

## Werk

**Label:** Periodical issue

**Jahr:** 1980

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X\\_0105|log51](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0105|log51)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

# ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 105 \* PRAHA 25. 8. 1980 \* ČÍSLO 3

---

## O JISTÝCH ROVINNÝCH KONFIGURACÍCH $(12_4, 16_3)$ OBSAHUJÍCÍCH $B, C$ A $E$ -BODY A KONFIGURACÍCH SINGULÁRNÍCH

VÁCLAV METELKA, Liberec

(Došlo dne 27. listopadu 1975)

### ÚVOD

V této úvodní kapitole dovolím si zopakovat některé základní pojmy a definice z teorie rovinných konfigurací a to pouze v minimálním rozsahu, potřebném k pochopení problematiky, již se tato práce týká.

V konfiguracích  $(12_4, 16_3)$  je — jak známo — dvanáct konfiguračních bodů a šestnáct konfiguračních přímků uspořádáno v projektivní rovině tak, že každým z těchto bodů procházejí čtyři přímky a na každé z těchto přímků leží tři body.

Systematické vyhledávání konfigurací si vyžádalo zavedení jisté klasifikace, o níž se stručně zmíním.

**Definice 1.** Konfigurační body označme čísly  $1, 2, 3, \dots, 12$ . Leží-li dva z konfiguračních bodů (třeba  $1$  a  $2$ ) na konfigurační přímce, pak říkáme, že tyto body jsou *spojeny* (což stručně zapisujeme  $1-2$ ). V opačném případě jsou body  $1$  a  $2$  od sebe *odděleny* (stručně  $1 : 2$ ). Konfigurační přímku, na níž leží body  $1, 2, 3$  označíme  $1-2-3$ .

Umluvme se ještě, že v dalším (pokud to nepovede k nedorozumění) budeme slovo „konfigurační“ vynechávat, neboť o jiných bodech a přímkách se v této práci téměř nemluví.

V konfiguraci  $(12_4, 16_3)$ , jak již bylo řečeno, prochází každým bodem čtveřice přímků. Je tedy každý bod spojen s osmi body dalšími, to znamená, že od tří bodů je oddělen.

**Definice 2.** Nechť bod  $4$  je oddělen od bodů  $1, 2, 3$  (stručně  $4 : 1, 2, 3$ ). Říkáme, že bod  $4$  je typu  $A$ , jestliže  $1 : 2, 3$  a také  $2 : 3$ ,  $B$ , jestliže  $1-2, 1-3, 2-3$ , ale ne  $1-2-3$ ,  $C$ , jestliže jen dva z bodů  $1, 2, 3$  jsou odděleny,  $D$ , jestliže jen dva z bodů  $1, 2, 3$  jsou spojeni,  $E$ , jestliže  $1-2-3$ .

Snadno zjistíme, že tím jsou vyčerpány všechny možnosti. Podaří-li se nám uspořádat všech dvanáct bodů do šestnácti trojic (přímek) tak, by bylo vyhověno základní definici, že každý bod se vyskytuje ve čtyřech z těchto trojic, pak dostaneme tak zvané *konfigurační schéma*. Nutno ovšem ještě dokázat, že toto schéma je skutečně realizovatelné v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel, čili, že skutečně reprezentuje konfiguraci. Ke každému *realizovatelnému* schématu existuje tedy jedna konfigurace, ale ne naopak. Snadno totiž uvážíme, že geometrické vlastnosti konfigurace se nemění při libovolné permutaci bodů  $1, 2, 3, \dots, 12$ , ale touto permutací se změní schéma:

**Definice 3.** Jestliže lze jedno konfigurační schéma získat z druhého některou z permutací bodů  $1, 2, \dots, 12$ , pak říkáme, že obě tato schémata patří do *téže třídy*. Dvě konfigurace pokládáme za *ekvivalentní* tehdy a jen tehdy, jestliže jejich schémata patří do téže třídy.

Přistoupíme nyní k vlastní klasifikaci. Je nutno především zjistit, kolik bodů typu  $A, B, \dots$  atd. se v konfiguraci vyskytuje. Tím získáme její typ. Tak ku příkladu říkáme, že konfigurace je typu  $B_3 C_6 E_3$ , jestliže obsahuje tři body typu  $B$ , šest bodů typu  $C$  a tři  $E$ -body. Je zřejmé, že dvě konfigurace různých typů nemohou být ekvivalentní. S druhé strany se ukazuje, že klasifikace konfigurací jen podle typů je stále velmi hrubá a je třeba zavést kritéria podstatně kontrastnější. Jednou z cest je ku příkladu tato:

Předpokládejme, že  $4$  je bod typu  $C$ , oddělený od bodů  $1, 2, 3$ , a nechť třeba  $1-2, 2-3, 1:3$ . Snadno se přesvědčíme, že na dvou ze šestnácti přímek nemůže ležet žádný z bodů  $1, 2, 3, 4$ . Podle toho, zda tyto dvě přímky se protínají v bodě konfiguračním, nebo nekonfiguračním může zkoumaný bod  $4$  zařadit do jednoho z typů  $C^1$ , nebo  $C^2$ .

Zcela obdobná úvaha platí i pro  $E$ -body, což shrnujeme v následující definici:

**Definice 4.** Buď  $4$  bod typu  $C$  (resp.  $E$ ), oddělený od bodů  $1, 2, 3$ . Pak existují dvě přímky  $(p, q)$ , na nichž neleží žádný z bodů  $1, 2, 3, 4$ . Protínají-li se přímky  $p, q$  v konfiguračním bodě, říkáme, že  $4$  je typu  $C^1$  (resp.  $E^1$ ). V opačném případě je bod  $4$  typu  $C^2$ , (resp.  $E^2$ ).

U bodů typu  $B$  je situace poněkud komplikovanější, neboť zde existuje dokonce trojice přímek, na nichž neleží ani zkoumaný  $B$ -bod, ani žádný z bodů od nichž je oddělen. Tato okolnost nám ovšem umožní další klasifikaci  $B$ -bodů a proto jí využijeme:

**Definice 5.** Buď  $4$  konfigurační bod typu  $B$ , oddělený od bodů  $1, 2, 3$ . Pak existují tři přímky  $(p, q, r)$ , na nichž neleží žádný z bodů  $1, 2, 3, 4$ . Jestliže se přímky  $p, q, r$  protínají ve třech různých bodech, pak buď jeden, nebo dva, nebo všechny tři jsou konfigurační a bod  $4$  je buď typu  $B^1$ , nebo  $B^2$ , nebo  $B^3$ . V ostatních případech říkáme, že bod  $4$  je typu  $B^4$ .

**Poznámka.** Uvažme, že v případě  $B^4$ -bodu se přímky  $p, q, r$  protínají vždy v jednom bodě a to konfiguračním.

Zajisté by bylo možno uvažovat o obdobné klasifikaci také v případě bodů typu  $A$  a  $D$ . Jak plyne z dalšího je to však již zbytečné.

Dosud byly v literatuře popsány všechny konfigurace obsahující nejméně jeden bod typu  $A$ , nebo  $D$ . Kromě toho jsou již také známy všechny konfigurace typu  $C_{12-i}E_i$ , kde  $i = 0, 1, 2, \dots, 12$ . Z toho plyne, že zbývá zkoumat již jen konfigurace, obsahující aspoň jeden  $B$ -bod.

Tento úkol je velmi rozsáhlý a zaměřil jsem se proto v této práci pouze na konfigurace, obsahující kromě  $C$  a  $E$ -bodů nejméně jeden bod typu  $B^3$  a žádný bod typu  $B^4$ .

## KAPITOLA 1

Cílem této kapitoly je vyhledat všechna konfigurační schémata podle pokynů posledního odstavce úvodní kapitoly.

Nechť tedy  $1$  je  $B^3$ -bod, oddělený od bodů  $2, 3, 4$ . Pak existuje trojice přímek, na nichž neleží žádný z bodů  $1, 2, 3, 4$  a kromě toho se tyto tři přímky protínají ve třech konfiguračních bodech. Označme je  $5, 7, 9$  a přímky  $5-6-7, 5-8-9, 7-0-9$ . Zbývající dva konfigurační body nechť jsou  $P$  a  $Q$ .

Zvláštní postavení trojice bodů  $5, 7, 9$  a dvojice  $P, Q$  vzhledem k bodu  $1$  nám umožňuje ještě kontrastněji klasifikovat  $B^3$ -body a usnadňuje tak zjišťování ekvivalence.

**Definice 1.1.** Jestliže na přímkách  $1-5-$ ,  $1-7-$ ,  $1-9-$  neleží žádný z bodů  $P, Q$ , pak říkáme, že  $B^3$ -bod  $1$  je typu  $B^{30}$ . Obdobně, leží-li na těchto přímkách jen jeden (resp. oba dva) z bodů  $P, Q$ , pak říkáme, že  $B^3$ -bod  $1$  je typu  $B^{31}$  (resp.  $B^{32}$ ). Body  $P, Q$  nazveme póly  $B^3$ -bodu  $1$ .

Poznamenávám, že mnohdy je přehlednější použít ještě jiného zápisu konfiguračních přímek, protínajících se v jednom konfiguračním bodě. Tak ku příkladu přímky z předchozí definice lze zapsat také ve tvaru:

$$\frac{1}{5 \ 7 \ 9}.$$

. . .

Známe zatím tři konfigurační přímky ( $5-6-7, 5-8-9, 7-0-9$ ). Zapišme je spolu se zbývajícími třinácti přímkami do následujícího (symbolického) schéma:

(1)	2-3-	$\frac{2}{\quad}$	$\frac{3}{\quad}$	$\frac{4}{\quad}$	$\frac{1}{5 \ 7 \ 9}$	5-6-7
	2-4-	. .	. .	. .	5 7 9 .	5-8-9
	3-4-	. .	. .	. .	. . . .	7-0-9
	(q)	(r)	(s)	(t)	(u)	

**Předpoklad I.** Předpokládejme existenci nejméně jednoho  $B^{3^0}$ -bodu.

Uvažovaný  $B^{3^0}$ -bod označíme ovšem  $1$  a použijeme zápisu (1). Vzhledem k vlastnostem  $B^{3^0}$ -bodu musí tedy být

$$(I.1) \quad \begin{array}{c} 1 \\ \hline 5 \ 7 \ 9 \ P \\ 0 \ 8 \ 6 \ Q \end{array}; \quad P, Q \in (r), (s), (t) \Rightarrow 6 : 8, 0; 8 : 0.$$

**Předpoklad I.1.** Předpokládejme existenci nejméně jednoho  $B^{3^0}$ -bodu, jehož oba póly jsou typu  $E$ .

Zkoumaný  $B^{3^0}$ -bod označíme opět  $1$ , abychom mohli využít zápisů (1) a (I.1). Body  $P, Q$  jsou tedy oba typu  $E$  a nemohou být oba odděleny do téže trojice (pak by totiž oba byly typu  $B^4$ ).\*) Přicházejí tedy v úvahu jen následující tři možnosti

$$(5, 6, 7; 5, 8, 9), \quad (5, 6, 7; 7, 0, 9), \quad (5, 8, 9; 7, 0, 9)$$

(od první trojice je oddělen jeden z bodů  $P, Q$ , od druhé druhý). Uvažme, že schéma (1) a výsledek (I.1) se nemění permutací (68), (79) a vzhledem k této permutaci jsou ekvivalentní poslední dvě z předchozích možností. Zbývá tedy nadále uvažovat jen první dvě možnosti, ale ty jsou rovněž ekvivalentní vzhledem k přípustné permutaci (597), (680). Můžeme dokonce předpokládat, že je přímo

$$P : 5, 6, 7; \quad Q : 5, 8, 9,$$

protože i  $(PQ)$  je permutace přípustná. Bod  $P$  je tedy spojen s body 8, 9, 0 a libovolná permutace bodů 2, 3, 4 připouští volbu

$$\begin{array}{c} P \\ \hline 2 \ 3 \ 4 \\ 8 \ 9 \ 0 \end{array},$$

z čehož plyne 3-4-8 a body 5, 6 patří do (q).

Dále mohou nastat již jen dva případy

- a) buď je  $5 : 3$ , pak 2-4-5, 2-3-6, 4-Q-6,  $4 : 1, 7, 9$  a musí být 2-7 (jinak by totiž bod 2 byl typu  $B^4$ ), čili 2-7-Q, 3-Q-0. Tak jsme dostali první úplné schéma, které jsem označil N-1 a je uvedeno v následující kapitole ve skupině N-schémat.
- b) zbývá ještě uvažovat případ, kdy  $5-3$ , pak ovšem musí být 2-3-5, 2-4-6, 4-Q-7, 2-Q-0, 3-Q-6 a dostáváme další schéma, které však již registrovat nebudeme, neboť vzhledem k permutaci (243), (68), (79),  $(PQ)$  přechází na tvar předchozího schématu N-1.

Tím jsou vyčerpána všechna schémata z předpokladu P.I.1.

---

\*) Lze velmi snadno dokázat, že nutná a postačující podmínka, aby dva konfigurační body  $U, V$  byly odděleny od téže trojice zní: oba body  $U, V$  jsou typů  $B^4$ .

**Předpoklad I.2.** Předpokládejme existenci aspoň jednoho  $B^{30}$ -bodu, jehož jeden pól je typu  $E$ .

Opět, jako v předchozích případech označíme zkoumaný  $B^{30}$ -bod  $1$  a využijeme předchozích výsledků, tedy (1) a (I.1). Vzhledem k předpokladu I.1 je jen jeden z bodů  $P, Q$  typu  $E$  a permutace  $(PQ)$  umožňuje předpokládat, že je to bod  $P$ . Ten je oddělen buď od trojice  $5, 6, 7$ , nebo od  $5, 8, 9$ , nebo  $7, 0, 9$ . Přípustné permutace (68), (79) a (597), (680) dovolují předpoklad  $P : 5, 6, 7$ , z čehož plyne  $6 : 8, 0, P$ . Vidíme, že bod  $Q$  je oddělen od tří bodů množiny  $(5, 7, 8, 9, 0)$ , takže vzhledem k přípustné permutaci (57), (80) nastane jedna z možností:

$$Q : (5, 7, 8; 5, 7, 9; 5, 8, 9; 5, 8, 0; 5, 9, 0; 8, 9, 0).$$

Z těchto případů možno ovšem ihned vyloučit  $Q : 5, 8, 9$ , neboť bod  $Q$  již nesmí být typu  $E$  a kromě toho oba případy  $Q : 8, 0$  (V takovém případě by totiž bod  $8$  byl typu  $D$ ). Protože bod  $9$  je spojen s bodem  $P$ , musí být již oddělen do bodu  $Q$  (aby jím procházely jen čtyři konfigurační přímky). Z těchto úvah je patrné, že je vždy  $Q : 5, 9, T$ , kde  $T = 7, 0$ . Libovolná permutace bodů  $2, 3, 4$  nám umožňuje ještě volbu přímek  $2-Q-6, 3-4-6, 2-3-5$  a protože bod  $8$  je spojen s oběma body  $P, Q$ , nemůže patřit do množiny  $(q)$ . Tyto výsledky shrneme:

$$(a) \quad 2-3-5, 2-Q-6, 3-4-6, P : 5, 6, 7; Q : 5, 9, T, \quad \text{kde } T = 7, 0 \quad \text{a} \quad 8 \notin (q).$$

Uvažujme nejprve případ  $T = 0$ , tedy  $Q : 5, 9, 0; 0 : 6, 8, Q, 2-4-0, 3-P-0$  a musí být ještě  $2-8$  (v opačném případě totiž je  $2 : 1, 7, 8; 9 : 3, 4, Q$ , takže bod  $9$  je typu  $B^{30}$  a oba jeho póly jsou typu  $E$ . Takové konfigurace jsme však již hledali za předpokladu I.1). Je tedy  $2-8-P, 4-8-Q$  (aby bod  $2$  nebyl typu  $B^4$ ) a poslední dvě přímky tohoto schématu jsou  $4-P-9$  a  $3-Q-7$ . Toto úplné schéma je uvedeno v následující kapitole v tabulce R-schémat. Je to schéma R-1.

Zbývá řešit případ  $T = 7$ , tedy  $Q : 5, 7, 9$ , čili  $2-4-7, 9 : 2$  (jinak bod  $8$  je typu  $D$ ). Uvážíme nejprve, že jsou vyloučeny případy  $4-P-0$  a také  $0 : 4$ . V prvním z těchto případů je totiž  $4-Q-8, 3-P-9, 3-Q-0, 2-P-8$  a bod  $9$  je typu  $B^{30}$ , jehož oba póly jsou typu  $E$ , právě tak jako v případě druhém, kdy  $4-Q-8, 4-P-9$ .

Shrnujeme:  $Q : 5, 7, 9; 2-4-7, 9 : 2$  a protože je  $4-0$ , ale na této přímce nesmí ležet bod  $P$ , pak  $4-0-Q, 3-Q-8$  a mohou nastat dva případy:

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{5 \ 7 \ 9 \ P} & \frac{5-6-7}{5-8-9} & \frac{2}{3 \ 4 \ P \ Q} & \frac{3}{4 \ P \ Q} \quad \frac{4}{P \ Q} \\ 0 \ 8 \ 6 \ Q & 7-0-9 & 5 \ 7 \ a \ 6 & 6 \ b \ 8 \quad c \ 0 \end{array}, \quad \text{kde } a = 8, 0; b = 9, 0; c = 8, 9.$$

V případě  $a = 8$ , tedy  $b = 0, c = 9$  dostaneme schéma ekvivalentní s již registrovaným R-1 vzhledem k permutaci (19), (23), (4Q), (80).

Rovněž v případě druhém, kdy  $a = 0, b = 9, c = 8$  přechází toto schéma permutací (19), (23Q4), (57) na schéma R-1. Tím jsou vyčerpány všechny případy za předpokladu I.2. Z toho plyne, že nadále již za předpokladu I žádný z pólů  $B^{30}$ -bodu

nesmí již být typu  $E$ . Schéma však musí obsahovat aspoň jeden  $E$ -bod a je to zřejmě jeden z bodů 2, 3, 4. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že je to bod 2 a pak tedy buď  $2 : 1, 5, 0$ , nebo  $2 : 1, 7, 8$ , nebo  $2 : 1, 6, 9$ . Vzhledem k permutacím (79), (68) a (57), (80) vidíme, že tyto možnosti jsou ekvivalentní a možno tedy vždy volit  $2 : 1, 7, 8$ , pak ale bod 5 je oddělen od tří bodů z množiny  $(3, 4, P, Q)$  a je vždy typu  $B^{30}$ . Kromě toho jeden z jeho pólů (bod 2) je vždy typu  $E$ . Nemůžeme tedy již dostat žádné nové schéma a všechna schémata za předpokladu I jsou již registrována.

**Předpoklad II.** Předpokládejme nadále, že konfigurační schéma obsahuje (kromě  $E$  a  $C$ -bodů) aspoň jeden bod typu  $B^{31}$ , ale již žádný bod typu  $B^{30}$  (a ovšem také žádný z bodů  $B^4, A, D$ ).

Zkoumaný  $B^{31}$ -bod označíme opět 1 a využijeme zápisu (1). Podle předpokladu jen jeden z bodů  $P, Q$  leží na jedné z přímek 1-5, 1-7, 1-9. Vzhledem k přípustným permutacím (57), (80); (59), (60) a  $(PQ)$  lze přímo předpokládat:

$$(II) \quad \begin{array}{c} 1 \\ \hline 5 \ 7 \ 6 \ 9 ; \ P, Q \in (r), (s), (t) ; \ 8 : 0 . \\ 0 \ 8 \ Q \ P \end{array}$$

Okamžitě totiž uvážíme, že body  $P, Q$  patří do všech třech množin  $(r), (s), (t)$ , neboť jinak by jimi neprocházely čtyři konfigurační přímky a zbývá již jen dokázat, že je  $8 : 0$ . Předpokládejme na chvíli, že je  $8-0$ , pak především možno volit  $8-0-2$  a z toho plyne  $2-P-Q, 6 : 8, 9, 0$ . Vzhledem k přípustné permutaci (34) lze nadále volit  $6-P-3$ , z čehož  $2-4-6$ . Nyní se již snadno přesvědčíme, že schéma neobsahuje  $C$ -body a v tom je spor. Je tedy skutečně také  $8 : 0$ .

(a) *Nechť zkoumaný  $B^{31}$ -bod 1 má oba póly typu  $E$ .*

Pak především musí být  $P : 5, 6, 7$  a možno volit  $2-P-Q, 3-P-8, 4-P-0$  a protože bod 6 nepatří do žádné z množin  $(s), (t)$ , je  $3-4-6$ . Bod  $Q$  je podle předpokladu také typu  $E$  a je tedy oddělen od jedné z trojic  $(5, 8, 9), (7, 0, 9)$ . Permutace (57), (80), (34) připouští předpoklad  $Q : 7, 0, 9$ , takže  $8-Q-4, 3-Q-5$  a má-li schéma obsahovat aspoň jeden  $C$ -bod, musí být  $6 : 0$ , tedy  $2-6-9, 2-4-7, 2-3-0$ . Tím jsme dostali úplné schéma R-2.

(b) *Nechť 6-9 a bod  $Q$  je typu  $E$ .*

Pak  $9 : 3, 4, Q$ , čili bod  $Q$  je oddělen od jedné z trojic  $(5, 8, 9), (7, 0, 9)$ . Vzhledem k permutaci (57), (80) lze předpokládat  $Q : 5, 8, 9$  a libovolná permutace bodů 2, 3, 4 připouští volbu přímek  $2-6-9, 2-P-Q, Q-7-3, Q-0-4$ . Z toho  $8 : 6, 0, Q$  a bod  $P$  již nesmí být typu  $E$  (viz případ (a)), čili  $0 : 6, 8, P$  a pak  $2-3-0, 2-4-8, 3-P-8, 6-P-4$  (neboť jinak  $0$  je typu  $D$ ) a poslední konfigurační přímka je  $3-4-5$ . Tím jsme dostali schéma N-2.

(c) *Nechť 6-9 a jeden z pólů bodu 1 je typu E.*

Podle předchozího je to bod  $P$  a tedy  $P : 5, 6, 7$ . Možno tedy volit  $2-P-Q$ ,  $2-6-9$ ,  $3-P-8$ ,  $4-P-0$ , z čehož  $6 : 8, 0, P$  a  $3-4-6$ . Bod  $Q$  již musí být spojen s jedním z bodů  $8, 0$  (jinak je  $8$  typu  $D$ ). Vzhledem k permutaci  $(34)$ ,  $(57)$ ,  $(80)$  možno také volit  $8-Q-4$ , tedy  $2-3-0$  (aby bod  $8$  nebyl typu  $D$ ) a nemá-li být bod  $Q$  typu  $E$ , pak  $5 : Q$ , čili  $2-4-5$ ,  $3-Q-7$ . Toto úplné schéma však již nemusíme registrovat, neboť je ekvivalentní s  $R-2$  vzhledem k permutaci  $(19)$ ,  $(2Q)$ ,  $(34)$ ,  $(80)$ .

(d) *Nechť 6-9 a jeden z bodů 5, 7 je typu E.*

Pak především opět možno volit  $2-6-9$ ,  $2-P-Q$  a permutace  $(57)$ ,  $(80)$  umožňuje předpoklad, že  $5$  je  $E$ -bod, tedy  $5 : 2, P, Q$ , čili  $3-4-5$ . Aby bod  $Q$  již nebyl typu  $E$  (což jsme zkoumali výše), musí být  $Q-8$  a permutace  $(34)$  dokonce umožňuje volbu  $4-Q-8$ . Mají-li bodem  $6$  procházet čtyři přímky, pak  $6-P$  a nemá-li být bod  $8$  typu  $D$  musí být ještě  $P : 7$ .

Uvažme dále, že možno předpokládat  $4-6$  (neboť v případě  $4 : 6$  je  $4-P-0$ ,  $2-4-7$ ,  $3-Q-0$ ,  $2-3-8$ ,  $3-P-6$  a toto úplné schéma přechází permutací  $(19)$ ,  $(2Q)$ ,  $(34)$ ,  $(80)$  na již známé  $N-2$ ). Je tedy nadále  $4-6-P$  a z toho plyne  $2-4-0$ , takže mohou nastat dva případy: buď  $2-3-7$ ,  $3-P-8$ ,  $3-Q-0$ , nebo  $2-3-8$ ,  $3-P-0$ ,  $3-Q-7$ . Zaznamenáme pouze první z nich (schéma  $R-3$ ), neboť vzhledem k  $(19)$ ,  $(2Q)$ ,  $(80)$  patří obě schémata do téže třídy.

(e) *Nechť je 6-9.*

Pak nejprve možno bez újmy na obecnosti volit  $2-6-9$ ,  $2-P-Q$ ,  $9 : 3, 4, Q$ ;  $6 : 8, 0$  a  $8 : 0$ . Vzhledem k předchozím výsledkům musí být  $E$ -bodem jediné bod  $2$ , který je oddělen od jedné z trojic  $(1, 5, 0)$ ,  $(1, 7, 8)$ . Známa permutace  $(57)$ ,  $(80)$  opět připouští jednoznačnou volbu  $2 : 1, 5, 0$ , takže  $7 : P, Q$  a musí být  $3-4-6$  (v opačném případě buď  $5$  je  $E$ -bod, nebo bodem  $8$  a  $0$  neprochází čtveřice přímek). Z toho plyne  $6 : 8, 0, P$  a také  $5-P$  (aby bod  $P$  nebyl typu  $E$ ), pak ale  $Q : 5, 7, 9$ ;  $P : 6, 7, 8$  a bod  $8$  je zcela nepřípustně typu  $D$ .

**Předpoklad II.1.** *Předpokládejme existenci aspoň jednoho  $B^{31}$ -bodu, jehož póly jsou spolu spojeny.*

Zkoumaný  $B^{31}$ -bod ovšem označíme  $1$  a využijeme všech předchozích výsledků. Především vidíme, že lze volit  $2-P-Q$ , takže v množině  $(r)$  může ležet jen jedna z dvojic  $(68)$ ,  $(60)$ ,  $(69)$ ,  $(80)$ . Poslední dvě možnosti můžeme přímo vyloučit – vzhledem k předchozím výsledkům a kromě toho permutace  $(57)$ ,  $(80)$  umožňuje předpokládat, že je  $6, 0 \in (r)$ , tedy  $2-6-0$ . Z toho plyne  $6 : 8, 9$  a těmito výsledky doplníme zápis (II):

$$(II.1) \quad \begin{array}{cccc} \frac{1}{5} & \frac{2}{7} & \frac{6}{8} & \frac{9}{9} \\ \frac{0}{8} & \frac{Q}{Q} & \frac{P}{P} & \frac{Q}{0} \end{array}, \quad 6 : 8, 9; \quad 8 : 0; \quad P, Q \in (r), (s), (t).$$



(a) *Necht' 8 je E-bod*, pak  $8 : 2, 6, 0$  a možno volit  $3-P-8, 4-Q-8$ , z čehož  $3 : 1, 6, 9$  (jinak konfigurace neobsahuje *C-body*), tedy  $4-P-6, 2-4-9, 3-4-a, 2-3-b, 3-Q-c$ , kde  $a, c = 5, 7, 0, b = 5, 7$  a mohou nastat případy:  $a = 5, b = 7, c = 0$ , čímž dostaneme schéma R-4, nebo  $a = 7, b = 5, c = 0$  vedoucí na schéma N-3, z  $a = 0, b = 5, c = 7$  plyne schéma R-5 a konečně z  $a = 0, b = 7, c = 5$  dostaneme schéma R-6.

(b) *Necht' P je E-bod*, pak  $P : 5, 6, 7$  a možno volit  $3-P-8, 4-P-0, 3-4-6, 2-4-8$  (jinak 8 je *E-bod* a to již bylo zkoumáno),  $2-3-a, 3-Q-b, 4-Q-c$ , kde  $a, b, c = 5, 7, 9$  a nastane tedy šest možností:  $abc = 579$  schéma R-7;  $abc = 597$  schéma R-8;  $abc = 759$ , schéma N-4;  $abc = 795$ , schéma R-9;  $abc = 957$ , schéma R-10 a konečně  $abc = 975$ , schéma R-11.

(c) *Necht' 8 : Q*, pak  $8 : 6, 0, Q$  a možno volit  $3-P-8, 2-4-8, 0 : P$  (jinak *P* je *E-bod* – viz výše) a dokonce  $0-3, P : 5, 7, 0$  (jinak by v konfiguraci nebyl žádný *C-bod*), kromě toho také  $0-Q$  (aby schéma obsahovalo *E-body*), tedy  $4-P-6, 3-Q-0$  a pro existenci aspoň jednoho *C-bodu* nutno  $3 : 1, 6, 9$ , tedy  $4-Q-9, 2-3-a, 3-4-b$ , kde  $a, b = 5, 7$ , což vede ke schématům R-12 a R-13.

Uvažme, že nadále je již 8-2 (jinak 8 je *E-bod*) a také 8-Q, čili  $8 : 6, 0, P$  a vzhledem k přípustné permutaci (34) můžeme zápis (II.1) rozšířit takto:

(II.1.a)  $3-Q-8, 2-4-8$ .

(a) *Necht' 0 : 4*, pak  $3-P-0, 4-P-6$  (jinak 2 je typu  $B^4$ ),  $4-Q-9$ , (jinak konfigurace neobsahuje *C-body*),  $2-3-a, 3-4-b$ , kde  $a, b = 5, 7$  a dostáváme schémata R-14 a R-15.

(b) *Necht' 4-P-5*, pak  $4-Q-0$  (jinak 2 je typu  $B^4$ ),  $3-P-6$  (jinak 8 je typu *D*),  $2-3-a, 3-4-b$ , kde  $a, b = 7, 9$  a našli jsme schémata R-16 a R-17.

(c) *Necht' 4-P-7*, pak  $4-Q-0$  a  $3-P-6$  (z důvodů jako výše), dále  $3-4-5$  (aby schéma obsahovalo *E-body*) a z toho  $2-3-9$ , takže máme schéma R-18.

(d) *Necht' Q-0*, pak  $4-Q-0, 4-P-6, 2-3-9$  (aby existovaly *E-body* v konfiguraci),  $3-4-a, 3-Q-b$ , kde  $a, b = 5, 7$ , čímž dostáváme schémata R-19 a R-20.

