Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

НЕКОТОРЫЕ ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

И. И. МИХАЙЛОВ, Иваново

(Поступило в редакцию 10/IX. 1977 г.)

Рассмотрим уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 + 2t^3 = 0 \tag{1}$$

в целых числах, таких, что $(x, y, z, t) = 1$.

Ясно, что среди трех чисел x, y, z два – одинаковой чётности. Пусть для определенности таковыми являются числа x и y. Положим $x = a + b$, $y = a - b$, где a, b – целые числа. В результате подстановки уравнение (1) примет вид:

$$2a^3 + 6ab^2 + z^3 + 2t^3 = 0\,. \tag{2}$$

Пусть в (2) $t = -a$, тогда $z^3 = -6ab^2$, откуда ясно, что $z = 6c$ (c – целое), после чего имеем: $36c^3 = -ab^2$. Потребуем, чтобы в дальнейшем $(a, b) = 1$, так как в противном случае $(x, y, z, t) \neq 1$. Пусть $a = mu^3$, $b = nv^3$ (u, v – целые, причем $(u, v) = 1$, m, n – натуральные, причем $(m, n) = 1$, и, кроме того, $(m, v) = 1$, $(n, u) = 1$). Тогда $c = -uv^2$, $mn^2 = 36$. Для натуральных m и n, таких, что $(m, n) = 1$, имеем, как легко видеть, четыре возможности: $(m, n) = (1, 6), (4, 3), (9, 2), (36, 1)$. Соответственно получаем четыре тождества:

$$(36u^3 + v^3)^3 + (36u^3 - v^3)^3 + (-6uv^2)^3 + 2(-36u^3)^3 = 0\,, \tag{3}$$

где $(2, v) = 1$, $(u, v) = 1$, $(3, v) = 1$,

$$(9u^3 + 2v^3)^3 + (9u^3 - 2v^3)^3 + (-6uv^2)^3 + 2(-9u^3)^3 = 0\,, \tag{4}$$

где $(3, v) = 1$, $(2, u) = 1$, $(u, v) = 1$,

$$(4u^3 + 3v^3)^3 + (4u^3 - 3v^3)^3 + (-6uv^2)^3 + 2(-4u^3)^3 = 0\,, \tag{5}$$

где $(2, v) = 1$, $(3, u) = 1$, $(u, v) = 1$,

$$(u^3 + 6v^3)^3 + (u^3 - 6v^3)^3 + (-6uv^2)^3 + 2(-u^3)^3 = 0\,, \tag{6}$$

где $(2, u) = 1$, $(u, v) = 1$, $(3, u) = 1$.

Тождества (3) – (6) легко объединяются в одно:

$$(A^2u^3 + Bv^3)^3 + (A^2u^3 - Bv^3)^3 + (-6uv^2)^3 + 2(-A^2u^3)^3 = 0\,,$$

где $(A, B) = (6, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 6)$, или, что то же, $AB = 6$ (A, B – целые), $(A, v) = 1$, $(B, u) = 1$, $(u, v) = 1$.

Отметим попутно, что тождество (5) получено также в работе [1]. При $u = 1$ тождество (6) дает известное представление числа 2 в виде суммы трех кубов целых чисел [2], стр. 37.

Каждое из тождеств (3) – (6) при выполнении соответствующих условий описывает своё множество решений уравнения (1) в целых числах, непересекающееся с тремя другими.

Игнорируя эти условия, т.е. не исключая возможности $(x, y, z, t) \neq 1$ (считая, однако, что $(u, v) = 1$), легко доказать, что решения уравнения (1) в целых числах могут быть описаны лишь одним тождеством. В качестве базисного может быть выбрано любое из них. В частности, например, тождество (6). В самом деле, пусть в (6) $u = 6\bar{u}$ ($\bar{u}$ – целое число), тогда получим тождество вида (3). Если $u = 3\bar{u}$, то получаем тождество вида (4). При $u = 2\bar{u}$ имеем тождество вида (5).

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Уравнение* (1) *имеет бесконечное множество решений в целых взаимно простых числах* x, y, z, t, *при этом* $wx = u^3 + 6v^3$, $wy = u^3 - 6v^3$, $wz = -6uv^2$, $wt = -u^3$, *где* w, u, v *– целые числа, причем* $(u, v) = 1$, $w = (u, 6)$.

