})\ \&$

$\&\ (\neg(R_j \,\text{Ɪ}\, \Lambda) \supset \frac{1}{4m\varkappa} < v(\eta_j) - v(\xi_j))$.

Мы построим возрастающую систему РЧ $\{b_i^j\}_{i=0}^{s_j}$ такую, что $b_0^j = a_{j-1}\ \&\ b_{s_j}^j = a_j$, $\{g(b_i^j)\}_{i=0}^{s_j}$ не может не быть монотонной системой и

(4) $v(\eta_j) - v(\xi_j) - \frac{1}{2m\varkappa} < \sum_{i=1}^{s_j} |\varphi(g(b_i^j)) -$

$- \varphi(g(b_{i-1}^j))| \le v(\eta_j) - v(\xi_j)$,

и определим $\zeta_{m,j} \rightleftharpoons \sum_{i=1}^{s_j} |\varphi(g(b_i^j)) - \varphi(g(b_{i-1}^j))|$.

а) Если $R_j \,\text{Ɪ}\, \Lambda$, то достаточно определить $s_j \rightleftharpoons 1$, $b_0^j \rightleftharpoons a_{j-1}$ и $b_1^j \rightleftharpoons a_j$.

б) Пусть $\neg(R_j \equiv \Lambda)$. Тогда $v(\xi_j) < v(\eta_j)$ и, следовательно,

$$\xi_j < \eta_j \;\&\; (g(a_{j-1}) < g(a_j) \vee g(a_j) < g(a_{j-1})).$$

Мы построим возрастающую систему КДЧ $\{w_i^j\}_{i=0}^{s_j}$, для которой выполнено $w_0^j = \xi_j \;\&\; w_{s_j}^j = \eta_j$ и

$$v(\eta_j) - v(\xi_j) - \frac{1}{4m\varkappa} < \sum_{i=1}^{s_j} |\varphi(w_i^j) - \varphi(w_{i-1}^j)| \le v(\eta_j) - v(\xi_j).$$

Согласно теореме 3 и лемме на стр. 316 из [4] существует возрастающая система РЧ $\{b_i^j\}_{i=0}^{s_j}$ такая, что $b_0^j = a_{j-1} \;\&\; b_{s_j}^j = a_j$, $\{g(b_i^j)\}_{i=0}^{s_j}$ строго монотонная система КДЧ,

$$(g(a_{j-1}) < g(a_j) \supset \forall i\,(1 \le i < s_j \supset |\varphi(w_i^j) - \varphi(g(b_i^j))| < \frac{1}{8m\varkappa s_j}))\;\&$$
$$\&\;(g(a_j) < g(a_{j-1}) \supset \forall i\,(1 \le i < s_j \supset |\varphi(w_{s_j-i}^j) - \varphi(g(b_i^j))| < \frac{1}{8m\varkappa s_j}))$$

и, следовательно, выполнено (4).

Мы определим $\zeta_m \rightleftharpoons \sum_{j=1}^{\varkappa} \zeta_{m,j}$ и докажем, что для любой B-системы РЧ $\{c_l\}_{l=0}^{\lambda}$ выполнено

(5) $$\sum_{l=1}^{\lambda} |\varphi(g(c_l)) - \varphi(g(c_{l-1}))| < \zeta_m + \frac{1}{m}.$$

Ясно, что достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда

$$\forall k i\,(1 \le k \le \varkappa \;\&\; 0 \le i \le s_k \supset \exists j\,(0 \le j \le \lambda \;\&\; c_j = b_i^k)).$$

Тогда мы ввиду (2) и (3) получаем

$$(6)\qquad u - \frac{1}{2mp} < \sum_{j=1}^{\varkappa} |g(a_j) - g(a_{j-1})| \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^{\lambda} |g(c_l) - g(c_{l-1})| \leq u \;.$$

Допустим, что верно

$$(7)\qquad \forall i l \,(0 \leq i < l \leq \lambda \supset (g(c_i) =$$

$$= g(c_l) \vee g(c_i) < g(c_l) \vee g(c_l) < g(c_i))) \;.$$

Мы построим возрастающую систему целых чисел (ЦЧ) $\{l_j\}_{j=0}^{\varkappa}$ такую, что $\forall j \,(0 \leq j \leq \varkappa \supset a_j = c_{l_j})$.

Пусть j НЧ, $1 \leq j \leq \varkappa$. Ввиду (7) имеет место $g(a_{j-1}) \leq g(a_j) \vee g(a_j) \leq g(a_{j-1})$.

Пусть, например, $g(a_{j-1}) \leq g(a_j)$, т.е. $g(c_{l_{j-1}}) \leq$ $\leq g(c_{l_j})$. Тогда ясно, что система КДЧ $\{g(b_i^j)\}_{i=0}^{s_j}$ является неубывающей.

Мы построим возрастающую систему ЦЧ $\{u_{j,q}\}_{q=0}^{\sigma_j}$: определим $u_{j,0} \rightleftharpoons l_{j-1}$ а для НЧ q , если уже построено $u_{j,q-1}$ и выполнено $l_{j-1} \leq u_{j,q-1} < l_j \,\&$ $\& \, g(c_{u_{j,q-1}}) \leq g(c_{l_j}) = g(a_j)$, пусть

$$u_{j,q} \rightleftharpoons \mu l \,(u_{j,q-1} < l \leq l_j \,\&\, g(c_{u_{j,q-1}}) \leq g(c_l) \leq g(c_{l_j})).$$

Заметим, что

$$u_{j,\sigma_j} = l_j \,\&\, \forall q \,(1 \leq q \leq \sigma_j \supset g(c_{u_{j,q-1}}) \leq g(c_{u_{j,q}})) \;.$$

Далее мы построим систему пар целых чисел

$$(8)\qquad \{\varkappa_{j,t,1} \,\square\, \varkappa_{j,t,2}\}_{t=1}^{\rho_j} \;.$$

Если $\sigma_j = l_j - l_{j-1}$, то $\forall i \,(l_{j-1} \leq i \leq l_j \supset$ $\supset u_{j,i-l_{j-1}} = i \,\&\, (l_{j-1} < i \supset g(c_{i-1}) \leq g(c_i)))$

и мы определим $\varphi_j \rightleftharpoons 0$.

Если $\sigma_j < \ell_j - \ell_{j-1}$, то существует НЧ q такое, что

(9) $$1 \leq q \leq \sigma_j \;\&\; 1 < u_{j,q} - u_{j,q-1} \; .$$

Для всякого НЧ q, для которого (9), выполнено

$$\forall \ell \left(u_{j,q-1} < \ell < u_{j,q} \supset \left(g(c_\ell) < g(c_{u_{j,q-1}}) \vee \right.\right.$$
$$\left.\left. \vee\, g(c_{u_{j,q}}) < g(c_\ell) \right)\right) ,$$

мы определим

$$t_q \rightleftharpoons \mu i \left(u_{j,q-1} \leq i < u_{j,q} \;\&\; g(c_i) \leq g(c_{u_{j,q-1}}) \;\&\right.$$
$$\left. \&\; g(c_{u_{j,q}}) \leq g(c_{i+1}) \right)$$

и включим в (8) все пары ЦЧ $i \;\square\; (i+1)$, где $u_{j,q-1} \leq i < u_{j,q} \;\&\; \neg(i = t_q)$, и пары $t_q \;\square\; u_{j,q-1}$ и $u_{j,q} \;\square\; (t_q + 1)$.