(e) *Necht' 7 je E-bod*, pak  $3-4-7, 4-P-0, 3-P-6, 2-3-9$  (podmínka existence aspoň jednoho *C-bodu*),  $4-Q-5$  a schéma R-21.

(f) *Necht' 5 je E-bod*, pak  $3-4-5, 4-P-0, 3-P-6, 4-Q-7$  (jinak žádný *C-bod*),  $2-3-9$  a dostaneme schéma R-22.

(g) *Necht' 6 : 4*, pak  $3-P-6, 4-P-0, 3-4-8, 2-3-a, 4-Q-b$ , kde  $a, b = 5, 7$ , ale toto schéma neobsahuje *C-body*.

(h) *Necht' 3 je E-bod*, pak  $3 : 1, 5, 0, 3-4-6, 3-P-7, 2-3-9, 4-P-0, 4-Q-5$  a dostaneme schéma R-23.

(i) *Necht' 2-5*, pak  $2-3-5, 3-P-7, 4-Q-9$  a jediný *E-bod* je  $0 : 3, 8, Q$ , tedy  $3-4-6, 4-P-0$  a máme schéma R-24.

(j) *Necht' 2-7, pak 2-3-7, 3-P-5, 4-Q-9 a jediný E-bod je opět  $0 : 3, 8, Q$ , tedy 3-4-6, 4-P-0, čímž docházíme k N-5.*

(k) *Necht' 0-3, pak  $0 : 8, P, Q$  a jediný E-bod je  $Q : 7, 9, 0$ , tedy 4-Q-5, 3-P-7, 3-4-0, 4-P-6 a máme schéma R-25.*

Snadno zjistíme, že vyloučíme-li předchozí situace, zbývají již jen dva případy: 3-4-6, 4-P-0, 3-P- $a$ , 4-Q- $b$ , kde  $a, b = 5, 7$ , z nichž registrujeme jen první (schéma N-6), neboť případ druhý (pro  $a = 7, b = 5$ ) je ekvivalentní s konfigurací R-23, na níž přechází permutací (17), (24), (3Q), (59), (68).

Protože tak jsou vyčerpána všechna schémata za předpokladu II.1, musí mít nadále každý  $B^{31}$ -bod již oddělené póly.

**Předpoklad II.2.** *Předpokládejme existenci aspoň jednoho  $B^{31}$ -bodu.*

Zkoumaný  $B^{31}$ -bod označíme opět 1 a využijeme předchozích výsledků, především zápisu (1) a toho, že body,  $P, Q$  jsou již od sebe odděleny. Libovolná permutace bodů 2, 3, 4 umožňuje volbu:

(II.2)  $6 : 8, 9, 0; 0 : 8; P : Q; 3-4-6, 2-P-6.$

(a) *Necht' aspoň jeden z bodů 3, 4 je typu E.* Vzhledem k permutaci (34) lze předpokládat, že bod 3 má tuto vlastnost a pak je tedy oddělen buď od bodů 1, 5, 0, nebo 1, 7, 8. Permutace (57), (80) připouští volbu  $3 : 1, 7, 8$ , čili  $8 : 3, 6, 0$ , tedy 4-P-8, 2-Q-8,  $4 : 1, 5, 9; 5 : P$  (uvažme, že jinak by bylo  $5 : 2, 4, Q$  a bod 5 by byl typu  $B^{31}$  se spojenými póly 3-6), tedy 3-P-0,  $P : 5, 7, Q, 3-Q-b, 2-4-c, 2-3-a, 4-Q-d$ , kde  $a, b = 5, 9$  a  $c, d = 7, 0$ . Protože bod 2 je oddělen jen od dvou bodů množiny (5, 7, 9, 0), může být jen buď

$2 : 1, 5, 7,$  pak je ale 2-3-9, 2-4-0, 3-Q-5, 4-Q-7 a bod  $P$  je typu  $B^{31}$  se spojenými póly 1-8,

nebo

$2 : 1, 9, 0,$  pak je ale bod  $P$  typu  $D,$

nebo

$2 : 1, 7, 9,$  čili 2-3-5, 2-4-0, 3-Q-9, 4-Q-7

a dostaneme N-7 nebo konečně je

$2 : 1, 5, 0,$  čili 2-3-9, 2-4-7, 3-Q-5, 4-Q-0

a dostáváme tak schéma R-26.

(b) *Necht' je bod 2 typu E.* Pak především bod 2 je oddělen buď od trojice 1, 5, 0, nebo od trojice 1, 7, 8. Přístupná permutace (57), (80) umožňuje volbu  $2 : 1, 7, 8$ , čili  $8 : 2, 6, 0$  a permutace (34) dokonce ještě 3-8-P, 4-8-Q,  $7 : 2, 4, P$  (jinak totiž bod 7 je typu  $B^{31}$  se spojenými póly 4-6), tedy 3-7-Q, 4-P-0,  $P : 5, 7, Q; 9 : 3$  (aby bod 3 již nebyl typu E), 2-3- $a, 2-4-b, 2-Q-c$ , kde  $a = 5, 0; b = 5, 9; c = 5, 9, 0$ . V případě, že  $a = 0, b = 9, c = 5$  je bod  $P$  typu  $B^{31}$  se spojenými póly 1-8. Zbývající dvě

možnosti vedou k novým schémátům:  $a = 0, b = 5, c = 9$  ke schématu N-8 a poslední, tj.  $a = 5, b = 9, c = 0$  ke schématu R-27.

Snadno zjistíme, že nadále již musí být bod 9 typu  $E$  (mají-li  $E$ -body ve schématu existovat). Uvažujeme tedy poslední případ:

(c) *Nechť bod 9 je typu  $E$ , tedy  $9 : 3, 4, 6$ , z čehož  $3-4-6, 2-Q-9$ . Aby bod  $P$  nebyl typu  $D$  musí být bod 2 spojen aspoň s jedním z bodů dvojice  $(8, 0)$  a kromě toho vzhledem k permutaci (57), (80) lze vždy předpoklad, že je  $2 : 5$ . Pak ovšem již  $2-0$  (jinak bod 2 je typu  $E$ ) a také  $5-Q$  (jinak bod 5 je typu  $B^{31}$  se spojenými póly). Z téhož důvodu je také  $7 : P$ , čili  $P : 5, 7, Q$  a permutace (34) připouští volbu přímky  $4-5-Q$ . Dále je  $3 : 1, 5, 9; 4 : 1, 7, 9$  a nemá-li být bod 3 typu  $B^{31}$  se spojenými póly, musí být ještě  $2-3-7$ , tedy  $2 : 1, 5, 8, 3-Q-8, 3-P-0, 4-P-8, 2-4-0$ . Dostali jsme tak opět úplné schéma, které však již nemusíme registrovat, neboť přechází permutací (1293), (47P5), (68) na již známé schéma N-7.*

Tím jsou vyčerpána všechna schémata za předpokladu II. Nadále tedy již budeme předpokládat, že

(P) *každý  $B^3$ -bod je typu  $B^{32}$ .*

Dostáváme se tak k nejobsáhlejšímu oddílu této kapitoly.

**Předpoklad III.** *Předpokládáme existenci aspoň jednoho  $B^3$ -bodu jehož póly jsou od sebe odděleny.*

Označme zkoumaný bod  $1$  a využijeme výsledků (1). Vzhledem k předpokladu (P) jsou již póly  $P, Q$  od sebe odděleny a leží tedy na dvou z přímek  $1-5, 1-7, 1-9$ . Na čtvrté přímce bodem  $1$  leží tedy dva z bodů množiny  $(6, 8, 0)$ . Permutace (57), (80); (59), (60) a  $(PQ)$  umožňují předpokládat:

(III) 
$$\frac{1}{6 \ 5 \ 7 \ 9}; \ 6 : 9 \ 0; \ 8 : 7, 0; \ P : Q.$$

$8 \ 0 \ P \ Q$

(a) *Nechť jeden z bodů 2, 3, 4 je oddělen od bodů 6, 8. Vzhledem k libovolné permutaci bodů 2, 3, 4 možno volit  $2 : 1, 6, 8$ . Pak body 6, 8 patří do množin (s), (t) a je  $3-4-0$ . Na přímce  $2-0$  leží jeden z bodů  $P, Q$ . Permutace (68), (79),  $(PQ)$  umožňuje volbu  $2-0-Q$  a musí být  $2-P-9$  (aby schéma obsahovalo  $C$ -body). Kromě toho permutace (34) připouští volit*

$$\frac{3}{6 \ Q} \ \frac{4}{P \ Q} \ \frac{2}{3 \ 4},$$

$P \ 8 \ 8 \ 6 \ a \ b$

kde  $a, b = 5, 7$  a dostaneme schémata R-28, R-29.

(b) *Nechť bod 7, 9 nepatří do množiny (q), pak možno volit  $7-Q-4$  a body 5, 9 nepatří do (t) – jinak by totiž bod 2 byl typu  $B^4$ . Vzhledem k (23) je také  $9-3-P$*

a jeden z bodů 7, 9 musí být typu  $E$  (jinak žádný  $E$ -bod). Lze dokonce předpokládat, že 7 je typu  $E$ , což nám umožňuje permutace  $(79)$ ,  $(PQ)$ ,  $(68)$ ,  $(34)$ , tedy  $2-3-8$ ,  $4-P-8$ ,  $5 : Q$  (jinak bod 3 je typu  $B^{31}$ ) a mohou nastat případy:

$0 : 4$ , pak

$$\begin{array}{cccccc} & 3 & & 2 & & \\ & \underline{Q} & 4 & \underline{4} & P & \underline{Q} \\ 0 & 6 & 5 & 0 & 6 & \end{array}$$

a dostaneme schéma R-30.

$4-5$ , pak  $2-4-5$ ,  $2-P-6$ ,  $2-Q-0$ ,  $3-4-0$ ,  $3-Q-6$  a máme schéma N-9. Nadále zřejmě je již  $4 : 1, 5, 9$  a tento bod je vždy typu  $B^{31}$ .

(c) *Nechť body 6, 8 patří do množiny (q)*, pak především možno volit  $2-3-6$ ,  $2-4-8$ . Podle (b) jeden z bodů 7, 9 patří do množiny (q) a lze vždy tvrdit, že je to bod 7 vzhledem k permutaci  $(79)$ ,  $(PQ)$ ,  $(68)$ ,  $(34)$ . Tedy  $3-4-7$ . Aby body 0 a 9 procházely čtyři konfigurační přímky, musí být  $0-P$ ,  $0-Q$ ,  $9-P$  a kromě toho  $9 : 3$  a  $9-4$  (aby schéma obsahovalo  $C$  a  $E$ -body), z toho plyne  $4-9-P$ ,  $4-Q-6$ . Má-li schéma obsahovat  $C$ -body, musí být také také  $8 : Q$ , čili  $3-Q-0$ ,  $3-P-8$ ,  $2-P-0$ ,  $2-5-Q$ , tím jsme dostali úplné schéma R-31.

(d) *Nechť všechny tři body 0, 7, 9 patří do množiny (q)*, pak možno volit  $2-3-7$ ,  $2-4-9$ ,  $3-4-0$ ,  $2 : 5$  (jinak nastane případ (c)) a jeden z bodů 6, 8 je oddělen od 2. Vzhledem k permutaci  $(68)$ ,  $(34)$ ,  $(79)$ ,  $(PQ)$  volme  $2 : 1, 5, 6$ , z toho  $P-5$  (jinak žádný  $C$  nebo  $E$ -bod),  $Q : 5, 7, P$ ,  $Q-0-2$ ,  $2-P-8$ ,  $8 : 4$  (jinak žádný  $C$ -bod) a poslední přímky tohoto schématu (které označíme R-32) jsou  $4-Q-6$ ,  $4-P-5$ ,  $3-P-6$ ,  $3-Q-8$ .

(e) *Nechť do množiny (q) patří trojice bodů 5, 7, 9*, lze tedy předpokládat  $3-4-5$ ,  $2-3-7$ ,  $2-4-9$  a vzhledem k  $(68)$ ,  $(79)$ ,  $(PQ)$ ,  $(34)$  také  $2-6$ . Mohou tedy nastat případy:

$4 : 0$ , pak  $4-8-Q$  (jinak žádný  $E$ -bod)  $4-P-6$ ,  $3-Q-0$ ,  $3-P-8$ ,  $2-P-0$ ,  $2-Q-6$ , což vede ke schématu R-33.

$$\begin{array}{l} 4-Q-6, \text{ čili } 4-P-0, 2-P-6, 2-Q-8, 3-P-8, 3-Q-0, \text{ R-34,} \\ 6-4, \text{ pak } 4-P-6, 2-Q-6, 4-Q-0, 3-Q-8, 3-P-0, 2-P-8 \end{array}$$

a máme schéma R-35.

$$3-P-8, \text{ pak } 3-Q-6, 2-P-6, 4-P-0, 4-Q-8, 2-Q-0 \dots \text{ R-36.}$$

Jestliže bod 7 je typu  $E$ , potom

$$4-8-Q, 4-P-0, 3-P-6, 3-Q-0, 2-Q-6, 2-P-8$$

a dostaneme schéma R-37.

Nadále tedy je již  $4-P-8$ ,  $4-Q-0$  a je buď bod 2 typu  $E$ , čili

$$2 : 1, 5, 0, 2-P-6, 2-Q-8, 3-Q-6, 3-P-0$$

vedoucí na schéma R-38, nebo konečně

$$2-P-0, 2-Q-6, 3-P-6, 3-Q-8$$

a dostaneme schéma R-39.

(f) *Nechť do množiny (q) patří jen body 7, 9, pak vzhledem k předchozímu a k permutaci (79), (68), (PQ) lze předpokládat, že bod 6 patří do množiny (q) a volit*

$$2-3-7, 2-4-9, 3-4-6.$$

Nastávají tak možnosti:

$$2-Q-5, \text{ pak } 4-8-Q \text{ (jinak žádný E-bod) } 2-P-6, 3-P-8, 3-Q-0, 4-P-0$$

a máme schéma N-10.

$$5-2, \text{ pak opět } 4-8-Q, 2-Q-6, 3-P-8, 3-Q-0, 4-P-0 \dots R-40$$

$$2-0, \text{ pak } 2-P-0, 4-8-Q \text{ (aby schéma obsahovalo C a E-body)}$$

$$2-Q-6, 4-P-5, 3-P-8, 3-Q-0 \dots R-41.$$

$$6-P, \text{ pak } 2-P-6, 2-Q-8, 3-P-8 \text{ (jinak žádný C-bod),}$$

$$3-Q-0, 4-Q-5, 4-P-0 \dots R-42$$

a nadále je tedy již vždy  $2-P-8, 2-Q-6, P : 6, 9, Q$ , takže buď

$$3-P-5, 3-Q-0, 4-Q-8, 4-P-0 \dots R-43,$$

nebo

$$3-P-0, 3-Q-8, 4-Q-0, 4-P-5 \dots N-11.$$

V dalším musíme tedy uvažovat, že jen jeden z bodů 7, 9 patří do množiny (q). Vzhledem k (79), (68), (PQ) a libovolné permutaci bodů 2, 3, 4 můžeme tedy tvrdit, že je vždy

$$(III.a) \quad \begin{array}{c} 1 \\ 6 \ 5 \ 7 \ 9 \\ 8 \ 0 \ P \ Q \end{array}; \quad 3-4-5; \quad 7-Q; \quad 6:9, 0; \quad 8:7, 0; \quad P:Q.$$

(g) *Nechť body 5, 6 patří do množiny (q), pak možno volit  $2-3-5, 2-4-6, P : 5, 9, Q$ , z čehož  $3-P-6$  a jediný E-bod je 4, když  $4 : 1, 5, 0$ , z toho  $3-Q-0, 2-P-0, 4-P-8, 4-Q-7, 2-Q-8$  a dostáváme schéma R-44.*

(h) *Nechť bod 0 nepatří do množiny (q), pak vzhledem k případům (g) a (c) do množiny (q) patří body 5, 8 a lze volit  $2-3-5, 2-4-8$  a protože  $P : 5, 9, Q$  je také  $P-8-3, 6-2$  (jinak žádný E-bod) a nastanou případy:*

$$2-7, \text{ tedy } 2-7-Q, 3-P-6, 3-Q-0, 4-P-0, 4-Q-6 \dots R-45$$

$$4-0-Q, \text{ pak } 4-P-6, 3-Q-7, 2-Q-6, 2-P-0 \dots N-12$$

$$3-0, \text{ pak } 3-Q-0, 2-Q-6, 2-P-0, 4-P-6, 4-Q-7 \dots R-46$$

a nadále je již  $4-P-0, 2-P-6, 2-Q-0, 3-Q-a, 4-Q-b$ , kde  $a, b = 6, 7$ , což vede na schémata R-47 a R-48.

V dalším zbývá uvažovat již jen případ, kdy do množiny (q) patří bod 0 a typu E musí být nejméně jeden z bodů 7, 9. Z toho plyne, že bod 6 patří do množiny (r) a vzhledem k permutaci (34) možno volit  $6 : 3, 3-8$  (jinak  $3 : 1, 6, 8$  – případ (a)),  $7 : 4$  (jinak  $4-Q-7, 4-P-6, 2-Q-6$ , tedy body 8, 0 patří do (s) a schéma neobsahuje žádný E-bod).

Ukázali jsme již, že aspoň jeden z bodů 7, 9 musí být typu E. Kdyby to nebyl bod 9, pak 7 je jistě typu E, čili  $7 : 2, 4, 8$ , z čehož  $2-4-8, 2-P-5, 2-3-0, 2-Q-6, 4-P-6, 4-Q-0, 3-Q-7, 3-P-8$  a dostaneme sice úplné schéma, ale nevyhovující podmínkám, neboť neobsahuje C-body. Musí tedy vždy nadále být

(III.b)  $2-P-6 ; 4-Q-6 ; 8-3 ; 0 \in (q) ;$  bod 9 typu E .

Tímto výsledkem doplníme záznam (III.a)

V případě  $8 : 2$  je  $4-P-8, 2-3-5, 2-4-0, 2-Q-7, 4-P-0, 3-Q-8$ , ale toto úplné schéma nemusíme registrovat, neboť přechází na schéma R-36 permutací (168), (249730), (5PQ).

V případě, že bod 8 patří do (q) musí být především  $Q : 8, 0, P$  aby schéma obsahovalo C-body, pak ale bod 4, oddělený od trojice 1, 5, 7 je vždy typu  $B^{31}$ .

Zbývá tedy jediná možnost a to

$8 : 4$ , čili  $2-Q-8, 3-P-8, 4-P-0, 2-3-0, 2-4-5, 3-Q-7$

a dostáváme tak poslední schéma R-49 za předpokladu III.

*Předpokládáme existenci aspoň jednoho  $B^3$ -bodu.*

Podle předchozích úvah především každý  $B^3$ -bod je již typu  $B^{32}$  a jeho póly jsou spojeny. Zkoumaný bod označíme 1 a uijeme zápisu (1). Bez újmy na obecnosti můžeme přímkou bodem 1 označit  $1-6-8, 1-5-0, 1-7-P, 1-9-Q$  a protože póly P, Q jsou spojeny, pak také lze předpokládat, že je  $2-P-Q$  a bod 6 patří do množiny (r), jak dovoluje permutace (79), (PQ), (68). Tyto výsledky shrneme

(IV) 
$$\frac{1}{5 \ 7 \ 9 \ 6} ; 2-P-Q ; 8 : 7, 0 ; 6 \in (r) .$$
  

$$0 \ P \ Q \ 8$$

(a) *Necht' bod 2 je typu E*, pak  $2 : 1, 5, 0$  a permutace (34) umožňuje  $2-4-8, 2-3-7, 2-6-9, 3-P-8$ , (jinak žádný C-bod),  $3-Q-0, 4-P-0, 3-4-a, 4-Q-b$ , kde  $a, b = 5, 6$ , takže dostáváme schémata R-50, R-51.

(b) *Necht'  $0 : 2$* , pak  $0 : 2, 6, 8 ; 5-2$  (jinak případ (a)) a možno volit  $2-3-5, 2-6-9 ; 8, 0$  patří do (s),  $7 : 2$  (jinak bod 4 je typu  $B^{31}$ ),  $2-4-8, 3-Q-0, 3-P-8, 3-4-7, 4-P-0, 4-Q-6$ . Toto schéma však neobsahuje E-body.

(c) *Necht'  $P : 5, 8, 9$* , čili P je E-bod, pak  $8 : 7, 0, P ; Q : 0, 6$  a možno volit  $4-P-6, 3-P-0$ , musí být  $3 : 1, 6, 9$  (aby schéma obsahovalo C-body),  $2 : 1, 5, 7, 2-3-8, 4-Q-8$ ,

2-4-a, 2-6-b, 3-4-c, 3-Q-d, kde  $a, b = 9, 0$ ;  $c, d = 5, 6$  a nastanou případy:  $a = 9, b = 0, c = 7, d = 5$ ;  $a = 9, b = 0, c = 5, d = 7$  vedoucí na schémata R-52 a R-53. Zbývající dvě možnosti, tj.  $a = 0$ ;  $b = 9$ ;  $c, d = 5, 7$  nemusíme již registrovat, neboť tato schémata patří do téže třídy jako již známá R-50, R-51 vzhledem k permutaci (19), (2P), (34), (67), (80).

(d) *Necht*  $2 : 1, 8, 9$ , pak  $8 : 2, 7, 0$  a možno volit 2-3-5, 2-4-7, 2-6-0 a musí být  $P : 5, 6, 9$  (jinak žádný C-bod),  $9 : 2, 6, P$ ; 3-P-0 (aby bod 0 nebyl typu  $B^4$ ), 3-Q-8, 4-Q-6, 4-P-8, 3-4-9 a  $B^3$ -bod 8 má proti předpokladu oddělené póly.

(e) *Necht*  $P : 5, 6, 8$ , pak možno volit P-9-3, P-0-4, 2-6-0, 6-Q-3 (jinak žádný C-bod), 4-Q-8, 2-3-8, 3-4-7, (jinak 7 je typu  $B^4$ ), 2-4-5 a dostáváme tak schéma R-54.

(f) *Necht*  $P : 8, 9, 0$ , pak možno volit 5-P-3, 6-P-4, bod 7 nepatří do množiny (s), aby bod 2 nebyl typu  $B^4$  a dále je  $6 : 9$  (jinak 2-6-9, 3-4-7, 2-3-a, 2-4-b, 3-Q-b, 4-Q-a, kde  $a, b = 8, 0$  ale pak vždy je 3 typu  $B^{31}$ ). Z toho plyne ještě 2-6-0 a mohou nastat případy:

7-Q, čili 7-Q-4, 3-4-0, 3-Q-8, 2-3-9, 2-4-8 ... R-55

7 : 4, čili 2-3-7, 2-4-8, 3-4-9, 3-Q-8, 4-Q-0 ... R-56

7 : 3, čili 2-4-7, 2-3-8, 3-4-9, 3-Q-0, 4-Q-8 ... R-57

0 : 3, čili 3-4-7, 3-Q-8, 4-Q-0, 2-3-9, 2-4-8 ... R-58

a konečně

0 : 4, čili 3-4-7, 3-Q-0, 4-Q-8, 2-3-8, 2-4-9 ... R-59

(g) *Necht*  $P : 6, 8, 9$  a možno volit 3-P-0, 4-P-5. Bod 7 nepatří do (t), neboť jinak by byl bod 2 typu  $B^4$  a musí být také 6-3 (jinak 4-Q-6, 3-Q-8, 2-4-8, 2-6-0 a schéma neobsahuje E-body). Je tedy 4-Q-8, 2-3-8 a snadno zjistíme, že jediný možný E-bod je 0 a to pouze v případě, když  $0 : 4, Q, 8$ , tedy 2-6-0 a lze uvažovat případy 3-4-a, kde  $a = 6, 7, 9$ .

Pro  $a = 9$  je však 2-4-7, 3-Q-6 a  $B^3$ -bod 8 má oddělené póly  $2 : 5$ . Rovněž případ  $a = 7$  vede ke sporu, neboť bylo by 2-4-9, 3-Q-6 a  $B^3$ -bod 7 by měl oddělené póly. Zbývá tedy jediná 3-4-6, 3-Q-7, 2-4-9, kdy skutečně dostaneme nové schéma R-60.

(h) *Necht*  $P : 6, 8, 0$ , pak možno volit P-5-3, P-9-4, 2-6-0 a jest 6-3 (aby schéma obsahovalo E-body), takže mohou nastat případy:

4 : 6, čili 3-Q-6, 3-4-0, 4-Q-8, 2-3-8, 2-4-7 ... R-61

4 : 0, čili 3-4-6, 3-0-Q, 4-Q-8, 2-3-8, 2-4-7 ... R-62

4 : 7, čili 3-4-6, 2-3-7, 2-4-8, 3-Q-8, 4-Q-0 ... R-63

(i) *Necht* P-0, pak vzhledem k předchozím případům možno volit 3-P-8, 4-P-0 (neboť je  $P : 5, 6, 9$ )

a dále:

(i1) za předpokladu  $7 : 4, 8, Q, 7$  je E-bod, dostaneme 4-8-Q, 2-3-7, 2-6-0,  $9 : 3$  (jinak  $B^3$ -bod 8 má oddělené póly), čili 2-4-9, 3-4-a, 3-Q-b, kde  $a, b = 5, 6$ , což vede k R-64 a R-65.

(i2) 7 je *E*-bod pak ovšem již  $7 : 2, 4, 8, 2-4-8, 3-Q-7$  a mohou nastat případy

$9 : 2$ , čili  $3-4-9, 2-6-0, 2-3-5, 4-Q-6 \dots$  R-66

$6 : Q$ , pak  $4-Q-5, 3-4-6, 2-6-0$ , (neboť jinak  $Q$  je typu  $B^4$ ) a  $2-3-9$ ,

což vede na schéma R-67.

Nadále musí být již  $9 : 6$  (protože jinak  $B^3$ -bod 4 nevyhovuje podmínce (P) a je typu  $B^{31}$ ), čili zbývá jedině případ  $2-6-0, 2-3-9, 3-4-5, 4-Q-6$  a schéma R-68.

(i3) *Nechť* 6 je typu *E*., pak  $6 : 4, 0, P, 2-6-9, 3-Q-6, 2-3-0$ ; a aby bod *P* nebyl typu  $B^{31}$ , musí být  $Q : 5$ . Dále je  $2 : 7$ , neboť jinak ve schématu nejsou žádné *C*-body a konečně také  $2 : 8$  (aby bod 4 nebyl typu  $B^{31}$ ), pak ale  $2-4-5, 3-4-7, 4-Q-8$  a toto schéma přechází permutací (14), (27Q6), (5P) na již známé a registrované R-51.

(i4) *Uvažujme*  $8 : Q$ , pak  $2-4-8, 7-Q$  (jinak 8 je typu  $B^4$ ),  $7-4$  (jinak 7 je typu *E* a to jsme již zkoumali v (i2)), čili  $4-Q-7, 7 : 2, 3, 8$  a jediný *E*-bod je 5, když ovšem  $5 : 2, P, Q$ , takže  $3-4-5, 3-6-Q$ , a aby nenastal případ (i3), čili bod 6 již nebyl typu *E*, musí být  $6-0-2, 2-3-9$ . Pak ovšem bod 9 je typu *D*.

(i5) *V případě*  $5-Q$  je  $3-5-Q$  a schéma neobsahuje *E*-body, právě tak jako v případě

(i6)  $5 : 4$ , kdy je  $2-3-5$ .

(i7) *Kdyby bylo*  $9 : 2$ , pak  $3-4-9, 2-6-0, 2-3-7$  a nastane případ (i2).

(i8) *Předpokládejme*  $6 : Q$ , pak  $3-4-6, 4-Q-8, 3-Q-7, 2-4-5$  a jediný *E*-bod je  $3 : 1, 5, 0$ , čili  $2-6-0, 2-3-9$  a dostaneme schéma N-13.

Zbývá tedy poslední případ a to

(i9)  $7-4$  (jinak 7 je typu *E*, ale to jsme již probírali v (i2)), takže  $8-Q-4, 3-Q-6$ , a aby nenastal případ (i3) musí být  $6-0-2, 2-3-9$ , pak ale bod 9 je typu *D*.

(j) *Nechť*  $P : 8$ . Vzhledem k předchozím případům může již být jen  $P : 5, 8, 0$ , takže možno volit  $6-P-3, 9-P-4, 2-6-0$ . Body 5, 7 neleží na (t), neboť jinak by byl bod 2 typu  $B^4$  a konečně má-li schéma obsahovat *E*-body, musí být  $Q : 5, 6, 7$ . Mohou tedy nastat případy:

$2-3-a, 2-4-b, 3-4-c, 3-Q-d, 4-Q-e$ , kde  $a, b = 5, 7, 8$ ;  $c = 5, 7$ ;

$d, e = 8, 0, a = 8, b = 7, c = 5, d = 0, e = 8 \dots$  R-69 ;

$a = 7, b = 8, c = 5, d = 8, e = 0 \dots$  R-70 ;

$a = 5, b = 8, c = 7, d = 8, e = 0 \dots$  R-71 ;

$a = 8, b = 5, c = 7, d = 0, e = 8 \dots$  R-72 .

(k) *Nechť*  $P-9$ , pak vzhledem k předchozímu je  $P : 5, 6, 0$  a možno volit  $3-P-9, 4-P-8, 2-6-0$  a aby nenastal případ (d) musí být  $8 : Q, 2-3-8, 5-4, 7-4$  (jinak 2 je typu  $B^4$ ) a mohou nastat případy:

$0 : Q$ , čili  $3-4-0, 3-Q-6, 4-Q-7$ , (jinak 8 je typu  $B^4$ ),  $2-4-5 \dots$  R-73

nebo  $7-Q$ , pak ale schéma neobsahuje *C*-body, nebo

$5-Q$ , pak  $4-Q-5, 2-4-7, 3-Q-0, 3-4-6$  a dostaneme schéma R-74 .



Nadále je tedy již jen

$2-4-a, 3-4-b, 3-Q-c, 4-Q-d$ , kde  $a, b = 5, 7$ ;  $c, d = 6, 0$ ,  
vedoucí na schémata R-75, N-14, R-76, R-77.

