ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 105 * PRAHA 25. 8. 1980 * ČÍSLO 3

O JISTÝCH ROVINNÝCH KONFIGURACÍCH $(12_4, 16_3)$ OBSAHUJÍCÍCH *B*, *C* A *E*-BODY A KONFIGURACÍCH SINGULÁRNÍCH

VÁCLAV METELKA, Liberec

(Došlo dne 27. listopadu 1975)

ÚVOD

V této úvodní kapitole dovolím si zopakovat některé základní pojmy a definice z teorie rovinných konfigurací a to pouze v minimálním rozsahu, potřebném k pochopení problematiky, jíž se tato práce týká.

V konfiguracích $(12_4, 16_3)$ je – jak známo – dvanáct konfiguračních bodů a šestnáct konfiguračních přímek uspořádáno v projektivní rovině tak, že každým z těchto bodů procházejí čtyři přímky a na každé z těchto přímek leží tři body.

Systematické vyhledávání konfigurací si vyžádalo zavedení jisté klasifikace, o níž se stručně zmíním.

Definice 1. Konfigurační body označme čísly $1, 2, 3, \ldots, 12$. Leží-li dva z konfiguračních bodů (třeba 1 a 2) na konfigurační přímce, pak říkáme, že tyto body jsou *spojeny* (což stručně zapisujeme 1-2). V opačném případě jsou body 1 a 2 od sebe *odděleny* (stručně $1 : 2$). Konfigurační přímku, na níž leží body $1, 2, 3$ označíme 1-2-3.

Umluvme se ještě, že v dalším (pokud to nepovede k nedorozumění) budeme slovo „konfigurační" vynechávat, neboť o jiných bodech a přímkách se v této práci téměř nemluví.

V konfiguraci $(12_4, 16_3)$, jak již bylo řečeno, prochází každým bodem čtveřice přímek. Je tedy každý bod spojen s osmi body dalšími, to znamená, že od tří bodů je oddělen.

Definice 2. Nechť bod 4 je oddělen od bodů $1, 2, 3$ (stručně $4 : 1, 2, 3$). Říkáme, že bod 4 je typu A, jestliže $1 : 2, 3$ a také $2 : 3$, B, jestliže 1-2, 1-3, 2-3, ale ne 1-2-3, C, jestliže jen dva z bodů $1, 2, 3$ jsou odděleny, D, jestliže jen dva z bodů $1, 2, 3$ jsou spojeny, E, jestliže 1-2-3.

Snadno zjistíme, že tím jsou vyčerpány všechny možnosti. Podaří-li se nám uspořádat všech dvanáct bodů do šestnácti trojic (přímek) tak, by bylo vyhověno základní definici, že každý bod se vyskytuje ve čtyřech z těchto trojic, pak dostaneme tak zvané *konfigurační schéma*. Nutno ovšem ještě dokázat, že toto schéma je skutečně realisovatelné v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel, čili, že skutečně representuje konfiguraci. Ke každému *realisovatelnému* schématu existuje tedy jedna konfigurace, ale ne naopak. Snadno totiž uvážíme, že geometrické vlastnosti konfigurace se nemění při libovolné permutaci bodů *1, 2, 3, ..., 12*, ale touto permutací se změní schéma:

Definice 3. Jestliže lze jedno konfigurační schéma získat z druhého některou z permutací bodů *1, 2, ..., 12*, pak říkáme, že obě tato schémata patří do *téže třídy*. Dvě konfigurace pokládáme za *ekvivalentní* tehdy a jen tehdy, jestliže jejich schémata patří do téže třídy.

Přistoupíme nyní k vlastní klasifikaci. Je nutno především zjistit, kolik bodů typu A, B, ... atd. se v konfiguraci vyskytuje. Tím získáme její typ. Tak ku příkladu říkáme, že konfigurace *je typu* $B_3C_6E_3$, jestliže obsahuje tři body typu B, šest bodů typu C a tři E-body. Je zřejmé, že dvě konfigurace různých typů nemohou být ekvivalentní. S druhé strany se ukazuje, že klasifikace konfigurací jen podle typů je stále velmi hrubá a je třeba zavést kriteria podstatně kontrastnější. Jednou z cest je ku příkladu tato:

Předpokládejme, že *4* je bod typu C, oddělený od bodů *1, 2, 3*, a nechť třeba *1-2*, *2-3*, *1 : 3*. Snadno se přesvědčíme, že na dvou ze šestnácti přímek nemůže ležet žádný z bodů *1, 2, 3, 4*. Podle toho, zda tyto dvě přímky se protínají v bodě konfiguračním, nebo nekonfiguračním může zkoumaný bod *4* zařadit do jednoho z typů C^1, nebo C^2.

Zcela obdobná úvaha platí i pro E-body, což shrnujeme v následující definici:

Definice 4. Buď *4* bod typu C (resp. E), oddělený od bodů *1, 2, 3*. Pak existují dvě přímky (p, q), na nichž neleží žádný z bodů *1, 2, 3, 4*. Protínají-li se přímky p, q v konfiguračnim bodě, říkáme, že *4* je typu C^1 (resp. E^1). V opačném případě je bod *4* typu C^2, (resp. E^2).

U bodů typu B je situace poněkud komplikovanější, neboť zde existuje dokonce trojice přímek, na nichž neleží ani zkoumaný B-bod, ani žádný z bodů od nichž je oddělen. Tato okolnost nám ovšem umožní další klasifikaci B-bodů a proto jí využijeme:

Definice 5. Buď *4* konfigurační bod typu B, oddělený od bodů *1, 2, 3*. Pak existují tři přímky (p, q, r), na nichž neleží žádný z bodů *1, 2, 3, 4*. Jestliže se přímky p, q, r protínají ve třech různých bodech, pak buď jeden, nebo dva, nebo všechny tři jsou konfigurační a bod *4* je buď typu B^1, nebo B^2, nebo B^3. V ostatních případech říkáme, že bod *4* je typu B^4.

Poznámka. Uvažme, že v případě B^4-bodu se přímky p, q, r protínají vždy v jednom bodě a to konfiguračním.

Zajisté by bylo možno uvažovat o obdobné klasifikaci také v případě bodů typu A a D. Jak plyne z dalšího je to však již zbytečné.

Dosud byly v literatuře popsány všechny konfigurace obsahující nejméně jeden bod typu A, nebo D. Kromě toho jsou již také známy všechny konfigurace typu $C_{12-i}E_i$, kde $i = 0, 1, 2, \ldots, 12$. Z toho plyne, že zbývá zkoumat již jen konfigurace, obsahující aspoň jeden B-bod.

Tento úkol je velmi rozsáhlý a zaměřil jsem se proto v této práci pouze na konfigurace, obsahující kromě C a E-bodů nejméně jeden bod typu B^3 a žádný bod typu B^4.

KAPITOLA 1

Cílem této kapitoly je vyhledat všechna konfigurační schémata podle pokynů posledního odstavce úvodní kapitoly.

Nechť tedy *1* je B^3-bod, oddělený od bodů *2, 3, 4*. Pak existuje trojice přímek, na nichž neleží žádný z bodů *1, 2, 3, 4* a kromě toho se tyto tři přímky protínají ve třech konfiguračních bodech. Označme je *5, 7, 9* a přímky *5-6-7*, *5-8-9*, *7-0-9*. Zbývající dva konfigurační body nechť jsou P a Q.

Zvláštní postavení trojice bodů *5, 7, 9* a dvojice P, Q vzhledem k bodu *1* nám umožňuje ještě kontrastněji klasifikovat B^3-body a usnadňuje tak zjišťování ekvivalence.

Definice 1.1. Jestliže na přímkách *1-5-.*, *1-7-.*, *1-9-.* neleží žádný z bodů P, Q, pak říkáme, že B^3-bod *1* je typu B^{30}. Obdobně, leží-li na těchto přímkách jen jeden (resp. oba dva) z bodů P, Q, pak říkáme, že B^3-bod *1* je typu B^{31} (resp. B^{32}). Body P, Q nazveme póly B^3-bodu *1*.

Poznamenávám, že mnohdy je přehlednější použít ještě jiného zápisu konfiguračních přímek, protínajících se v jednom konfiguračním bodě. Tak ku příkladu přímky z předchozí definice lze zapsat také ve tvaru:

$$\begin{array}{c} \underline{\quad 1 \quad} \\ 5\ 7\ 9 \\ .\ .\ . \end{array}.$$

Známe zatím tři konfigurační přímky (*5-6-7*, *5-8-9*, *7-0-9*). Zapišme je spolu se zbývajícími třinácti přímkami do následujícího (symbolického) schéma:

$$(1)\qquad \begin{array}{cccccc} 2\text{-}3\text{-}. & \underline{\;2\;} & \underline{\;3\;} & \underline{\;4\;} & \underline{\quad 1 \quad} & 5\text{-}6\text{-}7 \\ 2\text{-}4\text{-}. & .\ . & .\ . & .\ . & 5\ 7\ 9\ . & 5\text{-}8\text{-}9 \\ 3\text{-}4\text{-}. & .\ . & .\ . & .\ . & .\ .\ .\ . & 7\text{-}0\text{-}9 \\ \\ (q) & (r) & (s) & (t) & (u) & \end{array}.$$

Předpoklad I. *Předpokládejme existenci nejméně jednoho B^{30}-bodu.*

Uvažovaný B^{30}-bod označíme ovšem *1* a použijeme zápisu (1). Vzhledem k vlastnostem B^{30}-bodu musí tedy být

$$(\mathrm{I}.1)\qquad \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{1} \\ \hline 5 & 7 & 9 & P \\ 0 & 8 & 6 & Q \end{array}; \qquad P, Q \in (\mathrm{r}), (\mathrm{s}), (\mathrm{t}) \Rightarrow 6 : 8, 0;\ 8 : 0 .$$

Předpoklad I.1. *Předpokládejme existenci nejméně jednoho B^{30}-bodu, jehož oba póly jsou typu E.*

Zkoumaný B^{30}-bod označíme opět *1*, abychom mohli využít zápisů (1) a (I.1). Body P, Q jsou tedy oba typu E a nemohou být oba odděleny do téže trojice (pak by totiž oba byly typu B^4).*) Přicházejí tedy v úvahu jen následující tři možnosti

$$(5, 6, 7;\ 5, 8, 9),\quad (5, 6, 7;\ 7, 0, 9),\quad (5, 8, 9;\ 7, 0, 9)$$

(od první trojice je oddělen jeden z bodů P, Q, od druhé druhý). Uvažme, že schéma (1) a výsledek (I.1) se nemění permutací (*68*), (*79*) a vzhledem k této permutaci jsou ekvivalentní poslední dvě z předchozích možností. Zbývá tedy nadále uvažovat jen první dvě možnosti, ale ty jsou rovněž ekvivalentní vzhledem k přípustné permutaci (*597*), (*680*). Můžeme dokonce předpokládat, že je přímo

$$P : 5, 6, 7;\ Q : 5, 8, 9 ,$$

protože i (PQ) je permutace přípustná. Bod P je tedy spojen s body *8*, *9*, *0* a libovolná permutace bodů *2*, *3*, *4* připouští volbu

$$\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{P} \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 0 \end{array},$$

z čehož plyne *3-4-8* a body *5*, *6* patří do (q).

Dále mohou nastat již jen dva případy

a) buď je *5* : *3*, pak *2-4-5*, *2-3-6*, *4-Q-6*, *4* : *1*, *7*, *9* a musí být *2-7* (jinak by totiž bod *2* byl typu B^4), čili *2-7-Q*, *3-Q-0*. Tak jsme dostali první úplné schéma, které jsem označil N-1 a je uvedeno v následující kapitole ve skupině N-schémat.

b) zbývá ještě uvažovat případ, kdy *5-3*, pak ovšem musí být *2-3-5*, *2-4-6*, *4-Q-7*, *2-Q-0*, *3-Q-6* a dostáváme další schéma, které však již registrovat nebudeme, neboť vzhledem k permutaci (*243*), (*68*), (*79*), (PQ) přechází na tvar předchozího schématu N-1.

Tím jsou vyčerpána všechna schémata z předpokladu P.I.1.

---

*) Lze velmi snadno dokázat, že nutná a postačující podmínka, aby dva konfigurační body U, V byly odděleny od téže trojice zní: oba body U, V jsou typu B^4.

Předpoklad I.2. *Předpokládejme existenci aspoň jednoho B^{30}-bodu, jehož jeden pól je typu E.*

Opět, jako v předchozích případech označíme zkoumaný B^{30}-bod *1* a využijeme předchozích výsledků, tedy (1) a (I.1). Vzhledem k předpokladu I.1 je jen jeden z bodů P, Q typu E a permutace (PQ) umožňuje předpokládat, že je to bod P. Ten je oddělen buď od trojice $5, 6, 7$, nebo od $5, 8, 9$, nebo $7, 0, 9$. Přípustné permutace (68), (79) a (597), (680) dovolují předpoklad $P : 5, 6, 7$, z čehož plyne $6 : 8, 0, P$. Vidíme, že bod Q je oddělen od tří bodů množiny $(5, 7, 8, 9, 0)$, takže vzhledem k přípustné permutaci (57), (80) nastane jedna z možností:

$$Q : (5, 7, 8;\ 5, 7, 9;\ 5, 8, 9;\ 5, 8, 0;\ 5, 9, 0;\ 8, 9, 0)\,.$$

Z těchto případů možno ovšem ihned vyloučit $Q : 5, 8, 9$, neboť bod Q již nesmí být typu E a kromě toho oba případy $Q : 8, 0$ (V takovém případě by totiž bod *8* byl typu D). Protože bod *9* je spojen s bodem P, musí být již oddělen do bodu Q (aby jím procházely jen čtyři konfigurační přímky). Z těchto úvah je patrno, že je vždy $Q : 5, 9, T$, kde $T = 7, 0$. Libovolná permutace bodů $2, 3, 4$ nám umožňuje ještě volbu přímek $2\text{-}Q\text{-}6$, $3\text{-}4\text{-}6$, $2\text{-}3\text{-}5$ a protože bod *8* je spojen s oběma body P, Q, nemůže patřit do množiny (q). Tyto výsledky shrneme:

(a) $\quad 2\text{-}3\text{-}5,\ 2\text{-}Q\text{-}6,\ 3\text{-}4\text{-}6,\ \dot{P} : 5, 6, 7;\ Q : 5, 9, T,\quad \text{kde}\quad T = 7, 0 \quad \text{a} \quad 8 \notin (\text{q})\,.$

Uvažujme nejprve případ $T = 0$, tedy $Q : 5, 9, 0$; $0 : 6, 8, Q$, $2\text{-}4\text{-}0$, $3\text{-}P\text{-}0$ a musí být ještě $2\text{-}8$ (v opačném případě totiž je $2 : 1, 7, 8$; $9 : 3, 4, Q$, takže bod *9* je typu B^{30} a oba jeho póly jsou typu E. Takové konfigurace jsme však již hledali za předpokladu I.1). Je tedy $2\text{-}8\text{-}P$, $4\text{-}8\text{-}Q$ (aby bod *2* nebyl typu B^4) a poslední dvě přímky tohoto schématu jsou $4\text{-}P\text{-}9$ a $3\text{-}Q\text{-}7$. Toto úplné schéma je uvedeno v následující kapitole v tabulce R-schémat. Je to schéma R-1.

Zbývá řešit případ $T = 7$, tedy $Q : 5, 7, 9$, čili $2\text{-}4\text{-}7$, $9 : 2$ (jinak bod *8* je typu D). Uvážíme nejprve, že jsou vyloučeny případy $4\text{-}P\text{-}0$ a také $0 : 4$. V prvém z těchto případů je totiž $4\text{-}Q\text{-}8$, $3\text{-}P\text{-}9$, $3\text{-}Q\text{-}0$, $2\text{-}P\text{-}8$ a bod *9* je typu B^{30}, jehož oba póly jsou typu E, právě tak jako v případě druhém, kdy $4\text{-}Q\text{-}8$, $4\text{-}P\text{-}9$.

Shrnujeme: $Q : 5, 7, 9$; $2\text{-}4\text{-}7$, $9 : 2$ a protože je $4\text{-}0$, ale na této přímce nesmí ležet bod P, pak $4\text{-}0\text{-}Q$, $3\text{-}Q\text{-}8$ a mohou nastat dva případy:

1	5-6-7	2	3	4
5 7 9 P	5-8-9	3 4 P Q	4 P Q	P Q
0 8 6 Q	7-0-9	5 7 a 6	6 b 8	c 0

, kde $a = 8, 0$; $b = 9, 0$; $c = 8, 9$.

V případě $a = 8$, tedy $b = 0$, $c = 9$ dostaneme schéma ekvivalentní s již registrovaným R-1 vzhledem k permutaci (19), (23), $(4Q)$, (80).