Тогда $|g(a_j) - g(a_{j-1})| =$

$$= \sum_{q=1}^{\sigma_j} |g(c_{u_{j,q}}) - g(c_{u_{j,q-1}})| \,, \sum_{\ell=\ell_{j-1}+1}^{\ell_j} |g(c_\ell) - g(c_{\ell-1})| =$$
$$= |g(a_j) - g(a_{j-1})| + \sum_{t=1}^{\rho_j} |g(c_{\varkappa_{j,t,2}}) - g(c_{\varkappa_{j,t,1}})|$$

и ввиду (2), (4) и (1)

$$\sum_{q=1}^{\sigma_j} |\varphi(g(c_{u_{j,q}})) - \varphi(g(c_{u_{j,q-1}}))| \leq v(\eta_j) - v(\xi_j) <$$
$$< \sum_{i=1}^{\nu_j} |\varphi(g(b_i^j)) - \varphi(g(b_{i-1}^j))| + \frac{1}{2m\varkappa} = \xi_{m,j} + \frac{1}{2m\varkappa} \,,$$
$$\sum_{t=1}^{\rho_j} |\varphi(g(c_{\varkappa_{j,t,2}})) - \varphi(c_{\varkappa_{j,t,1}}))| \leq$$
$$\leq p \cdot \sum_{t=1}^{\rho_j} |g(c_{\varkappa_{j,t,2}}) - g(c_{\varkappa_{j,t,1}})|$$

и, следовательно,

$$\sum_{l=l_{j-1}+1}^{l_j} |\varphi(g(c_l)) - \varphi(g(c_{l-1}))| \le \sum_{q=1}^{\sigma_j} |\varphi(g(c_{u_{j,q}})) -$$

$$(10) \quad - \varphi(g(c_{u_{j,q-1}}))| + \sum_{t=1}^{\rho_j} |\varphi(g(c_{\varkappa_{j,t,2}})) - \varphi(g(c_{\varkappa_{j,t,1}}))| < \xi_{m,j} + \frac{1}{2m\varkappa} +$$

$$+ p \cdot \Big(\sum_{l=l_{j-1}+1}^{l_j} |g(c_l) - g(c_{l-1})| - |g(a_j) - g(a_{j-1})|\Big) .$$

Допустив (7), мы для всякого НЧ j, $1 \le j \le \varkappa$, вывели (10). Таким образом, ввиду (6) из (7) следует

$$\sum_{l=1}^{\lambda} |\varphi(g(c_l)) - \varphi(g(c_{l-1}))| < \sum_{j=1}^{\varkappa} \xi_{m,j} + \frac{1}{m} = \xi_m + \frac{1}{m} ,$$

т.е. (5).

Однако, как мы знаем, верно $\forall xy (x < y \equiv \neg\neg (x < y))$ и двойное отрицание (7). Следовательно, (5) доказано.

2) Для всякого НЧ m мы в 1) построили КДЧ ξ_m, являющееся значением определенной вариационной суммы функции $\varphi * g$ и такое, что для любой $\mathcal{B}$-системы РЧ $\{c_l\}_{l=0}^{\lambda}$ выполнено (5).

Мы получаем $\forall mk (\xi_{m+k} < \xi_m + \frac{1}{m}$ & $\xi_m < \xi_{m+k} + \frac{1}{m+k})$ и, следовательно, $\forall mk (|\xi_m - \xi_{m+k}| < \frac{1}{m})$. Пусть КДЧ x – предел фундаментальной последовательности КДЧ $\{\xi_m\}_m$. Тогда

$$(11) \qquad \forall m (|\xi_m - x| \le \frac{1}{m}) ,$$

для любых $\mathcal{B}$-системы РЧ $\{c_l\}_{l=0}^{\lambda}$ и НЧ m выполнено

$$\sum_{l=1}^{\lambda} |\varphi(g(c_l)) - \varphi(g(c_{l-1}))| < \xi_m + \frac{1}{m} \le x + \frac{2}{m}$$

и, следовательно, $\sum_{l=1}^{\lambda} |\varphi(g(c_l)) - \varphi(g(c_{l-1}))| \le x$.

Ввиду этого и (11) верно $\mathrm{Var}(x, \varphi * g, 0 \Delta 1)$.

<u>Доказательство теоремы 1</u>. Мы используем теорему из

[8]. Согласно этой теореме верно $\alpha(f) \,\&\, \alpha(g) \,\&\, \mathcal{A}(g)$.

Пусть t НЧ такое, что

(12) $$\forall xy\,(|f(x)-f(y)| \leq t.|x-y|).$$

Тогда $\forall m\ell\,(\mathcal{A}(g,t.m,\ell) \supset \mathcal{A}(f*g,m,\ell))$ и, следовательно, мы на основании $\mathcal{A}(g)$ получаем $\mathcal{A}(f*g)$.

Итак, для завершения доказательства достаточно вывести $\alpha(f*g)$ и применить теорему из [8].

Ввиду (12) и $\alpha(f) \,\&\, \alpha(g)$ для всяких РЧ a и b верно

$$\forall xy\,(|(a.f(x)-h_b(x))-(a.f(y)-h_b(y))| \leq$$

$$\leq (([|a|]+1).t+[|b|]+1).|x-y|)$$

и $\alpha(a.f) \,\&\, \alpha(g)$ и, следовательно, выполнены предположения леммы 1. Согласно этой лемме и теореме 6.8 из [3] существует функция $z_{a,b}$ такая, что
$\forall xy\,(0 \leq x < y \leq 1 \supset Var(z_{a,b}(y)-z_{a,b}(x), a.f*g-b.g, x\Delta y))$.

Мы определим $q \rightleftharpoons t.([|a|]+1)$.

Пусть a РЧ. Мы построим КДЧ w_a, для которого верно $Var(w_a, a.f*g-h_1, 0\Delta 1)$.

Пусть m НЧ, а ℓ_m НЧ такое, что

(13) $$8m < \ell_m \,\&\, \mathcal{A}(f*g, 8m.([|a|]+1), \ell_m).$$

Ввиду абсолютной непрерывности функции g существуют полигональная функция φ_m, НЧ $\varkappa$ и система РЧ $\{\beta_i\}_{i=1}^{\varkappa}$ такие, что

$$\forall i x\,(1 \leq i \leq \varkappa \;\&\; \frac{i-1}{\varkappa} \leq x \leq \frac{i}{\varkappa} \supset \varphi_m(x) = = \varphi_m(\frac{i-1}{\varkappa}) + \beta_i \cdot (x - \frac{i-1}{\varkappa}))$$

и для любой B-системы РЧ $\{c_i\}_{i=0}^{\tau}$ выполнено

$$W(g - \varphi_m, \{c_i\}_{i=0}^{\tau}) < \frac{1}{(2^{\gamma}+1)\cdot m^2 \cdot q \cdot \ell_m + 1} .$$

Функция $g - \varphi_m$ является абсолютно непрерывной и согласно [2] и теореме 6.8 из [3] существует неубывающая функция v, для которой верно

$$\forall x y\,(0 \leq x < y \leq 1 \supset Var(v(y) - v(x), g - \varphi_m, x \Delta y))$$

и, следовательно, $v(1) - v(0) < \dfrac{1}{(2^{\gamma}+1)\cdot m^2 \cdot q \cdot \ell_m}$ и

(14) $$\forall i\,(1 \leq i \leq \varkappa \supset Var(v(\frac{i}{\varkappa}) - v(\frac{i-1}{\varkappa}),\; g - h_{\beta_i}, \frac{i-1}{\varkappa} \Delta \frac{i}{\varkappa})) .$$

По теореме 1.3 из [3] существует возрастающая система НЧ $\{i_k\}_{k=1}^{\nu}$ такая, что

(15) $$\forall k\,(1 \leq k \leq \nu \supset 1 \leq i_k \leq \varkappa \;\&\; (v(\frac{i_k}{\varkappa}) - v(\frac{i_k-1}{\varkappa}) < \frac{1}{2^{\gamma}\cdot m^2 \cdot q \cdot \varkappa})) \;\&\; \forall i\,(\mathcal{C}(i) \supset \frac{1}{(2^{\gamma}+1)\cdot m^2 \cdot q \cdot \varkappa} < v(\frac{i}{\varkappa}) - v(\frac{i-1}{\varkappa})) ,$$

где $\forall i\,(\mathcal{C}(i) \rightleftharpoons (1 \leq i \leq \varkappa \;\&\; \neg \exists k\,(1 \leq k \leq \nu \;\&\; i = i_k)))$.