Очевидны и такие утверждения

Теорема 2. *Уравнение* $x^3 + y^3 = z^3 + 2t^3$ *имеет бесконечное множество решений в натуральных числах (взаимно простых), при этом* $wx = u^3 + 6v^3$, $wy = u^3 - 6v^3$, $wz = 6uv^2$, $wt = u^3$, *где* u, v, w*-натуральные, причем* $(u, v) = 1$, $w = (u, 6)$, $u > v\sqrt[3]{6}$.

Теорема 3. *Уравнение* $x^3 = y^3 + z^3 + 2t^3$ *имеет бесконечное множество решений в натуральных взаимно простых числах, при этом* $wx = 6v^3 + u^3$, $wy = 6v^3 - u^3$, $wz = 6uv^2$, $wt = u^3$, *где* w, u, v*-натуральные, причем* $(u, v) = 1$, $w = (u, 6)$, $v\sqrt[3]{(6)} > u$.

Из тождеств (3) – (6) вытекает также

Теорема 4. *Система уравнений*

$$z^3 = x^3 + y^3 + 2t^3 = x_1^3 + y_1^3 + 2t_1^3 = x_2^3 + y_2^3 + 2t_2^3 = x_3^3 + y_3^3 + 2t_3^3$$

имеет бесконечно много решений в целых числах:

(7) $$z = 6uv^2\,,\quad x = u^3 + 6v^3\,,\quad y = u^3 - 6v^3\,,\quad t = -u^3\,,$$

$$x_1 = 4u^3 + 3v^3\,,\quad y_1 = 4u^3 - 3v^3\,,\quad t_1 = -4u^3\,,\quad x_2 = 9u^3 + 2v^3\,,$$

$$y_2 v = 9u^3 - 2v^3\,, \quad t_2 = -9u^3\,, \quad x_3 = 36u^3 + v^3\,,$$

$$y_3 = 36u^3 - v^3\,, \quad t_3 = -36u^3\,,$$

где u, v — целые числа.

Легко видеть, что теорема 4 в известном смысле обобщает один из результатов работы [1].

Заметим далее, что согласно полученным формулам выполняется условие: $x + y = -2t$ и т.п., из чего вытекает

Следствие 1. *Система уравнений*

$$A^2 z^3 = B(x + y)(x - y)^2 = B(x_1 + y_1)(x_1 - y_1)^2 =$$

$$= B(x_2 + y_2)(x_2 - y_2)^2 = B(x_3 + y_3)(x_3 - y_3)^2$$

где A, B — целые числа, такие, что $AB = 6$, имеет бесконечно много решений в целых числах, при этом $z = 2Buv^2$; и $x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ определяются в соответствии с формулами (7).

Полагая в (6) $u = p^k$ (p — целое), имеем

Следствие 2. *Уравнение $x^3 + y^3 + z^3 + 2t^{9k} = 0$ разрешимо для любого целого t, причем при любом натуральном k имеет бесконечное множество целочисленных решений.*

Легко доказывается также и

Следствие 3. *Уравнение $x^3 + y^3 + 2t^3 = z^{6k}$ имеет бесконечное множество целочисленных решений для любого натурального k и разрешимо для любого целого z, кратного 6.*

В самом деле, пусть в (6) $u = 6p^2$, а затем $6vp = q^k$ (p, q — целые, k — натуральное), что возможно, например, при $v = 2^{k-1}r^k$, $p = 3^{k-1}s^k$ (r, s — целые) и т.п.

Замечание. Исходя из тривиально конструируемого тождества

$$(a + b)^3 + (a - b)^3 + (-6ab^2) + 2(-a)^3 = 0\,, \tag{8}$$

где a, b — целые числа, нетрудно доказать справедливость следующих результатов.

Утверждение 1. *Уравнение $x^3 + y^3 + 2t^{9(4k+1)} = z^4$ имеет бесконечное множество целочисленных решений для любого целого $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ и разрешимо при любом целом t, являющемся ушестеренным биквадратом целого.*

Действительно, пусть в (8) $a = 6c^2$ (c — целое), а затем $6bc = d^2$ (d — целое), где $b = \alpha^2$, $c = 6\beta^2$ (α, β — целые). Положим далее $\beta = \gamma^3$ (γ — целое), и потребуем, чтобы $6\gamma^4 = \varepsilon^m$ (ε — целое), тогда $\varepsilon = 6\delta$ (δ — целое), откуда $\gamma^4 = 6^{m-1}\delta^m$