Rovněž v případě druhém, kdy $a = 0$, $b = 9$, $c = 8$ přechází toto schéma permutací (19), $(23Q4)$, (57) na schéma R-1. Tím jsou vyčerpány všechny případy za předpokladu I.2. Z toho plyne, že nadále již za předpokladu I žádný z pólů B^{30}-bodu nesmí již být typu *E*. Schéma však musí obsahovat aspoň jeden *E*-bod a je to zřejmě jeden z bodů *2, 3, 4*. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že je to bod *2* a pak tedy buď *2 : 1, 5, 0*, nebo *2 : 1, 7, 8*, nebo *2 : 1, 6, 9*. Vzhledem k permutacím (*79*), (*68*) a (*57*), (*80*) vidíme, že tyto možnosti jsou ekvivalentní a možno tedy vždy volit *2 : 1, 7, 8*, pak ale bod *5* je oddělen od tří bodů z množiny (*3, 4, P, Q*) a je vždy typu B^{30}. Kromě toho jeden z jeho pólů (bod *2*) je vždy typu *E*. Nemůžeme tedy již dostat žádné nové schéma a všechna schémata za předpokladu I jsou již registrována.

Předpoklad II. *Předpokládejme nadále, že konfigurační schéma obsahuje (kromě E a C-bodů) aspoň jeden bod typu* B^{31}, *ale již žádný bod typu* B^{30} *(a ovšem také žádný z bodů* B^4, *A, D).*

Zkoumaný B^{31}-bod označíme opět *1* a využijeme zápisu (1). Podle předpokladu jen jeden z bodů *P, Q* leží na jedné z přímek *1-5, 1-7, 1-9*. Vzhledem k přípustným permutacím (*57*), (*80*); (*59*), (*60*) a (*PQ*) lze přímo předpokládat:

$$\text{(II)} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ \hline 5\ 7\ 6\ 9 \\ 0\ 8\ Q\ P \end{array} ; \quad P, Q \in (\mathrm{r}), (\mathrm{s}), (\mathrm{t}) ; \quad 8 : 0 .$$

Okamžitě totiž uvážíme, že body *P, Q* patří do všech třech množin (r), (s), (t), neboť jinak by jimi neprocházely čtyři konfigurační přímky a zbývá již jen dokázat, že je *8 : 0*. Předpokládejme na chvíli, že je *8-0*, pak především možno volit *8-0-2* a z toho plyne *2-P-Q*, *6 : 8, 9, 0*. Vzhledem k přípustné permutaci (*34*) lze nadále volit *6-P-3*, z čehož *2-4-6*. Nyní se již snadno přesvědčíme, že schéma neobsahuje *C*-body a v tom je spor. Je tedy skutečně také *8 : 0*.

(a) *Nechť zkoumaný* B^{31}*-bod 1 má oba póly typu E.*

Pak především mustí být *P : 5, 6, 7* a možno volit *2-P-Q*, *3-P-8*, *4-P-0* a protože bod *6* nepatří do žádné z množin (s), (t), je *3-4-6*. Bod *Q* je podle předpokladu také typu *E* a je tedy oddělen od jedné z trojic (*5, 8, 9*), (*7, 0, 9*). Permutace (*57*), (*80*), (*34*) připouští předpoklad *Q* : *7, 0, 9*, takže *8-Q-4*, *3-Q-5* a má-li schéma obsahovat aspoň jeden *C*-bod, musí být *6 : 0*, tedy *2-6-9*, *2-4-7*, *2-3-0*. Tím jsme dostali úplné schéma R-2.

(b) *Nechť 6-9 a bod Q je typu E.*

Pak *9 : 3, 4, Q*, čili bod *Q* je oddělen od jedné z trojic (*5, 8, 9*), (*7, 0. 9*). Vzhledem k permutaci (*57*), (*80*) lze předpokládat *Q : 5, 8, 9* a libovolná permutace bodů *2, 3, 4* připouští volbu přímek *2-6-9*, *2-P-Q*, *Q-7-3*, *Q-0-4*. Z toho *8 : 6, 0, Q* a bod *P* již nesmí být typu *E* (viz případ (a)), čili *0 : 6, 8, P* a pak *2-3-0*, *2-4-8*, *3-P-8*, *6-P-4* (neboť jinak *0* je typu *D*) a poslední konfigurační přímka je *3-4-5*. Tím jsme dostali schéma N-2.

(c) *Nechť 6-9 a jeden z pólů bodu 1 je typu E.*

Podle předchozího je to bod *P* a tedy *P* : *5, 6, 7*. Možno tedy volit *2-P-Q*, *2-6-9*, *3-P-8*, *4-P-0*, z čehož *6* : *8, 0, P* a *3-4-6*. Bod *Q* již musí být spojen s jedním z bodů *8, 0* (jinak je *8* typu *D*). Vzhledem k permutaci (*34*), (*57*), (*80*) možno také volit *8-Q-4*, tedy *2-3-0* (aby bod *8* nebyl typu *D*) a nemá-li být bod *Q* typu *E*, pak *5* : *Q*, čili *2-4-5*, *3-Q-7*. Toto úplné schéma však již nemusíme registrovat, neboť je ekvivalentní s R-2 vzhledem k permutaci (*19*), (*2Q*), (*34*), (*80*).

(d) *Nechť 6-9 a jeden z bodů 5, 7 je typu E.*

Pak především opět možno volit *2-6-9*, *2-P-Q* a permutace (*57*), (*80*) umožňuje předpoklad, že *5* je *E*-bod, tedy *5* : *2, P, Q*, čili *3-4-5*. Aby bod *Q* již nebyl typu *E* (což jsme zkoumali výše), musí být *Q-8* a permutace (*34*) dokonce umožňuje volbu *4-Q-8*. Mají-li bodem *6* procházet čtyři přímky, pak *6-P* a nemá-li být bod *8* typu *D* musí být ještě *P* : *7*.

Uvažme dále, že možno předpokládat *4-6* (neboť v případě *4* : *6* je *4-P-0*, *2-4-7*, *3-Q-0*, *2-3-8*, *3-P-6* a toto úplné schéma přechází permutací (*19*), (*2Q*), (*34*), (*80*) na již známé N-2). Je tedy nadále *4-6-P* a z toho plyne *2-4-0*, takže mohou nastat dva případy: buď *2-3-7*, *3-P-8*, *3-Q-0*, nebo *2-3-8*, *3-P-0*, *3-Q-7*. Zaznamenáme pouze první z nich (schéma R-3), neboť vzhledem k (*19*), (*2Q*), (*80*) patří obě schémata do téže třídy.

(e) *Nechť je 6-9.*

Pak nejprve možno bez újmy na obecnosti volit *2-6-9*, *2-P-Q*, *9* : *3, 4, Q*; *6* : *8, 0* a *8* : *0*. Vzhledem k předchozím výsledkům musí být *E*-bodem jedině bod *2*, který je oddělen od jedné z trojic (*1, 5, 0*), (*1, 7, 8*). Známá permutace (*57*), (*80*) opět připouští jednoznačnou volbu *2* : *1, 5, 0*, takže *7* : *P, Q* a musí být *3-4-6* (v opačném případě buď *5* je *E*-bod, nebo bodem *8* a *0* neprochází čtveřice přímek). Z toho plyne *6* : *8, 0, P* a také *5-P* (aby bod *P* nebyl typu *E*), pak ale *Q* : *5, 7, 9*; *P* : *6, 7, 8* a bod *8* je zcela nepřípustně typu *D*.

Předpoklad II.1. *Předpokládejme existenci aspoň jednoho B^{31}-bodu, jehož póly jsou spolu spojeny.*

Zkoumaný B^{31}-bod ovšem označíme *1* a využijeme všech předchozích výsledků. Především vidíme, že lze volit *2-P-Q*, takže v množině (r) může ležet jen jedna z dvojic (*68*), (*60*), (*69*), (*80*). Poslední dvě možnosti můžeme přímo vyloučit – vzhledem k předchozím výsledkům a kromě toho permutace (*57*), (*80*) umožňuje předpokládat, že je *6, 0* ∈ (r), tedy *2-6-0*. Z toho plyne *6* : *8, 9* a těmito výsledky doplníme zápis (II):

$$(\mathrm{II}.1)\qquad \frac{1}{\begin{matrix}5\;7\;6\;9\\0\;8\;Q\;P\end{matrix}}\,,\quad \frac{2}{\begin{matrix}P\;6\\Q\;0\end{matrix}}\,,\quad 6:8,9\,;\quad 8:0\,;\quad P, Q \in (\mathrm{r}), (\mathrm{s}), (\mathrm{t})\,.$$

(a) *Nechť 8 je E-bod*, pak $8 : 2, 6, 0$ a možno volit *3-P-8*, *4-Q-8*, z čehož $3 : 1, 6, 9$ (jinak konfigurace neobsahuje *C*-body), tedy *4-P-6*, *2-4-9*, *3-4-a*, *2-3-b*, *3-Q-c*, kde $a, c = 5, 7, 0$, $b = 5, 7$ a mohou nastat případy: $a = 5$, $b = 7$, $c = 0$, čímž dostaneme schéma R-4, nebo $a = 7$, $b = 5$, $c = 0$ vedoucí na schéma N-3, z $a = 0$, $b = 5$, $c = 7$ plyne schéma R-5 a konečně z $a = 0$, $b = 7$, $c = 5$ dostaneme schéma R-6.

(b) *Nechť P je E-bod*, pak $P : 5, 6, 7$ a možno volit *3-P-8*, *4-P-0*, *3-4-6*, *2-4-8* (jinak *8* je *E*-bod a to již bylo zkoumáno), *2-3-a*, *3-Q-b*, *4-Q-c*, kde $a, b, c = 5, 7, 9$ a nastane tedy šest možností: $abc = 579$ schéma R-7; $abc = 597$ schéma R-8; $abc = 759$, schéma N-4; $abc = 795$, schéma R-9; $abc = 957$, schéma R-10 a konečně $abc = 975$, schéma R-11.

(c) *Nechť 8* : *Q*, pak $8 : 6, 0, Q$ a možno volit *3-P-8*, *2-4-8*, $0 : P$ (jinak *P* je *E*-bod – viz výše) a dokonce *0-3*, $P : 5, 7, 0$ (jinak by v konfiguraci nebyl žádný *C*-bod), kromě toho také *0-Q* (aby schéma obsahovalo *E*-body), tedy *4-P-6*, *3-Q-0* a pro existenci aspoň jednoho *C*-bodu nutno $3 : 1, 6, 9$, tedy *4-Q-9*, *2-3-a*, *3-4-b*, kde $a, b = 5, 7$, což vede ke schématům R-12 a R-13.

Uvažme, že nadále je již *8-2* (jinak *8* je *E*-bod) a také *8-Q*, čili $8 : 6, 0, P$ a vzhledem k přípustné permutaci (*34*) můžeme zápis (II.1) rozšířit takto:

(II.1.a) *3-Q-8*, *2-4-8*.

(a) *Nechť* $0 : 4$, pak *3-P-0*, *4-P-6* (jinak *2* je typu B^4), *4-Q-9*, (jinak konfigurace neobsahuje *C*-body), *2-3-a*, *3-4-b*, kde $a, b = 5, 7$ a dostáváme schémata R-14 a R-15.

(b) *Nechť 4-P-5*, pak *4-Q-0* (jinak *2* je typu B^4), *3-P-6* (jinak *8* je typu *D*), *2-3-a*, *3-4-b*, kde $a, b = 7, 9$ a nalezli jsme schémata R-16 a R-17.

(c) *Nechť 4-P-7*, pak *4-Q-0* a *3-P-6* (z důvodů jako výše), dále *3-4-5* (aby schéma obsahovalo *E*-body) a z toho *2-3-9*, takže máme schéma R-18.

(d) *Nechť Q-0*, pak *4-Q-0*, *4-P-6*, *2-3-9* (aby existovaly *E*-body v konfiguraci), *3-4-a*, *3-Q-b*, kde $a, b = 5, 7$, čímž dostáváme schémata R-19 a R-20.

(e) *Nechť 7 je E-bod*, pak *3-4-7*, *4-P-0*, *3-P-6*, *2-3-9* (podmínka existence aspoň jednoho *C*-bodu), *4-Q-5* a schéma R-21.

(f) *Nechť 5 je E-bod*, pak *3-4-5*, *4-P-0*, *3-P-6*, *4-Q-7* (jinak žádný *C*-bod), *2-3-9* a dostaneme schéma R-22.

(g) *Nechť* $6 : 4$, pak *3-P-6*, *4-P-0*, *3-4-8*, *2-3-a*, *4-Q-b*, kde $a, b = 5, 7$, ale toto schéma neobsahuje *C*-body.

(h) *Nechť 3 je E-bod*, pak $3 : 1, 5, 0$, *3-4-6*, *3-P-7*, *2-3-9*, *4-P-0*, *4-Q-5* a dostaneme schéma R-23.

(i) *Nechť 2-5*, pak *2-3-5*, *3-P-7*, *4-Q-9* a jediný *E*-bod je $0 : 3, 8, Q$, tedy *3-4-6*, *4-P-0* a máme schéma R-24.

(j) *Nechť* $2\text{-}7$, pak $2\text{-}3\text{-}7$, $3\text{-}P\text{-}5$, $4\text{-}Q\text{-}9$ a jediný E-bod je opět $0 : 3, 8, Q$, tedy $3\text{-}4\text{-}6$, $4\text{-}P\text{-}0$, čímž docházíme k N-5.

(k) *Nechť* $0\text{-}3$, pak $0 : 8, P, Q$ a jediný E-bod je $Q : 7, 9, 0$, tedy $4\text{-}Q\text{-}5$, $3\text{-}P\text{-}7$, $3\text{-}4\text{-}0$, $4\text{-}P\text{-}6$ a máme schéma R-25.

Snadno zjistíme, že vyloučíme-li předchozí situace, zbývají již jen dva případy: $3\text{-}4\text{-}6$, $4\text{-}P\text{-}0$, $3\text{-}P\text{-}a$, $4\text{-}Q\text{-}b$, kde $a, b = 5, 7$, z nichž registrujeme jen první (schéma N-6), neboť případ druhý (pro $a = 7$, $b = 5$) je ekvivalentní s konfigurací R-23, na níž přechází permutací (17), (24), $(3Q)$, (59), (68).

Protože tak jsou vyčerpána všechna schémata za předpokladu II.1, musí mít nadále každý B^{31}-bod již oddělené póly.

Předpoklad II.2. *Předpokládejme existenci aspoň jednoho* B^{31}*-bodu.*

Zkoumaný B^{31}-bod označíme opět 1 a využijeme předchozích výsledků, především zápisu (1) a toho, že body, P, Q jsou již od sebe odděleny. Libovolná permutace bodů $2, 3, 4$ umožňuje volbu:

(II.2) $$6 : 8, 9, 0;\ 0 : 8;\ P : Q;\ 3\text{-}4\text{-}6,\ 2\text{-}P\text{-}6\,.$$

(a) *Nechť aspoň jeden z bodů* $3, 4$ *je typu* E. Vzhledem k permutaci (34) lze předpokládat, že bod 3 má tuto vlastnost a pak je tedy oddělen buď od bodů $1, 5, 0$, nebo $1, 7, 8$. Permutace (57), (80) připouští volbu $3 : 1, 7, 8$, čili $8 : 3, 6, 0$, tedy $4\text{-}P\text{-}8$, $2\text{-}Q\text{-}8$, $4 : 1, 5, 9$; $5 : P$ (uvažme, že jinak by bylo $5 : 2, 4, Q$ a bod 5 by byl typu B^{31} se spojenými póly $3\text{-}6$), tedy $3\text{-}P\text{-}0$, $P : 5, 7, Q$, $3\text{-}Q\text{-}b$, $2\text{-}4\text{-}c$, $2\text{-}3\text{-}a$, $4\text{-}Q\text{-}d$, kde $a, b = 5, 9$ a $c, d = 7, 0$. Protože bod 2 je oddělen jen od dvou bodů množiny $(5, 7, 9, 0)$, může být jen buď

$2 : 1, 5, 7$, pak je ale $2\text{-}3\text{-}9$, $2\text{-}4\text{-}0$, $3\text{-}Q\text{-}5$, $4\text{-}Q\text{-}7$ a bod P je typu B^{31} se spojenými póly $1\text{-}8$,

nebo

$2 : 1, 9, 0$, pak je ale bod P typu D,

nebo

$2 : 1, 7, 9$, čili $2\text{-}3\text{-}5$, $2\text{-}4\text{-}0$, $3\text{-}Q\text{-}9$, $4\text{-}Q\text{-}7$

a dostaneme N-7 nebo konečně je

$2 : 1, 5, 0$, čili $2\text{-}3\text{-}9$, $2\text{-}4\text{-}7$, $3\text{-}Q\text{-}5$, $4\text{-}Q\text{-}0$

a dostáváme tak schéma R-26.

(b) *Nechť je bod* 2 *typu* E. Pak především bod 2 je oddělen buď od trojice $1, 5, 0$, nebo od trojice $1, 7, 8$. Přístupná permutace (57), (80) umožňuje volbu $2 : 1, 7, 8$, čili $8 : 2, 6, 0$ a permutace (34) dokonce ještě $3\text{-}8\text{-}P$, $4\text{-}8\text{-}Q$, $7 : 2, 4, P$ (jinak totiž bod 7 je typu B^{31} se spojenými póly $4\text{-}6$), tedy $3\text{-}7\text{-}Q$, $4\text{-}P\text{-}0$, $P : 5, 7, Q$; $9 : 3$ (aby bod 3 již nebyl typu E), $2\text{-}3\text{-}a$, $2\text{-}4\text{-}b$, $2\text{-}Q\text{-}c$, kde $a = 5, 0$; $b = 5, 9$; $c = 5, 9, 0$. V případě, že $a = 0$, $b = 9$, $c = 5$ je bod P typu B^{31} se spojenými póly $1\text{-}8$. Zbývající dvě možnosti vedou k novým schématům: $a = 0, b = 5, c = 9$ ke schématu N-8 a poslední, tj. $a = 5, b = 9, c = 0$ ke schématu R-27.

