ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 105 * PRAHA 24. 11. 1980 * ČÍSLO 4

CONCERNING THE CHARACTERIZATION OF GENERATORS OF DISTRIBUTION SEMIGROUPS

MIROSLAV SOVA, Praha

(Received August 8, 1974, in revised form November 23, 1978)

In the first part of this paper we prove a new characteristic property of generators of distribution semigroups of operators using only the behavior of their revolvents on the real halfaxis. It is similar to that of OHARU [1] but does not involve the graph spaces of powers of the generator (Theorem 1.2).

In the second part, we prove the necessity of the above mentioned property directly from Chazarain's condition [2] on the behavior of the resolvent in a logarithmic domain of the complex plane (Theorem 2.5 and 2.7).

In the sequel, E will be an arbitrary Banach space over the real R or complex C field (real in the first and complex in the second part).

If A is an arbitrary linear operator from E into E, we define formally $A^0 = I$, I being the identity operator.

1. SEMIGROUPS AND RESOLVENTS

1.1. Lemma. *For every $\lambda > 1$, $r \in \{1, 2, \ldots\}$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$ we have*

$$\left| \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\lambda^r} \right| \leqq \frac{p!}{(\lambda - 1)^{p+1}}.$$

Proof is easy.

1.2. Theorem. *Let A be a linear operator from E into E. Then the following two statements are equivalent:*

(O) *there exists a constant $\varkappa \geqq 0$ such that*

(I) $(\varkappa, \infty) \subseteq \varrho(A)$,

(II) *for every* $T > 0$ *there exist* $k \in \{0, 1, \ldots\}$ *and* $K \geqq 0$ *such that*

$$\|(\lambda I - A)^{-n} x\| \leqq \frac{K}{(\lambda - \varkappa)^n} \sum_{j=0}^{k} \|A^j x\| \quad \textit{for every} \quad n \in \{1, 2, \ldots\},\ \lambda > \frac{n}{T} + \varkappa$$

and $x \in \mathsf{D}(A^k)$,

(C) *there exists a constant* $\omega \geqq 0$ *such that*

(I) $(\omega, \infty) \subseteq \varrho(A)$,

(II) *for every* $T > 0$ *there exist* $l \in \{0, 1, \ldots\}$ *and* $M \geqq 0$ *such that*

$$\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\lambda^l} (\lambda I - A)^{-1} \right\| \leqq \frac{Mp!}{(\lambda - \omega)^{p+1}} \quad \textit{for every} \quad p \in \{0, 1, \ldots\} \textit{ and}$$

$$\lambda > \frac{p+1}{T} + \omega.$$

Proof. For the sake of simplicity we shall write $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ for every $\lambda \in \varrho(A)$.

It is well-known that

(1) $A\, R(\mu) = \mu\, R(\mu) - I$ for every $\mu \in \varrho(A)$,

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\mu^p} R(\mu) = (-1)^p\, p!\, R(\mu)^{p+1}$ for every $\mu \in \varrho(A)$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$.

Now we begin by proving (O) $\Rightarrow$ (C).

Using (1) we easily obtain by induction on s that

(3) $\dfrac{1}{\lambda^s} R(\lambda) = R(\lambda)\, R(\alpha)^s - \alpha\, R(\lambda) \displaystyle\sum_{r=1}^{s} \frac{1}{\lambda^r} R(\alpha)^{s+1-r} - \sum_{r=1}^{s} \frac{1}{\lambda^r} R(\alpha)^{s+1-r}$ for every

$\lambda \in \varrho(A)$, $\lambda \neq 0$, $\alpha \in \varrho(A)$ and $s \in \{1, 2, \ldots\}$.

Let us now choose $\varkappa \geqq 0$ so that (O) holds.

Let $T > 0$ be fixed.

For this $T > 0$ we can find $k \in \{0, 1, \ldots\}$ and $K \geqq 0$ such that (O) (II) holds.

The case $k = 0$ is trivial according to (2) and therefore we suppose $k \in \{1, 2, \ldots\}$.

We write $|||x||| = \sum_{j=0}^{k} \|A^j x\|$ for $x \in \mathsf{D}(A^k)$.

Then we have according to (2) that

(4) $\left\| \dfrac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\lambda^p} R(\lambda)(x) \right\| \leqq \dfrac{Kp!}{(\lambda - \varkappa)^{p+1}} |||x|||$ for every $p \in \{0, 1, \ldots\}$, $\lambda > \dfrac{p+1}{T} + \varkappa$ and

$x \in \mathsf{D}(A^k)$.

Using (4) we get by means of Lemma 1.1 that

(5) $\left\| \dfrac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\lambda^p} \dfrac{1}{\lambda^r} R(\lambda)(x) \right\| = \left\| \displaystyle\sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\lambda^p} \frac{1}{\lambda^r} \frac{\mathrm{d}^{p-q}}{\mathrm{d}\lambda^{p-q}} R(\lambda)(x) \right\| \leqq$

$$\leq \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} \frac{q!}{(\lambda - 1)^{q+1}} \frac{K(p-q)!}{(\lambda - \varkappa)^{p-q+1}} \|x\| =$$

$$= K \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} \frac{q!}{(\lambda - \varkappa - 1)^{q+1}} \frac{(p-q)!}{(\lambda - \varkappa - 1)^{p-q+1}} \|x\| =$$

$$= (-1)^p K \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} \frac{d^q}{d\lambda^q} \frac{1}{\lambda - \varkappa - 1} \frac{d^{p-q}}{d\lambda^{p-q}} \frac{1}{\lambda - \varkappa - 1} \|x\| =$$

$$= (-1)^p K \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{(\lambda - \varkappa - 1)^2} \|x\| = K \frac{p!}{(\lambda - \varkappa - 2)^{p+1}} \|x\|$$

for every $x \in \mathsf{D}(A^k)$, $r \in \{1, 2, \ldots\}$, $p \in \{0, 1, \ldots\}$ and $\lambda > \dfrac{p+1}{T} + \varkappa + 2$.

Let us now fix an arbitrary $\alpha \in \varrho(A)$.

It follows from (1) that there exists a $K_0 \geqq 0$ such that

(7) $\|R(\alpha)^j x\| \leqq K_0 \|x\|$ for every $x \in E$ and $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

It is clear that (7) also implies

(8) $\|R(\alpha)^j x\| \leqq K_0 \|x\|$ for every $x \in E$ and $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

Now by (3), (4), (5) and (7), (8) and by Lemma 1.1

(9) $$\left\| \frac{d\lambda^p}{d^p} \frac{1}{\lambda^k} R(\lambda) x \right\| \leqq \frac{Kp!}{(\lambda - \varkappa)^{p+1}} K_0 \|x\| + \alpha k \frac{Kp!}{(\lambda - \varkappa - 2)^{p+1}} K_0 \|x\| +$$

$$+ k \frac{p!}{(\lambda - 1)^{p+1}} K_0 \|x\| \leqq \frac{(K + \alpha k K + k) K_0 p!}{(\lambda - \varkappa - 2)^{p+1}} \|x\|$$

for every $x \in E$, $p \in \{0, 1, \ldots\}$ and $\lambda > \dfrac{p+1}{T} + \varkappa + 2$.

Taking $\omega = \varkappa + 2$, $l = k$, $M = (K + \alpha k K + k) K_0$ we see that (9) proves (C) because $T > 0$ was arbitrary.

We return to the verification of (C) $\Rightarrow$ (O).

It follows from (1) that

(10) $R(\lambda) \supseteq \dfrac{1}{\lambda} R(\lambda) A - \dfrac{1}{\lambda} I$ for every $\lambda \in \varrho(A)$, $\lambda \neq 0$.

Using (10) we prove easily by induction on s that

(11) $R(\lambda) \supseteq \dfrac{1}{\lambda^s} R(\lambda) A^s - \displaystyle\sum_{r=1}^{s} \frac{1}{\lambda^r} A^{r-1}$ for every $\lambda \in \varrho(A)$, $\lambda \neq 0$ and $s \in \{1, 2, \ldots\}$.

Let $\omega \geqq 0$ be such that (C) holds.

Now we fix a $T > 0$.

For this $T > 0$ we can find $l \in \{0, 1, \ldots\}$ and $M \geqq 0$ such that (C) (II) holds. We omit the case $l = 0$ which is trivial according to (2) and therefore we suppose $l \in \{1, 2, \ldots\}$.

It follows from (1) and (11) by means of Lemma 1.1 that

$$(12)\quad \|R(\lambda)^n x\| = \left\| (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\lambda^{n-1}} R(\lambda) x \right\| =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \left\| \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\lambda^{n-1}} R(\lambda) x \right\| \leqq \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{M(n-1)!}{(\lambda - \omega)^n} \|A^l x\| + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)!}{(\lambda - 1)^n} \sum_{r=1}^{l} \|A^{r-1} x\| \right] = \frac{M}{(\lambda - \omega - 1)^n} \sum_{j=0}^{l} \|A^j x\| \quad \text{for every} \quad n \in \{1, 2, \ldots\},$$

$$\lambda > \frac{n}{T} + \omega + 1 \quad \text{and} \quad x \in \mathrm{D}(A^l).$$

Taking $\varkappa = \omega + 1$, $k = l$ and $K = M$ we see that (12) proves (O) because $T > 0$ was arbitrary.

1.3. First Characterization Theorem. *Let A be a linear operator from E into E. Then the operator A is the generator of a regular distribution semigroup if and only if it is densely defined and possesses the property (C) from the preceding theorem.*

Proof. Immediate consequence of Theorem 1.2 and Oharu's results from [1].

1.4. Remark. The advantage of the property (C) from the above theorems consists in the possibility to extend it to a characteristic property of the correctness of the Cauchy problem for abstract higher order equations – see Part 2 and compare [2]. The Oharu method in this case brings about certain hardly surmountable dificutlies.

2. RESOLVENTS IN COMPLEX AND REAL DOMAINS

2.1. Sublemma. $1/(1 - \xi) \leqq \mathrm{e}^{2\xi}$ *for every* $0 \leqq \xi \leqq \frac{1}{2}$.

Proof. The function $\mathrm{e}^{-2\xi}(1/(1 - \xi))$ has the value **1** at the point $\xi = 0$ and the value $2\mathrm{e}^{-1} < 1$ at the point $\xi = \frac{1}{2}$. Hence it suffices to prove that it is nondecreasing in the interval $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$. But this is clear because its derivative is nonnegative.

2.2. Sublemma. $$\frac{\exp\left(-2\xi \log \dfrac{1 + c}{c}\right)}{1 - 2\xi + (1 + c)\xi^2} \leqq 1 \quad \textit{for every} \quad c > 0 \quad \textit{and} \quad \xi \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Proof. Let $c > 0$ be fixed. The roots of the polynomial $1 - 2\xi + (1 + c)\,\xi^2$ are

$$\frac{1}{1+c} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{1}{1+c}\right)^2 - \frac{1}{1+c}\right)} = \frac{1}{1+c} \pm \mathrm{i}\sqrt{\left(\frac{1}{1+c} - \frac{1}{(1+c)^2}\right)} = \frac{1}{1+c} \pm$$

$$\pm\, \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{c}}{1+c}\,.$$

Consequently, the function $1 - 2\xi + (1 + c)\,\xi^2$ is positive on R and

$$1 - 2\xi + (1+c)\,\xi^2 = \left|(1+c)\left(\xi - \frac{1}{1+c} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{c}}{1+c}\right)\left(-\frac{1}{1+c} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{c}}{1+c}\right)\right| \geqq$$

$$\geqq (1+c)\,\frac{\sqrt{c}}{1+c}\,\frac{\sqrt{c}}{1+c} = \frac{c}{1+c} \quad \text{for every} \quad \xi \in \mathrm{R}\,.$$

Thus we have

(1) $$\frac{1}{1 - 2\xi + (1+c)\,\xi^2} \leqq \frac{1+c}{c} \text{ for every } \xi \in \mathrm{R}.$$

On the other hand,

(2) $$\exp\left(-2\xi \log \frac{1+c}{c}\right) = \left(\frac{c}{1+c}\right)^{2\xi} = \left(\frac{c}{1+c}\right)^{2\xi-1} \frac{c}{1+c} \leqq \frac{c}{1+c} \text{ for every}$$

$\xi \geqq \frac{1}{2}$.

Now (1) and (2) give the desired estimate.

2.3. Lemma.

$$\left|\frac{1}{1 - \dfrac{z}{p+1}}\right|^{p+1} \leqq \mathrm{e}^{(2 + \log(1+a^2))\operatorname{Re} z}$$

for every $a > 0$ *and* $\operatorname{Re} z \geqq 0$ *such that*

$$|\operatorname{Im} z| \geqq \frac{1}{a} \operatorname{Re} z$$

and for every $p \in \{0, 1, \ldots\}$.

Proof. Let $a > 0$.

We can write

(1) $$\left|\frac{1}{1 - \dfrac{\alpha + \mathrm{i}\beta}{p+1}}\right|^{p+1} = \left(\frac{1}{\left(1 - \dfrac{\alpha}{p+1}\right)^2 + \left(\dfrac{\beta}{p+1}\right)^2}\right)^{(p+1)/2}$$

for every $\alpha, \beta \in R$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$.

Taking $\xi = \alpha/(p+1)$ in Sublemma 2.1 we see from (1) that

$$(2)\quad \left|\frac{1}{1-\dfrac{\alpha+i\beta}{p+1}}\right|^{p+1} \leqq \left(\frac{1}{1-\dfrac{\alpha}{p+1}}\right)^{p+1} \leqq e^{2\alpha} \text{ for every } 0 \leqq \alpha \leqq \frac{p+1}{2}, \quad \beta \in \mathrm{R}$$

and $p \in \{0, 1, \ldots\}$.

On the other hand, we have

$$(3)\quad \left(1-\frac{\alpha}{p+1}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{p+1}\right)^2 \geqq \left(1-\frac{\alpha}{p+1}\right)^2 + \frac{1}{a^2}\left(\frac{\alpha}{p+1}\right)^2 = 1 - 2\frac{\alpha}{p+1} +$$

$$+ \left(\frac{\alpha}{p+1}\right)^2 + \frac{1}{a^2}\left(\frac{\alpha}{p+1}\right)^2 = 1 - 2\frac{\alpha}{p+1} + \left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{\alpha}{p+1}\right)^2 \text{ for every}$$

$\alpha \geqq 0$ and $\beta \in \mathrm{R}$ such that $|\beta| \geqq \dfrac{1}{a}\alpha$ and for every $p \in \{0, 1, \ldots\}$.

It follows from (1) and (3) that

$$(4)\quad \left|\frac{1}{1-\dfrac{\alpha+i\beta}{p+1}}\right|^{p+1} \leqq \left(\frac{1}{1-2\dfrac{\alpha}{p+1}+\left(1+\dfrac{1}{a^2}\right)\left(\dfrac{\alpha}{p+1^2}\right)}\right)^{(p+1)/2} \text{for every } \alpha \geqq 0,$$

$\beta \in \mathrm{R}$ such that $|\beta| \geqq \dfrac{1}{a}\alpha$ and for every $p \in \{0, 1, \ldots\}$.

Now we obtain from (4), taking $\xi = \alpha/(p+1)$ and $c = 1/a^2$ in Sublemma 2.2, that

$$(5)\quad \left|\frac{1}{1-\dfrac{\alpha+i\beta}{p+1}}\right|^{p+1} \leqq e^{\alpha\log(1+a^2)} \text{ for every } \alpha \geqq \frac{p+1}{2}, \ |\beta| \geqq \frac{1}{a}\alpha \text{ and } p \in \{0, 1, \ldots\}.$$

Summing up (2) and (5) we get at once

$$\left|\frac{1}{1-\dfrac{\alpha+i\beta}{p+1}}\right|^{p+1} \leqq e^{(2+\log(1+a^2))\alpha} \text{ for every } \alpha \geqq 0, \ |\beta| \geqq \frac{1}{a}\alpha \text{ and } p \in \{0, 1, \ldots\},$$

which is the desired result if we take $\operatorname{Re} z = \alpha$, $\operatorname{Im} z = \beta$.

2.4. Proposition. *Let Λ be an open subset of* C *and R a mapping of Λ into E. If the function R is analytic in Λ and if there exist $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $K \geqq 0$ and $v \geqq 0$ so that*

(α) $\{z : z \in \mathrm{C}, \operatorname{Re} z > a\log(1+|\operatorname{Im} z|) + b\} \subseteq \Lambda$, (β) $\|R(z)\| \leqq K(1 + |z|)^{\nu}$ *for every* $z \in \mathrm{C}$ *such that* $\operatorname{Re} z > a \log(1 + |\operatorname{Im} z|) + b$, *then there exist* $M \geqq 0$, $\omega \geqq 0$, $\chi \in \{0, 1, \ldots\}$ *and* $m \in \{0, 1, \ldots\}$ *such that*

(a) $(\omega, \infty) \subseteq \Lambda$,

(b) $\left\|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\lambda^p} \frac{1}{\lambda^{\chi T + m}} R(\lambda)\right\| \leqq \frac{M p!}{(\lambda - \omega)^{p+1}}$ *for every* $T \in \{1, 2, \ldots\}$, $\lambda > \omega$ *and* $p \in \{0, 1, \ldots\}$

such that $\lambda \geqq \frac{p + 1}{T} + \omega$.

Note. If the constants $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $K \geqq 0$ and $\nu \geqq 0$ are given so that the assumptions (α), (β) hold, then the constants $M \geqq 0$, $\omega \geqq 0$, $\chi \in \{0, 1, \ldots\}$ and $m \in \{0, 1, \ldots\}$ can be chosen, for example, in the following way:

$$M = \frac{2^{\nu} K(1 + a)}{2}, \quad \omega = b + 2, \quad \chi - 1 < 4a + 2\log(1 + a^2) \leqq \chi,$$

$$m - 1 < \nu + 2 \leqq m.$$

Proof. Let us first fix constants $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $K \geqq 0$ and $\nu \geqq 0$ so that the assumptions (α) and (β) hold.

For the sake of simplicity we shall denote

(1) $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > a \log(1 + |\operatorname{Im} z|) + b\}$,

(2) $\Gamma = \{z : \operatorname{Re} z = a \log(1 + |\operatorname{Im} z|) + b + 2\}$,

(3) $\omega = b + 2$.

Further, we need the function

(4) $z(\xi) = a \log(1 + |\xi|) + b + 2 + \mathrm{i}\xi$ for $\xi \in \mathrm{R}$.

It is clear from (1), (2) and (4) that

(5) $\Gamma = \{z(\xi) : \xi \in \mathrm{R}\} \subseteq \Omega$,

(6) $z'(\xi) = \frac{a}{1 + |\xi|} + \mathrm{i}$ for every $\xi \in \mathrm{R}$.

Regarding (1) we can rewrite the assumptions of Proposition 2.4 in the form

(7) the function R is analytic in Ω,

(8) $\|R(z)\| \leqq K(1 + |z|)^{\nu}$ for every $z \in \Omega$.

It is easy to prove from (1)–(3), (7) and (8) by means of Cauchy's integral theorem that

$$\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\lambda^p} \frac{1}{\lambda^{l+\nu+2}} R(\lambda) = \frac{p!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma} \frac{R(z)}{z^{l+\nu+2}(z - \lambda)^{p+1}} \, \mathrm{d}z$$

for every $\lambda > \omega$, $l \in \{0, 1, \ldots\}$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$.

This identity can by written in the following form used below:

$$(9)\quad \frac{(\lambda-\omega)^{p+1}}{p!}\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\lambda^p}\frac{1}{\lambda^{l+\nu+2}}R(\lambda)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{R(z)}{z^{l+\nu+2}}\left(\frac{\lambda-\omega}{z-\lambda}\right)^{p+1}\mathrm{d}z$$

for every $\lambda > \omega$, $l \in \{0, 1, \ldots\}$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$.
Let us recall that, as is well known,

$$(10)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\eta^2}\,\mathrm{d}\eta=\pi\,.$$

Further, (4) and (6) immediately imply

$$(11)\quad \frac{1+|z(\xi)|}{z(\xi)}\leqq 2\,,\quad |z(\xi)|\geqq\sqrt{(2+\xi^2)}\,,\quad |z'(\xi)|\leqq 1+a\quad\text{for every}\quad \xi\in\mathrm{R}.$$

Let us now consider the case $a = 0$.
In this case we have

$$\left|\frac{\lambda-\omega}{z(\xi)-\omega}\right|=\left|\frac{\lambda-\omega}{z(\xi)-\omega-(\lambda-\omega)}\right|=\left|\frac{\lambda-\omega}{\mathrm{i}\xi-(\lambda-\omega)}\right|=\frac{\lambda-\omega}{[(\lambda-\omega)^2+\xi^2]^{1/2}}\leqq 1$$

for every $\lambda > \omega$ and $\xi \in \mathrm{R}$ and consequently

$$(12)\quad \left|\frac{\lambda-\omega}{z(\xi)-\omega}\right|^{p+1}\leqq 1\ \text{for every}\ \lambda>\omega\ \text{and}\ \xi\in\mathrm{R}.$$

Let us denote by m an integer such that

$$(13)\quad m-1<\nu+2\leqq m.$$

It is clear from (11) and (13) that

$$(14)\quad \frac{1}{|z(\xi)|^{m-\nu-2}}\leqq 1\ \text{for every}\ \xi\in\mathrm{R}.$$

It follows from (4), (5) and (8)–(14) that

$$(15)\quad \left\|\frac{(\lambda-\omega)^{p+1}}{p!}\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\lambda^p}\frac{1}{\lambda^m}R(\lambda)\right\|=\left\|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(z(\xi))}{z(\xi)^m}\left(\frac{\lambda-\omega}{z(\xi)-\lambda}\right)^{p+1}z'(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\|\leqq$$

$$\leqq\frac{K}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+|z(\xi)|)^\nu}{|z(\xi)|^{\nu+2}}\,\mathrm{d}\xi\leqq\frac{K}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2^\nu}{2+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi\leqq$$

$$\leqq\frac{2^\nu K}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi\leqq\frac{2^\nu K}{2}\ \text{for every}\ \lambda>\omega\ \text{and}\ p\in\{0,1,\ldots\}.$$

Now we suppose $a > 0$.

We easily see from (3), (4) and (6) that under this hypothesis

(16) $\operatorname{Re} z(\xi) - \omega \geqq 0$ and $|\operatorname{Im}(z(\xi) - \omega)| \geqq \frac{1}{a} \operatorname{Re}(z(\xi) - \omega)$ for every $\xi \in \mathrm{R}$.

Using Lemma 2.3 we obtain from (16) that

(17) $$\left|\frac{\lambda - \omega}{z(\xi) - \lambda}\right|^{p+1} = \left|\frac{\lambda - \omega}{z(\xi) - \omega - (\lambda - \omega)}\right|^{p+1} = \left|\frac{1}{1 - \dfrac{z(\xi) - \omega}{\lambda - \omega}}\right|^{p+1} =$$

$$= \left|\frac{1}{1 - \dfrac{(p+1)\dfrac{z(\xi) - \omega}{\lambda - \omega}}{p+1}}\right|^{p+1} \leqq \exp\left[(2 + \log(1 + a^2))(p+1)\frac{\operatorname{Re}(z(\xi) - \omega)}{\lambda - \omega}\right]$$

for every $\xi \in \mathrm{R}$, $\lambda > \omega$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$.

For the sake of brevity let us now denote by χ an integer such that

(18) $\chi - 1 < 2\{[2 + \log(1 + a^2)]\, a\} \leqq \chi$.

It follows from (4), (6), (17 and (18) that

(19) $$\left|\frac{\lambda - \omega}{z(\xi) - \lambda}\right|^{p+1} \leqq \exp\left[(2 + \log(1 + a^2))(p+1)\frac{a \log(1 + |\xi|)}{\lambda - \omega}\right] =$$

$= (1 + |\xi|)^{(\chi/2)((p+1)/(\lambda - \omega))}$ for every $\xi \in \mathrm{R}$, $\lambda > \omega$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$.

Finally, let us recall two elementary facts:

(20) $\dfrac{1 + |\xi|}{2 + \xi^2} \leqq 1$ for every $\xi \in \mathrm{R}$;

(21) $\dfrac{p+1}{T(\lambda - \omega)} \leqq 1$ for every $T > 0$, $\lambda > \omega$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$ such that

$\lambda > \dfrac{p+1}{T} + \omega$.

Using (4), (5), (8)–(11), (13), (14) and (18)–(21) we obtain

(22) $$\left\|\frac{(\lambda - \omega)^{p+1}}{p!}\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\lambda^p}\frac{1}{\lambda^{\chi T + m}} R(\lambda)\right\| =$$

$$= \left\|\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(z(\xi))}{z(\xi)^{\chi T + m}}\left(\frac{\lambda - \omega}{z(\xi) - \lambda}\right)^{p+1} z'(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\|R(z(\xi))\|}{|z(\xi)|^{\chi T + \nu + 2}\,|z(\xi)|^{m - \nu - 2}}\left|\frac{\lambda - \omega}{z(\xi) - \lambda}\right|^{p+1}|z'(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(1+|z(\xi)|)^{\nu}}{(\sqrt{(2+\xi^2)})^{\chi T+2}\,|z(\xi)|^{\nu}}(1+|\xi|)^{(\chi/2)((p+1)/(\lambda-\omega))}(1+a)\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{K(1+a)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1+|z(\xi)|}{|z(\xi)|}\right)^{\nu}\frac{(1+|\xi|)^{(\chi/2)((p+1)/(\lambda-\omega))}}{(\sqrt{(2+\xi^2)})^{\chi T}}\,\frac{1}{2+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi \leqq$$

$$\leqq \frac{K(1+a)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2^{\nu}\frac{(1+|\xi|)^{(\chi T/2)((p+1)/(T(\lambda-\omega)))}}{(2+\xi^2)^{\chi T/2}}\,\frac{1}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi \leqq$$

$$\leqq \frac{2^{\nu}K(1+a)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+|\xi|)^{\chi T/2}}{(2+\xi^2)^{\chi T/2}}\,\frac{1}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi \leqq$$

$$\leqq \frac{2^{\nu}K(1+a)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi \leqq \frac{2^{\nu}K(1+a)}{2}$$

for every $T \in \{1, 2, \ldots\}$, $\lambda > \omega$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$ such that $\lambda \geqq (p+1)/T + \omega$.

The statement of our proposition follows from (1), (2), (6), (13), (14), (17) and (20) if we take $M = 2^{\nu}K(1+a)/2$.

2.5. Theorem. *Let A be a linear operator from E into E. If there exist $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $K \geqq 0$ and $\nu \geqq 0$ such that*

(α) $\{z : z \in \mathrm{C},\ \mathrm{Re}\, z > a \log(1 + |\mathrm{Im}\, z|) + b\} \subseteq \varrho(A)$,

(β) $\|(zI - A)^{-1}\| \leqq K(1 + |z|)^{\nu}$ *for every* $z \in \mathrm{C}$ *such that* $\mathrm{Re}\, z > a \log(1 + |\mathrm{Im}\, z|) + b$,

then the following condition is fulfilled:

(D) *there exist* $M \geqq 0$, $\omega \geqq 0$, $\chi \in \{0, 1, \ldots\}$ *and* $m \in \{0, 1, \ldots\}$ *such that*

(a) $(\omega, \infty) \subseteq \varrho(A)$,

(b) $\left\|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\lambda^p}\frac{1}{\lambda^{\chi T+m}}(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leqq \frac{Mp!}{(\lambda-\omega)^{p+1}}$ *for every* $T \in \{1, 2, \ldots\}$, $\lambda > \omega$ *and* $p \in \{0, 1, \ldots\}$ *such that* $\lambda \geqq \frac{p+1}{T} + \omega$.

Proof. Let us denote $\Lambda = \varrho(A)$ = the resolvent set of the operator A and $R(z) = (zI - A)^{-1}$ for $z \in \varrho(A)$. It is well known that the set Λ is open and the funclion R is in this case analytic on Λ. Thus our theorem immediately follows from Proposition 2.4.

2.6. Remark. The converse of Theorem 2.5, provided the operator A is densely defined, follows from Oharu's results in [1] and from Theorem 1.2. A direct proof of this converse is not known to the author. It would be desirable to construct a proof not involving sufficiently "smoth" elements, i.e., elements of higher powers of the operator A, which is not convenient in particular if we consider the Cauchy problem for equations of higher degrees (cf. [2] and the following Theorem 2.9) because in this case great difficulties arise connected with the use of "smooth" elements produced by many noncommutative unbounded operators.

2.7. Second Characterisation Theorem. *Let A be a linear operator from E into E. Then the operator A is the generator of regular distribution semigroup if and only if it is densely defined and possesses the property* (D) *from the preceding theorem.*

Proof. Immediate consequence of Theorems 1.3 and 2.5 and of Oharu's results from [1].

2.8. Remark. For regular distribution semigroups it is possible to prove the following growth property (D′), similar and closely related to the property (D) from Theorem 2.5.

Let $\mathfrak{D}(\mathrm{R})$ be the linear space of infinitely differentiable real-valued functions on R with compact support.

If $\mathscr{T}$, as a mapping of $\mathfrak{D}(\mathrm{R})$ into $\mathsf{L}(E)$, is a regular distribution semigroup, then (D′) *there exist $M \geqq 0$, $\omega \geqq 0$, $\chi \in \{0, 1, \ldots\}$ and $m \in \{0, 1, \ldots\}$ such that*

$$\|\mathscr{T}(\varphi)\| \leqq M e^{\omega T} \sup_{\xi \in R} (|\varphi^{(\chi T+m)}(\xi)|)$$

for every $T \in \{1, 2, \ldots\}$ and $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathrm{R})$ satisfying support $(\varphi) \subseteq (-\infty, T]$.

2.9. Theorem. *Let $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$, be linear operators from E into E. If the operators $A_1, A_2, \ldots, A_n$ are closed and if there exist $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $K \geqq 0$ and $v \geqq 0$ such that*

(α) *$z^n I + z^{n-1} A_1 + \ldots + A_n$ is a one-to-one operator and its inverse is everywhere defined and bounded for every* $\operatorname{Re} z > a \log(1 + |\operatorname{Im} z|) + b$,

(β) *$\|A_i(z^n I + z^{n-1} A_1 + \ldots + A_n)^{-1}\| \leqq K(1 + |z|)^v$ for every $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ and for every $z \in \mathrm{C}$ such that* $\operatorname{Re} z > a \log(1 + |\operatorname{Im} z|) + b$,

then there exist $M \geqq 0$, $\omega \geqq 0$, $\chi \in \{0, 1, \ldots\}$ and $m \in \{0, 1, \ldots\}$ such that

(a) *$\lambda^n I + \lambda^{n-1} A_1 + \ldots + A_n$ is a one-to-one operator and its inverse is everywhere defined and bounded for every $\lambda > \omega$,*

(b) $$\left\| \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\lambda^p} \frac{1}{\lambda^{\chi T+m}} A_i(\lambda^n I + \lambda^{n-1} A_1 + \ldots + A_n)^{-1} \right\| \leqq \frac{Mp!}{(\lambda - \omega)^{p+1}}$$ *for every $T \in \{1, 2, \ldots\}$, $\lambda > \omega$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$ such that $\lambda > (p + 1)/T + \omega$ and for every $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Proof. Let us denote by Λ the set of all $z \in \mathrm{C}$ such that $z^n I + z^{n-1} A_1 + \ldots + A_n$

is a one-to-one operator and its inverse is everywhere defined and bounded. Moreover, let us write $R_0(z) = (z^n I + z^{n-1} A_1 + \ldots + A_n)^{-1}$ for every $z \in \Lambda$. As proved in [3], the set Λ is open and the functions $R_0, A_1 R_0, \ldots, A_n R_0$ are analytic in Λ. Taking now $R = A_i R_0$ for a fixed $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ we can apply Proposition 2.4 and our theorem follows.

2.10. Remark. The author does not know whether the converse of the preceding Theorem 2.9 holds in any form

2.11. Remark. The definitions of the so called logarithmic domain – cf. (1) in the proof of 2.4 – vary in [1], [2] and in the present paper. It seems that our definition is the simplest one nad it is possible to verify that all three are essentially equivalent, i.e., a logarithmic domain of one type can be immersed into that of another type with an unimportant change of parameters.

References

[1] *Oharu, S.:* Eine Bemerkung zur Charakterisierung der Distributionenhalbgruppen, Math. Ann. *204* (1973), 189–198.

[2] *Chazarain, J.:* Problèmes de Cauchy abstraits et applications à quelques problèmes mixtes, Journal of Functional Analysis, *7* (1971), 386–446.

[3] *Obrecht, E.:* Sul problema di Cauchy per le equazioni paraboliche asstratte di ordine *n*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, *53* (1975), 231–256.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

FIXED POINT THEOREMS FOR CONTRACTIVE MAPPINGS IN METRIC SPACES

JANUSZ MATKOWSKI, Bielsko-Biała

(Received March 17, 1975)

1. In this paper we extend Banach's and Kannan's fixed point theorems as well as some results of D. W. BOYD and J. S. W. WONG, A. MEIR and E. KEELER, S. REICH and C. S. WONG.

Our main result is the following

Theorem 1. *Let (X, d) be a complete metric space and let $T: X \to X$. Suppose that for every $\varepsilon > 0$ and $x, y \in X$,*

$$(1)\quad 0 < d(Tx, x), d(y, Ty), d(x, y), \frac{d(Tx, y) + d(x, Ty)}{2} \leqq \varepsilon \Rightarrow d(Tx, Ty) < \varepsilon .$$

If for every $\varepsilon > 0$ there is a $\delta > 0$ such that for $x, y \in X$,

$$(2)\quad \left.\begin{array}{l} \varepsilon < d(x, y) < \varepsilon + \delta \\ 0 < d(Tx, x), \dfrac{d(Tx, y) + d(x, Ty)}{2} \leqq \varepsilon, \ d(y, Ty) < \varepsilon + \delta \end{array}\right\} \Rightarrow d(Tx, Ty) \leqq \varepsilon ,$$

then for every $x \in X$, the sequence $\{T^n x\}$ converges. If, moreover, T is continuous or, given $\varepsilon > 0$, there is a μ, $0 < \mu < \varepsilon$ such that for $x, y \in X$

$$(3)\quad \left.\begin{array}{l} 0 < d(Tx, x), \dfrac{d(Tx, y) + d(x, Ty)}{2} \leqq \varepsilon \\ 0 < d(x, y), \quad d(y, Ty) < \mu \end{array}\right\} \Rightarrow d(Tx, Ty) < \varepsilon - \mu ,$$

then T has a unique fixed point $p \in X$ and for every $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} T^n x = p$.

Proof. Take an $x \in X$ and put $x_n = T^n x$, $n = 0, 1, \ldots$. We can assume that $d(x_n, x_{n-1}) > 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Note that

$$(4)\quad d(x_{n+1}, x_n) < d(x_n, x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

For an indirect proof of (4) suppose that $d(x_{n+1}, x_n) \geqq d(x_n, x_{n-1})$ for some $n \geqq 1$. Assuming $x = x_n$, $y = x_{n-1}$, $\varepsilon = d(x_{n+1}, x_n)$ we have $d(Tx, x) = \varepsilon$, $d(x, y) = d(y, Ty) \leqq \varepsilon$ and

$$d(Tx, y) + d(x, Ty) = d(x_{n+1}, x_{n-1}) \leqq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1}) \leqq 2\varepsilon .$$

Hence, using (1), we get $d(Tx, Ty) = d(x_{n+1}, x_n) < \varepsilon$. This contradiction proves (4) and, consequently, the sequence $\{d(x_{n+1}, x_n)\}$ converges. We shall show that

$$(5) \qquad c = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0 .$$

Suppose that $c > 0$. Then there is n_0 such that

$$c < d(x_{n+1}, x_n) < c + \delta(c) , \quad n \geqq n_0 .$$

Using (2) for $x = x_{n+1}$, $y = x_n$ we hence obtain $d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leqq c$, $n \geqq n_0$. This contradicts the previous inequality and proves (5).

Let us fix an $\varepsilon > 0$. Without loss of generality we can assume

$$(6) \qquad \delta = \delta(\varepsilon) < \varepsilon .$$

By (5) there is a k such that

$$(7) \qquad d(x_{n+1}, x_n) < \tfrac{1}{2}\delta , \quad n \geqq k .$$

We shall prove that

$$(8) \qquad d(x_{n+m}, x_n) < \varepsilon + \tfrac{1}{2}\delta , \quad n \geqq k ,$$

for $m = 1, 2, \ldots$. By (7), this is the case for $m = 1$. Suppose that the inequalities (8) hold for some $m \geqq 1$. If $d(x_{n+m}, x_n) \leqq \varepsilon$, then by (7)

$$d(x_{n+m+1}, x_n) \leqq d(x_{n+m+1}, x_{n+m}) + d(x_{n+m}, x_n) < \varepsilon + \tfrac{1}{2}\delta .$$

If $\varepsilon < d(x_{n+m}, x_n) < \varepsilon + \frac{1}{2}\delta$ then, by (7), we have for $x = x_{n+m}$, $y = x_n$,

$$\varepsilon < d(x, y) < \varepsilon + \tfrac{1}{2}\delta , \quad d(Tx, x) < \tfrac{1}{2}\delta , \quad d(y, Ty) < \tfrac{1}{2}\delta ,$$

$$0 < d(Tx, y) + d(x, Ty) \leqq d(Tx, x) + 2d(x, y) + d(y, Ty) < 2(\varepsilon + \delta) .$$

Now (2) yields $d(Tx, Ty) = d(x_{n+m+1}, x_{n+1}) \leqq \varepsilon$. Thus

$$d(x_{n+m+1}, x_n) \leqq d(x_{n+m+1}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n) < \varepsilon + \tfrac{1}{2}\delta ,$$

and induction completes the proof of (8).

Now (8) and (6) imply that $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence and, since X is complete, $\{x_n\}$ converges to a point $p \in X$.

Suppose that the condition (3) holds and $\varepsilon = d(Tp, p) > 0$. By the preceding part of the proof we can find n_0 such that $d(p, x_n) < \frac{1}{2}\mu$, $d(x_{n+1}, x_n) < \frac{1}{2}\mu$ for $n \geqq n_0$. Hence, assuming $x = p$, $y = x_n$, we have $d(Tx, x) = \varepsilon$, $d(x, y) < \mu$, $d(y, Ty) < \mu$ and

$$d(Tx, y) + d(x, Ty) \leqq d(Tp, p) + d(p, x_n) + d(p, x_{n-1}) \leqq \varepsilon + \mu < 2\varepsilon .$$

Using (3) we obtain $d(Tx, Ty) = d(Tp, Tx_n) < \varepsilon - \mu$. This implies

$$d(Tp, p) \leqq d(Tp, Tx_n) + d(x_{n+1}, p) < \varepsilon - \mu + \tfrac{1}{2}\mu < \varepsilon\,,$$

which is a contradiction and therefore $Tp = p$.

The uniqueness of the fixed point follows from (1).

Remark 1. Suppose that for every $\varepsilon > 0$ there is a $\delta > 0$ such that $\varepsilon \leqq d(x, y) < \varepsilon + \delta$ implies $d(Tx, Ty) < \varepsilon$, $x, y \in X$. Then (1) and (2) are fulfilled and T is continuous. Thus Theorem 1 generalizes the result of Meir and Keeler [2].

2. We apply theorem 1 to obtain a fixed point theorem which generalizes some results of Boyd and Wong [1], Reich [3] and Wong [4].

Theorem 2. *Let (X, d) be a complete metric space and let $T : X \to X$. Suppose that there exists a function $\alpha : \langle 0, \infty)^4 \to \langle 0, \infty)$ such that*

$$(9)\quad d(Tx, Ty) \leqq \alpha\left(d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(x, Ty)}{2}\right), \quad x, y \in X\,;$$

$$(10)\qquad \alpha(t, s_1, s_2, s_3) \text{ is increasing with respect to } s_1, s_2, s_3\,;$$

$$(11)\qquad 0 < t \leqq s \Rightarrow \alpha(t, s, s, s) < s\,;$$

$$(12)\qquad \limsup_{t,u \to s+} \alpha(t, u, u, u) < s \quad \text{for} \quad s > 0\,.$$

Then for every $x \in X$, the sequence $\{T^n x\}$ converges. If, moreover,

$$(13)\qquad \limsup_{t,u \to 0+} \alpha(t, s, u, s) < s \quad \text{for} \quad s > 0\,,$$

then T has a unique fixed point $p \in X$ and $\lim T^n x = p$ *for $x \in X$.*

Proof. Take an $\varepsilon > 0$ and note that

$$(14)\qquad 0 < t_i \leqq \varepsilon \ (i = 1, 2, 3, 4) \Rightarrow \alpha(t_1, t_2, t_3, t_4) < \varepsilon\,.$$

In fact, if $t_1 \geqq \max(t_2, t_3, t_4)$ then by (10)–(11) we have

$$\alpha(t_1, t_2, t_3, t_4) \leqq \alpha(t_1, t_1, t_1, t_1) < t_1 \leqq \varepsilon\,.$$

If $t_1 < s = \max(t_2, t_3, t_4)$ then by (10)–(11) we have

$$\alpha(t_1, t_2, t_3, t_4) \leqq \alpha(t_1, s, s, s) < s \leqq \varepsilon$$

which proves (14).

