

Werk

Label: Article

Jahr: 1980

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0105|log68

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

EINE ISOPERIMETRISCHE UNGLEICHUNG FÜR GESCHLOSSENE KURVEN IM VIERDIMENSIONALEN RAUM

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingegangen am 5. Mai 1978)

Im vierdimensionalen euklidischen Raum E_4 wird ein System von Orthogonalkoordinaten x_i zugrunde gelegt; stets $i = 1, 2, 3, 4$. Es bezeichne $\mathcal{C}$ eine geschlossene rektifizierbare Kurve in E_4 mit dem Bogen s und mit der Gesamtlänge L ; es sei

$$(1) \quad x_i = x_i(\tau), \quad \tau = (2\pi/L)s \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

die Parameterdarstellung von $\mathcal{C}$. Die Funktionen x_i sind absolut stetig und haben fast überall die (stets mit Strich bezeichneten) Ableitungen nach τ , welche quadratisch integrierbar sind (vgl. [7], Abschn. 3).

Wir setzen

$$(2) \quad F_{ij} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x_i x'_j - x'_i x_j) d\tau, \quad (j = 1, 2, 3, 4; j \neq i);$$

wenn die totalorthogonale Projektion von $\mathcal{C}$ auf die Koordinatenebene $(x_i x_j)$ eine einfache Kurve ist, so ist $|F_{ij}|$ der Flächeninhalt des durch diese Projektion begrenzten Bereiches.

[Nach V. HLAVATÝ ([5], Band I, Kap. I, Abschn. I) stellen die Funktionale (2) einen K -Punkt dar; wenn wir also für eine andere Kurve $\mathcal{C}^*$ die Funktionale F_{ij}^* bilden, so ist

$$|F_{12}F_{34}^* + F_{13}F_{42}^* + F_{14}F_{23}^* + F_{34}F_{12}^* + F_{42}F_{13}^* + F_{23}F_{14}^*|$$

eine Bewegungsinvariante.]

I. J. SCHOENBERG [8] hat bewiesen, dass für eine Kurve $\mathcal{C}$, welche noch auf E_4 konvex ist, erstens $\frac{1}{6}|F_{12}F_{34} + F_{13}F_{42} + F_{14}F_{23}|$ das Volumen ihrer konvexen Hülle ist und zweitens die Ungleichung besteht:

$$(3) \quad L^4 - 2^7 \pi^2 (F_{12}F_{34} + F_{13}F_{42} + F_{14}F_{23}) \geq 0;$$

die Extremalkurven sind spezielle Hyperkreise.

L. BOČEK [3] hat gezeigt, dass

$$(4) \quad L^4 - 16\pi^2 \sum_{i < j} F_{ij}^2 \geq 0,$$

wo die Gleichheit nur für einen Kreis gelten kann (es handelt sich um das vierdimensionale Analogon zu einer Ungleichung in E_3 aus [2], S. 77).

Wir beweisen diesen Satz:

Es seien

$$(5) \quad c_{ij} = -c_{ji}$$

beliebige reelle Zahlen, welche nicht alle Null gleich sind. Wir setzen

$$(6) \quad C = \sum_{i < j} c_{ij}^2 > 0, \quad c = c_{12}c_{34} + c_{13}c_{42} + c_{14}c_{23}.$$

Für jede Kurve $\mathcal{C}$ gilt die Ungleichung

$$(7) \quad L^2 - 4\pi k^{-1} \sum_{i < j} c_{ij} F_{ij} \geq 0$$

mit

$$(8) \quad k = [\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}(C^2 - 4c^2)^{1/2}]^{1/2} > 0.$$