Ясно, что $(\varkappa - \nu)\cdot \dfrac{1}{(2^{\gamma}+1)\cdot m^2 \cdot q \cdot \varkappa} < v(1) - v(0) < \dfrac{1}{(2^{\gamma}+1)\cdot m^2 \cdot q \cdot \ell_m}$

и, следовательно, ввиду (13)

(16) $$\sum_{\mathcal{C}(i)} \left| \frac{i-1}{\varkappa} \Delta \frac{i}{\varkappa} \right| = \frac{\varkappa - \nu}{\varkappa} < \frac{1}{\ell_m} < \frac{1}{8m} .$$

Можно построить НЧ λ, $2 \leq \lambda$, для которого для всякого НЧ k, $1 \leq k \leq \nu \;\&\; \dfrac{1}{8mq} \leq |\beta_{i_k}|$, верно

$$x_{a,\frac{1}{\beta_{i_k}}}\left(\frac{i_k}{\varkappa}\right) - x_{a,\frac{1}{\beta_{i_k}}}\left(\frac{i_k-1}{\varkappa}\right) - \frac{1}{16m\varkappa} <$$

(17) $$< W\left(a.f*g - \frac{1}{\beta_{i_k}}.g, \left\{\frac{j}{\varkappa.\lambda}\right\}_{j=0}^{\varkappa.\lambda}, \frac{i_k-1}{\varkappa} \Delta \frac{i_k}{\varkappa}\right) \leq x_{a,\frac{1}{\beta_{i_k}}}\left(\frac{i_k}{\varkappa}\right) - x_{a,\frac{1}{\beta_{i_k}}}\left(\frac{i_k-1}{\varkappa}\right).$$

Мы определим $\xi_m \rightleftharpoons W(a.f*g-h_1, \{\frac{j}{\varkappa.\lambda}\}_{j=0}^{\varkappa.\lambda})$ и докажем, что для любой В -системы РЧ $\{c_j\}_{j=0}^{\tau}$ выполнено

(18) $$W(a.f*g-h_1, \{c_j\}_{j=0}^{\tau}) < \xi_m + \frac{1}{m}.$$

Ясно, что можно ограничиться рассмотрением случая, когда существует возрастающая система ЦЧ $\{j_i\}_{i=0}^{\varkappa.\lambda}$ такая, что

$$\forall i\,(0 \leq i \leq \varkappa.\lambda \supset 0 \leq j_i \leq \tau \,\&\, \frac{i}{\varkappa.\lambda} = c_{j_i}).$$

1) Ввиду (13) и (16) мы имеем

(19) $$\sum_{\tau(i)} W(a.f*g-h_1, \{c_j\}_{j=0}^{\tau}, \frac{i-1}{\varkappa} \Delta \frac{i}{\varkappa}) \leq \sum_{\tau(i)} W(a.f*g, \{c_j\}_{j=0}^{\tau}, \frac{i-1}{\varkappa} \Delta \frac{i}{\varkappa}) + \sum_{\tau(i)} \left|\frac{i-1}{\varkappa} \Delta \frac{i}{\varkappa}\right| < \frac{1}{4m}.$$

2) Пусть k НЧ, $1 \leq k \leq \nu$.

а) Если $|\beta_{i_k}| < \frac{1}{8mq}$, то ввиду (14) и (15) верно

$$x_{0,-1}\left(\frac{i_k}{\varkappa}\right) - x_{0,-1}\left(\frac{i_k-1}{\varkappa}\right) \leq v\left(\frac{i_k}{\varkappa}\right) - v\left(\frac{i_k-1}{\varkappa}\right) + |\beta_{i_k}|.\frac{1}{\varkappa} < \frac{1}{4mq\varkappa}$$

и, следовательно, мы ввиду $q = t.([|a|]+1)$ и (12) получаем

$$W(a.f*g,\{\frac{j}{\varkappa.\lambda}\}_{j=0}^{\varkappa.\lambda},\frac{i_k-1}{\varkappa}\,\Delta\,\frac{i_k}{\varkappa})\leq$$

$$\leq W(a.f*g,\{c_j\}_{j=0}^{\tau},\frac{i_k-1}{\varkappa}\,\Delta\,\frac{i_k}{\varkappa})\leq$$

$$\leq q.W(g,\{c_j\}_{j=0}^{\tau},\frac{i_k-1}{\varkappa}\,\Delta\,\frac{i_k}{\varkappa})\leq$$

$$\leq q.(x_{0,-1}(\frac{i_k}{\varkappa})-x_{0,-1}(\frac{i_k-1}{\varkappa}))<\frac{1}{4m\varkappa}\;.$$

Но тогда $W(a.f*g-h_1,\{c_j\}_{j=0}^{\tau},$

$$\frac{i_k-1}{\varkappa}\,\Delta\,\frac{i_k}{\varkappa})\leq\sum_{l=(i_k-1).\lambda+1}^{i_k.\lambda}\;\sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k}|\varkappa.\lambda.(a.f(g(\frac{l}{\varkappa.\lambda}))-$$

$$-a.f(g(\frac{l-1}{\varkappa.\lambda}))).(c_j-c_{j-1})-(c_j-c_{j-1})|+W(a.f*g\;,$$

$$\{\frac{j}{\varkappa.\lambda}\}_{j=0}^{\varkappa.\lambda},\frac{i_k-1}{\varkappa}\Delta\frac{i_k}{\varkappa})+W(a.f*g,\{c_j\}_{j=0}^{\tau},\frac{i_k-1}{\varkappa}\Delta\frac{i_k}{\varkappa})<$$

$$<W(a.f*g-h_1,\{\frac{j}{\varkappa.\lambda}\}_{j=0}^{\varkappa.\lambda},\frac{i_k-1}{\varkappa}\,\Delta\,\frac{i_k}{\varkappa})+\frac{1}{2m\varkappa}\;.$$

б) Пусть $\frac{1}{8mq}\leq|\beta_{i_k}|$. Тогда ввиду (14) и (15)

$$W(\frac{1}{\beta_{i_k}}.g-h_1,\{\frac{j}{\varkappa.\lambda}\}_{j=0}^{\varkappa.\lambda},\frac{i_k-1}{\varkappa}\,\Delta\,\frac{i_k}{\varkappa})\leq$$

$$\leq W(\frac{1}{\beta_{i_k}}.g-h_1,\{c_j\}_{j=0}^{\tau},\frac{i_k-1}{\varkappa}\,\Delta\,\frac{i_k}{\varkappa})\leq$$

$$\leq\frac{1}{|\beta_{i_k}|}.(v(\frac{i_k}{\varkappa})-v(\frac{i_k-1}{\varkappa}))<\frac{8mq}{2^7.m^2q\varkappa}=\frac{1}{16m\varkappa}$$

и, следовательно, ввиду (17)

$$W(a.f*g-h_1,\{c_j\}_{j=0}^{\tau},\frac{i_k-1}{\varkappa}\,\Delta\,\frac{i_k}{\varkappa})\leq$$

$$\leq W(a.f*g-\frac{1}{\beta_{i_k}}.g,\{c_j\}_{j=0}^{\tau},\frac{i_k-1}{\varkappa}\,\Delta\,\frac{i_k}{\varkappa})+$$

$$+W(\frac{1}{\beta_{i_k}}.g-h_1,\{c_j\}_{j=0}^{\tau},\frac{i_k-1}{\varkappa}\,\Delta\,\frac{i_k}{\varkappa})<$$

$$<W(a.f*g-\frac{1}{\beta_{i_k}}.g,\{\frac{j}{\varkappa.\lambda}\}_{j=0}^{\varkappa.\lambda},\frac{i_k-1}{\varkappa}\,\Delta\,\frac{i_k}{\varkappa})+$$

$$+\frac{1}{8m\varkappa} \le W(a.f*g-h_1,\{\frac{j}{\varkappa.\lambda}\}_{j=0}^{\varkappa.\lambda},\frac{i_k-1}{\varkappa}\vartriangle\frac{i_k}{\varkappa})+$$

$$+W(\frac{1}{\beta_{i_k}}.g-h_1,\{\frac{j}{\varkappa.\lambda}\}_{j=0}^{\varkappa.\lambda},\frac{i_k-1}{\varkappa}\vartriangle\frac{i_k}{\varkappa})+\frac{1}{8m\varkappa}<$$

$$<W(a.f*g-h_1,\{\frac{j}{\varkappa.\lambda}\}_{j=0}^{\varkappa.\lambda},\frac{i_k-1}{\varkappa}\vartriangle\frac{i_k}{\varkappa})+\frac{1}{4m\varkappa}.$$