It follows from (12) that for every $\varepsilon > 0$ there is a $\delta > 0$ such that

$$\varepsilon < u\,, \quad s < \varepsilon + \delta \Rightarrow \alpha(u, s, s, s) < \varepsilon\,.$$

Hence and from (10)–(11) we easily obtain

$$(15)\qquad \varepsilon < t_1 < \varepsilon + \delta\,, \quad 0 < t_2, t_3, t_4 < \varepsilon + \delta \Rightarrow \alpha(t_1, t_2, t_3, t_4) < \varepsilon\,.$$

Finally, the condition (13) implies that for every $\varepsilon > 0$ there is a μ, $0 < \mu < \varepsilon$, such that

$$(16) \qquad 0 < t_1, t_3 < \mu \Rightarrow \alpha(t_1, \varepsilon, t_3, \varepsilon) < \varepsilon - \mu .$$

To prove (16) we put $s = \limsup_{t_1, t_3 \to 0} \alpha(t_1, \varepsilon, t_3, \varepsilon)$. By (13) there is a $\bar{\mu} > 0$ such that for $0 < t_1, t_2 < \bar{\mu}$ we have $\alpha(t_1, \varepsilon, t_3, \varepsilon) < \varepsilon - \frac{1}{2}(\varepsilon - s)$. Evidently, $\mu = \min(\bar{\mu}, \frac{1}{2}(\varepsilon - s)$ satisfies the condition (16).

Now, setting $t_1 = d(x, y)$, $t_2 = d(x, Tx)$, $t_3 = d(y, Ty)$, $t_4 = \frac{1}{2}(d(x, Ty) + d(Tx, y))$ and taking into account (9) and (14)–(16) we see that all the assumptions of Theorem 1 are fulfilled. This completes the proof.

Remark 2. If α does not depend on t_2, t_3, t_4 then the condition (9) takes the form $d(Tx, Ty) \leqq \gamma(d(x, y))$, $x, y \in X$. Suppose that $\gamma(t) < t$ for $t > 0$ and γ is upper semicontinuous from the right. Then the conditions (10)–(13) are fulfilled, and, consequently, Theorem 2 implies the result of Boyd and Wong [1].

Theorem 2 generalizes also the results of S. Reich ([3], Th. 1) and C. S. Wong ([4], Th. 1).

Remark 3. In this paper "increasing" means nondecreasing. Note that in Theorem 2 the function α need not be increasing with respect to the first variable (cf. Remark 2).

The author thanks the referee for his valuable remarks.

References

[1] *D. W. Boyd, J. S. W. Wong:* On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math. Soc., *20* (1969), 458–464.

[2] *A. Meir, Emmet Keeler:* A theorem on contraction mappings, J. Math. Anal. Appl., *28* (1969), 326–329.

[3] *S. Reich:* Fixed points of contractive functions, Boll. Un. Mat. Ital., *5* (1972), 26–42.

[4] *C. S. Wong:* Generalized contractions and fixed point theorems, Proc. Amer. Math. Soc., *42* (1974), 409–418.

Author's address: 43 300 Bielsko-Biała, Lubertowicza 3/1, Poland.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

EXPRESSING RATIONALS AS A SUM OF A SMALL NUMBER OF UNIT FRACTIONS

WILLIAM A. WEBB, Pullman

(Received May 11, 1977)

I. INTRODUCTION

For a given rational number a/b, we wish to consider the solvability of the equation

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \tag{1}$$

where the x_i are integers (not necessarily positive). For a fixed positive integer a, let $L = L(a)$ be the smallest value of n for which (1) is solvable for all sufficiently large integers b.

Even if the x_i are required to be positive, it is clear that $L \leqq a$. Although a well-known conjecture of SCHINZEL [2] is that $L = 3$ for all $a \geqq 3$, no one has succeeded in finding an improvement on the trivial estimate for even one value of a.

A similar result is conjectured for the case under discussion, where the x_i may be negative. This problem has proved to be somewhat easier, and it is known that $L = 3$ for $3 \leqq a \leqq 35$. This result can be used to show that

$$L \leqq 3\left(\left[\frac{a}{35}\right]\right) + 1\,,$$

where [ ] is the greatest integer function. Also, some minor improvements of this estimate are fairly easy to obtain.

The principal objective of this paper is to obtain a significantly better upper bound for L; namely one of order $\log a$.

II. APPROXIMATIONS USING SMALL NUMERATORS

Before proving the estimate mentioned above, we will need some preliminary results. These results, concerning Farey fractions and approximations using small numerators, are also interesting in their own right.

Most problems in rational approximation involve the existence of a good approximation c/d to some number, where d is small. We will be interested in approximating, or more precisely, in decomposing a given rational, using fractions with small numerators.

Let a/b be a reduced rational number, $0 < a/b < 1$. We will approximate a/b using a sequence of fractions $a_0/b_0 = a/b$, a_1/b_1, $a_2/b_2 \ldots$, to be defined below.

Let $\mathfrak{F}_n$ denote the Farey series of order n. We will also use the following special notation. Write the triple $T = (i\,j\,k)$ to mean $a_i/b_i < a_j/b_j < a_k/b_k$ are three consecutive elements of $\mathfrak{F}_{b_j}$. Note that this implies $a_i + a_k = a_j$ and $b_i + b_k = b_j$, Also, write the five-tuple $F = (i\,j\,k : x\,y)$ to mean $T = (i\,j\,k)$ and $a = xa_i + ya_k$. $b = xb_i + yb_k$.

We now define the sequence $\{a_i/b_i\}$ by specifying successive triples T_m. Let $T_1 = (1\,0\,2)$, so that $a_1/b_1 < a_0/b_0 < a_2/b_2$ are consecutive elements of $\mathfrak{F}_{b_0} = \mathfrak{F}_b$. Note that $F_1 = (1\,0\,2\colon\ 1\,1)$.

Now, given a triple $T_{m-2} = (i\,j\,k)$ we define T_{m-1} by choosing a_m/b_m such that

$$T_{m-1} = \begin{cases} (i\,k\,m) & \text{if} \quad b_i < b_k\,, \\ (m\,i\,k) & \text{if} \quad b_i > b_k\,. \end{cases}$$

Note that the only case in which $b_i = b_k$ is when $(i\,j\,k)$ represents $\frac{0}{1}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{1}$, at which point the sequence must terminate anyway. The fraction a_m/b_m is the next term in the sequence.

Lemma 1. *If* $F_{m-2} = (i\,j\,k\colon\ x\,y)$ *then* $F_{m-1} = (m\,i\,k\colon\ x\,x + y)$ *or* $F_{m-1} = (i\,k\,m\colon\ x + y\,y)$.

Proof. By definition of the sequence $\{a_i/b_i\}$ we know that either $T_{m-1} = (m\,i\,k)$ or $T_{m-1} = (i\,k\,m)$. In the former case $a = xa_i + ya_k = x(a_m + a_k) + ya_k = xa_m + (x + y)\,a_k$. In the later case $a = xa_i + ya_k = xa_i + y(a_i + a_m) = (x + y)\,a_i + ya_m$. Similar calculations hold for b.

Lemma 2. *If* $F_n = (i\,j\,k\colon\ x\,y)$ *then* $ab_i - ba_i = y$ *and* $ab_k - ba_k = -x$.

Proof. Use induction on n. $F_1 = (1\,0\,2\colon 1\,1)$ and $ab_1 - ba_1 = 1$, $ab_2 - ba_2 = -1$ by the well-known property of $\mathfrak{F}_b$. [1, Theorem 28]

Now suppose the result is true for $F_{m-2} = (i\,j\,k\colon x\,y)$. If $F_{m-1} = (m\,i\,k\colon x\,x + y)$ then $ab_m - ba_m = a(b_i - b_k) - b(a_i - a_k) = (ab_i - ba_i) - (ab_k - ba_k) = y + x$ by the induction hypothesis. ($ab_k - ba_k = -x$ following immediately from the induction hypothesis.) A similar calculation holds if $F_{m-1} = (i\,k\,m\colon x + y\,y)$. Note that the conclusion of Lemma 2 can be witten as:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_i}{b_i} + \frac{y}{bb_i}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a_k}{b_k} - \frac{x}{bb_k}.$$

In the above procedure it is clear that $x + y$ is monotonically increasing, and the sequence does not terminate until $x + y = b > a$. Thus, for any real number λ, $1 < \lambda < a$, we eventually encounter an F_m where $x < \lambda$, $y < \lambda$, and $x + y \geqq \lambda$. When this occurs we must have either $a_i < a/\lambda$ or $a_k < a/\lambda$, for the following reasons. Assume $a_i \geqq a/\lambda$ and $a_k \geqq a/\lambda$. Then $a = xa_i + ya_k \geqq (x + y)\, a/\lambda \geqq a$ with strict inequality (and hence a contradiction) if $a_i > a/\lambda$ or $a_k > a/\lambda$ or $x + y > \lambda$. Also, if $a_i = a_k = a/\lambda$ and $x + y = \lambda$ then by Lemma 2, $\lambda = x + y = ba_k - ab_k + + ab_i - ba_i = a(b_i - b_k)$. So $b_i - b_k = \lambda/a$ and thus λ/a and a/λ are both integers which implies $a = \lambda$ contradicting the fact that $\lambda < a$.

Theorem 1. *For $0 < a/b < 1$ and every integer $n > 1$, there exist integers x_i, z_i such that*

$$\frac{a}{b} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{z_i} \quad \text{and} \quad |x_i| < a^{1/n}.$$

Proof. Let $\lambda = a^{1/n}$. By the above remarks

$$\frac{a}{b} = \frac{x_1}{z_1} + \frac{A_1}{B_1} \quad \text{where} \quad |x_1| < a^{1/n} \quad \text{and} \quad A_1 < a/\lambda = a^{(n-1)/n}.$$

Similarly,

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{x_2}{z_2} + \frac{A_2}{B_2} \quad \text{where} \quad |x_2| < a^{1/n} \quad \text{and} \quad A_2 < A_1/\lambda < a/\lambda^2 = a^{(n-2)/n}.$$

Proceeding in this manner, we obtain in general

$$\frac{a}{b} = \frac{x_1}{z_1} + \ldots + x_r z_r + \frac{A_r}{B_r} \quad \text{where} \quad |x_i| < a^{1/n} \quad \text{and}$$

$$A_r < A_{r-1}/\lambda < \ldots < a/\lambda^r < a^{(n-r)/n}.$$

Letting $r = n - 1$, we obtain the desired result.

Professor M. J. Knight, in a private communication, has noted that Theorem 1 can also be proved using geometry of numbers.

III. AN ESTIMATE FOR L

We are now ready to state and prove our principal result.

Theorem 2. *For a given positive integer a and all integers b sufficiently large, the equation (1) is solvable in integers x_i, where $n \leqq 3 \log a/\log 36 + 3$.*

Proof. Following the same procedure as in the proof of Theorem 1, with $\lambda = 36$, we obtain

$$\frac{a}{b} = \sum_{i=1}^{s} \frac{y_i}{z_i} + \frac{A_s}{B_s} \quad \text{where} \quad |y_i| < 36 \quad \text{and} \quad A_s < a/36^s.$$

Choose s so that $36^s \leqq a < 36^{s+1}$. Then

$$\frac{a}{b} = \sum_{i=1}^{s+1} \frac{y_i}{z_i} \quad \text{where} \quad |y_i| < 36 .$$

By [3, Theorem 4] each

$$\frac{y_i}{z_i} = \frac{1}{x_{i_1}} + \frac{1}{x_{i_2}} + \frac{1}{x_{i_3}}$$

so $L \leqq 3(s + 1)$. The condition that b is sufficiently large guarantees that the z_i are sufficiently large also. We now note that $s \leqq \log a/\log 36$, which completes the proof of the theorem. We also note that for large values of a, $n \leqq 3 \log a/\log 36 + 3 < < \log a$ where log denotes the natural logarithm.

IV. CONCLUDING REMARKS

The bound on L given in Theorem 2 is still a long way from the conjectured result, so an improved estimate would be of interest. The same conjecture suggests that the result in Theorem 1 is probably not the best possible when $n \geqq 3$. However, we do have the following result when $n = 2$.

Theorem. 3 *For* $0 < a/b < 1$ *there exist integers* x_1, x_2, z_1, z_2 *such that*

$$\frac{a}{b} = \frac{x_1}{z_1} + \frac{x_2}{z_2} \quad \textit{and} \quad |x_i| < \sqrt{a} .$$

Moreover, the bound on the $|x_i|$ *is the best possible.*

Proof. By Theorem 1, we need only prove the last statement.

Let $a = (n + 1)^2 - 1 = n^2 + 2n$ and let b be a prime such that $b \equiv n + 1 \pmod{a}$. Infinitely many such primes exist since $(n + 1, a) = 1$.

By Theorem 1

$$\frac{a}{b} = \frac{x_1}{z_1} + \frac{x_2}{z_2} \quad \text{where} \quad |x_i| \leqq n . \tag{2}$$

Now, assume (2) holds where $|x_i| \leqq n - 1$. Then by Theorem 1′ of [4] there exist $d_1, d_2 \mid b$ such that $x_1 d_1 + x_2 d_2 = ka$ for some integer $k \neq 0$. Since b is prime, its only divisors are ± 1, $\pm b$. If $|d_1 d_2| = 1$ or b^2 then $x_1 d_1 + x_2 d_2 = ka$ is possible only for $k = 0$, which is the excluded case.

Thus it suffices to show that $x_1 + bx_2 \equiv x_1 + (n + 1)x_2 \not\equiv 0 \pmod{n^2 + 2n}$ for all $|x_i| \leqq n - 1$ except $x_1 = x_2 = 0$. But this follows immediately from the fact that

$$2 \leqq |x_1 + (n + 1)x_2| \leqq n^2 + n - 2\,.$$

It would still be quite interesting to know if Theorem 1 can be improved for $n \geqq 3$.

References

[1] *G. H. Hardy* and *E. M. Wright:* An Introduction to the Theory of Numbers, London, (1960):

[2] *W. Sierpiński:* Sur les décompositions de nombres rationnels in fractions primaires, Mathesis *65*, (1956), 16—32.

[3] *B. M. Steward* and *W. A. Webb:* Sums of fractions with bounded numerators, Can. J. Math. *18*, (1966), 999—10003.

[4] *W. A. Webb:* On the diophantine equation $k/n = a_1/x_1 + a_2/x_2 + a_3/x_3$, Časopis Pěst. Mat., *101*, (1976), 360—365.

Author's address: Washington State University, Pullman, Washington 99 163, U.S.A.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

НЕКОТОРЫЕ ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

И. И. МИХАЙЛОВ, Иваново

(Поступило в редакцию 10/IX. 1977 г.)

Рассмотрим уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 + 2t^3 = 0 \tag{1}$$

в целых числах, таких, что $(x, y, z, t) = 1$.

Ясно, что среди трех чисел x, y, z два — одинаковой чётности. Пусть для определенности таковыми являются числа x и y. Положим $x = a + b$, $y = a - b$, где a, b — целые числа. В результате подстановки уравнение (1) примет вид:

$$2a^3 + 6ab^2 + z^3 + 2t^3 = 0\,. \tag{2}$$

Пусть в (2) $t = -a$, тогда $z^3 = -6ab^2$, откуда ясно, что $z = 6c$ (c — целое), после чего имеем: $36c^3 = -ab^2$. Потребуем, чтобы в дальнейшем $(a, b) = 1$, так как в противном случае $(x, y, z, t) \neq 1$. Пусть $a = mu^3$, $b = nv^3$ (u, v — целые, причем $(u, v) = 1$, m, n — натуральные, причем $(m, n) = 1$, и, кроме того, $(m, v) = 1$, $(n, u) = 1$). Тогда $c = -uv^2$, $mn^2 = 36$. Для натуральных m и n, таких, что $(m, n) = 1$, имеем, как легко видеть, четыре возможности: $(m, n) = (1, 6), (4, 3), (9, 2), (36, 1)$. Соответственно получаем четыре тождества:

$$(36u^3 + v^3)^3 + (36u^3 - v^3)^3 + (-6uv^2)^3 + 2(-36u^3)^3 = 0\,, \tag{3}$$

где $(2, v) = 1$, $(u, v) = 1$, $(3, v) = 1$,

$$(9u^3 + 2v^3)^3 + (9u^3 - 2v^3)^3 + (-6uv^2)^3 + 2(-9u^3)^3 = 0\,, \tag{4}$$

где $(3, v) = 1$, $(2, u) = 1$, $(u, v) = 1$,

$$(4u^3 + 3v^3)^3 + (4u^3 - 3v^3)^3 + (-6uv^2)^3 + 2(-4u^3)^3 = 0\,, \tag{5}$$

где $(2, v) = 1$, $(3, u) = 1$, $(u, v) = 1$,

$$(u^3 + 6v^3)^3 + (u^3 - 6v^3)^3 + (-6uv^2)^3 + 2(-u^3)^3 = 0\,, \tag{6}$$

где $(2, u) = 1$, $(u, v) = 1$, $(3, u) = 1$.

Тождества (3) – (6) легко объединяются в одно:

$$(A^2u^3 + Bv^3)^3 + (A^2u^3 - Bv^3)^3 + (-6uv^2)^3 + 2(-A^2u^3)^3 = 0\,,$$

где $(A, B) = (6, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 6)$, или, что то же, АВ = 6 (А, В – целые), $(\mathrm{A}, v) = 1$, $(\mathrm{B}, u) = 1$, $(u, v) = 1$.

Отметим попутно, что тождество (5) получено также в работе [1]. При $u = 1$ тождество (6) дает известное представление числа 2 в виде суммы трех кубов целых чисел [2], стр. 37.

Каждое из тождеств (3) – (6) при выполнении соответствующих условий описывает своё множество решений уравнения (1) в целых числах, непересекающееся с тремя другими.

Игнорируя эти условия, т.е. не исключая возможности $(x, y, z, t) \neq 1$ (считая, однако, что $(u, v) = 1$), легко доказать, что решения уравнения (1) в целых числах могут быть описаны лишь одним тождеством. В качестве базисного может быть выбрано любое из них. В частности, например, тождество (6). В самом деле, пусть в (6) $u = 6\bar{u}$ ($\bar{u}$ – целое число), тогда получим тождество вида (3). Если $u = 3\bar{u}$, то получаем тождество вида (4). При $u = 2\bar{u}$ имеем тождество вида (5).

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Уравнение* (1) *имеет бесконечное множество решений в целых взаимно простых числах* x, y, z, t, *при этом* $wx = u^3 + 6v^3$, $wy = u^3 - 6v^3$, $wz = -6uv^2$, $wt = -u^3$, *где* w, u, v – *целые числа, причем* $(u, v) = 1$, $w = (u, 6)$.

Очевидны и такие утверждения

Теорема 2. *Уравнение* $x^3 + y^3 = z^3 + 2t^3$ *имеет бесконечное множество решений в натуральных числах (взаимно простых), при этом* $wx = u^3 + 6v^3$, $wy = u^3 - 6v^3$, $wz = 6uv^2$, $wt = u^3$, *где* u, v, w-*натуральные, причем* $(u, v) = 1$, $w = (u, 6)$, $u > v\sqrt[3]{6}$.

Теорема 3. *Уравнение* $x^3 = y^3 + z^3 + 2t^3$ *имеет бесконечное множество решений в натуральных взаимно простых числах, при этом* $wx = 6v^3 + u^3$, $wy = 6v^3 - u^3$, $wz = 6uv^2$, $wt = u^3$, *где* w, u, v-*натуральные, причем* $(u, v) = 1$, $w = (u, 6)$, $v\sqrt[3]{(6)} > u$.

Из тождеств (3) – (6) вытекает также

Теорема 4. *Система уравнений*

$$z^3 = x^3 + y^3 + 2t^3 = x_1^3 + y_1^3 + 2t_1^3 = x_2^3 + y_2^3 + 2t_2^3 = x_3^3 + y_3^3 + 2t_3^3$$

имеет бесконечно много решений в целых числах:

$$z = 6uv^2\,,\quad x = u^3 + 6v^3\,,\quad y = u^3 - 6v^3\,,\quad t = -u^3\,, \tag{7}$$

$$x_1 = 4u^3 + 3v^3\,,\quad y_1 = 4u^3 - 3v^3\,,\quad t_1 = -4u^3\,,\quad x_2 = 9u^3 + 2v^3\,,$$

$$y_2v = 9u^3 - 2v^3\,, \quad t_2 = -9u^3\,, \quad x_3 = 36u^3 + v^3\,,$$
$$y_3 = 36u^3 - v^3\,, \quad t_3 = -36u^3\,,$$

где u, v — целые числа.

Легко видеть, что теорема 4 в известном смысле обобщает один из результатов работы [1].

Заметим далее, что согласно полученным формулам выполняется условие: $x + y = -2t$ и т.п., из чего вытекает

Следствие 1. *Система уравнений*

$$A^2z^3 = B(x+y)(x-y)^2 = B(x_1+y_1)(x_1-y_1)^2 =$$
$$= B(x_2+y_2)(x_2-y_2)^2 = B(x_3+y_3)(x_3-y_3)^2$$

где A, B — целые числа, такие, что $AB = 6$, имеет бесконечно много решений в целых числах, при этом $z = 2Buv^2$; и $x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ определяются в соответствии с формулами (7).

Полагая в (6) $u = p^k$ (p — целое), имеем

Следствие 2. *Уравнение $x^3 + y^3 + z^3 + 2t^{9k} = 0$ разрешимо для любого целого t, причем при любом натуральном k имеет бесконечное множество целочисленных решений.*

Легко доказывается также и

Следствие 3. *Уравнение $x^3 + y^3 + 2t^3 = z^{6k}$ имеет бесконечное множество целочисленных решений для любого натурального k и разрешимо для любого целого z, кратного* 6.

В самом деле, пусть в (6) $u = 6p^2$, а затем $6vp = q^k$ (p, q — целые, k — натуральное), что возможно, например, при $v = 2^{k-1}r^k$, $p = 3^{k-1}s^k$ (r, s — целые) и т.п.

Замечание. Исходя из тривиально конструируемого тождества

$$(a+b)^3 + (a-b)^3 + (-6ab^2) + 2(-a)^3 = 0\,, \tag{8}$$

где a, b — целые числа, нетрудно доказать справедливость следующих результатов.

Утверждение 1. *Уравнение $x^3 + y^3 + 2t^{9(4k+1)} = z^4$ имеет бесконечное множество целочисленных решений для любого целого $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ и разрешимо при любом целом t, являющемся ушестеренным биквадратом целого.*

Действительно, пусть в (8) $a = 6c^2$ (c — целое), а затем $6bc = d^2$ (d — целое), где $b = \alpha^2$, $c = 6\beta^2$ (α, β — целые). Положим далее $\beta = \gamma^3$ (γ — целое), и потребуем, чтобы $6\gamma^4 = \varepsilon^m$ (ε — целое), тогда $\varepsilon = 6\delta$ (δ — целое), откуда $\gamma^4 = 6^{m-1}\delta^m$

(m – натуральное). Пусть $m = 4k + 1$ ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$), тогда, если $\delta = \varrho^4$ (ϱ – целое), то и получаем тождество, доказывающее сформулированное утверждение.

Утверждение 2. *Уравнение* $x^3 + y^3 + 2t^3 = \mu z^4$ *имеет бесконечно много целочисленных решений при любом целом* μ *и разрешимо при любом целом* z*, кратном* 6.

Доказательство. Пусть в (8) $a = 6c^2$, при этом в условии $6bc = d^2$ положим: $b = A\alpha^2\mu$, $c = B\beta^2\mu$(α, β, μ, A, B – целые, причем $AB = 6$), в результате получаем тождество

$$(6B^2\beta^4\mu + A\alpha^2)^3 + (6B^2\beta^4\mu - A\alpha^2)^3 + 2(-6B^2\beta^4\mu)^3 = \mu(6\alpha\beta)^4 ,$$

которое и доказывает утверждение.

И, наконец, отметим, что т.к. $x + y = -2t$, то из утверждения 2 очевидным образом вытекает

Следствие 4. *Уравнение* $3(x + y)(x - y)^2 = 4\mu z^4$ *для любого целого* μ *имеет бесконечно много решений в целых числах и разрешимо при любом целом* z*, кратном* 6.

Литература

[1] *Gloden A.*: Notes on Diophantine equation, Scripta Mathematica, *19* (1953), N 2–3, 207–209.

[2] *W. Sierpiński:* Elementary theory of numbers, Warszawa, 1964.

Адрес автора: Иваново 14, д. 5, кв. 11, СССР.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

DISCRETE ANALOGUES OF WIRTINGER'S INEQUALITY FOR A TWO-DIMENSIONAL ARRAY

JARMILA NOVOTNÁ, Praha

(Received December 20, 1977)

In [4], G. PÓLYA and G. SZEGÖ studied the inequality

$$(*)\qquad \iint_D (f_x^2 + f_y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqq \Lambda^2 \iint_D f^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

where $f = 0$ on the boundary C of the domain of integration D. In [2], H. D. BLOCK dealt with the corresponding discrete problem. The inequality is given for the two-dimensional array

$$\{x_{ij}\}_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}\,.$$

In [3] we have shown a new, simpler proof of the discrete analogues of Wirtinger's inequality in case of n numbers $x_1, \ldots, x_n$. The proof was based on the use of trigonometric polynomials (see [1], pp. 13–20). The paper contains also some sharpenings of the inequalities obtained.

In the present paper, we establish the two-dimensional analogues of trigonometric polynomials. Using them we prove the discrete variations of (*) in a similar way as in [3]. To simplify the proofs, the inequalities are studied for arrays of the form $\{x_{ij}\}_{i,j=1}^n$. The results for

$$\{x_{ij}\}_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$$

could be proved in the same way.

Using the results established in [3] we prove some inequalities for the "asymmetrical" case, i.e. inequalities involving the series

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij} - x_{i+1,j})^2\,.$$

1. LIST OF THEOREMS FROM [3] USED IN THE PAPER

Theorem 1.1. *Let $x_1, \ldots, x_n$ be n real numbers such that*

$$(1.1)\qquad \sum_{i=1}^n x_i = 0\,.$$

Let us define $x_{n+1} = x_1$. *Then*

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1})^2 \geqq 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . \tag{1.2}$$

The equality in (1.2) *holds if and only if*

$$x_i = A \cos \frac{2\pi i}{n} + B \sin \frac{2\pi i}{n}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad A, B = \text{const.} \tag{1.3}$$

Theorem 1.2. *If* $x_1, \ldots, x_n$ *are* n *real numbers and* $x_1 = 0$, *then*

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 \geqq 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(2n-1)} \sum_{i=2}^{n} x_i^2 . \tag{1.4}$$

The equality in (1.4) *holds if and only if*

$$x_i = A \sin \frac{(i-1)\pi}{n}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad A = \text{const.} \tag{1.5}$$

Theorem 1.3. *If* $x_1, \ldots, x_n$ *are* n *real numbers, then*

$$\sum_{i=0}^{n} (x_i - x_{i+1})^2 \geqq 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)} \sum_{i=0}^{n} x_i^2 , \tag{1.6}$$

where $x_0 = x_{n+1} = 0$. *The equality in* (1.6) *holds if and only if*

$$x_i = A \sin \frac{i\pi}{n+1}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad A = \text{const.} \tag{1.7}$$

Theorem 1.4. *Let* $x_1, \ldots, x_n$ *be* n *real numbers satisfying* (1.1). *Then*

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 \geqq 4 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . \tag{1.8}$$

The equality in (1.8) *holds if and only if*

$$x_i = A \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad A = \text{const.} \tag{1.9}$$

2. SYMMETRICAL CASE

Notation. To simplify the form of inequalities, we shall write $D^2 x_{ij}$ instead of $(x_{ij} - x_{i+1,j})^2 + (x_{ij} - x_{i,j+1})^2$.

The basic theorem in this article is Theorem 2.1, the two-dimensional analogue of Theorem 1.1. Theorems 2.2 through 2.4 are analogues of Theorems 1.2 through 1.4. Theorem 2.5 is a sharpening of Theorem 2.1 and Theorem 2.6 is a sharpening of Theorem 2.4.

Theorem 2.1. *Let* $\{x_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ *be* n^2 *real numbers such that*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0 . \tag{2.1}$$

Let us define $x_{i,n+1} = x_{i1}, x_{n+1,i} = x_{1i}, i = 1, \ldots, n$. *Then*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D^2 x_{ij} \geqq 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 . \tag{2.2}$$

The equality in (2.2) *holds if and only if*

$$x_{ij} = A \cos \frac{2\pi i}{n} + B \sin \frac{2\pi i}{n} + C \cos \frac{2\pi j}{n} + D \sin \frac{2\pi j}{n}, \tag{2.3}$$

$$i, j = 1, \ldots, n, \quad A, B, C, D = \text{const.}$$

The proof of Theorem 2.1 will be given in Section 4.

Theorem 2.2. *Let* $\{x_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ *be* n^2 *real numbers such that* $x_{i1} = x_{1i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$. *Then (putting* $x_{n+1,j} = x_{nj}, x_{j,n+1} = x_{jn}$*)*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D^2 x_{ij} \geqq 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(2n-1)} \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} x_{ij}^2 . \tag{2.4}$$

The equality in (2.4) *holds if and only if*

$$x_{ij} = A \sin \frac{\pi(i-1)}{2n-1} + B \sin \frac{\pi(j-1)}{2n-1}, \tag{2.5}$$

$$i, j = 1, \ldots, n, \quad A, B = \text{const.}$$

Proof. We apply Theorem 2.1 to a new array $\{y_{kl}\}_{k,l=1}^{2(2n-1)}$ (analogously to the proof of Theorem 2 in [3]) defined as follows (schematically written in the form of a matrix):

$$\begin{array}{cccccccc}
x_{11}, \ldots, & x_{1n}, & x_{1n}, \ldots, & x_{12}, & -x_{11}, \ldots, & -x_{1n}, & -x_{1n}, \ldots, & -x_{12} \\
\vdots & & & & & & & \\
x_{n1}, \ldots, & x_{nn}, & x_{nn}, \ldots, & x_{n2}, & -x_{n1}, \ldots, & -x_{nn}, & -x_{nn}, \ldots, & -x_{n2} \\
x_{n1}, \ldots, & x_{nn}, & x_{nn}, \ldots, & x_{n2}, & -x_{n1}, \ldots, & -x_{nn}, & -x_{nn}, \ldots, & -x_{n2} \\
\vdots & & & & & & & \\
x_{21}, \ldots, & x_{2n}, & x_{2n}, \ldots, & x_{22}, & -x_{21}, \ldots, & -x_{2n}, & -x_{2n}, \ldots, & -x_{22} \\
-x_{11}, \ldots, & -x_{1n}, & -x_{1n}, \ldots, & -x_{12}, & x_{11}, \ldots, & x_{1n}, & x_{1n}, \ldots, & x_{12} \\
\vdots & & & & & & & \\
-x_{n1}, \ldots, & -x_{nn}, & -x_{nn}, \ldots, & -x_{n2}, & x_{n1}, \ldots, & x_{nn}, & x_{nn}, \ldots, & x_{n2} \\
-x_{n1}, \ldots, & -x_{nn}, & -x_{nn}, \ldots, & -x_{n2}, & x_{n1}, \ldots, & x_{nn}, & x_{nn}, \ldots, & x_{n2} \\
\vdots & & & & & & & \\
-x_{21}, \ldots, & -x_{2n}, & -x_{2n}, \ldots, & -x_{22}, & x_{21}, \ldots, & x_{2n}, & x_{2n}, \ldots, & x_{22},
\end{array}$$

$$y_{4n-1,l} = y_{l,4n-1} = 0 .$$

(2.5) follows from (2.3) for y_{kl} and from the equalities

$$y_{11} = y_{2n,1}, \quad y_{11} = y_{1,2n} .$$

Theorem 2.3. *Let* $\{x_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ *be* n^2 *real numbers such that* $x_{0j} = x_{n+1,j} = x_{j0} = x_{j,n+1} = 0, j = 1, \ldots, n$. *Then*

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} D^2 x_{ij} \geqq 8 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} x_{ij}^2 . \tag{2.6}$$

The equality in (2.6) *holds if and only if*

$$x_{ij} = A \sin \frac{i\pi}{n+1} \sin \frac{j\pi}{n+1}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad A = \text{const.} \tag{2.7}$$

Remark. 1. (2.6) is a discrete analogue of (*) for a special case $D = (0, \pi) \times (0, \pi)$, $\Lambda^2 = 2$. This inequality can be derived from (2.6).

2. Using the method of the proof of Theorem 2.2 with $\{y_{kl}\}_{k,l=1}^{2(n+1)}$ defined as follows (analogously to the proof of Theorem 3 in [3]):

$$\begin{matrix}
0, & 0, & \ldots, 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\
0, & x_{11}, & \ldots, x_{1n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\
\vdots & & & & & & \\
0, & x_{n1}, & \ldots, x_{nn}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\
0, & 0, & \ldots, 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\
0, & 0, & \ldots, 0, & 0, & -x_{11}, & \ldots, & -x_{1n} \\
\vdots & & & & & & \\
0, & 0, & \ldots, 0, & 0, & -x_{n1}, & \ldots, & -x_{nn} ,
\end{matrix}$$

$y_{2n+3,l} = y_{l,2n+3} = 0$, we could derive an inequality similar to (2.6) with the constant 4 instead of 8 at the right hand side and with the equality achieved only for $x_{ij} = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Proof. Choosing i fix, $1 \leqq i \leqq n$, we can apply Theorem 1.3 to the numbers x_{ij}, $j = 1, \ldots, n$. Adding these inequalities for i, $1 \leqq i \leqq n$, and applying similarly Theorem 1.3 to the numbers x_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, for j fix, $1 \leqq j \leqq n$, we obtain (2.6), (2.7).

Theorem 2.4. Let $\{x_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ *be* n^2 *real numbers satisfying* (2.1). *Then* (*putting* $x_{n+1,j} = x_{nj}$, $x_{j,n+1} = x_{jn}$)

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D^2 x_{ij} \geqq 4 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 . \tag{2.8}$$

The equality in (2.8) *holds if and only if*

$$x_{ij} = A \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n} + B \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad A, B = \text{const.} \tag{2.9}$$

Proof. Let us apply Theorem 2.1 to a new array $\{y_{kl}\}_{k,l=1}^{2n}$ defined as follows (analogously to the proof of Theorem 4 in [3]):

$$\begin{array}{c} x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{1n}, \ldots, x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1}, \ldots, x_{nn}, x_{nn}, \ldots, x_{n1} \\ x_{n1}, \ldots, x_{nn}, x_{nn}, \ldots, x_{n1} \\ \vdots \\ x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{1n}, \ldots, x_{11}, \end{array}$$

$y_{2n+1,l} = y_{l,2n+1} = y_{l1}$, which also satisfies (2.1). Then (2.8), (2.9) follow from (2.2), (2.3).

Theorem 2.5 (sharpening of Theorem 2.1 for n even). *Let $n = 2m$, $n \geqq 4$. Let $\{x_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ be n^2 real numbers satisfying* (2.1). *Let us define $x_{n+i,n+j} = x_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, m$. Then*

$$(2.10)\quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D^2 x_{ij} \geqq \tfrac{1}{4} \sin^2 \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} + x_{i+m,j+m})^2 + 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 .$$

The equality in (2.10) *holds if and only if x_{ij} satisfy* (2.3).

The proof of Theorem 2.5 will be given in Section 4.

3. ASYMMETRICAL CASE

Here we shall study inequalities involving $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2$ and $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - x_{i+1,j})^2$. To simplify the form of inequalities, we shall denote $A^2 x_{ij} = (x_{ij} - x_{i+1,j})^2$. To derive these inequalities we shall use Theorems 1.1 through 1.4.

Theorem 3.1. *Let $n = 2m$. Let $\{x_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ be n^2 real numbers such that $x_{i1} = x_{i,m+1} = c$, $i = 1, \ldots, n$, and*

$$(3.1)\quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0 .$$

Let us define $x_{n+1,j} = x_{1j}$, $j = 1, \ldots, n$. Then

$$(3.2)\quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A^2 x_{ij} \geqq 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 + 4n^2 c^2 \sin^2 \frac{\pi}{n} .$$

The equality in (3.2) *holds if and only if*

$$(3.3)\quad x_{ij} = \begin{cases} c + A_i \sin \dfrac{(j-1)\pi}{m}, & j = 1, \ldots, m, \quad i = 1, \ldots, n, \\ c + B_i \sin \dfrac{(j-m-1)\pi}{m}, & j = m+1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

where the numbers A_i, B_i do not depend on j and satisfy the relation

$$n^2 c + \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} (A_i + B_i) = 0 . \tag{3.4}$$

Proof. Take i fix, $1 \leqq i \leqq n$. Let us define one-dimensional arrays $\{y_k\}_{k=0}^{m}$, $\{z_k\}_{k=0}^{m}$ as follows: $y_k = x_{i,k+1} - c$, $z_k = x_{i,m+k+1} - c$. Then $y_0 = y_m = z_0 = z_m = 0$; applying Theorem 1.3 to the arrays $\{y_k\}_{k=1}^{m-1}$, $\{z_k\}_{k=1}^{m-1}$ and adding the obtained relations for i, $1 \leqq i \leqq n$, we obtain the statement of Theorem 3.1.

Theorem 3.2. *Let $\{x_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ be n^2 real numbers satisfying (3.1) and such that $x_{i1} = c$, $i = 1, \ldots, n$. Then*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} A^2 x_{ij} \geqq 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(2n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 + 4n^2 c^2 \sin^2 \frac{\pi}{2(2n-1)} . \tag{3.5}$$

The equality in (3.5) holds if and only if

$$x_{ij} = c + A_i \sin \frac{(j-1)\pi}{2n-1} , \tag{3.6}$$

where the numbers A_i do not depend on j and satisfy the relation

$$2n^2 c + \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2(2n-1)} \sum_{i=1}^{n} A_i = 0 . \tag{3.7}$$

Proof is similar to the previous one, but we apply Theorem 1.2 to the one-dimensional array $\{y_k\}_{k=1}^{n}$, $y_k = x_{ik} - c$, i fixed .

Theorem 3.3. *Let $\{x_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ satisfy the assumption of Theorem 3.2. Let us define $x_{n+1,j} = x_{1j} = c$, $j = 1, \ldots, n$. Then*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A^2 x_{ij} \geqq 4 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 + 4n^2 c^2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} . \tag{3.8}$$

The equality in (3.8) holds if and only if

$$x_{ij} = c + A_i \sin \frac{(j-1)\pi}{n} , \quad i, j = 1, \ldots, n , \tag{3.9}$$

where the numbers A_i do not depend on j and satisfy the relation

$$n^2 c + \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^{n} A_i = 0 . \tag{3.10}$$

Proof. Theorem 3.3 follows from Theorem 1.3 in a similar way as the previous two theorems or from Theorem 3.1 when defining the two-dimensional array $\{y_{kl}\}_{k,l=1}^{2n}$ as follows:

$$
\begin{array}{l}
x_{11}, \ldots, x_{1n}, \; x_{11}, \ldots, x_{1n} \\
\vdots \\
x_{n1}, \ldots, x_{nn}, \; x_{n1}, \ldots, x_{nn} \\
x_{11}, \ldots, x_{1n}, \; x_{11}, \ldots, x_{1n} \\
\vdots \\
x_{n1}, \ldots, x_{nn}, \; x_{n1}, \ldots, x_{nn} \, .
\end{array}
$$

In the previous three theorems the assumption (3.1) was very important. Now we shall show two more theorems without using this assumption. However, we have to assume that the constant $c = 0$. Theorems follow from Thorem 3.1 in a way analogous to the proofs in Section 2. We shall only define new arrays in the schematic form of a matrix.

Theorem 3.4. *Let* $\{x_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ *be* n^2 *real numbers such that* $x_{i1} = 0$, $i = 1, \ldots, n$. *Then*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} A^2 x_{ij} \geqq 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(2n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=2}^{n} x_{ij}^2 \, . \tag{3.11}$$

The equality in (3.11) *holds if and only if*

$$x_{ij} = A_i \sin \frac{(j-1)\pi}{2n-1}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad A_i \text{ do not depend on } j \, . \tag{3.12}$$

Proof. $\{y_{kl}\}_{k,l=1}^{2(2n-1)}$:

$$
\begin{array}{c}
x_{11}, \ldots, x_{1n}, \; x_{1n}, \ldots, x_{12}, \; -x_{11}, \ldots, -x_{1n}, \; -x_{1n}, \ldots, -x_{12} \\
\vdots \\
x_{n1}, \ldots, x_{nn}, \; x_{nn}, \ldots, x_{n2}, \; -x_{n1}, \ldots, -x_{nn}, \; -x_{nn}, \ldots, -x_{n2} \\
\mathbf{0},
\end{array}
$$

$y_{4n-1,l} = y_{1l}$; then $c = 0$, $n_1 = 2(2n-1)$.

Theorem 3.5. *Let* $\{x_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ *be* n^2 *real numbers such that* $x_{i0} = x_{i,n+1} = 0$, $i = 1, \ldots, n$. *Then*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} A^2 x_{ij} \geqq 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} x_{ij}^2 \, . \tag{3.13}$$

The equality in (3.13) *holds if and only if*

$$x_{ij} = A_i \sin \frac{j\pi}{n+1}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad A_i \text{ do not depend on } j \, . \tag{3.14}$$

Proof. $\{y_{kl}\}_{k,l=1}^{2(n+1)}$:

$$
\begin{array}{c}
0, \; x_{11} \ldots, x_{1n}, \; 0, \; -x_{11}, \ldots, -x_{1n} \\
\vdots \\
0, \; x_{n1}, \ldots, x_{nn}, \; 0, \; -x_{n1}, \ldots, -x_{nn} \\
\mathbf{0},
\end{array}
$$

$y_{2n+3,l} = y_{1l}$; then $c = 0$, $n_1 = 2(n+1)$.