Das Gleichheitszeichen in (7) gilt dann und nur dann, wenn $\mathcal{C}$ ein Kreis ist, dessen Parameterdarstellung – falls sein Mittelpunkt zum Nullpunkt gewählt ist – folgendermassen geschrieben werden kann:

$$(9) \quad x_i = p_i \cos \tau + q_i \sin \tau,$$

wo die Konstanten p_i, q_i folgenden Gleichungen genügen:

$$(10) \quad kq_i + \sum_{j=1}^4 c_{ij}p_j = 0, \quad -kp_i + \sum_{j=1}^4 c_{ij}q_j = 0.$$

Für die weiteren geometrischen Eigenschaften der Extremalkreise siehe Abschn. 4. Im folgenden unterscheiden wir die entgegengesetzten Fälle

$$(11) \quad c_{12} = \varepsilon c_{34}, \quad c_{13} = \varepsilon c_{42}, \quad c_{14} = \varepsilon c_{23};$$

$$(12) \quad (c_{12} - \varepsilon c_{34})^2 + (c_{13} - \varepsilon c_{42})^2 + (c_{14} - \varepsilon c_{23})^2 > 0 \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Während im Fall (12) die Ebene des Extremalkreises (9) eindeutig als Durchschnitt folgender vier dreidimensionalen Räume

$$(13) \quad \begin{aligned} & (c_{12}c - k^2c_{34})x_2 + (c_{13}c - k^2c_{42})x_3 + \\ & \quad + (c_{14}c - k^2c_{23})x_4 = 0, \\ & (c_{21}c - k^2c_{43})x_1 + (c_{23}c - k^2c_{14})x_3 + \\ & \quad + (c_{24}c - k^2c_{31})x_4 = 0, \\ & (c_{31}c - k^2c_{24})x_1 + (c_{32}c - k^2c_{41})x_2 + (c_{34}c - k^2c_{12})x_4 = 0, \\ & (c_{41}c - k^2c_{32})x_1 + (c_{42}c - k^2c_{13})x_2 + (c_{43}c - k^2c_{21})x_3 = 0 \end{aligned}$$

bestimmt ist, gibt es im Fall (11) eine zweiparametrische Familie von solchen Ebenen (siehe wieder Abschn. 4).

Nach L. Boček [3] folgt aus (4) die Ungleichung

$$(14) \quad L^2 - 4\pi C^{-1/2} \sum_{i < j} c_{ij} F_{ij} \geq 0$$

mit der Gleichheit nur für einen Kreis, dessen Ebene aber schon wieder eine spezielle Lage in Bezug auf das Koordinatensystem hat. Wegen $k^{-1} \geq C^{-1/2}$ ist (7) schärfer als (14) ($k^{-1} = C^{-1/2}$ nur für $c = 0$).

Wir heben noch zwei Spezialfälle hervor:

a) Es sei

$$(15) \quad c_{14} = 0, \quad c_{24} = 0, \quad c_{34} = 0;$$

wegen der Ungleichung in (6) gilt (12). Dann reduziert sich die Ungleichung (7) mit k aus (8) auf

$$L^2 - 4\pi(c_{12}^2 + c_{23}^2 + c_{31}^2)^{-1/2} (c_{12}F_{12} + c_{23}F_{23} + c_{31}F_{31}) \geq 0$$

und das die Ebene des Extremalkreises bestimmende System (13) auf

$$x_4 = 0, \quad c_{32}x_1 + c_{13}x_2 + c_{21}x_3 = 0.$$

Es handelt sich also um das erwähnte Ergebnis von L. Boček [3] für $n = 3$ oder um den Fall der identischen Kurven aus [7] (siehe (8) in [7]).

b) Es sei $c_{12} \neq 0$, $c_{13} = c_{14} = c_{23} = c_{24} = c_{34} = 0$. Dann vereinfacht sich (7) auf $L^2 - 4\pi|c_{12}|^{-1} c_{12}F_{12} \geq 0$ und (13) auf $x_4 = 0$, $x_3 = 0$. Darin ist die klassische isoperimetrische Ungleichung enthalten.