Таким образом, мы получаем

$$W(a.f*g-h_1,\{c_j\}_{j=0}^{\tau})=\sum_{\ell(i)}W(a.f*g-h_1,$$

$$\{c_j\}_{j=0}^{\tau},\frac{i-1}{\varkappa}\vartriangle\frac{i}{\varkappa})+\sum_{k=1}^{\nu}W(a.f*g-h_1,$$

$$\{c_j\}_{j=0}^{\tau},\frac{i_k-1}{\varkappa}\vartriangle\frac{i_k}{\varkappa})<\frac{1}{4m}+\frac{\nu}{2m\varkappa}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\nu}W(a.f*g-h_1,\{\frac{j}{\varkappa.\lambda}\}_{j=0}^{\varkappa.\lambda},\frac{i_k-1}{\varkappa}\vartriangle\frac{i_k}{\varkappa})<\frac{1}{m}+$$

$$+W(a.f*g-h_1,\{\frac{j}{\varkappa.\lambda}\}_{j=0}^{\varkappa.\lambda})=\xi_m+\frac{1}{m}$$

и оценка (18) верна.

Аналогично рассуждениям части 2) доказательства леммы 1 можно вывести $\forall m k(|\xi_m-\xi_{m+k}|<\frac{1}{m})$ и показать, что для КДЧ w_a – предела последовательности КДЧ $\{\xi_m\}_m$ – выполнено $Var(w_a,a.f*g-h_1,0\vartriangle 1)$. Следовательно, верно

$$(\neg(a=0)\supset Var(\frac{1}{|a|}.w_a,f*g-h_{\frac{1}{a}},0\vartriangle 1)).$$

Ввиду только что доказанного и определения функции $z_{1,0}$ мы получаем

$$\forall b((b=0\supset Var(z_{1,0}(1)-z_{1,0}(0),f*g-h_b,0\vartriangle 1))\,\&$$

$$\&(\neg(b=0)\supset Var(|b|.w_{\frac{1}{b}},f*g-h_b,0\vartriangle 1))),$$

т.е. $\alpha(f*g)$.

<u>Теорема 2</u>. Пусть f и g абсолютно непрерывные на $0\vartriangle 1$ функции такие, что $\forall x(0\le x\le 1\supset 0\le g(x)\le 1)$.

Тогда функция $f * g$ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$ в том и только в том случае, если $f * g$ является функцией ограниченной вариации на $0 \Delta 1$.

Доказательство. I) Согласно [2] из абсолютной непрерывности $f * g$ на $0 \Delta 1$ следует
$\exists z \; Var(z, f * g, 0 \Delta 1)$.

II) а) Пусть $\{H_m^1\}_m \in L_1$, $\{H_m^2\}_m \in L_1$, а h^1 и h^2 функции такие, что

$$\forall i x y \,(1 \le i \le 2 \,\&\, 0 \le x < y \le 1 \supset h^i(y) - $$
(20) $$- h^i(x) = \int_x^y \{H_m^i\}_m \,\&\, h^1(y) - h^1(x) \le$$
$$\le h^2(y) - h^2(x))\;.$$

Тогда, как мы покажем, выполнено $\{H_m^1\}_m \le \{H_m^2\}_m$.

Согласно теореме 2 из [6] для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ существуют КДЧ z_1 и z_2 такие, что
$\forall i\,(1 \le i \le 2 \supset P(z_i, \{H_m^i\}_m, x) \,\&\, D(z_i, h^i, x))$
и, следовательно, ввиду (20) выполнено $z_1 \le z_2$.

б) Пусть $\{H_m\}_m \in L_1$, а h функция такая, что
$\forall x y\,(0 \le x < y \le 1 \supset h(y) - h(x) = \int_x^y \{H_m\}_m)$.
Тогда мы ввиду теоремы 1 из [6] и $\forall u v\,(0 \le u < v \le 1 \supset |h(v) - h(u)| = |\int_u^v \{H_m\}_m| \le \int_u^v |\{H_m\}_m|)$
сразу получаем
$\forall x y\,(0 \le x < y \le 1 \supset Var(\int_x^y |\{H_m\}_m|, h, x \Delta y))$.

в) Пусть $\{H_m^1\}_m \in L_1$, $\{H_m^2\}_m \in L_1$ такие, что $|\{H_m^1\}_m| \le |\{H_m^2\}_m|$, а h^1 и h^2 функции, для которых выполнено

$\forall ixy (1 \le i \le 2 \,\&\, 0 \le x < y \le 1 \supset h^i(y) - h^i(x) = \int_x^y \{H_m^i\}_m)$.

Тогда, как мы докажем, для всяких РЧ a и b, $0 \le a < b \le 1$, существует возрастающая система РЧ $\{c_i\}_{i=0}^{\tau}$ такая, что $a = c_0 < c_\tau = b$ и

$$|h^1(g(b)) - h^1(g(a))| < \sum_{j=1}^{\tau} |h^2(g(c_j)) - h^2(g(c_{j-1}))| + \frac{1}{m}.$$

Ясно, что $A_1 \vee A_2$, где

$A_1 \rightleftharpoons (|h^1(g(b)) - h^1(g(a))| < |h^2(g(b)) - h^2(g(a))| + \frac{1}{m})$

и $A_2 \rightleftharpoons (0 < |g(b) - g(a)|)$.

Если установлена верность A_1, мы определим $\tau \rightleftharpoons 1$, $c_0 \rightleftharpoons a$ и $c_1 \rightleftharpoons b$.

Если установелена верность A_2, мы положим

$\xi \rightleftharpoons min(g(a), g(b))$ и $\eta \rightleftharpoons max(g(a), g(b))$.

Тогда $0 \le \xi < \eta \le 1$ и мы получаем $|h^1(g(b)) - h^1(g(a))| = |h^1(\eta) - h^1(\xi)| = |\int_\xi^\eta \{H_m^1\}_m| \le \int_\xi^\eta |\{H_m^1\}_m| \le \int_\xi^\eta |\{H_m^2\}_m|$.

Ввиду $Var(\int_\xi^\eta |\{H_m^2\}_m|, h^2, \xi \vartriangle \eta)$ существует возрастающая система КДЧ $\{w_i\}_{i=0}^{\tau}$ такая, что $w_0 = \xi \,\&\, w_\tau = \eta$ и $|h^1(g(b)) - h^1(g(a))| - \frac{1}{2m} < \sum_{j=1}^{\tau} |h^2(w_j) - h^2(w_{j-1})|$.

Но тогда можно согласно теореме 3 и лемме на стр. 316 из [4] построить способом, описанным в доказательстве леммы 1 требуемую систему РЧ $\{c_j\}_{j=0}^{\tau}$.

г) Пусть v КДЧ такое, что $Var(v, f * g, 0 \vartriangle 1)$.

Согласно теореме 2 из [6] существует $\{F_m\}_m \in L_1$ такое, что

(21) $\forall xy\,(0 \le x < y \le 1 \supset f(y) - f(x) = \int_x^y \{F_m\}_m)$.

Для всякого НЧ p согласно лемме 1 и теоремам 1 и 2 из [6] выполнено $\{\lambda_0(F_m, p)\}_m \in L_1$ и существует абсолютно непрерывная функция f_p, для которой верно

(22) $f_p(0) = f(0)\ \&\ \forall xy\,(0 \le x < y \le 1 \supset f_p(y) - f_p(x) =$

$$= \int_x^y \{\lambda_0(F_m, p)\}_m)$$

и для почти всех КДЧ x из $0 \vartriangle 1$ существует КДЧ z такое, что $P(z, \{F_m\}_m, x)\ \&\ P(max(min(z, p), -p), \{\lambda_0(F_m, p)\}_m, x)\ \&\ D(max(min(z, p), -p), f_p, x)$.