4. PROOFS OF THEOREMS 2.1 AND 2.5

In a way analogous to the introduction of trigonometric polynomials in [1] we can show that for any array $\{x_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ there exist such numbers $\xi_0, \xi_p, \xi_p^*, \eta_p, \eta_p^*, p = 1, \ldots, m, \vartheta_{st}, \vartheta_{st}^*, \mu_{st}, \mu_{st}^*, s, t = 1, \ldots, m$, that

$$
\begin{aligned}
(4.1) \qquad x_{ij} = \xi_0 + \sum_{p=1}^{m} \left(\xi_p \cos pi \frac{2\pi}{n} + \xi_p^* \sin pi \frac{2\pi}{n} + \eta_p \cos pj \frac{2\pi}{n} + \right. \\
\left. + \eta_p^* \sin pj \frac{2\pi}{n} \right) + \sum_{s=1}^{m} \sum_{t=1}^{m} \left(\vartheta_{st} \cos si \frac{2\pi}{n} \sin tj \frac{2\pi}{n} + \right. \\
+ \vartheta_{st}^* \sin si \frac{2\pi}{n} \cos tj \frac{2\pi}{n} + \mu_{st} \cos si \frac{2\pi}{n} \cos tj \frac{2\pi}{n} + \\
\left. + \mu_{st}^* \sin si \frac{2\pi}{n} \sin tj \frac{2\pi}{n} \right), \quad i, j = 1, \ldots, n,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4.2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 = n^2 \xi_0^2 + \frac{n^2}{2} \sum_{p=1}^{m} (\xi_p^2 + \xi_p^{*2} + \eta_p^2 + \eta_p^{*2}) + \\
+ \frac{n^2}{4} \sum_{s=1}^{m} \sum_{t=1}^{m} (\vartheta_{st}^2 + \vartheta_{st}^{*2} + \mu_{st}^2 + \mu_{st}^{*2}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4.3) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D^2 x_{ij} = 2n^2 \sum_{p=1}^{m} (\xi_p^2 + \xi_p^{*2} + \eta_p^2 + \eta_p^{*2}) \sin^2 p \frac{\pi}{n} + \\
+ n^2 \sum_{s=1}^{m} \sum_{t=1}^{m} (\vartheta_{st}^2 + \vartheta_{st}^{*2} + \mu_{st}^2 + \mu_{st}^{*2}) \, . \\
. \left(\sin^2 s \frac{\pi}{n} + \sin^2 t \frac{\pi}{n} \right).
\end{aligned}
$$

From (2.1) it follows that

$$
(4.4) \qquad \xi_0 = 0 \, .
$$

Theorem 2.1 follows immediately from (4.1)–(4.4).

Using (4.1) and (4.2) we derive

$$
\begin{aligned}
(4.5) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} + x_{i+m,j+m})^2 = \\
= \frac{n^2}{2} \sum_{p=1}^{m} (\xi_p^2 + \xi_p^{*2} + \eta_p^2 + \eta_p^{*2}) [1 + (-1)^p]^2 + \\
+ \frac{n^2}{4} \sum_{s=1}^{m} \sum_{t=1}^{m} (\vartheta_{st}^2 + \vartheta_{st}^{*2} + \mu_{st}^2 + \mu_{st}^{*2}) \, . \, [1 + (-1)^s + (-1)^t + (-1)^{st}]^2 \, .
\end{aligned}
$$

Theorem 2.5 is a consequence of (4.1)–(4.5) in an analogous way as in [3] (the proof of Theorem 2.5).

References

[1] *Blaschke, W.*: Kreis und Kugel. Leipzig 1916, 1956.

[2] *Block, H. D.*: Discrete Analogues of Certain Integral Inequalities. Proc. Amer. Math. Soc., *8*, No. 4, 1957, pp. 852—859.

[3] *Novotná, J.*: Variations of Discrete Analogues of Wirtinger's Inequality. Časopis pro pěst. mat. *105* (1980), 278—285.

[4] *Pólya, G. - Szegö, G.*: Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Princeton, Princeton University Press 1951.

Author's address: 113 02 Praha 1, Spálená 51 (SNTL—Nakladatelství technické literatury).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

EINE ISOPERIMETRISCHE UNGLEICHUNG FÜR DIE PAARE DER RAUMKURVEN

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingegangen am 5. Mai 1978)

Es seien k und K zwei geschlossene einfache rektifizierbare Kurven, welche in derselben euklidischen Ebene liegen. Wir bezeichnen mit l und L ihre Längen und mit f und F die Flächeninhalte der durch k und K begrenzten Bereiche. Sind diese Bereiche konvex, so kann man ihren Minkowskischen gemischten Flächeninhalt M einführen. Es gilt bekanntlich $M^2 - fF \geqq 0$ mit der Gleichheit dann und nur dann, wenn k und K homothetisch sind (im Sinne aus [3], S. 12). Ist k der Einheitskreis, so reduziert sich diese Beziehung auf alte isoperimetrische Ungleichung

$$L^2 - 4\pi F \geqq 0\,, \tag{1}$$

in der das Gleichheitszeichen nur beim Kreis eintritt.

Es seien $[x(s), y(s)]$ mit $s \in \langle 0, l \rangle$ (bzw. $[X(S), Y(S)]$ mit $S \in \langle 0, L \rangle$) die Orthogonalkoordinaten der Punkte von k (bzw. K); dabei ist s (bzw. S) der von einem Punkt $p \in k$ (bzw. $P \in K$) gemessene Bogen von k (bzw. K). Durch $s : S = l : L$ wird zwischen k und K eine bijektive Abbildung A definiert. Für die Bögen s und S der zugeordneten Punkte setzen wir

$$\tau = (2\pi/l)\, s = (2\pi/L)\, S \in \langle 0, 2\pi \rangle\,. \tag{2}$$

Das Funktional (stets $(\cdot)' = \mathrm{d}(\cdot)/\mathrm{d}\tau$ und die Integration versteht sich im Lebesgueschen Sinne; vgl. den Anfang des Abschn. 3)

$$\Phi = \frac{1}{4}\left| \int_0^{2\pi} (xY' + Xy' - x'Y - X'y)\, \mathrm{d}\tau \right|, \tag{3}$$

welches sich für zusammenfallende Kurven k, K und identische Abbildung A auf f oder F reduziert, ist bewegungsinvariant und ändert sich nicht, wenn eine der Kurven k und K verschoben wird. Es hängt aber von der Wahl der Punkte p und P ab, von denen die Bögen s und S in der Abbildung A gemessen werden, und auch vom Sinn dieser Messung auf k und K. Es seien $q \in k$ und $Q \in K$ zwei in A zugeordnete Punkte. Wenn der Punkt

$$\lambda q + \Lambda Q = [\lambda\, x(\tau) + \Lambda\, X(\tau),\ \lambda\, y(\tau) + \Lambda\, Y(\tau)]$$

mit $\lambda, \Lambda =$ konst. $\geqq 0, \lambda + \Lambda = 1$ für $\tau \in \langle 0, 2\pi \rangle$ eine einfache Kurve erzeugt, so begrenzt diese den Bereich mit dem Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi}\{(\lambda x + \Lambda X)(\lambda y + \Lambda Y)' - (\lambda x + \Lambda X)'(\lambda y + \Lambda Y)\}\,d\tau\right| \leqq$$

$$\leqq \lambda^2 f + 2\lambda\Lambda\Phi + \Lambda^2 F .$$

In diesem formalen Sinne ist Φ ein Seitenstück zum Minkowskischen gemischten Flächeninhalt M.

Für die Längen l und L der Kurven k und K und für ihr Funktional Φ gilt

$$\frac{1}{2}(l^2 + L^2) - 4\pi\Phi \geqq 0 \tag{4}$$

mit der Gleichheit genau dann, wenn k und K kongruente Kreise sind und die Abbildung A entweder die k in K überführende Verschiebung V ist oder aus V und der Symmetrie in bezug auf den Mittelpunkt eines der Kreise k, K besteht.

Diese Behauptung, welche sich aus dem nachfolgenden Satz $(*)$ ergibt, liefert für $k \equiv K$ und für die identische Abbildung A die Ungleichung (1) einschliesslich der Gleichheitsbedingung.

Wir gehen zum dreidimensionalen euklidischen Raum über. Es seien wieder k und K zwei geschlossene rektifizierbare Kurven mit den Längen l und L und mit den Bögen s und S. Durch (2) definieren wir wiederum die Abbildung A und führen den Parameter τ ein. Es seien

$$\mathbf{x}(\tau), \mathbf{X}(\tau)\,; \quad \tau \in \langle 0, 2\pi \rangle \tag{5}$$

die Ortsvektoren der Punkte von k und K; zugrunde gelegt wird ein orthogonales Koordinatensystem.

Wir definieren das vektorielle Funktional $\boldsymbol{\Phi}$ durch

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\mathbf{x} \times \mathbf{X}' + \mathbf{X} \times \mathbf{x}')\,d\tau \tag{6}$$

(vgl. wieder den Anfang des Abschn. 3). Seine geometrische Bedeutung folgt aus der Bedeutung von Φ in (3).

$(*)$ *Es sei* $\mathbf{c}$ *ein beliebiger fester Einheitsvektor mit nichtnegativen Koordinaten. Für die Längen* l *und* L *der Kurven* k *und* K *und für ihr vektorielles Funktional* $\boldsymbol{\Phi}$ *gilt die Ungleichung*

$$\frac{1}{2}(l^2 + L^2) - 4\pi\, \mathbf{c} \,.\, \boldsymbol{\Phi} \geqq 0\,; \tag{7}$$

das Gleichheitszeichen tritt hier dann und nur dann ein, wenn k, K *kongruente Kreise in den zum Vektor* $\mathbf{c}$ *orthogonalen Ebenen sind und die Abbildung* A *entweder die* k *und* K *identifizierende Verschiebung* V *ist oder aus* V *und der Symmetrie in bezug auf den Mittelpunkt eines der Kreise* k, K *besteht.*

Liegen die einfachen Kurven k und K in einer Ebene, nehmen wir diese für die durch das Verschwinden der dritten Orthogonalkoordinate bestimmte Koordinatenebene, und wählen wir den Vektor $\boldsymbol{c}$ orthogonal zu dieser Ebene, so ergibt sich aus $(*)$ die Ungleichung (4) einschliesslich der Gleichheitsbedingung.

Falls die Kurven k und K zusammenfallen und die Abbildung A identisch ist, so schreiben wir $\boldsymbol{F}$ statt $\boldsymbol{\Phi}$. Nach $(*)$ ist dann

$$L^2 - 4\pi\, \boldsymbol{c} \,.\, \boldsymbol{F} \geqq 0 \tag{8}$$

mit der Gleichheit genau dann, wenn K ein Kreis in der zu $\boldsymbol{c}$ orthogonalen Ebene ist.

Es sei überdies die Kurve $k \equiv K$ eben und einfach. Wählen wir den Vektor $\boldsymbol{c}$ orthogonal zu ihrer Ebene, so ist $\boldsymbol{c} \,.\, \boldsymbol{F} = F$ und aus (8) ergibt sich die ursprüngliche isoperimetrische Ungleichung (1).

Nach W. Blaschke und K. Leichtweiss ([1], S. 77) ist

$$L^2 - 4\pi|\boldsymbol{F}| \geqq 0\,. \tag{9}$$

L. Boček [2] hat diese Ungleichung in den n-dimensionalen Raum übertragen, indem er sie erstens auf Grund der Fourier-Reihen und zweitens sehr kurz auf Grund der Ungleichung von W. Wirtinger bewiesen hat. L. Boček [2] hat zugleich bemerkt, dass mit Rücksicht auf die Cauchysche Ungleichung $|\boldsymbol{F}| \geqq \boldsymbol{c} \,.\, \boldsymbol{F}$ die Ungleichung (8) eine unmittelbare Folge von (9) ist.

Für das vierdimensionale Analogon zu (8), in dem $|\boldsymbol{c}| > 1$, siehe [4].

In den Abschn. 1 und 2 ist eine Ungleichung bewiesen, aus der in den Abschn. 3 und 4 der Satz $(*)$ hergeleitet ist.

1. Zu den Voraussetzungen, welche die Ortsvektoren (5) befriedigen, kehren wir erst im Abschn. 3 zurück. Zuerst beweisen wir diese Hilfsbehauptung:

Es seien

$$\boldsymbol{x}(\tau)\,, \quad \boldsymbol{X}(\tau) \tag{1,1}$$

zwei Vektoren, deren Koordinaten diese Eigenschaften haben: Sie sind für alle τ definiert; periodisch mit der Periode 2π; absolut stetig; ihre Ableitungen sind quadratisch integrierbar. Weiter sei $\boldsymbol{\alpha}$ ein beliebiger fester Einheitsvektor. Dann gilt die Ungleichung

$$\int_0^{2\pi} \boldsymbol{x}' \,.\, \boldsymbol{x}' \,\mathrm{d}\tau + \int_0^{2\pi} \boldsymbol{X}' \,.\, \boldsymbol{X}' \,\mathrm{d}\tau - \boldsymbol{\alpha} \,.\int_0^{2\pi} (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{X}' + \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\tau \geqq 0\,. \tag{1,2}$$

Das Gleichheitszeichen tritt dann und nur dann ein, wenn

$$\boldsymbol{x}(\tau) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}\cos\tau + \boldsymbol{a}^*\sin\tau\,, \quad \boldsymbol{X}(\tau) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}\cos\tau + \boldsymbol{A}^*\sin\tau\,; \tag{1,3}$$

hier sind $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}^*$, $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^*$ konstante Vektoren, welche diesen Bedingungen unterworfen sind:

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a}^*\,, \quad \boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a}\,, \tag{1,4}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \,.\, \boldsymbol{a} = 0\,, \qquad \boldsymbol{\alpha} \,.\, \boldsymbol{a}^* = 0\,. \tag{1,5}$$

Zum Beweis benutzen wir die Fourier-Reihen von (1,1):

$$(1,7)\qquad \boldsymbol{x}(\tau) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(\boldsymbol{a}_j \cos j\tau + \boldsymbol{a}_j^* \sin j\tau)\,,$$

$$\boldsymbol{X}(\tau) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{A}_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(\boldsymbol{A}_j \cos j\tau + \boldsymbol{A}_j^* \sin j\tau)\,.$$

Aus der Periodizität folgt

$$\boldsymbol{x}'(\tau) \sim \sum_{j=1}^{\infty} j(\boldsymbol{a}_j^* \cos j\tau - \boldsymbol{a}_j \sin j\tau)\,, \quad \boldsymbol{X}'(\tau) \sim \sum_{j=1}^{\infty} j(\boldsymbol{A}_j^* \cos j\tau - \boldsymbol{A}_j \sin j\tau)\,.$$

Die Parsevalsche Gleichung liefert folglich diese Reihen für die Integrale in (1, 2):

$$(1,8)\quad \int_0^{2\pi} |\boldsymbol{x}'|^2 \,\mathrm{d}\tau = \pi \sum_{j=1}^{\infty} j^2(|\boldsymbol{a}_j|^2 + |\boldsymbol{a}_j^*|^2)\,, \quad \int_0^{2\pi} |\boldsymbol{X}'|^2 \,\mathrm{d}\tau = \pi \sum_{j=1}^{\infty} j^2(|\boldsymbol{A}_j|^2 + |\boldsymbol{A}_j^*|^2)\,,$$

$$\int_0^{2\pi} (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{X}' + \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\tau = 2\pi \sum_{j=1}^{\infty} j(\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{A}_j^* + \boldsymbol{A}_j \times \boldsymbol{a}_j^*)\,.$$

2. Nach (1,8) ist die durch π dividierte linke Seite in (1,2) gleich

$$(2,1)\qquad \sum_{j=1}^{\infty} (j^2 - j)\,\{|\boldsymbol{a}_j|^2 + |\boldsymbol{a}_j^*|^2 + |\boldsymbol{A}_j|^2 + |\boldsymbol{A}_j^*|^2\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} j\{|\boldsymbol{a}_j|^2 + |\boldsymbol{a}_j^*|^2 + |\boldsymbol{A}_j|^2 + |\boldsymbol{A}_j^*|^2 - 2\boldsymbol{\alpha}\,.\,(\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{A}_j^* + \boldsymbol{A}_j \times \boldsymbol{a}_j^*)\}\,.$$

Unter Zuhilfenahme der elementaren Regeln für das Skalar- und Vektorprodukt bestätigt man, dass der Ausdruck in den eckigen Klammern in der letzten Zeile in (2.1) auf diese Form gebracht werden kann:

$$(2.2)\qquad |\boldsymbol{A}_j + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a}_j^*|^2 + |\boldsymbol{A}_j^* - \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a}_j|^2 + (\boldsymbol{\alpha}\,.\,\boldsymbol{a}_j)^2 + (\boldsymbol{\alpha}\,.\,\boldsymbol{a}_j^*)^2\,.$$

Indem wir so (2,1) – also bis auf den Faktor $1/\pi$ die linke Seite in (1,2) – als Summe von nichtnegativen Gliedern ausgedrückt haben, ist (1,2) bewiesen.

Nach (2,1) mit (2,2) gilt in (1,2) das Gleichheitszeichen genau dann, wenn

$$(2,3)\qquad \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0}\,, \quad \boldsymbol{a}_j^* = \boldsymbol{0}\,, \quad \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{0}\,, \quad \boldsymbol{A}_j^* = \boldsymbol{0} \quad (j = 2, 3, \ldots)$$

und wenn überdies noch – mit ausgelassenen Indizen 1 – die Beziehungen (1,4) und (1,5) gelten. Für (2,3) reduziert sich (1,7) – wieder mit weggelassenen Indizen 1 – auf (1,3).

3. Um den Beweis des Satzes (∗) zu beendigen, kehren wir zu den Voraussetzungen über die Raumkurven aus der Einleitung zurück.

Es seien q_1 und q_2 zwei Punkte von k mit den Parametern $\tau_1, \tau_2 \in \langle 0, 2\pi)$ und mit den Bögen $s_1, s_2 \in \langle 0, l)$. Nach (2) gilt für eine der Orthogonalkoordinatenfunktionen von $\boldsymbol{x}(\tau)$ in (5)

$$|x(\tau_1) - x(\tau_2)| \leqq q_1 q_2 \leqq |s_1 - s_2| = (2\pi/l)\,|\tau_1 - \tau_2|\,,$$

so dass sie die Lipschitz-Bedingung erfüllt. Folglich ist sie absolut stetig und besitzt fast überall die Ableitung $x'(\tau) = (\mathrm{d}x(\tau)/\mathrm{d}s)\,(l/2\pi)$.

Nach L. TONELLI (s. [5], S. 61) ist fast überall $|d\mathbf{x}/ds| = 1$; also fast überall

$$(3,1) \qquad \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = (l/2\pi)^2, \quad \mathbf{X}' \cdot \mathbf{X}' = (L/2\pi)^2.$$

Die vektoriellen Funktionen (5) erfüllen also die Voraussetzungen der Hilfsbehauptung aus dem Anfang des Abschn. 1.

Wir bezeichnen mit ε_i $(i = 1, 2, 3)$ Signum des Integrals aus der i-ten Koordinate von $\boldsymbol{\Phi}$ in (6). Zur i-ten Koordinate c_i von $\mathbf{c}$ wählen wir die Zahl α_i derart, dass $c_i = \varepsilon_i \alpha_i$. In Hinsicht auf (3,1) ist dann die durch π dividierte linke Seite in (7) gleich der linken Seite in (1,2). Aus (1,2) folgt also (7).

4. Es bleibt noch über die Gleichheit in (7) zu entscheiden. Nach dem Hilfssatz aus dem Abschn. 1 sind die Extremalkurven durch (1,3) mit (1,4) und (1,5) dargestellt.

Aus (1,4) folgt $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}^* = 0$, was zusammen mit (1,5) bedeutet, dass die Extremalkurven in den zum Vektor $\boldsymbol{\alpha}$ orthogonalen Ebenen liegen.

Der Bogen s der durch (1,3) gegebenen Kurve k ist durch

$$s = \int_0^\tau (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \sin^2 \tau - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^* \sin \tau \cos \tau + \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{a}^* \cos^2 \tau)^{1/2} \, d\tau$$

gegeben. Nach (2) ist er dem Parameter $\tau \in \langle 0, 2\pi \rangle$ proportionell; das ist genau dann der Fall, wenn $|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}^*| > 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^* = 0$; ähnlich ist $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^*| > 0$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* = 0$. Die durch (1,3) bestimmten Extremalkurven sind also Kreise.

Nach (1,5) ist $\boldsymbol{\alpha} = \varrho \mathbf{a} \times \mathbf{a}^*$ mit $\varrho = \text{konst.} \neq 0$, also $1 = |\varrho| \, |\mathbf{a}^*|^2$. Nach (1,4) ergibt sich folglich $\mathbf{A} = -\varrho(\mathbf{a} \times \mathbf{a}^*) \times \mathbf{a}^* = \varrho |\mathbf{a}^*|^2 \mathbf{a}$, also $\mathbf{A} = (\operatorname{sign} \varrho) \, \mathbf{a}$. Ähnlich erhält man $\mathbf{A}^* = (\operatorname{sign} \varrho) \, \mathbf{a}^*$. Das bedeutet erstens, dass die Kreise k, K denselben Durchmesser haben; und zweitens, dass in (1,3) entweder $\mathbf{X}(\tau) - \mathbf{x}(\tau)$ oder $\mathbf{X}(\tau) + \mathbf{x}(\tau)$ ein fester Vektor ist. Daraus ergibt sich schon die in (*) angeführte Gleichheitsbedingung.

Literaturverzeichnis

[1] *W. Blaschke - K. Leichtweiss:* Elementare Differentialgeometrie. 5. Aufl. Berlin—Heidelberg—New York 1973.

[2] *L. Boček:* Isoperimetrische Ungleichungen für räumliche Kurven und Polygone. Čas. pěst. mat. *104* (1979), 86—92.

[3] *H. Hadwiger:* Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1957.

[4] *Z. Nádeník:* Eine isoperimetrische Ungleichung für geschlossene Kurven im vierdimensionalen Raum. Čas. pěst. mat. *105* (1980), 302—310.

[5] *L. Tonelli:* Fondamenti di calcolo delle variazioni. I. Bologna 1921.

Anschrift des Verfassers: 166 29 Praha 6 - Dejvice, Thákurova 7 (Stavební fakulta ČVUT).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

EXISTENCE OF GENERALIZED SYMMETRIC RIEMANNIAN SPACES WITH SOLVABLE ISOMETRY GROUP*)

MILOŠ BOŽEK, Bratislava

(Received June 23, 1978)

The first existence theorem on generalized symmetric Riemannian spaces was proved by LEDGER and OBATA in [8].

Theorem A. *For every integer $k \geqq 3$ there is a compact generalized symmetric Riemannian space admitting a regular s-structure of order k and not admitting a regular s-structure of order 2.*

This result was strengthened by KOWALSKI, see [4].

Theorem B. *For every integer $k \geqq 2$ there is a compact generalized symmetric Riemannian space of order k such that the identity component of its full isometry group is semi-simple. In particular, if $k \geqq 3$, then such a space does not admit regular s-structures of orders $l = 2, \ldots, k - 1$.*

The main result of this paper is in a sense dual to that of Kowalski.

Main Theorem. *For every even integer $m \geqq 4$ there is an irreducible generalized symmetric Riemannian space of order m diffeomorphic to $\mathbf{R}^{m-1}$ and such that the identity component of its full isometry group is solvable.*

1. GENERALIZED SYMMETRIC RIEMANNIAN SPACES

We shall make use of the terminology of the paper [3]. All differentiable manifolds, mappings, tensor fields, etc. are of the class C^∞.

Let a connected Riemannian manifold (M, g) be given and let $x \in M$. A *symmetry at x* is any isometry s_x of (M, g) such that x is an isolated fixed point of s_x.

*) I am grateful to Dr. O. KOWALSKI for his valuable hints and comments.

A *regular s-structure* on (M, g) is a family $\{s_x \mid x \in M\}$ of symmetries of (M, g) briefly denoted by $\{s_x\}$, for which the following condition is fulfilled:

(R) For every $x, y \in M$ we have $s_x \circ s_y = s_z \circ s_x$, where $z = s_x(y)$.

Any regular s-structure $\{s_x\}$ on (M, g) determines a tensor field S of type (1,1) defined by $S_x = (s_x)_{*,x}$ for all $x \in M$. The tensor field S is called the *symmetry tensor field* of $\{s_x\}$; this tensor field is differentiable, see [3], Theorem 1.

A regular s-structure $\{s_x\}$ on (M, g) is said to be of *order* k, if k is the least integer for which $(s_x)^k = id$ for all $x \in M$.

A Riemannian manifold is called a *generalized symmetric Riemannian space*, shortly a *g.s. space*, if it admits at least one regular s-structure. Theorem 2 in [3] says that there is a regular s-structure of finite order on every g.s. space. The *order* of a g.s. space (M, g) is the least integer k such that (M, g) admits a regular s-structure of order k.

Finally, a *regular s-manifold* is a triple $(M, g, \{s_x\})$, where (M, g) is a g.s. space and $\{s_x\}$ is a fixed regular s-structure on (M, g).

2. THE ISOMETRY GROUPS OF A CERTAIN CLASS OF G.S. SPACES

Let (M, g) be a g.s. space and let o be a fixed point of M. We are going to use the following notation: V is the tangent vector space $T_o(M)$, $I(M)$ is the full isometry group of (M, g) and $I(M, o)$ its isotropy subgroup at o, $I(M)^0$ is the identity component of $I(M)$. It is known that the group $I(M)$ acts transitively on M, see [8], Theorem 1. Hence every g.s. space is a Riemannian homogeneous space. Particularly, the mapping $\pi : I(M)^0 \to M$ defined by $\pi(a) = a(o)$ is surjective and locally trivial. Finally, let $\hat{H}$ denote the image of the linear isotropy representation of $I(M, o)$ in V and $\hat{\mathfrak{h}}$ its Lie algebra. $\hat{H}$ is a group of linear transformations of V which is naturally isomorphic to $I(M, o)$.

In this section and in the next one, we shall investigate g.s. spaces with a finite group $I(M, o)$. We shall call such spaces *g.s. spaces with a finite isometry group at a point*. The following assertions are equivalent: The group $\hat{H}$ is finite; $\hat{\mathfrak{h}} = 0$; $\pi : I(M)^0 \to M$ is a covering; $\pi_{*,1} : T_1(I(M)^0) \to V$ is a vector space isomorphism.

Throughout this section, (M, g) always denotes a g.s. space with finite isometry group at a point.

There is exactly one Lie algebra structure on V such that $\pi_{*,1}$ is an algebra isomorphism. Recall that there is a scalar product g_o on the algebra V. Let us denote by L the group of all isometric automorphisms of the algebra V and put $L' = \{A \in L \mid Av \neq v$ for $v \neq 0\}$.

The main purpose of the present section is to prove the following two theorems.

Theorem 1. *The identity component $I(M)^0$ of the full isometry group $I(M)$ of*

(M, g) *is a solvable group. If* M *is simply connected, then* $I(M)^0$ *is diffeomorphic to* M.

Theorem 2. *For* (M, g) *simply connected, the map* $\{s_x\} \mapsto S_0$ *is a bijection between the set of all regular s-structures on* (M, g) *and the set* L.

First we shall need some preliminary results.

Lemma 2.1. *For a simply connected* (M, g), *the projection* $\pi : I(M)^0 \to M$ *is a diffeomorphism.*

Proof. The projection π is a covering. This covering is trivial, because M is simply connected. Our assertion follows now from the connectedness of both spaces $I(M)^0$ and M.

Proposition 2.1. $\hat{H} \subset L$. $\hat{H} = L$ *if* M *is simply connected.*

Proof. Clearly, every element of $\hat{H}$ is an isometry of the vector space V. To prove that it is also an automorphism of the algebra V, let us consider a transformation $\bar{f}$ of $I(M)^0$ for every $f \in I(M, o)$ defined by $\bar{f}(a) = f \circ a \circ f^{-1}$ for each $a \in I(M)^0$. $\bar{f}$ is an automorphism of the group $I(M)^0$ and $\pi \circ \bar{f} = f \circ \pi$, therefore $f_{*,o} = \pi_{*,1} \circ \bar{f}_{*,1} \circ \circ (\pi_{*,1})^{-1}$ is an automorphism of the algebra V, and $\hat{H} \subset L$.

Now, let M be simply connected and let F be an arbitrary element of L. The mapping $\bar{F} = (\pi_{*,1})^{-1} \circ F \circ \pi_{*,1}$ is an automorphism of the Lie algebra V. By Lemma 2.1, the group $I(M)^0$ is simply connected, therefore there is an automorphism $\bar{f}$ of $I(M)^0$ such that $\bar{f}_{*,1} = \bar{F}$. Since F preserves the scalar product g_o, $\bar{f}$ preserves the left-invariant metric π^*g. Hence $\bar{f}$ is an isometry of $(I(M)^0, \pi^*g)$ and the map $f = \pi \circ \bar{f} \circ \pi^{-1}$ is an isometry of (M, g). Clearly $f_{*,o} = F$, i.e. $F \in \hat{H}$.

Proof of Theorem 1. Let $\{s_x\}$ be a regular s-structure on (M, g). By Proposition 2.1, the corresponding S_o is an automorphism of the algebra V, thus the Lie algebra V admits an automorphism of finite order with no non-zero fixed vector. According to [7] or [9], the algebra V is solvable. The algebra of the Lie group $I(M)^0$ is isomorphic to V, hence the group $I(M)^0$ is solvable. The second assertion of Theorem 1 is Lemma 2.1.

Lemma 2.2. *Let* G *be a connected Lie group with a left-invariant metric* g *and let* s_e *be an isometric automorphism of* G *such that the neutral element* e *of* G *is an isolated fixed point of* s_e. *Then the family* $\{s_x = L_x \circ s_e \circ L_x^{-1}\}$ *is a regular s-structure on* (G, g).

Proof. It is clear every transformation s_x, $x \in G$ is a symmetry of (G, g) at x. An easy calculation shows that $\{s_x\}$ satisfies the condition (R).

For every Riemannian s-manifold $(M, g, \{s_x\})$ let us denote by $\mathrm{Cl}(\{s_x\})$ the closure of the subgroup of $I(M)$ algebraically generated by the set $\{s_x\}$. It is shown, see [3]

Theorem A, that the group $\mathrm{Cl}(\{s_x\})$ is a transitive Lie group of isometries of (M, g). For the identity component of $\mathrm{Cl}(\{s_x\})$ we have

Proposition 2.2. $\mathrm{Cl}(\{s_x\})^0 = I(M)^0$ *for every regular s-structure* $\{s_x\}$ *on* (M, g).

Proof. The group $\mathrm{Cl}(\{s_x\})^0$ is a connected subgroup of $I(M)^0$ and both the groups cover M. Therefore $\mathrm{Cl}(\{s_x\})^0$ is an open subgroup of $I(M)^0$, thus $\mathrm{Cl}(\{s_x\})^0 = I(M)^0$.

If $\{s_x\}$ is a regular s-structure on (M, g), then according to [3] we have

$$s_x = f \circ s_o \circ f^{-1} \text{ for every } x \in M \text{ and every } f \in \mathrm{Cl}(\{s_x\})^0 \text{ such that } f(o) = x .$$

Hence Proposition 2.2 has the following

Corollary. *Let* (M, g) *and* $\{s_x\}$ *be as in Propositon* 2.2. *Then* $s_x = f \circ s_o \circ f^{-1}$ *for all* $x \in M$ *and for all* $f \in I(M)^0$ *such that* $f(o) = x$.

Proof of Theorem 2. The map $\{s_x\} \mapsto S_0$ is a composition of two maps, namely $\{s_x\} \mapsto s_o$ and $s_o \mapsto S_o = (s_o)_{*,o}$. The first map is injective by the foregoing Corollary and the second is injective because it is the linear isotropy representation of an isometry group. In virtue of Proposition 2.1, S_o is an element of the group L, moreover, it is an element of the set L', because it has no non-zero fixed vector. Thus the map $\{s_x\} \mapsto S_o$ is an injection from the set of all regular s-structures on (M, g) into the set L'.

To prove that this map is also surjective, let us consider an arbitrary element F of L'. As in the proof of Proposition 2.1, there is an isometric automorphism $\bar{s}$ of the group $I(M)^0$ such that $\bar{s}_{*,1} = (\pi_{*,1})^{-1} \circ F \circ \pi_{*,1}$. It is easy to see that $\bar{s}$ is a symmetry of $(I(M)^0, \pi^* g)$ at the identity 1. The family $\{s_x = \pi \circ L_a \circ \bar{s} \circ L_a^{-1} \circ \pi^{-1}\}$, where $a = \pi^{-1}(x)$, is a regular s-structure on (M, g) by Lemmas 2.1 and 2.2. We have $S_o = (s_o)_{*,o} = \pi_{*,1} \circ \bar{s}_{*,1} \circ (\pi_{*,1})^{-1} = F$, thus the map in question is surjective, which concludes the proof of Theorem 2.

3. CANONICAL CONNECTION ON G.S. SPACES WITH FINITE ISOMETRY GROUP AT A POINT

Let $(M, g, \{s_x\})$ be a Riemannian s-manifold, ∇ the Riemannian connection of (M, g) and S the symmetry tensor field of $\{s_x\}$. Following A. J. Ledger [1], we introduce a new connection $\tilde{\nabla}$ by the formulas

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - D(Y, X), \quad D(Y, X) = (\nabla S)(S^{-1} Y, (I - S)^{-1} X),$$

where X and Y are arbitrary vector fields on M. The connection $\tilde{\nabla}$ is called the *canonical connection of the Riemannian s-manifold* $(M, g, \{s_x\})$. O. Kowalski has shown in [6] that the connection $\tilde{\nabla}$ depends only on the regular s-structure $\{s_x\}$ and not on the Riemannian connection ∇:

Theorem C. *The canonical connection $\tilde{\nabla}$ of $(M, g, \{s_x\})$ is the only connection on M, for which the following conditions hold*:

(i) *All symmetries s_x, $x \in M$ are affine transformations of the affine manifold $(M, \tilde{\nabla})$.*

(ii) $\tilde{\nabla} S = 0$.

Thus, we can speak about the *canonical connection of the regular s-structure* $\{s_x\}$. To obtain some further properties of the canonical connection we shall start with

Proposition 3.1. *Let $M = G/H$ be a reductive homogeneous space with respect to a decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, and let $\tilde{f}$ be an automorphism of G such that $\tilde{f}(H) \subset H$ and $\tilde{f}_{*,e}(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$. Then the induced map $f : G/H \to G/H$ defined by $f(aH) = \tilde{f}(a) H$ for all $a \in G$ is an affine transformation of M with respect to the canonical connection of the second kind $\tilde{\nabla}$.*

Proof. The subspace $\mathfrak{m}$ of $\mathfrak{g}$ is supposed to be identified in the natural way with the tangent vector space $T_o(M)$ of $M = G/H$ at the origin $o = H$.

The transformation f induces a transformation f_* of the set of all vector fields on M via

$$(f_* X)_p = f_{*,q}(X_q), \quad \text{where} \quad q = f^{-1}(p),$$

and a transformation f^* of the set of all affine connections on M via

$$(f^*\nabla)_X Y = f_*^{-1}(\nabla_{f_* X} f_* Y).$$

Our assertion is equivalent to the equality $f^*\tilde{\nabla} = \tilde{\nabla}$. By [2], Corollary X.2.2 we have to prove that the connection $f^*\tilde{\nabla}$ is invariant and that

$$((f^*\tilde{\nabla})_X Y)_o = [\tilde{X}, Y]_o$$

for all vectors $X \in T_o(M)$ and all vector fields Y on M, where $\tilde{X}$ is an extension of the vector X to a vector field on M defined by

$$\tilde{X}_p = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\exp tX)(p) \quad \text{for all} \quad p \in M.$$

The first statement is equivalent to

$$a^*(f^*\tilde{\nabla}) = f^*\tilde{\nabla} \quad \text{for all} \quad a \in G$$

and follows from the relations $f \circ a = \tilde{f}(a) \circ f$ and $a^*(f^*\tilde{\nabla}) = (f \circ a)^* \tilde{\nabla}$. The second statement is a consequence of the identities $f_* \tilde{X} = \widetilde{f_{*,o}(X)}$ and $f_*[\tilde{X}, Y] = [f_*\tilde{X}, f_* Y]$ which hold for every vector $X \in T_o(M)$ and every vector field Y on M.

Proposition 3.2. *Let $M = G/H$ be a reductive homogeneous space with the decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, let g be a Riemannian metric on M. Let $\{s_x\}$ be a regular s-structure on (M, g) such that s_0 is an affine transformation of M with respect to* *the canonical connection of the second kind* $\bar{\nabla}$ *and such that* $s_x = f \circ s_e \circ f^{-1}$ *for all* $x \in M$ *and* $f \in G$ *with* $f(o) = x$. *Then the canonical connection* $\tilde{\nabla}$ *of the regular s-structure* $\{s_x\}$ *coincides with the connection* $\bar{\nabla}$.

Proof. The assumptions about $\{s_x\}$ imply that all symmetries s_x, $x \in M$ are affine transformations of $(M, \bar{\nabla})$ and that the symmetry tensor field S of $\{s_x\}$ is G-invariant. By [2], Proposition X.2.7, S is $\bar{\nabla}$-parallel. Our assertion follows from Theorem C.

Any g.s. space (M, g) with a finite isometry group at a point is a reductive homogeneous space $M = G/H$ where $G = I(M)^0$ and $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$. For every symmetry s of M at the origin o the induced map $\bar{s} : G \to G$, $a \mapsto s \circ a \circ s^{-1}$ is an automorphism of G preserving H and $\mathfrak{m}$ and such that $s(aH) = \bar{s}(a) H$ for all $a \in G$. This fact together with Propositions 3.1, 3.2 and with Corollary of Proposition 3.2 implies the first part of the next theorem. The second part of the theorem follows then from Theorem X.2.6 of [2].

Theorem 3. *All regular s-structures on a g.s. space* (M, g) *with a finite isometry group at a point have the same canonical connection* $\tilde{\nabla}$, *namely the projection of the Cartan* $(-)$*-connection of the group* $I(M)^0$ *via the covering map* $\pi : I(M)^0 \to M$. *For its torsion and curvature we have*

$$\tilde{T}_o(X, Y) = -[X, Y] \quad \textit{for every} \quad X, Y \in T_o(M)\ (= \mathfrak{g})\,, \quad \textit{and} \quad \tilde{R} = 0\,.$$

As an immediate consequence of Propositions 3.1, 3.2 and Proposition X.2.12 of [2] we obtain

Proposition 3.3. *Let* (G, g) *be a connected Lie group with a left-invariant Riemannian metric. Let* s_e *be an isometrical automorphism of* (G, g) *which has the neutral element* $e \in G$ *as an isolated fixed point. Then the canonical connection* $\tilde{\nabla}$ *of the regular s-structure* $\{s_x = L_x \circ s_e \circ L_x^{-1}\}$ *is the Cartan* $(-)$*-connection. For its torsion and curvature we have*

$$\tilde{T}_e(X, Y) = -[X, Y] \quad \textit{for all} \quad X, Y \in T_e(G) = \mathfrak{g}\,, \quad \textit{and} \quad \tilde{R} = 0\,.$$

4. RIEMANNIAN S-MANIFOLD $(G_n, g, \{s_x\})$

Let $n \geqq 1$ be an integer. Let us consider a matrix group G_n consisting of all matrices of the form

$$\begin{Vmatrix} e^{u_0} & 0 & \dots & 0 & x_0 \\ 0 & e^{u_1} & \dots & 0 & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{u_n} & x_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

where $(x_0, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^{2n+1}$ is an arbitrary element and $u_0 = -u_1 - \dots$

$\ldots - u_n$. Thus, the group G_n is a Lie group diffeomorphic to the cartesian space $\mathbf{R}^{2n+1}(x_0, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n)$. Suppose that the points of G_n are identified with the corresponding $(2n + 1)$-tuples. Particularly, for the neutral element e of G_n we have $e = (0, \ldots, 0)$.

Let us consider a Riemannian metric g on G_n defined by

$$g = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{e}^{-2u_i}(\mathrm{d}x_i)^2 + a \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \mathrm{d}u_\alpha \, \mathrm{d}u_\beta \,, \quad a > 0 \,.$$

The metric g is left-invariant. For $n = 1$ or 2, the corresponding manifolds are known from the complete list of g.s. spaces in dimensions 3 or 5, see [5], §§ 4, 12.

Finally, let s_e be a transformation of G_n given by

$$\text{(1)} \qquad s_e(x_0, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n) = \\ = (-x_n, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, -u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \,,$$

where $u_0 = -u_1 - \ldots - u_n$ again. The transformation s_e is an automorphism of the Lie group G_n and also a symmetry of (G_n, g) at e. By Lemma 2.2, the family

$$\text{(2)} \qquad \{s_x = L_x \circ s_e \circ L_x^{-1}\}$$

is a regular s-structure on (G_n, g). Thus, we have defined a Riemannian s-manifold $(G_n, g, \{s_x\})$ for all $n \geqq 1$. All the symmetries s_x, $x \in G_n$ are of order $2n + 2$, hence the g.s. space (G_n, g) is of order at most $2n + 2$. In fact, it is exactly of order $2n + 2$ as will be shown in § 6.