Snadno zjistíme, že nadále již musí být bod *9* typu *E* (mají-li *E*-body ve schématu existovat). Uvažujeme tedy poslední případ:

(c) *Nechť bod 9 je typu E,* tedy *9 : 3, 4, 6*, z čehož *3-4-6*, *2-Q-9*. Aby bod *P* nebyl typu *D* musí být bod *2* spojen aspoň s jedním z bodů dvojice (*8, 0*) a kromě toho vzhledem k permutaci (*57*), (*80*) lze vždy předpoklad, že je *2 : 5*. Pak ovšem již *2-0* (jinak bod *2* je typu *E*) a také *5-Q* (jinak bod *5* je typu B^{31} se spojenými póly). Z téhož důvodu je také *7 : P*, čili *P : 5, 7, Q* a permutace (*34*) připouští volbu přímky *4-5-Q*. Dále je *3 : 1, 5, 9*; *4 : 1, 7, 9* a nemá-li být bod *3* typu B^{31} se spojenými póly, musí být ještě *2-3-7*, tedy *2 : 1, 5, 8*, *3-Q-8*, *3-P-0*, *4-P-8*, *2-4-0*. Dostali jsme tak opět úplné schéma, které však již nemusíme registrovat, neboť přechází permutací (*1293*), (*47P5*), (*68*) na již známé schéma N-7.

Tím jsou vyčerpána všechna schémata za předpokladu II. Nadále tedy již budeme předpokládat, že

(P) *každý B^3-bod je typu B^{32}* .

Dostáváme se tak k nejobsáhlejšímu oddílu této kapitoly.

Předpoklad III. *Předpokládáme existenci aspoň jednoho B^3-bodu jehož póly jsou od sebe odděleny.*

Označme zkoumaný bod *1* a využijeme výsledků (1). Vzhledem k předpokladu (P) jsou již póly *P*, *Q* od sebe odděleny a leží tedy na dvou z přímek *1-5*, *1-7*, *1-9*. Na čtvrté přímce bodem *1* leží tedy dva z bodů množiny (*6, 8, 0*). Permutace (*57*), (*80*); (*59*), (*60*) a (*PQ*) umožňují předpokládat:

$$\text{(III)} \qquad \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{1} \\ \hline 6 & 5 & 7 & 9 \\ 8 & 0 & P & Q \end{array} \; ; \quad 6:9\,0\,; \quad 8:7,0\,; \quad P:Q\,.$$

(a) *Nechť jeden z bodů 2, 3, 4 je oddělen od bodů 6, 8.* Vzhledem k libovolné permutaci bodů *2, 3, 4* možno volit *2 : 1, 6, 8*. Pak body *6, 8* patří do množin (s), (t) a je *3-4-0*. Na přímce *2-0* leží jeden z bodů *P*, *Q*. Permutace (*68*), (*79*), (*PQ*) umožňuje volbu *2-0-Q* a musí být *2-P-9* (aby schéma obsahovalo *C*-body). Kromě toho permutace (*34*) připouští volit

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{3} \\ \hline 6 & Q \\ P & 8 \end{array} \quad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{4} \\ \hline P & Q \\ 8 & 6 \end{array} \quad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{2} \\ \hline 3 & 4 \\ a & b \end{array},$$

kde $a, b = 5, 7$ a dostaneme schémata R-28, R-29.

(b) *Nechť bod 7, 9 nepatří do množiny* (q), pak možno volit *7-Q-4* a body *5, 9* nepatří do (t) — jinak by totiž bod *2* byl typu B^4. Vzhledem k (*23*) je také *9-3-P* a jeden z bodů 7, 9 musí být typu E (jinak žádný E-bod). Lze dokonce předpokládat, že 7 je typu E, což nám umožňuje permutace (79), (PQ), (68), (34), tedy 2-3-8, 4-P-8, 5 : Q (jinak bod 3 je typu B^{31}) a mohou nastat případy:

0 : 4, pak

$$\begin{array}{cccccc} \multicolumn{2}{c}{\underline{3}} & & \multicolumn{3}{c}{\underline{2}} \\ \overline{Q} & 4 & & \overline{4} & \overline{P} & \overline{Q} \\ 0 & 6 & & 5 & 0 & 6 \end{array}$$

a dostaneme schéma R-30.

4-5, pak 2-4-5, 2-P-6, 2-Q-0, 3-4-0, 3-Q-6 a máme schéma N-9. Nadále zřejmě je již 4 : 1, 5, 9 a tento bod je vždy typu B^{31}.

(c) *Nechť body 6, 8 patří do množiny* (q), pak především možno volit 2-3-6, 2-4-8. Podle (b) jeden z bodů 7, 9 patří do množiny (q) a lze vždy tvrdit, že je to bod 7 vzhledem k permutaci (79), (PQ), (68), (34). Tedy 3-4-7. Aby body 0 a 9 procházely čtyři konfigurační přímky, musí být 0-P, 0-Q, 9-P a kromě toho 9 : 3 a 9-4 (aby schéma obsahovalo C a E-body), z toho plyne 4-9-P, 4-Q-6. Má-li schéma obsahovat C-body, musí být také také 8 : Q, čili 3-Q-0, 3-P-8, 2-P-0, 2-5-Q, tím jsme dostali úplné schéma R-31.

(d) *Nechť všechny tři body 0, 7, 9 patří do množiny* (q), pak možno volit 2-3-7, 2-4-9, 3-4-0, 2 : 5 (jinak nastane případ (c)) a jeden z bodů 6, 8 je oddělen od 2. Vzhledem k permutaci (68), (34), (79), (PQ) volme 2 : 1, 5, 6, z toho P-5 (jinak žádný C nebo E-bod), Q : 5, 7, P, Q-0-2, 2-P-8, 8 : 4 (jinak žádný C-bod) a poslední přímky tohoto schématu (které označíme R-32) jsou 4-Q-6, 4-P-5, 3-P-6, 3-Q-8.

(e) *Nechť do množiny* (q) *patří trojice bodů 5, 7, 9,* lze tedy předpokládat 3-4-5, 2-3-7, 2-4-9 a vzhledem k (68), (79), (PQ), (34) také 2-6. Mohou tedy nastat případy:

4 : 0, pak 4-8-Q (jinak žádný E-bod) 4-P-6, 3-Q-0, 3-P-8, 2-P-0, 2-Q-6,

což vede ke schématu R-33.

4-Q-6, čili 4-P-0, 2-P-6, 2-Q-8, 3-P-8, 3-Q-0, R-34,

6-4, pak 4-P-6, 2-Q-6, 4-Q-0, 3-Q-8, 3-P-0, 2-P-8

a máme schéma R-35.

3-P-8, pak 3-Q-6, 2-P-6, 4-P-0, 4-Q-8, 2-Q-0 ... R-36.

Jestliže bod 7 je typu E, potom

4-8-Q, 4-P-0, 3-P-6, 3-Q-0, 2-Q-6, 2-P-8

a dostaneme schéma R-37.

Nadále tedy je již 4-P-8, 4-Q-0 a je buď bod 2 typu E, čili

2 : 1, 5, 0, 2-P-6, 2-Q-8, 3-Q-6, 3-P-0

vedoucí na schéma R-38, nebo konečně

2-P-0, 2-Q-6, 3-P-6, 3-Q-8

a dostaneme schéma R-39.

(f) *Nechť do množiny* (q) *patří jen body 7, 9,* pak vzhledem k předchozímu a k permutaci (*79*), (*68*), (*PQ*) lze předpokládat, že bod *6* patří do množiny (q) a volit

2-3-7, 2-4-9, 3-4-6 .

Nastávají tak možnosti:

2-Q-5 , pak *4-8-Q* (jinak žádný *E*-bod) *2-P-6, 3-P-8, 3-Q-0, 4-P-0*

a máme schéma N-10.

5-2 , pak opět *4-8-Q, 2-Q-6, 3-P-8, 3-Q-0, 4-P-0* ... R-40

2-0 , pak *2-P-0, 4-8-Q* (aby schéma obsahovalo *C* a *E*-body)

2-Q-6, 4-P-5, 3-P-8, 3-Q-0 ... R-41 .

6-P , pak *2-P-6, 2-Q-8, 3-P-8* (jinak žádný *C*-bod) ,

3-Q-0, 4-Q-5, 4-P-0 ... R-42

a nadále je tedy již vždy *2-P-8, 2-Q-6, P : 6, 9, Q*, takže buď

3-P-5, 3-Q-0, 4-Q-8, 4-P-0 ... R-43 ,

nebo

3-P-0, 3-Q-8, 4-Q-0, 4-P-5 ... N-11 .

V dalším musíme tedy uvažovat, že jen jeden z bodů *7, 9* patří do množiny (q). Vzhledem k (*79*), (*68*), (*PQ*) a libovolné permutaci bodů *2, 3, 4* můžeme tedy tvrdit, že je vždy

$$\text{(III.a)} \quad \frac{1}{\begin{matrix} 6 & 5 & 7 & 9 \\ 8 & 0 & P & Q \end{matrix}} \; ; \quad 3\text{-}4\text{-}5\,; \quad 7\text{-}Q\,; \quad 6 : 9, 0\,; \quad 8 : 7, 0\,; \quad P : Q\,.$$

(g) *Nechť body 5, 6 patří do množiny* (q), pak možno volit *2-3-5, 2-4-6, P : 5, 9, Q*, z čehož *3-P-6* a jediný *E*-bod je *4*, když *4 : 1, 5, 0*, z toho *3-Q-0, 2-P-0, 4-P-8, 4-Q-7, 2-Q-8* a dostáváme schéma R-44.

(h) *Nechť bod 0 nepatří do množiny* (q), pak vzhledem k případům (g) a (c) do množiny (q) patří body *5, 8* a lze volit *2-3-5, 2-4-8* a protože *P : 5, 9, Q* je také *P-8-3, 6-2* (jinak žádný *E*-bod) a nastanou případy:

2-7 , tedy *2-7-Q, 3-P-6, 3-Q-0, 4-P-0, 4-Q-6* ... R-45

4-0-Q , pak *4-P-6, 3-Q-7, 2-Q-6, 2-P-0* ... N-12

3-0 , pak *3-Q-0, 2-Q-6, 2-P-0, 4-P-6, 4-Q-7* ... R-46

a nadále je již *4-P-0, 2-P-6, 2-Q-0, 3-Q-a, 4-Q-b*, kde *a*, *b* = *6, 7*, což vede na schémata R-47 a R-48.

V dalším zbývá uvažovat již jen případ, kdy do množiny (q) patří bod *0* a typu *E* musí být nejméně jeden z bodů *7, 9*. Z toho plyne, že bod *6* patří do množiny (r) a vzhledem k permutaci (*34*) možno volit *6 : 3, 3-8* (jinak *3 : 1, 6, 8* – případ (a)), *7 : 4* (jinak *4-Q-7, 4-P-6, 2-Q-6*, tedy body *8, 0* patří do (s) a schéma neobsahuje žádný *E*-bod).

Ukázali jsme již, že aspoň jeden z bodů *7, 9* musí být typu *E*. Kdyby to nebyl bod *9*, pak *7* je jistě typu *E*, čili *7 : 2, 4, 8*, z čehož *2-4-8, 2-P-5, 2-3-0, 2-Q-6, 4-P-6, 4-Q-0, 3-Q-7, 3-P-8* a dostaneme sice úplné schéma, ale nevyhovující podmínkám, neboť neobsahuje *C*-body. Musí tedy vždy nadále být

(III.b) *2-P-6* ; *4-Q-6* ; *8-3* ; $0 \in$ (q) ; bod *9* typu *E* .

Tímto výsledkem doplníme záznam (III.a)

V případě 8 : 2 je *4-P-8, 2-3-5, 2-4-0, 2-Q-7, 4-P-0, 3-Q-8*, ale toto úplné schéma nemusíme registrovat, neboť přechází na schéma R-36 permutací (*168*), (*249730*), (*5PQ*).

V případě, že bod 8 patří do (q) musí být především *Q : 8, 0, P* aby schéma obsahovalo *C*-body, pak ale bod *4*, oddělený od trojice *1, 5, 7* je vždy typu B^{31}.

Zbývá tedy jediná možnost a to

8 : 4 , čili *2-Q-8, 3-P-8, 4-P-0, 2-3-0, 2-4-5, 3-Q-7*

a dostáváme tak poslední schéma R-49 za předpokladu III.

Předpokládáme existenci aspoň jednoho B^3-bodu.

Podle předchozích úvah především každý B^3-bod je již typu B^{32} a jeho póly jsou spojeny. Zkoumaný bod označíme *1* a užijeme zápisu (1). Bez újmy na obecnosti můžeme přímky bodem *1* označit *1-6-8, 1-5-0, 1-7-P, 1-9-Q* a protože póly *P, Q* jsou spojeny, pak také lze předpokládat, že je *2-P-Q* a bod *6* patří do množiny (r), jak dovoluje permutace (*79*), (*PQ*), (*68*). Tyto výsledky shrneme

$$\text{(IV)} \qquad \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{1} \\ \hline 5 & 7 & 9 & 6 \\ 0 & P & Q & 8 \end{array} \; ; \quad 2\text{-}P\text{-}Q \; ; \quad 8 : 7, 0 \; ; \quad 6 \in (\mathrm{r}) .$$

(a) *Nechť bod 2 je typu E*, pak *2 : 1, 5, 0* a permutace (*34*) umožňuje *2-4-8, 2-3-7, 2-6-9, 3-P-8*, (jinak žádný *C*-bod), *3-Q-0, 4-P-0, 3-4-a, 4-Q-b*, kde *a*, *b* = *5, 6*, takže dostáváme schémata R-50, R-51.

(b) *Nechť 0 : 2*, pak *0 : 2, 6, 8*; *5-2* (jinak případ (a)) a možno volit *2-3-5, 2-6-9*; *8, 0* patří do (s), *7* : 2 (jinak bod *4* je typu B^{31}), *2-4-8, 3-Q-0, 3-P-8, 3-4-7, 4-P-0, 4-Q-6*. Toto schéma však neobsahuje *E*-body.

(c) *Nechť P : 5, 8, 9*, čili *P* je *E*-bod, pak *8 : 7, 0, P*; *Q : 0, 6* a možno volit *4-P-6, 3-P-0*, musí být *3 : 1, 6, 9* (aby schéma obsahovalo *C*-body), *2 : 1, 5, 7, 2-3-8, 4-Q-8*, *2-4-a*, *2-6-b*, *3-4-c*, *3-Q-d*, kde $a, b = 9, 0$; $c, d = 5, 6$ a nastanou případy: $a = 9$, $b = 0$, $c = 7$, $d = 5$; $a = 9$, $b = 0$, $c = 5$, $d = 7$ vedoucí na schémata R-52 a R-53. Zbývající dvě možnosti, tj. $a = 0$; $b = 9$; $c, d = 5, 7$ nemusime již registrovat, neboť tato schémata patří do téže třídy jako již známá R-50, R-51 vzhledem k permutaci (*19*), (*2P*), (*34*), (*67*), (*80*).

(d) *Nechť* $2 : 1, 8, 9$, pak $8 : 2, 7, 0$ a možno volit *2-3-5*, *2-4-7*, *2-6-0* a musí být $P : 5, 6, 9$ (jinak žádný *C*-bod), $9 : 2, 6, P$; *3-P-0* (aby bod *0* nebyl typu B^4), *3-Q-8*, *4-Q-6*, *4-P-8*, *3-4-9* a B^3-bod *8* má proti předpokladu oddělené póly.

(e) *Nechť* $P : 5, 6, 8$, pak možno volit *P-9-3*, *P-0-4*, *2-6-0*, *6-Q-3* (jinak žádný *C*-bod), *4-Q-8*, *2-3-8*, *3-4-7*, (jinak *7* je typu B^4), *2-4-5* a dostáváme tak schéma R-54.

(f) *Nechť* $P : 8, 9, 0$, pak možno volit *5-P-3*, *6-P-4*, bod *7* nepatří do množiny (s), aby bod *2* nebyl typu B^4 a dále je $6 : 9$ (jinak *2-6-9*, *3-4-7*, *2-3-a*, *2-4-b*, *3-Q-b*, *4-Q-a*, kde $a, b = 8, 0$ ale pak vždy je *3* typu B^{31}). Z toho plyne ještě *2-6-0* a mohou nastat případy:

7-Q ,	čili	*7-Q-4*, *3-4-0*, *3-Q-8*, *2-3-9*, *2-4-8* ...	R-55
$7 : 4$,	čili	*2-3-7*, *2-4-8*, *3-4-9*, *3-Q-8*, *4-Q-0* ...	R-56
$7 : 3$,	čili	*2-4-7*, *2-3-8*, *3-4-9*, *3-Q-0*, *4-Q-8* ...	R-57
$0 : 3$,	čili	*3-4-7*, *3-Q-8*, *4-Q-0*, *2-3-9*, *2-4-8* ...	R-58

a konečně

$0 : 4$,	čili	*3-4-7*, *3-Q-0*, *4-Q-8*, *2-3-8*, *2-4-9* ...	R-59

(g) *Nechť* $P : 6, 8, 9$ a možno volit *3-P-0*, *4-P-5*. Bod *7* nepatří do (t), neboť jinak by byl bod *2* typu B^4 a musí být také *6-3* (jinak *4-Q-6*, *3-Q-8*, *2-4-8*, *2-6-0* a schéma neobsahuje *E*-body). Je tedy *4-Q-8*, *2-3-8* a snadno zjistíme, že jediný možný *E*-bod je *0* a to pouze v případě, když $0 : 4, Q, 8$, tedy *2-6-0* a lze uvažovat případy *3-4-a*, kde $a = 6, 7, 9$.