(m) *Nechť*  $Q-6$ , pak především  $P : 6, 9, 0$  a možno volit  $P-5-3, P-8-4$ , a bod 7 nepatří do množiny (s), neboť jinak by byl bod 2 typu  $B^4$  a mohou nastat případy

$7-Q$ , pak  $4-Q-7, 3-Q-6, 2-3-8, 3-4-0, 2-6-0, 2-4-9 \dots$  R-78,

$7 : 4$ , pak  $2-3-7, 3-Q-8, 4-Q-6, 3-4-0, 2-4-9, 2-6-0 \dots$  schéma nemá  $E$ -body,

$0-4$ , pak jediným  $E$ -bodem je 7, když ovšem  $7 : 3, 8, Q$ , tedy

$3-8-Q, 2-4-7, 4-Q-6, 3-4-0, 2-3-9, 2-6-0 \dots$  R-79

a zbývá

$0 : 4$ , čili  $4-Q-6, 3-Q-0, 2-6-0, 2-3-8$ , aby bod 6 nebyl typu  $D$ , pak

$3-9-4, 2-4-7$  a dostáváme schéma N-15.

(n) *Nechť*  $2 : 9$ . Aby již nenastal případ (d), musí být  $2-8$  a možno volit  $2-4-8, 2-6-0, 3-4-9, 3-P-8, 4-P-6, 2-3-7$ , (jinak žádný  $C$ -bod) a jediným  $E$ -bodem je 0 v případě  $0 : 3, 8, P$ , čili  $3-Q-5, 4-Q-0$ . Toto úplné schéma však odporuje základnímu předpokladu, neboť bod 9 je typu  $B^3$  s oddělenými póly  $7 : 8$ .

(o) *Nechť*  $0 : Q$ , pak možno volit  $2-4-9, 2-6-0, 3-4-0, P : 5, 9, 0$  a mohou nastat případy:

$2-5$ , pak  $2-3-5a$  jediný  $E$ -bod je 9 v případě  $3-6-P, 4-P-8, 4-Q-7$ ,  
a  $3-Q-8$ , čímž dostáváme schéma R-80.

$4-5$ , pak  $4-Q-5$ ;  $4 : 1, 6, 7$ ;  $4-P-8, 3-6-P'$  a aby schéma obsahovalo aspoň jeden  $C$ -bod, musí být  $8 : Q$ , čili  $2-3-8, 3-Q-7$ , ale toto schéma nemusíme registrovat, neboť přechází na schéma R-63 permutací  $(12), (3549QP7), (80)$ .

$8 : 2$ , čili  $2-3-7, 3-Q-5, 4-Q-8, 4-P-6, 3-P-8$  a dostaneme R-81.

Zbývá tedy poslední možnost  $8-2$ , čili  $2-3-8, 3-Q-5, 3-P-6, 4-P-8, 4-Q-7$ , ale toto schéma přechází permutací  $(12), (80), (35), (49QP7)$  na schéma R-62.

(p) *Nechť*  $6-9$ , pak možno volit  $2-4-0, 2-6-9, 3-Q-0$  a nastanou případy:  
 $7-2$ , potom  $2-3-7, 4-Q-8, 3-P-8$  a aby schéma obsahovalo  $C$ -body, musí být  $6 : P$ , tedy  $3-4-6, 4-P-5$ , ale toto úplné schéma přechází permutací  $(1394), (26Q5P7), (80)$   
na typ R-50.

$5-P$ , pak  $2-3-8, 4-P-8, 4-Q-7, 3-4-6, 3-P-5$ , ale toto schéma přechází permutací  $(13), (25P7), (49), (6Q), (80)$  na R-51.

$5-2$ , čili  $2-3-5, 3-4-7, 4-Q-8, 4-P-6, 3-P-8$  a permutace  $(1493), (27Q5P6)$  převádí toto schéma na R-50.

Zbývá tedy konečně možnost  $2-3-8, 4-P-8, 3-P-6$ , takže musí být  $Q : 7$ , aby schéma obsahovalo  $C$ -body, z čehož  $4-Q-5, 3-4-7$ , ale pak je schéma nepřijatelné, neboť neobsahuje  $E$ -body.

Uvážíme-li všechny dosavadní výsledky, vidíme, že (vzhledem k permutaci (34)) můžeme nadále již předpokládat:

$$2-4-9, 2-6-0, 2-P-Q, 6 : Q, Q-0, P-8$$

a další schémata dostaneme takto:

- (q) *Nechť* 4-Q-5, pak 4-P-8, 3-Q-0, 3-P-6, 3-4-7, 2-3-8 ... R-82.
- (r) *Nechť* 5 : 3, pak 4-P-5, 4-Q-8, 2-3-7, 3-4-6, 3-P-8, 3-Q-0 ... R-83.
- (s) *Nechť* 5-Q, pak  $Q : 6, 7, 8$ , 3-Q-5, 4-P-8, 4-Q-0, 3-P-6, 3-4-7, 2-3-8 ... R-84.
- (t) *Nechť* 2-8, pak 2-3-8, 4-P-8, a aby schéma obsahovalo C-body, nutně musí být  $6 : P$ , čili 3-P-5, 3-4-6, 3-Q-0, (jinak žádný E-bod) 4-Q-7 a dostaneme R-85.
- (u) *Nechť* 5-4, pak 2-3-7, 3-4-5 a pro existenci C-bodů nutně  $3 : 6$ , čili 3-P-8, 3-Q-0, 4-P-6, 4-Q-8 ... R-86.
- (v) *Nechť* 0-3, pak 3-Q-0, 4-Q-8, 3-P-8, 4-P-6, 3-4-7, 2-3-5 ... R-87.
- (w) *Nechť* 5-2, pak 2-3-5, 3-Q-8, 4-P-8, 4-Q-0, 3-P-6, 3-4-7 ... R-88 a zbývá již jen případ:

$$3-Q-8, 4-P-8, 4-Q-0, 2-3-7, 3-4-6, 3-P-5,$$

vedoucí na schéma R-89.

Tim jsou vyčerpány všechny možnosti a také nalezena všechna schémata za daného předpokladu, že konfigurace neobsahuje body typů  $A, D$  a  $B^4$ , ale naopak na ní leží aspoň jeden  $B^3$ -bod, E-bod a C-bod.

Nedokazoval jsme v této kapitole, že všechna zjištěná schémata patří do různých tříd a pokud tedy jsou realizovatelná, vedou ke konfiguracím neekvivalentním. Že tomu tak skutečně je, to uvidíme z následujících kapitol.

Která z těchto schémat jsou realizovatelná (body a přímkami v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel), a jakým způsobem je možno realizovat, to si ukážeme v kapitole třetí.

## KAPITOLA 2

Tato kapitola je věnována celkovému přehledu konfiguračních schémat, která jsem rozdělil jednak do skupiny N-schémat (označených N-1 až N-15), jednak do skupiny, obsahující 89 R-schémat.

### Komentář k tabulkám

V posledním sloupci je zaznamenáno pořadí schématu. V předposledním sloupci je uveden typ schématu a to takto: První tři čísla uvádějí počet bodů typu  $B^3, B^2, B^1$ , další dvojice počet  $C^2$  a  $C^1$ -bodů a poslední dvojice počet  $E^2$  a  $E^1$ -bodů. Tedy ku příkladu: Typ 4213020 říká, že schéma obsahuje 4 body typu  $B^3$ , dva  $B^2$ -body, jeden  $B^1$ -bod, tři  $C^2$ -body, žádný  $C^1$ -bod, dva  $E^2$ , body a žádný  $E^1$ -bod. Ostatní sloupce tabulky jsou jistě srozumitelné.

**Tabulka schémat skupiny N**

5-6-7	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>		
5-8-9	5 7 9 P	3 4 P Q	4 P Q	P Q	4301211	N 1
7-0-9	0 8 6 Q	6 5 8 7	8 9 0	0 6		
	5 7 9 6	3 4 6 P	4 P Q	P Q		
	0 8 P Q	...	...	...		
		0 8 9 Q	5 8 7	6 0	4301211	N 2
		5 9 0 Q	7 8 0	6 8	1401222	N 3
		7 8 0 Q	6 8 5	0 9	2513001	N 4
		7 8 0 Q	6 5 8	0 9	2423010	N 5
		9 8 0 Q	6 5 8	0 7	2603010	N 6
		3 4 P Q	4 P Q	P Q		
		...	...	...		
		5 0 6 8	6 0 9	8 7	2304201	N 7
		0 5 6 9	6 8 7	0 8	2204202	N 8
5 7 9 6	3 4 P Q	4 P Q	P Q			
0 P Q 8	...	...	...			
		8 5 6 0	0 9 6	8 7	1402401	N 9
		7 9 6 5	6 8 0	0 8	2601210	N 10
		7 9 8 6	6 0 8	5 0	1402401	N 11
		5 8 0 6	9 8 7	6 0	1402401	N 12
		3 4 6 P	4 P Q	P Q		
		... Q	...	...		
		9 5 0	6 8 7	0 8	1402401	N 13
		8 5 0	7 9 0	8 6	1333011	N 14
		8 7 0	9 5 0	8 6	1302411	N 15

**Tabulka schémat skupiny R**

5-6-7	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>		
5-8-9	5 7 9 P	3 4 P Q	4 P Q	P Q	4311201	R 1
7-0-9	0 8 6 Q	5 0 8 6	6 0 7	9 8		
	5 7 9 6	3 4 6 P	4 P Q	P Q		
	0 8 P Q	...	...	...		

0 7 9 Q	6 8 5	0 8	4303011	R 2
7 0 9 Q	5 8 0	6 8	4311201	R 3
7 9 0 Q	5 8 0	6 8	1511211	R 4
5 9 0 Q	0 8 7	6 8	1601211	R 5
7 9 0 Q	0 8 5	6 8	1601211	R 6
5 8 0 Q	6 8 7	0 9	2513001	R 7
5 8 0 Q	6 8 9	0 7	2513010	R 8
7 8 0 Q	6 8 9	0 5	2413011	R 9
9 8 0 Q	6 8 5	0 7	3601201	R 10
9 8 0 Q	6 8 7	0 5	2501202	R 11
5 8 0 Q	7 8 0	6 9	1511202	R 12
7 8 0 Q	5 8 0	6 9	1611201	R 13
5 8 0 Q	7 0 8	6 9	1511202	R 14
7 8 0 Q	5 0 8	6 9	1611201	R 15
7 8 0 Q	9 6 8	5 0	2511201	R 16
9 8 0 Q	7 6 8	5 0	2202402	R 17
9 8 0 Q	5 6 8	7 0	2302401	R 18
9 8 0 Q	7 5 8	6 0	3501201	R 19
9 8 0 Q	5 7 8	6 0	3501201	R 20
9 8 0 Q	7 6 8	0 5	1401222	R 21
9 8 0 Q	5 6 8	0 7	1511211	R 22
9 8 0 Q	6 7 8	0 5	2401212	R 23
5 8 0 Q	6 7 8	0 9	2421210	R 24
9 8 0 Q	0 7 8	6 5	2513001	R 25
3 4 P Q	4 P Q	P Q		
. . . . .	. . . . .	. . . . .		
9 7 6 8	6 0 5	8 0	1304211	R 26
5 9 6 0	6 8 7	0 8	1312401	R 27

5-6-7	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>		
5-8-9	5 7 9 6	3 4 P Q	4 P Q	P Q		
7-0-9	0 P Q 8	. . . . .	. . . . .	. . . . .		
		5 7 9 0	0 6 8	8 6	1513011	R 28
		7 5 9 0	0 6 8	8 6	1523001	R 29
		8 5 0 6	6 9 0	8 7	2603001	R 30
		6 8 0 5	7 8 0	9 6	1603002	R 31
		7 9 8 0	0 6 8	5 6	1523001	R 32

7 9 0 6	5 8 0	6 8	1136001	R 33
7 9 6 8	5 8 0	0 6	1019010	R 34
7 9 8 6	5 0 8	6 0	1015410	R 35
7 9 6 0	5 8 6	0 8	2333010	R 36
7 9 8 6	5 6 0	0 8	2133030	R 37
7 9 6 8	5 0 6	8 0	1433010	R 38
7 9 0 6	5 6 8	8 0	1343001	R 39
7 9 5 6	6 8 0	0 8	1404201	R 40
7 9 0 6	6 8 0	5 8	1523001	R 41
7 9 6 8	6 8 0	0 5	2603001	R 42
7 9 8 6	6 5 0	0 8	2413002	R 43
5 6 0 8	9 6 0	8 7	1222410	R 44
5 8 6 7	9 8 0	0 6	1521201	R 45
5 8 0 6	9 8 0	6 7	1521210	R 46
5 8 6 0	9 8 6	0 7	2511210	R 47
5 8 6 0	9 8 7	0 6	1302411	R 48
0 5 6 8	9 8 7	0 6	1134210	R 49

5-6-7	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>
5-8-9	5 6 7 9	3 4 6 P	4 P Q	P Q
7-0-9	0 8 P Q	. . . Q	. . .	. .

7 8 9	5 8 0	0 6	4213020	R 50
7 8 9	6 8 0	0 5	4401201	R 51
8 9 0	7 0 5	6 8	2401212	R 52
8 9 0	5 0 7	6 8	1411221	R 53
8 5 0	7 9 6	0 8	1611201	R 54
9 8 0	0 5 8	6 7	1431210	R 55
7 8 0	9 5 8	6 0	1611201	R 56
8 7 0	9 5 0	6 8	1601202	R 57
9 8 0	7 5 8	6 0	1511211	R 58
8 9 0	7 5 0	6 8	1302402	R 59
8 9 0	6 0 7	5 8	1613001	R 60
8 7 0	0 5 6	9 8	2241210	R 61
8 7 0	6 5 0	9 8	2233011	R 62
7 8 0	6 5 8	9 0	2423001	R 63
7 9 0	5 8 6	0 8	1243011	R 64
7 9 0	6 8 5	0 8	1523001	R 65

5 8 0	9 8 7	0 6	1404201	R 66
9 8 0	6 8 7	0 5	2204202	R 67
9 8 0	5 8 7	0 6	1304211	R 68
8 7 0	5 6 0	9 8	1333020	R 69
7 8 0	5 6 8	9 0	1513011	R 70
5 8 0	7 6 8	9 0	1433001	R 71
8 5 0	7 6 0	9 8	1433010	R 72
8 5 0	0 9 6	8 7	1312401	R 73
8 7 0	6 9 0	8 5	1431210	R 74
8 5 0	7 9 6	8 0	1224201	R 75
8 7 0	5 9 0	8 6	1321230	R 76
8 7 0	5 9 6	8 0	1222410	R 77
8 9 0	0 5 6	8 7	1316001	R 78
9 7 0	0 5 8	8 6	1523001	R 79
5 9 0	0 6 8	8 7	1611210	R 80
7 9 0	0 8 5	6 8	1521201	R 81
8 9 0	7 6 0	8 5	1513011	R 82
7 9 0	6 8 0	5 8	1423011	R 83
8 9 0	7 6 5	8 0	1343001	R 84
8 9 0	6 5 0	8 7	1503012	R 85
7 9 0	5 8 0	6 8	1141221	R 86
5 9 0	7 8 0	6 8	1214211	R 87
5 9 0	7 6 8	8 0	1333002	R 88
7 9 0	6 5 8	8 0	1431201	R 89

### KAPITOLA 3

V této kapitole dokážeme, že schémata skupiny  $N$  nejsou realizovatelná.

Zaměříme se nejprve na schémata, obsahující aspoň jeden  $B^{30}$ -bod. Pro ně platí

$$\begin{array}{c} 1 \\ \hline 5 \ 7 \ 9 \ P \\ 0 \ 8 \ 6 \ Q \end{array} \begin{array}{l} 5-6-7 \\ 5-8-9 \\ 7-0-9 \end{array}.$$

Žádné tři z bodů  $1, 7, 9, 5$  neleží na jedné přímce (konfigurační, nebo nekonfigurační) a proto můžeme jejich souřadnice volit takto:  $1 = (1, 0, 0)$ ,  $7 = (0, 1, 0)$ ,  $9 = (0, 0, 1)$ ,  $5 = (1, 1, 1)$ . Na přímkách  $1-7 = (0, 0, 1)$ ,  $5-9 = (1, -1, 0)$ , (zapsaných v přímkových souřadnicích) leží bod  $8$ , tedy  $8 = (1, 1, 0)$ . Obdobně z přímek  $1-9 = (0, 1, 0)$ ,

$5-7 = (1, 0, -1)$  vypočítáme souřadnice bodu  $6 = (1, 0, 1)$  a z přímek  $7-9 = (1, 0, 0)$ ,  $1-5 = (0, 1, -1)$  souřadnice bodu  $0 = (0, 1, 1)$ .

Bod  $P$  neleží na přímce  $1-9 = (0, 1, 0)$ , neboť jinak by splynuly přímky  $1-9-6$  a  $1-P-Q$ . Můžeme tedy volit  $P = (x, 1, t)$  a protože na přímce  $1-P = (0, t, -1)$  má ležet bod  $Q$ , lze volit ještě  $Q = (y, 1, t)$ . Tyto výsledky shrneme:

$$\text{U.1} \quad \begin{aligned} 1 &= (1, 0, 0), & 5 &= (1, 1, 1), & 6 &= (1, 0, 1), & 7 &= (0, 1, 0), \\ 8 &= (1, 1, 0), & 9 &= (0, 0, 1), & 0 &= (0, 1, 1), & P &= (x, 1, t), & Q &= (y, 1, t). \end{aligned}$$

Zaměříme se nejprve na schéma N-1. Z rovnic přímek  $Q-7 = (t, 0, -y)$  a  $P-8 = (-t, t, x-1)$  vypočítáme souřadnice bodu  $2 = (y, 1+y-x, t)$  a obdobně z přímek  $2-5 = (1-x-t+y, t-y, x-1)$ ,  $Q-6 = (1, t-y, -1)$  získáme souřadnice bodu  $4 = (x, 1, x+t-y)$ . Bod  $4$  má ležet také na přímce  $P-0 = (1-t, -x, x)$ , čili  $x \cdot (x-y) = 0$  a v tom je spor, neboť v případě  $x = 0$  splynou konfigurační přímky  $4-P-0$ ,  $7-9-0$  a v případě  $x = y$  splynou konfigurační body  $P$  a  $Q$ . Schéma N-1 tedy nemůže být realizovatelné.

Výsledku U.1 využijeme ještě při výpočtu souřadnic bodů 2, 3, 4 schématu R-1, o němž dokážeme, že realizovatelné je a to způsobem, popsáním v následující kapitole.

Uvažujme dále schémata N-2 až N-8 (o nichž dokážeme, že nemohou být realizovatelná) a schémata R-2 až R-27. Pro všechny z nich platí:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 5-6-7 & & \\ & & \hline 5 & 7 & 9 & 6 & 5-8-9 & & \\ & & 0 & 8 & P & Q & 7-0-9 \end{array}$$

Body 5, 7, 9, 1 můžeme zřejmě volit takto:  $5 = (1, 0, 0)$ ,  $7 = (0, 1, 0)$ ,  $9 = (0, 0, 1)$ ,  $1 = (1, 1, 1)$ . Na přímce  $5-7 = (0, 0, 1)$  upevníme bod  $6 = (1, x, 0)$ , na přímce  $1-6 = (x, -1, 1-x)$  bod  $Q = (y+1, x+y, y)$  a konečně na přímce  $1-9 = (1, -1, 0)$  bod  $P = (1, 1, 1-t)$ . Z přímek  $5-9 = (0, 1, 0)$ ,  $1-7 = (1, 0, -1)$  vypočítáme souřadnice bodu  $8 = (1, 0, 1)$  a z přímek  $7-9 = (1, 0, 0)$ ,  $1-5 = (0, 1, -1)$  souřadnice bodu  $0 = (0, 1, 1)$ . Tyto výsledky shrneme:

$$\text{U.2} \quad \begin{aligned} 1 &= (1, 1, 1), & 5 &= (1, 0, 0), & 6 &= (1, x, 0), & 7 &= (0, 1, 0), \\ 8 &= (1, 0, 1), & 9 &= (0, 0, 1), & 0 &= (0, 1, 1), & P &= (1, 1, 1-t), \\ & & & & Q &= (y+1, x+y, y), & & \text{kde } x \cdot y \cdot t \cdot (x-1) \neq 0. \end{aligned}$$

Uvažme totiž, že v případě  $x = 1$  by splynuly přímky  $1-6-Q$ ,  $1-9-P$ , v případě  $t = 0$  splynou body 1 a P; v případě  $y = 0$  splynou body 6 a Q; v případě  $x = 0$  splynou body 6 a 5. Je tedy podmínka nahoře napsaná nutná k realizaci schématu.

Zkoumejme schéma N-2. Z přímek  $P-Q$  a  $6-9$  vypočítáme snadno souřadnice bodu  $2 = (1, x, ty)$ . Podmínka, aby na přímkách  $2-8$ ,  $P-6$ ,  $Q-0$  ležel bod 4 zní  $x \cdot y \cdot A = 0$ , kde  $A = t \cdot (ty + t - 2x - y) + 1$  a zřejmě vzhledem k podmínce, uvedené v U.2 musí být  $A = 0$ . Obdobně podmínka, aby na přímkách  $2-0$ ,  $P-8$ ,  $Q-7$  ležel bod 3 zní  $B = 0$ , kde  $B = ty \cdot (ty + t - x - 1) + 1 - tx$ . Vidíme, že také  $B \cdot x -$

$-x \cdot y \cdot A = x \cdot (tx + ty - 1) \cdot (y - 1) = 0$ . V případě  $x = 0$  již víme, že splynou body 5 a 6, v případě  $tx + ty - 1 = 0$  splynou přímky 2-P-Q, 3-P-8, musí tedy být  $y = 1$ . Z podmínky  $A = 0$  dostaneme  $C = 0$ , kde  $C = (2t - 1) \cdot (t - x) + 1 - x$ . Z těchto výsledků vypočítáme souřadnice bodu 3 =  $(2t, 1, t)$ , ležícího na přímkách 2-0 a Q-7. Obdobně z přímků P-6 a Q-0 souřadnice bodu 4 =  $(2, 2tx + x, 2tx)$ . Podmínka, aby body 3, 4, 5 ležely na jedné přímce tedy zní  $tx \cdot (2t - 1) = 0$  a víme již že nesmí být  $tx = 0$ , čili je  $2t = 1$ . Pak ale z podmínky  $C = 0$  plyne  $x = 1$ , čili shrnujeme  $x = y = 1, 2t = 1$  a vidíme, že body 2, 3, 4 splynou. Schéma N-2 není realizovatelné.

*Schéma N-3.* Z přímků P-8, Q-0 vypočítáme souřadnice bodu 3 =  $(ty + t + y + 1, x + y + 1, y + 1 - tx)$ , obdobně z přímků 6-0 a 3-5 souřadnice 2 =  $(t + 1, x + y + 1, y + 1 - tx)$  a konečně z přímků 2-9 a 3-7 souřadnice 4 =  $(ty + t + y + 1, y^2 + xy + x + 2y + 1, y + 1 - tx)$ . Pak souřadnice přímky 4-8 jsou 4-8 =  $(-y - 1, t, y + 1)$  a podmínka, aby na ní ležel bod Q zní  $tx + ty - y - 1 = 0$ . Obdobně podmínka, aby bod 4 ležel na přímce P-6 zní  $(tx + ty - y - 1) \cdot (t - x - y) + ty \cdot (x - 1) \cdot (t + 1) = 0$ , tedy vzhledem k předchozímu  $ty \cdot (x - 1) \cdot (t + 1) = 0$  a z podmínky, uvedené v U.2 plyne  $t + 1 = 0$ , což je ale sporné, neboť v takovém případě splynou body 2 a 3.

*Schéma N-4.* Označme  $A = t^2x^2 + t^2xy - t^2x - t^2y + txy + t - x, C = x^2 + tx + ty - x - 1$ . Podmínka 2-P-Q zní  $Ay = 0$ , čili podle U.2  $A = 0$ . Aby na přímkách 2-8, 3-6, Q-9 ležel bod 4, pak  $y \cdot (x + y) \cdot (Ax + C) = 0$ . V případě  $x + y = 0$  by splynuly body 3 a 8, z čehož je patrné, že také  $C = 0$ . Protože  $A + C \cdot (t - x - tx) = x^2 \cdot (1 - x) \cdot (t + 1) = 0$ , pak dle U.2 musí být  $t = -1$ , ale v tom případě splynou přímky 4-P-0, 3-P-8.

*Schéma N-5.* Z přímků P-0, Q-9 vypočítáme 4 =  $(y + 1, x + y, x + y - ty - t)$ . Obdobně z 6-0 a P-Q plyne 2 =  $(t + ty - x, tx + ty - x^2 \cdot ty - txy)$  a z 2-7 Q-8 bod 3 =  $(t + ty - x, tx^2y + txy^2 - x^2 + tx + ty - xy, ty - txy)$ . Podmínku, aby body 3, P, 5 ležely na jedné přímce můžeme pak vyjádřit ve tvaru  $B = C + tx \cdot (t - x) = 0$ , kde  $C = xy \cdot (t - 1) \cdot (tx + ty - 1) + (t - x) \cdot (ty - x)$ . Obdobná podmínka pro body 3, 4, 6 zní  $A = C + t \cdot (t - x) \cdot (x^2 - x + 1) = 0$ . Protože je také  $0 = A - B = t \cdot (t - x) \cdot (x - 1)^2$ , vidíme z U.2, že by muselo platit  $t = x$ . V tom případě ale splynou body 2 a P.

*Schéma N-6.* Označme  $Ay = t + ty - x$ . Pomocí přímků P-0 a Q-7 vypočítáme souřadnice bodu 4 =  $(y + 1, x + y + Ay, y)$ . Z přímků 4-6 a Q-8 souřadnice bodu 3 =  $(y + 1 + A, x + y + Ay + Ax, y)$  a konečně souřadnice bodu 2 =  $(y + 1 + A, x + y + Ay + Ax, y + Ay - xy)$  pomocí přímků 3-9 a 6-0. Podmínka, aby bod 2 ležel na přímce P-Q zní  $C = Ay \cdot (t - tx - Ay) - xy \cdot (x - 1) = 0$  a podmínka, aby na jedné přímce ležely body 3, P, 5 zní  $B = -A \cdot (t - tx - Ay) + t \cdot (x - 1) = 0$ , takže je také  $0 = C + By = y \cdot (x - 1) \cdot (t - x)$  a podle U.2 by muselo být  $t = x$ . V tom je však spor, neboť splynou body 2 a 3.



*Schéma N-7.* Označme  $a = ty + t - x$ . Z přímek  $P-0$  a  $Q-9$  vypočítáme souřadnice bodu  $3 = (y + 1, x + y, y - a)$ , obdobně z přímek  $3-5$  a  $Q-8$  souřadnice bodu  $2 = (y + 1 - a, x + y, y - a)$ . Aby na přímkách  $2-0$ ,  $3-6$  a  $Q-7$  ležel bod  $4$  musí být  $a \cdot (y + 1) \cdot B = 0$ , kde  $B = a + ax - ty - xy = 0$ , neboť v případě  $a = 0$  by splynuly body  $2, 3$  a v případě  $y = -1$  přímkou  $3-Q-9$ ,  $4-Q-7$ . Podmínka, aby na přímkě  $P-6$  ležel bod  $2$  je  $(t + 1) \cdot (x - t) + Bt = 0$ , čili buď  $t = -1$ , nebo  $x = t$ , ale v prvním případě splynou přímkou  $3-P-0$ ,  $4-P-8$  a v druhém přímkou  $3-P-0$ ,  $2-P-6$ .

*Schéma N-8.* Pomocí přímek  $P-6$  a  $Q-9$  vypočítáme souřadnice bodu  $2 = (y + 1, x + y, y - ty)$ . Obdobně z přímek  $2-0$  a  $Q-7$  souřadnice bodu  $3 = (y + 1, x + y + ty, y)$  a bod  $4 = (1 + y - ty, x + y, y - ty)$  získáme z přímek  $2-5$  a  $Q-8$ . Přímkou  $3-4$  má souřadnice  $3-4 = (x + ty, -1, 1 - x - ty)$  a má-li na ní ležet bod  $6$ , musí být  $ty = 0$ , ale to je spor s U.2.

V následující kapitole ukážeme, jak možno pomocí souřadnic U.2 realizovat všechna schémata R-2 až R-27.

Přicházíme k předpokladu, že každý  $B^3$ -bod je typu  $B^{32}$ . Pro schémata tohoto typu platí

$$\begin{array}{cccc} 1 & & 5-6-7 & \\ \hline 5 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & 8 & P & Q \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ 5-8-9 \\ 7-0-9 \end{array}$$

Zřejmě můžeme souřadnicový systém v tomto případě volit takto:  $5 = (1, 0, 0)$ ,  $7 = (0, 1, 0)$ ,  $9 = (0, 0, 1)$ ,  $1 = (1, 1, 1)$ . Na přímkě  $5-7 = (0, 0, 1)$  upevníme bod  $6 = (x, 1, 0)$ , na přímkě  $1-7 = (1, 0, -1)$  bod  $P = (1, y, 1)$  a na přímkě  $1-9 = (1, -1, 0)$  bod  $Q = (1, 1, t)$ . Pak bod  $0$  leží na přímkě  $1-5 = (0, 1, -1)$  a na přímkě  $7-9 = (1, 0, 0)$ , čili pro jeho souřadnice platí  $0 = (0, 1, 1)$ . Obdobně z přímek  $1-6$  a  $5-9$  vypočítáme souřadnice bodu  $8 = (1 - x, 0, 1)$ . Shrnujeme:

$$\text{U.3} \quad \begin{array}{l} 1 = (1, 1, 1), \quad 5 = (1, 0, 0), \quad 6 = (x, 1, 0), \quad 7 = (0, 1, 0), \\ 8 = (1 - x, 0, 1), \quad 9 = (0, 0, 1), \quad 0 = (0, 1, 1), \quad P = (1, y, 1), \quad Q = (1, 1, t). \end{array}$$

*Schéma N-9.* Z přímek  $P-8$  a  $Q-7$  vypočítáme souřadnice bodu  $4 = (x, txy - ty + y, tx)$ . Z přímek  $4-0$ ,  $P-9$  souřadnice bodu  $3 = (x, xy, xy + tx - txy + ty - y)$ . Podmínku, aby body  $3, Q, 6$  ležely na jedné přímkě můžeme zapsat ve tvaru  $A = (x - 1) \cdot (2txy - xy + y - tx) + t \cdot (y - x) = 0$ . Z přímek  $4-5$  a  $P-6$  vypočítáme ještě souřadnice bodu  $2 = (tx - txy + xy, txy + y - ty, tx)$  a zjistíme, že podmínka, aby body  $2, Q, 0$  ležely na přímkě zní:  $B = tx \cdot (ty - t - 3y + 2) + y \cdot (x + t - 1) = 0$ . Tedy také  $0 = A \cdot (t - 2) - B \cdot x = y \cdot (t - 1) \cdot (x - 1)$ .  $C = 0$ , kde  $C = tx - x - t + 2$ . V případě  $y = 0$  splynou body  $3, 4$ ; v případě  $t = 1$  splyne bod  $Q$  s bodem  $1$  a v případě  $x = 1$  bod  $8$  s bodem  $9$ . Musí tedy být  $C = 0$  a přímkou  $2-3$  můžeme upravit na tvar  $2-3 = (txy - xy - tx, x^2 - x - 1 + xy, x - x^2y)$  a má-li na této přímkě ležet bod  $8$ , pak  $x \cdot (y - 1) \cdot D = 0$ , kde

$D = t - 1 - tx = 0$ , neboť v případě  $y = 1$  by splynuly body  $P$  a  $1$  a v případě  $x = 0$  body  $6$  a  $7$ . Je tedy také  $0 = C + D = 1 - x$  a splynou body  $8, 9$ . Schéma N-9 tedy není realizovatelné.