In the rest of the present section some coordinate expressions will be given. Let us denote

$$\text{(3)} \qquad X_i = \mathrm{e}^{u_i} \frac{\partial}{\partial x_i}\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n \,,$$

$$U_\alpha = \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\,, \quad \alpha = 1, \ldots, n \,.$$

A direct calculation shows that the vector fields $X_0, X_1, \ldots, X_n, U_1, \ldots, U_n$ form a basis of the Lie algebra $\mathfrak{g}_n$ of the Lie group G_n and that the bracket operation in $\mathfrak{g}_n$ is given by the formulas

$$\text{(4)} \qquad [X_i, X_j] = [U_\alpha, U_\beta] = 0 \,, \\ [X_0, U_\alpha] = X_0 \,, \quad [X_\alpha, U_\beta] = -\delta_{\alpha\beta} X_\alpha$$

for all $i, j = 0, 1, \ldots, n$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$. The coordinate expressions of the Riemannian metric g and the symmetry tensor field S of the regular s-structure $\{s_x\}$ with respect to the basis (3) are given by

$$\text{(5)} \qquad g(X_i, X_j) = \delta_{ij} \,, \\ g(X_i, U_\alpha) = 0 \,, \\ g(U_\alpha, U_\beta) = a(1 + \delta_{\alpha\beta}) \,,$$

for all $i, j = 0, 1, \ldots, n$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$,

(6)
$$S(X_i) = \begin{cases} X_{i+1} & \text{for} \quad i = 0, 1, \ldots, n-1\,, \\ -X_0 & \text{for} \quad i = n\,, \end{cases}$$
$$S(U_\alpha) = \begin{cases} U_{\alpha+1} - U_1 & \text{for} \quad \alpha = 1, \ldots, n-1\,, \\ -U_1 & \text{for} \quad \alpha = n\,. \end{cases}$$

5. THE GROUP $I(G_n, e)$ IS FINITE

We shall continue our study of the Riemannian s-manifolds $(G_n, g, \{s_x\})$. The tangent vector space $T_e(G_n)$ which is supposed to be identified with the Lie algebra $\mathfrak{g}_n$ will be denoted by V. Let $\tilde{\nabla}$ or ∇ be the canonical connection of $\{s_x\}$ or the Riemannian connection of (G_n, g), respectively. The Riemannian metric g and the Riemannian curvature R, the tensor field S, the torsion $\tilde{T}$ and the curvature $\tilde{R}$ of the canonical connection $\tilde{\nabla}$, and also the difference tensor field $D = \nabla - \tilde{\nabla}$, are invariant with respect to the left translations of G_n. Thus we can replace these tensor fields by their evaluations at the point $e \in G_n$. The corresponding tensors on $V = T_e(G_n)$ will be denoted by the same letters, for the sake of brevity. Tensors g and S are given by formulas (5) and (6), respectively, tensor $\tilde{T}$ and $\tilde{R}$ by Proposition 3.3. Tensors D and R can be calculated from the formulas

(7)
$$2\,g(D(X, Y), Z) = g(\tilde{T}(X, Y), Z) + g(\tilde{T}(X, Z), Y) + g(\tilde{T}(Y, T), X)\,,$$

(8)
$$R(X, Y)\,Z = \tilde{R}(X, Y)\,Z + D(D(Z, Y), X) - D(D(Z, X), Y) + \\ + D(Z, \tilde{T}(X, Y))\,,$$

which hold for all vectors $X, Y, Z \in V$, see [3] Lemma 4 and [1] Lemma 4.8. In order to calculate the tensors D and R it is convenient to consider the complexification $V^c = V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ and to choose a basis of V^c consisting of eigenvectors of the transformation S.

The characteristic equation of S is

$$(x^{n+1} + 1)(x^n + x^{n+1} + \ldots + x + 1) = 0\,.$$

Hence the eigenvalues of the transformation S are the complex numbers

$$z^{2j+1},\ z^{2\alpha}\,, \quad j = 0, 1, \ldots, n\,, \quad \alpha = 1, \ldots, n\,,$$

where

$$z = \cos\frac{\pi}{n+1} + \mathrm{i}\,.\,\sin\frac{\pi}{n+1}\,.$$

For the corresponding eigenvectors we can choose the complex vectors

(9)
$$Y_j = \sum_{i=0}^{n} z^{(2j+1)i} X_i\,, \quad j = 0, 1, \ldots, n\,,$$

$$V_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} z^{2\alpha\beta} U_\beta\,, \qquad \alpha = 1, \dots, n\,,$$

where $X_0, X_1, \dots, X_n, U_1, \dots, U_n$ are given by (3). The vectors (9) form a basis of the vector space V^c, because all eigenvalues of S are mutually different.

From now on, we shall identify the index set $\{0, 1, \dots, n\}$ with the additive group $\mathbf{Z}_{n+1}$ in the natural way and denote

$$\bar{i} = -i - 1 \quad \text{for every} \quad i = 0, 1, \dots, n\,,$$
$$\tilde{\alpha} = -\alpha \qquad \text{for every} \quad \alpha = 1, \dots, n\,.$$

Thus, for the complex conjugate vectors to those in (9) we have

$$\bar{Y}_i = Y_{\bar{i}}\,, \quad \bar{V}_\alpha = V_{\tilde{\alpha}} \quad \text{for all } i \text{ and } \alpha\,. \tag{10}$$

Let us extend the tensors g, S, $\tilde{T}$, $\tilde{R}$, D and R to the complex vector space V^c without any change of the notation. From (5), (9), from Proposition 3.3 and from (4) and (9) we obtain

$$\begin{aligned} g(Y_i, Y_j) &= (n+1)\,\delta_{i\bar{j}}\,, \\ g(Y_i, V_\alpha) &= 0\,, \\ g(V_\alpha, V_\beta) &= (n+1)\,a\delta_{\alpha\tilde{\beta}}\,, \end{aligned} \tag{11}$$

for all $i, j = 0, 1, \dots, n$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n$,

$$\tilde{T}(Y_i, Y_j) = \tilde{T}(V_\alpha, V_\beta) = 0\,, \quad \tilde{T}(Y_i, V_\alpha) = Y_{i+\alpha} \tag{12}$$

for all $i, j = 0, 1, \dots, n$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n$,

$$\tilde{R} = 0\,. \tag{13}$$

Relations (7), (11) and (12) imply

$$D(Y_i, Y_j) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad i = \bar{j}\,, \\ \dfrac{1}{a} V_{i+j+1} & \text{if} \quad i \neq \bar{j}\,, \end{cases} \tag{14}$$

$$D(Y_i, V_\alpha) = D(V_\alpha, V_\beta) = 0\,, \quad D(V_\alpha, Y_i) = -Y_{i+\alpha}\,.$$

Finally, from the relations (8), (12), (13) and (14) we obtain

$$R(Y_i, Y_j)\,Y_k = \begin{cases} -\dfrac{1}{a} Y_{i+j+k+1} & \text{if} \quad i \neq \bar{j}\,, \quad k = \bar{i}\,, \\ \dfrac{1}{a} Y_{i+j+k+1} & \text{if} \quad i \neq \bar{j}\,, \quad k = \bar{j}\,, \\ 0 \quad \text{if } i = \bar{j} \quad \text{or} \quad \bar{i} \neq k \neq \bar{j}\,, \end{cases} \tag{15}$$

$$R(Y_i, V_\alpha)\,Y_j = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad i + j + \alpha + 1 = 0\,, \\ \dfrac{1}{a} V_{i+j+\alpha+1} & \text{if} \quad i + j + \alpha + 1 \neq 0\,, \end{cases}$$

$$R(Y_i, V_\alpha)\, V_\beta = -Y_{i+\alpha+\beta}\,,$$
$$R(Y_i, Y_j)\, V_\alpha = \quad R(V_\alpha, V_\beta)\, Y_i = R(V_\alpha, V_\beta)\, V_\gamma = 0\,.$$

The purpose of the present section is to prove the assertion announced in the title:

Proposition 5.1. *The isometry group $I(G_n, e)$ at the point e is finite for all $n \geqq 1$.*

This proposition can be reformulated. The group $I(G_n, e)$ is isomorphic to the linear isotropy group $\hat{H}$. By [5] Proposition 13.2, the Lie algebra $\hat{\mathfrak{h}}$ of the Lie group $\hat{H}$ is given by

$$\hat{\mathfrak{h}} = \{A \in \mathfrak{gl}(V) \mid A(g) = A(D^k(R)) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots\}\,.$$

Therefore Proposition 5.1 is a consequence of the following

Proposition 5.2. $A(g) = A(R) = A(D(R)) = 0 \Rightarrow A = 0.$

Proof. Let $A \in \mathfrak{gl}(V)$ be an arbitrary endomorphism of the vector space V. The linear extension of A onto the complexification V^c of V will be denoted by the same symbol. With respect to the basis (9) we have

$$A(Y_i) = \sum_j A_i^j Y_j + \sum_\beta B_i^\beta V_\beta\,, \tag{16}$$
$$A(V_\alpha) = \sum_j C_\alpha^j Y_j + \sum_\beta D_\alpha^\beta V_\beta\,.$$

It remains to show that our assumptions on A yield $A_i^j = B_i^\beta = C_\alpha^j = D_\alpha^\beta = 0$ for all i, j and α, β.

Condition $A(g) = 0$ is equivalent to

$$g(A(X), Y) + g(X, A(Y)) = 0 \quad \text{for all} \quad X, Y \in V^c\,. \tag{17}$$

Let us substitute successively $X = \bar{Y}_i$, $Y = Y_j$ then $X = \bar{Y}_i$, $Y = V_\beta$ and finally $X = \bar{V}_\alpha$, $Y = V_\beta$ into (17). Using (10), (11) and (16) we get

$$A_i^{\bar{j}} = -A_j^{\bar{i}}\,, \tag{18a}$$

$$B_i^{\bar{\beta}} = -\frac{1}{a}\, C_\beta^{\bar{i}}\,, \tag{18b}$$

$$D_\alpha^{\bar{\beta}} = -D_\beta^{\bar{\alpha}}\,. \tag{18c}$$

Condition $A(R) = 0$ is equivalent to

$$A(R(X, Y)\, Z) - R(A(X), Y)\, Z - R(X, A(Y))\, Z - R(X, Y)\, A(Z) = 0 \tag{19}$$

for all $X, Y, Z \in V^c$. As a rule, we shall apply the following procedure: After replacing X, Y, Z in (19) by suitable vectors of the basis (9) and making use of (15) and (16), the left hand side of (19) will be expressed as a linear combination of the basic vectors (9). So we get a system of linear homogeneous equations in A_i^j, B_i^β, C_α^j and D_α^β. Let us start with the substitution $X = Y_{i+\beta}$, $Y = \bar{V}_\beta$, $Z = \bar{Y}_i$ for arbitrary i and β. Comparing the coefficients at the vector $Y_{i+\beta}$, we get

$$- B_i^\beta + \frac{1}{a} C_\beta^i = 0 .$$

Using in addition (18b), we get

$$B_i^\beta = C_\beta^i = 0 \quad \text{for all i and } \beta . \tag{20}$$

Now, for every $i, j = 0, 1, \ldots, n$ we define a map $f_i^j : \mathbf{Z}_{n+1} \to \mathbf{C}$ putting $f_i^j(k) = A_{i+k}^{j+k} - A_i^j$, $k \in \mathbf{Z}_{n+1}$. Our next aim is to prove that all these mappings are homomorphisms of additive groups. It will be done in a series of lemmas.

Lemma 5.1. *For every $i, j, k = 0, 1, \ldots, n$ and $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$ we have*

(i) $f_i^j(k) = D_\alpha^{\alpha+(j-i)} + D_{k-\alpha}^{k-\alpha+(j-i)}$ *if* $\alpha \neq j - i$, $\alpha \neq k + j - i$, $\alpha \neq k$.

(ii) $A_{i+k}^i = A_i^{i-k}$ *if* $n \geqq 2$.

(iii) $f_i^j(k) = D_k^{k+(j-i)}$ *if* $n \geqq 2$ *and* $k \neq 0$, $k \neq i - j$, $i \neq j$.

(iv) $f_i^j(k) = 0$ *if* $n \geqq 2$ *and* $k = 0$ *or* $k = i - j$.

(v) $f_i^i(k) = D_\alpha^\alpha + D_{k-\alpha}^{k-\alpha}$ *if* $k \neq \alpha$.

Proof. (i) Put $X = Y_i$, $Y = V_\alpha$, $Z = V_{k-\alpha}$ in (19), and calculate the coefficient at the vector Y_{j+k} on the left hand side.

(ii) For given i, k put $j = i - k$. Because $n \geqq 2$, there is an index $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$ such that $\alpha \neq i - j$, consequently $\alpha \neq k$, $\alpha \neq k + j - i$. Hence, by (i) and (18c) we have

$$A_{i+k}^i - A_i^{i-k} = A_{i+k}^{j+k} - A_i^j = D_\alpha^{\alpha-k} + D_{-(\alpha-k)}^{-\alpha} = 0 .$$

(iii) Put $X = Y_j$, $Y = V_k$, $Z = V_{i-j}$ in (19). In the same way as in the proof of (i) we get

$$A_{i+k}^{j+k} - A_j^{j-(i-j)} = D_k^{k+(j-i)} .$$

Now, in virtue of (ii),

$$A_j^{j-(i-j)} = A_{j+(i-j)}^j = A_i^j ,$$

and (iii) holds.

(iv) The first case $k = 0$ is evident. The second is a simple consequence of (ii).

(v) This follows from (i) for $j = i$.

Lemma 5.2. *Let $n \geqq 2$ and let $i, j, r, s \in \{0, 1, \ldots, n\}$ be indices such that $j - i = s - r$. Then $f_i^j = f_r^s$.*

Proof. Because $n \geqq 2$, to every $k = 0, 1, \ldots, n$ there is an index α, more precisely $\alpha(k)$, such that $k \neq \alpha(k)$. Our assertion follows from Lemma 5.1 (iii), (iv), (v).

Lemma 5.3. *If $n \geqq 2$, then all the mappings $f_i^j : \mathbf{Z}_{n+1} \to \mathbf{C}$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$ are homomorphisms of additive groups.*

Proof. We have to prove $f_i^j(u - v) = f_i^j(u) - f_i^j(v)$ for all $i, j, u, v \in \mathbf{Z}_{n+1}$. By Lemma 5.2 we get $f_i^j = f_{i-v}^{j-v}$, therefore

$$f_i^j(u - v) = A_{i+u-v}^{j+u-v} - A_i^j = A_{(i-v)+u}^{(j-v)+u} - A_{i-v}^{j-v} - A_{(i-v)+v}^{(j-v)+v} - A_{i-v}^{j-v} = f_{i-v}^{j-v}(u) - \\ - f_{i-v}^{j-v}(v) = f_i^j(u) - f_i^j(v)\,.$$

Corollary. $f_j^i(k) = 0$ *for every* $i, j, k \in \mathbf{Z}_{n+1}$, $n \geqq 2$.

Let us continue the proof of Proposition 5.2. By the foregoing Corollary we have

$$A_{i-k}^{j-k} = A_i^j \quad \text{for every} \quad i, j, k = 0, 1, \ldots, n\,, \quad n \geqq 2\,.$$

Particularly, for $k = -i - j - 1$ it follows

$$A_i^j = A_{\bar{j}}^{\bar{i}} \quad \text{for every} \quad i, j = 0, 1, \ldots, n\,, \quad n \geqq 2\,.$$

Combining this result with (18a), we get

$$A_i^j = 0 \quad \text{for every} \quad i, j = 0, 1, \ldots, n\,, \quad n \geqq 2\,. \tag{21}$$

Further, by Lemma 5.1 (iii) and (v) and by Corollary of Lemma 5.3, we have

$$D_\alpha^\beta = 0 \quad \text{for all} \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n\,, \quad n \geqq 2\,. \tag{22}$$

Therefore, Proposition 5.2 for $n \geqq 2$ is a consequence of (20), (21) and (22).

From now on let $n = 1$. Then $\bar{1} = 1$. From (18c) we have $D_1^1 = -D_{\bar{1}}^{\bar{1}}$, thus

$$D_1^1 = 0 \quad \text{for} \quad n = 1\,. \tag{23}$$

Further, put $X = Z = Y_0$ and $Y = Y_1$ in (19). Comparing the coefficient at the vector Y_1 we get $A_0^1 = 0$. Since $\bar{0} = 1$ and $\bar{1} = 0$ for $n = 1$, the formula (18a) yields

$$A_0^1 = A_1^0 = 0 \quad \text{for} \quad n = 1\,. \tag{24}$$

In the same way we obtain

$$A_1^1 + A_0^0 = 0 \quad \text{for} \quad n = 1\,. \tag{25}$$

By a direct calculation it can be seen that the conditions $A(g) = A(R) = 0$ do not imply $A_1^1 = A_0^0 = 0$ for $n = 1$.

To conclude the proof of Proposition 5.2 for $n = 1$, it is enough to prove

$$A(D_W(R)) = 0 \quad \text{for all} \quad W \in V^c \Rightarrow A_0^0 = 0\,.$$

Here the endomorphism D_W of the vector space V^c defined by

$$D_W(X) = D(X, W) \quad \text{for all} \quad X \in V^c$$

acts on the tensor algebra $\mathscr{T}(V^c)$ as a derivation.

Let us substitute $X = Z = W = Y_0$, $Y = Y_1$ into $(A(D_W(R)))(X, Y, Z) = 0$ and let us develop the term on the left hand side making use of (14), (15) and (16). As a consequence of (23), (24) and (25) we get $4\, A_0^0 a^{-2} V_1 = 0$, therefore

$$A_0^0 = 0 \quad \text{for} \quad n = 1 .$$

6. THE ORDER OF THE G.S. SPACE (G_n, g)

The manifold G_n introduced in § 4 is a simply connected Lie group with a finite isometry group $I(G_n, e)$ at the neutral element e. By Lemma 2.1 the natural projection $\pi : I(G_n)^0 \to G_n$ is a diffeomorphism. Moreover, it is a Lie group isomorphism, because the metric g is left-invariant. The corresponding Lie algebras will be identified via the induced isomorphism $\pi_{*,1}$. Now, by Theorem 2, the set of all regular s-structures on (G_n, g) is equivalent to the set L' consisting of all isometric automorphisms of the algebra $\mathfrak{g}_n$ without any non-zero fixed vector.

Our aim is to calculate the orders of all elements of L'. First we shall determine explicitly the group L of all isometric automorphisms of the algebra $\mathfrak{g}_n$. We shall start with some properties of the algebra $\mathfrak{g}_n$.

The following is immediate from (4):

Lemma 6.1. *The centre of the algebra $\mathfrak{g}_n$ is trivial.*

Let $\mathfrak{g}_n'$ and $\mathfrak{g}_n''$ denote the vector subspaces of the algebra $\mathfrak{g}_n$ generated by the sets $\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$ and $\{U_1, \ldots, U_n\}$, respectively. Clearly, the vector space $\mathfrak{g}_n$ is a direct sum of its mutually orthogonal subspaces $\mathfrak{g}_n'$ and $\mathfrak{g}_n''$. The formulas (4) yield

$$[\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n] \subset \mathfrak{g}_n' . \tag{26}$$

Lemma 6.2. *For every non-zero vector $X \in \mathfrak{g}_n'$ there is an index $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$ such that $[X, U_\alpha] \neq 0$.*

Proof. Let $X = \sum_i c_i X_i$, $X \neq 0$ be an arbitrary element of $\mathfrak{g}_n$. If $c_0 \neq 0$, then $[X, U_\alpha] = c_0 X_0 - c_\alpha X_\alpha \neq 0$ for all $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$. If $c_0 = 0$, then there is an index $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$ with $c_\alpha \neq 0$, hence $[X, U_\alpha] = -c_\alpha X_\alpha \neq 0$.

It is obvious that all the 1-dimensional subspaces $(X_0), (X_1), \ldots, (X_n)$ generated by the vectors $X_0, X_1, \ldots, X_n$ are ideals of $\mathfrak{g}_n$.

Lemma 6.3. *The ideals $(X_0), (X_1), \ldots, (X_n)$ are the only 1-dimensional ideals of the algebra $\mathfrak{g}_n$.*

Proof. Suppose (X) to be a 1-dimensional ideal of $\mathfrak{g}_n$. Take the decomposition $X = X' + X''$, $X' \in \mathfrak{g}_n'$, $X'' \in \mathfrak{g}_n''$. By Lemma 6.1, there is a non-zero vector $Z \in \mathfrak{g}_n$ such that $[Z, X] \neq 0$. Further, there is a real number $k \neq 0$ such that $[Z, X] = kX = kX' + kX''$. Formula (26) yields $kX'' = 0$, so $X'' = 0$. Therefore $X \in \mathfrak{g}_n'$,

$X = \sum_i c_i X_i$. By Lemma 6.2, there is an index $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$ such that $[X, U_\alpha] \neq 0$. Because (X) is an ideal, there is a real number l such that $[X, U_\alpha] = lX$. This implies $lc_i = 0$ for all $i \neq 0, \alpha$, and $(l + 1) c_0 = (l - 1) c_\alpha = 0$, $l \neq 0$. It means that at most one of the numbers $c_0, c_1, \ldots, c_n$ is non-zero, namely c_0 or c_α. Because $X \neq 0$, exactly one of the numbers $c_0, c_1, \ldots, c_n$ does not vanish, thus $(X) = (X_i)$ for some $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Now, let us consider the multiplicative group $(\mathbf{Z}_2)^{n+1} = \{\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \mid \varepsilon_i = \pm 1\}$ and the permutation group $\mathbf{S}_{n+1}$ of the set $\{0, 1, \ldots, n\}$. Their semi-direct product will be defined via $(\varepsilon, \sigma) . (\delta, \tau) = (\varepsilon * \delta, \sigma \circ \tau)$, where $(\varepsilon * \delta)_i = \varepsilon_{\tau(i)} . \delta_i$ for all (ε, σ), $(\delta, \tau) \in (\mathbf{Z}_2)^{n+1} \times \mathbf{S}_{n+1}$ and $i = 0, 1, \ldots, n$. It will be proved that the groups $(\mathbf{Z}_2)^{n+1} \times \mathbf{S}_{n+1}$ and L are isomorphic. In order to do it let us define a map $\Phi : (\mathbf{Z}_2)^{n+1} \times \mathbf{S}_{n+1} \to GL(\mathfrak{g}_n)$ by the formulas

$$\Phi(\varepsilon, \sigma) X_i = \varepsilon_i X_{\sigma(i)}\,,$$

$$\Phi(\varepsilon, \sigma)\, U_\alpha = \begin{cases} U_{\sigma(\alpha)} & \text{if} \quad \sigma(0) = 0\,, \\ U_{\sigma(\alpha)} - U_{\sigma(0)} & \text{if} \quad \sigma(0) \neq 0\,, \quad \sigma(\alpha) \neq 0\,, \\ -U_{\sigma(0)} & \text{if} \quad \sigma(0) \neq 0\,, \quad \sigma(\alpha) = 0 \end{cases}$$

for all $i = 0, 1, \ldots, n$ and $\alpha = 1, \ldots, n$.

Proposition 6.1. *The map Φ is an injective group homomorphism and* $\operatorname{im} \Phi = L$.

Proof. Clearly, Φ is injective. An easy calculation shows that Φ is a group homomorphism. The inclusion $\operatorname{im} \Phi \subset L$ follows from the formulas (4) and (5). It remains only to prove the converse inclusion.

Let $B \in L$ be an arbitrary element. The automorphism B of the algebra $\mathfrak{g}_n$ maps every 1-dimensional ideal (X_i), $i = 0, 1, \ldots, n$ into a 1-dimensional ideal of $\mathfrak{g}_n$. Thus, Lemma 6.3 yields that there is a permutation $\sigma \in \mathbf{S}_{n+1}$ and a function $\varepsilon : \{0, 1, \ldots, n\} \to \mathbf{R}$, $\varepsilon(i) = \varepsilon_i$ such that

$$BX_i = \varepsilon_i X_{\sigma(i)} \quad \text{for all} \quad i\,. \tag{27}$$

Since the transformation B preserves the scalar product g and since all the vectors $X_0, X_1, \ldots, X_n$ are of the same length, we have $\varepsilon_i = \pm 1$ for all i, that is $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in (\mathbf{Z}_2)^{n+1}$.

Another consequence of Lemma 6.3 says that the subspace $\mathfrak{g}_n'$ is invariant by L. Therefore, the orthogonal complement $\mathfrak{g}_n''$ to $\mathfrak{g}_n'$ is invariant by L, too. It follows that there is a real matrix (B_α^β), $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$ such that $BU_\alpha = \sum_\beta B_\alpha^\beta U_\beta$ for all $\alpha = 1, \ldots, n$. Because B is an automorphism of the algebra $\mathfrak{g}_n$, it is $B[X_{\sigma^{-1}(\beta)}, U_\alpha] = [BX_{\sigma^{-1}(\beta)}, BU_\alpha]$ for all α, β. Using formulas (4) we get

$$B_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \beta = \sigma(\alpha)\,, \\ 0 & \text{if} \quad \beta \neq \sigma(\alpha)\,, \\ -1 & \text{if} \quad \beta = \sigma(0)\,. \end{cases}$$

Comparing this result and the relation (27) on the one hand with the definition of the mapping Φ on the other we get $B = \Phi(\varepsilon, \sigma)$.

Corollary. *If two transformations $B, B' \in L$ agree at all the vectors $X_0, X_1, \dots, X_n$, then they coincide.*

Recall that the transformation S of the vector space $T_e(G_n) = \mathfrak{g}_n$ has been introduced in § 4 (see formulas (6)).

Proposition 6.2. *An element $B \in L$ belongs to the set L' if and only if it is conjugated to the transformation S.*

Proof. The part „if" is evident. To prove the converse implication we shall need the following.

Lemma 6.4. *Let $B = \Phi(\varepsilon, \sigma) \in L$ be an element of L'. Then σ is a full cycle and $B^{n+1}(X_0) = -X_0$.*

Proof. Let k be the least positive integer for which $\sigma^k(0) = 0$ holds. Suppose $k < n + 1$. Denote $U'_\alpha = U_{\alpha'}$, where $\alpha' = \sigma^\alpha(0)$ for all $\alpha \in \{1, \dots, k - 1\}$ (this set may be empty), and denote the elements of the set $\{U_1, \dots, U_n\} - \{U'_1, \dots, U'_{k-1}\}$ by $U'_k, \dots, U'_n$. Vector

$$(n - k + 1) \sum_{\alpha=1}^{k-1} U'_\alpha - k \sum_{\beta=k}^{n} U'_\beta$$

is a fixed non-zero vector of the transformation B. This contradicts the assumption $B \in L'$. Thus $k = n + 1$. Therefore, σ is a full cycle and $B^{n+1}(X_0) = \pm X_0$. It remains to get rid of the sign plus. But if $B^{n+1}(X_0) = +X_0$, then the non-zero vector $X_0 + B(X_0) + \dots + B^n(X_0)$ is preserved under the transformation $B \in L'$, which is a contradiction.

Let us return to the proof of Proposition 6.2. By the foregoing lemma, every element $B = \Phi(\varepsilon, \sigma) \in L'$ determines a couple $(\delta, \tau) \in (\mathbf{Z}_2)^{n+1} \times \mathbf{S}_{n+1}$ such that $B^i(X_0) = \delta_i X_{\tau(i)}$ for all i. Put $A = \Phi(\delta, \tau)$. Then we have

$$B \circ A(X_i) = B(\delta_i X_{\tau(i)}) = B^{i+1}(X_0) = \Phi(\delta, \tau)\, X_{i+1} = A \circ S(X_i)$$

for all $i = 0, 1, \dots, n - 1$. In virtue of the second part of Lemma 6.4 we have

$$B \circ A(X_n) = B^{n+1}(X_0) = -X_0 = \Phi(\delta, \tau)\,(-X_0) = A \circ S(X_n)\,.$$

Therefore, by Corollary of Proposition 6.1, we obtain $B \circ A = A \circ S$.

Because the transfotmation S is of order $2n + 2$, Proposition 6.2 and Theorem 2 imply the following

Proposition 6.3. Every regular s-structure on (G_n, g) is of order $2n + 2$.

Let $G_n = G^{(0)} \times G^{(1)} \times \ldots \times G^{(r)}$ be the de Rham decomposition of the Riemannian manifold (G_n, g). By a result of HANO, see Theorem VI.3.5 in [2], the identity component $I(G_n)^0$ of the full isometry group of (G_n, g) satisfies

$$I(G_n)^0 = I(G^{(0)})^0 \times I(G^{(1)})^0 \times \ldots \times I(G^{(r)})^0 .$$

Recall that, according to the first part of § 5, we identify the Lie algebra of the Lie group $I(G_n)^0$ with the algebra $\mathfrak{g}_n$.

Proposition 7.1. *The Riemannian manifold (G_n, g) is irreducible for all $n \geqq 1$.*

Proof. If $n = 1$ then $\dim G_1 = 3$ and, by Proposition 6.3, the g.s. space (G_1, g) is of order 4. Therefore, by Proposition 14.1 in [5], the g.s. space (G_1, g) is irreducible.

Let $n \geqq 2$. Suppose that G_n is reducible, $G_n = G^1 \times G^2$. Then the Lie algebra $\mathfrak{g}_n$ is a direct sum of some non-trivial ideals $\mathfrak{g}^1$ and $\mathfrak{g}^2$. For every $X \in \mathfrak{g}_n$ denote by X^1 and X^2 the $\mathfrak{g}^1$- and $\mathfrak{g}^2$-components of X, respectively.

Lemma 7.1. *$X_i \in \mathfrak{g}^1 \cup \mathfrak{g}^2$ for all $i = 0, 1, \ldots, n$.*

Proof. According to formulas (4) we have

$$X_0^1 = [X_0^1, U_\alpha] , \tag{28}$$

$$X_\alpha^1 = -[X_\alpha^1, U_\alpha] \tag{29}$$

for all $\alpha = 1, \ldots, n$. By formulas (29) and (26), there are real numbers c_{ij}, $i, j = 0, 1, \ldots, n$ such that

$$X_i^1 = \sum_{j=0}^{n} c_{ij} X_j \quad \text{for all} \quad i . \tag{30}$$

From (28), (30) and (4) we obtain

$$X_0^1 = [\sum_{j=0}^{n} c_{0j} X_j, U_\alpha] = c_{00} X_0 - c_{0\alpha} X_\alpha$$

for all α. Because $n \geqq 2$, this yields $c_{0\alpha} = 0$ for all α and $X_0^1 = c_{00} X_0 = c_{00}(X_0^1 + X_0^2)$ hence $(c_{00} - 1) X_0^1 + c_{00} X_0^2 = 0$. It follows $c_{00} = 1$ or $c_{00} = 0$, which is equivalent to $X_0 \in \mathfrak{g}^1 \cup \mathfrak{g}^2$. In the same way, using formulas (29), (30) and (4) we get $X_\alpha \in \mathfrak{g}^1 \cup \mathfrak{g}^2$ for all $\alpha = 1, \ldots, n$.

Lemma 7.2. *$X_\alpha \in \mathfrak{g}^\varepsilon \Rightarrow U_\alpha \in \mathfrak{g}^\varepsilon$ for all $\alpha = 1, \ldots, n$ and $\varepsilon = 1, 2$.*

Proof. Let $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$ be arbitrary but fixed. Let us suppose e.g. $X_\alpha \in \mathfrak{g}^1$.

From (4) we have

$$[U_\alpha^1, U_\beta] = 0,$$

$$[U_\alpha^1, X_\beta] = \delta_{\alpha\beta} X_\alpha^1 = \delta_{\alpha\beta} X_\alpha$$

for all β. Putting $U_\alpha^1 = \sum_i x_i X_i + \sum_\varkappa y_\varkappa U_\varkappa$ and substituting it into the foregoing identities we get $x_i = 0$ and $y_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ for all i and β, thus $U_\alpha \in \mathfrak{g}^1$.

Let us return to the proof of Proposition 7.1. By Lemmas 7.1 and 7.2, every element of the basis $X_0, X_1, \ldots, X_n, U_1, \ldots, U_n$ of $\mathfrak{g}_n$ is an element of $\mathfrak{g}^1$ or $\mathfrak{g}^2$. Because $[X_0, U_\alpha] = X_0 \neq 0$ for all α, all the vectors $X_0, U_1, \ldots, U_n$ lie in the same summand $\mathfrak{g}^\varepsilon$. Now, according to Lemma 7.2, all the vectors $X_0, X_1, \ldots, X_n, U_1, \ldots, U_n$ belong to the same non trivial ideal $\mathfrak{g}^\varepsilon$ — a contradiction.

We conclude: *For every even integer $m \geqq 4$, the space $(G_{(m-2)/2}, g)$ satisfies all requirements of Main Theorem.*

References

[1] *Graham, P. J., Ledger, A. J.:* s-Regular Manifolds. In: Differential geometry, in honour of K. Yano. Tokyo 1972, 134—144.

[2] *Kobayashi, S., Nomizu, K.:* Foundations of Differential Geometry. N. York, London, Interscience Publishers, Vol. I (1963), Vol. II (1969).

[3] *Kowalski, O.:* Riemannian Manifolds with General Symmetries. Math. Z. *136* (1974), 137—150.

[4] *Kowalski, O.:* Existence of Generalized Symmetric Riemannian Spaces of Arbitrary Order. J. Diff. Geometry *12* (1977), 203—208.

[5] *Kowalski, O.:* Classification of Generalized Symmetric Riemannian Spaces of Dimension $n \leqq 5$. Rozpravy ČSAV, Řada MPV, No 8, *85* (1975).

[6] *Kowalski, O.:* Smooth and Affine s-Manifolds. Periodica Mathematica Hungarica Vol. *8* (3—4), (1977), 299—311.

[7] *Kreknin, V. A.:* O razrešimosti algebr Li s reguľarnym avtomorfizmom konečnogo poriadka. DAN SSSR, *118*, 3 (1958), 436—438.

[8] *Ledger, A. J., Obata, M.:* Affine and Riemannian s-Manifolds. J. Diff. Geometry *2* (1968), 451—459.

[9] *Winter, D. J.:* On Groups of Automorphisms of Lie Algebras. J. Alg. *8* (1968), 131—142.

Author's address: 816 31 Bratislava, Mlynská dolina, Matematický pavilon (Matematicko—fyzikálna fakulta UK).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL OPERATOR $(-1)^n D_1^n D_2^n + a(iD_1)^n + b(iD_2)^n + c$

VĚRA HOLAŇOVÁ-RADOCHOVÁ, Brno

(Received September 4, 1978)

This paper is concerned with fundamental solutions of the partial differential operator

(1) $$(-1)^n D_1^n D_2^n + a(iD_1)^n + b(iD_2)^n + c\,,$$

where $D_1 = -i(\partial/\partial x_1)$, $D_2 = -i(\partial/\partial x_2)$, in the space of generalized functions [1], [2]. Conditions of existence of temperate fundamental solutions are derived for the operator with constant coefficients and for arbitrary n.

INTRODUCTION

Let G be an open convex set in the real two dimensional space R_2. We denote by $C^k(G)$, $0 \leqq k < \infty$ the set of all functions defined in G whose partial derivatives of order $\leqq k$ all exist and are continuous. We define $C^\infty(G) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(G)$. The set of all functions $\varphi \in C^\infty(G)$ with compact support in G is denoted by $C_0^\infty(G)$. A distribution u in G is a continuous linear functional on $C_0^\infty(G)$. The set of all distributions in G is denoted by $\mathscr{D}'(G)$, the space of all distributions with compact support in G by $\mathscr{E}'(G)$.

Further, we denote by $\mathscr{S}$ (R_2) the set of all functions $\varphi \in C^\infty(R_2)$ such that

$$\sup_x |x^\beta D^\alpha \varphi(x)| < \infty$$

for all multiindices α and β, where $D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}$, $\alpha_1 + \alpha_2 = |\alpha|$. A continuous linear functional u on $\mathscr{S}$ is called a *temperate distribution*. The set of all temperate distributions is denoted by $\mathscr{S}'$.

The Fourier transform $F[f]$ of a function $f \in L_1(R_2)$ is defined by

$$F[f](\xi) = \iint_{R_2} e^{-i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)} f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2\,.$$

If $u \in \mathscr{S}'$, the Fourier transform $F[u]$ is defined by

$$F[u](\varphi) = u(F[\varphi]), \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

A distribution $E \in \mathscr{D}'(R_2)$ is called a *fundamental solution of the differential operator* $P(D)$ if $P(D)\,E = \delta$, where δ is the Dirac distribution.

We denote by $P(\xi)$ the polynomial which we obtain by replacing the D_j in the operator $P(D)$ by ξ_j. We say that an operator $Q(D)$ is *weaker* than $P(D)$, when

$$\tilde{Q}(\xi)/\tilde{P}(\xi) < C \quad \text{if } \xi \text{ is real},$$

where $\tilde{P}(\xi) = [\sum_{|\alpha| \geqq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2]^{1/2}$, $\tilde{Q}(\xi) = [\sum_{|\alpha| \geqq 0} |Q^{(\alpha)}(\xi)|^2]^{1/2}$,

$$P^{(\alpha)}(\xi) = \partial^{|\alpha|} P / \partial\xi_1^{\alpha_1}\, \partial\xi_2^{\alpha_2}, \quad \tilde{Q}^{(\alpha)}(\xi) = \partial^{|\alpha|} Q / \partial\xi_1^{\alpha_1}\, \partial\xi_2^{\alpha_2}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = |\alpha|.$$

Let $\mathscr{K}$ be the set of positive functions k defined in R_2 for which there exist positive constants C and N such that

$$k(\xi + \eta) \leqq (1 + C|\xi|)^N\, k(\eta), \quad \xi, \eta \in R_2.$$

If $k \in \mathscr{K}$ and $0 \leqq p \leqq \infty$, we denote by $\mathscr{B}_{p,k}$ the set of all distributions $u \in \mathscr{S}'$ such that $F[u]$ is a function and

$$\|u\|_{p,k} = \left(\frac{1}{(2\pi)} \int |k(\xi)\, F[u](\xi)|^p \,\mathrm{d}\xi\right)^{1/p} < \infty.$$

In the case $p = \infty$ we shall interpret $\|u\|_{p,k}$ as ess. sup $|k(\xi)\, F[u](\xi)|$.

1. THE OPERATOR $(-1)^n D_1^n D_2^n + a(\mathrm{i}D_1)^n + b(\mathrm{i}D_2)^n + c$ WITH CONSTANT COEFFICIENTS

Let us consider the differential operator (1) with constant coefficients and $abc > 0$. Then the following theorem holds.

Theorem 1. *Let $n = 2m + 1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Then there exists only one temperate fundamental solution E of the differential operator (1) which is in the space $\mathscr{B}_{\infty,\tilde{P}}$. This fundamental solution is proper in the sense of the denition of L. Hörmander.*

Proof. The differential operator (1) can be written in the form

(2) $$P(D) = -D_1^n D_2^n \pm \mathrm{i}aD_1^n \pm \mathrm{i}bD_2^n + c,$$

where the sign + holds if m is even and − if m is odd.

The corresponding polynomial is

(3) $$P(\xi) = -\xi_1^n \xi_2^n \pm \mathrm{i}a\xi_1^n \pm \mathrm{i}b\xi_2^n + c.$$

$P(\xi) \neq 0$, if ξ is real.

Since $|P(\xi)| = [(-\xi_1^n\xi_2^n + c)^2 + (a\xi_1^n + b\xi_2^n)^2]^{1/2} \neq 0$ if ξ is real and $1/|P(\xi)| \to 0$ if $\xi \to \infty$, there always exist $K > 0$ and $N > 0$ such that $1/|P(\xi)| = 1/[\xi_1^{2n}\xi_2^{2n} + a^2\xi_1^{2n} + b^2\xi_2^{2n} + c^2 + 2(ab - c)\xi_1^n\xi_2^n]^{1/2} \leqq k(1 + |\xi|^2)^N$. Thus it follows from results of L. Hörmander ([3], p. 36) that there exists one and only one temperate fundamental solution E of the differential operator $P(D)$ for which we have

$$F[E] = 1/(-\xi_1^n\xi_2^n \pm ia\xi_1^n \pm ib\xi_2^n + c).$$

Since

$$|\tilde{P}(\xi)\, F[E]\,(\xi)| = \frac{[\sum_{|\alpha|=0}^{n} |\partial^{|\alpha|}(-\xi_1^n\xi_2^n \pm ia\xi_1^n \pm ib\xi_2^n + c)/\partial\xi_1^{\alpha_1}\,\partial\xi_2^{\alpha_2}|^2]^{1/2}}{|-\xi_1^n\xi_2^n \pm ia\xi_1^n \pm ib\xi_2^n + c|} < \infty$$

the fundamental solution of the operator (2) is in the space $\mathscr{B}_{\infty\tilde{P}}$.

As in [4], we call the linear manifold

$$\Lambda(P) = \{\eta : \eta \textit{ is real and } P(\xi + t\eta) = P(\xi) \textit{ for any } \xi \textit{ and } t\}$$

the lineality space of the polynomial P, and we say that a polynomial P is complete if its lineality space consists of the origin only.

It is evident that the polynomial (3) is complete. Since $P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) \to 0$ if ξ is real and $\to \infty$ for every α with $|\alpha| \neq 0$, the operator (2) is of local type (see [4], p. 222).

Since every fundamental solution of the operator $P(D)$, being complete and of local type, is proper in the sense of L. Hörmander's definition, the fundamental solution of the differential operator (2) is proper.

It means that $Q(D)(E * f) \in L_2^{\text{loc}}$ holds for $f \in L_2$ with compact support and for every differential polynomial Q weaker than P.

Consider the special case when $n = 1$, $ab = c = 0$, $a > 0$, $b > 0$. Then

$$F[E](\xi) = -1/(\xi_1 - ib)(\xi_2 - ia).$$

As $F[g(x_1)f(x_2)] = F[g](\xi_1) . F[f](\xi_2)$ and $F[\Theta(x_2)\, e^{-ax_2}] = -i/(\xi_2 - ia)$ if $a > 0$, $F[\Theta(x_1)\, e^{-bx_1}] = -i/(\xi_1 - ib)$ if $b > 0$, we have the temperate fundamental solution of the differential operator

$$P(D) = -D_1D_2 + iaD_1 + ibD_2 + c$$

in the form

$$E(x_1, x_2) = \Theta(x_1, x_2)\, e^{-(bx_1 + ax_2)},$$

where $\Theta(x_1, x_2) = 1$ if $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\Theta(x_1, x_2) = 0$ if $x_1 < 0$, $x_2 < 0$.