Pro $a = 9$ je však *2-4-7*, *3-Q-6* a B^3-bod *8* má oddělené póly $2 : 5$. Rovněž případ $a = 7$ vede ke sporu, neboť bylo by *2-4-9*, *3-Q-6* a B^3-bod *7* by měl oddělené póly. Zbývá tedy jedině *3-4-6*, *3-Q-7*, *2-4-9*, kdy skutečně dostaneme nové schéma R-60.

(h) *Nechť* $P : 6, 8, 0$, pak možno volit *P-5-3*, *P-9-4*, *2-6-0* a jest *6-3* (aby schéma obsahovalo *E*-body), takže mohou nastat případy:

$4 : 6$,	čili	*3-Q-6*, *3-4-0*, *4-Q-8*, *2-3-8*, *2-4-7* ...	R-61
$4 : 0$,	čili	*3-4-6*, *3-0-Q*, *4-Q-8*, *2-3-8*, *2-4-7* ...	R-62
$4 : 7$,	čili	*3-4-6*, *2-3-7*, *2-4-8*, *3-Q-8*, *4-Q-0* ...	R-63

(i) *Nechť P-0*, pak vzhledem k předchozím případům možno volit

3-P-8, *4-P-0* (neboť je $P : 5, 6, 9$)

a dále:

(i1) *za předpokladu* $7 : 4, 8, Q$, *7 je E-bod*, dostaneme *4-8-Q*, *2-3-7*, *2-6-0*, $9 : 3$ (jinak B^3-bod *8* má oddělené póly), čili *2-4-9*, *3-4-a*, *3-Q-b*, kde $a, b = 5, 6$, což vede k R-64 a R-65.

(i2) *7 je E-bod* pak ovšem již *7 : 2, 4, 8, 2-4-8, 3-Q-7* a mohou nastat případy

9 : 2, čili *3-4-9, 2-6-0, 2-3-5, 4-Q-6* ... R-66

6 : Q, pak *4-Q-5, 3-4-6, 2-6-0*, (neboť jinak *Q* je typu B^4) a *2-3-9*,

což vede na schéma R-67.

Nadále musí být již *9 : 6* (protože jinak B^3-bod *4* nevyhovuje podmínce (P) a je typu B^{31}), čili zbývá jedině případ *2-6-0, 2-3-9, 3-4-5, 4-Q-6* a schéma R-68.

(i3) *Nechť 6 je typu E.*, pak *6 : 4, 0, P, 2-6-9, 3-Q-6, 2-3-0*; a aby bod *P* nebyl typu B^{31}, musí být *Q : 5*. Dále je *2 : 7*, neboť jinak ve schématu nejsou žádné *C*-body a konečně také *2 : 8* (aby bod *4* nebyl typu B^{31}), pak ale *2-4-5, 3-4-7, 4-Q-8* a toto schéma přechází permutací (*14*), (*27Q6*), (*5P*) na již známé a registrované R-51.

(i4) *Uvažujme 8 : Q*, pak *2-4-8, 7-Q* (jinak *8* je typu B^4), *7-4* (jinak *7* je typu *E* a to jsme již zkoumali v (i2)), čili *4-Q-7, 7 : 2, 3, 8* a jediný *E*-bod je *5*, když ovšem *5 : 2, P, Q*, takže *3-4-5, 3-6-Q*, a aby nenastal případ (i3), čili bod *6* již nebyl typu *E*, musí být *6-0-2, 2-3-9*. Pak ovšem bod *9* je typu *D*.

(i5) *V případě 5-Q* je *3-5-Q* a schéma neobsahuje *E*-body, právě tak jako v případě

(i6) *5 : 4*, kdy je *2-3-5*.

(i7) *Kdyby bylo 9 : 2*, pak *3-4-9, 2-6-0, 2-3-7* a nastane případ (i2).

(i8) *Předpokládejme 6 : Q*, pak *3-4-6, 4-Q-8, 3-Q-7, 2-4-5* a jediný *E*-bod je *3 : 1, 5, 0*, čili *2-6-0, 2-3-9* a dostaneme schéma N-13.

Zbývá tedy poslední případ a to

(i9) *7-4* (jinak *7* je typu *E*, ale to jsme již probírali v (i2)), takže *8-Q-4, 3-Q-6*, a aby nenastal případ (i3) musí být *6-0-2, 2-3-9*, pak ale bod *9* je typu *D*.

(j) *Nechť P : 8*. Vzhledem k předchozím případům může již být jen *P : 5, 8, 0*, takže možno volit *6-P-3, 9-P-4, 2-6-0*. Body *5, 7* neleží na (t), neboť jinak by byl bod *2* typu B^4 a konečně má-li schéma obsahovat *E*-body, musí být *Q : 5, 6, 7*. Mohou tedy nastat případy:

2-3-a, 2-4-b, 3-4-c, 3-Q-d, 4-Q-e, kde $a, b = 5, 7, 8$; $c = 5, 7$;

$d, e = 8, 0$, $a = 8$, $b = 7$, $c = 5$, $d = 0$, $e = 8$ ... R-69 ;

$a = 7$, $b = 8$, $c = 5$, $d = 8$, $e = 0$ ... R-70 ;

$a = 5$, $b = 8$, $c = 7$, $d = 8$, $e = 0$ ... R-71 ;

$a = 8$, $b = 5$, $c = 7$, $d = 0$, $e = 8$ ... R-72 .

(k) *Nechť P-9*, pak vzhledem k předchozímu je *P : 5, 6, 0* a možno volit *3-P-9, 4-P-8, 2-6-0* a aby nenastal případ (d) musí být *8 : Q, 2-3-8, 5-4, 7-4* (jinak *2* je typu B^4) a mohou nastat případy:

0 : Q, čili *3-4-0, 3-Q-6, 4-Q-7*, (jinak *8* je typu B^4), *2-4-5* ... R-73

nebo *7-Q*, pak ale schéma neobsahuje *C*-body, nebo

5-Q, pak *4-Q-5, 2-4-7, 3-Q-0, 3-4-6* a dostaneme schéma R-74.

Nadále je tedy již jen

$2\text{-}4\text{-}a,\ 3\text{-}4\text{-}b,\ 3\text{-}Q\text{-}c,\ 4\text{-}Q\text{-}d$, kde $a, b = 5, 7$; $c, d = 6, 0$,

vedoucí na schémata R-75, N-14, R-76, R-77.

(m) *Nechť* $Q\text{-}6$, pak především $P : 6, 9, 0$ a možno volit $P\text{-}5\text{-}3$, $P\text{-}8\text{-}4$, a bod 7 nepatří do množiny (s), neboť jinak by byl bod 2 typu B^4 a mohou nastat případy

$7\text{-}Q$, pak $4\text{-}Q\text{-}7$, $3\text{-}Q\text{-}6$, $2\text{-}3\text{-}8$, $3\text{-}4\ 0$, $2\text{-}6\text{-}0$, $2\text{-}4\text{-}9$ ... R-78 ,

$7 : 4$, pak $2\text{-}3\text{-}7$, $3\text{-}Q\text{-}8$, $4\text{-}Q\text{-}6$, $3\text{-}4\text{-}0$, $2\text{-}4\text{-}9$, $2\text{-}6\text{-}0$ ... schéma nemá E-body ,

$0\text{-}4$, pak jediným E-bodem je 7, když ovšem $7 : 3, 8, Q$, tedy

$3\text{-}8\text{-}Q$, $2\text{-}4\text{-}7$, $4\text{-}Q\text{-}6$, $3\text{-}4\text{-}0$, $2\text{-}3\text{-}9$, $2\text{-}6\text{-}0$ ... R-79

a zbývá

$0 : 4$, čili $4\text{-}Q\text{-}6$, $3\text{-}Q\text{-}0$, $2\text{-}6\text{-}0$, $2\text{-}3\text{-}8$, aby bod 6 nebyl typu D, pak

$3\text{-}9\text{-}4$, $2\text{-}4\text{-}7$ a dostáváme schéma N-15 .

(n) *Nechť* $2 : 9$. Aby již nenastal případ (d), musí být $2\text{-}8$ a možno volit $2\text{-}4\text{-}8$, $2\text{-}6\text{-}0$, $3\text{-}4\text{-}9$, $3\text{-}P\text{-}8$, $4\text{-}P\text{-}6$, $2\text{-}3\text{-}7$, (jinak žádný C-bod) a jediným E-bodem je 0 v případě $0 : 3, 8, P$, čili $3\text{-}Q\text{-}5$, $4\text{-}Q\text{-}0$. Toto úplné schéma však odporuje základnímu předpokladu, neboť bod 9 je typu B^3 s oddělenými póly $7 : 8$.

(o) *Nechť* $0 : Q$, pak možno volit $2\text{-}4\text{-}9$, $2\text{-}6\text{-}0$, $3\text{-}4\text{-}0$, $P : 5, 9, 0$ a mohou nastat případy:

$2\text{-}5$, pak $2\text{-}3\text{-}5a$ jediný E-bod je 9 v případě $3\text{-}6\text{-}P$, $4\text{-}P\text{-}8$, $4\text{-}Q\text{-}7$,

a $3\text{-}Q\text{-}8$, čímž dostáváme schéma R-80 .

$4\text{-}5$, pak $4\text{-}Q\text{-}5$; $4 : 1, 6, 7$; $4\text{-}P\text{-}8$, $3\text{-}6\text{-}P$ a aby schéma obsahovalo aspoň jeden C-bod, musí být $8 : Q$, čili $2\text{-}3\text{-}8$, $3\text{-}Q\text{-}7$, ale toto schéma nemusíme registrovat, neboť přechází na schéma R-63 permutací (12), $(3549QP7)$, (80) .

$8 : 2$, čili $2\text{-}3\text{-}7$, $3\text{-}Q\text{-}5$, $4\text{-}Q\text{-}8$, $4\text{-}P\text{-}6$, $3\text{-}P\text{-}8$ a dostaneme R-81 .

Zbývá tedy poslední možnost $8\text{-}2$, čili $2\text{-}3\text{-}8$, $3\text{-}Q\text{-}5$, $3\text{-}P\text{-}6$, $4\text{-}P\text{-}8$, $4\text{-}Q\text{-}7$, ale toto schéma přechází permutací (12), (80), (35), $(49QP7)$ na schéma R-62.

(p) *Nechť* $6\text{-}9$, pak možno volit $2\text{-}4\text{-}0$, $2\text{-}6\text{-}9$, $3\text{-}Q\text{-}0$ a nastanou případy:

$7\text{-}2$, potom $2\text{-}3\text{-}7$, $4\text{-}Q\text{-}8$, $3\text{-}P\text{-}8$ a aby schéma obsahovalo C-body, musí být $6 : P$, tedy $3\text{-}4\text{-}6$, $4\text{-}P\text{-}5$, ale toto úplné schéma přechází permutací (1394), $(26Q5P7)$, (80) na typ R-50 .

$5\text{-}P$, pak $2\text{-}3\text{-}8$, $4\text{-}P\text{-}8$, $4\text{-}Q\text{-}7$, $3\text{-}4\text{-}6$, $3\text{-}P\text{-}5$, ale toto schéma přechází permutací (13), $(25P7)$, (49), $(6Q)$, (80) na R-51 .

$5\text{-}2$, čili $2\text{-}3\text{-}5$, $3\text{-}4\text{-}7$, $4\text{-}Q\text{-}8$, $4\text{-}P\text{-}6$, $3\text{-}P\text{-}8$ a permutace (1493), $(27Q5P6)$ převádí toto schéma na R-50 .

Zbývá tedy konečně možnost $2\text{-}3\text{-}8$, $4\text{-}P\text{-}8$, $3\text{-}P\text{-}6$, takže musí být $Q : 7$, aby schéma obsahovalo C-body, z čehož $4\text{-}Q\text{-}5$, $3\text{-}4\text{-}7$, ale pak je schéma nepřípustné, neboť neobsahuje E-body.

Uvážíme-li všechny dosavadní výsledky, vidíme, že (vzhledem k permutaci (*34*)) můžeme nadále již předpokládat:

2-4-9, *2-6-0*, *2-P-Q*, *6 : Q*, *Q-0*, *P-8*

a další schémata dostaneme takto:

(q) *Nechť 4-Q-5*, pak *4-P-8*, *3-Q-0*, *3-P-6*, *3-4-7*, *2-3-8* ... R-82.

(r) *Nechť 5 : 3*, pak *4-P-5*, *4-Q-8*, *2-3-7*, *3-4-6*, *3-P-8*, *3-Q-0* ... R-83.

(s) *Nechť 5-Q*, pak *Q : 6, 7, 8*, *3-Q-5*, *4-P-8*, *4-Q-0*, *3-P-6*, *3-4-7*, *2-3-8* ... R-84.

(t) *Nechť 2-8*, pak *2-3-8*, *4-P-8*, a aby schéma obsahovalo *C*-body, nutně musí být *6 : P*, čili *3-P-5*, *3-4-6*, *3-Q-0*, (jinak žádný *E*-bod) *4-Q-7* a dostaneme R-85.

(u) *Nechť 5-4*, pak *2-3-7*, *3-4-5* a pro existenci *C*-bodů nutně *3 : 6*, čili *3-P-8*, *3-Q-0*, *4-P-6*, *4-Q-8* ... R-86.

(v) *Nechť 0-3*, pak *3-Q-0*, *4-Q-8*, *3-P-8*, *4-P-6*, *3-4-7*, *2-3-5* ... R-87.

(w) *Nechť 5-2*, pak *2-3-5*, *3-Q-8*, *4-P-8*, *4-Q-0*, *3-P-6*, *3-4-7* ... R-88 a zbývá již jen případ:

3-Q-8, *4-P-8*, *4-Q-0*, *2-3-7*, *3-4-6*, *3-P-5* ,

vedoucí na schéma R-89.

Tım jsou vyčerpány všechny možnosti a také nalezena všechna schémata za daného předpokladu, že konfigurace neobsahuje body typů *A*, *D* a B^4, ale naopak na ní leží aspoň jeden B^3-bod, *E*-bod a *C*-bod.

Nedokazoval jsme v této kapitole, že všechna zjištěná schémata patří do různých tříd a pokud tedy jsou realisovatelná, vedou ke konfiguracím neekvivalentním. Že tomu tak skutečně je, to uvidíme z následujících kapitol.

Která z těchto schémat jsou realisovatelná (body a přímkami v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel), a jakým způsobem je možno realisovat, to si ukážeme v kapitole třetí.

KAPITOLA 2

Tato kapitola je věnována celkovému přehledu konfiguračních schémat, která jsem rozdělil jednak do skupiny N-schémat (označených N-1 až N-15), jednak do skupiny, obsahující 89 R-schémat.

Komentář k tabulkám

V posledním sloupci je zaznamenáno pořadí schématu. V předposledním sloupci je uveden typ schématu a to takto: První tři čísla uvádějí počet bodů typu B^3, B^2, B^1, další dvojice počet C^2 a C^1-bodů a poslední dvojice počet E^2 a E^1-bodů. Tedy ku příkladu: Typ 4213020 říká, že schéma obsahuje 4 body typu B^3, dva B^2-body, jeden B^1-bod, tři C^2-body, žádný C^1-bod, dva E^2, body a žádný E^1-bod. Ostatní sloupce tabulky jsou jistě srozumitelné.

Tabulka schémat skupiny N

5-6-7	*1*	*2*	*3*	*4*		
5-8-9	*5 7 9 P*	*3 4 P Q*	*4 P Q*	*P Q*	4301211	N 1
7-0-9	*0 8 6 Q*	*6 5 8 7*	*8 9 0*	*0 6*		
	5 7 9 6	*3 4 6 P*	*4 P Q*	*P Q*		
	0 8 P Q	. . . .	. . .	. .		
		0 8 9 Q	*5 8 7*	*6 0*	4301211	N 2
		5 9 0 Q	*7 8 0*	*6 8*	1401222	N 3
		7 8 0 Q	*6 8 5*	*0 9*	2513001	N 4
		7 8 0 Q	*6 5 8*	*0 9*	2423010	N 5
		9 8 0 Q	*6 5 8*	*0 7*	2603010	N 6
		3 4 P Q	*4 P Q*	*P Q*		
		. . . .	. . .	. .		
		5 0 6 8	*6 0 9*	*8 7*	2304201	N 7
		0 5 6 9	*6 8 7*	*0 8*	2204202	N 8
	5 7 9 6	*3 4 P Q*	*4 P Q*	*P Q*		
	0 P Q 8	. . . .	. . .	. .		
		8 5 6 0	*0 9 6*	*8 7*	1402401	N 9
		7 9 6 5	*6 8 0*	*0 8*	2601210	N 10
		7 9 8 6	*6 0 8*	*5 0*	1402401	N 11
		5 8 0 6	*9 8 7*	*6 0*	1402401	N 12
		3 4 6 *P*	4 *P Q*	*P Q*		
		. . . *Q*	. . .	. .		
		9 5 0	*6 8 7*	*0 8*	1402401	N 13
		8 5 0	*7 9 0*	*8 6*	1333011	N 14
		8 7 0	*9 5 0*	*8 6*	1302411	N 15

Tabulka schémat skupiny R

5-6-7	*1*	*2*	*3*	*4*		
5-8-9	*5 7 9 P*	*3 4 P Q*	*4 P Q*	*P Q*	4311201	R 1
7-0-9	*0 8 6 Q*	*5 0 8 6*	*6 0 7*	*9 8*		
	5 7 9 6	*3 4 6 P*	*4 P Q*	*P Q*		
	0 8 P Q	. . . .	. . .	. .		