Im Abschn. 1 motivieren wir die Wahl (8) der Konstante k , im Abschn. 2 beweisen wir die Ungleichung (7) und im Abschn. 3 entscheiden wir über die Gleichheitsbedingung.

1. Bekanntlich ist (vgl. [8], Abschn. 8 oder [7], Abschn. 3)

$$(1,1) \quad \int_0^{2\pi} (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2) d\tau = L^2/2\pi;$$

die durch $k/2\pi$ multiplizierte linke Seite in (7) ist folglich in Hinsicht auf (2) gleich (mit bisher unbestimmter Konstante $k > 0$)

$$(1,2) \quad \int_0^{2\pi} \{k(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2) - \sum_{i < j} c_{ij}(x_i x_j' - x_i' x_j)\} d\tau.$$

Angenommen, die Funktionen $x_i(\tau)$ seien zweiter Klasse. Die notwendigen Bedingungen für das Extremum des Funktional (1,2) führen zu den Eulerschen Gleichungen

gen. Sie bilden in diesem Fall für x'_i das d'Alembertsche System

$$(1,3) \quad kx''_i + \sum_{j=1}^4 c_{ij}x'_j = 0$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$(1,4) \quad \lambda^4 + Ck^{-2}\lambda^2 + c^2k^{-4}$$

(vgl. [6]). Die Nullstellen sind durch

$$(1,5) \quad \lambda^2 = [-C \pm (C^2 - 4c^2)^{1/2}] : (2k^2)$$

gegeben. Hier ist nach (6)

$$(1,6) \quad C^2 - 4c^2 = (c_{12}^2 + c_{23}^2 + c_{31}^2 - c_{14}^2 - c_{24}^2 - c_{34}^2)^2 + \\ + 4(c_{31}c_{14} + c_{32}c_{24})^2 + 4(c_{12}c_{24} + c_{13}c_{34})^2 + 4(c_{23}c_{34} + c_{21}c_{14})^2$$

und man bestätigt leicht, dass

$$(1,7) \quad C^2 - 4c^2 \begin{cases} > 0 & \text{im Falle (12),} \\ = 0 & \text{im Falle (11).} \end{cases}$$

Da bekanntlich die zur einfachen Wurzel λ von (1,4) zugehörige Lösung von (1,3) von der Gestalt $x_i = \gamma_i e^{\lambda \tau}$ mit $\gamma_i = \text{konst.}$ ist und da – wegen der Geschlossenheit der Kurve $\mathcal{C}$ und wegen der Wahl (1) des Parameters τ – nur periodische Lösungen mit der kleinsten Periode 2π in Betracht kommen, so ergibt sich daraus $\lambda = \pm i$. Nach (1,5) führt das für k entweder zu (8) oder zu $k = [\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}(C^2 - 4c^2)^{1/2}]^{1/2}$. Aber in diesem zweiten Fall (für genügend kleines c^2) ist k^{-1} beliebig gross.

2. In diesem Abschn. zeigen wir, dass das Funktional (1,2) mit k aus (8) nichtnegativ ist; dadurch wird die Ungleichung (7) bewiesen.

Für jedes $k > 0$ lässt sich (1,2) folgendermassen umformen:

$$(2,1) \quad \frac{1}{2}k \sum_{i=1}^4 \int_0^{2\pi} (x'_i + k^{-1} \sum_{j=1}^4 c_{ij}x_j)^2 d\tau + \frac{1}{2}k \sum_{i=1}^4 \int_0^{2\pi} (x_i'^2 - x_i^2) d\tau + \\ + \frac{1}{2}k \sum_{i=1}^4 \int_0^{2\pi} x_i^2 d\tau - \frac{1}{2}k^{-1} \sum_{i=1}^4 \int_0^{2\pi} (\sum_{j=1}^4 c_{ij}x_j)^2 d\tau.$$