*Schéma N-10.* Z přímek  $6-P$  a  $5-Q$  vypočítáme  $2 = (x + t - txy, 1, t)$ , dále z  $2-7$  a  $Q-0$  bod  $3 = (x + t - txy, 2t - txy + x + t^2xy - tx - t^2, t)$  a konečně z přímek  $P-0$  a  $2-9$  bod  $4 = (x + t - txy, 1, 1 - txy + x + t + txy^2 - xy - ty)$ . Označme ještě  $A = t + y - 2$ ;  $B = xy - x - y$ ;  $C = txy - tx - 1$ ;  $D = (txy - x - t + 1) \cdot B + (1 - x) \cdot A$ ;  $E = txy \cdot (t - 1) + ty \cdot (y - 1) + t \cdot (2 - t - x) + x - y$ . Ukažme ještě, že musí platit:

$$(Z) \quad txy \cdot (x - 1) \cdot (y - 1) \cdot (txy - x - t + 1) \neq 0.$$

V případě  $x = 0$  splynou body  $6, 7$ , v případě  $y = 0$  přímky  $8-5-3$  a  $5-8-9$ ; v případě  $t = 0$  body  $2, 6$ ; v případě  $x = 1$  body  $8, 9$ ; v případě  $y = 1$  body  $1, P$  a v případě  $txy - x - t + 1 = 0$  body  $2, Q$ .

Podmínka, aby na jedné přímce ležely body  $3, P, 8$  zní  $x \cdot E = 0$ , tedy  $E = 0$ , obdobně pro body  $4, Q, 8$  platí  $D = 0$ . Souřadnice přímky  $3-4$  můžeme nyní napsat ve tvaru  $(txy - tx - ty + t - 1, 1, tx + 1 - t - x)$  a má-li na ní ležet bod  $6$ , pak  $(x - 1) \cdot C = 0$ , z čehož podle (Z) je  $C = 0$ . Dále se ihned přesvědčíme, že je také  $0 = E + C \cdot (ty - txy + x - y) + D \cdot t = ty \cdot (1 - x) \cdot A$ , čili podle (Z) také  $A = 0$  a kromě toho z podmínky  $D = 0$  plyne  $B = 0$ . Protože ale  $0 = C \cdot (y - 2) + t \cdot (2 - y) \cdot A + B = t \cdot (y - 1)^2$  vidíme spor s podmínkou (Z). Schéma N-10 není realizovatelné.

*Schéma N-11.* Z přímek  $P-5$  a  $Q-0$  vypočítáme souřadnice bodu  $4 = (1 - y, ty - y, t - 1)$  a obdobně z přímek  $Q-6$  a  $4-9$  souřadnice  $2 = (1 - y + xy - x, xy - txy - y + ty, txy - t^2xy + t - ty)$ . Podmínka, aby body  $2, P, 8$  ležely na přímce zní:  $y \cdot (t - 1) \cdot (x - 1) \cdot (txy - x + y - 1) = 0$ . V případě  $y = 0$  splynou přímky  $2-P-8, 5-8-9$ . V případě  $t = 1$  (resp.  $x = 1$ ) body  $1, Q$  (resp.  $8, 9$ ) a musí tedy být  $txy - xty = 1$ . Lze tedy souřadnice bodů  $2$  a  $4$  upravit takto:  $2 = (x^2 - x, x^2 - 1, tx^2)$ ,  $4 = (x, x + 1, 1 + tx)$ . Pak z přímek  $2-7$  a  $P-0$  vypočítáme  $3 = (x - 1, tx + xy - x - y + 1, tx)$  a souřadnice přímky  $3-4 = (tx - x, 1, xy - y - x)$ . Na ní má ležet bod  $6$ , čili  $tx^2 - x^2 + 1 = 0$ . Pak ale  $2 = (x, x + 1, x + 1)$  a bod  $2$  leží na konfigurační přímce  $1-5-0$ . Spor je v tom, že má být oddělen od bodů  $1, 5, 0$ . K tomuto schématu se ještě později vrátíme.

*Schéma N-12.* Z přímek  $P-8$  a  $Q-7$  vypočítáme  $3 = (x, txy - ty + y, tx)$ . Dále z přímek  $3-9$  a  $0-Q$  bod  $4 = (x, txy - ty + y, txy - ty + y + tx - x)$  a konečně bod  $2 = (tx^2y - txy - x^2 + x + xy, txy - ty + y, tx)$  z přímek  $3-5$  a  $6-Q$ . Na přímce  $2-4$  má ležet bod  $8$ , pak ale  $ty - txy - y = 0$  a splynou přímky  $2-4-8, 5-8-9$ .

*Schéma N-13.* Označme  $A = x - y \cdot (tx + 1 - t)$ . Z přímek  $P-8$  a  $Q-7$  vypočítáme souřadnice bodu  $3 = (x, x - A, tx)$ . Podobně z přímek  $3-9$  a  $6-0$  souřadnice bodu  $2 = (x, x - A, x - A - 1)$ . Podmínka, aby na přímkách  $2-5$  a  $Q-8$  a  $3-6$  ležel bod  $4$  tedy zní  $(tx + 1 - t) \cdot B = 0$ , kde  $B = (2 - y - t) \cdot A + tx - ty + xy - 2x + 1 = 0$ , neboť v případě  $tx + 1 = t$  je  $A = x$  a splynou přímky  $2-4-5$ ,  $2-3-9$ . Podmínka, aby bod  $2$  ležel na přímce  $P-Q$  se dá zapsat ve tvaru  $A + B = 0$ , čili také  $A = 0$ , ale to je spor, neboť pak splynou body  $3$  a  $Q$ .

*Schéma N-14.* Označme  $a = ty - 1$ ,  $b = 1 - x - y$ . Z přímek  $P-9$  a  $Q-0$  vypočítáme  $3 = (1, y, t + y - 1)$ ; z přímek  $Q-6$  a  $3-7$  souřadnice bodu  $4 = (tx, tx + xy + b, t^2x + txy - tx)$ , z čehož plyne  $tx \neq 0$ , neboť jinak splynou body  $4$  a  $7$ . Podmínka, aby bod  $2$  ležel na třech přímkách  $3-8$ ,  $4-5$ ,  $6-0$  zní  $(x - 1 - tx) \cdot A = 0$ , kde  $A = x + 2b - bt - by = 0$ , neboť v případě  $x - 1 = tx$  splynou body  $3$ ,  $4$ . Z přímek  $6-0$ ,  $4-5$  vypočítáme  $2 = (x - xy - tx^2, 1 - y, tx)$ . Podmínka, aby bod  $4$  ležel na přímce  $P-8$  se dá napsat ve tvaru  $x \cdot (t + y - 1) \cdot B - A \cdot tx = 0$ , kde  $B = ax - a - bt = 0$ , neboť v případě  $t + y = 1$  splynou přímky  $3-4-7$ ,  $2-4-5$ . Konečně podmínka, aby bod  $2$  ležel na přímce  $P-Q$  zní  $B \cdot (1 - y) - atx^2 = 0$ , čili  $a = 0$ , takže také z  $B = 0$  plyne  $b = 0$  a z  $A = 0$  také  $x = 0$ , což je ovšem ve sporu s výsledkem  $tx \neq 0$ .

*Schéma N-15.* Z přímek  $Q-6$ ,  $P-8$  vypočítáme souřadnice bodu  $4 = (tx^2 - x^2 + x - txy, txy - ty - xy + y, tx - txy)$ . Obdobně z  $4-9$ ,  $P-5$  vypočítáme souřadnice bodu  $3 = (x - txy, y - ty, 1 - t)$ . Podmínka, aby bod  $3$  ležel na přímce  $0-Q$  potom zní:  $(1 - t) \cdot A = 0$ , kde  $A = txy - x + y - 1 = 0$  neboť v případě  $t = 1$  splynou body  $1$ ,  $Q$ . Z přímek  $6-0$ ,  $P-Q$  pak již pomocí  $A = 0$  snadno vypočítáme souřadnice bodu  $2 = (x, 0 - 1)$ . Protože  $4-7 = (ty - t, 0, txy - x + 1 - ty)$ , pak podmínka, aby na této přímce ležel bod  $2$  zní  $B = ty - tx + x - 1 = 0$ . Rovnici přímky  $2-3$  pak můžeme upravit na tvar  $2-3 = (1, -x - tx^2, x)$  a ihned je patrné, že na ní nemůže ležet bod  $8 = (1 - x, 0, 1)$ .

Tim jsme ukázali, že všechna tato schémata nemohou být realizovatelná. Jedinou výjimkou je zde schéma N-11, jestliže ovšem přijmeme definici schémat singulárních (viz kapitola poslední). V následující kapitole ukážeme, že ostatní schémata (skupiny R) již realizovat lze a to takto:

#### KAPITOLA 4

Užijeme nejprve zápisu U.1 z předchozí kapitoly a dokážeme realizovatelnost schématu R-1. V U.1 jsou zapsány již souřadnice všech konfiguračních bodů, kromě  $2$ ,  $3$ ,  $4$ . Souřadnice těchto bodů a zároveň podmínky pro neznámé  $x$ ,  $y$ ,  $t$  vyjádříme v tomto schématu (a obdobně i v následujících) tímto způsobem:

### Schémata skupiny U.1

R-1:  $2 = (2 - 2t, 1, 2 - y - t)$ ;  $3 = (x, 2 - t - x, 1 - x)$ ;  $4 = (2x, 2, 2 - y)$ ,  
kde  $ty = x$ ,  $x = 1 - t^2$ ,  $2t^3 + 3t^2 + t = 1$ .

### Schémata skupiny U.2

R-2:  $2 = (1, x, ty)$ ;  $3 = (x + 1, 1, 1 + x - t)$ ;  $4 = (1, ty + t, ty)$ , kde  $x = t^2 + t - 1$ ,  $y = t^4 + 2t^3 - 1$ ;  $t^6 + 2t^5 - t^3 - 2t^2 + 1 = 0$ .

R-3:  $2 = (1, x, ty)$ ;  $3 = (1, ty - y - x - 1, ty)$ ;  $4 = (2 + y - ty, x + y, 1 + y - ty)$ , kde  $tx + t + 2 + y = 0$ ;  $t^2y + y + 1 = 0$ ;  $t^5 + 4t^4 + 3t^3 + 4t^2 + t + 1 = 0$ .

R-4:  $2 = (t - tx, x, ty + t + x - 1)$ ;  $3 = (1 - t, tx + ty, 1 - t - x)$ ;  $4 = (1 - x, tx + ty, 1 - t - x)$ , kde  $t^2y = x - t^2x$ ;  $3x = 2t^5 - 7t^4 + 5t^3 - 4t^2 + 2$ ;  $t^7 - 4t^6 + 4t^5 - 2t^4 + t = 1$ .

R-5:  $2 = (y + 1, 1, ty)$ ;  $3 = (ty + t, 1, ty)$ ;  $4 = (y + 1, 1, xy + x + y - 2tx)$ , kde  $y = t - x$ ;  $x = t^3$ ;  $t^5 + t^4 + t^3 - t = 1$ .

R-6:  $2 = (y + 1 - t, xy, y + 1)$ ;  $3 = (y + 1 - t, -1, y + 1)$ ;  $4 = (y + 1 - t, xy, ty + 2y + 2)$ , kde  $y = tx - x - 1$ ;  $x = t + 1$ ;  $t^4 + t^3 - t^2 - t = 1$ .

R-7:  $2 = (1 + t - x, 1, ty)$ ;  $3 = (ty + t, 1, ty)$ ;  $4 = (u, tu + ty, ty)$ , kde  $x^2 = u$ ;  $1 - ux - x = xy$ ;  $tu = ux + x + 1$ ;  $u^3 + u^2 = 1$ .

R-8:  $2 = (x, y + x^2, y)$ ;  $3 = (a, a - 1, a + y)$ ;  $4 = (y + 1, y + ty + t, y)$ , kde  $y = t - at = a - 1 - ax$ ;  $x \cdot (a - 3) = a^4 - a^3 + 2a^2 - 2a + 2$ ;  $a^7 + a^5 - 3a^4 + 4a^3 + 2a^2 + 1 = 0$ .

R-9:  $2 = (1, x - t, -t)$ ;  $3 = (1, x + ax, -t)$ ;  $4 = (1, t - a^5, -a^5)$ , kde  $tx = 1 - a$ ,  $y = a^2 - a$ ,  $t = -a^2$ ,  $a^6 - a^5 + 2a^3 - 2a^2 + 2a = 1$ .

R-10:  $2 = (1, t + y, 2t - xy)$ ;  $3 = (1, t + y, 2y + 3t + 1)$ ;  $4 = (1, -t - y, -2y - 2t)$ , kde  $xy + y + 2 = t + x + 2 = 0$ ,  $y^3 + 2y + 4 = 0$ .

R-11:  $2 = (-1, 1, 1 + x)$ ,  $3 = (1, -1, t + 1)$ ,  $4 = (-1, tx, tx + t)$ , kde  $ty + t + 1 = xy + 1 - x = 0$ ,  $y^3 - 2y^2 + 2 = 0$ .

R-12:  $2 = (y + 3 - 3a, x + y + 2 - 2a, 1)$ ,  $3 = (x + y + 3 - a, x + y + 2 - 2a, 1)$ ,  $4 = (x + y + 3 - a, t + 1, 1)$ , kde  $y - t + 2x = tx + x - 1 = at - t - a^2 = a^4 + a - 1 = 0$ .

R-13:  $2 = (tx + y, tx^2 + x + y - ty, y - ty)$ ,  $3 = (tx + y, x + y, y - ty)$ ,  $4 = (y + 1, x + y, y - ty)$ , kde  $x \cdot (t - 2) = 1 - t$ ,  $y = t^3 + 2t^2 + 6x^2 + 6t - 14x - 9$ ,  $t^7 - 2t^6 + t^5 - 5t^4 + 7t^3 + 3t^2 - 2t = 4$ .

R-14:  $2 = (a, 2 - y, 2 - y - t)$ ,  $3 = (1, 2 - y, 2 - y - t)$ ,  $4 = (y + 1, a, y + a - t)$ , kde  $t = ax$ ,  $x + y = a$ ,  $x + 1 = a^2$ ,  $a^4 - a^3 - a^2 + a = 1$ .

R-15:  $2 = (a, 1 + ax, 1)$ ,  $3 = (a, 2 + ax, 1)$ ,  $4 = (2a, 2 + ax, 1)$ , kde  $t + x^2 = 0$ ,  $x + 1 = a$ ,  $xy - x = 2$ ,  $a^3 - a^2 + 1 = 0$ .

R-16:  $2 = (t + at, x + 1, 1 - tx + axy)$ ,  $3 = (atx + aty, x + y, atx + aty - 1)$ ,  
 $4 = (at, 1, 1 - t)$ , kde  $at = 1 - ay$ ,  $y = ax - 1$ ,  $x \cdot (x + 1) \cdot (2 - x^2 - 3ax) =$   
 $= 1 + 2x$ ,  $x^8 - x^7 - 3x^6 + 2x^5 + 6x^4 + 5x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$ .

R-17:  $2 = (1, 1 + 2x + 3y, 1 + 3y - x)$ ,  $3 = (1, 1 + 2x + 3y, -t)$ ,  $4 =$   
 $= (1, 3x + 4y + 2, -t)$ , kde  $x = t + y$ ,  $t = 7y^2 - 2$ ,  $7y^2 \cdot (y + 1) = 1$ .

R-18:  $2 = (at + a, y - at, 2a - ay)$ ,  $3 = (at + a, y - at, y - 1)$ ,  $4 = (y, y -$   
 $- at, y - 1)$ , kde  $t + y = 3a$ ,  $ty = 1$ ,  $x = 2ay - a - 1$ ,  $3a^2 = a + 1$ .

R-19:  $2 = (1, a + x, a)$ ,  $3 = (1, a + x, a + 1)$ ,  $4 = (2, a + 1 - ax, 2a + 2)$ , kde  
 $t \cdot (x + a) = x - 1$ ,  $ax \cdot (a + 1) + a^2 + 1 = 0$ ,  $ay + ax + a + x = 0$ ,  $a^5 - 2a^4 -$   
 $- 2a^3 - 4a^2 - 2a = 1$ .

R-20:  $2 = (t, t + x, t + x - tx)$ ,  $3 = (t, t + x, t + x - tx + 1)$ ,  $4 = (t + 1,$   
 $t + x, t + x - tx + 1)$ , kde  $t^5 + t^3 + 2t^2 - t + 1 = t^4 + t^3 + t^2 + 2t - y =$   
 $= tx + x + y = 0$ .

R-21:  $2 = (10, 1, 9)$ ,  $3 = (10, 1, 15)$ ,  $4 = (2, -1, 3)$ , kde  $t = -2$ ,  $5y = 3$ ,  $5x =$   
 $= -4$ .

R-22:  $2 = (1, 2x + 2t, 2t + x)$ ,  $3 = (1, 2x + 2t, 2y - 3)$ ,  $4 = (y + 1, 2t + 2, y)$ ,  
kde  $tx = 1 - 2ty$ ,  $ty + y = t + 2$ ,  $y^4 - 2y^3 = y - 3$ .

R-23:  $2 = (1, u - t, u - t - x)$ ,  $3 = (1, u - t, 1 - t)$ ,  $4 = (x, u - t, u - t - 1)$ ,  
kde  $y = ux - 1 - x$ ,  $tx = 1$ ,  $x^3 - ux^2 + x \cdot (u - 1)^2 + 2 = u$ .

R-24: Toto schéma je ekvivalentní se schématem  $S_1$ , popsaným v Časopise pro  
přestování matematiky, ročník 91 (1966), str. 303. Konfigurace leží na kubice.  
Schéma R-24 přechází na  $S_1$  permutací  $(PQ)$ , (59), (806).

R-25:  $2 = (1, u + 1, u + 1 - x)$ ,  $3 = (1, u + 1, -y)$ ,  $4 = (1 - tu, u + u^2, tuy)$ ,  
kde  $y = t - 1$ ,  $x = u \cdot (1 + t + u)$ ,  $tu = 1 - u^2 - u^3 - u^4$ ,  $u^6 + 2u^5 + u^4 -$   
 $- u^3 - 2u^2 - u + 1 = 0$ .

R-26:  $2 = (x, tx + ty, -xy)$ ,  $3 = (x, tx + ty, ty)$ ,  $4 = (x, 1, -xy)$ , kde  $t = xy +$   
 $+ x$ ,  $y \cdot (x + 2) = -2x - 3$ ,  $x^4 + 2x^3 + 2 = 0$ .

R-27:  $2 = (1, a, aty)$ ,  $3 = (ty + t, t, ty)$ ,  $4 = (1, a, a - t)$ , kde  $a = t^3 - t^2$ ,  $tx =$   
 $= t^2 - ty - y$ ,  $t^2y + y = t - 1$ ,  $t^7 - t^5 - 2t^4 - t^2 = 1$ .

### Schéματα skupiny U.3

R-28:  $2 = (x, xy, 1)$ ,  $3 = (x + 2, 2xy, 2)$ ,  $4 = (2x, y + 2, 2)$ , kde  $2y = 3 - t$ ,  
 $4x = 6 - t$ ,  $t^2 - 5t + 2 = 0$ .

R-29:  $2 = (1, y, t + y - 1)$ ,  $3 = (t - 1 - a + y - x, y - a, t - 1)$ ,  $4 =$   
 $= (1, 6 - 2t - 2y, 3 - a - t)$ , kde  $at = a + 1$ ,  $x + a = ax$ ,  $ay + y = 2a$ ,  $a^4 +$   
 $+ a^2 + a + 1 = 0$ .

R-30:  $2 = (1, 1 + u, 2 + u - y)$ ,  $3 = (1, y, t + y - 1)$ ,  $4 = (x, txy - ty - y,$   
 $tx)$ , kde  $xy = -t - u$ ,  $t \cdot (u + y) = u + 1$ ,  $y \cdot (3u - 2) = 2u^4 - u^3 - 4u^2 + 2,$   
 $2u^7 + u^6 - 4u^5 - u^4 + 11u^3 + 12u^2 + 3u = 1$ .

R-31:  $2 = (ty, 1, t)$ ,  $3 = (1, a, t + a - 1)$ ,  $4 = (1, y, t + a - 1)$ , kde  $ax = a + y$ ,  $ty = y + 1 - a$ ,  $y = a^2 - 1$ ,  $a^5 - 3a^3 + 2a = 1$ .

R-32:  $2 = (a + 2, 2, t)$ ,  $3 = (a + 2, t + 1, t)$ ,  $4 = (a + 2, 2, 1)$ , kde  $y = 2$ ,  $t \cdot (a + 1) = a$ ,  $x = 3a + 3 - t$ ,  $a^3 = a + 1$ .

R-33:  $2 = (1, t + u + y - 2, t + u - 1)$ ,  $3 = (1, u, t + u - 1)$ ,  $4 = (1, t + u + y - 2, 2x + y - t)$ , kde  $y = t - tx$ ,  $tu = x - 1 + 2u$ ,  $u^3 - u^2x + u^2 + 3ux - 2u - x = x^2 - x + 1 = 0$ .

R-34:  $2 = (1, 2 - x, x + 1)$ ,  $3 = (1, 2, x + 1)$ ,  $4 = (1, 2 - x, 2)$ , kde  $t = x$ ,  $y = 1 - x$ ,  $x^2 - x + 2 = 0$ .

R-35:  $2 = (3 - t - x, 5 - 2t - 2x - y, 1)$ ,  $3 = (3 - t - x, 2 + y - t, 1)$ ,  $4 = (x + y, 2 + y - t, 1)$ , kde  $t = ax + 1 - a$ ,  $y = a + 1$ ,  $x = a^2$ ,  $x^2 - x + 1 = 0$ .

R-36:  $2 = (1, a, t + a - 1)$ ,  $3 = (1, a - a^3, t + a - 1)$ ,  $4 = (1, a, a + 1 - y)$ , kde  $a^2x = 1$ ,  $t = ax + y + 1 - 2a$ ,  $y = a^5 - 2a^4 - 2a^3 + 4a^2 - a$ ,  $a^6 - 5a^4 - 2a^3 + 3a^2 = a + 1$ .

R-37:  $2 = (u + t - 1, 1, 1)$ ,  $3 = (u + t - 1, x + u, 1)$ ,  $4 = (1 - x, x + u, 1)$ , kde  $xy = 1$ ,  $ut = y$ ,  $y = 1 + u$ ,  $u^5 = 1$ ,  $u \neq 1$ .

R-38:  $2 = (1, v^2, u)$ ,  $3 = (1, v, u)$ ,  $4 = (1, v^2, vu)$ , kde  $t = xy$ ,  $x^2 = x - 1$ ,  $y = v + 1 - u$ ,  $u = v^3x$ ,  $v^8 + v^7 - v^5 - v^4 - v^3 + v + 1 = 0$ .

R-39:  $2 = (1, 1 - u, 2 - y - u)$ ,  $3 = (2, 2t - ux - uy + 4u + 2, 4 - 2u - 2y)$ ,  $4 = (1, 1 - u, t - u)$ , kde  $x = 2u^6 - 3u^5 + 6u^4 - 7u^3 + 3u^2 - u - 2$ ,  $y = -u^6 + u^5 - 2u^4 + 3u^3 + 3$ ,  $t = u^4 - u^3 + u^2 - u - 1$ .

R-40:  $2 = (-x, 3y - t, y)$ ,  $3 = (-x, 1 + tx, y)$ ,  $4 = (-x, 3y - t, 2xy + 1)$ , kde  $t = y \cdot (2 - x)$ ,  $y = x + 1$ ,  $x^4 - 2x^2 - 3x = 1$ .

R-41:  $2 = (a + 1, ay + y - a, 1)$ ,  $3 = (a + 1, 2y - 1, 1)$ ,  $4 = (1 + a - ay, y, 1)$ , kde  $2ty = 2 - x$ ,  $xy = ay + x$ ,  $ax = a - 2$ ,  $a^5 + a^4 - a^3 + 3a^2 - 4a + 4 = 0$ .

R-42:  $2 = (x, t, x - 1)$ ,  $3 = (x, 2x - tx - 1, x - 1)$ ,  $4 = (x, t, at - 1)$ , kde  $ay = a + t - x$ ,  $x = at \cdot (a - 1)$ ,  $t = a \cdot (a - 1)^2$ ,  $a^6 - 4a^5 + 5a^4 - 2a^3 + 1 = 0$ .

R-43:  $2 = (xy - x, xy - 2x + t + y - 3, x - tx)$ ,  $3 = (y - 1, y - ty, 1 - t)$ ,  $4 = (xy - x, xy - 2x + t + y - 3, xy - tx + y - 1)$ , kde  $t = 2 + x - y - xy + y^2$ ,  $y = x^2$ ,  $x^7 - 2x^6 + 2x^4 = x + 1$ .

R-44:  $2 = (ay + 1, a + y, a)$ ,  $3 = (1, a + y, a)$ ,  $4 = (1, a + y, t)$ , kde  $x \cdot (a + y - 1) = 1$ ,  $t = 1 - y$ ,  $y^2 = y + 1 - a$ ,  $a^2 = a - 1$ .

R-45:  $2 = (1, t + x, t)$ ,  $3 = (1, t + x + y - 1, x + y + 2t - 2)$ ,  $4 = (1, t + x + y - 1, t + x)$ , kde  $y = 2 - t - x^2$ ,  $tx = -1$ ,  $x^5 - x^4 + x^2 - x = 1$ .

R-46:  $2 = (1, ay^2 - 2ay + a + y - 1, ay^2 - 2ay + a)$ ,  $3 = (1, ty + 1 - 2t, ty - t)$ ,  $4 = (1, ty + 1 - 2t, t)$ , kde  $y \cdot (x + 1) = 2x - a + 1$ ,  $x \cdot (1 - a) = 1$ ,  $t \cdot (1 + a) = a$ ,  $a^5 - a^4 + 2a^3 + 3a = 2$ .

R-47:  $2 = (1, tux - ux + 2 + u - t, tux + u - ux)$ ,  $3 = (u - tuy, x - tx, t)$ ,  $4 = (1, t + y - 1, t)$ , kde  $uy = x^2$ ,  $u = x^2 - x + 1$ ,  $t \cdot (1 - 2ux) = u \cdot (2 - x - u)$ ,  $x^9 - 4x^8 + 7x^7 - 8x^6 + 7x^5 - 6x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x = 1$ .

R-48:  $2 = (1, 5 - 2a, 6 - 3t)$ ,  $3 = (3, a, 3t)$ ,  $4 = (3, a, 2 + a)$ , kde  $2t = a + 1$ ,  $3y = 1$ ,  $x = -1$ ,  $a^2 = 5$ .

R-49:  $2 = (1, t + y + 1 - at, t + 1 - at)$ ,  $3 = (1, t + y, t)$ ,  $4 = (1, t + y, t + 1)$ , kde  $xy = 1 - a$ ,  $x \cdot (a + 1) = t + 1 - at$ ,  $t^2 = t - a$ ,  $a^7 - 2a^3 - 3a^2 + a + 4 = 0$ .

R-50:  $2 = (x, 1, 1)$ ,  $3 = (x, ty + 2 - t, 1)$ ,  $4 = (ty + x, ty + 2 - t, 1)$ , kde  $2x = 3 - 2y - t$ ,  $2y = (t - 1)^2$ ,  $t^4 - 2t^3 - t^2 + 2t + 2 = 0$ .

R-51:  $2 = (t - x, 1 - tu, 1)$ ,  $3 = (t - x, ty, 1)$ ,  $4 = (u + 1 - t, 1 - x, 1)$ , kde  $t = 1 + u^2$ ,  $ty = t - x + 1 - u$ ,  $tx = t - 1$ ,  $u^4 + u^2 = u - 1$ .

R-52:  $2 = (2, 1 - 2x, 1)$ ,  $3 = (2, -4 - 2x, x - 1)$ ,  $4 = (2, 1 - 2x, x - 1)$ , kde  $2ty = -1$ ,  $2y = -3x - 1$ ,  $x^2 + 1 = 0$ .

R-53:  $2 = (2, 2 - 2u, 2 - 2u - y)$ ,  $3 = (1, y + u, t)$ ,  $4 = (1, 1 - u, u - ut)$ , kde  $x = t = 1 + u$ ,  $ty = 2$ ,  $u^4 + u^2 + u + 1 = 0$ .

R-54:  $2 = (vx, a, a - v)$ ,  $3 = (1, y, a - v)$ ,  $4 = (1, a, a - v)$ , kde  $y = 1 + v$ ,  $vx = ty + y - a$ ,  $vt = (a - 1)^2 + v \cdot (2v - 1)$ ,  $av \cdot (2v^2 + 11v + 5) = 1 + 5v + 8v^2 - 6v^4$ ,  $7v^8 - 13v^7 - 40v^6 - 20v^5 + 12v^4 + 13v^3 - v^2 - 4v = 1$ .