		0 7 9 Q	6 8 5	0 8	4303011	R 2
		7 0 9 Q	5 8 0	6 8	4311201	R 3
		7 9 0 Q	5 8 0	6 8	1511211	R 4
		5 9 0 Q	0 8 7	6 8	1601211	R 5
		7 9 0 Q	0 8 5	6 8	1601211	R 6
		5 8 0 Q	6 8 7	0 9	2513001	R 7
		5 8 0 Q	6 8 9	0 7	2513010	R 8
		7 8 0 Q	6 8 9	0 5	2413011	R 9
		9 8 0 Q	6 8 5	0 7	3601201	R 10
		9 8 0 Q	6 8 7	0 5	2501202	R 11
		5 8 0 Q	7 8 0	6 9	1511202	R 12
		7 8 0 Q	5 8 0	6 9	1611201	R 13
		5 8 0 Q	7 0 8	6 9	1511202	R 14
		7 8 0 Q	5 0 8	6 9	1611201	R 15
		7 8 0 Q	9 6 8	5 0	2511201	R 16
		9 8 0 Q	7 6 8	5 0	2202402	R 17
		9 8 0 Q	5 6 8	7 0	2302401	R 18
		9 8 0 Q	7 5 8	6 0	3501201	R 19
		9 8 0 Q	5 7 8	6 0	3501201	R 20
		9 8 0 Q	7 6 8	0 5	1401222	R 21
		9 8 0 Q	5 6 8	0 7	1511211	R 22
		9 8 0 Q	6 7 8	0 5	2401212	R 23
		5 8 0 Q	6 7 8	0 9	2421210	R 24
		9 8 0 Q	0 7 8	6 5	2513001	R 25
		3 4 P Q	4 P Q	P Q		
		. . . .	. . .	. .		
		9 7 6 8	6 0 5	8 0	1304211	R 26
		5 9 6 0	6 8 7	0 8	1312401	R 27
5-6-7	1	2	3	4		
5-8-9	5 7 9 6	3 4 P Q	4 P Q	P Q		
7-0-9	0 P Q 8	. . . .	. . .	. .		
		5 7 9 0	0 6 8	8 6	1513011	R 28
		7 5 9 0	0 6 8	8 6	1523001	R 29
		8 5 0 6	6 9 0	8 7	2603001	R 30
		6 8 0 5	7 8 0	9 6	1603002	R 31
		7 9 8 0	0 6 8	5 6	1523001	R 32

		7 9 0 6	5 8 0	6 8	1136001	R 33
		7 9 6 8	5 8 0	0 6	1019010	R 34
		7 9 8 6	5 0 8	6 0	1015410	R 35
		7 9 6 0	5 8 6	0 8	2333010	R 36
		7 9 8 6	5 6 0	0 8	2133030	R 37
		7 9 6 8	5 0 6	8 0	1433010	R 38
		7 9 0 6	5 6 8	8 0	1343001	R 39
		7 9 5 6	6 8 0	0 8	1404201	R 40
		7 9 0 6	6 8 0	5 8	1523001	R 41
		7 9 6 8	6 8 0	0 5	2603001	R 42
		7 9 8 6	6 5 0	0 8	2413002	R 43
		5 6 0 8	9 6 0	8 7	1222410	R 44
		5 8 6 7	9 8 0	0 6	1521201	R 45
		5 8 0 6	9 8 0	6 7	1521210	R 46
		5 8 6 0	9 8 6	0 7	2511210	R 47
		5 8 6 0	9 8 7	0 6	1302411	R 48
		0 5 6 8	9 8 7	0 6	1134210	R 49
5-6-7	*1*	*2*	*3*	*4*		
5-8-9	*5 6 7 9*	*3 4 6 P*	*4 P Q*	*P Q*		
7-0-9	*0 8 P Q*	. . . *Q*	. . .	. .		
		7 8 9	5 8 0	0 6	4213020	R 50
		7 8 9	6 8 0	0 5	4401201	R 51
		8 9 0	7 0 5	6 8	2401212	R 52
		8 9 0	5 0 7	6 8	1411221	R 53
		8 5 0	7 9 6	0 8	1611201	R 54
		9 8 0	0 5 8	6 7	1431210	R 55
		7 8 0	9 5 8	6 0	1611201	R 56
		8 7 0	9 5 0	6 8	1601202	R 57
		9 8 0	7 5 8	6 0	1511211	R 58
		8 9 0	7 5 0	6 8	1302402	R 59
		8 9 0	6 0 7	5 8	1613001	R 60
		8 7 0	0 5 6	9 8	2241210	R 61
		8 7 0	6 5 0	9 8	2233011	R 62
		7 8 0	6 5 8	9 0	2423001	R 63
		7 9 0	5 8 6	0 8	1243011	R 64
		7 9 0	6 8 5	0 8	1523001	R 65

5 8 0	*9 8 7*	*0 6*	1404201	R 66
9 8 0	*6 8 7*	*0 5*	2204202	R 67
9 8 0	*5 8 7*	*0 6*	1304211	R 68
8 7 0	*5 6 0*	*9 8*	1333020	R 69
7 8 0	*5 6 8*	*9 0*	1513011	R 70
5 8 0	*7 6 8*	*9 0*	1433001	R 71
8 5 0	*7 6 0*	*9 8*	1433010	R 72
8 5 0	*0 9 6*	*8 7*	1312401	R 73
8 7 0	*6 9 0*	*8 5*	1431210	R 74
8 5 0	*7 9 6*	*8 0*	1224201	R 75
8 7 0	*5 9 0*	*8 6*	1321230	R 76
8 7 0	*5 9 6*	*8 0*	1222410	R 77
8 9 0	*0 5 6*	*8 7*	1316001	R 78
9 7 0	*0 5 8*	*8 6*	1523001	R 79
5 9 0	*0 6 8*	*8 7*	1611210	R 80
7 9 0	*0 8 5*	*6 8*	1521201	R 81
8 9 0	*7 6 0*	*8 5*	1513011	R 82
7 9 0	*6 8 0*	*5 8*	1423011	R 83
8 9 0	*7 6 5*	*8 0*	1343001	R 84
8 9 0	*6 5 0*	*8 7*	1503012	R 85
7 9 0	*5 8 0*	*6 8*	1141221	R 86
5 9 0	*7 8 0*	*6 8*	1214211	R 87
5 9 0	*7 6 8*	*8 0*	1333002	R 88
7 9 0	*6 5 8*	*8 0*	1431201	R 89

KAPITOLA 3

V této kapitole dokážeme, že schémata skupiny N nejsou realisovatelná.

Zaměříme se nejprve na schémata, obsahující aspoň jeden B^{30}-bod. Pro ně platí

$$\begin{array}{cl} \underline{\quad 1 \quad} & 5\text{-}6\text{-}7 \\ 5\ 7\ 9\ P & 5\text{-}8\text{-}9\,. \\ 0\ 8\ 6\ Q & 7\text{-}0\text{-}9 \end{array}$$

Žádné tři z bodů *1*, *7*, *9*, *5* neleží na jedné přímce (konfigurační, nebo nekonfigurační) a proto můžeme jejich souřadnice volit takto: *1* = (1, 0, 0), *7* = (0, 1, 0), *9* = (0, 0, 1), *5* = (1, 1, 1). Na přímkách *1-7* = (0, 0, 1), *5-9* = (1, −1, 0), (zapsaných v přímkových souřadnicích) leží bod *8*, tedy *8* = (1, 1, 0). Obdobně z přímek *1-9* = (0, 1, 0),

$5\text{-}7 = (1, 0, -1)$ vypočítáme souřadnice bodu $6 = (1, 0, 1)$ a z přímek $7\text{-}9 = (1, 0, 0)$, $1\text{-}5 = (0, 1, -1)$ souřadnice bodu $0 = (0, 1, 1)$.

Bod P neleží na přímce $1\text{-}9 = (0, 1, 0)$, neboť jinak by splynuly přímky *1-9-6* a *1-P-Q*. Můžeme tedy volit $P = (x, 1, t)$ a protože na přímce $1\text{-}P = (0, t, -1)$ má ležet bod Q, lze volit ještě $Q = (y, 1, t)$. Tyto výsledky shrneme:

U.1 $$1 = (1, 0, 0)\,,\quad 5 = (1, 1, 1)\,,\quad 6 = (1, 0, 1)\,,\quad 7 = (0, 1, 0)\,,$$
$$8 = (1, 1, 0)\,,\quad 9 = (0, 0, 1)\,,\quad 0 = (0, 1, 1)\,,\quad P = (x, 1, t)\,,\quad Q = (y, 1, t)\,.$$

Zaměříme se nejprve na schéma N-1. Z rovnic přímek $Q\text{-}7 = (t, 0, -y)$ a $P\text{-}8 = (-t, t, x - 1)$ vypočítáme souřadnice bodu $2 = (y, 1 + y - x, t)$ a obdobně z přímek $2\text{-}5 = (1 - x - t + y,\ t - y,\ x - 1)$, $Q\text{-}6 = (1, t - y, -1)$ získáme souřadnice bodu $4 = (x, 1, x + t - y)$. Bod 4 má ležet také na přímce $P\text{-}0 = (1 - t, -x, x)$, čili $x \,.\, (x - y) = 0$ a v tom je spor, neboť v případě $x = 0$ splynou konfigurační přímky *4-P-0*, *7-9-0* a v případě $x = y$ splynou konfigurační body P a Q. Schéma N-1 tedy nemůže být realisovatelné.

Výsledku U.1 využijeme ještě při výpočtu souřadnic bodů *2*, *3*, *4* schématu R-1, o němž dokážeme, že realisovatelné je a to způsobem, popsaným v následující kapitole.

Uvažujme dále schémata N-2 až N-8 (o nichž dokážeme, že nemohou být realisovatelná) a schémata R-2 až R-27. Pro všechny z nich platí:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & & \\ \hline 5 & 7 & 9 & 6 \\ 0 & 8 & P & Q \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5\text{-}6\text{-}7 \\ 5\text{-}8\text{-}9\,. \\ 7\text{-}0\text{-}9 \end{array}$$

Body *5*, *7*, *9*, *1* můžeme zřejmě volit takto: $5 = (1, 0, 0)$, $7 = (0, 1, 0)$, $9 = (0, 0, 1)$, $1 = (1, 1, 1)$. Na přímce $5\text{-}7 = (0, 0, 1)$ upevníme bod $6 = (1, x, 0)$, na přímce $1\text{-}6 = (x, -1, 1 - x)$ bod $Q = (y + 1, x + y, y)$ a konečně na přímce $1\text{-}9 = (1, -1, 0)$ bod $P = (1, 1, 1 - t)$. Z přímek $5\text{-}9 = (0, 1, 0)$, $1\text{-}7 = (1, 0, -1)$ vypočítáme souřadnice bodu $8 = (1, 0, 1)$ a z přímek $7\text{-}9 = (1, 0, 0)$, $1\text{-}5 = (0, 1, -1)$ souřadnice bodu $0 = (0, 1, 1)$. Tyto výsledky shrneme:

U.2 $$1 = (1, 1, 1)\,,\quad 5 = (1, 0, 0)\,,\quad 6 = (1, x, 0)\,,\quad 7 = (0, 1, 0)\,,$$
$$8 = (1, 0, 1)\,,\quad 9 = (0, 0, 1)\,,\quad 0 = (0, 1, 1)\,,\quad P = (1, 1, 1 - t)\,,$$
$$Q = (y + 1, x + y, y)\,,\quad \text{kde}\quad x \,.\, y \,.\, t \,.\, (x - 1) \neq 0\,.$$

Uvažme totiž, že v případě $x = 1$ by splynuly přímky *1-6-Q*, *1-9-P*, v případě $t = 0$ splynou body *1* a P; v případě $y = 0$ splynou body *6* a Q; v případě $x = 0$ splynou body *6* a *5*. Je tedy podmínka nahoře napsaná nutná k realisaci schématu.

Zkoumejme schéma N-2. Z přímek *P-Q* a *6-9* vypočítáme snadno souřadnice bodu $2 = (1, x, ty)$. Podmínka, aby na přímkách *2-8*, *P-6*, *Q-0* ležel bod *4* zní $x \,.\, y \,.\, A = 0$, kde $A = t \,.\, (ty + t - 2x - y) + 1$ a zřejmě vzhledem k podmínce, uvedené v U.2 musí být $A = 0$. Obdobně podmínka, aby na přímkách *2-0*, *P-8*, *Q-7* ležel bod *3* zní $B = 0$, kde $B = ty \,.\, (ty + t - x - 1) + 1 - tx$. Vidíme, že také $B \,.\, x -$

$- x . y . A = x . (tx + ty - 1) . (y - 1) = 0$. V případě $x = 0$ již víme, že splynou body *5* a *6*, v případě $tx + ty - 1 = 0$ splynou přímky *2-P-Q*, *3-P-8*, musí tedy být $y = 1$. Z podminky $A = 0$ dostaneme $C = 0$, kde $C = (2t - 1) . (t - x) + 1 - x$. Z těchto výsledků vypočítáme souřadnice bodu $3 = (2t, 1, t)$, ležicího na přímkách *2-0* a *Q-7*. Obdobně z přímek *P-6* a *Q-0* souřadnice bodu $4 = (2, 2tx + x, 2tx)$. Podmínka, aby body *3*, *4*, *5* ležely na jedné přímce tedy zní $tx . (2t - 1) = 0$ a víme již že nesmí být $tx = 0$, čili je $2t = 1$. Pak ale z podmínky $C = 0$ plyne $x = 1$, čili shrnujeme $x = y = 1$, $2t = 1$ a vidíme, že body *2*, *3*, *4* splynou. Schéma N-2 není realisovatelné.

Schéma N-3. Z přímek *P-8*, *Q-0* vypočítáme souřadnice bodu $3 = (ty + t + y + 1, x + y + 1, y + 1 - tx)$, obdobně z přímek *6-0* a *3-5* souřadnice $2 = (t + 1, x + y + 1, y + 1 - tx)$ a konečně z přímek *2-9* a *3-7* souřadnice $4 = (ty + t + y + 1, y^2 + xy + x + 2y + 1, y + 1 - tx)$. Pak souřadnice přímky *4-8* jsou $4\text{-}8 = (-y - 1, t, y + 1)$ a podmínka, aby na ní ležel bod *Q* zní $tx + ty - y - 1 = 0$. Obdobně podmínka. aby bod *4* ležel na přímce *P-6* zní $(tx + ty - y - 1) . (t - x - y) + ty . (x - 1) . (t + 1) = 0$, tedy vzhledem k předchozímu $ty . (x - 1) . (t + 1) = 0$ a z podmínky, uvedené v U.2 plyne $t + 1 = 0$, což je ale sporné, neboť v takovém případě splynou body *2* a *3*.

Schéma N-4. Označme $A = t^2x^2 + t^2xy - t^2x - t^2y + txy + t - x$, $C = x^2 + = tx + ty - x - 1$. Podmínka 2-P-Q zní $Ay = 0$, čili podle U.2 $A = 0$. Aby na přímkách *2-8*, *3-6*, *Q-9* ležel bod *4*, pak $y . (x + y) . (Ax + C) = 0$. V případě $x + y = 0$ by splynuly body *3* a *8*, z čehož je patrno, že také $C = 0$. Protože $A + C . (t - x - tx) = x^2 . (1 - x) . (t + 1) = 0$, pak dle U.2 musí být $t = -1$, ale v tom případě splynou přímky *4-P-0*, *3-P-8*.

Schéma N-5. Z přímek *P-0*, *Q-9* vypočítáme $4 = (y + 1, x + y, x + y - ty - t)$. Obdobně z *6-0* a *P-Q* plyne $2 = (t + ty - x, tx + ty - x^2 . ty - txy)$ a z *2-7 Q-8* bod $3 = (t + ty - x, tx^2y + txy^2 - x^2 + tx + ty - xy, ty - txy)$. Podmínku, aby body *3*, *P*, *5* ležely na jedné přímce můžeme pak vyjádřit ve tvaru $B = C + tx . (t - x) = 0$, kde $C = xy . (t - 1) . (tx + ty - 1) + (t - x) . (ty - x)$. Obdobná podmínka pro body *3*, *4*, *6* zní $A = C + t . (t - x) . (x^2 - x + 1) = 0$. Protože je také $0 = A - B = t . (t - x) . (x - 1)^2$, vidíme z U.2, že by muselo platit $t = x$. V tom případě ale splynou body *2* a *P*.