The support of this fundamental solution is the convex angle $A = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0\}$, with vertex at the origin.

Let n be even. Then we have for the differential operator (1) with constant coefficients and $abc > 0$ the following

Theorem 2. *Let* $n = 2m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. *Then there exists only one temperate* *fundamental solution E of the differential operator (1) if m is odd and $a < 0$, $b < 0$ or if m is even and $a > 0$, $b > 0$. This fundamental solution is in the space $\mathscr{B}_{\infty,p}$ and it is proper.*

If we assume that $ab - c = 0$, then we can write

$$F[E](\xi) = 1/(\xi_1^{2m} + \beta^2)(\xi_2^{2m} + \alpha^2),$$

where $a = \alpha^2$, $b = \beta^2$ if $a > 0$, $b > 0$ and $-a = \alpha^2$, $-b = \beta^2$ if $a < 0$, $b < 0$.

Proof. The corresponding polynomial is

$$P(\xi) = \xi_1^{2m}\xi_2^{2m} \pm a\xi_1^{2m} \pm b\xi_2^{2m} + c,$$

where the sign $+$ is for the even m and the sign $-$ is for the odd m.

It is $P(\xi) \neq 0$ if ξ is real. We prove analogously to Theorem 1 that $P(\xi)$ is complete and of local type.

In particular, for $n = 2$ and $ab - c = 0$ we have the differential operator

$$P(D) = D_1^2 D_2^2 - aD_1^2 - bD_2^2 + ab, \quad a < 0, \quad b < 0$$

and

$$F[E] = 1/(\xi_1^2 + \beta^2)(\xi_2^2 + \alpha^2),$$

so that the temperate fundamental solution is

$$E = \frac{1}{4\alpha\beta} e^{-\alpha|x_2| - \beta|x_1|}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

The support of this temperate solution is the whole plane (x_1, x_2).

2. THE OPERATOR $-D_1D_2 + iaD_1 + ibD_2 + c$ WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Consider now the case $n = 2$ and the differential operator

(4) $$P(D, x) = -D_1D_2 + ia(x_1, x_2) D_1 + ib(x_1, x_2) D_2 + c(x_1, x_2),$$

where $a(x_1, x_2), b(x_1, x_2), c(x_1, x_2) \in C^\infty(R_2)$.

We say that a distribution $u(x_1, x_2) \in \mathscr{D}'(R_2)$ is a generalized solution of the differential equation

(5) $$P(D, x)\, u = f$$

in the domain $G \subset R_2$, if the relation

$$\iint_G (-D_1D_2u + iaD_1u + ibD_2u + cu)\, \varphi \, dx_1\, dx_2 = \iint_G f\varphi \, dx_1\, dx_2$$

holds for all $\varphi \in C_0^\infty(G)$, supp $\varphi \in G$, $f \in \mathscr{D}'(G)$.

$$\text{Let}\quad G = \{(x_1, x_2) : \alpha_1 < x_1 < \beta_1,\ \alpha_2 < x_2 < \beta_2,\ \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \text{ are real and positive constants}\}$$

and assume that

$$\frac{\partial a}{\partial x_1} + ab - c = 0\,. \tag{6}$$

Then the differential equation (5) may be replaced by the system

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} + au = z\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} + bz = f\,. \tag{8}$$

For the generalized solution of the differential equation (8) we have

Lemma 1. *Let $f \in \mathscr{E}'(G)$ and let $K \in \mathscr{D}'(G)$ be an arbitrary distribution which is independent of x_1* (see [2], p. 55). *Then the generalized solution of the differential equation* (8) *in G is given by*

$$z(x_1, x_2) = K \exp\left[-B(x_1, x_2)\right] + \\ + \exp\left[-B(x_1, x_2)\right] \int f(x_1, x_2) \exp\left[B(x_1, x_2)\right] \mathrm{d}x_1\,,$$

where $B(x_1, x_2) = \int b(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1$.

Similarly, for the differential equation (7) we obtain

Lemma 2. *Let $H \in \mathscr{D}'(G)$ be an arbitrary distribution independent of x_2 and let $z(x_1, x_2) \in \mathscr{E}'(G)$. Then*

$$u(x_1, x_2) = H \exp\left[-A(x_1, x_2)\right] + \\ + \exp\left[-A(x_1, x_2)\right] \int z(x_1, x_2) \exp\left[A(x_1, x_2)\right] \mathrm{d}x_2\,,$$

where $A(x_1, x_2) = \int a(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_2$, is a generalized solution of the differential equation (7).

Hence under the condition (6) we have

Theorem 3. *Let $G = \{(x_1, x_2) : \alpha_1 < x_1 < \beta_1;\ \alpha_2 < x_2 < \beta_2,\ \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ are real positive constants$\}$; let $f \in \mathscr{E}'(G)$, let $K \in \mathscr{D}'(G)$ be an arbitrary distribution which is independent of x_1, $H \in \mathscr{D}'(G)$ an arbitrary distribution which is independent of x_2. Let $\Theta(x_1, x_2) = 1$ if $(x_1, x_2) \in G$, $\Theta(x_1, x_2) = 0$ if $(x_1, x_2) \in \mathbf{C}G$.*

Then the generalized solution $u(x_1, x_2)$ of the differential equation (5) *in G is given by*

$$u(x_1, x_2) = H \exp\left[-A(x_1, x_2)\right] + \\ + \exp\left[-A(x_1, x_2)\right] \int \Theta K \exp\left[-B(x_1, x_2) + A(x_1, x_2)\right] \mathrm{d}x_2 +$$

$$+ \exp\left[-A(x_1, x_2)\right] \int \left\{ \exp\left[-B(x_1, x_2) + A(x_1, x_2)\right] . \right.$$

$$\left. . \int f(x_1, x_2) \exp B(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1 \right\} \mathrm{d}x_2 .$$

This is a simple consequence of Lemma 1 and Lemma 2. If we put $f = \delta$, where δ is the Dirac distribution, we obtain the fundamental solution E of the differential operator $P(D, x)$.

In the case $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \infty$, $a = \text{const.}$, $b = \text{const.}$, $H = \frac{1}{2}\, \Theta(x_1, x_2)\, \mathrm{e}^{-bx_1}$, $K = \frac{1}{2}\, b\mathrm{e}^{-ax_2}$ we obtain the temperate fundamental solution which has been derived in the first section.

Let us assume the relation $(\partial b/\partial x_2) + ab - c = 0$ to be valid instead of (6). Then we have the fundamental solution of the differential operator $P(D, x)$ in the form

$$E(x_1, x_2) = K \exp\left[-B(x_1, x_2)\right] +$$

$$+ \exp\left[-B(x_1, x_2)\right] \int \Theta H \exp\left[-A(x_1, x_2) + B(x_1, x_2)\right] \mathrm{d}x_1 +$$

$$+ \exp\left[-B(x_1, x_2)\right] \int \left\{ \exp -A(x_1, x_2) + B(x_1, x_2) \int \delta \exp A(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_2 \right\} \mathrm{d}x_1 .$$

References

[1] *L. Hörmander:* Linear Partial Differential Operators, Berlin 1969.

[2] *L. Schwartz:* Théorie des distributions, Paris 1973.

[3] *L. Hörmander:* Local and global properties of fundamental solutions, Math. Scand. *5* (1957), 27–39.

[4] *L. Hörmander:* On the theory of general partial differential operators, Acta mathematica, *94* (1955), 161–248.

Author's address: 662 95 Brno, Janáčkovo nám. 2a (Matematický ústav ČSAV, pobočka v Brně).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INTERFACE CONDITIONS

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha

(Received November 6, 1978)

In this note, the theory of generalized linear differential equations will be applied to some linear systems of ordinary differential equations with interface conditions.

1. INTERFACE PROBLEMS AND GENERALIZED LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Let us consider the ordinary linear differential system

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)\,, \quad t \in [0, 1] \tag{1.1}$$

where $\mathbf{F} : [0, 1] \to L(R_n)$ is an $n \times n$-matrix valued function and $\mathbf{g} : [0, 1] \to R_n$. Both $\mathbf{F}$ and $\mathbf{g}$ are assumed to be Lebesgue integrable on $[0, 1]$.

We consider the system (1.1) together with interface conditions

$$\mathbf{M}_j\,\mathbf{x}(t_j-) + \mathbf{N}_j\,\mathbf{x}(t_j+) = \mathbf{c}_j\,, \quad j = 1, 2, \ldots, k \tag{1.2}$$

where $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < t_{k+1} = 1$, $\mathbf{M}_j, \mathbf{N}_j \in L(R_n, R_m)$ are real $m \times n$-matrices and $\mathbf{c}_j \in R_m$, $j = 1, \ldots, k$.

1.1. Definition. A function $\mathbf{x} : [a, b] \to R_n$, $[a, b] \subset [0, 1]$ is called a *solution of the interface problem* (1.1), (1.2) on $[a, b]$ if

a) $\mathbf{x}$ is absolutely continuous on every interval of the form $[a, b] \cap (t_{j-1}, t_j)$, $j = 1, \ldots, k + 1$,

b) $\mathbf{x}$ satisfies (1.1) almost everywhere in $[a, b]$,

c) for every $t_j \in (a, b)$, $j = 1, \ldots, k$ the interface condition (1.2) is satisfied.

Remark. Interface problems of this type are described and studied in various papers, see e.g. [1], [2], [3], [4], [7], [8]. The discontinuity of solutions of interface problems is caused by the nature of the conditions (1.2). The generalized linear differential equations have also the property that they admit discontinuous solutions, see e.g. [6]. This leads to the natural question about the connection between interface problems and generalized differential equations. The first question concerns the possibility of describing the interface problem (1.1), (1.2) by a generalized linear differential equation. If this is possible then we can ask for the counterpart of the results on generalized linear differential equations in the theory of interface problems.

We consider the interface problem (1.1), (1.2) for which the solution can be continued from the left to the right, i.e. we require that, given $\mathbf{x}(t-)$, it is possible to determine $\mathbf{x}(t+)$ (not uniquely in general). This requirement transfer to the interface conditions (1.2) in the sense that the solvability of the linear algebraic equation in $\mathbf{x}(t_j+)$

$$\mathbf{N}_j \mathbf{x}(t_j+) = \mathbf{c}_j - \mathbf{M}_j \mathbf{x}(t_j-), \quad j = 1, \ldots, k$$

will be assumed for every given $\mathbf{x}(t_j-) \in R_n$. This means that we have to assume that

$$\mathbf{c}_j - \mathbf{M}_j \mathbf{x}^+ \in \mathrm{R}(\mathbf{N}_j), \quad j = 1, \ldots, k$$

holds for any $\mathbf{x}^+ \in R_n$, where $\mathrm{R}(\mathbf{N}) \subset R_m$ stands for the range of an $m \times n$-matrix $\mathbf{N}$, i.e. $\mathrm{R}(\mathbf{N})$ is the linear span of all column vectors of the matrix $\mathbf{N}$. Hence we have the inclusion

$$\mathbf{c}_j + \mathrm{R}(\mathbf{M}_j) \subset \mathrm{R}(\mathbf{N}_j), \quad j = 1, \ldots, k$$

which is clearly equivalent to

(1.3) $$\mathbf{c}_j \in \mathrm{R}(\mathbf{N}_j), \quad j = 1, \ldots, k$$

(1.4) $$\mathrm{R}(\mathbf{M}_j) \subset \mathrm{R}(\mathbf{N}_j), \quad j = 1, \ldots, k.$$

If the conditions (1.3) and (1.4) are not satisfied, then there exists a value $\mathbf{x}(t_j-)$ such that $\mathbf{x}(t_j+)$ cannot be determined in such a way that (1.2) holds.

1.1. Lemma. *The condition* (1.3) *holds if and only if there exist* $\mathbf{d}_j \in R_n$, $j = 1, \ldots, k$ *such that*

(1.5) $$\mathbf{N}_j \mathbf{d}_j = \mathbf{c}_j, \quad j = 1, \ldots, k.$$

The condition (1.4) *holds if and only if there exist* $\mathbf{D}_j \in L(R_n)$, $j = 1, \ldots, k$ *such that*

(1.6) $$\mathbf{M}_j + \mathbf{N}_j \mathbf{D}_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Proof. The first assertion is trivial. In order to prove the second statement, let us mention that the matrix equation $\mathbf{M}_j + \mathbf{N}_j \mathbf{X} = \mathbf{0}$ has a solution $\mathbf{X} \in L(R_n)$ if and only if rank $\mathbf{N}_j$ = rank $(\mathbf{N}_j, \mathbf{M}_j)$, i.e. every column of the matrix $\mathbf{M}_j$ depends linearly on the columns of the matrix $\mathbf{N}_j$. Hence the mentioned matrix equation has a solution $\mathbf{D}_j \in L(R_n)$ if and only if $\mathrm{R}(\mathbf{M}_j) \subset \mathrm{R}(\mathbf{N}_j)$.

In the sequel we assume that the interface conditions (1.2) satisfy (1.3) and (1.4) (or the equivalent conditions given by Lemma 1.1).

Remark. Let us mention that if the continuability conditions (1.3) and (1.4) are satisfied then for any $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \in R_n \times [0, 1]$ and integrable $\mathbf{g} : [0, 1] \to R_n$ there exists a solution $\mathbf{x}(t)$ of the interface problem (1.1), (1.2) on the interval $[\tilde{t}, 1]$ such that $\mathbf{x}(\tilde{t}) = \tilde{\mathbf{x}}$. On the other hand if the conditions (1.3) and (1.4) are not satisfied then it is possible to show that there exists an initial point $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \in R_n \times [0, 1]$ and an integrable function $\mathbf{g} : [0, 1] \to R_n$ such that the interface problem (1.1), (1.2) has no solution $\mathbf{x}$ defined on the whole interval $[\tilde{t}, 1]$ and such that $\mathbf{x}(\tilde{t}) = \tilde{\mathbf{x}}$.

Further, it is easy to see that if $m = n$ and $\det \mathbf{N}_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, k$ then (1.3) and (1.4) are satisfied. According to Lemma 1.1 we have in this case $\mathbf{d}_j = \mathbf{N}_j^{-1}\mathbf{c}_j$ and $\mathbf{D}_j = -\mathbf{N}_j^{-1}\mathbf{M}_j$, $j = 1, \ldots, k$.

Let us now define, for $t \in [0, 1]$,

$$\mathbf{A}(t) = \int_0^t \mathbf{F}(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \sum_{j=1}^{k} (\mathbf{D}_j - \mathbf{I})\, \psi_{t_j}^+(t) \tag{1.7}$$

and

$$\mathbf{f}(t) = \int_0^t \mathbf{g}(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \sum_{j=1}^{k} \mathbf{d}_j\, \psi_{t_j}^+(t) \tag{1.8}$$

where $\psi_\alpha^+(t) = 0$ if $t \leqq \alpha$, $\psi_\alpha^+(t) = 1$ if $t > \alpha$, $\mathbf{d}_j$, $\mathbf{D}_j$, $j = 1, \ldots, k$ are determined by (1.5), (1.6), respectively, and $\mathbf{I}$ is the unit matrix in $L(R_n)$.

Evidently $\mathbf{A} : [0, 1] \to L(R_n)$, $\mathbf{f} : [0, 1] \to R_n$ are functions of bounded variation, left continuous on $[0, 1]$, i.e. $\Delta^-\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(t-) = \mathbf{0}$, $\Delta^-\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t-) = \mathbf{0}$ for every $t \in (0, 1]$, $\Delta^+\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t+) - \mathbf{A}(t) = \mathbf{0}$, $\Delta^+\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t+) - \mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$ for $t \in [0, 1)$, $t \neq t_j$ and

$$\Delta^+\mathbf{A}(t_j) = \mathbf{D}_j - \mathbf{I}\,, \quad \Delta^+\mathbf{f}(t_j) = \mathbf{d}_j\,, \quad j = 1, \ldots, k\,. \tag{1.9}$$

We consider the generalized linear differential equation

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}[\mathbf{A}]\, \mathbf{x} + \mathrm{d}\mathbf{f} \tag{1.10}$$

(see [5], [6]). Let $\mathbf{x} : [a, b] \to R_n$, $[a, b] \subset [0, 1]$ be a solution of (1.10). By definition we have

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}(\sigma) + \int_\sigma^\tau \mathrm{d}[\mathbf{A}(\varrho)]\, \mathbf{x}(\varrho) + \mathbf{f}(\tau) - \mathbf{f}(\sigma) \tag{1.11}$$

for every $\tau, \sigma \in [a, b]$ (the integral used in (1.11) is the Perron-Stieltjes integral). Using (1.7) and (1.8) we have by (1.11) for $\tau, \sigma \in [a, b] \cap [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, k$

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}(\sigma) + \int_\sigma^\tau \mathbf{F}(\varrho)\, \mathbf{x}(\varrho)\, \mathrm{d}\varrho + \int_\sigma^\tau \mathbf{g}(\varrho)\, \mathrm{d}\varrho$$

and a straightforward argument shows that the solution $\mathbf{x} : [a, b] \to R_n$ of (1.10) satisfies a) and b) from Definition 1.1.

Using the results known for generalized linear differential equations (see [6], III.1) we have

$$\mathbf{x}(t-) = [\mathbf{I} - \Delta^- \mathbf{A}(t)]\, \mathbf{x}(t) - \Delta^- \mathbf{f}(t) = \mathbf{x}(t)\,, \quad t \in (a, b]$$

and

$$\mathbf{x}(t+) = [\mathbf{I} + \Delta^+ \mathbf{A}(t)]\, \mathbf{x}(t) + \Delta^+ \mathbf{f}(t)\,, \quad t \in [a, b)\,,$$

i.e. $\mathbf{x}(t+) = \mathbf{x}(t)$ if $t \in [a, b)$, $t \neq t_j$ and $\mathbf{x}(t_j+) = \mathbf{D}_j \mathbf{x}(t_j) + \mathbf{d}_j$ for $t_j \in [a, b)$. (The onesided limits of the solution $\mathbf{x}(t)$ exist, because every solution of (1.10) is of bounded variation.)

Hence by (1.5) and (1.6) we get

$$\mathbf{M}_j \mathbf{x}(t_j-) + \mathbf{N}_j \mathbf{x}(t_j) = \mathbf{M}_j \mathbf{x}(t_j) + \mathbf{N}_j(\mathbf{D}_j \mathbf{x}(t_j) + \mathbf{d}_j) =$$
$$= (\mathbf{M}_j + \mathbf{N}_j \mathbf{D}_j)\, \mathbf{x}(t_j) + \mathbf{N}_j \mathbf{d}_j = \mathbf{c}_j$$

for all $t_j \in (a, b)$, $j = 1, \ldots, k$ and the solution $\mathbf{x}$ of (1.10) satisfies also c) from Definition 1.1. In this way we can conclude that every solution of (1.10) is also a solution of the interface problem (1.1), (1.2).

Assume conversely that $\mathbf{x} : [a, b] \to R_n$ is a solution of the interface problem (1.1), (1.2) which is left continuous on $[a, b]$. Then we have

$$\mathbf{M}_j \mathbf{x}(t_j-) + \mathbf{N}_j \mathbf{x}(t_j+) = \mathbf{M}_j \mathbf{x}(t_j) + \mathbf{N}_j \mathbf{x}(t_j+) = \mathbf{c}_j = \mathbf{N}_j \mathbf{d}_j =$$
$$= (\mathbf{M}_j + \mathbf{N}_j \mathbf{D}_j)\, \mathbf{x}(t_j) + \mathbf{N}_j \mathbf{d}_j$$

for every $t_j \in (a, b)$, $j = 1, \ldots, k$, where $\mathbf{d}_j$, $\mathbf{D}_j$ are given in Lemma 1.1. Hence

$$\mathbf{N}_j\, \mathbf{x}(t_j\, +) = \mathbf{N}_j \mathbf{D}_j\, \mathbf{x}(t_j) + \mathbf{N}_j \mathbf{d}_j\,,$$

i.e.

$$\mathbf{x}(t_j+) - \mathbf{D}_j\, \mathbf{x}(t_j) - \mathbf{d}_j \in \mathrm{N}(\mathbf{N}_j)$$

where $\mathrm{N}(\mathbf{N}_j)$ denotes the null-space of the matrix $\mathbf{N}_j$. This yields for every $t_j \in$ $\in (a, b)$ the equality

$$\mathbf{x}(t_j+) = \mathbf{D}_j\, \mathbf{x}(t_j) + \mathbf{d}_j + \mathbf{z}_j$$

with some $\mathbf{z}_j \in R_n$ such that $\mathbf{N}_j \mathbf{z}_j = \mathbf{0}$ ($\mathbf{z}_j \in \mathrm{N}(\mathbf{N}_j)$).

If we set $\tilde{\mathbf{d}}_j = \mathbf{d}_j + \mathbf{z}_j$, $j = 1, \ldots, k$ and define

$$\tilde{\mathbf{f}}(t) = \int_0^t \mathbf{g}(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{d}}_j\, \psi^+_{t_j}(t)\,, \quad t \in [a, b]$$

then it can be easily shown that for any $\sigma, \tau \in [a, b]$ we have

$$\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}(\sigma) = \int_\sigma^\tau \mathbf{F}(\varrho)\, \mathbf{x}(\varrho)\, \mathrm{d}\varrho + \int_\sigma^\tau \mathbf{g}(\varrho)\, \mathrm{d}\varrho + \sum_{t_j \in [\sigma, \tau)} [(\mathbf{D}_j - \mathbf{I})\, \mathbf{x}(t_j) + \tilde{\mathbf{d}}_j] =$$
$$= \int_\sigma^\tau \mathrm{d}[\mathbf{A}(\varrho)]\, \mathbf{x}(\varrho) + \tilde{\mathbf{f}}(\tau) - \tilde{\mathbf{f}}(\sigma)$$

and consequently $\boldsymbol{x} : [a, b] \to R_n$ is a solution of the generalized linear differential equation

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}[\boldsymbol{A}]\,\boldsymbol{x} + \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{f}}$$

which is of the form (1.10). The only difference is the form of $\tilde{\boldsymbol{f}}$ which differs from $\boldsymbol{f}$ given by (1.8) in the second term. In this way we have obtained the following

1.1. Theorem. *If the interface conditions* (1.2) *satisfy* (1.3) *and* (1.4) *then every solution of the generalized linear differential equation* (1.10) *with* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{f}$ *given by* (1.7), (1.8), *respectively, is a solution of the interface problem* (1.1), (1.2). *Conversely, every left continuous solution of the interface problem* (1.1), (1.2) *is a solution of* (1.10) *with* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{f}$ *given by* (1.7), (1.8) *where* $\boldsymbol{D}_j$, $\boldsymbol{d}_j$, $j = 1, \ldots, k$ *satisfy* (1.6), (1.5).

Remark. Let us mention that if the conditions (1.3) and (1.4) are satisfied then for every initial point $\boldsymbol{x} \in R_n$ and $\boldsymbol{g}$ integrable on $[0, 1]$ it is possible to construct a "train" composed of $k + 1$ pieces of Carathéodory solutions of the differential equation (1.1) on $[0, t_1]$, $[t_1, t_2], \ldots, [t_k, 1]$ in the sense of Conti [2] such that the solution $\boldsymbol{x}(t)$ on $[0, t_1]$ satisfies $\boldsymbol{x}(0) = \tilde{\boldsymbol{x}}$.

The left continuity of solutions of the interface problem (1.1), (1.2) is a requirement which can be easily satisfied for an arbitrary solution by changing its values at every point of discontinuity.

The class of generalized linear differential equations (1.10) corresponding to the problem (1.1), (1.2) depends on the null-space $\mathrm{N}(\boldsymbol{N}_j)$ of the matrices $\boldsymbol{N}_j$ (see Lemma 1.1 and the definition of $\boldsymbol{A}(t)$ and $\boldsymbol{f}(t)$ given in (1.7) and (1.8)). For example, the difference of any two functions $\boldsymbol{f}(t), \tilde{\boldsymbol{f}}(t)$ corresponding to the problem (1.1), (1.2) is of the form $\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{z}_j\, \psi_{t_j}^{+}(t)$ where $\boldsymbol{z}_j \in \mathrm{N}(\boldsymbol{N}_j)$; similarly for the matrices $\boldsymbol{A}(t)$ of the system (1.10).

1.2. Theorem. *Assume that the interface conditions satisfy* (1.3) *and* (1.4). *Let* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *be two solutions of the interface problem* (1.1), (1.2) *defined on* $[a, b] \subset [0, 1]$, *left continuous on* $[a, b]$. *Then the difference* $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)$, $t \in [a, b]$ *satisfies the generalized linear differential equation*

$$\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \mathrm{d}[\boldsymbol{A}]\,\boldsymbol{z} + \mathrm{d}\boldsymbol{h} \tag{1.12}$$

where $\boldsymbol{A}$ *is given by* (1.7) *and* $\boldsymbol{h} : [0, 1] \to R_n$ *is a function of the form*

$$\boldsymbol{h}(t) = \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{z}_j\, \psi_{t_j}^{+}(t)\,, \quad t \in [0, 1] \tag{1.13}$$

with $\boldsymbol{z}_j \in \mathrm{N}(\boldsymbol{N}_j)$, *i.e.* $\boldsymbol{N}_j \boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{0}$, $j = 1, \ldots, k$.

Proof. Let $\boldsymbol{D}_j$, $j = 1, \ldots, k$ be given as in Lemma 1.1 and let $\boldsymbol{A}$ be defined by (1.7). By Theorem 1.1 the functions $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ satisfy the equations $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}[\boldsymbol{A}]\,\boldsymbol{x} + \mathrm{d}\boldsymbol{f}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \mathrm{d}[\boldsymbol{A}]\,\boldsymbol{y} + \mathrm{d}\boldsymbol{f}^{*}$ where

$$\boldsymbol{f}(t) = \int_0^t \boldsymbol{g}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \sum_{j=1}^k \boldsymbol{d}_j\,\psi_{t_j}^+(t)\,, \quad \tilde{\boldsymbol{f}}(t) = \int_0^t \boldsymbol{g}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \sum_{j=1}^k \tilde{\boldsymbol{d}}_j\,\psi_{t_j}^+(t)\,,$$

$t \in [0, 1]$ with $\boldsymbol{N}_j \boldsymbol{d}_j = \boldsymbol{c}_j$, $\boldsymbol{N}_j \tilde{\boldsymbol{d}}_j = \boldsymbol{c}_j$, $j = 1, \ldots, k$. Hence $\boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{d}_j - \tilde{\boldsymbol{d}}_j \in \mathrm{N}(\boldsymbol{N}_j)$, $j = 1, \ldots, k$ and

$$\boldsymbol{h}(t) = \boldsymbol{f}(t) - \tilde{\boldsymbol{f}}(t) = \sum_{j=1}^k \boldsymbol{z}_j\,\psi_{t_j}^t(t)\,, \quad t \in [0, 1]\,.$$

The difference $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)$ evidently satisfies the equation

$$\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \mathrm{d}[\boldsymbol{A}]\,\boldsymbol{z} + \mathrm{d}(\boldsymbol{f} - \tilde{\boldsymbol{f}})$$

and this yields the statement of the theorem.

1.1. Corollary. *If the conditions* (1.3), (1.4) *are satisfied and* $\boldsymbol{x} : [a, b] \to R_n$ *is a fixed left continuous solution of the interface problem* (1.1), (1.2) *on* $[a, b]$ *then an arbitrary left continuous solution of the interface problem* (1.1), (1.2) *is of the form* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}$, *where* $\boldsymbol{z} : [a, b] \to R_n$ *is a solution of the generalized linear differential equation* (1.12).

The proof of this statement easily follows from Theorems 1.1 and 1.2.

Let us now assume that instead of (1.4) the stronger condition

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{M}_j) = \mathrm{R}(\boldsymbol{N}_j)\,, \quad j = 1, \ldots, k \tag{1.14}$$

is satisfied. This condition ensures the continuability of a solution of the interface problem from the left to the right as well as in the opposite direction.

1.2. Lemma. *Assume that* $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ *are* $m \times n$*-matrices. Then the equality* $\mathrm{R}(\boldsymbol{M}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{N})$ *holds for their ranges if and only if there exists a regular* $n \times n$*-matrix* $\boldsymbol{D}$ *such that*

$$\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}\,. \tag{1.15}$$

Proof. Assume that $\mathrm{R}(\boldsymbol{M}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{N})$. This is equivalent to the fact that the linear spans of the columns of $\boldsymbol{M}$ and $\boldsymbol{N}$ coincide. Let us write $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{M}_1, \ldots, \boldsymbol{M}_n)$ and similarly $\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{N}_1, \ldots, \boldsymbol{N}_n)$ where $\boldsymbol{M}_l$, $\boldsymbol{N}_l$ denote the l-th columns of $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$, respectively. It is known from linear algebra that there exists a regular $n \times n$-matrix $\boldsymbol{R}$ such that

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{M}_1, \ldots, \boldsymbol{M}_k, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{0})$$

where $\boldsymbol{M}_1, \ldots, \boldsymbol{M}_k$ are linearly independent columns of $\boldsymbol{M}$, $k = \operatorname{rank} \boldsymbol{M}$ and similarly there is a regular $n \times n$-matrix $\boldsymbol{S}$ such that

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{N}_1, \ldots, \boldsymbol{N}_k, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{0})$$

where $\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2, \ldots, \boldsymbol{N}_k$ are linearly independent columns of $\boldsymbol{N}$, $k = \operatorname{rank} \boldsymbol{N} = \operatorname{rank} \boldsymbol{M}$. Since $\mathrm{R}(\boldsymbol{M}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{N})$, the linear spans of the vectors $\boldsymbol{M}_1, \ldots, \boldsymbol{M}_k$ and $\boldsymbol{N}_1, \ldots, \boldsymbol{N}_k$ are the same and consequently there is a regular $k \times k$-matrix $\boldsymbol{U}$ such that $(\boldsymbol{M}_1, \ldots, \boldsymbol{M}_k)\, \boldsymbol{U} = (\boldsymbol{N}_1, \ldots, \boldsymbol{N}_k)$. If we set

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}, & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$$

then $\boldsymbol{MRT} = (\boldsymbol{M}_1, \ldots, \boldsymbol{M}_k, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{0})\, \boldsymbol{T} = (\boldsymbol{N}_1, \ldots, \boldsymbol{N}_k, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{NS}$ and $\boldsymbol{T}$ is a regular $n \times n$-matrix. If we set $\boldsymbol{D} = -\boldsymbol{ST}^{-1}\boldsymbol{R}^{-1}$ then $\boldsymbol{D}$ is a regular $n \times n$-matrix such such that $\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{ND}$ and this proves the "only if" part of the lemma. The second implication is evident.

Lemma 1.2 yields immediately

1.3. Lemma. *The condition* (1.14) *holds if and only if there exist regular $n \times n$-matrices $\boldsymbol{D}_j \in L(R_n)$ such that*

$$\boldsymbol{M}_j + \boldsymbol{N}_j \boldsymbol{D}_j = \boldsymbol{0}\,, \quad j = 1, \ldots, k\,. \tag{1.16}$$

Let us now consider the generalized linear differential equations (1.10) with $\boldsymbol{A}(t)$ given by the relation (1.7) where the matrix $\boldsymbol{A}(t)$ is constructed by means of the regular $n \times n$-matrices $\boldsymbol{D}_j$, $j = 1, \ldots, k$ given by Lemma 1.3. In this case we have $\det(\boldsymbol{I} + \Delta^+ \boldsymbol{A}(t)) \neq 0$ for every $t \in [0, 1)$ (see (1.9)) and also $\det(\boldsymbol{I} - \Delta^- \boldsymbol{A}(t)) = \det \boldsymbol{I} = 1$ for $t \in (0, 1]$. Hence by Theorem III.1.4 in [6], to every $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{t}) \in R_n \times [0, 1]$ and $\boldsymbol{f} : [0, 1] \to R_n$ of bounded variation on $[0, 1]$ there exists a unique solution of (1.10) defined on $[0, 1]$ such that $\boldsymbol{x}(\tilde{t}) = \tilde{\boldsymbol{x}}$. This yields the following result.

1.4. Theorem. *If the interface conditions* (1.2) *satisfy* (1.3) *and* (1.14) *then the conclusions of theorem* 1.1 *hold. Moreover, to the interface problem* (1.1), (1.2) *there exists a generalized linear differential equation* (1.10) *which is uniquely solvable on the interval* $[0, 1]$ *for every initial point* $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{t}) \in R_n \times [0, 1]$ *and every right hand side* $\boldsymbol{f}$ *of bounded variation on* $[0, 1]$.

Every solution of a generalized linear differential equation of the form (1.10), where the matrices $\boldsymbol{D}_j$, $j = 1, \ldots, k$ occuring in the definition (1.7) of the matrix $\boldsymbol{A}$ are regular can be given by the variation-of-constants formula (see III.2.14 in [6]), i.e.

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{X}(t)\, \boldsymbol{c} - \boldsymbol{X}(t) \int_0^t \mathrm{d}_s[\boldsymbol{X}^{-1}(s)]\, \boldsymbol{f}(s) + \boldsymbol{f}(t)\,, \quad t \in [0, 1] \tag{1.17}$$

where $\boldsymbol{X} : [0, 1] \to L(R_n)$ is the uniquely determined solution of the matrix equation

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{I} + \int_0^t \mathrm{d}[\boldsymbol{A}(r)]\, \boldsymbol{X}(r)\,, \quad t \in [0, 1] \tag{1.18}$$

called *the fundamental matrix* and $\boldsymbol{c} \in R_n$ is arbitrary.

For our purposes it is more convenient to have a formula for the solution using the conventional fundamental matrix of the differential equation (1.1).

Assume that $t \in (t_j, t_{j+1}]$, $j = 1, \ldots, k$. Then by (1.18) we have

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t_j) + \int_{t_j}^{t} \mathrm{d}[\mathbf{A}(r)]\, \mathbf{X}(r)$$

and taking into account the definition of $\mathbf{A}(t)$ from (1.7) we get

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t_j) + \int_{tj}^{t} \mathrm{d}\left[\int_0^r \mathbf{F}(\varrho)\, \mathrm{d}\varrho + \sum_{j=1}^{k} (\mathbf{D}_j - \mathbf{I})\, \psi^+_{tj}(r)\right] \mathbf{X}(r) =$$

$$= \mathbf{X}(t_j) + \int_{t_j}^{t} \mathbf{F}(r)\, \mathbf{X}(r)\, \mathrm{d}r + (\mathbf{D}_j - \mathbf{I})\, \mathbf{X}(t_j) =$$

$$= \mathbf{D}_j\, \mathbf{X}(t_j) + \int_{tj}^{t} \mathbf{F}(r)\, \mathbf{X}(r)\, \mathrm{d}r\,.$$

Hence for $t \in (t_j, t_{j+1}]$, $j = 1, \ldots, k$ the fundamental matrix $\mathbf{X}(t)$ satisfies

(1.19) $$\mathbf{X}(t) = \mathbf{U}(t, t_j)\, \mathbf{D}_j\, \mathbf{X}(t_j)$$

where $\mathbf{U}(t, \tau)$ is the fundamental matrix corresponding to the equation (1.1), i.e. for every $t, \tau \in [0, 1]$ we have

$$\mathbf{U}(t, \tau) = \mathbf{I} + \int_\tau^t \mathbf{F}(r)\, \mathbf{U}(r, \tau)\, \mathrm{d}r\,.$$

Using (1.19) we have

(1.20) $$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \mathbf{U}(t, 0) \quad \text{for} \quad t \in [0, t_1]\,, \\ \mathbf{X}(t) &= \mathbf{U}(t, t_j)\, \mathbf{D}_j\, \mathbf{X}(t_j) = \\ &= \mathbf{U}(t, t_j)\, \mathbf{D}_j\, \mathbf{U}(t_j, t_{j-1})\, \mathbf{D}_{j-1} \ldots \mathbf{D}_1\, \mathbf{U}(t_1, 0) \quad \text{for} \quad t \in (t_j, t_{j+1}]\,. \end{aligned}$$

Integrating by parts in the integral in (1.17) (see I.4.33 in [6]) we get

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\, \mathbf{c} + \mathbf{f}(t) - \mathbf{X}(t)\left[-\int_0^t \mathbf{X}^{-1}(s)\, \mathrm{d}\mathbf{f}(s) + \mathbf{X}^{-1}(t)\, \mathbf{f}(t) - \mathbf{X}^{-1}(0)\, \mathbf{f}(0) - \right.$$

$$\left. - \sum_{0 \leqq \tau < t} \Delta^+ \mathbf{X}^{-1}(\tau)\, \Delta^+ \mathbf{f}(\tau)\right] =$$

$$= \mathbf{X}(t)\, \mathbf{c} + \mathbf{X}(t) \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(s)\, \mathrm{d}\mathbf{f}(s) + \mathbf{X}(t) \sum_{0 \leqq \tau < t} \Delta^+ \mathbf{X}^{-1}(\tau)\, \Delta^+ \mathbf{f}(\tau)\,.$$

The definition (1.8) of $\mathbf{f}$ yields further

(1.21) $$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\, \mathbf{c} + \mathbf{X}(t) \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(s)\, \mathbf{g}(s)\, \mathrm{d}s + \mathbf{X}(t) \sum_{0 \leqq \tau < t} (\mathbf{X}^{-1}(\tau)\, \Delta^+ \mathbf{f}(\tau) +$$

$$+ \Delta^+ \mathbf{X}^{-1}(\tau)\, \Delta^+ \mathbf{f}(\tau)) =$$

$$= \mathbf{X}(t)\, \mathbf{c} + \mathbf{X}(t) \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(s)\, \mathbf{g}(s)\, \mathrm{d}s + \mathbf{X}(t) \sum_{0 \leqq \tau < t} \mathbf{X}^{-1}(\tau +)\, \Delta^+ \mathbf{f}(\tau) =$$

$$= \mathbf{X}(t)\,\mathbf{c} + \mathbf{X}(t)\int_0^t \mathbf{X}^{-1}(s)\,\mathbf{g}(s)\,\mathrm{d}s + \mathbf{X}(t)\sum_{0<t_j<t} \mathbf{X}^{-1}(t_j)\,\mathbf{D}_j^{-1}\mathbf{d}_j$$

because $\Delta^+\mathbf{f}(\tau) = \mathbf{0}$ for $\tau \neq t_j$, $j = 1, \ldots, k$, $\Delta^+\mathbf{f}(t_j) = \mathbf{d}_j$ and $\mathbf{X}(t_j+) = \mathbf{D}_j\,\mathbf{X}(t_j)$, $j = 1, \ldots, k$ (see (1.19)).

It is a matter of routine to insert (1.20) into (1.21) and to derive the following result, which describes the solution of (1.10) in terms of the interface problem (1.1), (1.2).

1.4. Theorem. *If the $n \times n$-matrices $\mathbf{D}_j$, $j = 1, \ldots, k$ occuring in the definition (1.7) of $\mathbf{A}(t)$ are regular, then every solution $\mathbf{x} : [0, 1] \to R_n$ of the generalized linear differential equation (1.10) is given by the formula ($\mathbf{c} \in R_n$ is arbitrary)*

$$(1.22) \qquad \mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t, 0)\,\mathbf{c} + \mathbf{U}(t, 0)\int_0^t \mathbf{U}(0, s)\,\mathbf{g}(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{for} \quad t \in [0, t_1]\,,$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t, t_j)\,\mathbf{D}_j\,\mathbf{U}(t_j, t_{j-1})\,\mathbf{D}_{j-1} \ldots \mathbf{D}_1\,\mathbf{U}(t_1, 0)\left(\mathbf{c} + \int_0^{t_1} \mathbf{U}(0, s)\,\mathbf{g}(s)\,\mathrm{d}s\right) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{j-1} \mathbf{U}(t, t_j)\,\mathbf{D}_j\,\mathbf{U}(t_j, t_{j-1}) \ldots \mathbf{D}_{l+1}\,\mathbf{U}(t_{l+1}, t_l)\left(\mathbf{d}_l + \int_{t_l}^{t_{l+1}} \mathbf{U}(t_l, s)\,\mathbf{g}(s)\,\mathrm{d}s\right) +$$

$$+ \mathbf{U}(t, t_j)\left(\mathbf{d}_j + \int_{t_j}^{t} \mathbf{U}(t_j, s)\,\mathbf{g}(s)\,\mathrm{d}s\right) \quad \text{for} \quad t \in (t_j, t_{j+1}]\,, j = 1, \ldots, k \;\; (t_{k+1} = 1)\,.$$

1.5. Theorem. *If the conditions (1.3) and (1.14) are satisfied for the interface conditions (1.2) then the formula (1.22) yields a left continuous solution of the interface problem (1.1), (1.2) provided $\mathbf{D}_j$, $j = 1, \ldots, k$ are the regular $n \times n$-matrices from Lemma 1.3. Moreover, every left continuous solution of the interface problem (1.1), (1.2) can be written in the form*

$$(1.23) \qquad \mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t, 0)\,\mathbf{c} + \mathbf{U}(t, 0)\int_0^t \mathbf{U}(0, s)\,\mathbf{g}(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{for} \quad t \in [0, t_1]\,,$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t, t_j)\,\mathbf{D}_j\,\mathbf{U}(t_j, t_{j-1})\,\mathbf{D}_{j-1} \ldots \mathbf{D}_1\,\mathbf{U}(t_1, 0)\left(\mathbf{c} + \int_0^{t_1} \mathbf{U}(0, s)\,\mathbf{g}(s)\,\mathrm{d}s\right) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{j-1} \mathbf{U}(t, t_j)\,\mathbf{D}_j\,\mathbf{U}(t_j, t_{j-1}) \ldots \mathbf{D}_{l+1}\,\mathbf{U}(t_{l+1}, t_l)\left(\mathbf{d}_l + \mathbf{z}_l + \int_{t_l}^{t_{l+1}} \mathbf{U}(t_l, s)\,\mathbf{g}(s)\,\mathrm{d}s\right) +$$

$$+ \mathbf{U}(t, t_j)\left(\mathbf{d}_j + \mathbf{z}_j + \int_{t_j}^{t} \mathbf{U}(t_j, s)\,\mathbf{g}(s)\,\mathrm{d}s\right) \quad \text{for} \quad t \in (t_j, t_{j+1}]\, j = 1, \ldots, k\,,$$

where $\mathbf{c} \in R_n$ is arbitrary, $\mathbf{d}_j \in R_n$ are such that $\mathbf{N}_j\mathbf{d}_j = \mathbf{c}_j$ and $\mathbf{z}_j \in \mathrm{N}(\mathbf{N}_j)$, $j = 1, \ldots, k$.