Таким образом, для всяких НЧ p и q выполнено

(23) $|\{\lambda_0(F_m, p)\}_m| \le |\{\lambda_0(F_m, p+q)\}_m| \le |\{F_m\}_m|$,

(24)
$$|\{\lambda_0(F_m, p)\}_m - \{\lambda_0(F_m, p+q)\}_m| \le$$
$$\le |\{\lambda_0(F_m, p+q)\}_m|$$

и $|\{\lambda_0(F_m, p)\}_m| \le \{0 \triangledown 1 \circ p\}_m$ и мы по следствию теоремы 6 из [6] получаем

(25) $\forall xy\,(|f_p(x) - f_p(y)| \le p \cdot |x - y|)$.

Согласно лемме 1 из [6] мы для всяких НЧ m и p, $\sigma(F_m) \le p$, и КДЧ x, $0 \le x \le 1$, имеем $F_m \mp \lambda_0(F_m, \sigma(F_m)) \mp \lambda_0(F_m, p)$ и

$$|f(x) - f_p(x)| = |\int_0^x (\{F_m\}_m - \{\lambda_0(F_m, p)\}_m)| \le$$

$$\le \int_0^1 |\{F_m\}_m - \{\lambda_0(F_m, p)\}_m| =$$

$$= \|\{F_m\}_m - \{\lambda_0(F_m, p)\}_m\|_{L_1} \le \|\{F_m\}_m - F_m\|_{L_1} +$$
$$+ \|\{\lambda_0(F_m, p)\}_m - \lambda_0(F_m, p)\|_{L_1} < \frac{1}{2^{m-2}}.$$

Итак, выполнено

(26) $$f_p \xrightarrow[p\to\infty]{} f$$

и, следовательно,

(27) $$f_p * g \xrightarrow[p\to\infty]{} f * g \ .$$

По теореме 1 для всякого НЧ p ввиду (25) функция $f_p * g$ абсолютно непрерывна и, следовательно, согласно теоремам 1 и 2 из [6] и б) существуют $\{K_n^p\}_n \in L_1$ и функция v_p такие, что

(28) $$\forall xy\,(0 \le x < y \le 1 \supset f_p(g(y)) - f_p(g(x)) = \\ = \int_x^y \{K_n^p\}_n \ \& \ v_p(y) - v_p(x) = \int_x^y |\{K_n^p\}_n| \ \& \\ \& \ Var\,(v_p(y) - v_p(x),\ f_p * g,\ x \vartriangle y))\ .$$

Ввиду этого и в) мы для всяких НЧ p и q получаем на основании (23)

(29) $$0 \le v_p(1) - v_p(0) \le v_{p+q}(1) - v_{p+q}(0) \le v$$

и

(30) $$\forall xy\,(0 \le x < y \le 1 \supset v_p(y) - v_p(x) \le \\ \le v_{p+q}(y) - v_{p+q}(x))$$

и, следовательно, согласно а)

(31) $$|\{K_n^p\}_n| \le |\{K_n^{p+q}\}_n| \quad .$$

Пусть m НЧ. Тогда существует B -система $\{c_i\}_{i=0}^{r}$, для которой выполнено $v - \frac{1}{m} < \sum_{j=1}^{r} |f(g(c_j)) - f(g(c_{j-1}))| \le v$ и ввиду (26) можно построить НЧ p такое, что для любого НЧ q верно $v - \frac{1}{m} < \sum_{j=1}^{r} |f_p(g(c_j)) - f_p(g(c_{j-1}))| \le v_p(1) - v_p(0) \le v_{p+q}(1) - v_{p+q}(0) \le v$ (см. (28) и (29)).

Таким образом, мы получаем $(v_p(1) - v_p(0)) \xrightarrow[p\to\infty]{} v$, т.е. $\int_0^1 |\{K_m^p\}_m| \xrightarrow[p\to\infty]{} v$ и, следовательно,

(32) $\forall m \exists p \forall q (0 \le \int_0^1 |\{K_m^{p+q}\}_m| - \int_0^1 |\{K_m^p\}_m| < \frac{1}{m})$.

Пусть p и q НЧ, а $w_{p,q}$ функция такая, что

$$\forall xy (0 \le x < y \le 1 \supset w_{p,q}(y) - w_{p,q}(x) = $$
$$= \int_x^y |\{K_m^p\}_m - \{K_m^{p+q}\}_m|) \ .$$

Тогда согласно б) выполнено

$$\forall xy (0 \le x < y \le 1 \supset \mathrm{Var} (w_{p,q}(y) - w_{p,q}(x),$$
$$f_p * g - f_{p+q} * g, x \Delta y))$$

и мы ввиду в) и (24) получаем

$$\forall xy (0 \le x < y \le 1 \supset 0 \le w_{p,q}(y) - w_{p,q}(x) \le$$
$$\le v_{p+q}(y) - v_{p+q}(x))$$

и, следовательно, на основании а) верно $|\{K_m^p\}_m - \{K_m^{p+q}\}_m| \le$ $\le |\{K_m^{p+q}\}_m|$. Из этого и (31) ввиду верности формулы $\forall xy (|x-y| \le |y| \,\&\, |x| \le |y| \supset |x-y| = |y| - |x|)$ непосредственно следует

(33) $|\{K_m^p\}_m - \{K_m^{p+q}\}_m| = |\{K_m^{p+q}\}_m| - |\{K_m^p\}_m|$.

Согласно следствию теоремы 6 из [6] из (32) и того, что для всяких НЧ p и q выполнено (33), следует

$$\forall m \exists p \forall q (\int_0^1 |\{K_m^p\}_m - \{K_m^{p+q}\}_m| < \frac{1}{m}) \quad \text{и}$$

тогда по лемме 2 из [6] существует $\{K_m\}_m \in L_1$ такое, что $\int_0^1 |\{K_m^p\}_m - \{K_m\}_m| \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$.

Отсюда мы ввиду (27) и того, что для любого НЧ p верно (28) и

$$\forall xy\,(0 \le x < y \le 1 \supset |f_p(g(y)) - f_p(g(x)) - \int_x^y \{K_n\}_n| = |\int_x^y (\{K_n^p\}_n - \{K_n\}_n)| \le \int_x^y |\{K_n^p\}_n - \{K_n\}_n| \le \int_0^1 |\{K_n^p\}_n - \{K_n\}_n|)\ ,$$

приходим к $\forall xy\,(0 \le x < y \le 1 \supset f(g(y)) - f(g(x)) = \int_x^y \{K_n\}_n)$.

Но тогда согласно теореме 2 из [6] функция $f * g$ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$.

<u>Следствие</u>. Пусть f и g функции абсолютно непрерывные на $0 \Delta 1$, пусть $\forall x\,(0 \le x \le 1 \supset 0 \le g(x) \le 1$. Тогда

а) если g не может не быть неубывающей или невозрастающей на $0 \Delta 1$, то $f * g$ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$, и

б) если функция $f * g$ не может не быть неубывающей или невозрастающей на $0 \Delta 1$, то она абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$.

<u>Доказательство</u>. а) Пусть v функция такая, что $\forall xy\,(0 \le x < y \le 1 \supset Var(v(y) - v(x), f, x \Delta y))$. Тогда $Var(|v(g(0)) - v(g(1))|, f * g, 0 \Delta 1)$.

б) Выполнено $Var(|f(g(0)) - f(g(1))|, f * g, 0 \Delta 1)$.

<u>Пример</u>. Можно построить абсолютно непрерывные на $0 \Delta 1$ функции f и g такие, что

1) f возрастает на $0 \Delta 1$,

2) $\forall xy\,(0 \le x \le y \le 1 \supset 0 \le g(x) \le 1\ \&$
$\&\ |g(x) - g(y)| \le |x - y|)$,

3) $f * g$ не является абсолютно непрерывной на $0 \vartriangle 1$ и

4) $\forall x y\, (|f(g(x)) - f(g(y))| \le |x - y|)$.