Schéma N-6. Označme $Ay = t + ty - x$. Pomocí přímek *P-0* a *Q-7* vypočítáme souřadnice bodu $4 = (y + 1, x + y + Ay, y)$. Z přímek *4-6* a *Q-8* souřadnice bodu $3 = (y + 1 + A, x + y + Ay + Ax, y)$ a konečně souřadnice bodu $2 = (y + 1 + A, x + y + Ay + Ax, y + Ay - xy)$ pomocí přímek *3-9* a *6-0*. Podmínka, aby bod *2* ležel na přímce *P-Q* zní $C = Ay . (t - tx - Ay) - xy . (x - 1) = 0$ a podmínka, aby na jedné přímce ležely body *3*, *P*, *5* zní $B = -A . (t - tx - Ay) + t . (x - 1) = 0$, takže je také $0 = C + By = y . (x - 1) . (t - x)$ a podle U.2 by muselo být $t = x$. V tom je však spor, neboť splynou body *2* a *3*.

Schéma N-7. Označme $a = ty + t - x$. Z přímek *P-0* a *Q-9* vypočítáme souřadnice bodu $3 = (y + 1, x + y, y - a)$, obdobně z přímek *3-5* a *Q-8* souřadnice bodu $2 = (y + 1 - a, x + y, y - a)$. Aby na přímkách *2-0*, *3-6* a *Q 7* ležel bod *4* musí být $a \,.\, (y + 1) \,.\, B = 0$, kde $B = a + ax - ty - xy = 0$, neboť v případě $a = 0$ by splynuly body *2*, *3* a v případě $y = -1$ přímky *3-Q-9*, *4-Q-7*. Podmínka, aby na přímce *P-6* ležel bod *2* je $(t + 1) \,.\, (x - t) + Bt = 0$, čili buď $t = -1$, nebo $x = t$, ale v prvém případě splynou přímky *3-P-0*, *4-P-8* a v druhém přímky *3-P-0*, *2-P-6*.

Schéma N-8. Pomocí přímek *P-6* a *Q-9* vypočítáme souřadnice bodu $2 = (y + 1, x + y, y - ty)$. Obdobně z přímek *2-0* a *Q-7* souřadnice bodu $3 = (y + 1, x + y + ty, y)$ a bod $4 = (1 + y - ty, x + y, y - ty)$ získáme z přímek *2-5* a *Q-8*. Přímka *3-4* má souřadnice $3\text{-}4 = (x + ty, -1, 1 - x - ty)$ a má-li na ní ležet bod *6*, musí být $ty = 0$, ale to je spor s U.2.

V následující kapitole ukážeme, jak možno pomocí souřadnic U.2 realisovat všechna schémata R-2 až R-27.

Přicházíme k předpokladu, že každý B^3-bod je typu B^{32}. Pro schémata tohoto typu platí

$$\begin{array}{cccc|c} & & 1 & & 5\text{-}6\text{-}7 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 9 & 5\text{-}8\text{-}9 \,. \\ 0 & 8 & P & Q & 7\text{-}0\text{-}9 \end{array}$$

Zřejmě můžeme souřadnicový systém v tomto případě volit takto: $5 = (1, 0, 0)$, $7 = (0, 1, 0)$, $9 = (0, 0, 1)$, $1 = (1, 1, 1)$. Na přímce $5\text{-}7 = (0, 0, 1)$ upevníme bod $6 = (x, 1, 0)$, na přímce $1\text{-}7 = (1, 0, -1)$ bod $P = (1, y, 1)$ a na přímce $1\text{-}9 = (1, -1, 0)$ bod $Q = (1, 1, t)$. Pak bod *0* leží na přímce $1\text{-}5 = (0, 1, -1)$ a na přímce $7\text{-}9 = (1, 0, 0)$, čili pro jeho souřadnice platí $0 = (0, 1, 1)$. Obdobně z přímek *1-6* a *5-9* vypočítáme souřadnice bodu $8 = (1 - x, 0, 1)$. Shrnujeme:

U.3 $\quad 1 = (1, 1, 1)\,, \quad 5 = (1, 0, 0)\,, \quad 6 = (x, 1, 0)\,, \quad 7 = (0, 1, 0)\,,$

$$8 = (1 - x, 0, 1)\,, \quad 9 = (0, 0, 1)\,, \quad 0 = (0, 1, 1)\,, \quad P = (1, y, 1)\,, \quad Q = (1, 1, t)\,.$$

Schéma N-9. Z přímek *P-8* a *Q-7* vypočítáme souřadnice bodu $4 = (x, txy - ty + y, tx)$. Z přímek *4-0*, *P-9* souřadnice bodu $3 = (x, xy, xy + tx - txy + ty - y)$. Podmínku, aby body *3*, *Q*, *6* ležely na jedné přímce můžeme zapsat ve tvaru $A = (x - 1) \,.\, (2txy - xy + y - tx) + t \,.\, (y - x) = 0$. Z přímek *4-5* a *P-6* vypočítáme ještě souřadnice bodu $2 = (tx - txy + xy, txy + y - ty, tx)$ a zjistíme, že podmínka, aby body *2*, *Q*, *0* ležely na přímce zní: $B = tx \,.\, (ty - t - 3y + 2) + y \,.\, (x + t - 1) = 0$. Tedy také $0 = A \,.\, (t - 2) - B \,.\, x = y \,.\, (t - 1) \,.\, (x - 1) \,.\, C = 0$, kde $C = tx - x - t + 2$. V případě $y = 0$ splynou body *3*, *4*; v případě $t = 1$ splyne bod *Q* s bodem *1* a v případě $x = 1$ bod *8* s bodem *9*. Musí tedy být $C = 0$ a přímku *2-3* můžeme upravit na tvar $2\text{-}3 = (txy - xy - tx, x^2 - x - 1 + xy, x - x^2y)$ a má-li na této přímce ležet bod *8*, pak $x \,.\, (y - 1) \,.\, D = 0$, kde

$D = t - 1 - tx = 0$, neboť v případě $y = 1$ by splynuly body P a 1 a v případě $x = 0$ body 6 a 7. Je tedy také $0 = C + D = 1 - x$ a splynou body $8, 9$. Schéma N-9 tedy není realisovatelné.

Schéma N-10. Z přímek *6-P* a *5 Q* vypočítáme $2 = (x + t - txy, 1, t)$, dále z *2-7* a *Q-0* bod $3 = (x + t - txy, 2t - txy + x + t^2xy - tx - t^2, t)$ a konečně z přímek *P-0* a *2-9* bod $4 = (x + t - txy, 1, 1 - txy + x + t + txy^2 - xy - ty)$. Označme ještě $A = t + y - 2$; $B = xy - x - y$; $C = txy - tx - 1$; $D = (txy - x - t + 1) . B + (1 - x) . A$; $E = txy . (t - 1) + ty . (y - 1) + t . (2 - t - x) + x - y$. Ukažme ještě, že musí platit:

$$\text{(Z)} \qquad txy . (x - 1) . (y - 1) . (txy - x - t + 1) \neq 0 .$$

V případě $x = 0$ splynou body *6, 7*, v případě $y = 0$ přímky *8-5-3* a *5-8-9*; v případě $t = 0$ body *2, 6*; v případě $x = 1$ body *8, 9*; v případě $y = 1$ body *1, P* a v případě $txy - x - t + 1 = 0$ body *2, Q*.

Podmínka, aby na jedné přímce ležely body *3, P, 8* zní $x . E = 0$, tedy $E = 0$, obdobně pro body *4, Q, 8* platí $D = 0$. Souřadnice přímky *3-4* můžeme nyní napsat ve tvaru $(txy - tx - ty + t - 1, 1, tx + 1 - t - x)$ a má-li na ní ležet bod *6*, pak $(x - 1) . C = 0$, z čehož podle (Z) je $C = 0$. Dále se ihned přesvědčíme, že je také $0 = E + C . (ty - txy + x - y) + D . t = ty . (1 - x) . A$, čili podle (Z) také $A = 0$ a kromě toho z podmínky $D = 0$ plyne $B = 0$. Protože ale $0 = C . (y - 2) + t . (2 - y) . A + B = t . (y - 1)^2$ vidíme spor s podmínkou (Z). Schéma N-10 není realisovatelné.

Schéma N-11. Z přímek *P-5* a *Q-0* vypočítáme souřadnice bodu $4 = (1 - y, ty - y, t - 1)$ a obdobně z přímek *Q-6* a *4-9* souřadnice $2 = (1 - y + xy - x, xy - txy - y + ty, txy - t^2xy + t - ty)$. Podmínka, aby body *2, P, 8* ležely na přímce zní: $y . (t - 1) . (x - 1) . (txy - x + y - 1) = 0$. V případě $y = 0$ splynou přímky *2-P-8*, *5-8-9*. V případě $t = 1$ (resp. $x = 1$) body *1, Q* (resp. *8, 9*) a musí tedy být $txy - xty = 1$. Lze tedy souřadnice bodů *2* a *4* upravit takto: $2 = (x^2 - x, x^2 - 1, tx^2)$, $4 = (x, x + 1, 1 + tx)$. Pak z přímek *2-7* a *P-0* vypočítáme $3 = (x - 1, tx + xy - x - y + 1, tx)$ a souřadnice přímky $3\text{-}4 = (tx - x, 1, xy - y - x)$. Na ní má ležet bod *6*, čili $tx^2 - x^2 + 1 = 0$. Pak ale $2 = (x, x + 1, x + 1)$ a bod *2* leží na konfigurační přímce *1-5-0*. Spor je v tom, že má být oddělen od bodů *1, 5, 0*. K tomuto schématu se ještě později vrátíme.

Schéma N-12. Z přímek *P-8* a *Q-7* vypočítáme $3 = (x, txy - ty + y, tx)$. Dále z přímek *3-9* a *0-Q* bod $4 = (x, txy - ty + y, txy - ty + y + tx - x)$ a konečně bod $2 = (tx^2y - txy - x^2 + x + xy, txy - ty + y, tx)$ z přímek *3-5* a *6-Q*. Na přímce *2-4* má ležet bod *8*, pak ale $ty - txy - y = 0$ a splynou přímky *2-4-8*, *5-8-9*.

Schéma N-13. Označme $A = x - y \,.\, (tx + 1 - t)$. Z přímek *P-8* a *Q-7* vypočítáme souřadnice bodu $3 = (x, x - A, tx)$. Podobně z přímek *3-9* a *6-0* souřadnice bodu $2 = (x, x - A, x - A - 1)$. Podmínka, aby na přímkách *2-5* a *Q-8* a *3-6* ležel bod *4* tedy zní $(tx + 1 - t) \,.\, B = 0$, kde $B = (2 - y - t) \,.\, A + tx - ty + xy - 2x + 1 = 0$, neboť v případě $tx + 1 = t$ je $A = x$ a splynou přímky *2-4-5*, *2-3-9*. Podmínka, aby bod *2* ležel na přímce *P-Q* se dá zapsat ve tvaru $A + B = 0$, čili také $A = 0$, ale to je spor, neboť pak splynou body *3* a *Q*.

Schéma N-14. Označme $a = ty - 1$, $b = 1 - x - y$. Z přímek *P-9* a *Q-0* vypočítáme $3 = (1, y, t + y - 1)$; z přímek *Q-6* a *3-7* souřadnice bodu $4 = (tx, tx + xy + b, t^2x + txy - tx)$, z čehož plyne $tx \neq 0$, neboť jinak splynou body *4* a *7*. Podmínka, aby bod *2* ležel na třech přímkách *3-8*, *4-5*, *6-0* zní $(x - 1 - tx) \,.\, A = 0$, kde $A = x + 2b - bt - by = 0$, neboť v případě $x - 1 = tx$ splynou body *3*, *4*. Z přímek *6-0*, *4-5* vypočítáme $2 = (x - xy - tx^2, 1 - y, tx)$. Podmínka, aby bod *4* ležel na přímce *P-8* se dá napsat ve tvaru $x \,.\, (t + y - 1) \,.\, B - A \,.\, tx = 0$, kde $B = ax - a - bt = 0$, neboť v případě $t + y = 1$ splynou přímky *3-4-7*, *2-4-5*. Konečně podmínka, aby bod *2* ležel na přímce *P-Q* zní $B \,.\, (1 - y) - atx^2 = 0$, čili $a = 0$, takže také z $B = 0$ plyne $b = 0$ a z $A = 0$ také $x = 0$, což je ovšem ve sporu s výsledkem $tx \neq 0$.

Schéma N-15. Z přímek *Q-6*, *P-8* vypočítáme souřadnice bodu $4 = (tyx^2 - x^2 + x - txy, txy - ty - xy + y, tx - txy)$. Obdobně z *4-9*, *P-5* vypočítáme souřadnice bodu $3 = (x - txy, y - ty, 1 - t)$. Podmínka, aby bod *3* ležel na přímce *0-Q* potom zní: $(1 - t) \,.\, A = 0$, kde $A = txy - x + y - 1 = 0$ neboť v případě $t = 1$ splynou body *1*, *Q*. Z přímek *6-0*, *P-Q* pak již pomocí $A = 0$ snadno vypočítáme souřadnice bodu $2 = (x, 0 -1)$. Protože $4\text{-}7 = (ty - t, 0, txy - x + 1 - ty)$, pak podmínka, aby na této přímce ležel bod *2* zní $B = ty - tx + x - 1 = 0$. Rovnici přímky *2-3* pak můžeme upravit na tvar $2\text{-}3 = (1, -x - tx^2, x)$ a ihned je patrno, že na ní nemůže ležet bod $8 = (1 - x, 0, 1)$.

Tím jsme ukázali, že všechna tato schémata nemohou být realisovatelná. Jedinou vyjímkou je zde schéma N-11, jestliže ovšem přijmeme definici schémat singulárních (viz kapitola poslední). V následující kapitole ukážeme, že ostatní schémata (skupiny R) již realisovat lze a to takto:

KAPITOLA 4

Užijeme nejprve zápisu U.1 z předchozí kapitoly a dokážeme realisovatelnost schématu R-1. V U.1 jsou zapsány již souřadnice všech konfiguračních bodů, kromě *2*, *3*, *4*. Souřadnice těchto bodů a zároveň podmínky pro neznámé x, y, t vyjádříme v tomto schématu (a obdobně i v následujících) tímto způsobem:

Schémata skupiny U.1

R-1: $2 = (2 - 2t, 1, 2 - y - t)$; $3 = (x, 2 - t - x, 1 - x)$; $4 = (2x, 2, 2 - y)$, kde $ty = x$, $x = 1 - t^2$, $2t^3 + 3t^2 + t = 1$.

Schémata skupiny U.2

R-2: $2 = (1, x, ty)$; $3 = (x + 1, 1, 1 + x - t)$; $4 = (1, ty + t, ty)$, kde $x = t^2 + t - 1$, $y = t^4 + 2t^3 - 1$; $t^6 + 2t^5 - t^3 - 2t^2 + 1 = 0$.

R-3: $2 = (1, x, ty)$; $3 = (1, ty - y - x - 1, ty)$; $4 = (2 + y - ty,\ x + y,\ 1 + y - ty)$, kde $tx + t + 2 + y = 0$; $t^2y + y + 1 = 0$; $t^5 + 4t^4 + 3t^3 + 4t^2 + t + 1 = 0$.

R-4: $2 = (t - tx, x, ty + t + x - 1)$; $3 = (1 - t, tx + ty, 1 - t - x)$; $4 = (1 - x, tx + ty, 1 - t - x)$, kde $t^2y = x - t^2x$; $3x = 2t^5 - 7t^4 + 5t^3 - 4t^2 + 2$; $t^7 - 4t^6 + 4t^5 - 2t^4 + t = 1$.

R-5: $2 = (y + 1, 1, ty)$; $3 = (ty + t, 1, ty)$; $4 = (y + 1, 1, xy + x + y - 2tx)$, kde $y = t - x$; $x = t^3$; $t^5 + t^4 + t^3 - t = 1$.

R-6: $2 = (y + 1 - t, xy, y + 1)$; $3 = (y + 1 - t, -1, y + 1)$; $4 = (y + 1 - t, xy, ty + 2y + 2)$, kde $y = tx - x - 1$; $x = t + 1$; $t^4 + t^3 - t^2 - t = 1$.

R-7: $2 = (1 + t - x, 1, ty)$; $3 = (ty + t, 1, ty)$; $4 = (u, tu + ty, ty)$, kde $x^2 = u$; $1 - ux - x = xy$; $tu = ux + x + 1$; $u^3 + u^2 = 1$.

R-8: $2 = (x, y + x^2, y)$; $3 = (a, a - 1, a + y)$; $4 = (y + 1, y + ty + t, y)$, kde $y = t - at = a - 1 - ax$; $x \cdot (a - 3) = a^4 - a^3 + 2a^2 - 2a + 2$; $a^7 + a^5 - 3a^4 + 4a^3 + 2a^2 + 1 = 0$.

R-9: $2 = (1, x - t, -t)$; $3 = (1, x + ax, -t)$; $4 = (1, t - a^5, -a^5)$, kde $tx = 1 - a$, $y = a^2 - a$, $t = -a^2$, $a^6 - a^5 + 2a^3 - 2a^2 + 2a = 1$.

R-10: $2 = (1, t + y, 2t - xy)$; $3 = (1, t + y, 2y + 3t + 1)$; $4 = (1, -t - y, -2y - 2t)$, kde $xy + y + 2 = t + x + 2 = 0$, $y^3 + 2y + 4 = 0$.