Die erste Summe im Ausdruck (2,1) ist offenbar nichtnegativ und was es die nachfolgende Summe wieder (2,1) betrifft, so kann man die Nichtnegativität erreichen: Wir verschieben den Nullpunkt in den Schwerpunkt der Kurve $\mathcal{C}$; dabei bleiben die Funktionale (1,1) und (2) unverändert und für die Mittelwerte der Funktionen (1) auf $\langle 0, 2\pi \rangle$ gilt dann

$$(2,2) \quad \int_0^{2\pi} x_i(\tau) d\tau = 0,$$

so dass nach dem Lemma von W. WIRTINGER (siehe [1], Kap. V oder [4], Kap. VII) alle Integrale in der zweiten Zeile in (2,1) auch nichtnegativ sind.

Die zweite Zeile von (2,1) lässt sich folgenderweise schreiben:

$$(2,3) \quad \frac{1}{2}k^{-1} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^4 (k^2 - \sum_{j=1}^4 c_{ij}^2) x_i^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^4 \left(\sum_{l=1}^4 c_{il} c_{jl} \right) x_i x_j \right\} d\tau ;$$

stets haben wir (5) benutzt.

Im weiteren bleiben wir bei k aus (8).

In dem zu (12) entgegengesetzten Fall (11) folgt aus (5), (6), (8), dass $k^2 = \sum_{j=1}^4 c_{ij}^2$,

$\sum_{l=1}^4 c_{il} c_{jl} = 0$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$; $i \neq j$) ist und dass die Form in den Klammern $\{ \}$ in (2,3) identisch verschwindet.

Im Fall (12) ist nach (8) und (1,7)

$$(2,4) \quad 2k^2 - C = (C^2 - 4c^2)^{1/2} > 0$$

und die Form in den Klammern $\{ \}$ in (2,3) ist gleich der durch die Konstante $k^2(2k^2 - C) > 0$ dividierten Form

$$(2,5) \quad \begin{aligned} & [(c_{12}c - k^2c_{34})x_2 + (c_{13}c - k^2c_{42})x_3 + \\ & \quad + (c_{14}c - k^2c_{23})x_4]^2 + \\ & + [(c_{21}c - k^2c_{43})x_1 + (c_{23}c - k^2c_{14})x_3 + \\ & \quad + (c_{24}c - k^2c_{31})x_4]^2 + \\ & + [(c_{31}c - k^2c_{24})x_1 + (c_{32}c - k^2c_{41})x_2 + (c_{34}c - k^2c_{12})x_4]^2 + \\ & + [(c_{41}c - k^2c_{32})x_1 + (c_{42}c - k^2c_{13})x_2 + (c_{43}c - k^2c_{21})x_3]^2. \end{aligned}$$

Man verifiziert das nach einfachen Umformungen auf Grund von (5), (6) und (2,4).

Somit haben wir die Nichtnegativität des Ausdruckes (2,1) oder (1,2) – und folglich auch die Ungleichung (7) – bewiesen.

3. Um jetzt über die Gleichheitsbedingung in (7) zu entscheiden, müssen wir bestimmen, wann die Summen in den zwei Zeilen von (2,1), deren Nichtnegativität wir im Abschn. 2 schrittweise bewiesen haben, verschwinden.

Für die erste Summe in (2,1) ist das genau dann der Fall, wenn

$$(3,1) \quad x'_i + k^{-1} \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_j = 0.$$

Die nachfolgende Summe wieder in (2,1) verschwindet nach dem Lemma von W. Wirtinger unter der Bedingung (2,2) dann und nur dann, wenn

$$(3,2) \quad x_i(\tau) = p_i \cos \tau + q_i \sin \tau \quad (p_i, q_i = \text{konst.}).$$

Die zweite Zeile von (2,1) verschwindet im Fall (11) identisch und im Fall (12) nach (2,5) dann und nur dann, wenn die Gleichungen (13) gelten. Man bestätigt unter Zuhilfenahme von (5), (6) und (8) oder (2,4), dass im Falle (12) der Rang der Matrix des Gleichungssystems (13) gleich 2 ist.