R-55:  $2 = (x, txy + vy, txy + vy - 1)$ ,  $3 = (x, txy + vy, tx + v)$ ,  $4 = (x, txy + 1 - t, tx)$ , kde  $xy \cdot (3ty - y - t - 2) = 1 + y - t - y^3$ ,  $tv - t = v^2$ ,  $vy = 1 + v - t$ ,  $v^{12} - 5v^{11} + 14v^{10} - 24v^9 + 29v^8 - 25v^7 + 14v^6 - 7v^4 + 4v^3 + 2v^2 = 3v - 1$ .

R-56:  $2 = (ax, a + x, x)$ ,  $3 = (a, y, 1)$ ,  $4 = (a, y, at + y - a)$ , kde  $ty \cdot (x - 1) = x + a - 1 - y$ ,  $xy = 2x - 2ax + 3a - 1 - a^3$ ,  $x \cdot (2a + 1) \cdot a^3 = -a^7 + a^6 - 2a^5 - a^4 + 9a^3 - 3a^2 - 1$ ,  $a^{10} - 2a^9 - a^8 + 6a^7 + 12a^6 + 2a^5 + 18a^4 - 13a^3 + 3a^2 = 2a - 1$ .

R-57:  $2 = (b, ay, 1)$ ,  $3 = (a + 1, y, 1)$ ,  $4 = (b, ab + b - a - a^2, 1)$ , kde  $ay = 2 - x$ ,  $t \cdot (a + 1) = a + 2 - y$ ,  $b = a^3 + a^2 + 1$ ,  $ax - x = a^3$ ,  $a^6 + a^5 - 2a^4 + 2a^2 - 2a + 1 = 0$ .

R-58:  $2 = (ax + x, x, t - 2)$ ,  $3 = (1, y - ay, 1 - a)$ ,  $4 = (1, 1 - x, 1 - a)$ , kde  $t = x + 1 - a$ ,  $y \cdot (1 - a^2) = 1$ ,  $ax = a^5 + 6a^2 + 6a + 2$ ,  $a^6 + a^4 + 5a^3 + 7a^2 + 4a + 1 = 0$ .

R-59:  $2 = (a + 1, 1 - a - x, 2 - a)$ ,  $3 = (x + 1, x + 1 + a, x + 1 - a)$ ,  $4 = (a + 1, 1 - a - x, x + 1 + 2a)$ , kde  $x^3 + x = 1$ ,  $3t = 6 - 2a - 3y$ ,  $a + x = ax$ ,  $3y + 2x = 1$ .

R-60:  $2 = (tx + xy - 2x, txy - x - 1 + y, 1 - t + txy - x)$ ,  $3 = (1, t + y - 1, t)$ ,  $4 = (txy + 1 - tx - xy + x, ty, t)$ , kde  $y \cdot (x^2 + x - 1) = -tx^2 + 2x^2 + x - 1$ ,  $t \cdot (x^5 + x^4 - x + 1) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 1$ ,  $x^{10} - 2x^9 - 4x^8 + x^7 - x^6 + x^5 + 5x^4 - 5x^3 - x^2 + 3x = 1$ .

R-61:  $2 = (vx, av - a + 1, av - a + 1 - v)$ ,  $3 = (1, y - ay, 1 - a)$ ,  $4 = (1, y, 1 - a + ay)$ , kde  $2x = 3a + 1 - v$ ,  $2t = av - v - 2a$ ,  $2ay = av + a - 1$ ,  $3a^2 = 1 + 2v$ ,  $v^2 + 2 = 0$ .

R-62:  $2 = (ux, u + x, x)$ ,  $3 = (1, 1 - x - u, t - u - x)$ ,  $4 = (u, uy, 1)$ , kde  $tx = 2x - 1 - ux$ ,  $y \cdot (u - t + x) = u + x - 1$ ,  $x \cdot (u^2 + u - 1) = -u^3$ ,  $u^8 - u^7 - 2u^6 - 4u^5 + 5u^4 + u^3 + u^2 - 3u + 1 = 0$ .

R-63:  $2 = (2 - t, 1 + y - ty, 1)$ ,  $3 = (2 - t, y, 1)$ ,  $4 = (t - 1 - y, 3t - 2x - 4, 1)$ , kde  $t = 1 + y - y^2$ ,  $2x = (y - 1)^3$ ,  $y^4 - 2y^3 = 1$ .

R-64:  $2 = (1, a, 2y - t)$ ,  $3 = (1, t + 1 - a - y, 2y - t)$ ,  $4 = (1, a, a + 1 - y)$ , kde  $x = 2y - 4 - 10a$ ,  $t = 4y - 6a + 1$ ,  $2y = 1 + 4a^3$ ,  $4a^2 \cdot (a + 1) = 2a + 1$ .

R-65:  $2 = (ux, u + y - 1, y - 1)$ ,  $3 = (ux, u - 1, y - 1)$ ,  $4 = (ux, u + y - 1, 2y - 1 - y^2)$ , kde  $u^7 - 2u^5 + u^4 + 3u^3 - u^2 - 2u + 1 = 0$ ,  $x \cdot (y - 1) = u \cdot (y - 1) + 1$ ,  $y = u^2$ ,  $t = u + 1$ .

R-66:  $2 = (1, u + 2 + t - y, 1 + x + 2t - y)$ ,  $3 = (1, u + 1, t)$ ,  $4 = (1, u + 1, 2 + u - y)$ , kde  $x = tu = uy - y$ ,  $y = u^5 + 2u^4 - u^3 - 3u^2$ ,  $u^7 + u^6 - 4u^5 - 3u^4 + 5u^3 + u^2 - u + 1 = 0$ .

R-67:  $2 = (t + 1, 1, at)$ ,  $3 = (t + 1, 1, x + 2a - 1)$ ,  $4 = (t + 1 - a, 1, t)$ , kde  $t^2 = at - 1$ ,  $a^2 = a + 1$ ,  $x = at + t - 2a$ ,  $y = 1 - t$ .

R-68:  $2 = (1, 2y - y^2, xy - x)$ ,  $3 = (1, 2y - y^2, t)$ ,  $4 = (1, x + y, x + 1)$ , kde  $t = 2 + 2y - y^2 - 2y^3 + y^4$ ,  $x = 1 + y^3 - y^4$ ,  $y^5 - 2y^4 + y^2 + 1 = 0$ .

R-69:  $2 = (x - tx, 1, t)$ ,  $3 = (1 - u, xy - x, t)$ ,  $4 = (x - tx, xy - x, t)$ , kde  $x = 2 + u$ ,  $ty = 1$ ,  $tu^2 = 1 - u$ ,  $u^4 + 2u^3 + 2u^2 - u - 1 = 0$ .

R-70:  $2 = (1, xy, 1 + ax)$ ,  $3 = (1, 1 - t + axy, 1 + ax)$ ,  $4 = (1, y, a)$ , kde  $x^5 - x^4 + 2x^2 = 1$ ,  $t = -x^4 + x^2 - 2x - 1$ ,  $y \cdot (x^2 - tx + a - 3) + a = 0$ ,  $t + y = 1 + a$ .

R-71:  $2 = (vx - x, v, 1)$ ,  $3 = (v, av, a)$ ,  $4 = (v, vy, a)$ , kde  $vt = v + a - vy$ ,  $vy = v \cdot (a + vx) + a - 1$ ,  $a = (1 - v + v^3) \cdot (1 - vx)$ ,  $vx = 1 - v - 2v^2 + 2v^3 - v^5$ ,  $v^9 - v^8 - 3v^7 + 6v^6 + v^5 - 8v^4 + 4v^3 + 3v^2 - 3v + 1 = 0$ .

R-72:  $2 = (1, vy, va)$ ,  $3 = (1, 1 + a - t, a)$ ,  $4 = (1, y, a)$ , kde  $vx \cdot (y - a) = 1$ ,  $t = a + x - vx$ ,  $ax = a + v - 1$ ,  $v \cdot (a^3 - a^2 + a - 1) = a^5 - 2a^4 + a^3 + a^2$ ,  $a^{11} - 5a^{10} + 10a^9 - 8a^8 - 2a^7 + 9a^6 - 6a^5 - 3a^4 + 8a^3 - 7a^2 = 1 - 3a$ .

R-73:  $2 = (t - y + xy - txy, ay + t - ty, at)$ ,  $3 = (a, ay, at + ty - t)$ ,  $4 = (a, ay + t - ty, at)$ , kde  $(x + a - at) \cdot a^2 = tx$ ,  $axy = a + x$ ,  $x \cdot (1 - a) = 1$ ,  $a^9 - 2a^8 + a^6 - a^3 + a^2 = 1$ .

R-74:  $2 = (txy + x^2 - txy^2, x + ty, txy)$ ,  $3 = (1, y, t + y - 1)$ ,  $4 = (x + ty - txy, y, ty)$ , kde  $x \cdot (t - 1) = (1 - t) \cdot (y - 1) \cdot y - 1$ ,  $(y - 1) \cdot ty^2 = -y^5 + 3y^4 - 2y^3 + y^2 - y + 1$ ,  $y^{11} - 5y^{10} + 11y^9 - 15y^8 + 14y^7 - 12y^6 + 12y^5 - 12y^4 + 8y^3 - 4y^2 + 2y = 1$ .

R-75:  $2 = (x - y - tx, 1, t - txy)$ ,  $3 = (1 - x, y - xy, t - txy)$ ,  $4 = (1 - x, 1, t - txy)$ , kde  $y = ux = 1 + x^2$ ,  $ty = t - 1$ ,  $u^3 - 2u^2 = 1$ .



R-76:  $2 = (3x - 2, a + x, x - 2)$ ,  $3 = (1, y, a)$ ,  $4 = (a + 2, y, a)$ , kde  $x \cdot (1 - a) = 2$ ,  $t = a + 1 - y$ ,  $y^2 - 3y + 3 = 0$ ,  $t \cdot (t + 1) = 1$ .

R-77:  $2 = (x, t, a)$ ,  $3 = (1 - x, y - xy, y)$ ,  $4 = (x, a - ax, a)$ , kde  $a^6 - 2a^4 + a + 1 = 0$ ,  $y = a^4 - a^5$ ,  $x = a^4 - a^2$ ,  $t = a + 1$ .

R-78:  $2 = (1, 2a + 3 - t, a + 2 - t)$ ,  $3 = (1 - a, y + 1 - a, y - 2a)$ ,  $4 = (1, 2a + 3 - t, t)$ , kde  $x \cdot (a + 1) = 1$ ,  $2y = x + 2 + 3a - t$ ,  $t \cdot (a - 1) = a^2 + a - 1$ ,  $a^6 - a^4 - 2a^2 + 1 = 0$ .

R-79:  $2 = (2, 2y - a - 1, x + 2 - a)$ ,  $3 = (1, y - ay, 1 - a)$ ,  $4 = (2, 2y + x - 1, x + 2 - a)$ , kde  $a^4 + 4a^2 - 2a + 1 = 0$ ,  $4t = 7 - x - 2y$ ,  $axy = 1 - a - y$ ,  $2ay = a + 1$ .

R-80:  $2 = (1, ay, a^2 - a^3)$ ,  $3 = (1, xy, xy - ay + t)$ ,  $4 = (1, ay, t)$ , kde  $x \cdot (t - a) = t - 1$ ,  $at + 1 = a \cdot (a + y)$ ,  $ay - y = a$ ,  $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^4 - 3a^3 + 4a^2 - 2a + 1 = 0$ .

R-81:  $2 = (2, x + 1, 2a)$ ,  $3 = (t, a, at)$ ,  $4 = (2a - x, a - 1, 2a)$ , kde  $2a^4 - 5a^2 + 6a + 1 = 0$ ,  $tx = x + a - 1$ ,  $x \cdot (a + y) = a \cdot (a - 2)$ ,  $2y = 1$ .

R-82:  $2 = (tu - t, 1, tu - ty)$ ,  $3 = (u^2 - u, 1, u)$ ,  $4 = (tu - t, 1, t)$ , kde  $x = uy + y - 2u + 1$ ,  $2y - uy = t - 1$ ,  $tu = u + 1$ ,  $u^5 - 4u^4 + 5u^3 - 2u = 1$ .

R-83:  $2 = (x, a + 1, a)$ ,  $3 = (x, a + x - tx, a)$ ,  $4 = (xy, ay + y, a + 1)$ , kde  $3x = 4a^5 - a^3 + 3a^2 + 2a + 1$ ,  $3y = 2 + a + a^3 - 4a^5$ ,  $t = 2 + a + 2a^3 - a^4 + 2a^5$ ,  $2a^6 + a^5 + a^4 + 2a^3 + a^2 + a + 1 = 0$ .

R-84:  $2 = (a, a + t, aty + a^2y - ay)$ ,  $3 = (a, a + 1, at + t)$ ,  $4 = (a, a + t, at + t)$ , kde  $t = (y - 1) \cdot ya^2$ ,  $axy = ay + y - 1$ ,  $y \cdot (1 + a^4) = a^4 - a^2 + 2a + 1$ ,  $a^8 - a^6 + 2a^5 + 3a^4 - a^3 - a^2 - a = 1$ .

R-85:  $2 = (1, 1 + 2u - v, u - uv)$ ,  $3 = (2t, 2, 1)$ ,  $4 = (1, 1 + 2u - v, t)$ , kde  $2u^2 + 1 = 0$ ,  $v^2 + 1 = 0$ ,  $x = u - uv + 2t$ ,  $2t = 1 + v$ ,  $y = 2$ .

R-86:  $2 = (2u - t, y, 1)$ ,  $3 = (2u - t, u, 1)$ ,  $4 = (u + 1, u, 1)$ , kde  $u^3 - u^2 = 1$ ,  $tu + t - 2u + 1 = ty - 1 = x - 2 - 5u + 2t = 0$ .

R-87:  $2 = (2 - t, 1 + y - ty, 1)$ ,  $3 = (y, y + 1 - ty, 1)$ ,  $4 = (y, y + ty - t, 1)$ , kde  $x = y^2$ ,  $tx = 1$ ,  $y^5 - y^3 - 2y^2 + 1 = 0$ .

R-88:  $2 = (3t, a, 1)$ ,  $3 = (y, a, 1)$ ,  $4 = (3y, 2a + 2, 3)$ , kde  $x = 2$ ,  $t = y - 1$ ,  $3y = 1 + 2a$ ,  $ay = y + 1$ .

R-89:  $2 = (u, v + u, 1)$ ,  $3 = (u, y, 1)$ ,  $4 = (u, v + u, tu + v)$ , kde  $x = -u^2$ ,  $vy \cdot (v - 1) = x - 2uv$ ,  $t \cdot (y + u - 1) = y + u - uy$ ,  $uv^3 = v^5 - v^4 - v^3 - 2v^2 - 3v - 1$ ,  $v^9 - 2v^8 - v^7 - v^6 + 7v^4 + 7v^3 + 8v^2 + 5v + 1 = 0$ .

## KAPITOLA 5

Rovinné konfigurace  $(12_4, 16_3)$  v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel tvoří – jak známo – množina dvanácti navzájem různých bodů a šestnáct

navzájem různých přímek uspořádaných tak, že každým z bodů procházejí (právě) čtyři přímky a na každé z přímek leží (právě) tři body.

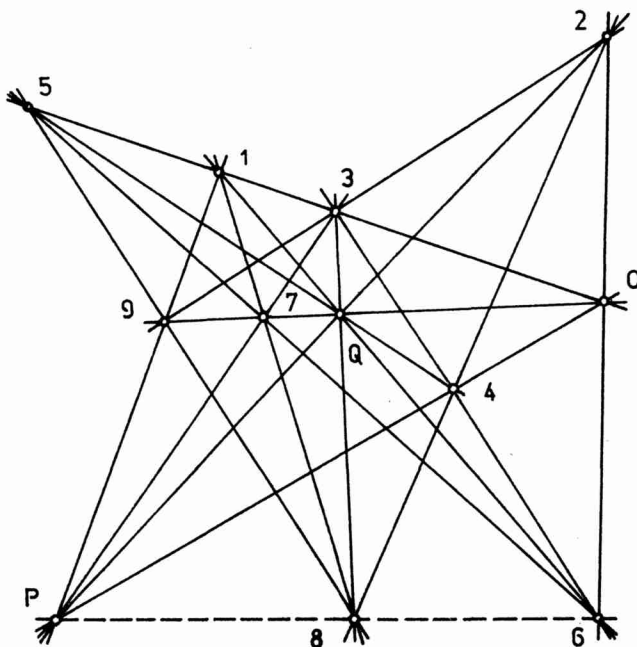
Takto definované rovinné konfigurace nazýváme *regulární*. Jestliže v definici nahradíme slova (právě) slovy (nejméně), mohl by nastat i případ, kdy některým z konfiguračních bodů prochází více přímek a na některé z přímek leží více bodů. Takové konfigurace nazýváme *singulární*. Že skutečně singulární konfigurace existují, ukážeme si v následujícím a uvážíme zároveň, že to umožňuje existence *E*-bodů. Má-li totiž konfiguračním bodem procházet přímka pátá, pak na ní musí ležet všechny tři body, od nichž je zkoumaný bod oddělen, čili zkoumaný bod musí být typu *E*.

Zaměříme se nejprve na konfigurace R-23.

*Konfigurace R-23.* Pro pohodlí čtenáři vypíši podrobně její schéma a souřadnice všech konfiguračních bodů:

<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5-6-7</u>
5 7 9 6	3 4 6 P	4 P Q	P Q	5-8-9
0 8 P Q	9 8 0 Q	6 7 8	0 5	7-0-9.

$$\begin{aligned}
 1 &= (1, 1, 1), & 2 &= (1, u - t, u - t - x), & 3 &= (1, u - t, 1 - t), \\
 4 &= (x, u - t, u - t - 1), & 5 &= (1, 0, 0), & 6 &= (1, x, 0), & 7 &= (0, 1, 0), \\
 8 &= (1, 0, 1), & 9 &= (0, 0, 1), & 0 &= (0, 1, 1), & P &= (1, 1, 1 - t), \\
 Q &= (y + 1, x + y, y), & \text{kde } & x^3 - ux^2 + x \cdot (u - 1)^2 + 2 = u, \\
 & & y &= ux - 1 - x, & tx &= 1.
 \end{aligned}$$



Tato jednoparametrická konfigurace (obecně regulární), umožňuje dva případy singulárního řešení.

a) Pro hodnotu  $u \neq 0$ , tedy  $x^3 + x + 2 = 0$ , leží  $E$ -bod  $0$  oddělený od bodů  $3, 8, Q$  na konfigurační přímce  $3-8-Q$ .

b) V případě  $u = 1$ , tedy  $x^3 - x^2 + 1 = 0$  dostaneme dokonce dvě singularity, které tvoří bod  $Q$  (oddělený od bodů  $7, 9, 0$ ) a bod  $3$ , (oddělený od bodů  $1, 5, 0$ ).

Tato singulární konfigurace je nakreslena na přiloženém obrázku. Poznávám k tomu, že v konfiguraci existuje vždy (pro libovolnou přípustnou volbu parametru  $u$ ) jedna „cizí“ přímka  $P-8-6$ . Dá se poměrně snadno dokázat, že konfigurační body nemohou ležet na kubice.

**Konfigurace R-37.**

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{5\ 7\ 9\ 6} & \frac{2}{3\ 4\ P\ Q} & \frac{3}{4\ P\ Q} & \frac{4}{P\ Q} & 5-6-7 & \\ 0\ P\ Q\ 8 & 7\ 9\ 8\ 6 & 5\ 6\ 0 & 0\ 8 & 7-0-9 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 1 &= (1, 1, 1), & 2 &= (u + t - 1, 1, 1), & 3 &= (u + t - 1, x + u, 1), \\ 4 &= (1 - x, x + u, 1), & 5 &= (1, 0, 0), & 6 &= (x, 1, 0), & 7 &= (0, 1, 0), \\ 8 &= (1 - x, 0, 1), & 9 &= (0, 0, 1), & 0 &= (0, 1, 1), & P &= (1, y, 1), \\ & & & & Q &= (1, 1, t), & \text{kde} & \\ & & & & xy &= 1, & y &= ut, & y &= u + 1, & u^5 &= 1, & u &\neq 1. \end{aligned}$$

Lze dokázat, že toto schéma je možno realizovat jen tímto způsobem a vždy při něm nastanou singularity:

$E$ -bod  $2$  (oddělený od bodů  $1, 5, 0$ ) leží na přímce  $1-5-0$ ,  
 $E$ -bod  $7$  (oddělený od bodů  $4, 8, Q$ ) leží na přímce  $4-8-Q$ ,  
 $E$ -bod  $9$  (oddělený od bodů  $3, 6, P$ ) leží na přímce  $3-6-P$ .

**Konfigurace R-69.**

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{5\ 6\ 7\ 9} & \frac{2}{3\ 4\ 6\ P} & \frac{3}{4\ P\ Q} & \frac{4}{Q\ P} & 5-6-7 & \\ 0\ 8\ P\ Q & 8\ 7\ 0\ Q & 5\ 6\ 0 & 8\ 9 & 7-0-9 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 1 &= (1, 1, 1), & 2 &= (x - tx, 1, t), & 3 &= (1 - u, xy - x, t), \\ 4 &= (x - tx, xy - x, t), & 5 &= (1, 0, 0), & 6 &= (x, 1, 0), & 7 &= (0, 1, 0), \\ 8 &= (1 - x, 0, 1), & 9 &= (0, 0, 1), & 0 &= (0, 1, 1), & P &= (1, y, 1), \\ & & & & Q &= (1, 1, t), & \text{kde} & \\ x &= 2 + u, & ty &= 1, & tu^2 &= 1 - u, & u^4 + 2u^3 + 2u^2 - u - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Je to jediná možná realizace a nastává u ní vždy singularita u  $E$ -bodu  $5$ , který je oddělen od bodů  $2, P, Q$  a leží na přímce  $2-P-Q$ , jejíž souřadnice jsou  $(0, -t, 1)$ .

Konfigurace N-11.

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{5\ 7\ 9\ 6} & \frac{2}{3\ 4\ P\ Q} & \frac{3}{4\ P\ Q} & \frac{4}{P\ Q} & 5-6-7 & \\ 0\ P\ Q\ 8 & 7\ 9\ 8\ 6 & 6\ 0\ 8 & 5\ 0 & 5-8-9 & \\ & & & & 7-0-9 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 1 &= (1, 1, 1), \quad 2 = (x, x + 1, x + 1), \quad 3 = (x, 1 + xy, x + 1), \\ 4 &= (x, x + 1, 1 + tx), \quad 5 = (1, 0, 0), \quad 6 = (x, 1, 0), \quad 7 = (0, 1, 0), \\ 8 &= (1 - x, 0, 1), \quad 9 = (0, 0, 1), \quad 0 = (0, 1, 1). \quad P = (1, y, 1), \\ & \quad Q = (1, 1, t), \quad \text{kde} \\ t &= -2x^3 - x^2 - 3, \quad y = -x^3 - x^2 - 2, \quad x^4 + 2x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Tato jediná možná realizace vede na singulární konfiguraci, kde  $E$ -bod 2, oddělený od bodů 1, 5, 0 leží na přímce 1-5-0. Výsledek této práce lze shrnout do tohoto

**Tvrzení.** Existuje celkem 104 schémat konfigurací  $(12_4, 16_3)$  typu

$$B_a^3 B_b^2 B_c^1 C_d E_e, \quad \text{kde } ade \neq 0.$$

Tato schémata patří do různých tříd a pokud jsou realizovatelná (v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel) vedou ke konfiguracím navzájem neekvivalentním.

Devadesát z těchto schémat je realizovatelných. Jsou to schémata R-1 až R-89 a N-11. Z nich tři (R-37, R-69 a N-11) pouze konfiguracemi singulárními. Jedno schéma (R-23) připouští realizaci singulární i regulární.

Jen jedna z těchto konfigurací byla již v literatuře popsána. Je to konfigurace R-24, jejíž body leží na kubice. Je ekvivalentní s konfigurací  $S_1$ , uvedené v Časopise pro pěstování matematiky, ročník 91 (1966), str. 303.

#### Literatura

- [1] J. de Vries: Über gewisse ebene Konfigurationen. Acta mathematica 12, 1889, 67.
- [2] J. Metelka: O jistých konfiguracích  $(12_4, 16_3)$  v rovině. Věstník Královské české společnosti nauk, 1944, XXI, 1–8.
- [3] J. Metelka: O rovinných konfiguracích  $(12_4, 16_3)$ . Časopis pro pěstování matematiky 80, 1955, 133 a násl.
- [4] V. Metelka: Rovinné konfigurace  $(12_4, 16_3)$  s  $D$ -body. Časopis pro pěstování matematiky 82, 1957, 385 a násl.
- [5] V. Metelka: Über ebene Konfigurationen  $(12_4, 16_3)$ , die mit einer irreduziblen Kurve dritter Ordnung inzidieren. Časopis pro pěstování matematiky, 91, 1966, 261 a násl.

Adresa autora: 461 17 Liberec, Hálkova 6 (Katedra matematiky VŠST).

## Zusammenfassung

### ÜBER GEWISSE EBENE KONFIGURATIONEN $(12_4, 16_3)$ , DIE *B*-, *C*- UND *E*-PUNKTE ENTHALTEN UND ÜBER SINGULÄRE KONFIGURATIONEN

VÁCLAV METELKA, Liberec

Die ebene Konfiguration  $(12_4, 16_3)$  besteht – bekanntlich – aus zwölf Punkten und sechzehn Geraden, die in einer Projektionsebene liegen. Jeder Punkt inzidiert (eben) mit vier Geraden und auf jeder von diesen Geraden liegen (eben) drei Punkte.

Die Gerade, auf der z. B. die Punkte  $0, P, Q$  liegen bezeichnen wir kurz  $0-P-Q$ . Man sagt, dass diese drei Punkte *verbunden* sind. Im anderen Falle, wenn zwei Konfigurationspunkte (z. B. 1 und 2) auf keiner der Geraden liegen, können wir kurz diesen Umstand als  $1 : 2$  bezeichnen und man spricht von zwei *getrennten* Punkten.

Nach der Definition der Konfiguration ist also jeder Punkt (gerade) mit acht anderen verbunden und eben deswegen von den drei übrigen getrennt.

Wenn z. B. ein Punkt  $9$  von den Punkten  $0, P, Q$  getrennt ist (kurz  $9 : 0, P, Q$ ) ergeben sich folgende Möglichkeiten. Den Punkt  $9$  bezeichnen wir als:

*A*-Punkt, wenn  $0 : P; 0 : Q; P : Q$  ist;

*B*-Punkt, wenn  $0-P; 0-Q; P-Q$ , aber nicht  $0-P-Q$  ist;

*C*-Punkt, wenn nur zwei von den Punkten  $0, P, Q$  getrennt sind;

*D*-Punkt, wenn nur zwei von den Punkten  $0, P, Q$  verbunden sind und

*E*-Punkt, wenn  $0-P-Q$  ist.

So sind wir imstande alle Konfigurationspunkte zu klassifizieren. Für unsere Aufgabe ist aber diese Klassifikation noch ungenügend und es ist daher notwendig eine ausdrückliche Klassifikation einzuführen, besonders bei den Konfigurationen, die *B*-, *C*- und *E*-Punkte haben.

Wir betrachten vorerst einen *B*-Punkt  $9$  (der von den Punkten  $0, P, Q$  getrennt ist), dann sehen wir fast auf den ersten Blick, dass aus der Menge der sechzehn Konfigurationsgeraden nur dreizehn mit Punkten  $9, 0, P, Q$  inzidieren. Mit den Schnittpunkten der drei übrigen Konfigurationsgeraden werden wir uns jetzt näher beschäftigen:

Unter der Voraussetzung, dass diese Geraden drei verschiedenen Schnittpunkte haben, können folgende Möglichkeiten vorkommen:

1. Entweder ein, oder zwei, oder alle drei Schnittpunkte sind Konfigurationspunkte, dann ist der betrachtete Punkt  $9$  entweder vom Type  $B^1$ , oder  $B^2$ , oder  $B^3$ .
2. In den übrigen Fällen, wo alle drei Geraden nur einen Schnittpunkt haben, ist dieser betrachtete Punkt  $9$  vom Type  $B^4$ .

Analogisch könnte man auch für die  $C$ - und  $E$ -Punkte eine feinere Klassifikation einführen.

In der Literatur sind schon alle Konfigurationen, die  $A$ -, oder  $D$ -Punkte enthalten vollbeschrieben, ebenso wie die Konfigurationen, welche keine  $B$ -Punkte haben. Die umfangreiche Menge der Konfigurationen mit  $B$ -,  $C$ - und  $E$ -Punkten in einer übersichtlichen Arbeit beschreiben ist fast unmöglich. Eben deswegen beschränke ich mich in diesem Artikel nur auf die Fälle mit  $B^3$ -,  $C$ -,  $E$ - und ohne  $B^4$ -Punkten.

Die Schemas dieser Konfigurationen sind in dem Kapitel 2 eingeführt. Gerade neunzig von diesen (und zwar R-1 bis R-89 und N-11) sind realisierbar in der Projektionsebene, wie in dem Kapitel 4 bewiesen ist.

Und noch eine Bemerkung: Ersetzen wir in der Definition der Konfiguration (siehe den ersten Absatz) den Ausdruck „eben“ durch den Ausdruck „mindestens“, bekommen wir die Definition der singulären Konfiguration. Die Schemas R-23, R-37, R-69 und N-11 bilden solche singuläre Konfigurationen und die erste von ihnen ist auf dem zugelegten Bilde gezeichnet.

$l_\infty$ -NORM OF ITERATES AND THE SPECTRAL RADIUS OF MATRICES

ZDENĚK DOSTÁL, Ostrava

(Received October 18, 1977)

Let  $B$  be a finite dimensional Banach space. Let  $L(B)$  denote the algebra of all linear operators on  $B$  and let the operator norm and the spectral radius of  $A \in L(B)$  be denoted by  $|A|$  and  $|A|_\sigma$ , respectively.

If  $A \in L(B)$  and  $|A| = 1$ , then the spectral radius formula suggests the conjecture that for some natural number  $m$ , nontrivial bounds for  $|A^m|$  in terms of  $|A|_\sigma$  and vice versa may be given.