<u>Доказательство</u>. Мы для всяких НЧ p и КДЧ x определим

$$f(x) \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3} \cdot \left(\left|x - \frac{1}{2^{2k}}\right| - \left|x - \frac{1}{2^{2k-2}}\right| + \frac{3}{2^{2k}}\right),$$

$$f_p(x) \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{p} \frac{2^{k-1}}{3} \cdot \left(\left|x - \frac{1}{2^{2k}}\right| - \left|x - \frac{1}{2^{2k-2}}\right| + \frac{3}{2^{2k}}\right) \text{ и}$$

$$\varphi_p(x) \rightleftharpoons \sum_{\ell=p}^{\infty} \frac{3}{2^{\ell+1}} \cdot \left(\left|x - \frac{1}{2^{\ell}}\right| - \left|x - \frac{1}{2^{\ell-1}}\right| + \frac{1}{2^{\ell}}\right).$$

Тогда, как можно доказать прямым подсчетом, выполнено 1) и для всяких НЧ p и m и КДЧ x, $p \le m$ & $\frac{1}{2^m} \le$ $\le x \le \frac{1}{2^{m-1}}$, верно $\varphi_p(x) = \frac{1}{2^{2m}} + \frac{3}{2^m} \cdot \left(x - \frac{1}{2^m}\right)$, $\frac{1}{2^{2m}} \le \varphi_p(x) \le \frac{1}{2^{2m-2}}$ и $f(\varphi_p(x)) = x$.

Для всякого НЧ p функция f_p полигональная, $f - f_p$ является неубывающей на $0 \vartriangle 1$, $f(1) - f_p(1) -$ $- (f(0) - f_p(0)) = \frac{1}{2^p}$ и, следовательно, $\mathrm{Var}\left(\frac{1}{2^p}, f - f_p, 0 \vartriangle 1\right)$. Таким образом, f абсолютно непрерывна на $0 \vartriangle 1$.

Существуют покрытие Φ и последовательность НЧ $\{p_n\}_n$ такие, что $\forall n \left(\sum_{i=1}^{n} |\Phi_i| < \frac{1}{2}\ \&\ |\Phi_n| = \frac{4}{2^{p_n}}\right)$. Тогда согласно [5], стр. 470–474, ряд $\sum_n |\Phi_n|$ не сходится, $|\Phi_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ и, следовательно, ряд $\sum_n |\Phi_n|^2$ сходится.

Мы для любых НЧ ℓ и КДЧ x определим

$$\psi_\ell(x) \rightleftharpoons \frac{1}{2} \cdot (|x - \text{Эл}(\Phi_\ell)| + |x - \text{Эп}(\Phi_\ell)| -$$
$$- |2x - \text{Эл}(\Phi_\ell) - \text{Эп}(\Phi_\ell)|),$$

$g(x) \rightleftharpoons \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{r_m}(\psi_m(x))$ и $g_\ell(x) \rightleftharpoons$
$\rightleftharpoons \sum_{m=1}^{\ell} (\varphi_{r_m}(\psi_m(x)) - \varphi_{r_m+\ell}(\psi_m(x)))$.

Тогда для всякого НЧ ℓ функция g_ℓ полигональная, выполнено

$$\forall m\,((\ell < m \supset Var(\frac{1}{2}\cdot|\Phi_m|^2,\ g - g_\ell,\ \Phi_m))\ \&$$
$$\&\ (m \leq \ell \supset Var(\frac{1}{2^{2\ell+1}}\cdot|\Phi_m|^2,\ g - g_\ell,\ \Phi_m)))$$

и, следовательно, легко убедиться в том, что

$$Var(\frac{1}{2^{2\ell+1}}\cdot\sum_{m=1}^{\ell}|\Phi_m|^2 + \frac{1}{2}\cdot\sum_{m=\ell+1}^{\infty}|\Phi_m|^2,\ g - g_\ell,\ 0 \vartriangle 1).$$

Итак, мы ввиду сходимости ряда $\sum_m |\Phi_m|^2$ доказали абсолютную непрерывность функции g . Непосредственной проверкой можно убедиться в верности 2).

На основании отмеченных свойств функций f и φ_n , $1 \leq n$, мы получаем $\forall x\,(f * g(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\psi_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot$
$\cdot(|x - \exists\ell(\Phi_m)| + |x - \exists r(\Phi_m)| - |2x - \exists\ell(\Phi_m) - \exists r(\Phi_m)|))$.

Но тогда верно 4) и существование вариации функции $f * g$ на сегменте $0 \vartriangle 1$ равносильно сходимости ряда $\sum_m |\Phi_m|$.

Мы уже знаем, что ряд $\sum_m |\Phi_m|$ не сходится и, следовательно, согласно теореме 2 выполнено 3).

<u>Лемма 2</u>. Пусть f функция, а n НЧ. Если существует полигональная функция $\mathcal{F}$ такая, что для любой В - системы РЧ $\{c_i\}_{i=0}^{\tau}$ выполнено $W(f - \mathcal{F},\ \{c_i\}_{i=0}^{\tau}) <$
$< \frac{1}{2n}$, то $\exists m\,\mathcal{B}(f, n, m)$.

<u>Доказательство</u>. Существует НЧ m такое, что $\mathcal{F}$ линейна на всяком сегменте $\frac{i-1}{m} \vartriangle \frac{i}{m}$ $(1 \leq i \leq m)$.

Пусть $\{c_j\}_{j=0}^{\tau}$ $\mathcal{B}$ -система РЧ такая, что $\forall i\,(0 \le i \le m \supset \exists j\,(0 \le j \le \tau \;\&\; c_j = \frac{i}{m}))$.

Тогда $W(f - f_{<m>}, \{c_j\}_{j=0}^{\tau}) \le W(f - \mathcal{F}, \{c_j\}_{j=0}^{\tau}) +$
$+ W(\mathcal{F} - f_{<m>}, \{c_j\}_{j=0}^{\tau}) < \frac{1}{2n} + W(\mathcal{F} - f_{<m>}, \{c_j\}_{j=0}^{\tau}) =$
$= \frac{1}{2n} + W(\mathcal{F} - f_{<m>}, \{\frac{i}{m}\}_{i=0}^{m}) = \frac{1}{2n} + W(\mathcal{F} - f,$
$\{\frac{i}{m}\}_{i=0}^{m}) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$.

На основании леммы 2 и замечания мы получаем следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть f функция такая, что $\alpha(f)$. Тогда f абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$ в том и только том случае, если $\forall n \neg\neg \exists m\, \mathcal{B}(f, n, m)$.

Теорема 3. Функция φ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{a}_{кл}(\varphi) \;\&\; \alpha(\varphi)$.

Доказательство. I) Из абсолютной непрерывности функции φ следует согласно теореме из [8] и замечанию $\mathcal{a}_{кл}(\varphi) \;\&\; \alpha(\varphi)$.

II) Пусть φ функция такая, что $\mathcal{a}_{кл}(\varphi) \;\&$ $\&\; \alpha(\varphi)$.

а) Пусть Φ покрытие. Тогда по лемм 1 из [8] верно $\alpha(\varphi/\Phi)$. Мы согласно части 2 доказательства этой леммы получаем

$$\forall n\,(\exists k\, \mathcal{a}(\varphi, 1, k) \;\&\; \exists \ell\, \mathcal{a}(\varphi, 4n, \ell) \supset \exists m\, \mathcal{a}(\varphi/\Phi, n, m))$$

и, таким образом, из $\mathcal{a}_{кл}(\varphi)$ следует $\mathcal{a}_{кл}(\varphi/\Phi)$.

В части III) доказательства леммы 3 из [8] доказано

$$\forall n\,(\exists \ell\, \mathcal{a}(\varphi/\Phi, 2n, \ell) \supset \exists m\,(V^{+}\langle \varphi/\Phi, m\rangle (0 \Delta 1) < \frac{1}{n})).$$

Ввиду этого мы на основании верности $a_{кл}(\varphi/\Phi)$ и принципа А. Маркова получаем

$\forall n \exists m (V^{+}\langle\varphi/\Phi, m\rangle(0\Delta 1) < \frac{1}{n})$. Аналогично верно $\forall n \exists m (V^{-}\langle\varphi/\Phi, -m\rangle(0\Delta 1) < \frac{1}{n})$.

Ввиду только что доказанного и $\alpha(\varphi/\Phi)$ мы согласно доказательству леммы 5 из [8] получаем, что функция φ/Φ абсолютно непрерывна на $0\Delta 1$.