Proof. By Theorem 1.3 the function given by the formula (1.22) in Theorem 1.4 is a solution of the interface problem (1.1), (1.2). By Corollary 1.1 every left continuous solution of the interface problem (1.1), (1.2) can be expressed in the form of the sum of the function from (1.22) and an arbitrary solution $\mathbf{z}$ of the equation

(1.12). Using the variation-of-constants formula for the equation (1.12) we can evaluate the function $\mathbf{z}$ (the procedure is the same as for the solution of the equation (1.10) in Theorem 1.4):

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{U}(t, 0)\,\mathbf{c} \quad \text{for} \quad t \in [0, t_1],$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{U}(t, t_j)\,\mathbf{D}_j\,\mathbf{U}(t_j, t_{j-1})\,\mathbf{D}_{j-1} \ldots \mathbf{D}_1\,\mathbf{U}(t_1, 0)\,\mathbf{c} + \\ + \sum_{l=1}^{j-1} \mathbf{U}(t, t_j)\,\mathbf{D}_j\,\mathbf{U}(t_j, t_{j-1}) \ldots \mathbf{D}_{l+1}\,\mathbf{U}(t_{l+1}, t_l)\,\mathbf{z}_l + \\ + \mathbf{U}(t, t_j)\,\mathbf{z}_j \quad \text{for} \quad t \in (t_j, t_{j+1}], \quad j = 1, \ldots, k$$

where $\mathbf{z}_j \in \mathrm{N}(\mathbf{N}_j)$, $j = 1, \ldots, k$ and $\mathbf{c} \in R_n$ is arbitrary. Adding the function $\mathbf{z}$ to the function from (1.22) we get (1.23).

Remark. Let us assume in addition that the null-spaces of the matrices $\mathbf{N}_j$ satisfy

$$\mathrm{N}(\mathbf{N}_j) = \{\mathbf{0}\}, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{1.24}$$

Then the matrices $\mathbf{D}_j$, $j = 1, \ldots, k$ are uniquely determined by (1.16). Indeed, if we have $\mathbf{M}_j + \mathbf{N}_j\mathbf{D}_j = \mathbf{0}$ as well as $\mathbf{M}_j + \mathbf{N}_j\tilde{\mathbf{D}}_j = \mathbf{0}$ for some j, then $\mathbf{N}_j(\mathbf{D}_j - \tilde{\mathbf{D}}_j) = \mathbf{0}$ and consequently $\mathbf{D}_j = \tilde{\mathbf{D}}_j$. Hence also the matrix-valued function $\mathbf{A}(t)$ is uniquely determined by (1.7). Moreover, to every $\mathbf{c}_j \in \mathrm{R}(\mathbf{N}_j)$ there is a uniquely determined $\mathbf{d}_j$ such that $\mathbf{N}_j\mathbf{d}_j = \mathbf{c}_j$ and consequently also the function $\mathbf{f}(t)$ is given uniquely by (1.8).

If the interface conditions (1.2) are such that (1.3), (1.14), (1.24) hold then evidently there is a one-to-one correspondence between the interface problem (1.1), (1.2) and the generalized linear differential equation (1.10) with $\mathbf{A}, \mathbf{f}$ given by (1.7), (1.8), respectively.

The situation when (1.3), (1.14), (1.24) are satisfied occurs for instance, when $m = n$, $\det \mathbf{N}_j \neq 0$, $\det \mathbf{M}_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, k$. Of this type are the so called "shock conditions" $\mathbf{x}(t_j-) - \mathbf{x}(t_j+) = \mathbf{c}_j$, $j = 1, \ldots, k$ or conditions of the form $\mathbf{x}(t_j-) + \mathbf{N}_j\,\mathbf{x}(t_j+) = \mathbf{c}_j$ with $\det \mathbf{N}_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, k$.

2. BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH INTERFACE CONDITIONS

In this section we turn our attention to the two-point boundary value problem for interface problems, i.e. we consider the system

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad t \in [0, 1], \tag{2.1}$$

$$\mathbf{M}_j\,\mathbf{x}(t_j) + \mathbf{N}_j\,\mathbf{x}(t_j+) = \mathbf{c}_j, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{M}\,\mathbf{x}(0) + \mathbf{N}\,\mathbf{x}(1) = \mathbf{r} \tag{2.3}$$

with $\mathbf{F}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{M}_j$, $\mathbf{N}_j$, $\mathbf{c}_j$, $j = 1, \ldots, k$ given in Section 1 and $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in L(R_n, R_m)$, $\mathbf{r} \in R_m$. Let us assume that the interface conditions (2.2) satisfy (1.3), (1.14) and (1.24), i.e. $\mathbf{c}_j \in \mathrm{R}(\mathbf{N}_j)$, $\mathrm{R}(\mathbf{M}_j) = \mathrm{R}(\mathbf{N}_j)$, $\mathrm{N}(\mathbf{N}_j) = \{\mathbf{0}\}$, $j = 1, \ldots, k$.

Under these conditions it is possible to associate with (2.1), (2.2) a generalized linear differential equation

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}[\mathbf{A}]\,\mathbf{x} + \mathrm{d}\mathbf{f} \tag{2.4}$$

which is uniquely solvable for every initial point $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \in R_n \times [0, 1]$. (See Theorem 1.3.) We consider the boundary value problem (2.4), (2.3). For problems of this type some results are known (see [5], [6]). Our aim is to modify these results to the problem (2.1), (2.2), (2.3).

Let us define

$$\mathbf{B}(t) = \int_0^t \mathbf{F}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \sum_{j=1}^{k} (\mathbf{D}_j - \mathbf{I})\,\psi_{t_j}^-(t)\,, \quad t \in [0, 1] \tag{2.5}$$

where $\psi_\alpha^-(t) = 0$ if $t < \alpha$, $\psi_\alpha^-(t) = 1$ if $t \geqq \alpha$, $\mathbf{D}_j$, $j = 1, \ldots, k$ are determined by (1.6) and are unique since (1.24) is assumed, (1.14) implies the regularity of $\mathbf{D}_j$ $j = 1, \ldots, k$. We have evidently $\mathbf{B}(t+) - \mathbf{A}(t+) = \mathbf{B}(t-) - \mathbf{A}(t-) = \mathbf{0}$ for all $t \in (0, 1)$, $\mathbf{A}(0) = \mathbf{B}(0)$, $\mathbf{A}(1) = \mathbf{B}(1)$, $\Delta^+\mathbf{B}(t)\,\Delta^+\mathbf{A}(t) = \Delta^-\mathbf{B}(t)\,\Delta^-\mathbf{A}(t)$ for all $t \in (0, 1)$ and

$$\det\,(\mathbf{I} + \Delta^+\mathbf{A}(t))\,\det\,(\mathbf{I} + \Delta^-\mathbf{B}(t))\,\det\,(\mathbf{I} - \Delta^-\mathbf{A}(t)) \neq 0$$

since $\mathbf{I} + \Delta^+\mathbf{A}(t_j) = \mathbf{I} + \Delta^-\mathbf{B}(t_j) = \mathbf{D}_j$, $j = 1, \ldots, k$ and $\mathbf{D}_j$ are regular $n \times n$-matrices, $\Delta^-\mathbf{A}(t) = \mathbf{0}$ for all $t \in (0, 1]$ and $\Delta^+\mathbf{A}(t) = \Delta^-\mathbf{B}(t) = \mathbf{0}$ for $t \in (0, 1)$, $t \neq t_j$, $j = 1, \ldots, k$. The matrix valued function $\mathbf{A}$ is given by (1.7) in Section 1.

Using the results from [6] (Theorem III.5.5) we obtain the following result:

The boundary value problem (2.4), (2.3) possesses a solution if and only if

$$\mathbf{y}^*(1)\,\mathbf{f}(1) - \mathbf{y}^*(0)\,\mathbf{f}(0) - \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{y}^*(t)]\,\mathbf{f}(t) = \boldsymbol{\lambda}^*\mathbf{r} \tag{2.6}$$

for any solution $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda})$ of the homogeneous system

$$\mathrm{d}\mathbf{y} = -\mathrm{d}[\mathbf{B}^*]\,\mathbf{y}\,, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{y}(0) + \mathbf{M}^*\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}\,, \quad \mathbf{y}(1) - \mathbf{N}^*\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \tag{2.8}$$

(a star denotes the transpose to a matrix).

The properties of $\mathbf{B} : [0, 1] \to L(R_n)$ ensure that for every $(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{t}) \in R_n \times [0, 1]$ the equation (2.7) has a uniquely determined solution $\mathbf{y} : [0, 1] \to R_n$ satisfying $\mathbf{y}(\tilde{t}) = \tilde{\mathbf{y}}$.

Let us consider a solution $\mathbf{y} : [0, 1] \to R_n$ of (2.7). Using the results of III.1 in [6] we have

$$\mathbf{y}(t+) = [\mathbf{I} + \Delta^+(-\mathbf{B}^*(t))]\,\mathbf{y}(t) = (\mathbf{I} - \Delta^+\mathbf{B}^*(t))\,\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t)\,, \quad t \in [0, 1)$$

and

$$\mathbf{y}(t-) = [\mathbf{I} - \Delta^-(-\mathbf{B}^*(t))]\,\mathbf{y}(t) = (\mathbf{I} + \Delta^-\mathbf{B}^*(t))\,\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t)$$

for $t \in (0, 1]$, $t \neq t_j$, $j = 1, \ldots, k$,

$$\mathbf{y}(t_j-) = (\mathbf{I} + \Delta^-\mathbf{B}^*(t_j))\,\mathbf{y}(t_j) = \mathbf{D}_j^*\,\mathbf{y}(t_j)\,, \quad j = 1, \ldots, k\,,$$

i.e.

$$\mathbf{y}(t_j-) - \mathbf{D}_j^* \, \mathbf{y}(t_j) = \mathbf{0} .$$

Further it is evident that $\mathbf{y}$ is absolutely continuous on every interval of the form (t_{j-1}, t_j), $j = 1, \ldots, k + 1$ and $\mathbf{y}$ satisfies the ordinary differential equation

$$\dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{F}^*(t) \, \mathbf{y}$$

almost everywhere in $[0, 1]$. This follows from the fact that we have by definition

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}(\sigma) + \int_\sigma^\tau \mathrm{d}[-\mathbf{B}^*(\varrho)] \, \mathbf{y}(\varrho) = \mathbf{x}(\sigma) - \int_\sigma^\tau \mathbf{F}^*(\varrho) \, \mathbf{y}(\varrho) \, \mathrm{d}\varrho$$

for any $\tau, \sigma \in (t_{j-1}, t_j)$, $j = 1, \ldots, k$. Hence every solution $\mathbf{y} : [0, 1] \to R_n$ of (2.7) is a solution of the interface problem

$$\dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{F}^*(t) \, \mathbf{y} , \tag{2.9}$$

$$\mathbf{y}(t_j-) - \mathbf{D}_j^* \, \mathbf{y}(t_j) = \mathbf{0} . \tag{2.10}$$

It is easy to check that conversely every solution of the interface problem (2.9), (2.10) is a solution of (2.7).

Taking this fact into account we reformulate the solvability condition (2.6) as follows.

2.1. Theorem. *Assume that the interface conditions* (2.2) *satisfy* (1.3), (1.14) *and* (1.24). *Then the boundary value problem* (2.1), (2.2), (2.3) *has a solution if and only if*

$$\int_0^1 \mathbf{y}^*(t) \, \mathbf{g}(t) \, \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^k \mathbf{y}^*(t_j) \, \mathbf{d}_j = \boldsymbol{\lambda}^* \mathbf{r} \tag{2.11}$$

for any solution $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda})$ *of the homogeneous problem* (2.9), (2.10) *with the parametric boundary conditions*

$$\mathbf{y}(0) = -\mathbf{M}^* \boldsymbol{\lambda} , \quad \mathbf{y}(1) = \mathbf{N}^* \boldsymbol{\lambda} . \tag{2.12}$$

Proof. Using the integration-by-parts formula (see Theorem I.4.33 in [6]) and taking into account the form of $\mathbf{f}$ given in (1.8) we have

$$\mathbf{y}^*(1) \, \mathbf{f}(1) - \mathbf{y}^*(0) \, \mathbf{f}(0) - \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{y}^*(t)] \, \mathbf{f}(t) = \int_0^1 \mathbf{y}^*(t) \, \mathrm{d}[\mathbf{f}(t)] =$$

$$= \int_0^1 \mathbf{y}^*(t) \, \mathrm{d} \left[\int_0^t \mathbf{g}(\tau) \, \mathrm{d}\tau + \sum_{j=1}^k \mathbf{d}_j \, \psi_{t_j}^+(t) \right] = \int_0^1 \mathbf{y}^*(t) \, \mathbf{g}(t) \, \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^k \mathbf{y}^*(t_j) \, \mathbf{d}_j .$$

This together with (2.6) yields (2.11).

Remark. The parametric boundary value problem (2.9), (2.10), (2.12) plays the role of an adjoint problem to the problem (2.1), (2.2), (2.3).

If $0 \leqq m \leqq 2n$ and rank $\boldsymbol{N} = \text{rank}\,(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) = m$ then there exist uniquely determined matrices $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q} \in L(R_{2n-m}, R_n)$ and $\boldsymbol{P}^c, \boldsymbol{Q}^c \in L(R_m, R_n)$ such that

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}^c, \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{Q}^c, \boldsymbol{Q} \end{bmatrix} = 0$$

and $-\boldsymbol{MP}^c + \boldsymbol{NQ}^c = \boldsymbol{I}$, $-\boldsymbol{MP} + \boldsymbol{NQ} = \boldsymbol{0}$; $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ are the so called adjoint matrices associated with $[\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}]$ and $\boldsymbol{P}^c, \boldsymbol{Q}^c$ the complementary adjoint matrices associated with $[\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}]$. Using this concepts and the results from III.5.18 in [6] we obtain the following theorem.

2.2. Theorem. *Let the assumptions of Theorem* 2.1 *be fulfilled. Then the boundary value problem* (2.1), (2.2), (2.3) *has a solution if and only if*

$$\int_0^1 \boldsymbol{y}^*(t)\, \boldsymbol{g}(t)\, \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^k \boldsymbol{y}^*(t_j)\, \boldsymbol{d}_j = [\boldsymbol{y}^*(0)\, \boldsymbol{P}^c + \boldsymbol{y}^*(1)\, \boldsymbol{Q}^c]\, \boldsymbol{r} \tag{2.13}$$

for any solution of the system (2.9), (2.10) *with the homogeneous boundary condition*

$$\boldsymbol{P}^*\, \boldsymbol{y}(0) + \boldsymbol{Q}^*\, \boldsymbol{y}(1) = \boldsymbol{0} \tag{2.14}$$

where $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}^c, \boldsymbol{Q}^c$ *are the adjoint and the complementary adjoint matrices associated with* $[\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}]$.

The interface problem (2.9), (2.10) together with the boundary condition (2.14) represents the nonparametric form of the adjoint problem to (2.1), (2.2), (2.3).

Let us now assume that for the interface conditions (2.2) the assumption (1.24) is not satisfied, i.e. $\mathrm{N}(\boldsymbol{N}_j) \neq \{\boldsymbol{0}\}$ for some $j = 1, \ldots, k$. In this case, to the interface problem (2.1), (2.2) there is a variety of generalized linear differential equations of the form

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}[\boldsymbol{A}]\, \boldsymbol{x} + \mathrm{d}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{h}) \tag{2.15}$$

where $\boldsymbol{h}(t) = \sum_{j=1}^k \boldsymbol{z}_j\, \psi_{t_j}^+(t)$, $t \in [0, 1]$ and $\boldsymbol{z}_j \in \mathrm{N}(\boldsymbol{N}_j)$, $j = 1, \ldots, k$ are arbitrary. In this case every solution of the interface problem (2.1), (2.2) is also a solution of an equation of the form (2.15) (see Theorem 1.2).

This leads to

2.3. Theorem. *Assume that the interface conditions* (2.2) *satisfy* (1.3) *and* (1.14). *Then the boundary value problem* (2.1), (2.2), (2.3) *has a solution if and only if there exist* $\boldsymbol{z}_j \in \mathrm{N}(\boldsymbol{N}_j)$, $j = 1, \ldots, k$ *such that*

$$\int_0^1 \boldsymbol{y}^*(t)\, \boldsymbol{g}(t)\, \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^k \boldsymbol{y}^*(t_j)\,(\boldsymbol{d}_j + \boldsymbol{z}_j) = \boldsymbol{\lambda}^* \boldsymbol{r} \tag{2.16}$$

for any solution $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda})$ *of the homogeneous problem* (2.9), (2.10) *with the boundary conditions* (2.12).

Remark. A similar result can be derived if the nonparametric adjoint problem (2.9), (2.10), (2.14) is used (see Theorem 2.2). The authors in [5] use a different approach to adjoint equations for the generalized linear differential equation (2.4). The adjoint problem to (2.1), (2.2), (2.3) in the sense of [5] has the form (see Remark 3.9 in [5])

$$\mathrm{d}\mathbf{z} + \mathrm{d}[\mathbf{A}^*\mathbf{z}] - \mathbf{A}\,\mathrm{d}[\mathbf{z}] = \mathbf{0} \tag{2.17}$$

$$\mathbf{z}(0) = -\mathbf{M}^*\boldsymbol{\lambda}\,, \quad \mathbf{z}(1) = \mathbf{N}^*\boldsymbol{\lambda} \tag{2.18}$$

where (2.17) stands for the equation

$$\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(s) + \mathbf{A}^*(t)\,\mathbf{z}(t) - \mathbf{A}^*(s)\,\mathbf{z}(s) - \int_s^t \mathbf{A}^*(r)\,\mathrm{d}\mathbf{z}(r) = \mathbf{0} \tag{2.19}$$

which has to be satisfied for every $s, t \in [0, 1]$ provided $\mathbf{z} : [0, 1] \to R_n$ is a solution of (2.17).

It can be shown by integration by parts that

$$\int_s^t \mathbf{A}^*(r)\,\mathrm{d}[\mathbf{z}(r)] = -\int_s^t \mathrm{d}[\mathbf{A}^*(r)]\,\mathbf{z}(r) + \mathbf{A}^*(t)\,\mathbf{z}(t) - \mathbf{A}^*(s)\,\mathbf{z}(s) - \sum_{s\leqq\tau<t} \Delta^+\mathbf{A}(\tau)\,\Delta^+\mathbf{z}(\tau)$$

for every solution $\mathbf{z} : [0, 1] \to R_n$ and any $s, t \in [0, 1]$. Hence (2.19) implies

$$\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(s) + \int_s^t \mathrm{d}[\mathbf{A}^*(r)]\,\mathbf{z}(r) + \sum_{s\leqq\tau<t} \Delta^*\mathbf{A}^*(\tau)\,\Delta^+\mathbf{z}(\tau) = \mathbf{0}$$

for all $s, t \in [0, 1]$. Hence we have in our case

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(s) - \int_s^t \mathrm{d}[\mathbf{A}^*(r)]\,\mathbf{z}(r) = \mathbf{z}(s) - \int_s^t \mathbf{F}^*(r)\,\mathbf{z}(r)\,\mathrm{d}r$$

for any $s, t \in (t_{j-1}, t_j)$ and the solution of (2.17) satisfies the differential equation

$$\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{F}^*(t)\,\mathbf{z}$$

a.e. in $[0, 1]$. Moreover, the solution $\mathbf{z}$ is left continuous in $[0,1]$ and

$$\mathbf{z}(s + \delta) = \mathbf{z}(s) - \int_s^{s+\delta} \mathrm{d}[\mathbf{A}^*(r)]\,\mathbf{z}(r) - \sum_{s\leqq\tau<s+\delta} \Delta^+\mathbf{A}(\tau)\,\Delta^+\mathbf{z}(\tau)$$

for every $s \in [0, 1)$ and $\delta > 0$ such that $s + \delta \leqq 1$. Passing to the limit $\delta \to 0+$ we get

$$\mathbf{z}(s+) = \mathbf{z}(s) - \Delta^+\mathbf{A}^*(s)\,\mathbf{z}(s) - \Delta^+\mathbf{A}^*(s)\,\Delta^+\mathbf{z}(s) = \mathbf{z}(s) - \Delta^+\mathbf{A}^*(s)\,\mathbf{z}(s+)\,.$$

Hence $\mathbf{z}(s+) = \mathbf{z}(s)$ for $s \in [0, 1)$, $s \neq t_j$, $j = 1, \ldots, k$ and

$$\mathbf{z}(t_j) = (\mathbf{I} + \Delta^+\mathbf{A}^*(t_j))\,\mathbf{z}(t_j+) = \mathbf{D}_j^*\,\mathbf{z}(t_j+)$$

for all $j = 1, \ldots, k$.

This implies that the equation (2.17) is equivalent to the interface problem

$$\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{F}^*(t)\,\mathbf{z}\,,$$

$$\mathbf{z}(t_j) - \mathbf{D}_j^*\,\mathbf{z}(t_j+) = \mathbf{0}\,, \quad j = 1, \ldots, k\,.$$

If we compare this problem with the problem (2.9), (2.10) then we can observe that the only difference is the fact that in the former case the solution is assumed to be left continuous while in the latter one it is right continuous. The solvability conditions given by Theorem 2.3 remain the same (see Remark 3.9 in [5]).

In [5] the authors derive also Green's function for boundary value problems of the form (2.4), (2.3). Using the results from [5] we obtain the following result.

Let $\mathbf{X}(t) : [0, 1] \to L(R_n)$ be the fundamental matrix satisfying the matrix equation

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{I} + \int_0^t \mathrm{d}[\mathbf{A}(r)]\,\mathbf{X}(r)\,, \quad t \in [0, 1]\,.$$

Assume that $m = n$ and $\det \mathbf{D} \neq 0$ where

$$\mathbf{D} = \mathbf{M}\,\mathbf{X}(0) + \mathbf{N}\,\mathbf{X}(1)\,.$$

Then for any $\mathbf{g}$, $\mathbf{M}_j$, $\mathbf{N}_j$, $\mathbf{c}_j$, $j = 1, \ldots, k$ and $\mathbf{r} \in R_n$ the boundary value problem (2.1), (2.2), (2.3) possesses a unique solution $\mathbf{x} : [0, 1] \to R_n$ and this solution is given by

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{D}^{-1}\mathbf{r} + \int_0^1 \mathrm{d}_s[\mathbf{G}(t, s)]\,\mathbf{f}(s) \quad \text{on} \quad [0, 1] \tag{2.20}$$

where

$$\mathbf{G}(t, s) = \begin{cases} -\mathbf{X}(t)\,\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}\,\mathbf{X}(0)\,\mathbf{X}^{-1}(s)\,, & 0 \leqq s < t \leqq 1\,, \\ \mathbf{X}(t)\,\mathbf{D}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{X}(1)\,\mathbf{X}^{-1}(s)\,, & 0 \leqq t \leqq s \leqq 1 \end{cases} \tag{2.21}$$

is the corresponding Green's function.

Example. Let $y(t)$ denote the bending of a beam fixed at the endpoints, let $h(t)$ stand for the (piecewise continuous) load and let q be a point load in the middle of the beam. The problem of determining $y(t)$ can be described as follows.

Find solutions of the equation

$$y^{(4)}(t) = h(t)\,, \quad t \in [0, 1]\,, \quad h \in L(0, 1) \tag{2.22}$$

which possess continuous derivatives up to the order 3 on $[0, 1] - \{\frac{1}{2}\}$ and satisfy the conditions

$$y(\tfrac{1}{2}+) = y(\tfrac{1}{2}-)\,, \quad \dot{y}(\tfrac{1}{2}+) = \dot{y}(\tfrac{1}{2}-)\,, \quad \ddot{y}(\tfrac{1}{2}+) = \ddot{y}(\tfrac{1}{2}-)\,, \tag{2.23}$$
$$\dddot{y}(\tfrac{1}{2}+) = \dddot{y}(\tfrac{1}{2}-) + q$$

and

$$y(0) = \dot{y}(0) = y(1) = \dot{y}(1) = 0\,, \tag{2.24}$$

By means of the transformation $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$, $x_4 = \dddot{y}$ the problem (2.22), (2.23), (2.24) can be written in the form of the system

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{g}\,, \tag{2.25}$$

$$\mathbf{x}((\tfrac{1}{2})-) - \mathbf{x}((\tfrac{1}{2})+) = \mathbf{c}_1\,, \tag{2.26}$$

$$\mathbf{M}\,\mathbf{x}(0) + \mathbf{N}\,\mathbf{x}(1) = \mathbf{0} \tag{2.27}$$

where

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \end{bmatrix}.$$

This is a boundary value problem for an interface problem of the form considered in this paper. The interface condition (2.26) can be written in the form

$$\mathbf{M}_1\,\mathbf{x}(\tfrac{1}{2})\,-) + \mathbf{N}_1\,\mathbf{x}((\tfrac{1}{2})\,+) = \mathbf{c}_1$$

where $\mathbf{M}_1 = -\mathbf{N}_1 = \mathbf{I} \in L(R_4)$. Hence if we set $\mathbf{D}_1 = \mathbf{I}$, we have $\mathbf{M}_1 + \mathbf{N}_1\mathbf{D}_1 = \mathbf{0}$. Moreover, $\mathbf{N}_1\mathbf{d}_1 = -\mathbf{d}_1 = \mathbf{c}_1$, i.e. $\mathbf{d}_1 = -\mathbf{c}_1$. The fundamental matrix for the generalized linear differential equation corresponding to the interface problem given above is of the form

$$\mathbf{X}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{F}t} = \begin{bmatrix} 1, & t, & \tfrac{1}{2}t^2, & \tfrac{1}{6}t^3 \\ 0, & 1, & t, & \tfrac{1}{2}t^2 \\ 0, & 0, & 1, & t \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \qquad t \in [0, 1]\,.$$

Further, it is easy to evaluate

$$\mathbf{D} = \mathbf{M}\,\mathbf{X}(0) + \mathbf{N}\,\mathbf{X}(1) = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & \tfrac{1}{2}, & \tfrac{1}{6} \\ 0, & 1, & 1, & \tfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

and $\det \mathbf{D} = \frac{1}{12} \neq 0$. Hence we can construct Green's function as was described in the previous part of this section. It is a matter of routine to evaluate

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ -6, & -4, & 6, & -2 \\ 12, & 6, & -12, & 6 \end{bmatrix}.$$

A straightforward multiplication of matrices makes it possible to determine Green's function $\mathbf{G}(t, s)$ for the boundary value problem (see (2.21)) and to write

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^1 \mathrm{d}_s[\mathbf{G}(t, s)]\, \mathbf{f}(s) \tag{2.28}$$

for the solution. Since the solution y of the original problem (2.22), (2.23), (2.24) satisfies $y(t) = x_1(t)$, we need to know only the first component of the vector $\mathbf{x}(t)$ on the right hand side of (2.28). Since only the fourth component of $\mathbf{f}$ is different from zero we get

$$y(t) = x_1(t) = \int_0^1 \mathrm{d}_s[G_{14}(t, s)]\, f_4(s)$$

where G_{14} is the element in the first row and the fourth column of $G(t, s)$. The determination of Green's function by (2.21) gives in our situation

$$\begin{aligned} G_{14}(t, s) &= s^3/6 - s^3t^2/2 + s^3t^3/3 - s^2t/2 + s^2t^2 - s^2t^3/2 \\ &\qquad \text{for} \quad 0 \leqq s < t \leqq 1\,, \\ G_{14}(t, s) &= -t^2s^3/2 + t^2s^2 - t^2s/2 + t^3s^3/3 - t^3s^2/2 + t^3/6 \\ &\qquad \text{for} \quad 0 \leqq t \leqq s \leqq 1\,. \end{aligned}$$

Further we have

$$\begin{aligned} y(t) = {} & \int_0^1 \mathrm{d}_s[G_{14}(t, s)]\, f_4(s) = -\int_0^1 G_{14}(t, s)\, \mathrm{d}f_4(s) + G_{14}(t, 1)\, f_4(1) - \\ - {} & G_{14}(t, 0)\, f_4(0) = \\ = {} & -\int_0^1 G_{14}(t, s)\, \mathrm{d}\left(\int_0^s h(\tau)\, \mathrm{d}\tau - q\, \psi^+_{1/2}(s)\right) + G_{14}(t, 1)\left(\int_0^1 h(\tau)\, \mathrm{d}\tau - q\right) = \\ = {} & -\int_0^1 G_{14}(t, s)\, h(s)\, \mathrm{d}s + G_{14}(t, \tfrac{1}{2})\, q - G_{14}(t, 1)\, q + G_{14}(t, 1) \int_0^1 h(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \\ = {} & -\int_0^1 G_{14}(t, s)\, h(s)\, \mathrm{d}s + G_{14}(t, \tfrac{1}{2})\, q \end{aligned}$$

where the integration-by-parts formula for Perron-Stieltjes integrals is used and the equality $G_{14}(t, 1) = 0$ is taken into account. Substituting into this formula, we get the following explicit expression for the solution of the problem (2.22), (2.23), (2.24), $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} y(t) = {} & (-t^3/3 + t^2/2 - 1/6) \int_0^t s^3\, h(s)\, \mathrm{d}s + (t^3/2 - t^2 + t/2) \int_0^t s^2\, h(s)\, \mathrm{d}s + \\ & + (-t^3/3 + t^2/2) \int_t^1 s^3\, h(s)\, \mathrm{d}s + (t^3/3 - t^2) \int_t^1 s^2\, h(s)\, \mathrm{d}s + (t^2/2) \int_t^1 s\, h(s)\, \mathrm{d}s - \\ & - (t^3/6) \int_t^1 h(s)\, \mathrm{d}s + K(t)\, q \end{aligned}$$

where

$$K(t) = \begin{cases} -\frac{1}{16}t^2 + \frac{1}{12}t^3 & \text{for} \quad t \leqq \frac{1}{2}\,, \\ \frac{1}{48} - \frac{1}{8}t + \frac{3}{16}t^2 - \frac{1}{12}t^3 & \text{for} \quad t > \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

References

[1] *Bryan R. N.:* A nonhomogeneous linear differential system with interface conditions. Proc. Am. Math. Soc., *22* (1969), 270–276.

[2] *Conti R.:* On orainary differential equation with interface conditions. Jour. of Diff. Eq., *4* (1968), 4–11.

[3] *Gonelli A.:* Un teorema di esistenza per un problema di tipo „interface". Le Matematiche *22*, 2 (1967), 203–211.

[4] *Krall A. M.:* Boundary value problems with interior point boundary conditions. Pacific J. of Math. *29* (1969), 161–166.

[5] *Schwabik Š., Tvrdý M.:* Boundary value problems for generalized linear differential equations. Czech. Math. J. *29* (*104*), (1979), 451–477.

[6] *Schwabik Š., Tvrdý M., Vejvoda O.:* Differential and Integral Equations. Boundary value problems and adjoints. Academia, Praha & Reidel, Dordrecht, 1979.

[7] *Stallard F. W.:* Differential systems with interface conditions. ORNL Publication No 1876, Oak Ridge, 1955.

[8] *Zettl A.:* Ajoint and self-adjoint boundary value problems with interface conditions. SIAM J. Appl. Math., *16* (1968), 851–859.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25, ČSSR (Matematický ústav ČSAV).

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

MIROSLAV SOVA, Praha: *Concerning the characterization of generators distribution semigroups.* (Charakteristika generátorů distributivních semigrup.)

Je podána nová charakteristická vlastnost generátorů distributivních semigrup operátorů, opírající se pouze o chování resolvent na reálné polopřímce.

JANUSZ MATKOWSKI, Bielsko-Biała: *Fixed point theorems for contractive mappings in metric spaces.* (Věty o pevném bodu pro kontraktivní zobrazení v metrických prostorech.)

Nechť (X, d) je úplný metrický prostor. Jsou dokázány dvě věty o pevném bodu pro kontraktivní zobrazení $T: x \to x$, pro která je vzdálenost $d(Tx, Ty)$ odhadnuta pomocí všech ostatních vzdáleností bodů x, y, Tx, Ty.

И. И. МИХАЙЛОВ, Иваного: *Некоторые диофантовы уравнения третьей степени.* (Některé diofantické rovnice třetího stupně.)

Je dokázáno, že existuje nekonečně mnoho parametrických řešení v celých číslech diofantické rovnice $x^3 + y^3 + z^3 + 2t^3 = 0$ a soustavy diofantických rovnic $z^3 = x^3 + y^3 + 2t^3 = x_1^3 + y_1^3 + 2t_1^3 = x_2^3 + y_2^3 + 2t_2^3 = x_3^3 + y_3^3 + 2t_3^3$. V této poznámce je dokázáno, že diofantické rovnice $x^3 + y^3 + 2t^3 = \mu z^4$, $x^3 + y^3 + 2t^3 = z^{6k}$ a $x^3 + y^3 + z^3 + 2t^{9k} = 0$ mají také nekonečně mnoho řešení v celých číslech.

JARMILA NOVOTNÁ, Praha: *Discrete analogues of Wirtinger's inequality for a two-dimensional array.* (Diskrétní analogie Wirtingerovy nerovnosti pro dvojdimensionální pole.)

V článku jsou uvedeny některé nerovnosti pro konečné součty, v nichž se vyskytují x_{ij}^2, $(x_{ij} - x_{i+1,j})^2 + (x_{ij} - x_{i,j+1})^2$ („symetrický případ") a $x_{ij}^2, (x_{ij} - x_{i+1,j})^2$ („nesymetrický případ").

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha: *Eine isoperimetrische Ungleichung für die Paare der Raumkurven.* (Izoperimetrická nerovnost pro dvojice prostorových křivek.)

Pro délky těchto křivek a pro analogie smíšených plošných obsahů jejich projekcí na tři ortogonální roviny platí nerovnost, která zahrnuje izoperimetrickou nerovnost.

MILOŠ BOŽEK, Bratislava: *Existence of generalized symmetric Riemannian spaces with solvable isometry group.* (Existencia zovšeobecnených symetrických Riemannovych priestorov s riešiteľnou grupou izometrií.)

Hlavný výsledok práce hovorí, že pre každé prirodzené číslo $m \geqq 4$ existuje zovšeobecnený symetrický Riemannov priestor rádu m, difeomorfný s $\mathbf{R}^{m-1}$ a taký, že komponenta identity grupy všetkých jeho izometrií je riešiteľná.

VĚRA HOLAŇOVÁ-RADOCHOVÁ, Brno: *Fundamental solutions of the differential operator* $(-1)^n D_1^n D_2^n + a(iD_1)^n + b(iD_2)^n + c$. (Fundamentální řešení diferenciálního operátoru $(-1)^n D_1^n D_2^n + a(iD_1)^n + b(iD_2)^n + c$.)

Pro operátor s konstantními koeficienty a libovolným n jsou odvozeny podmínky pro existenci temperovaných fundamentálních řešení v prostorech s distribucí $\mathscr{B}_{p,k}$.

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha: *Differential equations with interface conditions.* (Diferenciální rovnice s přechodovými podmínkami.)

V práci se vyšetřují lineární systémy obyčejných diferenciálních rovnic s přechodovými podmínkami pomocí teorie okrajových úloh pro zobecněné diferenciální rovnice.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

RECENSE

Carl Ludwig Siegel: GESAMMELTE ABHANDLUNGEN. Bd IV, Herausgegeben von K. Chandrasekharan und H. Maas. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1979, str. 343. Cena DM 74,—.

Prvé tři díly Siegelových sebraných spisů vyšly v roce 1966. Jejich podrobná recense byla napsána prof. V. Jarníkem a otištěna v tomto časopise (roč. *92* (1967), 481—484).

Čtvrtý díl obsahuje sedmnáct Siegelových prací, které zahrnují další období jeho vědecké aktivity, které byly publikovány v letech 1968—1975. Knihu dále doplňuje Siegelova předmluva k práci „Zur Reduktionstheorie quadratischer Formen", která byla otištěna v díle třetím, obsah všech čtyř dílů, seznam všech knih a tiskem vyšlých záznamů z přednášek, opravy tiskových chyb a poznámky k prvým třem dílům, doslov H. Maase a Siegelova fotografie.

Pro podrobnou charakteristiku Siegelova díla odkazujeme čtenáře na citovanou Jarníkovou recensi. Čtvrtý díl jeho spisů jen dokumentuje šíři a hloubku jeho díla, která vynikne tím spíše, uvědomíme-li si, že tyto práce napsal C. L. Siegel po své sedmdesátce.

Převážná část ze sedmnácti prací se týká teorie čísel a teorie funkcí komplexní proměnné (eventuálně otázek na rozhraní těchto dvou oblastí). Jedna z prací je spíše historická vzpomínka (otištěná ve Frobeniových sebraných spisech) a dvě jsou věnovány problematice diferenciálních rovnic (o periodickém řešení resp. stabilitě pro systém dif. rovnic tvaru $\dot{x} = f(x)$).

V pracích z teorie čísel a teorie funkcí komplexní proměnné se Siegel jednak vrací tématicky k oblastem svého zájmu, jednak se zabývá problematikou současnou. Weierstrassova „Vorbereitungssatz", Eisensteinovy řady, Heckeho funkce dzeta, modulární formy na straně jedné, problematika algebraické teorie čísel (odhady jednotek, odhady řešení vztahu $N(\xi) = m$, o algebraické závislosti n-tých odmocnin na straně druhé. Velmi zajímavá je např. práce *Zum Beweise des Starkschen Satzes*, která osvětluje souvislost mezi touto větou (existuje právě devět imaginárních kvadratických těles s počtem tříd — „Klassenzahl" — rovným jedné) a teorii modulárních funkcí a dávající i „průzračnější" versi důkazu. (Pro ilustraci: H. M. Stark publikoval původní práci v r. 1967, Siegel ihned v r. 1968.)

Vzhledem k šíři Siegelových zájmů nelze asi doporučit jeho sebrané spisy k celkovému studiu. Měl by se však k nim obrátit každý, který se zabývá problematikou blízkou, neboť C. L. Siegel svými pracemi mnohá odvětví matematiky založil. Pro zájemce jsou všechny čtyři díly jeho sebraných spisů k dispozici v matematickém oddělení knihovny MFF UK.

Břetislav Novák, Praha

André Weil, NUMBER THEORY FOR BEGINNERS. With the Collaboration of Maxwell Rosenlicht. Springer-Verlag, New York 1979. Stran vii + 70, cena DM 11,—.

Elementární knížka pojednávající o základních pojmech teorie dělitelnosti, zbytkových třídách, kongruencích, rozložitelnosti polynomů apod. V souvislosti s těmito otázkami se objevuje pojem konečné grupy, cyklického prvku, řádu prvku. Netradiční se v knížce tohoto druhu zdá být poslední kapitola věnovaná teorii dělitelnosti Gaussových čísel neboli mřížových bodů. Knížka obsahuje řadu úloh a může být přístupná řešitelům matematické olympiády.

Jaroslav Zemánek, Praha

Robert L. Wilson: MUCH ADO ABOUT CALCULUS. A Modern Treatment with Applications Prepared for Use with the Computer. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer Verlag New York—Heidelberg—Berlin 1979. xvii + 788 str., s mnoha obr. a grafy. Cena DM 34,—.

Obsahem díla je především standardní program úvodního kursu matematické analýzy, podání látky se však často odchyluje od tradičního postupu. Po úvodní kapitole, která působí dojmem dost různorodé směsi, v níž se jen stručně mihne pojem funkce a spojitosti, následují dvě kapitoly o Riemannově-Stieltjesově integrálu, zavedeného pomocí horních a dolních součtů na základě věty o suprému, předložené jako axiom. V dalších třech kapitolách je zaveden pojem derivace a zkoumán jeho vztah k integrálu na základě věty o derivaci integrálu podle horní meze. Tyto kapitoly obsahují rovněž základní početní techniky derivování a integrování. Pak následují kapitoly o limitách, o nekonečných řadách (se zmínkou o iterovaných integrálech včetně substituční věty) a o diferenciálních rovnicích.

Autorovým cílem bylo napsat netradiční učebnici diferenciálního a integrálního počtu, která by byla použitelná pro různé typy základních kursů matematické analýzy. Měl přitom zřejmě na mysli především přednášky pro nematematiky. Proto je řada úvah prováděna spíše na intuitivním základě, často s obšírným motivačním materiálem. Autor se záměrně vyhýbá postupu „věta — důkaz", často se o novém pojmu jen zmíní, aby se k němu později vrátil podrobněji a rigorózněji (srov. pojem limity ve IV. a VII. kapitole).

Druhou autorovou snahou, vyjádřenou v podtitulu i v předmluvě, bylo připravit text, umožňující co nejdříve práci s počítačem. Proto jsou dvě kapitoly věnovány numerickým metodám a interpolaci, a ve dvou dodatcích je uveden přehled programovacích jazyků FORTRAN a BASIC. Nezdá se mi však, že by zpracování látky dávalo v tomto směru o mnoho větší možnosti než dosavadní učebnice.