Die Konstanten p_i, q_i in (3,2) müssen so gewählt werden, dass (3,2) eine Lösung von (3,1) ist. Daraus ergeben sich die Bedingungen

$$(3,3) \quad kq_i + \sum_{j=1}^4 c_{ij}p_j = 0, \quad -kp_i + \sum_{j=1}^4 c_{ij}q_j = 0.$$

Die Elimination von q_j liefert

$$(3,4) \quad k^2 p_i + \sum_{j=1}^4 \sum_{l=1}^4 c_{ij} c_{jl} p_l = 0$$

oder in ausführlicher Schreibweise

$$\begin{aligned} & p_1(k^2 - c_{12}^2 - c_{13}^2 - c_{14}^2) - p_2(c_{13}c_{23} + c_{14}c_{24}) - \\ & - p_3(c_{12}c_{32} + c_{14}c_{34}) - p_4(c_{12}c_{42} + c_{13}c_{43}) = 0, \\ & - p_1(c_{23}c_{13} + c_{24}c_{14}) + p_2(k^2 - c_{21}^2 - c_{23}^2 - c_{24}^2) - \\ & - p_3(c_{21}c_{31} + c_{24}c_{34}) - p_4(c_{21}c_{41} + c_{23}c_{43}) = 0, \\ & - p_1(c_{32}c_{12} + c_{34}c_{14}) - p_2(c_{31}c_{21} + c_{34}c_{24}) + \\ & + p_3(k^2 - c_{31}^2 - c_{32}^2 - c_{34}^2) - p_4(c_{31}c_{41} + c_{32}c_{42}) = 0, \\ & - p_1(c_{42}c_{12} + c_{43}c_{13}) - p_2(c_{41}c_{21} + c_{43}c_{23}) - \\ & - p_3(c_{41}c_{31} + c_{42}c_{32}) + p_4(k^2 - c_{41}^2 - c_{42}^2 - c_{43}^2) = 0. \end{aligned}$$

Von jetzt ab unterscheiden wir die entgegengesetzten Fälle (11) und (12).

Im Fall (11) *verschwindet das System (3,4) identisch*, wie leicht aus (5), (6) und (8) folgt, und die Systeme (3,3) sind äquivalent. Folglich gilt in (7) das Gleichheitszeichen nur für (9) $\equiv$ (3,2) mit (10) $\equiv$ (3,3).

Im Fall (12) zeigen wir zuerst, dass der Rang der Matrix des Systems (3,4) mindestens 2 ist, dass also die Lösung von (3,4) höchstens von 2 Parametern α, β abhängt. Es bezeichne Δ_{ij} ($i < j$) die aus den i -ten und j -ten Reihen der Matrix von (3,4) gebildete Hauptdeterminante. Unter Verwendung von (5), (6) und (2,4) erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= (c_{34}^2 - c_{12}^2)k^2 + c_{12}^2 C - 2c_{12}c_{34}c, \\ \Delta_{34} &= (c_{12}^2 - c_{34}^2)k^2 + c_{34}^2 C - 2c_{34}c_{12}c \end{aligned}$$

und ähnliche Ausdrücke für Δ_{13}, Δ_{24} und Δ_{14}, Δ_{23} . Angenommen, alle Δ_{ij} verschwinden. Die Elimination von c aus Δ_{12}, Δ_{34} bzw. aus Δ_{13}, Δ_{24} bzw. aus Δ_{14}, Δ_{23} liefert

$$\begin{aligned} (c_{34}^2 - c_{12}^2)(2k^2 - C) &= 0, \quad (c_{42}^2 - c_{13}^2)(2k^2 - C) = 0, \\ (c_{23}^2 - c_{14}^2)(2k^2 - C) &= 0, \end{aligned}$$

was aber in Hinsicht auf (2,4) und (12) ein Widerspruch ist.