б) В части 2 доказательства теоремы из [8] доказано, что для любого НЧ n из $\exists \ell\, a(\varphi, 3n, \ell)$ и того, что для произвольного покрытия Φ функция φ/Φ абсолютно непрерывна на $0\Delta 1$, следует осуществимость полигональной функции $\mathcal{F}$ такой, что для любой B-системы РЧ $\{d_j\}_{j=0}^{q}$ выполнено $W(\varphi-\mathcal{F}, \{d_j\}_{j=0}^{q}) < \frac{1}{n}$.

в) На основании $a_{кл}(\varphi)$ & $\alpha(\varphi)$ получаем по а), б) и лемме 2 $\forall n \neg\neg \exists m\, \mathcal{B}(\varphi, n, m)$. Но тогда согласно лемме 3 функция φ абсолютно непрерывна на $0\Delta 1$.

Пользуясь замечанием и леммой 2, мы сравним теорему 3 с теоремой из [8]. В следующем A - стандартное расширение алфавита $\{0, |, -, /, \diamond, \square\}$, а для любого нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ в A посредством $\{\mathfrak{A}\}$ обозначена запись $\mathfrak{A}$.

Согласно теореме из [8] существует нормальный алгорифм $\mathcal{H}_1$ в A такой, что для любых функции φ и алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в A, для которых верно

$\forall n \exists m ((\mathfrak{A}\llcorner n\lrcorner \simeq m)$ & $a(\varphi, n, m))$ &

& $\forall a \exists x ((\mathfrak{B}\llcorner a\lrcorner \simeq x)$ & $Var(x, \varphi - h_a, 0\Delta 1))$,

выполнено $\forall n \exists m ((\mathcal{R}_{1} \llcorner \mathcal{E} \varphi \mathcal{3} \square \mathcal{E} \mathfrak{A} \mathcal{3} \square \mathcal{E} \mathcal{B} \mathcal{3} \square n \lrcorner \simeq m) \&$
$\& \mathcal{B}(\varphi, n, m))$.

Согласно теореме 3 существует алгорифм $\mathcal{R}_2$ в A такой, что для любых функции φ и алгорифма $\mathcal{B}$ в A, для которых верно $a_{\text{кл}}(\varphi) \& \forall a \exists x ((\mathcal{B} \llcorner a \lrcorner \simeq x) \&$
$\& \text{Var}(x, \varphi - h_a, 0 \Delta 1))$, выполнено
$\forall n \exists m ((\mathcal{R}_{2} \llcorner \mathcal{E} \varphi \mathcal{3} \square \mathcal{E} \mathcal{B} \mathcal{3} \square n \lrcorner \simeq m) \& \mathcal{B}(\varphi, n, m))$.

С другой стороны имеет место следующее.

Пример. Существует функция φ такая, что

1) $\forall x y (|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|)$ и, следовательно, $a(\varphi)$,

2) $\forall u \neg\neg \exists x \, \text{Var}(x, \varphi - h_u, 0 \Delta 1)$,

3) φ не является абсолютно непрерывной на $0 \Delta 1$

и

4) для всякого НЧ n существует функция $\mathcal{F}_n$ такая, что $\mathcal{F}_n$ не может не быть полигональной и выполнено $\text{Var}\left(\frac{1}{7 \cdot 2^{3n}}, \varphi - \mathcal{F}_n, 0 \Delta 1\right)$, и, следовательно,

$$\forall n \neg\neg \exists m \, \mathcal{B}(\varphi, n, m) .$$

Доказательство. Пусть Φ покрытие, $\forall n \left(\sum_{i=1}^{n} |\Phi_i| < \frac{1}{2}\right)$, а $\mathcal{W}$ алгорифм над алфавитом $\{0, 1\}$ с алгорифмически неразрешимой проблемой применимости к натуральным числам. Согласно [4],стр. 305, существует алфорифм ϑ такой, что

$$\forall k l (! \vartheta \llcorner k l \lrcorner \& (\vartheta \llcorner k l \lrcorner \mathbin{I} \Lambda \supset \vartheta \llcorner k l \lrcorner | \mathbin{I} \Lambda)) \&$$
$$\& \forall k (! \mathcal{W} \llcorner k \lrcorner \equiv \exists m (\vartheta \llcorner k m \lrcorner \mathbin{I} \Lambda)) .$$

Пусть k НЧ. Тогда ясно, что последовательность сегментов $\{\Psi_\ell^k\}_\ell$, где
$\forall \ell (\Psi_\ell^k \rightleftharpoons \frac{1}{2^k} \cdot (1 + Эл(\Phi_\ell)) \Delta \frac{1}{2^k} \cdot (1 + Эп(\Phi_\ell)))$,
является точным рациональным дизъюнктным сегментным покрытием сегмента $\frac{1}{2^k} \Delta \frac{1}{2^{k-1}}$ и выполнено

$$\forall m (\sum_{i=1}^{m} |\Psi_i^k| < \frac{1}{2^{k+1}}) \mathbin{\&} Эл(\Psi_1^k) = \frac{1}{2^k} \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} Эп(\Psi_2^k) = \frac{1}{2^{k-1}} .$$

Ввиду этого существует для любого НЧ ℓ система дизъюнктных сегментов $\{\Omega_i^{k,\ell}\}_{i=1}^{h_{k,\ell}}$, которые содержатся в $\frac{1}{2^k} \Delta \frac{1}{2^{k-1}}$, не перекрываются с сегментами системы $\{\Psi_i^k\}_{i=1}^{\ell+1}$ и для которых выполнено $\sum_{i=1}^{h_{k,\ell}} |\Omega_i^{k,\ell}| = \frac{1}{2^{k+1}}$. Пусть $\Omega_0^{k,\ell} \rightleftharpoons \frac{1}{2^k} \Delta \frac{1}{2^{k-1}}$.

Мы определим $t_{k,\ell} \rightleftharpoons 0$, если
$(\neg (\vartheta_\llcorner k \ell_\lrcorner \,\mathrm{I}\, \Lambda) \vee 1 < \ell \mathbin{\&} \vartheta_\llcorner k (\ell \dot{-} 1)_\lrcorner \,\mathrm{I}\, \Lambda)$, а
$t_{k,\ell} \rightleftharpoons 1$ в другом случае и для всякого КДЧ x

$$f_{k,\ell}(x) \rightleftharpoons t_{k,\ell} \cdot \sum_{i=1}^{h_{k,\ell}} \frac{1}{2^{2k+3}} \cdot (|x - Эл(\Omega_i^{k,\ell})| +$$
$$+ |x - Эп(\Omega_i^{k,\ell})| - |2x - Эл(\Omega_i^{k,\ell}) - Эп(\Omega_i^{k,\ell})|)$$

и

$$g_k(x) \rightleftharpoons \frac{1}{2^{2k+1}} \cdot (|x - \frac{1}{2^k}| - |x - \frac{1}{2^{k-1}}| + \frac{1}{2^k}).$$

Тогда g_k полигональная функция, а $f_{k,\ell}$ полигональная функция, которая равна нулю на сегментах

$$0 \Delta \frac{1}{2^k}, \ \frac{1}{2^{k-1}} \Delta 2, \ \Psi_1^k, \Psi_2^k, \ldots, \Psi_{\ell+1}^k .$$

Следовательно, ряд функций $\sum_\ell f_{k,\ell}$ сходится. Мы обозначим $f_k \rightleftharpoons \sum_{\ell=1}^{\infty} f_{k,\ell}$.