R-11: $2 = (-1, 1, 1 + x)$, $3 = (1, -1, t + 1)$, $4 = (-1, tx, tx + t)$, kde $ty + t + 1 = xy + 1 - x = 0$, $y^3 - 2y^2 + 2 = 0$.

R-12: $2 = (y + 3 - 3a, x + y + 2 - 2a, 1)$, $3 = (x + y + 3 - a, x + y + 2 - 2a, 1)$, $4 = (x + y + 3 - a, t + 1, 1)$, kde $y - t + 2x = tx + x - 1 = at - t - a^2 = a^4 + a - 1 = 0$.

R-13: $2 = (tx + y, tx^2 + x + y - ty, y - ty)$, $3 = (tx + y, x + y, y - ty)$, $4 = (y + 1,\ x + y,\ y - ty)$, kde $x \cdot (t - 2) = 1 - t$, $y = t^3 + 2t^2 + 6x^2 + 6t - 14x - 9$, $t^7 - 2t^6 + t^5 - 5t^4 + 7t^3 + 3t^2 - 2t = 4$.

R-14: $2 = (a, 2 - y, 2 - y - t)$, $3 = (1, 2 - y, 2 - y - t)$, $4 = (y + 1, a, y + a - t)$, kde $t = ax$, $x + y = a$, $x + 1 = a^2$, $a^4 - a^3 - a^2 + a = 1$.

R-15: $2 = (a, 1 + ax, 1)$, $3 = (a, 2 + ax, 1)$, $4 = (2a, 2 + ax, 1)$, kde $t + x^2 = 0$, $x + 1 = a$, $xy - x = 2$, $a^3 - a^2 + 1 = 0$.

R-16: $2 = (t + at, x + 1, 1 - tx + axy)$, $3 = (atx + aty, x + y, atx + aty - 1)$, $4 = (at, 1, 1 - t)$, kde $at = 1 - ay$, $y = ax - 1$, $x . (x + 1) . (2 - x^2 - 3ax) = 1 + 2x$, $x^8 - x^7 - 3x^6 + 2x^5 + 6x^4 + 5x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$.

R-17: $2 = (1, 1 + 2x + 3y, 1 + 3y - x)$, $3 = (1, 1 + 2x + 3y, -t)$, $4 = (1, 3x + 4y + 2, -t)$, kde $x = t + y$, $t = 7y^2 - 2$, $7y^2 . (y + 1) = 1$.

R-18: $2 = (at + a, y - at, 2a - ay)$, $3 = (at + a, y - at, y - 1)$, $4 = (y, y - at, y - 1)$, kde $t + y = 3a$, $ty = 1$, $x = 2ay - a - 1$, $3a^2 = a + 1$.

R-19: $2 = (1, a + x, a)$, $3 = (1, a + x, a + 1)$, $4 = (2, a + 1 - ax, 2a + 2)$, kde $t . (x + a) = x - 1$, $ax . (a + 1) + a^2 + 1 = 0$, $ay + ax + a + x = 0$, $a^5 - 2a^4 - 2a^3 - 4a^2 - 2a = 1$.

R-20: $2 = (t, t + x, t + x - tx)$, $3 = (t, t + x, t + x - tx + 1)$, $4 = (t + 1, t + x, t + x - tx + 1)$, kde $t^5 + t^3 + 2t^2 - t + 1 = t^4 + t^3 + t^2 + 2t - y = tx + x + y = 0$.

R-21: $2 = (10, 1, 9)$, $3 = (10, 1, 15)$, $4 = (2, -1, 3)$, kde $t = -2$, $5y = 3$, $5x = -4$.

R-22: $2 = (1, 2x + 2t, 2t + x)$, $3 = (1, 2x + 2t, 2y - 3)$, $4 = (y + 1, 2t + 2, y)$, kde $tx = 1 - 2ty$, $ty + y = t + 2$, $y^4 - 2y^3 = y - 3$.

R-23: $2 = (1, u - t, u - t - x)$, $3 = (1, u - t, 1 - t)$, $4 = (x, u - t, u - t - 1)$, kde $y = ux - 1 - x$, $tx = 1$, $x^3 - ux^2 + x . (u - 1)^2 + 2 = u$.

R-24: Toto schéma je ekvivalentní se schématem S_1, popsaným v Časopise pro pěstování matematiky, ročník *91* (1966), str. 303. Konfigurace leží na kubice. Schéma R-24 přechází na S_1 permutací (PQ), (59), (806).

R-25: $2 = (1, u + 1, u + 1 - x)$, $3 = (1, u + 1, -y)$, $4 = (1 - tu, u + u^2, tuy)$, kde $y = t - 1$, $x = u . (1 + t + u)$, $tu = 1 - u^2 - u^3 - u^4$, $u^6 + 2u^5 + u^4 - u^3 - 2u^2 - u + 1 = 0$.

R-26: $2 = (x, tx + ty, -xy)$, $3 = (x, tx + ty, ty)$, $4 = (x, 1, -xy)$, kde $t = xy + x$, $y . (x + 2) = -2x - 3$, $x^4 + 2x^3 + 2 = 0$.

R-27: $2 = (1, a, aty)$, $3 = (ty + t, t, ty)$, $4 = (1, a, a - t)$, kde $a = t^3 - t^2$, $tx = t^2 - ty - y$, $t^2y + y = t - 1$, $t^7 - t^5 - 2t^4 - t^2 = 1$.

Schémata skupiny U.3

R-28: $2 = (x, xy, 1)$, $3 = (x + 2, 2xy, 2)$, $4 = (2x, y + 2, 2)$, kde $2y = 3 - t$, $4x = 6 - t$, $t^2 - 5t + 2 = 0$.

R-29: $2 = (1, y, t + y - 1)$, $3 = (t - 1 - a + y - x, y - a, t - 1)$, $4 = (1, 6 - 2t - 2y, 3 - a - t)$, kde $at = a + 1$, $x + a = ax$, $ay + y = 2a$, $a^4 + a^2 + a + 1 = 0$.

R-30: $2 = (1, 1 + u, 2 + u - y)$, $3 = (1, y, t + y - 1)$, $4 = (x, txy - ty - y, tx)$, kde $xy = -t - u$, $t . (u + y) = u + 1$, $y . (3u - 2) = 2u^4 - u^3 - 4u^2 + 2$, $2u^7 + u^6 - 4u^5 - u^4 + 11u^3 + 12u^2 + 3u = 1$.

R = 31: *2* $= (ty, 1, t)$, *3* $= (1, a, t + a - 1)$, *4* $= (1, y, t + a - 1)$, kde $ax = a + y$, $ty = y + 1 - a$, $y = a^2 - 1$, $a^5 - 3a^3 + 2a = 1$.

R-32: *2* $= (a + 2, 2, t)$, *3* $= (a + 2, \ t + 1, t)$, *4* $= (a + 2, 2, 1)$, kde $y = 2$, $t.(a + 1) = a$, $x = 3a + 3 - t$, $a^3 = a + 1$.

R-33: *2* $= (1, t + u + y - 2, \ t + u - 1)$, *3* $= (1, u, t + u - 1)$, *4* $= (1, t + u + y - 2, 2x + y - t)$, kde $y = t - tx$, $tu = x - 1 + 2u$, $u^3 - u^2x + u^2 + 3ux - 2u - x = x^2 - x + 1 = 0$.

R-34: *2* $= (1, 2 - x, x + 1)$, *3* $= (1, 2, x + 1)$, *4* $= (1, 2 - x, 2)$, kde $t = x$, $y = 1 - x$, $x^2 - x + 2 = 0$.

R-35: *2* $= (3 - t - x, 5 - 2t - 2x - y, 1)$, *3* $= (3 - t - x, 2 + y - t, 1)$, *4* $= (x + y, 2 + y - t, 1)$, kde $t = ax + 1 - a$, $y = a + 1$, $x = a^2$, $x^2 - x + 1 = 0$.

R-36: *2* $= (1, a, t + a - 1)$, *3* $= (1, a - a^3, t + a - 1)$, *4* $= (1, a, a + 1 - y)$, kde $a^2x = 1$, $t = ax + y + 1 - 2a$, $y = a^5 - 2a^4 - 2a^3 + 4a^2 - a$, $a^6 - 5a^4 - 2a^3 + 3a^2 = a + 1$.

R-37: *2* $= (u + t - 1, 1, 1)$, *3* $= (u + t - 1, x + u, 1)$, *4* $= (1 - x, x + u, 1)$, kde $xy = 1$, $ut = y$, $y = 1 + u$, $u^5 = 1$, $u \neq 1$.

R-38: *2* $= (1, v^2, u)$, *3* $= (1, v, u)$, *4* $= (1, v^2, vu)$, kde $t = xy$, $x^2 = x - 1$, $y = v + 1 - u$, $u = v^3x$, $v^8 + v^7 - v^5 - v^4 - v^3 + v + 1 = 0$.

R-39: *2* $= (1, 1 - u, 2 - y - u)$, *3* $= (2, 2t - ux - uy + 4u + 2, 4 - 2u - 2y)$, *4* $= (1, 1 - u, t - u)$, kde $x = 2u^6 - 3u^5 + 6u^4 - 7u^3 + 3u^2 - u - 2$, $y = -u^6 + u^5 - 2u^4 + 3u^3 + 3$, $t = u^4 - u^3 + u^2 - u - 1$.

R-40: *2* $= (-x, 3y - t, y)$, *3* $= (-x, 1 + tx, y)$, *4* $= (-x, 3y - t, 2xy + 1)$, kde $t = y.(2 - x)$, $y = x + 1$, $x^4 - 2x^2 - 3x = 1$.

R-41: *2* $= (a + 1, ay + y - a, 1)$, *3* $= (a + 1, 2y - 1, 1)$, *4* $= (1 + a - ay, y, 1)$, kde $2ty = 2 - x$, $xy = ay + x$, $ax = a - 2$, $a^5 + a^4 - a^3 + 3a^2 - 4a + 4 = 0$.

R-42: *2* $= (x, t, x - 1)$, *3* $= (x, 2x - tx - 1, x - 1)$, *4* $= (x, t, at - 1)$, kde $ay = a + t - x$, $x = at.(a - 1)$, $t = a.(a - 1)^2$, $a^6 - 4a^5 + 5a^4 - 2a^3 + 1 = 0$.

R-43: *2* $= (xy - x, xy - 2x + t + y - 3, x - tx)$, *3* $= (y - 1, y - ty, 1 - t)$, *4* $= (xy - x, xy - 2x + t + y - 3, xy - tx + y - 1)$, kde $t = 2 + x - y - xy + y^2$, $y = x^2$, $x^7 - 2x^6 + 2x^4 = x + 1$.

R-44: *2* $= (ay + 1, a + y, a)$, *3* $= (1, a + y, a)$, *4* $= (1, a + y, t)$, kde $x.(a + y - 1) = 1$, $t = 1 - y$, $y^2 = y + 1 - a$, $a^2 = a - 1$.

R-45: *2* $= (1, t + x, t)$. *3* $= (1, t + x + y - 1, \ x + y + 2t - 2)$, *4* $= (1, t + x + y - 1, t + x)$, kde $y = 2 - t - x^2$, $tx = -1$, $x^5 - x^4 + x^2 - x = 1$.

R-46: *2* $= (1, ay^2 - 2ay + a + y - 1, ay^2 - 2ay + a)$, *3* $= (1, ty + 1 - 2t, ty - t)$, *4* $= (1, ty + 1 - 2t, t)$, kde $y.(x + 1) = 2x - a + 1$, $x.(1 - a) = 1$, $t.(1 + a) = a$, $a^5 - a^4 + 2a^3 + 3a = 2$.

R-47: $2 = (1, tux - ux + 2 + u - t, tux + u - ux)$, $3 = (u - tuy, x - tx, t)$, $4 = (1, t + y - 1, t)$, kde $uy = x^2$, $u = x^2 - x + 1$, $t . (1 - 2ux) = u . (2 - x - u)$, $x^9 - 4x^8 + 7x^7 - 8x^6 + 7x^5 - 6x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x = 1$.

R-48: $2 = (1, 5 - 2a, 6 - 3t)$, $3 = (3, a, 3t)$, $4 = (3, a, 2 + a)$, kde $2t = a + 1$, $3y = 1$, $x = -1$, $a^2 = 5$.

R-49: $2 = (1, t + y + 1 - at, t + 1 - at)$, $3 = (1, t + y, t)$, $4 = (1, t + y, t + 1)$, kde $xy = 1 - a$, $x . (a + 1) = t + 1 - at$, $t^2 = t - a$, $a^7 - 2a^3 - 3a^2 + a + 4 = 0$.

R-50: $2 = (x, 1, 1)$, $3 = (x, ty + 2 - t, 1)$, $4 = (ty + x, ty + 2 - t, 1)$, kde $2x = 3 - 2y - t$, $2y = (t - 1)^2$, $t^4 - 2t^3 - t^2 + 2t + 2 = 0$.

R-51: $2 = (t - x, 1 - tu, 1)$, $3 = (t - x, ty, 1)$, $4 = (u + 1 - t, 1 - x, 1)$, kde $t = 1 + u^2$, $ty = t - x + 1 - u$, $tx = t - 1$, $u^4 + u^2 = u - 1$.

R-52: $2 = (2, 1 - 2x, 1)$, $3 = (2, -4 - 2x, x - 1)$, $4 = (2, 1 - 2x, x - 1)$, kde $2ty = -1$, $2y = -3x - 1$, $x^2 + 1 = 0$.

R-53: $2 = (2, 2 - 2u, 2 - 2u - y)$, $3 = (1, y + u, t)$, $4 = (1, 1 - u, u - ut)$, kde $x = t = 1 + u$, $ty = 2$, $u^4 + u^2 + u + 1 = 0$.

R-54: $2 = (vx, a, a - v)$, $3 = (1, y, a - v)$, $4 = (1, a, a - v)$, kde $y = 1 + v$, $vx = ty + y - a$, $vt = (a - 1)^2 + v . (2v - 1)$, $av . (2v^2 + 11v + 5) = 1 + 5v + 8v^2 - 6v^4$, $7v^8 - 13v^7 - 40v^6 - 20v^5 + 12v^4 + 13v^3 - v^2 - 4v = 1$.

R-55: $2 = (x, txy + vy, txy + vy - 1)$, $3 = (x, txy + vy, tx + v)$, $4 = (x, txy + 1 - t, tx)$, kde $xy . (3ty - y - t - 2) = 1 + y - t - y^3$, $tv - t = v^2$, $vy = 1 + v - t$, $v^{12} - 5v^{11} + 14v^{10} - 24v^9 + 29v^8 - 25v^7 + 14v^6 - 7v^4 + 4v^3 + 2v^2 = 3v - 1$.

R-56: $2 = (ax, a + x, x)$, $3 = (a, y, 1)$, $4 = (a, y, at + y - a)$, kde $ty . (x - 1) = x + a - 1 - y$, $xy = 2x - 2ax + 3a - 1 - a^3$, $x . (2a + 1) . a^3 = -a^7 + a^6 - 2a^5 - a^4 + 9a^3 - 3a^2 - 1$, $a^{10} - 2a^9 - a^8 + 6a^7 + 12a^6 + 2a^5 + 18a^4 - 13a^3 + 3a^2 = 2a - 1$.

R-57: $2 = (b, ay, 1)$, $3 = (a + 1, y, 1)$, $4 = (b, ab + b - a - a^2, 1)$, kde $ay = 2 - x$, $t . (a + 1) = a + 2 - y$, $b = a^3 + a^2 + 1$, $ax - x = a^3$, $a^6 + a^5 - 2a^4 + 2a^2 - 2a + 1 = 0$.

R-58: $2 = (ax + x, x, t - 2)$, $3 = (1, y - ay, 1 - a)$, $4 = (1, 1 - x, 1 - a)$, kde $t = x + 1 - a$, $y . (1 - a^2) = 1$, $ax = a^5 + 6a^2 + 6a + 2$; $a^6 + a^4 + 5a^3 + 7a^2 + 4a + 1 = 0$.

R-59: $2 = (a + 1, 1 - a - x, 2 - a)$, $3 = (x + 1, x + 1 + a, x + 1 - a)$, $4 = (a + 1, 1 - a - x, x + 1 + 2a)$, kde $x^3 + x = 1$, $3t = 6 - 2a - 3y$, $a + x = ax$, $3y + 2x = 1$.

R-60: $2 = (tx + xy - 2x, txy - x - 1 + y, 1 - t + txy - x)$, $3 = (1, t + y - 1, t)$, $4 = (txy + 1 - tx - xy + x, ty, t)$, kde $y . (x^2 + x - 1) = -tx^2 + 2x^2 + x - 1$, $t . (x^5 + x^4 - x + 1) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 1$, $x^{10} - 2x^9 - 4x^8 + x^7 - x^6 + x^5 + 5x^4 - 5x^3 - x^2 + 3x = 1$.

R-61: $2 = (vx, av - a + 1, av - a + 1 - v)$, $3 = (1, y - ay, 1 - a)$, $4 = (1, y, 1 - a + ay)$, kde $2x = 3a + 1 - v$, $2t = av - v - 2a$, $2ay = av + a - 1$, $3a^2 = 1 + 2v$, $v^2 + 2 = 0$.