Zweitens zeigen wir: Ist

$$(3,5) \quad k^2 \neq c_{12}^2 + c_{23}^2 + c_{31}^2,$$

so ist die allgemeine Lösung von (3,4) durch

$$(3,6) \quad \begin{aligned} p_1 &= \alpha(c_{23}c - k^2c_{14}) + \beta k(c_{12}c_{24} + c_{13}c_{34}), \\ p_2 &= \alpha(c_{31}c - k^2c_{24}) + \beta k(c_{21}c_{14} + c_{23}c_{34}), \\ p_3 &= \alpha(c_{12}c - k^2c_{34}) + \beta k(c_{31}c_{14} + c_{32}c_{24}), \\ p_4 &= \beta k(-k^2 + c_{12}^2 + c_{23}^2 + c_{31}^2) \end{aligned}$$

gegeben. Ist dagegen

$$(3,7) \quad k^2 = c_{12}^2 + c_{23}^2 + c_{31}^2,$$

so lautet die allgemeine Lösung von (3,4) bei $c_{23} \neq 0$ folgendermassen:

$$(3,8) \quad \begin{aligned} p_1 &= \alpha k c_{31} + \beta k c_{12}, \\ p_2 &= -\alpha k c_{23}, \\ p_3 &= -\beta k c_{23}, \\ p_4 &= 0. \end{aligned}$$

Es genügt zu beweisen, dass (3,6) und (3,8) für $\alpha = 1, \beta = 0$ oder $\alpha = 0, \beta = 1$ linear unabhängige Lösungen von (3,4) sind.

Wir beginnen mit (3,5).

Eine längere Rechnung, welche sich auf (5), (6) und (2,4) stützt, führt zur Feststellung, dass (3,6) für $\alpha = 1, \beta = 0$ oder $\alpha = 0, \beta = 1$ tatsächlich die Lösungen von (3,4) sind. Angenommen, sie seien abhängig. Wegen (3,5) wäre dann $c_{14} = c_{23}ck^{-2}$, $c_{24} = c_{31}ck^{-2}$, $c_{34} = c_{12}ck^{-2}$, also $k^2c = c(c_{12}^2 + c_{23}^2 + c_{31}^2)$ nach (6). Für $c \neq 0$ ist das im Widerspruch mit (3,5). Für $c = 0$ wäre $c_{14} = c_{24} = c_{34} = 0$ und (8) gäbe den Widerspruch mit (3,5).

Gilt dagegen (3,7), so folgt daraus unter Zuhilfenahme von (8) und (6) nach einfachen Umformungen

$$(3,9) \quad (c_{12}c_{24} + c_{13}c_{34})^2 + (c_{21}c_{14} + c_{23}c_{34})^2 + (c_{31}c_{14} + c_{32}c_{24})^2 = 0.$$

Aus der Ungleichung in (8), aus (3,9), (6) und (3,7) ergibt sich

$$(3,10) \quad c_{14} = c_{23}ck^{-2}, \quad c_{24} = c_{31}ck^{-2}, \quad c_{34} = c_{12}ck^{-2}; \quad ck^{-2} \neq \pm 1,$$

weil wir den Fall (12) betrachten. Das System (3,4) reduziert sich dann auf

$$p_1c_{23} + p_2c_{31} + p_3c_{12} = 0, \quad p_4 = 0.$$

Die zu (3,6) oder (3,8) zugehörigen Konstanten q_i ergeben sich aus (3,3):