Тогда мы получаем

$$\forall x\, ((x \le \frac{1}{2^{k}} \supset f_{k}(x) = g_{k}(x) = 0)\ \&$$

$$\&\ (\frac{1}{2^{k-1}} \le x \supset f_{k}(x) = 0\ \&\ g_{k}(x) = \frac{1}{2^{3k}}))\ \&$$

$$\&\ (\neg\, !\, \mathcal{W}\llcorner k \lrcorner \supset f_{k} = 0)\ \&$$

$$\&\ (!\, \mathcal{W}\llcorner k \lrcorner \supset f_{k} = f_{k,\, \mu i (\vartheta \llcorner k i \lrcorner\, \mathrm{I} \Lambda)})\ \&$$

$$\&\ \forall x y\, (|(f_{k}(x) + g_{k}(x)) - (f_{k}(y) + g_{k}(y))| \le |x - y|),$$

(34) $\forall x\, (\neg \exists \ell i\, (0 \le i \le s_{k,\ell}\ \&\ (x = \exists r\, (\Omega_{i}^{k,\ell}) \vee x = \frac{1}{2}\ \cdot$

$\cdot\ (\exists r\, (\Omega_{i}^{k,\ell}) + \exists m\, (\Omega_{i}^{k,\ell})) \vee x = \exists m\, (\Omega_{i}^{k,\ell}))) \supset$

$\supset \exists z\, (D(z, f_{k} + g_{k}, x)\ \&\ ((x \le \frac{1}{2^{k}} \vee \frac{1}{2^{k-1}} \le x) \supset$

$\supset z = 0)\ \&\ (\frac{1}{2^{k}} \le x \le \frac{1}{2^{k-1}} \supset \frac{3}{2^{2k+2}} \le z \le \frac{5}{2^{2k+2}})))$,

(35) $\forall w\, ((\neg\, !\, \mathcal{W}\llcorner k \lrcorner \supset \mathrm{Var}\, (|w - \frac{1}{2^{2k}}| \cdot \frac{1}{2^{k}},\ f_{k} + g_{k} - h_{w},$

$\frac{1}{2^{k}} \Delta \frac{1}{2^{k-1}}))\ \&\ (!\, \mathcal{W}\llcorner k \lrcorner \supset \mathrm{Var}\, (|w - \frac{1}{2^{2k}}| \cdot \frac{1}{2^{k+1}} +$

$+ |w - \frac{3}{2^{2k+2}}| \cdot \frac{1}{2^{k+2}} + |w - \frac{5}{2^{2k+2}}| \cdot \frac{1}{2^{k+2}}\ ,$

$f_{k} + g_{k} - h_{w},\ \frac{1}{2^{k}} \Delta \frac{1}{2^{k-1}})))$,

функция $f_{k} + g_{k}$ возрастает на $\frac{1}{2^{k}} \Delta \frac{1}{2^{k-1}}$ и $0 \le f_{k} + g_{k} \le \frac{1}{2^{3k}}$.

Таким образом, ряд функций $\sum\limits_{k} (f_{k} + g_{k})$ равномерно сходится. Пусть $\varphi \rightleftharpoons \sum\limits_{k=1}^{\infty} (f_{k} + g_{k})$ и для любого НЧ n — $\mathcal{F}_{n} \rightleftharpoons \sum\limits_{k=1}^{n} (f_{k} + g_{k})$. Тогда

$$\forall k x\, (\frac{1}{2^{k}} \le x \le \frac{1}{2^{k-1}} \supset \varphi(x) = \varphi(\frac{1}{2^{k}}) + f_{k}(x) + g_{k}(x)).$$

Согласно вышеуказанному φ возрастает на $0 \Delta 1$, выполнено 1), для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$

$$\exists z (\mathcal{D}(z, \varphi, x) \,\&\, 0 < z \leq \frac{5}{2^4} \,\&\, \forall k (\frac{1}{2^k} \leq x \leq \frac{1}{2^{k-1}} \supset$$

$$\supset \frac{3}{2^{2k+2}} \leq z \leq \frac{5}{2^{2k+2}})) ,$$

$\mathcal{F}_m$ не может не быть полигональной, $\forall x (\mathcal{F}_m(x) = \varphi(max(\frac{1}{2^m}, x)) - \varphi(\frac{1}{2^m}))$ и, следовательно, функция $\varphi - \mathcal{F}_m$ является неубывающей и ввиду $\varphi(1) - \mathcal{F}_m(1) - (\varphi(0) - \mathcal{F}_m(0)) = \varphi(\frac{1}{2^m}) = \frac{1}{7 . 2^{3m}}$ верно $Var(\frac{1}{7 . 2^{3m}}, \varphi - \mathcal{F}_m, 0 \Delta 1)$.

Пусть u КДЧ. Тогда не может не иметь место один из следующих четырех случаев.

а) $u \leq 0$. Тогда функция $\varphi - h_u$ возрастает на $0 \Delta 1$ и, следовательно,

$$\exists z \, Var(z, \varphi - h_u, 0 \Delta 1) . \tag{36}$$

б) $\frac{5}{2^4} \leq u$. Тогда ввиду 1), (34) и следствия леммы 3 из [7] функция $\varphi - h_u$ является невозрастающей и верно (36).

в) Сущетсвует НЧ q такое, что $\frac{5}{2^{2q+4}} \leq u \leq \frac{3}{2^{2q+2}}$. Тогда по аналогичным причинам $\varphi - h_u$ является невозрастающей на $0 \Delta \frac{1}{2^q}$, а неубывающей на $\frac{1}{2^q} \Delta 1$. Следовательно, выполнено (36).

г) Существует НЧ q такое, что $\frac{3}{2^{2q+2}} \leq u \leq$

$\le \frac{5}{2^{2q+2}}$. Тогда $\varphi - h_u$ является невозрастающей на $0 \vartriangle \frac{1}{2q}$ и неубывающей на $\frac{1}{2q-1} \vartriangle 2$ и, следовательно, ввиду (35) (для $k = q$) и верности $\neg\neg(!\, \mathcal{W}_\llcorner q_\lrcorner \vee \neg !\, \mathcal{W}_\llcorner q_\lrcorner)$ мы получаем двойное отрицание (36).

Таким образом, мы доказали 2).

Допустим, что φ абсолютно непрерывна на $0 \vartriangle 1$. Тогда согласно теореме из [8] и теореме 6.8 из [3]

(37) $\forall k\, \exists v\, Var\,(v, \varphi - h_{\frac{1}{2^{2k}}}, \frac{1}{2^k} \vartriangle \frac{1}{2^{k-1}})$.

Ввиду теоремы 1.3 из [3] и того, что для любого НЧ k верно (35), мы имеем

$$\forall k v\,(Var\,(v, \varphi - h_{\frac{1}{2^{2k}}}, \frac{1}{2^k} \vartriangle \frac{1}{2^{k-1}}) \supset (\neg !\, \mathcal{W}_\llcorner k_\lrcorner \equiv$$
$$\equiv v = 0) \,\&\, (!\, \mathcal{W}_\llcorner k_\lrcorner \equiv v = \frac{1}{2^{3k+3}}) \,\&\, (v < \frac{1}{2^{3k+3}} \vee 0 < v)) .$$

Итак, мы на основании (37) получаем $\forall k\,(!\, \mathcal{W}_\llcorner k_\lrcorner \vee \neg !\, \mathcal{W}_\llcorner k_\lrcorner)$.

Как мы знаем, проблема применимости $\mathcal{W}$ к натуральным числам алгорифмически неразрешима, т.е. верно $\neg \forall k\,(!\, \mathcal{W}_\llcorner k_\lrcorner \vee \neg !\, \mathcal{W}_\llcorner k_\lrcorner)$.

Таким образом, выполнено 3).

Литература

[1] G. FICHTENHOLZ: Note sur les fonctions absolument continus, Bulletins de l'Académie Royale de Belgique, Classe des sciences, série 5, tome 8(1922), 430-443.

[2] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д.: О некоторых особенностях конструктивных функций вещественного переменного по сравнению с классическими, Труды 3-го Всесоюзного мат. съезда, том 1, Москва 1956, 181-182.

[3] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д.: Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, Проблемы конструктивного направления в математике 2(сборник работ), Труды Мат.инст.им. В.А.Стеклова, т. LXVII (1962), 385-457.

[4] ЦЕЙТИН Г.С.: Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах, там же, 295-361.

[5] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д. и ЦЕЙТИН Г.С.: О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, там же, 458-502.

[6] ДЕМУТ О.: Пространства L_n и S в конструктивной математике, Comment.Math.Univ.Carolinae 10(1969), 261-284.

[7] ДЕМУТ О.: Об интегрируемости производных от конструктивных функций, Comment.Math.Univ.Carolinae 11(1970), 667-691.

[8] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций, Comment. Math.Univ.Carolinae 11(1970), 705-726.

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova universita
Sokolovská 83, Praha 8
Československo

(Oblatum 18.1.1971)