The first positive result of the kind was presented by V. PTÁK and J. MAŘÍK [1], who have computed the critical exponent of the  $l_\infty$ -space. If we denote the complex  $n$ -dimensional vector space by  $B_{n,\infty}$ , the norm  $|x|_\infty$  of the vector  $x = (x_1, \dots, x_n)$  being defined by the formula

$$|x|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|,$$

then their theorem says that the spectral radius of  $A \in L(B_{n,\infty})$ ,  $|A|_\infty = |A^{n^2-n+1}|_\infty = 1$ , is equal to one.

Later, V. Pták [2] introduced for  $0 < r < 1$  the quantity

$$C(B, r, m) = \sup \{|A^m| : A \in L(B), |A| \leq 1, |A|_\sigma \leq r\}$$

and found, for an  $n$ -dimensional Hilbert space  $H_n$ , a certain operator  $A \in L(H_n)$  such that  $|A| = 1$ ,  $|A|_\sigma = r$  and  $|A^n| = C(H_n, r, n)$ . Recently, the present author [3] has proved that this extremal operator is unique up to multiplication by a complex unit and similarity by a unitary mapping. For further references see [2].

The purpose of this note was originally to find the extremal operators in  $L(B_{n,\infty})$ . We have not succeeded in general, nevertheless, we have found for each  $r$ ,  $0 \leq r \leq 2^{1/n} - 1$ , an operator  $A \in L(B_{n,\infty})$  such that  $|A|_\infty = 1$ ,  $|A|_\sigma = r$  and  $|A^m|_\infty = C(B_{n,\infty}, r, m)$  for all natural  $m$ .

Let  $n$  be a fixed natural number and let  $M_n$  denote the algebra of all  $n \times n$  complex valued matrices.

Regarding a matrix  $A = (a_{ij})$  as an operator on  $B_{n,\infty}$ , we can write

$$|A|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Let  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  be given complex numbers. Consider the recursive relation

$$(1) \quad x_{k+n} = \alpha_1 x_k + \dots + \alpha_n x_{k+n-1}.$$

For each  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , we denote by  $w_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  the solution  $(w_{i0}, w_{i1}, w_{i2}, \dots)$  of this relation with initial conditions

$$(2) \quad w_{ik}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \delta_{i,k+1}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

In the following lemma we shall learn the meaning of  $w_{ik}$ :

**Lemma 1.** Let  $A \in M_n$  and

$$(3) \quad A^n = \alpha_1 E + \alpha_2 A + \dots + \alpha_n A^{n-1}.$$

Then for all  $k \geq 0$ ,

$$(4) \quad A^k = w_{1k} E + w_{2k} A + \dots + w_{nk} A^{n-1}.$$

*Proof.* The statement is obvious for  $k \leq n$ . To prove the lemma for  $k > n$  by induction, suppose that (4) holds for  $k = 0, 1, \dots, s-1$ . Put  $q = s - n$ . If we multiply (3) by  $A^q$  and use the induction hypothesis, we successively get

$$\begin{aligned} A^s &= \sum_{i=1}^n \alpha_i A^{q+i-1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n w_{j,q+i-1} A^{j-1} = \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i w_{j,q+i-1} \right) A^{j-1} = \sum_{j=1}^n w_{js} A^{j-1}. \end{aligned}$$

Let us denote now the companion matrix of the equation

$$(5) \quad x^n = \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_n x^{n-1}$$

by  $T(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , that is

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix},$$

and observe that (5) is the characteristic equation of  $T$ . Thus by Cayley-Hamilton's theorem  $T$  satisfies the assumptions of Lemma 1 and we can write for each  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$(6) \quad T^k = w_{1k} E + w_{2k} T + \dots + w_{nk} T^{n-1}.$$

This equation enables us to solve the special maximum problem:



**Lemma 2.** Let  $A \in M_n$ ,  $|A|_\infty \leq 1$ . If the characteristic equation (5) of the matrix  $A$  fulfils

$$(7) \quad \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq 1,$$

then for all  $k \geq 0$ ,

$$|A^k|_\infty \leq T(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^k = \sum_{i=1}^n |w_{ik}|.$$

*Proof.* We may apply Lemma 1 to get

$$|A^k|_\infty = \left| \sum_{i=1}^n w_{ik} A^{i-1} \right|_\infty \leq \sum_{i=1}^n |w_{ik}| |A^{i-1}|_\infty \leq \sum_{i=1}^n |w_{ik}|$$

for each  $A$  under the assumptions. Note that, in particular,  $T$  satisfies the assumptions. The first row of  $T^k$  being  $(w_{1k}, w_{2k}, \dots, w_{nk})$  (see (6)), we get

$$|T^k|_\infty = \sum_{i=1}^n |w_{ik}|.$$

Now we shall denote, for  $1 \leq i \leq n$ , by  $E_i$  the polynomial

$$(8) \quad E_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{e_j \in \{0,1\} \\ e_1 + \dots + e_n = i}} x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}.$$

For any complex numbers  $\varrho_1, \dots, \varrho_n$  and  $i = 1, 2, \dots, n$ , we put

$$\alpha_i(\varrho_1, \dots, \varrho_n) = (-1)^{n-i} E_{n-i+1}(\varrho_1, \dots, \varrho_n),$$

so that the roots of the equation (5) with coefficients  $\alpha_i = \alpha_i(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$  are exactly  $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ .

Let us compute an upper bound for such  $r$ 's that  $|\varrho_i| \leq r$  implies

$$(9) \quad \sum_{i=1}^n |\alpha_i(\varrho_1, \dots, \varrho_n)| \leq 1.$$

**Lemma 3.** Let  $\varrho_1, \dots, \varrho_n$  be any complex numbers. If  $|\varrho_i| \leq 2^{1/n} - 1$  for all  $i = 1, \dots, n$ , then the inequality (9) holds true.

*Proof.* Let  $0 < r < 1$  and note that

$$\alpha_i(r, r, \dots, r) = (-1)^{n-i} \binom{n}{n-i+1} r^{n-i+1},$$

$i = 1, \dots, n$ . If  $|\varrho_i| \leq r$  holds for all  $i = 1, \dots, n$ , then  $|\alpha_i(\varrho_1, \dots, \varrho_n)| \leq |\alpha_i(r, r, \dots, r)|$ . Thus the supremum  $r_0$  of the set of all  $r$ 's we are interested in is the only positive root of the equation

$$1 - \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^i = 0.$$

Easy computation shows that  $r_0 = 2^{1/n} - 1$ .

To compute  $C(B_{n,\infty}, r, k)$  for  $r \leq 2^{1/n} - 1$  and given  $k$ , it is enough to find

$$\max_{|\varrho_1| \leq r, \dots, |\varrho_n| \leq r} \sum_{i=1}^n |w_{ik}(\varrho_1, \dots, \varrho_n)|.$$

The fact that the maximum is attained for all natural  $k$  if  $\varrho_i = r$  is an easy consequence of the following lemma, which was proved by V. KNICHAL ([2], Lemma 7).

**Lemma 4.** For each  $i = 1, 2, \dots, n$  and each  $k \geq n$ ,

$$w_{ik}(\varrho_1, \dots, \varrho_n) = \varepsilon_i Q_{ik}(\varrho_1, \dots, \varrho_n),$$

where  $\varepsilon_i = (-1)^{n-i}$  and

$$Q_{ik}(\varrho_1, \dots, \varrho_n) = \sum_{\substack{e_j \geq 0 \\ e_1 + \dots + e_n = k-i+1}} c_{ik}(e_1, \dots, e_n) \varrho_1^{e_1} \dots \varrho_n^{e_n},$$

where all  $c_{ik}(e_1, \dots, e_n) \geq 0$ .

The point of the lemma is that for  $k \geq n$  and  $i$  fixed, all the coefficients of  $w_{ik}$  are of the same sign. Thus if  $|\varrho_i| \leq r$  for  $i = 1, \dots, n$ , then

$$\begin{aligned} |w_{ik}(\varrho_1, \dots, \varrho_n)| &= |Q_{ik}(\varrho_1, \dots, \varrho_n)| \leq \\ &\leq |Q_{ik}(r, \dots, r)| = |w_{ik}(r, \dots, r)|, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

We can sum up our results into the following theorem:

**Theorem 1.** Let  $0 < r \leq 2^{1/n} - 1$ , let

$$\alpha_i = (-1)^{n-i} \binom{n}{n-i+1} r^{n-i+1}$$

for  $i = 1, \dots, n$  and let

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Then  $|T|_\infty = 1$ ,  $|T|_\sigma = r$  and for each natural  $k$ ,

$$|T^k|_\infty = \sum_{i=1}^n |w_{ik}| = C(B_{n,\infty}, r, k),$$

where  $w_{ik}$  are the solutions of the recurrent relation

$$x_{s+n} = \alpha_1 x_s + \alpha_2 x_{s+1} + \dots + \alpha_n x_{s+n-1}$$

with initial conditions  $w_{ij} = \delta_{i,j+1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

We close the paper by two simple corollaries of Theorem 1.

**Corollary 1.** Let  $0 \leq r < 1$ . Then  $C(B_{n,\infty}, r, n) = \min \{1, (1+r)^n - 1\}$ .

Proof. Note that  $w_{in} = \alpha_i$  for  $i = 1, \dots, n$  and apply Theorem 1.

**Corollary 2.** Let  $0 < s \leq 1$ . If  $A \in L(B_{n,\infty})$ ,  $|A|_\infty \leq 1$  and  $|A^n|_\infty = s$ , then  $|A|_\sigma \geq (1+s)^{1/n} - 1$ .

Proof. If  $|A|_\sigma = r < (1+s)^{1/n} - 1$ , then

$$|A^n|_\infty \leq C(B_{n,\infty}, r, n) \leq (1+r)^n - 1 < s.$$

This study was suggested by V. Pták, to whom I wish to express here my thanks.

#### References

- [1] J. Mařík, V. Pták: Norms, spectra and the combinatorial properties of matrices. Czech. Math. Journal 10 (85) (1960), 181—195.
- [2] V. Pták: Spectral Radius, Norms of Iterates, and the Critical Exponent. Linear Algebra Appl. 1 (1968), 245—260.
- [3] Z. Dostál: Uniqueness of the operator attaining  $C(H_n, r, n)$ . To appear.

Author's address: 708 33 Ostrava, Třída vítězného února (Katedra matematiky VŠB).

INTEGRAL REPRESENTATION OF ORTHOGONAL  
EXPONENTIAL POLYNOMIALS

OTAKAR JAROCH

(Received December 6, 1977)

An integral representation is derived for the orthogonal exponential polynomials which have been used in engineering and science.

INTRODUCTION

The coefficients  $d_{nk}$  in the linear combination of exponential functions  $\sum_{k=1}^{k=n} d_{nk} e^{-kt} = \psi_n(t)$  can be chosen so that, for  $n = 1, 2, 3, \dots$ , a system of orthogonal functions over  $[0, +\infty)$  is obtained.

**Definition.** Let  $t$  be a real variable and  $n = 1, 2, 3, \dots$ . The functions

$$(1) \quad \text{oe}_n(t) = \sum_{k=1}^n b_{nk} e^{-kt}, \quad b_{nk} = (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \binom{n+k-1}{k-1}$$

will be called *orthogonal exponential polynomials*. [5]

The following equations are valid for arbitrary  $m, n = 1, 2, 3, \dots$ :  $\text{oe}_n(0) = 1$ ,  $\text{oe}_n(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{oe}_n(t) = 0$  and  $\int_0^\infty \text{oe}_m(t) \text{oe}_n(t) dt = \delta_{mn} (2n)^{-1}$ , where  $\delta_{mn}$  is the Kronecker delta function. Orthogonal exponential polynomials have been used in Automatic Control Theory and in Electrical Circuits Theory. One of the more recent publications is Dmitriyev's book on the applications of orthogonal exponential polynomials in Hydrometeorology [4]. However, not much detailed information is available on the properties of orthogonal exponential polynomials, which might, under certain circumstances, be treated as special functions *sui generis*. Orthogonal exponential polynomials are entire transcendental functions if  $t$  in Definition (1) is considered complex.

Orthogonal exponential polynomials result by orthogonalization from the system of exponential functions  $e^{-t}, e^{-2t}, e^{-3t}, \dots$  over  $(0, +\infty)$  with the weight function  $w(t) = 1$ , that is to say in  $L_2(0, +\infty)$ . The notation  $\varphi_n(t)$  or  $\psi_n(t)$  was used for orthogonal exponential polynomials in [5], [6], [8]. In this paper the acronym  $\text{oe}_n$  is used to denote orthogonal exponential polynomials so that a specific meaning

need not be ascribed to Greek letters  $\varphi$  and  $\psi$ . The standardization  $\text{oe}p_n(0) = 1$  for all natural  $n$  is implied.

## INTEGRAL REPRESENTATION

First and Second Integral Representations of orthogonal exponential polynomials will be derived. The terminology is analogous to that used by Lavrentyev and Shabat to describe integral representations of Legendre polynomials [9].

**First Integral Representation. Theorem I.** *Let  $\mathcal{C}$  be a closed Jordan's curve of finite length and assume that the point  $z_0 = e^{-t}$  lies inside  $\mathcal{C}$ . Let  $\text{oe}p_n(t)$  be an orthogonal exponential polynomial in accordance with Definition (1). Then, for a real  $t$ ,*

$$(2) \quad \text{oe}p_n(t) = (2\pi i)^{-1} \oint_{\mathcal{C}} z^n (z-1)^{n-1} (z-e^{-t})^{-n} dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

*Proof.* The connection between the orthogonal exponential polynomials and the Jacobi polynomials as shown in [5],

$$(3) \quad \text{oe}p_n(t) = (-1)^{n-1} n e^{-t} G_{n-1}(2, 2, e^{-t}), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

can be conveniently used to prove (2). The Jacobi polynomials  $G_n(p, q, x)$  are orthogonal over  $(0, 1)$  with respect to the weight function  $x^{q-1}(1-x)^{p-q}$ ,  $q > 0$ ,  $p - q > -1$ , and their standardization is  $G_n(p, q, 0) = 1$  for all  $n$  (Courant-Hilbert [3]). Rodrigues' formula will be used in the form

$$(4) \quad G_{n-1}(2, 2, x) = (xn!)^{-1} D^{n-1} x^n (1-x)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

where the  $m$ -th derivative is denoted by  $D^m$ . The function  $z \mapsto z^n(1-z)^{n-1}$  is an entire function of the complex variable  $z$  so that Cauchy's formula can be employed to express the derivative in (4), and for arbitrary  $z_0$  we find

$$(5) \quad G_{n-1}(2, 2, z_0) = (2n\pi i z_0)^{-1} \oint_{\mathcal{C}} z^n (1-z)^{n-1} (z-z_0)^{-n} dz,$$

where  $\mathcal{C}$  is a closed Jordan's curve of finite length and the point  $z_0$  lies inside  $\mathcal{C}$ . Equation (2) follows from (3) and (5) if  $z_0$  is replaced by  $e^{-t}$ .  $\square$

**Remark.** First Integral Representation is an analogue to the Schläfli integral for Legendre polynomials [1], [9]. The proof of Theorem I is valid for any complex  $t \neq \infty$ . First Integral Representation yields

$$\text{oe}p_n(0) = (2\pi i)^{-1} \oint_{\mathcal{C}} z^n (z-1)^{-1} dz = 1$$

for all natural  $n$  and this agrees with the standardization as accepted for  $\text{oe}p_n$ .

The integrand in (2) has an  $n$ -th order pole in  $z = e^{-t}$  as long as  $t \neq 0$ . The numerator is

$$z^n(z-1)^{n-1} = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \binom{n-1}{k-1} z^{n+k-1}.$$

If the residue theorem is used we find

$$\text{oe}_p_n(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \binom{n-1}{k-1} \text{Res}_{z=e^{-t}} [z^{n+k-1}(z-e^{-t})^{-n}] = \sum_{k=1}^n b_{nk} e^{-kt},$$

where

$$b_{nk} = (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \binom{n+k-1}{k-1}, \quad \sum_{k=1}^n b_{nk} = 1,$$

and this again agrees with Definition (1). Another expression for orthogonal exponential polynomials is found if the numerator in (2) is written as

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (z-1)^{n+k-1}.$$

We have

$$(6) \quad \text{oe}_p_n(t) = \sum_{k=0}^n g_{nk} (1 - e^{-t})^k; \quad g_{nk} = (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k-1}{k};$$

$$\sum_{k=0}^n g_{nk} = 0.$$

If no changes are made in the numerator, the result is

$$(7) \quad \text{oe}_p_n(t) = \sum_{k=1}^n h_{nk} e^{-kt} (1 - e^{-t})^{n-k}; \quad h_{nk} = (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \binom{n-1}{k-1};$$

$$\sum_{k=1}^n h_{nk} = 2^n \text{oe}_p_n(\ln 2).$$

Clearly, equations (1), (6), (7) follow directly from (4) if analogous changes are made in Rodrigues' formula.

**Second Integral Representation. Theorem II.** *Let  $\text{oe}_p_n(t)$  be an orthogonal exponential polynomial in accordance with Definition (1). Then, for a nonnegative  $t$  and  $n = 1, 2, 3, \dots$ , we have*

$$(8) \quad \text{oe}_p_n(t) = \pi^{-1} \int_0^\pi [e^{-t} + i(e^{-t} - e^{-2t})^{1/2} \cos \theta] \cdot [2e^{-t} - 1 + 2i(e^{-t} - e^{-2t})^{1/2} \cos \theta]^{n-1} d\theta.$$

*Proof.* Equation (8) is evidently valid for  $t = 0$  as  $\text{oe}_p_n(0) = \pi^{-1} \int_0^\pi d\theta = 1$  for all  $n$ . Thus, only  $t \in (0, +\infty)$  needs to be considered. Suppose that in (2) a circle with a radius  $(e^{-t} - e^{-2t})^{1/2}$  and its centre at  $z_0 = e^{-t}$  is chosen as  $\mathcal{C}$ , that is to say  $z = e^{-t} + e^{i\theta}(e^{-t} - e^{-2t})^{1/2}$ ,  $\theta \in I$ , and  $I$  is an arbitrary real interval the length

of which is  $2\pi$ . We find  $dz = i(z - e^{-t}) d\theta$  and if the corresponding substitution is made in (2) the result is

$$\begin{aligned} \text{oeP}_n(t) &= (2\pi)^{-1} \int_I [e^{-t} + (e^{-t} - e^{-2t})^{1/2} e^{i\theta}] \\ &\cdot [2e^{-t} - 1 + 2i(e^{-t} - e^{-2t})^{1/2} \sin \theta]^{n-1} d\theta. \end{aligned}$$

Replacing  $\theta$  by  $\theta + \pi/2$  and choosing  $I = (-\pi, \pi)$  we find

$$\begin{aligned} \text{oeP}_n(t) &= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{+\pi} [e^{-t} + i(e^{-t} - e^{-2t})^{1/2} e^{i\theta}] \\ &\cdot [2e^{-t} - 1 + 2i(e^{-t} - e^{-2t})^{1/2} \cos \theta]^{n-1} d\theta, \end{aligned}$$

and this is clearly equivalent to (8).  $\square$

**Remark.** The integrand in Second Integral Representation (8) is a complex function of a real variable. Despite of this the result is evidently real. As a matter of fact, Second Integral Representation can be rewritten as

$$(9) \quad \begin{aligned} \text{oeP}_n(t) &= (2/\pi) \operatorname{Re} \int_0^{\pi/2} [e^{-t} + i(e^{-t} - e^{-2t})^{1/2} \cos \theta] \\ &\cdot [2e^{-t} - 1 + 2i(e^{-t} - e^{-2t})^{1/2} \cos \theta]^{n-1} d\theta. \end{aligned}$$

Second Integral Representation (8) is an analogue to the Laplace integral for the Legendre polynomials [1], [9], [11]:

$$(10) \quad P_n(u) = \pi^{-1} \int_0^\pi [u + i(1 - u^2)^{1/2} \cos \theta]^n d\theta.$$

Comparing (8) and (10) we find an important connection between the orthogonal exponential polynomials and the Legendre polynomials:

$$(11) \quad \text{oeP}_n(t) = \frac{1}{2} [P_n(2e^{-t} - 1) + P_{n-1}(2e^{-t} - 1)]; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

For  $0 \leq \theta \leq \pi$  and  $t \geq 0$  the following inequalities hold:  $|e^{-t} + i(e^{-t} - e^{-2t})^{1/2} \cdot \cos \theta| \leq 1$  and  $|2e^{-t} - 1 + 2i(e^{-t} - e^{-2t})^{1/2} \cos \theta| \leq 1$ . As a result  $|\text{oeP}_n(t)| \leq 1$  for all  $t \geq 0$  and  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Finally, Second Integral Representation may be used for the calculation of values of orthogonal exponential polynomials. E.g.

$$\text{oeP}_n(\ln 2) = (2\pi)^{-1} \int_0^\pi (1 + i \cos \theta) (i \cos \theta)^{n-1} d\theta.$$

The result is  $\text{oeP}_1(\ln 2) = \frac{1}{2}$  and, for  $k = 1, 2, 3, \dots$ :

$$(12) \quad \text{oeP}_{2k}(\ln 2) = \text{oeP}_{2k+1}(\ln 2) = (-1)^k \frac{1}{2} (2k - 1)! / (2k)!!$$

## CONCLUSION

In the same way as First Integral Representation of the Legendre polynomials

$$P_n(u) = (2^{n+1} i\pi)^{-1} \oint_{\mathcal{C}} (z^2 - 1)^n (z - u)^{-n-1} dz$$

is a starting-point for their generalization [11] and for further study of their properties, the two integral representations (2) and (8) play a similar role in the case of the orthogonal exponential polynomials. If a Taylor polynomial is used to express the

numerator in First Integral Representation,  $z^n(z - 1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{k=2n-1} A_k(z - e^{-\alpha})^k$ ,  $0 < \alpha < +\infty$ ,  $\alpha = \text{const.}$ , then the orthogonal exponential polynomials can be written in the form  $\text{oe}p_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} a_{nk}(e^{-t} - e^{-\alpha})^k$ , where  $a_{nk}$  obviously depend on  $\alpha$ .

Second Integral Representation may be used for the computation of values of  $\text{oe}p_n(t)$  if a suitable numerical method is employed for the integration of a complex function of a real variable in (8).

## References

- [1] *H. Bateman, A. Erdélyi*: Higher Transcendental Functions, Vol. 2, McGraw-Hill 1953.
- [2] *I. Černý*: Fundamentals of Complex Analysis. Academia, Praha, 1967 (in Czech).
- [3] *R. Courant, D. Hilbert*: Methoden der mathematischen Physik, Vol. 1, Berlin, 1931 (Russian translation: GITTL, 1951).
- [4] *A. A. Dmitriyev*: Orthogonal Exponential Functions in Hydrometeorology. Gidrometeoizdat, Leningrad, 1973 (in Russian).
- [5] *O. Jaroč*: Approximation by Exponential Functions. Aplikace matematiky, Vol. 7, No. 4, pp. 249—264, 1962 (in Czech).
- [6] *O. Jaroč*: Recurrence Relations for the Integrals of Orthogonal Exponential Polynomials. Acta Polytechnica — Práce ČVUT, Vol. IV, No. 1, pp. 45—47, 1975 (in Czech).
- [7] *W. H. Kautz*: A procedure for the synthesis of networks for specified transient response, ScD Thesis. Massachusetts Institute of Technology, 1951.
- [8] *J. H. Laning, R. H. Battin*: Random Processes in Automatic Control. McGraw-Hill, 1956.
- [9] *M. A. Lavrentyev, B. V. Shabat*: Methods of the Theory of Functions of a complex variable. GIFML, Moscow, 1958 (in Russian).
- [10] *D. F. Tuttle*: Network synthesis for prescribed transient response. DSc. Thesis. Massachusetts Institute of Technology, 1948.
- [11] *E. T. Whittaker, G. N. Watson*: A Course of Modern Analysis, Vol. II, Cambridge University Press, 1927.

*Author's address*: 166 28 Praha 6 - Dejvice, Suchbátarova 5 (Vysoká škola chemicko-technologická).



CHARACTERIZATIONS OF THE SPHERE IN  $E^4$  BY MEANS  
OF THE PSEUDOPARALLEL MEAN CURVATURE VECTOR FIELD

KAREL SVOBODA, BRNO

(Received December 12, 1977)

In [2], we have characterized the 2-dimensional sphere in  $E^4$  using the notion of the parallelness of the mean curvature normal field. In the present paper, we are going to introduce the concept of the pseudoparallelness of the mean curvature vector field and to apply it to some characterizations of the sphere in  $E^4$ .

1. Let  $M$  be a surface in the 4-dimensional Euclidean space  $E^4$  and  $\partial M$  its boundary. Let  $\{U_\alpha\}$  be an open covering of  $M$  such that in each domain  $U_\alpha$  there is an orthonormal frame  $\{M; v_1, v_2, v_3, v_4\}$  with  $v_1, v_2 \in T(M)$ ,  $v_3, v_4 \in N(M)$ , where  $T(M), N(M)$  denote the tangent and the normal bundle of  $M$ , respectively. Then we have

$$(1) \quad \begin{aligned} dM &= \omega^1 v_1 + \omega^2 v_2, \\ dv_1 &= \omega_1^2 v_2 + \omega_1^3 v_3 + \omega_1^4 v_4, \\ dv_2 &= -\omega_1^2 v_1 + \omega_2^3 v_3 + \omega_2^4 v_4, \\ dv_3 &= -\omega_1^3 v_1 - \omega_2^3 v_2 + \omega_3^4 v_4, \\ dv_4 &= -\omega_1^4 v_1 - \omega_2^4 v_2 - \omega_3^4 v_3; \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} d\omega^i &= \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \\ \omega_i^j + \omega_j^i &= 0, \quad \omega^3 = \omega^4 = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

The well-known prolongation procedure implies further the existence of real-valued functions  $a_i, b_i, c_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$  ( $i = 1, 2$ ) and  $A_i, B_i, \dots, E_i$  ( $i = 1, 2$ ) in each  $U_\alpha$  such that

$$(3) \quad \begin{aligned} \omega_1^3 &= a_1 \omega^1 + b_1 \omega^2, \quad \omega_2^3 = b_1 \omega^1 + c_1 \omega^2, \\ \omega_1^4 &= a_2 \omega^1 + b_2 \omega^2, \quad \omega_2^4 = b_2 \omega^1 + c_2 \omega^2; \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} da_1 - 2b_1 \omega_1^2 - a_2 \omega_3^4 &= \alpha_1 \omega^1 + \beta_1 \omega^2, \\ db_1 + (a_1 - c_1) \omega_1^2 - b_2 \omega_3^4 &= \beta_1 \omega^1 + \gamma_1 \omega^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dc_1 + 2b_1\omega_1^2 - c_2\omega_3^4 &= \gamma_1\omega^1 + \delta_1\omega^2, \\
da_2 - 2b_2\omega_1^2 + a_1\omega_3^4 &= \alpha_2\omega^1 + \beta_2\omega^2, \\
db_2 + (a_2 - c_2)\omega_1^2 + b_1\omega_3^4 &= \beta_2\omega^1 + \gamma_2\omega^2, \\
dc_2 + 2b_2\omega_1^2 + c_1\omega_3^4 &= \gamma_2\omega^1 + \delta_2\omega^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5) \quad d\alpha_1 - 3\beta_1\omega_1^2 - \alpha_2\omega_3^4 &= A_1\omega^1 + (B_1 - b_1K - \frac{1}{2}a_2k)\omega^2, \\
d\beta_1 + (\alpha_1 - 2\gamma_1)\omega_1^2 - \beta_2\omega_3^4 &= (B_1 + b_1K + \frac{1}{2}a_2k)\omega^1 + \\
&\quad + (C_1 + a_1K - \frac{1}{2}b_2k)\omega^2, \\
d\gamma_1 + (2\beta_1 - \delta_1)\omega_1^2 - \gamma_2\omega_3^4 &= (C_1 + c_1K + \frac{1}{2}b_2k)\omega^1 + \\
&\quad + (D_1 + b_1K - \frac{1}{2}c_2k)\omega^2, \\
d\delta_1 + 3\gamma_1\omega_1^2 - \delta_2\omega_3^4 &= (D_1 - b_1K + \frac{1}{2}c_2k)\omega^1 + E_1\omega^2, \\
d\alpha_2 - 3\beta_2\omega_1^2 + \alpha_1\omega_3^4 &= A_2\omega^1 + (B_2 - b_2K + \frac{1}{2}a_1k)\omega^2, \\
d\beta_2 + (\alpha_2 - 2\gamma_2)\omega_1^2 + \beta_1\omega_3^4 &= (B_2 + b_2K - \frac{1}{2}a_1k)\omega^1 + \\
&\quad + (C_2 + a_2K + \frac{1}{2}b_1k)\omega^2, \\
d\gamma_2 + (2\beta_2 - \delta_2)\omega_1^2 + \gamma_1\omega_3^4 &= (C_2 + c_2K - \frac{1}{2}b_1k)\omega^1 + \\
&\quad + (D_2 + b_2K + \frac{1}{2}c_1k)\omega^2, \\
d\delta_2 + 3\gamma_2\omega_1^2 + \delta_1\omega_3^4 &= (D_2 - b_2K - \frac{1}{2}c_1k)\omega^1 + E_2\omega^2
\end{aligned}$$

where

$$(6) \quad K = a_1c_1 - b_1^2 + a_2c_2 - b_2^2, \quad k = (a_1 - c_1)b_2 - (a_2 - c_2)b_1,$$

the function  $K$  being the Gauss curvature of  $M$ .

Denote by

$$(7) \quad H = (a_1 + c_1)^2 + (a_2 + c_2)^2$$

the mean curvature of  $M$  and by

$$(8) \quad \xi = (a_1 + c_1)v_3 + (a_2 + c_2)v_4$$

the mean curvature vector field in  $N(M)$ . In the following suppose that  $\xi \neq 0$ , and thus  $H \neq 0$  on  $M$ .

Let  $P(M)$  be the vector bundle on  $M$  such that  $P_m(M)$  is the union of  $T_m(M)$  and  $\xi_m$  for each point  $m \in M$ . The vector field  $\xi$  is said to be *pseudoparallel* in  $P(M)$  if  $t\xi \in P(M)$  for each vector field  $t \in T(M)$ .