V obšírné předmluvě autor vysvětluje svůj záměr a navrhuje různé možnosti, jak jeho dílo použít v přednáškách s různým zaměřením i rozsahem. Pro naše vysokoškolské učitele je kniha zajímavá především úsilím, projevujícím se i v jiných textech zejména amerických autorů, totiž učinit matematiku přitažlivou i pro nespecialisty, zejména studenty humanitních oborů. Obsahuje řadu zajímavých nápadů a detailů, jiné lze však považovat za diskutabilní z hlediska metodologického a někdy i odborného.

Jiří Jarník, Praha

R. S. Liptser, A. N. Shiryayev: STATISTICS OF RANDOM PROCESSES (Statistika náhodných procesů). Applications of Mathematics 5, 6. Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin. I. General Theory (Obecná teorie) 1977, X + 394 stran. Cena DM 64,80. II. Applications (Aplikace) 1978, X + 339 stran. Cena DM 66,—.

Soudobé inženýrské teorie převzaly pro popis náhodných procesů v technických zařízeních teorii stochastických diferenciálních rovnic, kterou založil Kiyosi Itô v letech 1944—1946. Řešení technických úloh, v prvé řadě z oblasti filtrace signálů a automatického řízení, přineslo novou problematiku i originální metody řešení. To způsobilo v šedesátých letech intenzívní rozvoj stochastické analýzy, jehož výsledky současně s novým přínosem autorů recenzovaná publikace velmi dobře postihuje. Ruské vydání vyšlo v roce 1974.

V dílu I jsou nejprve úvodní kapitoly z teorie martingalů, stochastických integrálů a stochastických diferenciálních rovnic. Přínosem poslední doby jsou zde zejména integrály vzhledem k obecným martingalům, reprezentace funkcionálů Wienerova procesu a procesů difúzního typu, teorie slabých řešení stochastických diferenciálních rovnic. Následují kapitoly o vzájemných hustotách pravděpodobnostních měr. Je v nich patrný význam Girsanovovy věty pro teorii difuzních procesů. Hustoty mají ve statistice náhodných procesů stejný význam jako ve statistice konečněrozměrné. V posledních kapitolách dílu I pojednávají autoři o teorii nelineární filtrace. Po odvození obecné rovnice filtrace probírají speciální případy, zejména filtraci Markovových procesů a Kalmanův--Bucyův lineární model.

Díl II je věnován aplikacím. Na počátku jsou definovány podmíněně gaussovské procesy a je pro ně rozvinuta teorie filtrace zobecňující filtraci v lineárním modelu. Tři kapitoly se týkají odhadu parametrů a testování statistických hypotéz v procesech difuzního typu, aplikací v teorii řízení a teorii informace. Poslední dvě kapitoly o martingalových metodách v bodových procesech byly zvlášť napsány pro anglické vydání. Obsahují teorii integrace pro bodové procesy, vyšetřování absolutní spojitosti měr a teorii filtrace.

Kniha se vyznačuje myšlenkovou bohatostí, různorodostí úloh i matematických prostředků potřebných k jejich řešení. Její četba vyžaduje dobré znalosti základů teorie náhodných procesů. Výklad postupuje od axiomatiky teorie pravděpodobnosti k modelům procesů důležitých pro aplikace.

Petr Mandl, Praha

Rodney David Driver: ORDINARY AND DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS. Applied Mathematical Sciences, vol. 20. Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin 1977. Stran 501, 35 obr. cena DM 33,60.

Kniha je úvodní učebnicí obyčejných diferenciálních rovnic. Vznikla z autorových universitních přednášek konaných v letech 1970—1977. Od ostatních učebnic podobného zaměření se odlišuje především tím, že do textu je organicky včleněn výklad základů teorie obyčejných diferenciálních rovnic se zpožděným argumentem. Zákonitě rozsah vyložené látky týkající se obyčejných diferenciálních rovnic (bez zpoždění) je poněkud menší než v jiných učebnicích. Také v porovnání s dosud vydanými učebnicemi věnovanými výhradně diferenciálním rovnicím se zpožděním (např. Bellman a Cooke, Myškis, Halanay, Mitropolskij a Martynjuk, Hale apod.) tu čtenář najde méně výsledků z teorie diferenciálních rovnic se zpožděním. Zato je však v Driverově knize teorie doplněna množstvím příkladů a teoretických problémů. (Řešení nebo návody k řešení jsou uvedeny na konci knihy.) Pokud jde o diferenciální rovnice se zpožděním, je to po této stránce asi nejlépe vybavená učebnice.

Text je rozdělen do devíti kapitol. Po úvodní kapitole, která se vedle základní klasifikace a motivujících fyzikálních příkladů zabývá také řešením elementárních skalárních rovnic (lineární rovnice a rovnice se separovanými proměnnými), následují tři kapitoly věnované diferenciálním rovnicím bez zpoždění. Obsah je patrný z jejich názvů: Jednoznačnost a Lipschitzovy podmínky pro obyčejné diferenciální rovnice (II), Lineární rovnice n-tého řádu (III) a Lineární systémy obyčejných diferenciálních rovnic (IV). (Existenční věty jsou zatím uvedeny jen pro lineární systémy.) Kapitola V je úvodem k diferenciálním rovnicím se zpožděním. Je tu uvedena řada motivujících příkladů. (Kromě fyzikálních úloh také úlohy z teorie čísel a z biomatematiky.) Po zavedení terminologie a klasifikace pak autor na příkladech ukazuje základní rozdíly mezi diferenciálními rovnicemi bez zpoždění a se zpožděním. Na závěr kapitoly je pak sformulována počáteční úloha a za předpokladu, že jsou splněny Lipschitzovy podmínky, je dokázána jednoznačnost jejího řešení (pokud existuje). Teprve v kapitole VI jsou uvedeny a dokázány (lokální i globální) věty o existenci řešení pro obyčejné diferenciální rovnice bez zpoždění i se zpožděním. Kapitola VII se zabývá systémy lineárních diferenciálních rovnic se zpožděním. Je tu uvedena formule pro řešení nehomogenního systému pomocí řešení příslušného homogenního systému (variace parametrů). Pozornost je věnována i systémům s konstantními koeficienty. Předposlední kapitola (VIII) je věnována otázkám stability (Ljapunovova nepřímá metoda, asymptotická stabilita, slabě nelineární systémy) řešení obyčejných diferenciálních rovnic bez zpoždění i se zpožděním. Poslední kapitola (IX) je úvodem do analysy ve fázové rovině pro systémy dvou obyčejných diferenciálních rovnic.

Výklad je vždy přesný, dobře promyšlený a srozumitelný. Zavedení nových pojmů je vždy pečlivě motivováno. Protože se autor omezuje na klasickou teorii (s řešeními spojitě diferencovatelnými), pro pochopení látky čtenáři stačí základní znalosti matematické analysy v rozsahu prvních dvou semestrů na vysokých školách technického zaměření. V podstatě se vystačí se slušně zažitou „ε — δ gymnastikou" a znalostí Riemannova integrálu. Není nutná ani znalost Lebesgueova integrálu. Potřebné výsledky z analysy jsou pro čtenářovo pohodlí shrnuty ve dvou dodatcích na konci knihy.)

Celkově lze říci, že se autorovi podařilo napsat velmi pěknou učebnici srozumitelnou velmi širokému okruhu čtenářů, aniž by musel cokoliv slevit z matematické přesnosti.

Milan Tvrdý, Praha

Robert J. Walker: ALGEBRAIC CURVES; Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1978; 201 stran, 25 obrázků, cena DM 22,—.

Recenzovaná kniha představuje druhé nezměněné vydání monografie, jejíž vydání první bylo realizováno v roce 1950 (Princeton, New Jersey), o dvě léta později pak vyšel ruský překlad tohoto vydání (Izdatělstvo innostrannoj litěratury, Moskva, 1952) dostupný též u nás.

Je v matematické literatuře vskutku málo knih, které — neztrácejíce úvodní učebnicový ráz a používajíce elementárního aparátu — podávají na poměrně málo stránkách ucelený exaktní výklad rozsáhlé teorie. Je nasnadě soudit, že to byla právě tato přednost, která vedla po bezmála 30ti letech k reedici této práce, „navzdory" prudkému rozvoji algebraické geometrie v poválečných letech dokumentovanému řadou objevitelských prací autorů francouzských, amerických, sovětských a japonských.

Nyní podrobněji k vlastnímu obsahu knihy. V kap. I. (Algebraický úvod) je vybudován algebraický aparát potřebný pro studium knihy celé (např. elementy teorie ideálů jsou vyloženy až v kap. V., kdy se užití této teorie stane aktuálním), při tom je výběr látky striktně podřízen účelu knihy. Dominují zde proto stati o dělitelnosti v oboru integrity polynomů, Taylorově rozvoji, homogenních polynomech a eliminaci.

V kap. II. (Projektivní prostory) jsou vyloženy základy lineární geometrie n-rozměrného projektivního prostoru. Pojem projektivního prostoru i výklad se opírá o projektivní souřadnice.

Teorie rovinných algebraických křivek je presentována v dalších dvou kapitolách:

V kap. III. (Rovinné algebraické křivky) jsou obsaženy partie, jejichž výklad je nezávislý na pojmu větve křivky. Sem patří přirozeně sám pojem algebraické rovinné křivky, vzájemná poloha přímky a křivky včetně pojmu násobnosti průsečíku, násobnost bodu na algebraické křivce, společné body dvou algebraických křivek (bez pojmu násobnosti), lineární systémy křivek. Značný důraz je kladen na kvadratické transformace, redukci (rozpuštění) singularit a teorii soumezných bodů. Je odvozena známá podmínka pro nerozložitelnost kuželosečky, Pascalova věta a je vyšetřována konfigurace inflexních bodů regulární kubiky (kubiky bez singulárních bodů).

V kap. IV. (Formální potenční řady) je zaveden pojem parametrizace a větve rovinné algebraické křivky. Je podán konstruktivní důkaz věty, že každý bod algebraické křivky je středem (počátkem) některé její větve. (V originále je pro větev použito termínu „the place" naznačujícího souvislost větve křivky s valuací a tedy i „místem" tělesa racionálních funkcí na křivce). Je vyslovena definice násobnosti průsečíku dvou algebraických křivek a dokázána Bézoutova věta o násobnostech průsečíků dvou křivek. Dále jsou odvozeny prvé dva Plückerovy vzorce (pro třídu a počet inflexních bodů). Závěrem kapitoly je vyslovena a dokázána Noetherova věta a ukázána řada jejich aplikací.

Záběr posledních dvou kapitol je rozsáhlý. Kap. V. (Zobrazení křivek) je zaměřena, jak vyjadřuje název, na podrobnější studium zobrazení křivek a to především zobrazení racionálních resp. biracionálních. Biracionálního zobrazení je originálním způsobem využito k definici prostorové algebraické křivky. V této kapitole je též rozšířen algebraický aparát o pojem a vlastnosti ideálu v okruhu a o konečně generovaná rozšíření tělesa. Zavádí se pojem tělesa racionálních funkcí na ireducibilní algebraické křivce a na základě něho biracionální ekvivalence křivek. Jsou odvozeny duální Plückerovy vzorce a stručně pojednáno o algebraických korespondencích. Zejména je dokázána podmínka, kdy je algebraická korespondence racionálním zobrazením. Závěrem kapitoly je stručně pojednáno o valuacích komutativních těles a dokázána věta, že každá valuace tělesa racionálních funkcí na ireducibilní křivce určuje jednoznačně jistou větev této křivky.

V VI. kap. (Lineární řady) je nejprve vyložena obecná teorie lineárních řad divisorů (cyklů) na křivce. Je ukázána souvislost lineárních řad a racionálních zobrazení křivky, dokázána věta o úplné redukci singularit, pojednáno o normálních křivkách. Stěžejní postavení v této kapitole má samozřejmě pojem kanonické řady a pojem rodu křivky. Je dokázána celá série závažných vět, z nichž jmenujme alespoň větu Riemannovu-Rochovu a Brillovu-Noetherové. Je provedena klasifikace křivek na racionální, eliptické, hypereliptické a nehypereliptické, vyšetřena souvislost mezi póly racionálních funkcí na křivce a divisory. Na konec je pojednáno o geometrii na regulární kubické křivce.

Výklad v celé knize je doprovázen řadou příkladů. Ke každému paragrafu jsou připojena cvičení.

Kniha patří svým obsahem i metodami mezi klasické učebnice algebraické geometrie. Korektním způsobem však dosahuje maximálního efektu s minimálním aparátem. Její studium lze doporučit každému vysokoškolsky graduovanému pracovníku v oboru matematika i každému studentu matematiky, který chce nebo jemuž je třeba se rigorosně i ekonomicky seznámit s teorií algebraických křivek.

Dalibor Klucký, Olomouc

Jacob Wolfowitz: CODING THEOREMS OF INFORMATION THEORY. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1978. Stran 173, cena DM 54,—.

Kniha obsahuje matematicky přesně formulované pravděpodobnostní základy teorie informace. Toto její třetí vydání, které se podstatně liší od předchozích, obsahuje patnáct kapitol. Přepracovány byly nejen mnohé důkazy vět, ale prakticky dvě třetiny knihy. O rozsahu změn svědčí to, že dvě kapitoly byly vynechány, šest nově zařazeno, jedna podstatně zkrácena a jedna rozšířena. Beze změn zůstalo pouze prvních pět částí. Jednotlivé partie knihy nejsou mezi sebou silně vázány. Ke čtení posledních pěti kapitol, které obsahují hlavní doplnění proti předchozím vydáním — teorii zkreslení, je možno přistoupit již po krátkém studiu předchozích částí.

V prvních dvou kapitolách je čtenář uveden do problematiky knihy popisem modelu diskrétního kanálu bez paměti. Dále jsou podány kombinatorické základy, zavedena funkce entropie a vyšetřeny její vlastnosti.

V kapitolách 3 až 7 jsou probrány různé varianty diskrétního kanálu, tj. případ, kdy „abecedy", které používá vysílací a přijímací element, jsou obě konečné. Každé přenosové zařízení je charakterizováno pravděpobnostní funkcí přenosu, tj. pravděpodobnostmi, že při vyslání prvku i vysílací abecedy bude přijat prvek j přijímací abecedy. Nechť n je přirozené číslo a $\lambda \in \langle 0; 1 \rangle$. Cílem při přenosu n-členných „slov" je nalézt určitý počet N dostatečně odlišných slov $u_1, \ldots, u_N$ vytvořených z vysílací abecedy a disjunktní rozklad na N částí $A_1, \ldots, A_N$ množiny všech n-tic prvků přijímací abecedy tak, aby rozhodovací mechanismus tvaru: bylo přijato slovo patřící do A_i, tedy bylo vysláno u_i $(i = 1, \ldots, N)$, měl pravděpodobnost chyby menší nebo rovnou λ. Jsou zde dokázány věty, které při daném množství prvků obou abeced a daných n a λ omezují N shora (absolutně) a zdola (pro vhodně zvolené $u_1, \ldots, u_N, A_1, \ldots, A_N$). Speciální roli v příslušných formulích hraje hodnota kapacity kanálu.

Autor řeší postupně mnoho modelů diskrétního kanálu bez paměti, které se liší podle toho, zda stav přenosového zařízení (tj. pravděpodobnostní funkce přenosu) je stálý nebo se mění a zda se mění mezi přenosy písmen nebo jen mezi přenosy celých n-členných slov. Zvláštní pozornost je věnována případům, kdy pouze vysílající, resp. pouze přijímající, element zná stav přenosového zařízení. Vyšetřuje se, jaký vliv má pak skutečnost, že vysílající může vhodně volit vysílaná slova $u_1, \ldots, u_N$, resp. přijímající může vhodně volit disjunktní rozklad $A_1, \ldots, A_N$.

V dalším se autor věnuje modelu diskrétního kanálu s konečnou pamětí, definici obecného diskrétního kanálu. Probírá metodu maximálního kódu a metodu náhodných kódů. Uvádí model kanálu, který nemá kapacitu.

V kapitole 8 je projednán případ tzv. polospojitého kanálu bez paměti, tj. případ, kdy vstupní abeceda je konečná, ale výstupní abeceda je nekonečná. Odlišnost proti diskrétnímu kanálu bez paměti se v matematických zápisech projevuje pouze v tom, že podmíněné pravděpodobnosti jsou nahrazeny podmíněnými hustotami.

Kapitola 9 je věnována modelu spojitého kanálu s aditivním gaussovským šumem. Za vstupní „abecedu" se volí interval $\langle 0; 1 \rangle$. Vysílaná hodnota $x \in \langle 0; 1 \rangle$ se přenosem zkreslí na $x + y$, kde y je náhodně vybraný prvek z normálního rozložení s nulovou střední hodnotou a známým rozptylem.

V kapitolách 11 až 15 je uvedena teorie zkreslení, definována funkce zkreslení a vyšetřeny její vlastnosti. Jsou zde řešeny modely, kde vysílaná informace má více složek a ty jsou kódovány, resp. dekódovány zvlášť. Je probrána také možnost, že dekódovací zařízení má nějakou další znalost o vysílané informaci. Poslední část je věnována modelu dvoustupňového kanálu, který obsahuje tři elementy: vysílací (I), retranslační (II) a přijímací (III). Element I chce vyslat jednak dvojici zpráv (i, j) do II a jednak má zájem, aby zpráva j byla prostřednictvím II doručena elementu III.

Celkově lze říci, že kniha je přehledně rozčleněna a k jejímu studiu je třeba znát pouze základy teorie pravděpodobnosti. Nesporným kladem je skutečnost, že autor často do výkladu vkládá slovní formulaci problémů. V závěru je uveden rozsáhlý seznam literatury.

Antonín Lešanovský, Praha

S. Fučík, J. Nečas, V. Souček: EINFÜHRUNG IN DIE VARIATIONSRECHNUNG. Teubner-Texte zur Mathematik, Leipzig 1977, 175 stran, cena DM 17,50.

Jedná se o upravený překlad učebního textu, který autoři vydali pro studenty MFF KU v r. 1972. Zatímco převážná většina dosavadní monografické literatury představuje klasický variační počet, autoři zde velmi přehlednou a srozumitelnou formou podávají základní informace o moderních metodách v této disciplině. Knížka je rozdělena do pěti kapitol. První z nich je věnována základům abstraktního variačního počtu. Dokazují se zde fundamentální abstraktní věty o existenci minima funkcionálu na Banachově prostoru, vyšetřují se Gâteauxovy a Fréchetovy diferenciály funkcionálů a ukazují se podmínky pro lokální extrém i pro extrém vzhledem k dané varietě. Variačními metodami se zkoumá existence řešení abstraktních nelineárních rovnic v Banachových prostorech. Nechybí ani stručný výklad některých přibližných metod. Ve druhé kapitole se dokazuje na základě předchozích výsledků existence řešení integrálních rovnic Hammersteinova typu a podobně ve třetí kapitole se zkoumá existence slabých řešení okrajových úloh pro eliptické nelineární parciální diferenciální rovnice. Ve čtvrté kapitole se autoři zabývají některými klasickými úlohami variačního počtu. Vyšetřuje se podrobně úloha s pevnými konci, zvláštní paragrafy jsou věnovány také klasickým i zobecněným řešením variačních úloh v parametrickém tvaru, vázaným extrémům a úloze s volnými konci. Poslední kapitola je věnována problematice minimálních ploch. Ve stručnosti se zkoumají slabá řešení Dirichletovy úlohy pro funkcionál minimální plochy na prostoru $W_1^{(1)}$.

V textu užité výsledky nelineární funkcionální analýzy jsou přehledně shrnuty ve zvláštním paragrafu kapitoly 1. Vysvětelna jsou též všechna užitá tvrzení o Němyckého operátorech (kapitola 2) i o Soboleovových prostorech (kapitola 3). Předpokládá se pouze znalost základů analýzy.

Milan Kučera, Praha

ZPRÁVY

ŽIVOTNÍ JUBILEUM DOC. JAROSLAVA CHUDÉHO

JOSEF MATUŠŮ, Praha

V plné duševní svěžesti a při činorodé práci oslavil dne 1. října 1979 své šedesáté narozeniny zasloužilý učitel doc. JAROSLAV CHUDÝ, vedoucí katedry matematiky a deskriptivní geometrie strojní fakulty ČVUT v Praze.

Narodil se v Praze-Libni v rodině strojního zámečníka. Tam také vychodil obecnou školu. V letech 1930–1937 studoval na karlínské reálce. Jeho učitelé matematiky a deskriptivní geometrie na této reálce prof. B. Karásek a prof. dr. F. Vyčichlo vzbudili v něm takový zájem o tyto předměty, že se rozhodl je studovat na vysoké škole. Proto se ve školním roce 1937/38 zapsal na přírodovědeckou fakultu Karlovy university s cílem získat aprobaci pro vyučování matematiky a deskriptivní geometrie na středních školách. V říjnu 1939 složil I. státní zkoušku z obou předmětů. Jeho studium pak bylo na šest let přerušeno uzavřením vysokých škol. Během této doby pracoval jako pomocný dělník ve vozovně bývalých Elektrických drah hl. m. Prahy a od r. 1942 až do května 1945 jako pomocná kancelářská síla na Magistrátě hl. m. Prahy. Během tohoto nežádoucího přerušení pokračoval podle časových možností v samostatném studiu, což mu umožnilo po znovuotevření vysokých škol i dík intensivnímu studiu od května do září složit v září 1945 II. státní zkoušku z obou předmětů. 1. října 1945 nastoupil na doporučení prof. Vyčichla jako asistent na ústav deskriptivní geometrie prof. dr. Josefa Kounovského při Vysoké škole strojní a elektrotechnické na ČVUT v Praze. Zde vedl nejdříve cvičení, později suploval i samostatně vedl přednášky z deskriptivní geometrie. V roce 1949 vyučoval v přípravném kursu (ADK) v Mariánských Lázních. V letech 1950–52 přednášel matematiku na nově zřízené elektrotechnické fakultě, kde byl pověřen funkcí tajemníka fakulty a později proděkana. Od r. 1952 až do r. 1960 na přání tehdejšího vedoucího katedry prof. Vyčichla přednášel matematiku na tehdejší fakultě architektury a pozemního stavitelství a v letech 1952–54 též deskriptivní geometrii pro studenty Vysoké školy chemicko-technologické, pro něž spolu s doc. Setzerem vydal skripta z deskriptivní geometrie.

V roce 1957 vydal spolu s doc. dr. Č. Vitnerem, CSc. trojdílná skripta z matematiky, jež doznala četných dalších vydání a byla více než 20 let používána na celé stavební fakultě ČVUT. V roce 1960 se vrací již jako docent matematiky na katedru matematiky fakulty strojní ČVUT a v roce 1965 při rozdělení katedry na dvě se stává vedoucím katedry matematiky, k níž bylo připojeno v roce 1977 i pracoviště deskriptivní geometrie.

Na fakultě strojní zastával po dvě funkční období funkci proděkana a různé funkce ve stranických orgánech fakulty a v posledních letech v odborových orgánech.

Přes 20 let je členem redakční rady Rozhledů matematicko-fyzikálních. V roce 1971 vydal knížku *Determinanty a matice* určenou pro studenty středních i vysokých škol. V roce 1979 odevzdal rukopis skripta z matematiky pro studenty strojní fakulty.

Od roku 1957 pracuje v semináři z kinematiky vedeném prof. dr. Zd. Pírkem, DrSc. V této oblasti uveřejnil sám nebo se spolupracovníky v semináři přes 10 prací v různých odborných časopisech, má pravidelně referáty na konferencích fakulty i ČVUT a konferencích o teorii strojů a mechanismů v Liberci. Podílí se aktivně na řešení výzkumných úkolů v uvedeném oboru.

Doc. Chudý je vynikající učitel, jeho přednášky jsou studenty vysoce ceněny a vyznačují se promyšleným výkladem, srozumitelností a přitažlivostí při zachování odpovídajícího stupně přesnosti; to mu umožňuje být náročný při zkouškách a spravedlivý při posuzování znalostí studentů. Svým zodpovědným přístupem k práci přispívá i k zvýšení morálně-politické úrovně studentů. Proto, mimo jiné, byl mu v roce 1968 udělen titul „Zasloužilý učitel".

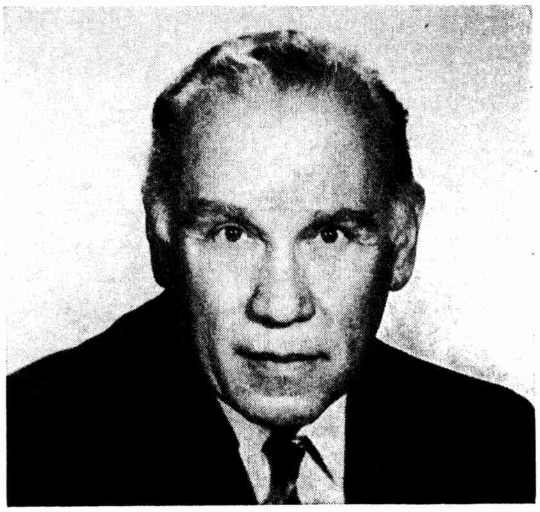
Do dalších let přejeme doc. Chudému mnoho zdraví a pracovního elánu tak, aby mohl vykonávat povolání, jež má nade všechno rád – učit a vychovávat novou technickou generaci.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

ŠEDESÁT LET DOC. RNDR. ZDEŇKA VANČURY, CSC.

KAREL DRÁBEK, Praha

Dne 8. března se dožil významného životního jubilea, šedesáti let, člen katedry matematiky a deskriptivní geometrie stavební fakulty Českého vysokého učení technického v Praze, doc. RNDr. ZDENĚK VANČURA, CSc. Narodil se v Bratčicích, okres Kutná Hora. Po pětitřídní obecné škole (1926–1931) studoval na státní



československé reálce v Nymburce (1931–1938), kde 23. 5. 1938 maturoval s vyznamenáním. Od zimního semestru 1938/39 byl zapsán na přírodovědecké fakultě Karlovy university v Praze – obor matematika a deskriptivní geometrie. Po uzavření českých vysokých škol 17. listopadu 1939 byl zaměstnán jako praktikant Občanské záložny v Nymburce od 1. 12. 1939 do 30. 4. 1942, kdy záložna musela propustit všechny své praktikanty a dát je k disposici pracovnímu úřadu. Až do 29. 11. 1942 nebyl nikde zaměstnán, živil se kondicemi z matematiky a deskriptivní geometrie středoškolským studentům. Od 30. 11. 1942 do konce války pracoval v totálním nasazení jako pomocný dělník u firmy Piechatzek-Werke v Příboře na Moravě (v té době na území zabraném Německem po mnichovském diktátu).

Po ukončení 2. světové války se vrátil Zdeněk Vančura znovu k započatým studiím, která ukončil II. státní zkouškou 20. 12. 1946 a získal tak aprobaci pro učitelství matematiky a deskriptivní geometrie na čs. školách III. stupně. Hned po složení II. státní zkoušky se stal od 1. 1. 1947 asistentem matematického semináře přírodovědecké fakulty KU v Praze, od 1. 4. 1950 do 30. 9. 1954 byl pak odborným asistentem. V této době také předložil disertační práci *Kongruence Lieových koulí (L-koulí)*, kterou posuzovali prof. Čech a Bydžovský. Po vykonání příslušných rigorosních zkoušek byl 27. 1. 1950 na přírodovědecké fakultě KU prohlášen doktorem přírodních věd (RNDr.). Od 1. 10. 1954 byl pracovně převeden na katedru matematiky a deskriptivní geometrie na tehdejší fakultě inženýrského stavitelství (vedoucí katedry prof. RNDr. František Vyčichlo) při ČVUT v Praze, kde byl 1. 1. 1955 po konkursu jmenován ministrem školství docentem pro obor matematika. V této funkci působí dosud na nynější fakultě stavební, která vznikla sloučením fakulty inženýrského stavitelství a dalších příbuzných fakult dnem 1. 7. 1960. Po obhájení kandidátské disertační práce *Kulové kongruence a jejich pláště. Adjungované přímkové kongruence a jejich pláště* na fakultě technické a jaderné fyziky ČVUT udělila mu vědecká rada ČVUT rozhodnutím z 7. 5. 1964 vědeckou hodnost kandidáta fyzikálně-matematických věd (CSc.).

Vedle své vědecké činnosti, ke které doc. Vančura vždy přistupuje s příslovečnou pečlivostí, která je jeho povaze vlastní a je známa všem, kteří s ním přišli do styku, přednášel a cvičil na začátku své docentské činnosti deskriptivní geometrii, pak kursovní matematiku a pravděpodobnost a statistiku (a to zejména na oboru Vodní stavby a vodní hospodářství). Na tomto oboru je již více než 10 let každý rok pověřován významnou politicko-výchovnou funkcí vedoucího učitele ročníku; v této práci je stále hodnocen jako jeden z nejlepších pracovníků. Vedle kursovní přednášky koná ještě na stavební fakultě speciální přednášku Tenzorová algebra a analýza pro vybrané studenty oboru Konstrukce a dopravní stavby a oboru Pozemní stavby. Rovněž působí jako hlavní a vedlejší školitel aspirantů.

Od roku 1939 je doc. Vančura členem Jednoty československých matematiků a fyziků. V r. 1973 rovněž spolupracoval s Českou terminologickou komisí JČSMF a ČSAV.

Doc. Vančura dosud publikoval 12 původních vědeckých prací, většinou z diferenciální geometrie, dvoudílnou celostátní učebnici *Analytická metoda v geometrii*, dva učební texty a dva biografické články. V pracích z diferenciální geometrie vytváří svou koncepcí, obsahem i formou novou problematiku a nové metody diferenciální geometrie dvojrozměrných kulových a přímkových variet v trojrozměrném euklidovském prostoru.

O výsledcích své práce referoval doc. Vančura na sjezdu čs. matematiků a fyziků (1955) v Praze, na vědeckých konferencích fakulty inženýrského stavitelství (1959) a stavební fakulty (1961, 1963, 1965), na vědecké konferenci ČVUT (1973), v Matematickém ústavu Maďarské akademie věd v Budapešti (1962) a v geometrickém semináři na stavební fakultě (1976).

Při prvním fakultním vědecko-výzkumném úkolu, který se zabýval studiem a kritickým hodnocením prací prof. Jana Sobotky, byl (1956—1958) vedoucím skupiny pro jeho diferenciálně geometrické práce.

Za dosavadní práci pro fakultu obdržel v roce 1975 Felberovu medaili 3. stupně (bronzovou), v letošním roce pak 2. stupně (stříbrnou).

Jsme rádi, že můžeme při tomto významném životním jubileu přát našemu příteli a vynikajícímu pedagogovi katedry, Zdeňku Vančurovi z celého srdce dobré zdraví do dalších let, neumdlévající chuť k pedagogické práci a mnoho dalších úspěchů v jím milované geometrii.

SEZNAM PRACÍ DOC. RNDR. ZDEŇKA VANČURY, CSC.

A) Učební texty a knihy:

[1] Elementární geometrie. (Překlad části knihy Hadamard J.: Lecons de géométrie élémentaire II jako učební text). Edice SPPF Praha 1950.

[2] Analytická geometrie II. (Učební text pro posluchače matematicko-fyzikální fakulty KU). Praha 1952.

[3] Analytická metoda v geometrii I. (Celostátní vysokoškolská učebnice). SNTL Praha 1957, 297 stran.

[4] Analytická metoda v geometrii II. (Celostátní učebnice). SNTL Praha 1958, 202 stran.

B) Původní vědecké práce:

[1] Kvadratické útvary v hyperbolické neeuklidovské rovině. Spisy přírodovědecké fakulty UK, č. 182, Praha 1948, 37 stran.

[2] Les congruences de Lie-sphères (L-sphères). Spisy přírodovědecké fakulty UK, č. 194, Praha 1950, str. 20—28.

[3] Pláště kongruence koulí. Časopis pro pěstování matematiky, *80* (1955), str. 317—327.

[4] Příspěvek k vybudování analytické geometrie v rovině a prostoru. Sborník vědecké konference fakulty inženýrského stavitelství, Praha 1959, str. 137—142.

[5] Některé vlastnosti plášťů kulových kongruencí. Sborník vědeckých prací fakulty inženýrského stavitelství, Praha 1961, str. 91—95.

[6] Pláště kulových kongruencí. Práce ČVUT, řada IV, č. 1, část 1, Praha 1963, str. 53—56.

[7] Kulové kongruence a jejich pláště. Adjungované přímkové kongruence a jejich pláště. Rozpravy ČSAV, řada mat. a přír. věd, roč. 78, sešit 3, Praha 1968, 100 stran.

[8] Diferenciální geometrie dvojrozměrných kulových a přímkových variet v E_3. Acta Polytechnica-Práce ČVUT, IV, 1, vědecká konference, Praha 1973, str. 119—122.

[9] Differentialgeometrie der zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum I. Commentationes mathematicae Universitatis Carolinae 16, *2* (1975), str. 219—243.

[10] Differentialgeometrie der zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum II. Commentationes mathematicae Universitatis Carolinae *16*, 3 (1975), str. 435—457.

[11] Diferenciální geometrie dvojrozměrných kulových a přímkových variet v trojrozměrném euklidovském prostoru. Rukopis původně plánované doktorské disertační práce (1975), stran 125.

[12] Adjunktionsfähige zweidimensionale Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum. Časopis pro pěstování matematiky, 21 stran, v tisku.

C) Jiné:

[1] Sté výročí narozenin profesora Jana Sobotky (Společně s A. Urbanem). Časopis pro pěstování matematiky, *87* (1962), str. 382—386.

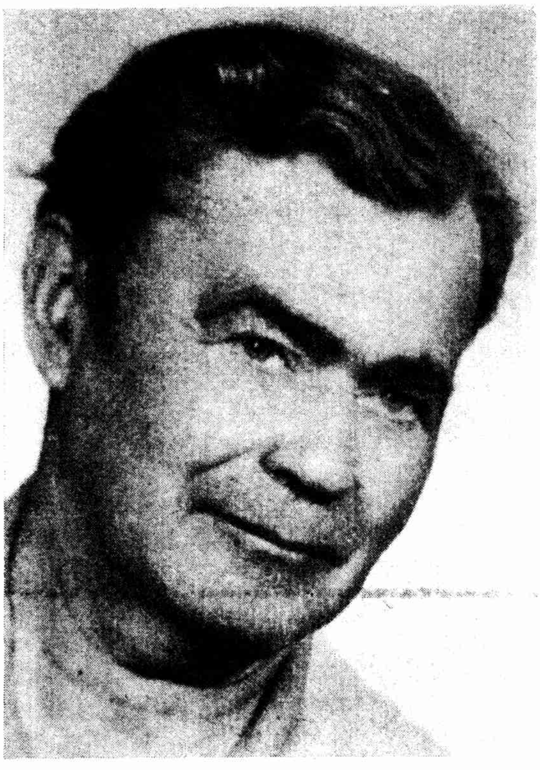
[2] Šedesát let profesora Aloise Urbana. Časopis pro pěstování matematiky, *97* (1972), str. 437—442.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

K 60. NAROZENINÁM PROF. RNDR. MILANA PIŠLA, CSC.

ZDENĚK JANKOVSKÝ, Praha

Dne 8. června 1980 se dožil prof. RNDr. MILAN PIŠL, CSc., profesor elektrotechnické fakulty ČVUT v Praze, šedesáti let. Narodil se v dělnické rodině v Praze.



Svá středoškolská studia absolvoval na reálném gymnasiu v Jičíně, kde v roce 1939 maturoval. Po maturitě začal studovat strojní a elektrotechnické inženýrství na ČVUT v Praze. Po uzavření českých vysokých škol německými okupanty se vyučil a pracoval v obchodě; roku 1942 byl nuceně nasazen na práci do tehdejších STW-závodů v Záluží u Mostu. Po osvobození studoval na přírodovědecké fakultě Karlovy university, kde v roce 1946 složil první a v roce 1947 druhou státní zkoušku pro obor matematika-deskriptivní geometrie. Po krátkodobém působení na gymnasiích v Žatci a v Hořicích v Podkrkonoší byl vybrán jako mladý pokrokový středoškolský učitel pro nově utvořený Státní kurs pro přípravu pracujících pro vysoké školy v Jíčíněvsi u Jičína. Po čtyřletém úspěšném působení v tomto kursu přešel v roce 1953 na katedru matematiky a deskriptivní geometrie elektrotechnické fakulty ČVUT v Praze jako odborný asistent. Zde byl jubilant od druhého roku svého působení pověřován přednášením a zkoušením jak v denním, tak i ve večerním a dálkovém studiu.

V roce 1957 vstoupil do externí aspirantury, kterou úspěšně ukončil v roce 1961 obhájením kandidátské práce *K míře bodové trajektorie přímého a vratného komplanárního pohybu* a získal vědeckou hodnost kandidáta fyzikálně-matematických věd. V témže roce obhájil před vědeckou radou elektrotechnické fakulty habilitační práci *K základním teoretickým otázkám komplanárního pohybu* a byl v roce 1962 jmenován a ustanoven docentem matematiky. V témže roce byl jmenován školitelem pro vědní obor aplikace matematiky. Na jeho odborný růst měl příznivý vliv prof. dr. Z. Pírko, DrSc., tehdejší vedoucí katedry matematiky.

Na katedře matematiky zastával od roku 1962 funkci vedoucího jednoho ze dvou kabinetů. V roce 1970 se stal na tříleté období zástupcem vedoucího katedry. V roce 1972 byl jmenován mimořádným profesorem matematiky elektrotechnické fakulty ČVUT, kde působí v tomto postavení s výjimkou čtyřleté zahraniční expertizy v Egyptě v letech 1973—76 dodnes.

Odborná práce jubilantova se soustřeďovala na geometrii, zvláště pak pak kinematickou geometrii. Výsledky jeho práce jsou uloženy ve 12 původních článcích. Vedle toho vystoupil s řadou odborných referátů na konferencích u nás i v zahraničí. Je autorem též řady pojednání metodického charakteru. Na katedře matematiky stál u zrodu předmětu Lineární algebra, který i dlouhá léta učil. Je spoluautorem dvoudílné celostátní učebnice matematiky a řady skript elektrotechnické fakulty. V současné době je odpovědným řešitelem dílčího úkolu I-5-3/12 Státního plánu základního výzkumu Metody kinematické analýzy a syntézy.

Profesor Milan Pišl se vždy snažil vedle odborné a pedagogické práce pracovat též v oblasti politicko-výchovné a společenské. Dlouhá léta úspěšně plnil funkci vedoucího učitele ročníku na fakultě. Pracoval též v řadě stranických a odborářských funkcí, z nichž je třeba zvláště uvést funkce předsedy ZV ROH elektrotechnické fakulty, místopředsedy OVOS zaměstnanců ve školství a vedoucího komise pro vysoké školy MěVOS. Za jeho práci odbornou, pedagogickou i politicko-výchovnou se mu dostalo řady uznání a medailí.

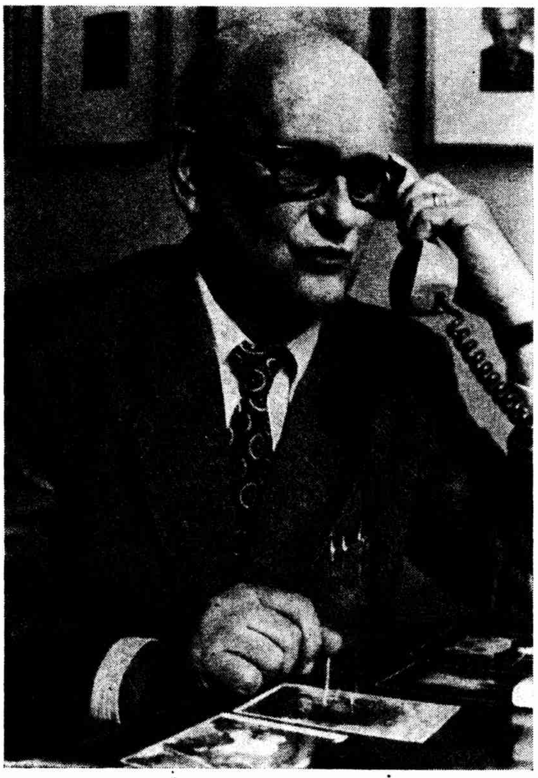
Prof. Pišl je na svém pracovišti i mimo ně vysoce vážen pro svou pečlivost, přesnost, zdravou náročnost i odbornou a pedagogickou zdatnost. Spolupracovníci a přátelé prof. Pišla vysoce hodnotí jeho záslužnou práci a přejí mu do dalších let mnoho zdraví, pracovních úspěchů a osobní spokojenosti.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

ŠEDESÁT LET DOC. BOŘIVOJE KEPRA

KAREL DRÁBEK, Praha

Na katedře matematiky a deskriptivní geometrie stavební fakulty ČVUT v Praze bylo v období hlavních prázdnin oslaveno další životní jubileum: Dne 7. srpna 1920



se v Táboře narodil její významný pedagogický a vědecký pracovník doc. BOŘIVOJ KEPR.

Jeho otec byl zaměstnancem Československých státních drah (před odchodem do důchodu strojvůdcem). Je nejstarším ze sedmi dětí a vyrůstal tedy proto ve velmi skromných poměrech. Do obecné školy chodil v Táboře (1926–1931), rovněž v Táboře navštěvoval čs. státní reálku (1931–1938). Po maturitě s vyznamenáním zapsal se na podzim 1938 na Vysokou školu architektury a pozemního stavitelství, kde se tehdy studovalo učitelství kreslení na středních školách. Záhy po zápise objevil u něj profesor kreslení Blažíček změny v barevném vidění. Vzhledem k této závažné skutečnosti přešel ještě v zimním semestru 1938/39 na přírodovědeckou fakultu university Karlovy, kde studoval matematiku a deskriptivní geometrii až do uzavření českých vysokých škol 17. 11. 1939. Během této své první části vysokoškolských studií bydlel v Hlávkových studentských kolejích, do nichž byli přijímáni pouze nemajetní a výborně studující uchazeči. Přesto že měl sociální stipendium, měl stále několik kondic, takže se na studiích v Praze sám vydržoval.

