Nach L. TONELLI (s. [5], S. 61) ist fast überall $|d\mathbf{x}/ds| = 1$; also fast überall

$$\mathbf{x}' . \mathbf{x}' = (l/2\pi)^2 , \quad \mathbf{X}' . \mathbf{X}' = (L/2\pi)^2 . \tag{3,1}$$

Die vektoriellen Funktionen (5) erfüllen also die Voraussetzungen der Hilfsbehauptung aus dem Anfang des Abschn. 1.

Wir bezeichnen mit ε_i ($i = 1, 2, 3$) Signum des Integrals aus der i-ten Koordinate von $\boldsymbol{\Phi}$ in (6). Zur i-ten Koordinate c_i von $\mathbf{c}$ wählen wir die Zahl α_i derart, dass $c_i = \varepsilon_i \alpha_i$. In Hinsicht auf (3,1) ist dann die durch π dividierte linke Seite in (7) gleich der linken Seite in (1,2). Aus (1,2) folgt also (7).

4. Es bleibt noch über die Gleichheit in (7) zu entscheiden. Nach dem Hilfssatz aus dem Abschn. 1 sind die Extremalkurven durch (1,3) mit (1,4) und (1,5) dargestellt.

Aus (1,4) folgt $\boldsymbol{\alpha} . \mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha} . \mathbf{A}^* = 0$, was zusammen mit (1,5) bedeutet, dass die Extremalkurven in den zum Vektor $\boldsymbol{\alpha}$ orthogonalen Ebenen liegen.

Der Bogen s der durch (1,3) gegebenen Kurve k ist durch

$$s = \int_0^\tau (\mathbf{a} . \mathbf{a} \sin^2 \tau - 2\mathbf{a} . \mathbf{a}^* \sin \tau \cos \tau + \mathbf{a}^* . \mathbf{a}^* \cos^2 \tau)^{1/2} \, d\tau$$

gegeben. Nach (2) ist er dem Parameter $\tau \in \langle 0, 2\pi \rangle$ proportionell; das ist genau dann der Fall, wenn $|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}^*| > 0$, $\mathbf{a} . \mathbf{a}^* = 0$; ähnlich ist $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^*| > 0$, $\mathbf{A} . \mathbf{A}^* = 0$. Die durch (1,3) bestimmten Extremalkurven sind also Kreise.

Nach (1,5) ist $\boldsymbol{\alpha} = \varrho \mathbf{a} \times \mathbf{a}^*$ mit $\varrho = \text{konst.} \neq 0$, also $1 = |\varrho| \, |\mathbf{a}^*|^2$. Nach (1,4) ergibt sich folglich $\mathbf{A} = -\varrho(\mathbf{a} \times \mathbf{a}^*) \times \mathbf{a}^* = \varrho|\mathbf{a}^*|^2 \, \mathbf{a}$, also $\mathbf{A} = (\operatorname{sign} \varrho) \, \mathbf{a}$. Ähnlich erhält man $\mathbf{A}^* = (\operatorname{sign} \varrho) \, \mathbf{a}^*$. Das bedeutet erstens, dass die Kreise k, K denselben Durchmesser haben; und zweitens, dass in (1,3) entweder $\mathbf{X}(\tau) - \mathbf{x}(\tau)$ oder $\mathbf{X}(\tau) + \mathbf{x}(\tau)$ ein fester Vektor ist. Daraus ergibt sich schon die in (*) angeführte Gleichheitsbedingung.

Literaturverzeichnis

[1] *W. Blaschke - K. Leichtweiss:* Elementare Differentialgeometrie. 5. Aufl. Berlin—Heidelberg—New York 1973.

[2] *L. Boček:* Isoperimetrische Ungleichungen für räumliche Kurven und Polygone. Čas. pěst. mat. *104* (1979), 86—92.

[3] *H. Hadwiger:* Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1957.

[4] *Z. Nádeník:* Eine isoperimetrische Ungleichung für geschlossene Kurven im vierdimensionalen Raum. Čas. pěst. mat. *105* (1980), 302—310.

[5] *L. Tonelli:* Fondamenti di calcolo delle variazioni. I. Bologna 1921.

Anschrift des Verfassers: 166 29 Praha 6 - Dejvice, Thákurova 7 (Stavební fakulta ČVUT).