From (8) we see that

$$\begin{aligned}
d\xi &= [(\alpha_1 + \gamma_1)\omega^1 + (\beta_1 + \delta_1)\omega^2]v_3 + [(\alpha_2 + \gamma_2)\omega^1 + (\beta_2 + \delta_2)\omega^2]v_4 \\
&\quad (\text{mod } v_1, v_2)
\end{aligned}$$

and thus  $\xi$  is pseudoparallel if and only if

$$(9) \quad \begin{aligned} (a_1 + c_1)(\alpha_2 + \gamma_2) - (a_2 + c_2)(\alpha_1 + \gamma_1) &= 0, \\ (a_1 + c_1)(\beta_2 + \delta_2) - (a_2 + c_2)(\beta_1 + \delta_1) &= 0. \end{aligned}$$

Let us remark that, according to (9),

$$(10) \quad (\alpha_1 + \gamma_1)(\beta_2 + \delta_2) - (\beta_1 + \delta_1)(\alpha_2 + \gamma_2) = 0.$$

Now, we have the following

**Lemma 1.** *Let the mean curvature vector field  $\xi$  be pseudoparallel in  $P(M)$ . Then*

$$k = 0$$

on  $M$ .

**Proof.** Differentiating (9) and using (4), (5) and (10), we obtain

$$(11) \quad \begin{aligned} (a_1 + c_1)(A_2 + C_2 + c_2K - \frac{1}{2}b_1k) - \\ - (a_2 + c_2)(A_1 + C_1 + c_1K + \frac{1}{2}b_2k) &= 0, \\ (a_1 + c_1)[B_2 + D_2 + \frac{1}{2}(a_1 + c_1)k] - \\ - (a_2 + c_2)[B_1 + D_1 - \frac{1}{2}(a_2 + c_2)k] &= 0, \\ (a_1 + c_1)[B_2 + D_2 - \frac{1}{2}(a_1 + c_1)k] - \\ - (a_2 + c_2)[B_1 + D_1 + \frac{1}{2}(a_2 + c_2)k] &= 0, \\ (a_1 + c_1)(C_2 + E_2 + a_2K + \frac{1}{2}b_1k) - \\ - (a_2 + c_2)(C_1 + E_1 + a_1K - \frac{1}{2}b_2k) &= 0, \end{aligned}$$

These equations yield immediately the assertion.

**2.** In the theorems proved in this paper, we use the 1-form

$$(12) \quad \begin{aligned} \tau &= \tau_1\omega^1 + \tau_2\omega^2 = \\ &= [(a_1 - c_1)\beta_1 + (a_2 - c_2)\beta_2 - b_1(\alpha_1 - \gamma_1) - b_2(\alpha_2 - \gamma_2)]\omega^1 + \\ &+ [(a_1 - c_1)\gamma_1 + (a_2 - c_2)\gamma_2 - b_1(\beta_1 - \delta_1) - b_2(\beta_2 - \delta_2)]\omega^2. \end{aligned}$$

By exterior differentiation of  $\tau$  we get

$$(13) \quad d\tau = -[2J + (H - 4K)K - 2k^2]\omega^1 \wedge \omega^2$$

where

$$(14) \quad J = \beta_1(\beta_1 - \delta_1) + \gamma_1(\gamma_1 - \alpha_1) + \beta_2(\beta_2 - \delta_2) + \gamma_2(\gamma_2 - \alpha_2).$$

In this section we examine the dependence of the form  $\tau$  and the function  $J$  on the choice of tangent frames of  $M$ . For this reason, consider another field of frames  $\{M; \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$  given, in each  $U_\alpha$ , by

$$(15) \quad \begin{aligned} v_1 &= \varepsilon_1 \cos \varrho \cdot \bar{v}_1 - \sin \varrho \cdot \bar{v}_2, & v_3 &= \varepsilon_2 \cos \sigma \cdot \bar{v}_3 - \sin \sigma \cdot \bar{v}_4, \\ v_2 &= \varepsilon_1 \sin \varrho \cdot \bar{v}_1 + \cos \varrho \cdot \bar{v}_2, & v_4 &= \varepsilon_2 \sin \sigma \cdot \bar{v}_3 + \cos \sigma \cdot \bar{v}_4; \\ & & & (\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1) \end{aligned}$$

and denote by a bar all functions and formulas related to  $\{M; \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ .

**Lemma 2.** *On  $M$ , it is*

$$\bar{\tau} = \varepsilon_1 \tau, \quad \bar{J} = J.$$

**Proof.** From (1) and  $dM = \bar{\omega}^i \bar{v}_i$ ,  $d\bar{v}_i = \bar{\omega}^j \bar{v}_j$  we obtain

$$(16) \quad \begin{aligned} \bar{\omega}^1 &= \varepsilon_1 (\cos \varrho \cdot \omega^1 + \sin \varrho \cdot \omega^2), \\ \bar{\omega}^2 &= -\sin \varrho \cdot \omega^1 + \cos \varrho \cdot \omega^2; \end{aligned}$$

$$(17) \quad \begin{aligned} \bar{\omega}_1^2 &= \varepsilon_1 (d\varrho + \omega_1^2), \\ \bar{\omega}_3^4 &= \varepsilon_2 (d\sigma + \omega_3^4); \end{aligned}$$

$$(18) \quad \begin{aligned} \bar{\omega}_1^3 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\cos \varrho \cos \sigma \cdot \omega_1^3 + \sin \varrho \cos \sigma \cdot \omega_2^3 + \\ &\quad + \cos \varrho \sin \sigma \cdot \omega_1^4 + \sin \varrho \sin \sigma \cdot \omega_2^4), \\ \bar{\omega}_2^3 &= \varepsilon_2 (-\sin \varrho \cos \sigma \cdot \omega_1^3 + \cos \varrho \cos \sigma \cdot \omega_2^3 - \\ &\quad - \sin \varrho \sin \sigma \cdot \omega_1^4 + \cos \varrho \sin \sigma \cdot \omega_2^4), \\ \bar{\omega}_1^4 &= \varepsilon_1 (-\cos \varrho \sin \sigma \cdot \omega_1^3 - \sin \varrho \sin \sigma \cdot \omega_2^3 + \\ &\quad + \cos \varrho \cos \sigma \cdot \omega_1^4 + \sin \varrho \cos \sigma \cdot \omega_2^4), \\ \bar{\omega}_2^4 &= \sin \varrho \sin \sigma \cdot \omega_1^3 - \cos \varrho \sin \sigma \cdot \omega_2^3 - \\ &\quad - \sin \varrho \cos \sigma \cdot \omega_1^4 + \cos \varrho \cos \sigma \cdot \omega_2^4. \end{aligned}$$

Thus from (16), (18) using (3) and (3) we get

$$(19) \quad \begin{aligned} \bar{a}_1 &= \varepsilon_2 (R_1 \cos \sigma + R_2 \sin \sigma), \\ \bar{b}_1 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 (S_1 \cos \sigma + S_2 \sin \sigma), \\ \bar{c}_1 &= \varepsilon_2 (T_1 \cos \sigma + T_2 \sin \sigma), \\ \bar{a}_2 &= -(R_1 \sin \sigma - R_2 \cos \sigma), \\ \bar{b}_2 &= \varepsilon_1 (S_1 \sin \sigma - S_2 \cos \sigma), \\ \bar{c}_2 &= -(T_1 \sin \sigma - T_2 \cos \sigma) \end{aligned}$$

where

$$(20) \quad \begin{aligned} R_1 &= R_1(a_1, b_1, c_1) = a_1 \cos^2 \varrho + 2b_1 \sin \varrho \cos \varrho + c_1 \sin^2 \varrho, \\ S_1 &= S_1(a_1, b_1, c_1) = a_1 \sin \varrho \cos \varrho + b_1(\sin^2 \varrho - \cos^2 \varrho) - c_1 \sin \varrho \cos \varrho, \\ T_1 &= T_1(a_1, b_1, c_1) = a_1 \sin^2 \varrho - 2b_1 \sin \varrho \cos \varrho + c_1 \cos^2 \varrho, \end{aligned}$$

and  $R_2 = R_2(a_2, b_2, c_2)$ ,  $S_2 = S_2(a_2, b_2, c_2)$ ,  $T_2 = T_2(a_2, b_2, c_2)$  have the same meaning. Further, from (17), (19) according to (5) and (5) we have

$$(21) \quad \begin{aligned} \bar{\alpha}_1 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \sigma (R_1^\alpha \cos \varrho + R_1^\beta \sin \varrho) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin \sigma (R_2^\alpha \cos \varrho + R_2^\beta \sin \varrho), \\ \bar{\beta}_1 &= -\varepsilon_2 \cos \sigma (R_1^\alpha \sin \varrho - R_1^\beta \cos \varrho) - \varepsilon_2 \sin \sigma (R_2^\alpha \sin \varrho - R_2^\beta \cos \varrho) = \\ &= -\varepsilon_2 \cos \sigma (S_1^\alpha \cos \varrho + S_1^\beta \sin \varrho) - \varepsilon_2 \sin \sigma (S_2^\alpha \cos \varrho + S_2^\beta \sin \varrho), \\ \bar{\gamma}_1 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \sigma (S_1^\alpha \sin \varrho - S_1^\beta \cos \varrho) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin \sigma (S_2^\alpha \sin \varrho - S_2^\beta \cos \varrho) = \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \sigma (T_1^\alpha \cos \varrho + T_1^\beta \sin \varrho) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin \sigma (T_2^\alpha \cos \varrho + T_2^\beta \sin \varrho), \\ \bar{\delta}_1 &= -\varepsilon_2 \cos \sigma (T_1^\alpha \sin \varrho - T_1^\beta \cos \varrho) - \varepsilon_2 \sin \sigma (T_2^\alpha \sin \varrho - T_2^\beta \cos \varrho), \\ \bar{\alpha}_2 &= -\varepsilon_1 \sin \sigma (R_1^\alpha \cos \varrho + R_1^\beta \sin \varrho) + \varepsilon_1 \cos \sigma (R_2^\alpha \cos \varrho + R_2^\beta \sin \varrho), \\ \bar{\beta}_2 &= \sin \sigma (R_1^\alpha \sin \varrho - R_1^\beta \cos \varrho) - \cos \sigma (R_2^\alpha \sin \varrho - R_2^\beta \cos \varrho) = \\ &= \sin \sigma (S_1^\alpha \cos \varrho + S_1^\beta \sin \varrho) - \cos \sigma (S_2^\alpha \cos \varrho + S_2^\beta \sin \varrho), \\ \bar{\gamma}_2 &= -\varepsilon_1 \sin \sigma (S_1^\alpha \sin \varrho - S_1^\beta \cos \varrho) + \varepsilon_1 \cos \sigma (S_2^\alpha \sin \varrho - S_2^\beta \cos \varrho) = \\ &= -\varepsilon_1 \sin \sigma (T_1^\alpha \cos \varrho + T_1^\beta \sin \varrho) + \varepsilon_1 \cos \sigma (T_2^\alpha \cos \varrho + T_2^\beta \sin \varrho), \\ \bar{\delta}_2 &= \sin \sigma (T_1^\alpha \sin \varrho - T_1^\beta \cos \varrho) - \cos \sigma (T_2^\alpha \sin \varrho - T_2^\beta \cos \varrho) \end{aligned}$$

where

$$(22) \quad \begin{aligned} R_i^\alpha &= R_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i), \quad S_i^\alpha = S_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i), \quad T_i^\alpha = T_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i), \\ R_i^\beta &= R_i(\beta_i, \gamma_i, \delta_i), \quad S_i^\beta = S_i(\beta_i, \gamma_i, \delta_i), \quad T_i^\beta = T_i(\beta_i, \gamma_i, \delta_i) \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

In virtue of (19) and (21) we get

$$(23) \quad \begin{aligned} \bar{a}_1 - \bar{c}_1 &= \varepsilon_2 (R_1 - T_1) \cos \sigma + \varepsilon_2 (R_2 - T_2) \sin \sigma, \\ \bar{a}_2 - \bar{c}_2 &= -(R_1 - T_1) \sin \sigma + (R_2 - T_2) \cos \sigma, \\ \bar{\alpha}_1 - \bar{\gamma}_1 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \sigma [(R_1^\alpha - T_1^\alpha) \cos \varrho + (R_1^\beta - T_1^\beta) \sin \varrho] + \\ &\quad + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin \sigma [(R_2^\alpha - T_2^\alpha) \cos \varrho + (R_2^\beta - T_2^\beta) \sin \varrho], \\ \bar{\beta}_1 - \bar{\delta}_1 &= -\varepsilon_2 \cos \sigma [(R_1^\alpha - T_1^\alpha) \sin \varrho - (R_1^\beta - T_1^\beta) \cos \varrho] - \\ &\quad - \varepsilon_2 \sin \sigma [(R_2^\alpha - T_2^\alpha) \sin \varrho - (R_2^\beta - T_2^\beta) \cos \varrho], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_2 - \bar{\gamma}_2 &= -\varepsilon_1 \cos \varrho [(R_1^\alpha - T_1^\alpha) \cos \varrho + (R_1^\beta - T_1^\beta) \sin \varrho] + \\ &\quad + \varepsilon_1 \sin \varrho [(R_2^\alpha - T_2^\alpha) \cos \varrho + (R_2^\beta - T_2^\beta) \sin \varrho], \\ \bar{\beta}_2 - \bar{\delta}_2 &= \sin \varrho [(R_1^\alpha - T_1^\alpha) \sin \varrho - (R_1^\beta - T_1^\beta) \cos \varrho] - \\ &\quad - \cos \varrho [(R_2^\alpha - T_2^\alpha) \sin \varrho - (R_2^\beta - T_2^\beta) \cos \varrho].\end{aligned}$$

Using (19), (21) and (23), we obtain

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_1 &= (U_1^\alpha + U_2^\alpha) \cos \varrho + (U_1^\beta + U_2^\beta) \sin \varrho, \\ \bar{\tau}_2 &= -\varepsilon_1 (U_1^\alpha + U_2^\alpha) \sin \varrho + \varepsilon_1 (U_1^\beta + U_2^\beta) \cos \varrho\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}U_i^\alpha &= S_i(R_i^\alpha - T_i^\alpha) - S_i^\alpha(R_i - T_i), \\ U_i^\beta &= S_i(R_i^\beta - T_i^\beta) - S_i^\beta(R_i - T_i) \quad (i = 1, 2).\end{aligned}$$

However, direct calculation yields

$$\begin{aligned}U_1^\alpha &= (a_1 - c_1) \beta_1 - b_1(\alpha_1 - \gamma_1), \\ U_1^\beta &= (a_1 - c_1) \gamma_1 - b_1(\beta_1 - \delta_1)\end{aligned}$$

and analogous relations for  $U_2^\alpha, U_2^\beta$ . Thus

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_1 &= \tau_1 \cos \varrho + \tau_2 \sin \varrho, \\ \bar{\tau}_2 &= -\varepsilon_1 \tau_1 \sin \varrho + \varepsilon_1 \tau_2 \cos \varrho\end{aligned}$$

which proves, together with (16), the first identity of our lemma.

To prove the other one, introduce the symbols  $V_1, V_2$  by the relation

$$V_i = -S_i^\alpha(R_i^\beta - T_i^\beta) + S_i^\beta(R_i^\alpha - T_i^\alpha) \quad (i = 1, 2).$$

Using (21), (23), we get

$$\bar{J} = V_1 + V_2.$$

On the other hand, according to (20) and (22) we have

$$V_1 = \beta_1(\beta_1 - \delta_1) + \gamma_1(\gamma_1 - \alpha_1)$$

and analogously for  $V_2$ . This and the equation (14) complete the proof.

**3.** The main tool used in the proofs of the theorems contained in this paper is the Stokes theorem asserting

$$(24) \quad \int_{\partial M} \tau = \int_M d\tau$$

for any 1-form  $\tau$  on  $M$ . Assuming that  $\partial M$  consists of umbilical points ( $a_1 - c_1 = 0$ ,

$a_2 - c_2 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0$ ), we have  $\tau = 0$  on  $\partial M$  and, according to (24) and (13),

$$(25) \quad \int_M [2(J - k^2) + (H - 4K)K] \omega^1 \wedge \omega^2 = 0.$$

Now, we are going to prove the first theorem characterizing the sphere among surfaces in  $E^4$ :

**Theorem 1.** *Let  $M$  be a surface in  $E^4$  and  $\partial M$  its boundary. Let*

- (i)  $K > 0$  on  $M$ ;
- (ii)  $\xi$  be pseudoparallel in  $P(M)$ ;
- (iii)  $H = \text{const.} \neq 0$  on  $M$ ;
- (iv)  $\partial M$  consist of umbilical points.

*Then  $M$  is a part of a 2-dimensional sphere in  $E^4$ .*

**Proof.** From (4) and (7) we have

$$\begin{aligned} dH = & 2[(a_1 + c_1)(\alpha_1 + \gamma_1) + (a_2 + c_2)(\alpha_2 + \gamma_2)] \omega^1 + \\ & + 2[(a_1 + c_1)(\beta_1 + \delta_1) + (a_2 + c_2)(\beta_2 + \delta_2)] \omega^2 \end{aligned}$$

and according to (ii), (iii) we obtain (9) and

$$\begin{aligned} (a_1 + c_1)(\alpha_1 + \gamma_1) + (a_2 + c_2)(\alpha_2 + \gamma_2) &= 0, \\ (a_1 + c_1)(\beta_1 + \delta_1) + (a_2 + c_2)(\beta_2 + \delta_2) &= 0. \end{aligned}$$

As  $H \neq 0$ , this system of equations has the only solution

$$(26) \quad \begin{aligned} \alpha_1 + \gamma_1 &= 0, & \beta_1 + \delta_1 &= 0, \\ \alpha_2 + \gamma_2 &= 0, & \beta_2 + \delta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Then the relation (14) has the form

$$J = 2(\beta_1^2 + \gamma_1^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2).$$

Thus we have, according to Lemma 1,  $k = 0$  and  $J \geq 0$  on  $M$ .

Further, from (6), (7) we get

$$H - 4K = (a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 + 4b_1^2 + 4b_2^2$$

and hence  $H - 4K \geq 0$  on  $M$ . Thus, according to (i),

$$2J + (H - 4K)K \geq 0.$$

on  $M$ . By the Stokes theorem we have

$$\int_M [2J + (H - 4K)K] \omega^1 \wedge \omega^2 = 0$$

which implies  $H - 4K = 0$  on  $M$ , so that each point of  $M$  is umbilical.

Remark. Using (4), the equations (26) imply

$$\begin{aligned}d(a_1 + c_1) - (a_2 + c_2)\omega_3^4 &= 0, \\d(a_2 + c_2) + (a_1 + c_1)\omega_3^4 &= 0.\end{aligned}$$

Thus we have also proved that under the assumptions (ii), (iii) of Theorem 1 the mean curvature vector field  $\xi$  is parallel.

In the preceding theorem, we have given a modification of the  $H$ -theorem concerning ovaloids in  $E^3$  to the case of surfaces in  $E^4$ . Now, we are going to prove a generalization of this result.

Consider the mean curvature  $H$  of  $M$  and its covariant derivatives defined, according to [1], p. 16, by

$$\begin{aligned}dH &= H_1\omega^1 + H_2\omega^2, \\dH_1 - H_2\omega_1^2 &= H_{11}\omega^1 + H_{12}\omega^2, \quad dH_2 + H_1\omega_1^2 = H_{12}\omega^1 + H_{22}\omega^2.\end{aligned}$$

Using (4), (5), (7), we have

$$(27) \quad \begin{aligned}\frac{1}{2}H_1 &= (a_1 + c_1)(\alpha_1 + \gamma_1) + (a_2 + c_2)(\alpha_2 + \gamma_2), \\ \frac{1}{2}H_2 &= (a_1 + c_1)(\beta_1 + \delta_1) + (a_2 + c_2)(\beta_2 + \delta_2);\end{aligned}$$

$$(28) \quad \begin{aligned}\frac{1}{2}H_{11} &= (a_1 + c_1)(A_1 + C_1 + c_1K + \frac{1}{2}b_2k) + \\ &\quad + (a_2 + c_2)(A_2 + C_2 + c_2K - \frac{1}{2}b_1k) + (\alpha_1 + \gamma_1)^2 + (\alpha_2 + \gamma_2)^2, \\ \frac{1}{2}H_{12} &= (a_1 + c_1)(B_1 + D_1) + (a_2 + c_2)(B_2 + D_2) + \\ &\quad + (\alpha_1 + \gamma_1)(\beta_1 + \delta_1) + (\alpha_2 + \gamma_2)(\beta_2 + \delta_2), \\ \frac{1}{2}H_{22} &= (a_1 + c_1)(C_1 + E_1 + a_1K - \frac{1}{2}b_2k) + \\ &\quad + (a_2 + c_2)(C_2 + E_2 + a_2K + \frac{1}{2}b_1k) + (\beta_1 + \delta_1)^2 + (\beta_2 + \delta_2)^2.\end{aligned}$$

It is easy to prove that

$$(29) \quad \bar{H}_1^2 + \bar{H}_2^2 = H_1^2 + H_2^2.$$

Now, we prove

**Theorem 2.** *Let  $M$  be a surface in  $E^4$  and  $\partial M$  its boundary. Let*

- (i)  $K > 0$  on  $M$ ;
- (ii)  $\xi$  be pseudoparallel in  $P(M)$ ;
- (iii)  $16(H - 4K)HK \geq H_1^2 + H_2^2 > 0$  on  $M$ ;
- (iv)  $\partial M$  consist of umbilical points.



Then  $M$  is a part of a 2-dimensional sphere in  $E^4$ .

**Proof.** We use the integral formula

$$\int_M I\omega^1 \wedge \omega^2 = 0$$

and, first of all we prove that  $I = 0$  where

$$(30) \quad I = 2(J - k^2) + (H - 4K)K$$

and  $J$  is the invariant introduced by (14).

The assumption (ii) is expressed by the system of equations (9) and, according to Lemma 1, implies  $k = 0$  on  $M$ . As  $H \neq 0$ , the system (9), (27) has the only solution

$$(31) \quad \begin{aligned} \alpha_1 + \gamma_1 &= \frac{1}{2}(a_1 + c_1)H^{-1}H_1, & \beta_1 + \delta_1 &= \frac{1}{2}(a_1 + c_1)H^{-1}H_2, \\ \alpha_2 + \gamma_2 &= \frac{1}{2}(a_2 + c_2)H^{-1}H_1, & \beta_2 + \delta_2 &= \frac{1}{2}(a_2 + c_2)H^{-1}H_2. \end{aligned}$$

Hence in virtue of (31), the equation (30) has the form

$$\begin{aligned} I &= -(a_1 + c_1)H^{-1}(H_2\beta_1 + H_1\gamma_1) - (a_2 + c_2)H^{-1}(H_2\beta_2 + H_1\gamma_2) + \\ &\quad + 4(\beta_1^2 + \gamma_1^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2) + (H - 4K)K \end{aligned}$$

and consequently

$$\begin{aligned} I &= [2\beta_1 - \frac{1}{4}(a_1 + c_1)H^{-1}H_2]^2 + [2\gamma_1 - \frac{1}{4}(a_1 + c_1)H^{-1}H_1]^2 + \\ &\quad + [2\beta_2 - \frac{1}{4}(a_2 + c_2)H^{-1}H_2]^2 + [2\gamma_2 - \frac{1}{4}(a_2 + c_2)H^{-1}H_1]^2 - \\ &\quad - \frac{1}{16}H^{-1}(H_1^2 + H_2^2) + (H - 4K)K. \end{aligned}$$

The condition (iii) thus yields  $I \geq 0$  so that  $I = 0$  on  $M$ . This implies

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{8}(a_1 + c_1)H^{-1}H_2, & \gamma_1 &= \frac{1}{8}(a_1 + c_1)H^{-1}H_1, \\ \beta_2 &= \frac{1}{8}(a_2 + c_2)H^{-1}H_2, & \gamma_2 &= \frac{1}{8}(a_2 + c_2)H^{-1}H_1 \end{aligned}$$

and

$$(32) \quad 16(H - 4K)HK = H_1^2 + H_2^2.$$

According to (31), we have further

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{3}{8}(a_1 + c_1)H^{-1}H_1, & \delta_1 &= \frac{3}{8}(a_1 + c_1)H^{-1}H_2, \\ \alpha_2 &= \frac{3}{8}(a_2 + c_2)H^{-1}H_1, & \delta_2 &= \frac{3}{8}(a_2 + c_2)H^{-1}H_2 \end{aligned}$$

and hence

$$(33) \quad \alpha_1 = 3\gamma_1, \quad \delta_1 = 3\beta_1, \quad \alpha_2 = 3\gamma_2, \quad \delta_2 = 3\beta_2.$$

We prove further that a surface  $M$  satisfying (32) and (33) is a 2-dimensional sphere in  $E^4$ .

Suppose that there is a point  $m \in M$  which is not umbilical. In a convenient neighbourhood  $U$  of  $m$  we can choose, according to (19) and the relation  $k = 0$ , a field of orthonormal frames of  $M$  in such a way that

$$(34) \quad a_1 - c_1 \neq 0, \quad b_1 = 0, \quad a_2 - c_2 = 0, \quad b_2 = 0.$$

The equations (4) thus have the form

$$(35) \quad \begin{aligned} da_1 - a_2\omega_3^4 &= 3\gamma_1\omega^1 + \beta_1\omega^2, & da_2 + a_1\omega_3^4 &= 3\gamma_2\omega^1 + \beta_2\omega^2, \\ (a_1 - c_1)\omega_1^2 &= \beta_1\omega^1 + \gamma_1\omega^2, & 0 &= \beta_2\omega^1 + \gamma_2\omega^2, \\ dc_1 - a_2\omega_3^4 &= \gamma_1\omega^1 + 3\beta_1\omega^2, & da_2 + c_1\omega_3^4 &= \gamma_2\omega^1 + 3\beta_2\omega^2, \end{aligned}$$

because of (33). From (35) we have immediately  $\beta_2 = 0, \gamma_2 = 0$  and, because of (33),  $\alpha_2 = 0, \delta_2 = 0$ . Consequently, it is  $\omega_3^4 = 0$ . As  $H_1^2 + H_2^2 \neq 0$ , it follows from (27) that  $a_2 + c_2 = 0$  and this, together with (34), implies  $a_2 = 0, c_2 = 0$ . Thus (35) is reduced to

$$(36) \quad \begin{aligned} da_1 &= 3\gamma_1\omega^1 + \beta_1\omega^2, \\ (a_1 - c_1)\omega_1^2 &= \beta_1\omega^1 + \gamma_1\omega^2, \\ dc_1 &= \gamma_1\omega^1 + 3\beta_1\omega^2 \end{aligned}$$

and (32) has the form

$$(37) \quad (H - 4K)K = 4(\beta_1^2 + \gamma_1^2).$$

By exterior differentiation of (36) and using Cartan's lemma we get the existence of a function  $\varrho$  in  $U$  such that

$$\begin{aligned} d\beta_1 + \gamma_1\omega_1^2 &= (\varrho - a_1c_1^2)\omega^2, \\ d\gamma_1 - \beta_1\omega_1^2 &= (\varrho - a_1^2c_1)\omega^1. \end{aligned}$$

Repeated exterior differentiation yields the relation

$$d\varrho = 3c_1^2\gamma_1\omega^1 + 3a_1^2\beta_1\omega^2$$

and hence, differentiating this equation and using again Cartan's lemma, we obtain

$$(a_1 - c_1)\beta_1\gamma_1 = 0.$$

Now suppose  $\beta_1 = 0, \gamma_1 \neq 0$ , the case  $\beta_1 \neq 0, \gamma_1 = 0$  being symmetric. The relation (37) then yields

$$(a_1 - c_1)^2 a_1 c_1 = 4\gamma_1^2$$

and thus, by successive differentiations of this equation, we get

$$\begin{aligned} a_1^3 + 13a_1^2c_1 - 9a_1c_1^2 + 3c_1^3 &= 8\rho, \\ 11a_1^2 + 30a_1c_1 - 21c_1^2 &= 0, \\ 2a_1 + c_1 &= 0, \\ 7\gamma_1 &= 0. \end{aligned}$$

The last relation contradicts our supposition.

Thus we have  $\beta_1 = 0$ ,  $\gamma_1 = 0$ , and (34), (36) yield  $\omega_1^2 = 0$ . However, exterior differentiation of this equation yields  $K\omega^1 \wedge \omega^2 = 0$  and hence  $K = 0$  in  $U$ . This being a contradiction to (i),  $m \in M$  must be an umbilical point of  $M$ .

To be able to introduce some consequences of Theorem 2, we define normal vector fields

$$\xi_1 = (V_1\xi)^N, \quad \xi_2 = (V_2\xi)^N,$$

$\xi$  being the mean curvature vector field in  $N(M)$ ,  $V_1, V_2 \in T(M)$  orthonormal vector fields on  $M$  and  $(X)^N$  the normal component of the vector field  $X$ .

**Corollary 1.** *Let  $M$  be a surface in  $E^4$  satisfying the conditions (i), (ii) and (iv) of Theorem 2. Let*

$$(iii) \quad 4(H - 4K)HK \geq \langle \xi, \xi_1 \rangle^2 + \langle \xi, \xi_2 \rangle^2 > 0 \text{ on } M.$$

*Then  $M$  is a part of a 2-dimensional sphere in  $E^4$ .*

**Proof.** In each  $m \in M$  choose orthonormal frames of  $M$  in such a way that  $V_1 = v_1, V_2 = v_2$ . It follows from (8) that

$$d\xi = [(\alpha_1 + \gamma_1)v_3 + (\alpha_2 + \gamma_2)v_4] \omega^1 + [(\beta_1 + \delta_1)v_3 + (\beta_2 + \delta_2)v_4] \omega^2 \pmod{v_1, v_2}$$

and thus, by the definition,

$$(38) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= (\alpha_1 + \gamma_1)v_3 + (\alpha_2 + \gamma_2)v_4, \\ \xi_2 &= (\beta_1 + \delta_1)v_3 + (\beta_2 + \delta_2)v_4. \end{aligned}$$

Then, because of (8), (27) and (38), we have

$$\begin{aligned} \langle \xi, \xi_1 \rangle &= (a_1 + c_1)(\alpha_1 + \gamma_1) + (a_2 + c_2)(\alpha_2 + \gamma_2) = \frac{1}{2}H_1, \\ \langle \xi, \xi_2 \rangle &= (a_1 + c_1)(\beta_1 + \delta_1) + (a_2 + c_2)(\beta_2 + \delta_2) = \frac{1}{2}H_2 \end{aligned}$$

and hence

$$\langle \xi, \xi_1 \rangle^2 + \langle \xi, \xi_2 \rangle^2 = \frac{1}{4}(H_1^2 + H_2^2).$$

This equation and the condition (iii) together with the assertion of Theorem 2 conclude the proof.