R-62: $2 = (ux, u + x, x)$, $3 = (1, 1 - x - u, t - u - x)$, $4 = (u, uy, 1)$, kde $tx = 2x - 1 - ux$, $y . (u - t + x) = u + x - 1$, $x . (u^2 + u - 1) = -u^3$, $u^8 - u^7 - 2u^6 - 4u^5 + 5u^4 + u^3 + u^2 - 3u + 1 = 0$.

R-63: $2 = (2 - t, 1 + y - ty, 1)$, $3 = (2 - t, y, 1)$, $4 = (t - 1 - y, 3t - 2x - 4, 1)$, kde $t = 1 + y - y^2$, $2x = (y - 1)^3$, $y^4 - 2y^3 = 1$.

R-64: $2 = (1, a, 2y - t)$, $3 = (1, t + 1 - a - y, 2y - t)$, $4 = (1, a, a + 1 - y)$, kde $x = 2y - 4 - 10a$, $t = 4y - 6a + 1$, $2y = 1 + 4a^3$, $4a^2 . (a + 1) = 2a + 1$.

R-65: $2 = (ux, u + y - 1, y - 1)$, $3 = (ux, u - 1, y - 1)$, $4 = (ux, u + y - 1, 2y - 1 - y^2)$, kde $u^7 - 2u^5 + u^4 + 3u^3 - u^2 - 2u + 1 = 0$, $x . (y - 1) = u . (y - 1) + 1$, $y = u^2$, $t = u + 1$.

R-66: $2 = (1, u + 2 + t - y, 1 + x + 2t - y)$, $3 = (1, u + 1, t)$, $4 = (1, u + 1, 2 + u - y)$, kde $x = tu = uy - y$, $y = u^5 + 2u^4 - u^3 - 3u^2$, $u^7 + u^6 - 4u^5 - 3u^4 + 5u^3 + u^2 - u + 1 = 0$.

R-67: $2 = (t + 1, 1, at)$, $3 = (t + 1, 1, x + 2a - 1)$, $4 = (t + 1 - a, 1, t)$, kde $t^2 = at - 1$, $a^2 = a + 1$, $x = at + t - 2a$, $y = 1 - t$.

R-68: $2 = (1, 2y - y^2, xy - x)$, $3 = (1, 2y - y^2, t)$, $4 = (1, x + y, x + 1)$, kde $t = 2 + 2y - y^2 - 2y^3 + y^4$, $x = 1 + y^3 - y^4$, $y^5 - 2y^4 + y^2 + 1 = 0$.

R-69: $2 = (x - tx, 1, t)$, $3 = (1 - u, xy - x, t)$, $4 = (x - tx, xy - x, t)$, kde $x = 2 + u$, $ty = 1$, $tu^2 = 1 - u$, $u^4 + 2u^3 + 2u^2 - u - 1 = 0$.

R-70: $2 = (1, xy, 1 + ax)$, $3 = (1, 1 - t + axy, 1 + ax)$, $4 = (1, y, a)$, kde $x^5 - x^4 + 2x^2 = 1$, $t = -x^4 + x^2 - 2x - 1$, $y . (x^2 - tx + a - 3) + a = 0$, $t + y = 1 + a$.

R-71: $2 = (vx - x, v, 1)$, $3 = (v, av, a)$, $4 = (v, vy, a)$, kde $vt = v + a - vy$, $vy = v . (a + vx) + a - 1$, $a = (1 - v + v^3) . (1 - vx)$, $vx = 1 - v - 2v^2 + 2v^3 - v^5$, $v^9 - v^8 - 3v^7 + 6v^6 + v^5 - 8v^4 + 4v^3 + 3v^2 - 3v + 1 = 0$.

R-72: $2 = (1, vy, va)$, $3 = (1, 1 + a - t, a)$, $4 = (1, y, a)$, kde $vx . (y - a) = 1$, $t = a + x - vx$, $ax = a + v - 1$, $v . (a^3 - a^2 + a - 1) = a^5 - 2a^4 + a^3 + a^2$, $a^{11} - 5a^{10} + 10a^9 - 8a^8 - 2a^7 + 9a^6 - 6a^5 - 3a^4 + 8a^3 - 7a^2 = 1 - 3a$.

R-73: $2 = (t - y + xy - txy, ay + t - ty, at)$, $3 = (a, ay, at + ty - t)$, $4 = (a, ay + t - ty, at)$, kde $(x + a - at) . a^2 = tx$, $axy = a + x$, $x . (1 - a) = 1$, $a^9 - 2a^8 + a^6 - a^3 + a^2 = 1$.

R-74: $2 = (txy + x^2 - tyx^2, x + ty, txy)$, $3 = (1, y, t + y - 1)$, $4 = (x + ty - txy, y, ty)$, kde $x . (t - 1) = (1 - t) . (y - 1) . y - 1$, $(y - 1) . ty^2 = -y^5 + 3y^4 - 2y^3 + y^2 - y + 1$, $y^{11} - 5y^{10} + 11y^9 - 15y^8 + 14y^7 - 12y^6 + 12y^5 - 12y^4 + 8y^3 - 4y^2 + 2y = 1$.

R-75: $2 = (x - y - tx, 1, t - txy)$, $3 = (1 - x, y - xy, t - txy)$, $4 = (1 - x, 1, t - txy)$, kde $y = ux = 1 + x^2$, $ty = t - 1$, $u^3 - 2u^2 = 1$.

R-76: $2 = (3x - 2, a + x, x - 2)$, $3 = (1, y, a)$, $4 = (a + 2, y, a)$, kde $x \,.\, (1 - a) = 2$, $t = a + 1 - y$, $y^2 - 3y + 3 = 0$, $t \,.\, (t + 1) = 1$.

R-77: $2 = (x, t, a)$, $3 = (1 - x, y - xy, y)$, $4 = (x, a - ax, a)$, kde $a^6 - 2a^4 + a + 1 = 0$, $y = a^4 - a^5$, $x = a^4 - a^2$, $t = a + 1$.

R-78: $2 = (1, 2a + 3 - t, a + 2 - t)$, $3 = (1 - a, y + 1 - a, y - 2a)$, $4 = (1, 2a + 3 - t, t)$, kde $x \,.\, (a + 1) = 1$, $2y = x + 2 + 3a - t$, $t \,.\, (a - 1) = a^2 + a - 1$, $a^6 - a^4 - 2a^2 + 1 = 0$.

R-79: $2 = (2, 2y - a - 1, x + 2 - a)$, $3 = (1, y - ay, 1 - a)$, $4 = (2, 2y + x - 1, x + 2 - a)$, kde $a^4 + 4a^2 - 2a + 1 = 0$, $4t = 7 - x - 2y$, $axy = 1 - a - y$, $2ay = a + 1$.

R-80: $2 = (1, ay, a^2 - a^3)$, $3 = (1, xy, xy - ay + t)$, $4 = (1, ay, t)$, kde $x \,.\, (t - a) = t - 1$, $at + 1 = a \,.\, (a + y)$, $ay - y = a$, $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^4 - 3a^3 + 4a^2 - 2a + 1 = 0$.

R-81: $2 = (2, x + 1, 2a)$, $3 = (t, a, at)$, $4 = (2a - x, a - 1, 2a)$, kde $2a^4 - 5a^2 + 6a + 1 = 0$, $tx = x + a - 1$, $x \,.\, (a + y) = a \,.\, (a - 2)$, $2y = 1$.

R-82: $2 = (tu - t, 1, tu - ty)$, $3 = (u^2 - u, 1, u)$, $4 = (tu - t, 1, t)$, kde $x = uy + y - 2u + 1$, $2y - uy = t - 1$, $tu = u + 1$, $u^5 - 4u^4 + 5u^3 - 2u = 1$.

R-83: $2 = (x, a + 1, a)$, $3 = (x, a + x - tx, a)$, $4 = (xy, ay + y, a + 1)$, kde $3x = 4a^5 - a^3 + 3a^2 + 2a + 1$, $3y = 2 + a + a^3 - 4a^5$, $t = 2 + a + 2a^3 - a^4 + 2a^5$, $2a^6 + a^5 + a^4 + 2a^3 + a^2 + a + 1 = 0$.

R-84: $2 = (a, a + t, aty + a^2y - ay)$, $3 = (a, a + 1, at + t)$, $4 = (a, a + t, at + t)$, kde $t = (y - 1) \,.\, ya^2$, $axy = ay + y - 1$, $y \,.\, (1 + a^4) = a^4 - a^2 + 2a + 1$, $a^8 - a^6 + 2a^5 + 3a^4 - a^3 - a^2 - a = 1$.

R-85: $2 = (1, 1 + 2u - v, u - uv)$, $3 = (2t, 2, 1)$, $4 = (1, 1 + 2u - v, t)$, kde $2u^2 + 1 = 0$, $v^2 + 1 = 0$, $x = u - uv + 2t$, $2t = 1 + v$, $y = 2$.

R-86: $2 = (2u - t, y, 1)$, $3 = (2u - t, u, 1)$, $4 = (u + 1, u, 1)$, kde $u^3 - u^2 = 1$, $tu + t - 2u + 1 = ty - 1 = x - 2 - 5u + 2t = 0$.

R-87: $2 = (2 - t, 1 + y - ty, 1)$, $3 = (y, y + 1 - ty, 1)$, $4 = (y, y + ty - t, 1)$, kde $x = y^2$, $tx = 1$, $y^5 - y^3 - 2y^2 + 1 = 0$.

R-88: $2 = (3t, a, 1)$, $3 = (y, a, 1)$, $4 = (3y, 2a + 2, 3)$, kde $x = 2$, $t = y - 1$, $3y = 1 + 2a$, $ay = y + 1$.

R-89: $2 = (u, v + u, 1)$, $3 = (u, y, 1)$, $4 = (u, v + u, tu + v)$, kde $x = -u^2$, $vy \,.\, (v - 1) = x - 2uv$, $t \,.\, (y + u - 1) = y + u - uy$, $uv^3 = v^5 - v^4 - v^3 - 2v^2 - 3v - 1$, $v^9 - 2v^8 - v^7 - v^6 + 7v^4 + 7v^3 + 8v^2 + 5v + 1 = 0$.

KAPITOLA 5

Rovinné konfigurace $(12_4, 16_3)$ v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel tvoří – jak známo – množina dvanácti navzájem různých bodů a šestnáct navzájem různých přímek uspořádaných tak, že každým z bodů procházejí (právě) čtyři přímky a na každé z přímek leží (právě) tři body.

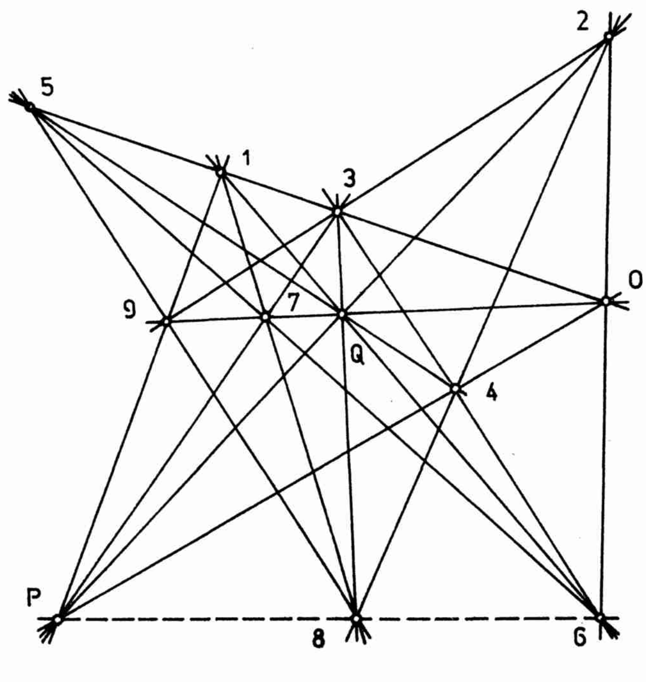
Takto definované rovinné konfigurace nazývejme *regulární*. Jestliže v definici nahradíme slova (právě) slovy (nejméně), mohl by nastat i případ, kdy některým z konfiguračních bodů prochází více přímek a na některé z přímek leží více bodů. Takové konfigurace nazývejme *singulární*. Že skutečně singulární konfigurace existují, ukážeme si v následujícím a uvážíme zároveň, že to umožňuje existence *E*-bodů. Má-li totiž konfiguračním bodem procházet přímka pátá, pak na ní musí ležet všechny tři body, od nichž je zkoumaný bod oddělen, čili zkoumaný bod musí být typu *E*.

Zaměříme se nejprve na konfigurace R-23.

Konfigurace R-23. Pro pohodlí čtenáři vypíši podrobně její schéma a souřadnice všech konfiguračních bodů:

1	*2*	*3*	*4*	*5-6-7*
5 7 9 6	*3 4 6 P*	*4 P Q*	*P Q*	*5-8-9*
0 8 P Q	*9 8 0 Q*	*6 7 8*	*0 5*	*7-0-9*.

$$1 = (1, 1, 1), \quad 2 = (1, u - t, u - t - x), \quad 3 = (1, u - t, 1 - t),$$
$$4 = (x, u - t, u - t - 1), \quad 5 = (1, 0, 0), \quad 6 = (1, x, 0), \quad 7 = (0, 1, 0),$$
$$8 = (1, 0, 1), \quad 9 = (0, 0, 1), \quad 0 = (0, 1, 1), \quad P = (1, 1, 1 - t),$$
$$Q = (y + 1, x + y, y), \quad \text{kde} \quad x^3 - ux^2 + x \, . \, (u - 1)^2 + 2 = u,$$
$$y = ux - 1 - x, \quad tx = 1 .$$



Tato jednoparametrická konfigurace (obecně regulární), umožňuje dva případy singulárního řešení.

a) Pro hodnotu $u = 0$, tedy $x^3 + x + 2 = 0$, leží *E*-bod *0* oddělený od bodů *3*, *8*, *Q* na konfigurační přímce *3-8-Q*.

b) V případě $u = 1$, tedy $x^3 - x^2 + 1 = 0$ dostaneme dokonce dvě singularity, které tvoří bod *Q* (oddělený od bodů *7*, *9*, *0*) a bod *3*, (oddělený od bodů *1*, *5*, *0*).

Tato singulární konfigurace je nakreslena na přiloženém obrázku. Poznamenávám k tomu, že v konfiguraci existuje vždy (pro libovolnou přípustnou volbu parametru u) jedna „cizí“ přímka *P-8-6*. Dá se poměrně snadno dokázat, že konfigurační body nemohou ležet na kubice.

Konfigurace R-37.

1	*2*	*3*	*4*	*5-6-7*
5 7 9 6	*3 4 P Q*	*4 P Q*	*P Q*	*5-8-9*.
0 P Q 8	*7 9 8 6*	*5 6 0*	*0 8*	*7-0-9*.

$$1 = (1, 1, 1)\,,\quad 2 = (u + t - 1, 1, 1)\,,\quad 3 = (u + t - 1,\ x + u,\ 1)\,,$$
$$4 = (1 - x, x + u, 1)\,,\quad 5 = (1, 0, 0)\,,\quad 6 = (x, 1, 0)\,,\quad 7 = (0, 1, 0)\,,$$
$$8 = (1 - x, 0, 1)\,,\quad 9 = (0, 0, 1)\,,\quad 0 = (0, 1, 1)\,,\quad P = (1, y, 1)\,,$$
$$Q = (1, 1, t)\,,\quad \text{kde}$$
$$xy = 1\,,\quad y = ut\,,\quad y = u + 1\,,\quad u^5 = 1\,,\quad u \neq 1\,.$$

Lze dokázat, že toto schéma je možno realisovat jen tímto způsobem a vždy při něm nastanou singularity:

E-bod *2* (oddělený od bodů *1*, *5*, *0*) leží na přímce *1-5-0* ,
E-bod *7* (oddělený od bodů *4*, *8*, *Q*) leží na přímce *4-8-Q* ,
E-bod *9* (oddělený od bodů *3*, *6*, *P*) leží na přímce *3-6-P* .

Konfigurace R-69.

1	*2*	*3*	*4*	*5-6-7*
5 6 7 9	*3 4 6 P*	*4 P Q*	*Q P*	*5-8-9*.
0 8 P Q	*8 7 0 Q*	*5 6 0*	*8 9*	*7-0-9*

$$1 = (1, 1, 1)\,,\quad 2 = (x - tx, 1, t)\,,\quad 3 = (1 - u,\ xy - x,\ t)\,,$$
$$4 = (x - tx, xy - x, t)\,,\quad 5 = (1, 0, 0)\,,\quad 6 = (x, 1, 0)\,,\quad 7 = (0, 1, 0)\,,$$
$$8 = (1 - x, 0, 1)\,,\quad 9 = (0, 0, 1)\,,\quad 0 = (0, 1, 1)\,,\quad P = (1, y, 1)\,,$$
$$Q = (1, 1, t)\,,\quad \text{kde}$$
$$x = 2 + u\,,\quad ty = 1\,,\quad tu^2 = 1 - u\,,\quad u^4 + 2u^3 + 2u^2 - u - 1 = 0\,.$$

Je to jediná možná realisace a nastává u ní vždy singularita u *E*-bodu *5*, který je oddělen od bodů *2*, *P*, *Q* a leží na přímce *2-P-Q*, jejíž souřadnice jsou $(0, -t, 1)$.