$$(3,6^*) \quad \begin{aligned} q_1 &= \alpha k(c_{12}c_{24} + c_{13}c_{34}) - \beta(c_{23}c - k^2c_{14}), \\ q_2 &= \alpha k(c_{21}c_{14} + c_{23}c_{34}) - \beta(c_{31}c - k^2c_{24}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_3 &= \alpha k(c_{31}c_{14} + c_{32}c_{24}) - \beta(c_{12}c - k^2c_{34}), \\
q_4 &= \alpha k(-k^2 + c_{12}^2 + c_{23}^2 + c_{31}^2); \\
(3,8^*) \quad q_1 &= \alpha c_{12}c_{23} - \beta c_{23}c_{31}, \\
q_2 &= \alpha c_{12}c_{31} + \beta(c_{12}^2 + c_{23}^2), \\
q_3 &= -\alpha(c_{23}^2 + c_{31}^2) - \beta c_{12}c_{31}, \\
q_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Auf Grund von (5), (6) und (2,4) verifizieren wir, dass x_i aus (3,2) mit p_i und q_i aus (3,6) und (3,6*) oder (3,8) und (3,8*) auch die Gleichungen (13) befriedigen; bei (3,8) und (3,8*), d. h. für (3,7), benutzt man auch (3,10) (vgl. Abschn. 4, Fall (12) mit (3,7)).

4. Es bleibt noch, den geometrischen Sinn der obigen Lösungen zu erklären. Wir bezeichnen mit $\mathbf{y}$ den im Nullpunkt gebundenen Vektor (y_1, y_2, y_3, y_4) .

Im Fall (11) ist nach (3,3), (5), (6) und (8)

$$(4,1) \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0.$$

Folglich ist (3,2) $\equiv$ (9) für $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} > 0$ die Parameterdarstellung eines Kreises in der durch $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ aufgespannten Ebene. Diese Ebene hängt von zwei Parametern ab.

Im Fall (12) mit (3,5) folgt aus (3,6) und (3,6*) in Hinsicht auf (5), (6) und (2,4), dass wieder (4,1) gilt. Diesmal ist die Ebene des Extremalkreises als Durchschnitt der vier Räume (13) eindeutig bestimmt.

Im Fall (12) mit (3,7) gilt ebenso (4,1). Nun reduziert sich nach (3,10) das die Ebene des Extremalkreises bestimmende System (13) auf $x_1c_{23} + x_2c_{31} + x_3c_{12} = 0$, $x_4 = 0$ (vgl. dazu die Ungleichung aus dem Absatz a) in der Einleitung).

Das 6-Tupel $\mathbf{C} = (c_{12}, c_{23}, c_{31}; c_{34}, c_{14}, c_{24})$ ist ein Bivektor dann und nur dann, wenn c aus (6) verschwindet, d. h. wenn $\mathbf{C}$ der Plückerschen Relation genügt. Ist das der Fall und setzen wir $\mathbf{c}_i = (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4})$ ($c_{ii} = 0$), so ist $\mathbf{c}_i \wedge \mathbf{c}_j = c_{ij}\mathbf{C}$. Das 6-Tupel

$$\mathbf{C}^* = (c_{12}^* = c_{34}, c_{23}^* = c_{14}, c_{31}^* = c_{24}; c_{34}^* = c_{12}, c_{14}^* = c_{23}, c_{24}^* = c_{31})$$

bildet einen Bivektor unter derselben Bedingung $c = 0$. Sind $\mathbf{C}$ und $\mathbf{C}^*$ die Bivektoren, so sind sie orthogonal in dem Sinne, dass jeder der Vektoren $\mathbf{c}_i$ zu jedem der Vektoren $\mathbf{c}_i^*$ orthogonal ist.

Dagegen das 6-Tupel

$$\begin{aligned}
(4,2) \quad c\mathbf{C} - k^2\mathbf{C}^* &= (cc_{12} - k^2c_{34}, cc_{23} - k^2c_{14}, cc_{31} - k^2c_{24}; \\
&\quad cc_{34} - k^2c_{12}, cc_{14} - k^2c_{23}, cc_{24} - k^2c_{31})
\end{aligned}$$

ist immer ein Bivektor, da nach (5), (6) und (2,4) die Plückersche Relation erfüllt ist.