Den 17. listopadu strávil v ruzyňských kasárnách, odkud však byl jako mladší 21 let propuštěn. Pracoval pak jako dělník na výpomoc u Traťové stavební správy Tábor na malých stanicích v jeho okolí od 2. 12. 1939 do 9. 5. 1945. Pak následovala druhá část jeho studií (opět s ubytováním v Hlávkových kolejích), kterou ukončil v prosinci 1946 složením II. státní zkoušky (z matematiky jej zkoušeli prof. Bydžovský a Kössler, z deskriptivní geometrie prof. Vyčichlo), čímž získal potřebnou aprobaci pro střední školy.

Od škol. roku 1946/47 působí jako vysokoškolský učitel a to nejdříve jako pomocná vědecká síla v Ústavu deskriptivní geometrie a stereotomie na Vysoké škole inženýrského stavitelství u prof. Kadeřávka, s nímž se setkal již v roce 1938/39 jako se svým učitelem deskriptivní geometrie a u něhož také 23. 6. 1939 vykonal příslušnou zkoušku (v nauce velmi dobře, ve cvičeních výborně). Od roku 1947/48 je již asistentem deskriptivní geometrie, když před tím byl výpomocným asistentem. Po zřízení katedry matematiky a deskriptivní geometrie (pod vedením prof. Vyčichla), byl od 1. 4. 1950 do 31. 12. 1954 odborným asistentem. Po habilitačním řízení na fakultě inženýrského stavitelství (FIS) byl v období od 1. 1. 1955 do 28. 2. 1958 zástupcem docenta a od 1. 3. 1958 až dosud pracuje jako docent.

Po smrti prof. Vyčichla převzal vedení katedry (když v letech 1950–1955 byl jejím tajemníkem) na FIS, s níž se nejdříve sloučila zeměměřická fakulta a od 1. 7. 1960 vedl katedru na stavební fakultě (vzniklé dalším sloučením fakulty architektury a pozemního stavitelství a části fakulty ekonomicko-inženýrské). Tato katedra patří k největším katedrám (má dnes 40 učitelských sil) a její vedení po pedagogické, politické, vědecko-výzkumné a administrativní stránce vyžaduje velmi mnoho zkušeností a sil. Vzhledem ke zdravotním důvodům se 31. 12. 1968 vedení této katedry vzdal.

Doc. Kepr až dosud prošel mnoha stranickými a odborářskými funkcemi na pracovišti, nevyhýbá se však ani veřejným funkcím v místě bydliště. Za práci ve Svazu českých protifaštických bojovníků mu byl OV ČSPB udělen Pamětní odznak.

Skutečným potěšením doc. Kepra je výuka oblíbené deskriptivní geometrie a proto v současné době těžce nese značnou redukci hodin jí přidělovaných. To zejména proto, že dříve pracoval v mnoha reformních a přestavbových komisích pro stavební obory, ale s tak odmítavým a zcela nepochopitelným postojem z řad praktických předmětů se nikdy nesetkal.

Doc. Kepr vedle své pedagogické práce v deskriptivní geometrii se věnuje vědecké a odborné práci v diferenciální geometrii. Za úspěchy na pedagogickém a politicko-výchovném poli obdržel Čestné uznání rektora ČVUT (1960) a děkana stavební fakulty (1968, 1976) a v roce 1975 potom Medaili ČVUT 2. stupně.

Doc. Kepra si na jeho pracovišti všichni velmi váží pro jeho kamarádské chování k mladším spolupracovníkům, skromné vystupování a ochotu vždy se zamyslet třeba nad sebe menším osobním i vědeckým problémem a pomoci hledat jeho nejlepší řešení. Zvlášť úctyhodná je jeho příslovečná pečlivost ve vyřizování svěřených úkolů a jejich vzorné provedení.

Z katedry matematiky a deskriptivní geometrie na stavební fakultě ČVUT a též z ostatních sesterských kateder mu proto přejeme do dalších let hodně pevného zdraví a při pohledu zpět na řady studentů, které vedl jako ročníkový učitel, příp. jako jejich školitel, plnou osobní spokojenost.

SEZNAM PRACÍ DOC. BOŘIVOJE KEPRA

A) Knihy:

[1] Prostorová perspektiva a reliefy (spol. s *F. Kadeřávkem*). Praha ČSAV 1954.

[2] Přehled užité matematiky (vedoucí autor *K. Rektorys*). Kap. 9: Diferenciální geometrie. Praha SNTL, 1. vyd. 1963, 2. vyd. 1967, 3. vyd. 1973.

[2a] Survey of applicable Mathematics. Chap. 9. V SNTL pro Iliffe Books Ltd., London, 1969.

[3] Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi (spol. s *B. Budinským*). Praha SNTL 1970.

[4] Encyklopedie aplikované matematiky I. díl (spoluautor), SNTL Praha 1977.

[5] Encyklopedie aplikované matematiky II. díl (spoluautor), SNTL Praha 1979.

B) Skripta:

[1] Deskriptivní geometrie a stereotomie, I. část (spoluautor). Praha, SPN 1951 (další vydání SNTL 1954, 1959).

[2] Deskriptivní geometrie a stereotomie, II. část (spoluautor). Praha, SPN 1952 (další vydání v SNTL 1953, 1954).

[3] Základy diferenciální geometrie křivek a ploch. Praha, SNTL 1955.

[4] Základy diferenciální geometrie s aplikacemi na plochy používané ve stavebně inženýrské praxi. Praha, PPÚ 1965.

[5] Deskriptivní geometrie III. (spoluautor). Praha SNTL 1963, 1965, 1974.

C) Vědecké články:

[1] O konstrukci paraboly, jsou-li dány její tři tečny a normála. Časopis *75* (1950), D 151—154.

[2] O vlastnostech některých křivek inženýrské praxe (spol. s *K. Drábkem*). Sborník k 70. narozeninám prof. Ing. Dr. Františka Kadeřávka: Geometrie v technice a umění, Praha SNTL, 1955, 20—46.

[3] Příspěvek k proniku dvou ploch. Pokroky mat., fyz. a astr., *I* (1956), 242.

[4] Příspěvek ke geometrii křivek spádových. Pokroky mat., fyz. a astr., *II* (1957), 365—367.

[5] Příspěvek k rovnoběžnému osvětlení ploch. Sborník fakulty inženýrského stavitelství ČVUT v Praze, 1957, 149—152.
[6] Příspěvek k rovnoběžnému přenosu vektoru plochy. Sborník fakulty inženýrského stavitelství ČVUT v Praze, 1958, 143—148.
[7] K hodnocení díla Jana Sobotky (spol. s *K. Havlíčkem*, *A. Urbanem* a *Z. Vančurou*). Zprávy komise pro dějiny přírodních, lékařských a technických věd ČSAV, čís. *13* (1963), 29—34.

D) Odborné a metodické články:

[1] Funkce a její grafy. Sborník přednášek z matematiky SIÚ, Praha 1956, 24—51.
[2] Technické křivky. Sborník přednášek z matematiky SIÚ, Praha, 1956, 51—69.
[3] O některých křivkách. Rozhledy mat.-fyz. *43* (1964/65), 250—252, 308—314, 351—358, 399—403, 442—446 a Rozhledy *44* (1965/66), 13—17, 65—68, 113—115, 161—165, 216—219, 263—267, 308—311, 356—360.
[4] Přijímací zkoušky z deskriptivní geometrie na technice. Rozhledy mat.-fyz. *45* (1966/67), 327—352.

E) Životopisné články:

[1] Sedmdesát let prof. Dr. Kadeřávka. Časopis pro pěst. mat. *80* (1955), 375—382.
[2] Prof. Dr. Kadeřávek — nositel Řádu republiky. Časopis pro pěst. mat. *81* (1956), 128.
[3] Prof. Dr. Fr. Vyčichlo — nositel Řádu práce. Časopis pro pěst. mat. *81* (1956), 496.
[4] Za prof. RNDr. Fr. Vyčichlo. Rozhledy mat.-fyz. *36* (1958), 95—96.
[5] Sedmdesátpět let profesora Františka Kadeřávka. Časopis pro pěst. mat. *85* (1960), 384—385.
[6] Sedmdesátpět let prof. Dr. Františka Kadeřávka. Aplikace matematiky *5* (1960), 479—485.
[7] Zemřel prof. Ing. Dr. Fr. Kadeřávek. Časopis pro pěst. mat. *87* (1962), 113—114.
[8] Vzpomínáme na prof. Kadeřávka. Pokroky mat., fyz. a str. *11* (1966), 40.
[9] Šedesát let doc. RNDr. Karla Drábka, CSc. Časopis pro pěst. mat. *102* (1978), 319—325.
[10] K šedesátinám docenta Drábka. Pokroky mat., fyz. a astr. *23* (1978), 108—109.

Pro matematické časopisy sepsal více než 20 recenzí knih, dále 9 lektorských posudků pro SPN a SNTL a více než 10 recenzních posudků článků pro jejich uveřejnění v Časopise, Aplikacích, příp. Pokrocích.

PÁTÉ PRAŽSKÉ TOPOLOGICKÉ SYMPOSIUM

Od roku 1961 se koná v Praze každých pět let Symposium o obecné topologii a jejích vztazích k moderní analýze a algebře. Páté symposium se bude konat ve dnech 24. až 28. srpna 1981 v Praze. Zájemci se mohou písemně obrátit na akademika Josefa Nováka, Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.

Redakce.

SUMMARIES OF ARTICLES PUBLISHED IN THIS ISSUE

(Publication of these summaries is permitted)

MIROSLAV DONT, Praha: *Poznámka o lineární míře Vituškinových množin.* (A note on linear measure of Vitushkin's sets.) Čas. pěst. mat. *105* (1980), 23—30. (Original paper.)

It is shown that there is a compact set $M \subset \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \subset R^2$ with linear Hausdorff measure 1 but such that its orthogonal projections on the coordinate axes are the whole segments $\langle 0, 1 \rangle \times \{0\}$, $\{0\} \times \langle 0, 1 \rangle$. The construction of that set is the same as Vitushkin's construction of the set with positive linear measure but with zero analytic capacity.

ALOIS KLÍČ, Praha: *On exceptional values of holomorphic mappings of Riemann surfaces.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 41—55. (Original paper.)

Let $f: V \to M$ be a holomorphic mapping from an open Riemann surface V into a closed Riemann surface M. In this paper the generalized Cartan's formulae are derived. These formulae are used to prove theorems giving sufficient conditions for $\delta(a_0) = 0$, $a_0 \in M$.

KAREL SVOBODA, Brno: *On characterization of the sphere in E^4 by means of the parallelness of certain vector fields.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 56—72. (Original paper.)

In this paper the author presents a certain generalization of the result contained in his previous paper. Using the parallelness of a certain normal vector field associated to a given couple of tangent vector fields, the author proves theorems analogous to those of his previous paper to get the base for other considerations.

ANTON DEKRÉT, Zvolen: *On forms and connections on fibre bundles.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 73—80. (Original paper.)

In this paper some properties of the differentiations of type i_* on $\Lambda(E)$ determined by the connection form $v : TE \to VTE$ and by the curvature form $\Phi : TE \wedge TE \to VTE$ of a connection $\Gamma : E \to J^1 E$ on a fibre space $\pi : E \to M$ are described. If a bilinear form ω on E is regular on fibres of E then there is such a connection $\bar{\Gamma}$ that $\omega(Y, X) = 0$ for any vertical vector Y and any horizontal vector X. Necessary and sufficient conditions for $\bar{\Gamma}$ to be integrable are found in terms of ω.

ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В НАСТОЯЩЕМ НОМЕРЕ

(Эти характеристики позволено репродуцировать)

MIROSLAV DONT, Praha: *Poznámka o lineární míře Vituškinových množin.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 23—30.

Замечание о линейной мере множеств Витушкина. (Оригинальная статья.)

Показывается, что существует компакт $M \subset \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \subset R^2$, линейная мера Хаусдорфа которого равна 1 и ортогональные проекции на координатные оси совпадают с промежутком $\langle 0, 1 \rangle$. Конструкция этого множества совпадает с конструкцией Витушкина множества с положительной линейной мерой но нулевой аналитической емкостью.

ALOIS KLÍČ, Praha: *On exceptional values of holomorphic mappings of Riemann surfaces.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 41—55.

Об исключительных значениях голоморфных отображений римановых поверхностей. (Оригинальная статья.)

Пусть $f : V \to M$ — голоморфное отображение открытой римановой поверхности V в замкнутую риманову поверхность M. В статье выведены обобщенные Картановы формулы. С помощью этих формул доказаны теоремы, дающие достаточные условия для отсутствия дефектных значений.

KAREL SVOBODA, Brno: *On characterization of the sphere in E^4 by means of the parallelness of certain vector fields.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 56—72.

О характеризации сферы в E^4 с помощью параллельности некоторых векторных полей. (Оригинальная статья.)

В статье обобщаются некоторые результаты, содержащиеся в предыдущих статьях автора. Используя параллельность некоторого нормального векторного поля, ассоциированного с данной парой касательных векторных полей, автор доказывает теоремы, аналогичные теоремам его предыдущих работ, чтобы получить базу для других рассуждений и выводов.

ANTON DEKRÉT, Zvolen: *On forms and connections on fibre bundles.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 73—80.

Формы и связности на расслоенных пространствах. (Оригинальная статья.)

В этой статье описаны некоторые свойства дифференцирований типа i_*, определенных формой $V : TE \to VTE$ и формой кривизны $\Phi : TE \wedge TE \to VTE$ связности $\Gamma : E \to J^1E$ на расслоенном пространстве $\pi : E \to M$. Если билинейная форма ω регулярна по слоям, то существует связность $\bar{\Gamma}$, что $\omega(Y, X) = 0$ для каждого вертикального вектора Y и каждого горизонтального вектора X на E. С помощью формы ω найдены достаточные и необходимые условия для того, чтобы связность $\bar{\Gamma}$ была интегрируемой.

SUMMARIES OF ARTICLES PUBLISHED IN THIS ISSUE

(Publication of these summaries is permitted)

VĚROSLAV JURÁK, Poděbrady: *Conjugate cyclic (v, k, λ)-configurations.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 31—40. (Original paper.)

This article presents the subject of conjugate cyclic (v, k, λ)-configurations by an investigation of a certain isomorphism of these configurations.

MIROSLAV SOVA, Praha: *Relation between real and complex properties of the Laplace transform.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 111—119. (Original paper.)

Necessary and sufficient conditions are given for the existence of the Laplace originals in terms of the behaviour in the complex halfplane without involving higher derivatives.

ZDENĚK VANČURA, Praha: *Adjunktionsfähige zweidimensionale Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 120—132. (Originalartikel.)

Im vorgelegten Artikel, der mit den vorhergehenden Arbeiten des Autors in der Differentialgeometrie von zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum eng zusammenhängt, versuchen wir den Begriff von adjunktionsfähigen bzw. adjunktionsunfähigen zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum zweckmässig zu definieren und systematisch zu studieren.

JIŘÍ MATYSKA, Praha: *An example of removable singularities for bounded holomorphic functions.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 133—146. (Original paper.)

The goal of this paper is a construction of a function $f: \langle 0,1 \rangle \to R$ satisfying the Hölder condition with every exponent $\alpha < 1$ such that the graph of f carries a set of positive length and zero analytic capacity.

JIŘÍ HNILICA, Praha: *Der verallgemeinerte Ljapunovsche Oszillationssatz.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 147—166. (Originalartikel.)

In dieser Arbeit untersuchen wir die lineare homogene verallgemeinerte Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten (H) $dx = d[A_\lambda]\, x$, wobei $x = (x_1, x_2)^*$ eine Vektorfunktion und $A_\lambda(s)$ eine 2×2 Matrix der Form

$$A_\lambda(s) = \begin{pmatrix} 0, & s \\ -\lambda\, \Phi(s), & 0 \end{pmatrix}$$

sind. Seien ferner Φ eine reelle Funktion mit lokal endlicher Variation im ganzen Interval $(-\infty, +\infty)$ und $\lambda \in C$ ein Parameter. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass die Verallgemeinerung des Ljapunovschen Oszillationssatzes, der die Verhaltung der Lösung der Gleichung (H) in der Abhängigkeit vom Verlauf des Parameters λ ganz charakterisiert, gilt.

ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В НАСТОЯЩЕМ НОМЕРЕ

(Эти характеристики позволено репродуцировать)

Věroslav Jurák, Poděbrady: *Conjugate cyclic (v, k, λ)-configurations.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 31—40.

Сопряженные циклические (v, k, λ)-конфигурации. (Оригинальная статья.)

В статье изучаются сопряженные (v, k, λ)-конфигурации при помощи некоторых их изоморфизмов.

Miroslav Sova, Praha: *Relation between real and complex properties of the Laplace transform.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 111—119.

Отношение между действительными и комплексными свойствами преобразования Лапласа. (Оригинальная статья.)

В статье найдены необходимые и достаточные условия для существования оригиналов Лапласа. Эти условия сформулированы в терминах поведения функции в комплексной полуплоскости и не включают высших производных.

Zdeněk Vančura, Praha: *Adjunktionsfähige zweidimensionale Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 120—132.

Присоединяемые двухмерные сферические и линейчатые поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. (Оригинальная статья.)

В статье, тесно связанной с предыдущими работами автора по дифференциальной геометрии двухмерных сферических и линейчатых поверхностей в трехмерном пространстве, предпринимается попытка разумным образом определить понятие присоединяемых и неприсоединяемых двухмерных сферических и линейчатых поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве и исследовать его свойства.

Jiří Hnilica, Praha: *Der verallgemeinerte Ljapunovsche Oszillationssatz.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 147—166.

Обобщение одной теоремы Ляпунова. (Оригинальная статья.)

В работе изучается обобщенное дифференциальное уравнение (H) $\mathrm{d}x = \mathrm{d}[A_\lambda]\, x$, где $x = (x_1, x_2)^*$ — векторная функция и матрица $A_\lambda(s)$ имеет вид

$$A_\lambda(s) = \begin{pmatrix} 0, & s \\ -\lambda\, \Phi(s), & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом Φ — действительная функция с локально конечным изменением во всем интервале $(-\infty, +\infty)$. В работе доказано обобщение теоремы Ляпунова, которое в полной мере характеризует решения уравнения (H) в зависимости от параметра λ.

Pavel Drábek, Plzeň: *Ranges of a-homogeneous operators and their perturbations*. Čas. pěst. mat. *105* (1980), 167—183.

Области значений a-однородных операторов и их возмущений. (Оригинальная статья.)

В статье изучается существование решения краевой задачи $-(|u'(t)|^{p-2} . u'(t))' - \mu|u^+(t)|^{p-2} u^+(t) + \nu|u^-(t)|^{p-2} u^-(t) + g(t, u(t)) = f(t)$, $u(0) = u(\pi) = 0$ в интервале $\langle 0, \pi \rangle$, где μ и ν — вещественные параметры, $p \geqq 2$ — вещественное число, g — вещественная функция, определенная в $\langle 0, \pi \rangle \times \mathbf{R}^1$ (символ $\mathbf{R}^1$ обозначает множество всех вещественных чисел), и f — вещественная функция, определенная в $\langle 0, \pi \rangle$. Функции u^+ и u^- определяются следующим образом: $u^+(t) = \max \{u(t), 0\}$, $u^-(t) = \max \{-u(t), 0\}$. Вторая часть статьи представляет собой резюме результатов, опубликованных в одной статье Й. Гарнета. В треьей части эти результаты применяются к краевым задачам для нелинейного уравнения Штурма-Лиувиля второго порядка и для некоторого типа уравнений в частных производных. В последней части изучается разрешимость краевой задачи для нелинейного уравнения Штурма-Лиувиля второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от параметров μ и ν. При этом кроме методов классического анализа используются свойства степени Лере-Шаудера.

Josef Král, Stanislav Mrzena, Praha: *Heat sources and heat potentials*. Čas. pěst. mat. *105* (1980), 184—191.

Тепловые источники и тепловые потенциалы. (Оригинальная статья.)

Пусть ν — борелевская мера в R^m с компактным носителем. Исследуются необходимые и достаточные условия, обеспечивающие существование нетривиальной меры ϱ в R^1, для которой тепловой потенциал меры $\nu \otimes \varrho$ в R^{m+1} непрерывен или непрерывен по Гельдеру.

Miroslav Dont, Praha: *The heat and adjoint heat potentials*. Čas. pěst. mat. *105* (1980), 199—203.

Тепловые и сопряженные тепловые потенциалы. (Оригинальная статья.)

Автор показывает, что существует мера с компактным носителем в R^2, для которой тепловой потенциал непрерывен, но сопряженный потенциал не непрерывен.

Ladislav Nebeský, Praha: *On the existence of a 3-factor in the fourth power of a graph*. Čas. pěst. mat. *105* (1980), 204—207.

О существовании 3-фактора в четвертой степени графа. (Оригинальная статья.)

Доказывается следующая теорема: если G — связный граф четного порядка $\geqq 4$, то G^4 обладает 3-фактором, каждая компонента которого есть либо K_4 либо $K_2 \times K_3$. Эта теорема имеет такое следствие: если G — связный граф четного порядка $\geqq 4$, то G^4 содержит по крайней мере три 1-факторы без общих вершин.

Pavel Drábek, Plzeň: *Ranges of a-homogeneous operators and their perturbations.* Čas. pěst. mat. *105* (*1980*), 167—183. (Original paper.)

This paper deals with the existence of the solution of boundary value problem $-(|u'(t)|^{p-2}\,u'(t))' - \mu|u^+(t)|^{p-2}\,u^+(t) + \nu|u^-(t)|^{p-2}\,u^-(t) + g(t, u(t)) = f(t)$, $u(0) = u(\pi) = 0$ on the interval $\langle 0, \pi \rangle$, where μ and ν are real parameters, $p \geqq 2$ is a real number, g is a real function defined on $\langle 0, \pi \rangle \times \mathbf{R}^1$ (symbol $\mathbf{R}^1$ denotes the set of all real numbers) and f is a real function defined on $\langle 0, \pi \rangle$. The functions u^+ and u^- we define as follows: $u^+(t) = \max\{u(t), 0\}$, $u^-(t) = \max\{-u(t), 0\}$. Section 2 is a summary of the main results contained in the paper by J. Garnett. In section 3 the author gives some applications of the second part of this paper to the boundary value problems for differential equations, particularly for the nonlinear Sturm-Liouville equation of the second order and for a certain type of partial differential equations. Section 4 is devoted to the study of the nonlinear Sturm-Liouville equation of the second order with constant coefficients. The author discusses the existence of weak solutions of the homogeneous boundary value problem in dependence on the parameters μ and ν. The methods of the proofs are based on the properties of the Leray-Schauder degree and on the methods of classical analysis (the shooting method).

Josef Král, Stanislav Mrzena, Praha: *Heat sources and heat potentials.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 184—191. (Original paper.)

Let ν be a compactly supported Borel measure in R^m. Necessary and sufficient conditions are investigated guaranteeing the existence of a nontrivial measure ϱ in R^1 such that the heat potential of $\nu \otimes \varrho$ in R^{m+1} is continuous or Hölder-continuous.

Miroslav Dont, Praha: *The heat and adjoint heat potentials.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 199—203. (Original paper.)

In this note it is shown that a measure with compact support in R^2 and with continuous heat potential in R^2 but with discontinuous adjoint heat potential exists.

Ladislav Nebeský, Praha: *On the existence of a* 3*-factor in the fourth power of a graph.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 204—207. (Original paper.)

The following theorem is proved: If G is a connected graph of an even order $\geqq 4$, then G^4 has a 3-factor, each component of which is either K_4 or $K_2 \times K_3$. This theorem implies the following corollary: If G is a connected graph of an even order $\geqq 4$, then G^4 has at least three edge-disjoint 1-factors.

SUMMARIES OF ARTICLES PUBLISHED IN THIS ISSUE

(Publication of these summaries is permitted)

VÁCLAV METELKA, Liberec: *O jistých rovinných konfiguracích* $(12_4, 16_3)$ *obsahujících B, C a E-body a konfiguracích singulárních.* (Über gewisse ebene Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ die B-, C- und E-Punkte enthalten und über singuläre Konfigurationen.) Čas. pěst. mat. *105* (1980), 219—255. (Originalartikel.)

Dieser Artikel ist ein Teil eines umfangreichen Planes, in dem die Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ systematisch untersucht werden. Diese werden durch Punkte und Geraden in der Projektivebene realisiert.

In der Literatur wurden bisher Konfigurationen beschrieben, die mindestens einen A-Punkt, oder mindestens einen D-Punkt enthalten und ebenfalls sind alle Konfigurationen ohne B-Punkte bekannt. Deswegen befasst sich der Autor mit der Untersuchung solcher Konfigurationen, welche mindestens einen B-Punkt (aber keinen der A- und D-Punkte) enthalten. Diese Teilmenge der ebenen Konfigurationen ist sehr umfangreich und wenn sie übersichtlich beschrieben werden soll, dadurch ist es fast unvermeidlich die B-Punkte (und dadurch auch die entsprechenden Konfigurationen) wesentlich kontrastvoller zu klassifizieren. Diesen Weg hat der Autor gewählt und beschränkte sich nur auf Konfigurationen mit B^3-Punkten ohne B^4-Punkte, welche mindestens einen Punkt des Typs E und einen Punkt des Typs C enthalten. Alle diese Konfigurationen wurden gefunden, in der Arbeit beschrieben und für 90 von denen wurde die Realisierbarkeit bewiesen.

Als einen besonders interessanten Beitrag zur Theorie der ebenen Konfigurationen definiert der Author singuläre Konfigurationen, von denen eine auf der beigelegten Abbildung dargestellt wird.

ZDENĚK DOSTÁL, Ostrava: *l_∞-norm of iterates and the spectral radius of matrices.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 256—260. (Original paper.)

A recurrent formula for max $\{|A^k|_\infty : |A|_\infty \leqq 1,\ |A|_\delta \leqq r,\ A \in C^{nn}\}$ is given, where $r \leqq 2^{1/n} - 1$ and $k \geqq n$. A matrix attaining the maximum is explicitly evaluated.

OTAKAR JAROCH, Praha: *Integral representation of orthogonal exponential polynomials.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 261—265. (Original paper.)

Orthogonal exponential polynomials $\mathrm{oep}_n(t)$ result by orthogonalization from the system of exponential functions in $L_2(0, +\infty)$. Functions of this kind have been used in engineering and science. Two integral representations are derived, which are analogous to the Schläfli and Laplace integrals in the theory of Legendre polynomials.

ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В НАСТОЯЩЕМ НОМЕРЕ

(Эти характеристики позволено репродуцировать)

VÁCLAV METELKA, Liberec: *O jistých konfiguracích* $(12_4, 16_3)$ *obsahujících B, C a E-body a konfiguracích singulárních.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 219—255.

О конфигурациях $(12_4, 16_3)$, содержащих B-, C- и E-точки, и о сингулярных конфигурациях. (Оригинальная статья.)

Статья является частью обширного плана, целью которого является систематическое исследование конфигураций $(12_4, 16_3)$, реализуемых точками и прямыми линиями проективной плоскости.

До сих пор были в литературе описаны конфигурации, содержащие по крайней мере одну A-точку или D-точку, и также хорошо известны все конфигурации без B-точек. Поэтому автор ограничивается изучением конфигураций, содержащих хоть одну B-точку и несодержащих A-точек и D-точек.

Оказывается, что множество таких конфигураций в плоскости является очень большим, так чтодля его наглядного описания почти необходимо более тонко классифицировать точки типа B (и тем самым также соответствующие конфигурации). Именно этот путь автор выбрал и ограничился только конфигурациями с B^3-точками, без B^4-точек и с хоть одной точкой типа E и с хоть одной точкой типа C. Все эти конфигурации нашел, описал и для 90 из них доказал их реализуемость в плоскости.

Особенно интересным вкладом в теорию плоских конфигураций является определение автора сингулярных конфигураций, одна из который изображена на приложенном рисунке.

ZDENĚK DOSTÁL, Ostrava: *l_∞-norm of iterates and the spectral radius of matrices.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 256—260.

l_∞-норма итераций и спектральный радиус матриц. (Оригинальная статья.)

В работе найдена рекурентная формула для $\max \{|A^k|_\infty : |A|_\infty \leqq 1, |A|_\delta \leqq r, A \in C^{nn}\}$, где $r \leqq 2^{1/n-1}$ и $k \geqq n$. Кроме того явно вычислена матрица, достигающая этого максимума.

OTAKAR JAROCH, Praha: *Integral representation of orthogonal exponential polynomials.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 261—265.

Интегральное представление ортогональных экспоненциальных многочленов. (Оригинальная статья.)

Ортогональные экспоненциальные многочлены $\mathrm{oep}_n(t)$ возникают при ортогонализации системы показательных функций в $L_2(0, +\infty)$ и применяются в инженерных и естественных науках. В статье выводятся их интегральные представления, аналогичные интегралам Шлефли и Лапласа в теории многочленов Лежандра.

KAREL SVOBODA, Brno: *Characterizations of the sphere in E^4 by means of the pseudoparallel mean curvature vector field.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 266—277.

Характеризация сферы в E^4 посредством псевдопараллельного векторного поля средней кривизны. (Оригинальная статья.)

Вводится понятие псевдопараллельности векторного поля средней кривизны ξ и с его помощью доказываются 4-мерная версия классической H-теоремы и одно ее обобщение.

JARMILA NOVOTNÁ, Praha: *Variations of discrete analogues of Wirtinger's inequality.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 278—285.

Дискретные аналоги неравенства Виртингера. (Оригинальная статья.)

В статье исследуются дискретные аналоги неравенства Виртингера. Метод доказательства главной теоремы, основанный на использовании вещественных тригонометрических многочленов, позволяет получить новое усиление этой теоремы. Приводится также несколько других неравенств, вытекающих из теоремы, и в заключение статьи показывается, как полученные результаты можно использовать в геометрии.

ALOIS KLÍČ, Praha: *Some remarks on the Nevanlinna theory of holomorphic mappings of Riemann surfaces.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 286—291.

Несколько замечаний о теории Неванлинны голоморфных отображений римановых поверхностей. (Оригинальная статья.)

В статье исследуются некоторые свойства трансцендентных голоморфных отображений открытых римановых поверхностей в компактные римановы поверхности.

ELENA WISZTOVÁ, Žilina: *Paths in powers of graphs.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 292—301.

О путях в степенях графов. (Оригинальная статья.)

В работе изучается некоторая модификация гамильтоновой связности для высшей степени графов. Дано определение i-проходного графа и доказывается, что если G — связный граф, имеющий по крайней мере $2i$ вершин ($i \geqq 3$), то граф G^{i+1} является i-проходным.

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha: *Eine isoperimetrische Ungleichung für geschlossene Kurven im vierdimensionalen Raum.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 302—310

Изопериметрическое неравенство для замкнутых кривых в 4-мерном пространстве. (Оригинальная статья.)

Автор приводит неравенство, связывающее длину кривой и площади ее проекций на шесть координатных плоскостей ортогональной системы координат и включающее много частных случаев.

JIŘÍ JARNÍK, Praha: *Constructing the minimal differential relation with prescribed solutions.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 311—315

Конструкция минимального дифференциального включения с данными решениями. (Оригинальная статья.)

Пусть Ξ — множество абсолютно непрерывных и локально ограниченных функций. Автор показывает, что существует такое отображение Q из R^{n+1} в множество компактных выпуклых множеств в R^n, что каждая функция $u \in \Xi$ является решением дифференциального включения $\dot{x} \in \in Q(t, x)$ и что Q является минимальным в том смысле, что если S обладает аналогичными свойствами, то $Q(t, x) \subset S(t, x)$ для почти всех t и всех x.

KAREL SVOBODA, Brno: *Characterizations of the sphere in E^4 by means of the pseudoparallel mean curvature vector field.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 266—277. (Original paper.)

The notion of pseudoparallelness of the mean curvature vector field ξ is introduced and, using this property of ξ, a 4-dimensional version of the classical H-theorem and its certain generalization are proved.

JARMILA NOVOTNÁ, Praha: *Variations of discrete analogues of Wirtinger's inequality.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 278—285. (Original paper.)

In the paper discrete analogues of Wirtinger's inequality are studied. Three of them have been already proved. A simple proof of the main theorem based on real trigonometric polynomials is given. Theorem 1 is the starting point to the proof of the other theorems which in some cases are further sharpened. In the end, a geometrical application of the basic theorems is given.

ALOIS KLÍČ, Praha: *Some remarks on the Nevanlinna theory of holomorphic mappings of Riemann surfaces.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 286—291. (Original paper.)

These remarks deal with the properties of transcendental holomorphic mappings from open Riemann surfaces into closed Riemann surfaces.

ELENA WISZTOVÁ, Žilina: *Paths in powers of graphs.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 292—301. (Original paper.)

The author studies a certain general modification of hamiltonian connectedness for higher powers of graphs. He defines i-traceable graph and proves that if G is a connected graph with at least $2i$ vertices, where $i \geqq 3$, then G^{i+1} is i-traceable.

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha: *Eine isoperimetrische Ungleichung für geschlossene Kurven im vierdimensionalen Raum.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 302—310. (Originalartikel.)

Für die Länge der Kurve und für die Flächeninhalte ihrer Projektionen auf 6 Koordinatenebenen eines Orthogonalsystems besteht eine Ungleichung mit vielen Spezialfällen.

JIŘÍ JARNÍK, Praha: *Constructing the minimal differential relation with prescribed solutions.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 311—315. (Original paper.)

Let Ξ be a set of absolutely continuous and locally bounded functions. The author proves that there is such a map Q from R^{n+1} to the family of compact convex sets in R^n that each function u is a solution of the differential relation $\dot{x} \in Q(t, x)$ and that Q is minimal in the following sense: if S has analogous properties, then $Q(t, x) \in S(t, x)$ for almost all t and all x.

SUMMARIES OF ARTICLES PUBLISHED IN THIS ISSUE

(Publication of these summaries is permitted)

MIROSLAV SOVA, Praha: *Concerning the characterization of generators of distribution semigroups.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 329—340. (Original paper.)

A new characteristic property of generators of distribution semigroups of operators, based only on the behavior of their resolvents on a real halfaxis, is given.

JANUSZ MATKOWSKI, Bielsko-Biała: *Fixed point theorems for contractive mappings in metric spaces.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 341—344. (Original paper.)

Let (X, d) be a complete metric space. Two fixed point theorems are proved for contractive mappings $T : X \to X$ for which the distance $d(Tx, Ty)$ is estimated by all of the remaining distances between the points x, y, Tx and Ty.

I. I. MIKHAILOV (И. И. Михайлов), Иваного: *Некоторые диофантовы уравнения третьей степени.* (Some diophantine equations of the third degree.) Čas. pěst. mat. *105* (1980), 350—353. (Original paper.)

It is proved that there exist infinitely many parametric solutions in integers of the diophantine equation $x^3 + y^3 + z^3 + 2t^3 = 0$ and the system of diophantine equations $z^3 = x^3 + y^3 + 2t^3 = x_1^3 + y_1^3 + 2t_1^3 = x_2^3 + y_2^3 + 2t_2^3 = x_3^3 + y_3^3 + 2t_3^3$. In this note it is demonstrated that the diophantine equations $x^3 + y^3 + 2t^3 = \mu z^4$, $x^3 + y^3 + 2t^3 = z^{6k}$, $x^3 + y^3 + z^3 + 2t^{9k} = 0$ have infinitely many integral solutions as well.

JARMILA NOVOTNÁ, Praha: *Discrete analogues of Wirtinger's inequality for a two-dimensional array.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 354—362. (Original paper.)

In the paper discrete inequalities for finite double sums involving x_{ij}^2, $(x_{ij} - x_{i+1,j})^2 + (x_{ij} - x_{i,j+1})^2$ („symmetrical" case) and x_{ij}^2, $(x_{ij} - x_{i+1,j})^2$ („asymmetrical" case) are studied.

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha: *Eine isoperimetrische Ungleichung für die Paare der Raumkurven.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 363—367. (Originalartikel.)

Für die Längen dieser Kurven und für ein Seitenstück zu den gemischten Flächeninhalten ihrer Projektionen auf drei orthogonale Ebenen gilt eine Ungleichung, welche die alte isoperimetrische Ungleichung umfasst.

ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТЬЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В НАСТОЯЩЕМ НОМЕРЕ

(Эти характеристики позволено репродуцировать)

MIROSLAV SOVA, Praha: *Concerning the characterization of generators of distribution semigroups.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 329—340.

Характеризация производящих операторов дистрибутивных полугрупп. (Оригиналь ная статья.)

В статье приводится новая характеристика производящих операторов дистрибутивных полугрупп операторов, опирающаяся только на поведение резольвент на действительной полупрямой.

JANUSZ MATKOWSKI, Bielsko-Biała: *Fixed point theorems for contractive mappings in metric spaces.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 341—344.

Теоремы о неподвижной точке для сжимающих отображений в метрических пространствах. (Оригинальная статья.)

Пусть (X, d) — полное метрическое пространство. Доказываются две теоремы о неподвижной точке для сжимающих отображений $T: X \to X$, где расстояние $d(Tx, Ty)$ оценивается с помощью всех остальных расстояний точек x, y, Tx, Ty.

И. И. Михайлов, Иваного: *Некоторые диофантовы уравнения третьей степени.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 350—353. (Оригинальная статья.)

Известно, что существует бесконечно много параметрических решений в целых числах диофантового уравнения $x^3 + y^3 + z^3 + 2t^3 = 0$ и системы диофантовых уравнений $z^3 = x^3 + y^3 + 2t^3 = x_1^3 + y_1^3 + 2t_1^3 = x_2^3 + y_2^3 + 2t_2^3 = x_3^3 + y_3^3 + 2t_3^3$. В этой заметке доказывается, что диофантовы уравнения $x^3 + y^3 + 2t^3 = \mu z^4$, $x^3 + y^3 + 2t^3 = z^{6k}$ и $x^3 + y^3 + z^3 + 2t^{9k} = 0$ тоже имеют бесконечно много решений в целых числах.

JARMILA NOVOTNÁ, Praha: *Discrete analogues of Wirtinger's inequality for a two-dimensional array.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 354—362.

Дискретные аналогии неравенства Виртингера для двухмерного поле. (Оригинальная статья.)

В статье исследуются некоторые неравенства для конечных двойных сумм содержащих x_{ij}^2, $(x_{ij} - x_{i+1,j})^2 + (x_{ij} - x_{i,j+1})^2$ („симметрический" случай) и x_{ij}^2, $(x_{ij} - x_{i+1,j})^2$ („несимметрический" случай).

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha: *Eine isoperimetrische Ungleichung für die Paare der Raumkurven.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 363—367.

Одно изопериметрическое неравенство для пары пространственных кривых. (Оригинальная статья.)

Для длин этих кривых и для аналогов смешанных площадей их проекций на три ортогональные плоскости имеет место неравенство, включающее в качестве частного случая изопериметрическое неравенство.

MILOŠ BOŽEK, Bratislava: *Existence of generalized symmetric Riemannian spaces with solvable isometry group.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 368—384.

Существование обобщенных симметрических римановых пространств с разрешимой группой изометрий. (Оригинальная статья.)

Основной результат работы утверждает, что для всякого целого числа $m \geqq 4$ существует обобщенное симметрическое риманово пространство порядка m, диффеоморфное $\mathbf{R}^{m-1}$ и такое, что компонента единицы группы всех его изометрий разрешима.

VĚRA HOLAŇOVÁ-RADOCHOVÁ, Brno: *Fundamental solutions of the differential operator* $(-1)^n D_1^n D_2^n + a(\mathrm{i}D_1)^n + b(\mathrm{i}D_2)^n + c$. Čas. pěst. mat. *105* (1980), 385—390.

Фундаментальные решения дифференциального оператора $(-1)^n D_1^n \cdot D_2^n + a(\mathrm{i}D_1)^n + b(\mathrm{i}D_2)^n + c$. (Оригинальная статья.)

Для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами исследуются условия существования фундаментальных функций в пространствах обобщенных функций $\mathscr{B}_{p,k}$.

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha: *Differential equations with interface conditions.* Čas. pěst. mat. *105* (1980), 391—408.

Дифференциальные уравнения с межповерхностными условиями. (Оригинальная статья.)

В работе исследуются линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с межповерхностными условиями при помощи теории краевых задач для обобщенных дифференциальных уравнений.

MILOŠ BOŽEK, Bratislava: *Existence of generalized symmetric Riemannian spaces with solvable isometry group*. Čas. pěst. mat. *105* (1980), 368—384. (Original paper.)

The main result of the paper: for every even integer $m \geqq 4$ there is an irreducible generalized symmetric Riemannian space of the order m diffeomorphic to $\mathbf{R}^{m-1}$ and such that the identity component of its full isometry group is solvable.

VĚRA HOLAŇOVÁ-RADOCHOVÁ, Brno: *Fundamental solutions of the differential operator* $(-1)^n D_1^n D_2^n + a(\mathrm{i}D_1)^n + b(\mathrm{i}D_2)^n + c$. Čas. pěst. mat. *105* (1980), 385—390 (Original paper.)

For the operator with constant coefficients and for arbitrary n, conditions of existence of temperate fundamental solutions in the distribution spaces $\mathscr{B}_{p,k}$ are derived.

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha: *Differential equations with interface conditions*. Čas. pěst. mat. *105* (1980), 391—408. (Original paper.)

In the paper linear systems of ordinary differential equations with interface conditions are considered in terms of the theory of boundary value problems for generalized differential equations.