**Corollary 2.** *Let  $M$  be a surface in  $E^4$  with the properties (i), (ii) and (iv) of Theorem 2. Let*

(iii)  $4(H - 4K)K \geq \langle \xi_1, \xi_1 \rangle + \langle \xi_2, \xi_2 \rangle > 0$  on  $M$ .

*Then  $M$  is a part of a 2-dimensional sphere in  $E^4$ .*

**Proof.** Choose again a field of orthonormal frames of  $M$  in such a way that  $V_1 = v_1, V_2 = v_2$ . Then (27) and (38) imply

$$\langle \xi_1, \xi_1 \rangle = (\alpha_1 + \gamma_1)^2 + (\alpha_2 + \gamma_2)^2 = \frac{1}{4}H^{-1}H_1^2,$$

$$\langle \xi_2, \xi_2 \rangle = (\beta_1 + \delta_1)^2 + (\beta_2 + \delta_2)^2 = \frac{1}{4}H^{-1}H_2^2$$

and hence

$$\langle \xi_1, \xi_1 \rangle + \langle \xi_2, \xi_2 \rangle = \frac{1}{4}H^{-1}(H_1^2 + H_2^2).$$

Thus (iii) and Theorem 2 prove our assertion.

#### References

- [1] *A. Švec*: Contributions to the global differential geometry of surfaces. *Rozprawy ČSAV 1*, 87, 1977, p. 1–94.
- [2] *K. Svoboda*: Some global characterizations of the sphere in  $E^4$ . *Čas. pro pěst. matem. 103* (1978), p. 391–399.

*Author's address*: 602 00 Brno, Gorkého 13 (Katedra matematiky FS VUT).

VARIATIONS OF DISCRETE ANALOGUES  
OF WIRTINGER'S INEQUALITY

JARMILA NOVOTNÁ, Praha

(Received December 20, 1977)

Discrete analogues of Wirtinger's inequality have been already studied by different methods of proofs. The basic theorem of the topic dealt with in our article is Theorem 1. Its first proof was published 1950 by I. J. SCHOENBERG (see [5]). The author uses the complex finite Fourier series and proves Theorem 1 for complex numbers.

In [3], published 1955, K. FAN, O. TAUSSKY and J. TODD discuss discrete analogues of several integral inequalities. The main tool they use to prove them are the properties of Hermitian matrices which are known from the calculus of variations (see [3], p. 77). In this way the authors prove the first three theorems of those which will be dealt with in this article (Theorems 1, 2 and 3). In [3], each theorem is proved separately.

In 1957, H. D. BLOCK in [2] proved the complex case of Theorem 1 using the properties of operators in the  $n$ -dimensional unitary space.

O. SHISHA published 1973 another proof of Theorem 1 (see [6]). He uses geometrical tools based on Fenchel's theorem for a spherical curve.

In our paper we prove the basic Theorem 1 using the real trigonometric polynomials (see [1], pp. 13–20). The method is analogous to that used by I. J. Schoenberg. As compared with the results achieved as far, we obtain also a sharpening of Theorem 1 (Theorem 5). We show that Theorems 2 and 3 follow immediately from Theorem 1. Theorem 4 is a discrete analogue of the integral inequality as proved in [4], p. 595. We derive its sharpening (Theorem 6). Theorems 4, 5, 6 are mentioned neither in [2] nor in [3], [5], [6].

First we give Theorems 1 through 6. Then we derive Theorems 2, 3 and 4 from the basic one – Theorem 1 – and Theorem 6 from Theorem 5. The proofs of Theorems 1 and 5 are given afterwards.

In the last part of the paper, a geometrical application – the proof of the isoperimetric inequality for some polygons – via Theorems 1 and 5 is given.

## 1. LIST OF THEOREMS

**Theorem 1.** Let  $x_1, \dots, x_n$  be  $n$  real numbers such that

$$(1.1) \quad \sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

Let us define  $x_{n+1} = x_1$ . Then

$$(1.2) \quad \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1})^2 \geq 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

The equality in (1.2) holds if and only if

$$(1.3) \quad x_i = A \cos \frac{2\pi i}{n} + B \sin \frac{2\pi i}{n}, \quad i = 1, \dots, n, \quad A, B = \text{const.}$$

**Theorem 2.** If  $x_1, \dots, x_n$  are  $n$  real numbers and  $x_1 = 0$ , then

$$(1.4) \quad \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 \geq 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(2n-1)} \sum_{i=2}^n x_i^2.$$

The equality in (1.4) holds if and only if

$$(1.5) \quad x_i = A \sin \frac{(i-1)\pi}{2n-1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad A = \text{const.}$$

**Theorem 3.** If  $x_1, \dots, x_n$  are  $n$  real numbers, then

$$(1.6) \quad \sum_{i=0}^n (x_i - x_{i+1})^2 \geq 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)} \sum_{i=0}^n x_i^2,$$

where  $x_0 = x_{n+1} = 0$ . The equality in (1.6) holds if and only if

$$(1.7) \quad x_i = A \sin \frac{i\pi}{n+1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad A = \text{const.}$$

**Theorem 4.** Let  $x_1, \dots, x_n$  be  $n$  real numbers satisfying (1.1). Then

$$(1.8) \quad \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 \geq 4 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

The equality in (1.8) holds if and only if

$$(1.9) \quad x_i = A \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad i = 1, \dots, n, \quad A = \text{const.}$$

**Theorem 5** (sharpening of Theorem 1 for  $n$  even). Let  $n = 2m$ ,  $n \geq 4$ , let  $x_1, \dots, x_n$  be  $n$  real numbers satisfying (1.1). Let us define  $x_{n+i} = x_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Then

$$(1.10) \quad \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1})^2 \geq \left( \sin^2 \frac{2\pi}{n} - \sin^2 \frac{\pi}{n} \right) \sum_{i=1}^n (x_i + x_{i+m})^2 + 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

The equality in (1.10) holds if and only if

$$(1.11) \quad x_i = A \cos \frac{2\pi i}{n} + B \sin \frac{2\pi i}{n} + C \cos \frac{4\pi i}{n} + D \sin \frac{4\pi i}{n}, \\ i = 1, \dots, n, \quad A, B, C, D = \text{const}.$$

Remark. 1. For  $n \geq 4$  the inequality  $\sin^2(2\pi/n) - \sin^2(\pi/n) > 0$  holds.

2. Choosing a number  $\mu$ ,  $0 < \mu < \sin^2(2\pi/n) - \sin^2(\pi/n)$ , we can derive in the same way as in the proof of (1.10) (see the proof of (3.9)) that the following inequality holds:

$$(1.10') \quad \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1})^2 \geq \mu \sum_{i=1}^n (x_i + x_{i+m})^2 + 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

where the numbers  $x_1, \dots, x_n$  satisfy the assumptions of Theorem 5. The equality in (1.10') holds if and only if  $x_i$  satisfy (1.3).

**Theorem 6** (sharpening of Theorem 4). Let  $x_1, \dots, x_n$  be  $n$  real numbers satisfying (1.1),  $n \geq 2$ . Then

$$(1.12) \quad \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 \geq \left( \sin^2 \frac{\pi}{n} - \sin^2 \frac{\pi}{2n} \right) \sum_{i=1}^n (x_i + x_{n+1-i})^2 + 4 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

The equality in (1.12) holds if and only if

$$(1.13) \quad x_i = A \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n} + B \cos \frac{(2i-1)\pi}{n}, \quad i = 1, \dots, n, \\ A, B = \text{const}.$$

## 2. APPLICATION OF THE BASIC THEOREMS

Now it will be shown how to derive Theorem 2 from Theorem 1. Let  $y_1, \dots, y_{2(2n-1)}$  be  $2(2n-1)$  real numbers defined as follows:

$$(2.1) \quad y_k = \begin{cases} x_k, & k = 1, \dots, n, \\ x_{2n-k+1}, & k = n+1, \dots, 2n-1, \\ -x_{k+1-2n}, & k = 2n, \dots, 3n-1, \\ -x_{4n-k}, & k = 3n, \dots, 2(2n-1). \end{cases}$$

Since  $\sum_{i=1}^{2(2n-1)} y_k = 0$ , we can, putting  $y_{4n-1} = y_1$ , apply the results of Theorem 1 to (2.1). As  $x_1 = 0$ , the following equalities hold:

$$\sum_{k=1}^{2(2n-1)} y_k^2 = 4 \sum_{i=2}^n x_i^2, \quad \sum_{k=1}^{2(2n-1)} (y_k - y_{k+1})^2 = 4 \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2.$$

Hence, (1.4) holds. The equality will hold for (1.5), since  $y_1 = 0$  in the new computation.

In an analogous way Theorems 3 and 4 can be derived from Theorem 1. We shall show, only schematically, how to define the numbers  $\{y_k\}$ .

For Theorem 3:

$$(2.2) \quad 0, x_1, x_2, \dots, x_n, 0, -x_1, -x_2, \dots, -x_n.$$

For Theorem 4:

$$(2.3) \quad x_1, x_2, \dots, x_n, x_n, \dots, x_2, x_1.$$

Theorem 6, a sharpening of Theorem 4, can be derived from Theorem 5 via (2.3). Here,  $n_1 = 2m$ .

Remark. Theorem 2 can be derived from Theorem 3 when the numbers  $\{y_k\}_{k=1}^{2(n-1)}$  are defined as follows (schematically written):

$$x_2, x_3, \dots, x_n, x_n, \dots, x_2, \\ y_0 = y_{2n-1} = x_1 = 0.$$

### 3. PROOFS OF THE BASIC THEOREMS

In [1], p. 13–20, W. BLASCHKE has defined trigonometric polynomials. Let  $z_1, \dots, z_n$  be  $n$  numbers. First we assume  $n$  odd,  $n = 2m + 1$ . In [1] it is shown that we can choose such numbers  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m, \xi_1^*, \dots, \xi_m^*$  that the following equalities hold:

$$(3.1) \quad z_p = \xi_0 + \sum_{k=1}^m \left( \xi_k \cos kp \frac{2\pi}{n} + \xi_k^* \sin kp \frac{2\pi}{n} \right), \quad p = 1, \dots, n,$$

$$(3.2) \quad \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n z_p^2 = \xi_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (\xi_k^2 + \xi_k^{*2}),$$

$$(3.3) \quad \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n (z_p - z_{p+1})^2 = 2 \sum_{k=1}^m (\xi_k^2 + \xi_k^{*2}) \sin^2 k \frac{\pi}{n}.$$



Let now  $n$  be even,  $n = 2m$ . We can choose numbers  $c_0, c_1, \dots, c_m, c_1^*, \dots, c_{m-1}^*$  in an analogous way, but now

$$(3.1') \quad z_p = c_0 + \sum_{k=1}^{m-1} \left( c_k \cos kp \frac{2\pi}{n} + c_k^* \sin kp \frac{2\pi}{n} \right) + c_m \cos mp \frac{2\pi}{n}, \quad p = 1, \dots, n.$$

Inserting

$$(3.4) \quad \xi_0 = c_0, \quad \xi_k = c_k, \quad \xi_k^* = c_k^*, \quad k = 1, \dots, m-1, \\ \xi_m = \sqrt{2} c_m, \quad \xi_m^* = 0,$$

the equalities (3.2) and (3.3) will hold, too.

It can be easily shown that if  $\sum_{p=1}^n z_p = 0$ , then

$$(3.5) \quad \xi_0 = 0.$$

The proof of Theorem 1 is now very simple. Using (3.2), (3.3) and (3.5) for  $x_1, \dots, x_n$ , we conclude that (1.2) will hold, provided

$$(3.6) \quad \sin^2 \frac{k\pi}{n} \geq \sin^2 \frac{\pi}{n}, \quad k = 1, \dots, m,$$

is satisfied. (3.6) is true, since  $0 \leq k\pi/n \leq \pi/2$ ,  $k = 1, \dots, m$ . For  $x \in \langle 0, \pi/2 \rangle$  the function  $\sin x$  is growing. The equality in (1.2) holds if and only if  $\xi_i = \xi_i^* = 0$ ,  $i = 2, \dots, m$ ,  $\xi_1, \xi_1^*$  are arbitrary, i.e. if and only if (1.3) is satisfied.

To prove Theorem 5 we shall use (3.2), (3.3) (with (3.4)) and (3.5).

The equality

$$(3.7) \quad x_i + x_{i+m} = \sum_{k=1}^m \left\{ \xi_k \left[ \cos ki \frac{2\pi}{n} + \cos k(i+m) \frac{2\pi}{n} \right] + \right. \\ \left. + \xi_k^* \left[ \sin ki \frac{2\pi}{n} + \sin k(i+m) \frac{2\pi}{n} \right] \right\}$$

implies by virtue of (3.2) and (3.5) that

$$(3.8) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i + x_{i+m})^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (\xi_k^2 + \xi_k^{*2}) \left( 1 + \cos km \frac{2\pi}{n} \right)^2 = \\ = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (\xi_k^2 + \xi_k^{*2}) [1 + (-1)^k]^2.$$

(1.10) will hold if the inequality

$$\left( \sin^2 \frac{2\pi}{n} - \sin^2 \frac{\pi}{n} \right) \frac{n}{2} \sum_{k=1}^m (\xi_k^2 + \xi_k^{*2}) [1 + (-1)^k]^2 +$$

$$+ 2n \sin^2 \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^m (\xi_k^2 + \xi_k^{*2}) \leq 2n \sum_{k=1}^m (\xi_k^2 + \xi_k^{*2}) \sin^2 k \frac{\pi}{n}$$

is fulfilled, i.e.

$$(3.9) \quad \sum_{k=1}^m (\xi_k^2 + \xi_k^{*2}) \left\{ \sin^2 k \frac{\pi}{n} - \sin^2 \frac{\pi}{n} - \frac{1}{4} \left( \sin^2 \frac{2\pi}{n} - \sin^2 \frac{\pi}{n} \right) [1 + (-1)^k]^2 \right\} \geq 0.$$

Let us denote

$$q_k = \sin^2 k \frac{\pi}{n} - \sin^2 \frac{\pi}{n} - \frac{1}{4} \left( \sin^2 \frac{2\pi}{n} - \sin^2 \frac{\pi}{n} \right) [1 + (-1)^k]^2.$$

In case of  $k$  odd,

$$q_k = \sin^2 k \frac{\pi}{n} - \sin^2 \frac{\pi}{n} \geq 0$$

(see (3.6)) with the equality holding only for  $k = 1$ . In case of  $k$  even,

$$q_k = \sin^2 k \frac{\pi}{n} - \sin^2 \frac{2\pi}{n}$$

and (3.6) implies again  $q_k \geq 0$ . Here the equality holds only for  $k = 2$ . The inequality (1.10) with the equality condition (1.11) is proved.

Remark. The inequality (1.10') follows immediately from the proof of (1.10) given above. The form of the numbers  $q_k$  in this case is

$$q_k = \sin^2 k \frac{\pi}{n} - \sin^2 \frac{\pi}{n} \geq 0 \quad \text{for } k \text{ odd,}$$

$$q_k = \sin^2 k \frac{\pi}{n} - \sin^2 \frac{\pi}{n} - \mu > 0 \quad \text{for } k \text{ even.}$$

Now  $q_k > 0$  for  $k > 1$ ,  $q_1 = 0$ . The equality condition (1.3) for (1.10') is an immediate consequence of this fact.

#### 4. GEOMETRICAL APPLICATION

Let  $P = A_1 \dots A_n$  denote an equilateral closed  $n$ -gon in  $E_2$  of area  $F$  and perimeter  $L$ . In [1], p. 13–20, the inequality

$$(4.1) \quad L^2 \geq 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} F$$

is proved on the basis of trigonometric polynomials. The equality in (4.1) holds if and only if  $P$  is a regular  $n$ -gon.

(4.1) can be derived from Theorem 1. Let us choose a cartesian coordinate system  $S = \{O, x, y\}$  in  $E_2$  with  $O$  being the centroid of  $P$ . Let  $A_i = [x_i, y_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , in  $S$ . Let us denote  $A_{n+1} = A_1$ . Then the equalities

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n y_i = 0, \quad x_{n+1} = x_1, \quad y_{n+1} = y_1$$

hold and the assumptions of Theorem 1 for the numbers  $\{x_i\}$ ,  $\{y_i\}$  are fulfilled.

For  $P$  the following relations hold:

$$(4.2) \quad \frac{L^2}{n} = \sum_{i=1}^n [(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2],$$

$$(4.3) \quad F = \left| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}) \right| = \left| \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n [(x_i + x_{i+1})(y_i - y_{i+1}) + (y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i)] \right|.$$

Using (4.3) we can write

$$(4.4) \quad \begin{aligned} 8 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} F &= \\ &= 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n [(x_i + x_{i+1})(\pm y_i \mp y_{i+1}) + (y_i + y_{i+1})(\pm x_{i+1} \mp x_i)] \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n (\pm y_i \mp y_{i+1})^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n (x_i + x_{i+1})^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^n (\pm x_{i+1} \mp x_i)^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n [(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2] + \\ &+ \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \{[4x_i^2 - (x_i + x_{i+1})^2] + [4y_i^2 - (y_i - y_{i+1})^2]\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left( 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} \right) [(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2] \right\} + \\ &+ 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2). \end{aligned}$$

Now, using (1.2), (4.4) and (4.2), we derive the following inequality:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} 8 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} F &\leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left( 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \right) [(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2] = 2 \frac{L^2}{n}. \end{aligned}$$

(4.5) is the inequality (4.1). The equality condition (the regularity of  $P$ ) follows from (1.3) and the equality conditions in (4.4).

Using (1.10'), we can derive a sharpening of (4.1) for  $n$  even. Let  $n = 2m$ ,  $n \geq 4$ . In the coordinate system  $S$  let  $u_i$  be defined as follows:

$$u_i^2 = (x_i + x_{i+m})^2 + (y_i + y_{i+m})^2,$$

where  $x_{n+i} = x_i$ ,  $y_{n+i} = y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Then using (1.10') for

$$\mu = \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\pi}{n}$$

and (4.4) we obtain the inequality

$$(4.6) \quad 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} F + \frac{n}{8} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2 \leq L^2$$

with the equality holding only for the case of a regular  $n$ -gon.

#### References

- [1] Blaschke, W.: Kreis und Kugel. Leipzig 1916, 1956.
- [2] Block, H. D.: Discrete Analogues of Certain Integral Inequalities. Proc. Amer. Math. Soc., 8, No. 4, 1957, pp. 852–859.
- [3] Fan, K. - Taussky, O. - Todd, J.: Discrete Analogs of Inequalities of Wirtinger. Monatsh. Math., 59, 1955, pp. 73–90.
- [4] Fichtengol'c, G. M.: Kurs differential'nogo i integral'nogo isčislenija. Vol. III. Moskva, Fizmatgiz 1963.
- [5] Schoenberg, I. J.: The Finite Fourier Series and Elementary Geometry. Amer. Math. Monthly, 57, 1950, pp. 390–404.
- [6] Shisha, O.: On the Discrete Version of Wirtinger's Inequality. Amer. Math. Monthly, 1973, pp. 755–760.

*Author's address:* 113 02 Praha 1, Spálená 51 (SNTL — Nakladatelství technické literatury).

SOME REMARKS ON THE NEVANLINNA THEORY  
OF HOLOMORPHIC MAPPINGS OF RIEMANN SURFACES

ALOIS KLÍČ, Praha

(Received January 4, 1978)

**Introduction.** This paper contains several remarks to H. Wu's results published in [1] and [2]. For this reason, the notation from [1] will be used here without further comments. For the readers' convenience we mention that the definitions of the fundamental quantities are found also in the Russian translation of [2]: X. By, Теория равномерного распределения для голоморфных кривых, Издательство "Мир", Москва 1973, pp. 35–80.

Throughout this paper it is assumed that  $V$  is an open Riemann surface,  $M$  is a closed Riemann surface and  $f: V \rightarrow M$  is a holomorphic mapping.

1.

**1A.** H. WU in [1], p. 508 gave a simple proof, in the case of a parabolic Riemann surface, that  $f(V)$  is open dense in  $M$ . A stronger result is found in [2], p. 47:  $\delta(a) = 0$  for almost every  $a \in M$ . We extend the latter result to Riemann surfaces admitting finite harmonic exhaustion.

**1B. Theorem.** Let  $f: V \rightarrow M$  be a holomorphic mapping of an open Riemann surface  $V$ , admitting finite harmonic exhaustion, with unbounded characteristic function  $T(r)$  (i.e.  $\lim_{r \rightarrow \infty} T(r) = \infty$ ). Then

$$\delta(a) = 0$$

for almost every  $a \in M$ .

*Proof.* Let us denote (here  $u_a(z)$  is the proximity function, see [1], p. 483)

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial V[r]} f^* u_a * d\tau.$$

It is known (see [1], p. 508) that

$$(1) \quad \int_M m(r, a) \Omega = \text{const.}$$

for every  $r \geq r(\tau)$ . Equation (1) and the Fatou lemma yield

$$(2) \quad \liminf_{r \rightarrow s} m(r, a) < \infty$$

for a.e.  $a \in M$ .

Thus for every  $a \in M \setminus N$  (where  $\int_N \Omega = 0$ ) there exists a sequence  $\{r_i^a\}_{i=1}^\infty$  with the following properties:

$$(3) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} r_i^a = s, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} m(r_i^a, a) = \sigma(a) < \infty.$$

If the mapping  $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{M}$  has unbounded characteristic function  $T(r)$ , the defect  $\delta(a)$  can be defined by

$$\delta(a) = \liminf_{r \rightarrow s} \frac{m(r, a)}{T(r)}$$

as is easy to see from First Main Theorem.

From (3) we obtain

$$0 \leq \delta(a) = \liminf_{r \rightarrow s} \frac{m(r, a)}{T(r)} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{m(r_i^a, a)}{T(r)} = 0,$$

and therefore

$$\delta(a) = 0,$$

QED.

**2.** In this paragraph let  $\mathbf{V}$  denote an open Riemann surface admitting *infinite* harmonic exhaustion, i.e. a parabolic Riemann surface.

**2A.** H. Wu calls the mapping  $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{M}$  *transcendental* iff

$$(4) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{T(r)} = 0.$$

The following interpretation of condition (4) is given in [1], Lemma 8.3, p. 516.

If  $\mathbf{V}$  is obtained from a compact Riemann surface  $\mathbf{M}'$  by deleting a finite number of points  $m_1, \dots, m_k$ , then  $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{M}$  is transcendental iff  $f$  is not a restriction of a holomorphic mapping  $\tilde{f}: \mathbf{M}' \rightarrow \mathbf{M}$ .

**2B.** Another interpretation of the transcendental mapping is possible with the help of the *Weierstrass property*.

**Definition.** A holomorphic mapping  $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{M}$  is said to have the *Weierstrass property at the ideal boundary*  $\beta$  of  $\mathbf{V}$  if the *global cluster set*

$$C_{\mathbf{V}}(f) = \bigcap_{r \geq r_0} \overline{f(\mathbf{V} \setminus V[r])}$$

at  $\beta$  is *total*, i.e.

$$C_{\mathbf{V}}(f) = \mathbf{M}.$$

This definition originates from [3], p. 117.

**Theorem.** A mapping  $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{M}$  is transcendental iff  $f$  has the Weierstrass property at the ideal boundary  $\beta$  of  $\mathbf{V}$ .

*Proof.* 1. Let  $f$  be transcendental. Then  $\delta(a) = 0$  almost everywhere on  $\mathbf{M}$  by 1A, hence  $f(\mathbf{V} \setminus V[r])$  is dense in  $\mathbf{M}$  for every  $r \geq r(\tau)$ .

2. Conversely, let us assume that  $f$  has the Weierstrass property at the ideal boundary  $\beta$  of  $\mathbf{V}$ . Then there exists a point  $a \in \mathbf{M}$  such that  $\lim_{r \rightarrow \infty} n(r, a) = \infty$  and also  $\lim_{r \rightarrow \infty} N(r, a) = \infty$ . Thus as a consequence of First Main Theorem and because of  $m(r, a) \geq 0$  we have

$$(5) \quad T(r) + \text{const.} \geq N(r, a).$$

If both sides of Inequality (5) are divided by  $r$ , we obtain

$$(6) \quad \frac{T(r) + \text{const.}}{r} \geq \frac{N(r, a)}{r}.$$

Furthermore, l'Hospital's rule yields

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r)}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r) + \text{const.}}{r} \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, a)}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} n(r, a) = \infty,$$

(or we can proceed without using l'Hospital's rule, see [4];

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, a)}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\int_{r_0}^r n(t, a) dt}{r} \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\int_{r/2}^r n(t, a) dt}{r} \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r/2}{r} n(r/2, a) = \infty)$$

**QED.**

3. In this paragraph, let  $\mathbf{V}$  denote an open Riemann surface admitting finite harmonic exhaustion.

**Theorem.** Let  $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{M}$  be a holomorphic mapping with unbounded characteristic function  $T(r)$ . Then  $f$  has the Weierstrass property at the ideal boundary  $\beta$  of  $\mathbf{V}$ .

*Proof* is an easy consequence of Theorem 1B.

4. In view of Theorem 3 we introduce the following definition.

**Definition.** Let  $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{M}$  be a holomorphic mapping from an open Riemann surface  $\mathbf{V}$  having finite or infinite harmonic exhaustion, into  $\mathbf{M}$ . The mapping  $f$  is called transcendental iff

$$(7) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r)}{r} = \infty.$$

**Remark.** For the case  $s = \infty$ , condition (7) is equivalent with condition (4). For  $s < \infty$ , condition (7) is equivalent with  $\lim_{r \rightarrow s} T(r) = \infty$ .

Thus, if  $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{M}$  is transcendental in the sense of our definition, then  $f$  has the Weierstrass property at the ideal boundary  $\beta$  of  $\mathbf{V}$ . Hence the boundary  $\beta$  of  $\mathbf{V}$  behaves as an essential singularity of the mapping  $f$ .

**5.** In this paragraph only open Riemann surfaces with *finite Euler characteristic*  $\chi(\mathbf{V})$  are considered.

**5A.** If  $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{M}$  is a transcendental mapping from a parabolic Riemann surface into  $\mathbf{M}$ , then the right hand side of the defect relation

$$(8) \quad \sum_{a \in \mathbf{M}} \delta(a) \leq \chi(\mathbf{M}) + \chi,$$

is finite, i.e. the set of deficient values is at most countable.

In the case of a Riemann surface with *finite harmonic exhaustion*, the condition of transcendency does not ensure the finiteness of the right hand side of the defect relation

$$(9) \quad \sum_{a \in \mathbf{M}} \delta(a) \leq \chi(\mathbf{M}) + \chi + \varepsilon.$$

The finiteness of the right hand side of this relation is ensured by the following condition:

$$(10) \quad \lim_{r \rightarrow s} \frac{\log \frac{1}{s-r}}{T(r)} = 0.$$

**5B.** In the following, an interpretation of condition (10) is proposed.

**Theorem.** *If  $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{M}$  is a holomorphic mapping of an open Riemann surface, admitting finite harmonic exhaustion, into  $\mathbf{M}$ , for which condition (10) is valid, then the covering surface  $(\mathbf{M})_f^{\mathbf{V}}$  is regularly exhaustible.*

**Proof.** If the generalized L'Hospital's rule (see Lemma 8.7 in [1]) is applied to equation (10), we obtain

$$(11) \quad \liminf_{r \rightarrow s} \frac{1}{(s-r)v(r)} = 0.$$

Equation (11) proves our Theorem, see [3], p. 170, 18D. QED.

**6.** In [3], the following theorem has been proved (see [3], p. 118):

**6A. Theorem.** *Let  $\mathbf{V}$  be a parabolic Riemann surface. Every meromorphic function on  $\mathbf{V}$  with the Weierstrass property assumes every value infinitely many times in  $\mathbf{V}$  except perhaps for a countable union of compact sets of capacity zero.*



**6B.** It is possible to generalize this theorem to the case of a holomorphic mapping from an open Riemann surface admitting *finite or infinite* harmonic exhaustion, into an *arbitrary closed* Riemann surface  $\mathbf{M}$ .

**Theorem.** Let  $\mathbf{V}$  be an open Riemann surface admitting *finite or infinite* harmonic exhaustion, and  $\mathbf{M}$  a compact Riemann surface. Every transcendental holomorphic mapping  $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{M}$  assumes every value infinitely many times in  $\mathbf{V}$  except perhaps for a countable union of compact sets of capacity zero.

Proof. If  $K_n$ ,

$$K_n = \{a \in \mathbf{M}; n(r, a) \leq n, r \in (r_0, s)\},$$

is of positive capacity then there exists a compact set  $K \subset K_n$  such that  $K$  is of positive capacity and contained in an open set  $U_0$ . The set  $U_0$  is determined by the following conditions:  $U_0 \subset U$ , where  $\{U, \varphi\}$  is a chart for which

$$\varphi(\bar{U}) = \{z \in \mathbf{C}, |z| \leq 1\}, \quad \varphi(U_0) = \{z \in \mathbf{C}, |z| < \frac{1}{2}\}.$$

Let  $g(z, a)$  denote *Green's function* of the region  $U$  with a pole at  $a \in U$ . For  $a \in U, z \in \mathbf{M} \setminus U$  we put  $g(z, a) \equiv 0$ .

First we prove the following assertion: For  $(z, a) \in \mathbf{M} \times U_0$ ,

$$(16) \quad u_a(z) \leq g(z, a) + \text{const.}$$

holds.

The function  $u_a(z)$  is, as a function of two variables  $(z, a)$ , continuous on the compact set  $(\mathbf{M} \setminus U) \times \bar{U}_0$  (see Theorems 2.1 and 2.8 in [1]). Thus for  $(z, a) \in (\mathbf{M} \setminus U) \times \bar{U}_0$   $u_a(z)$  is bounded, i.e.  $u_a(z) \leq \text{const.}$  For  $(z, a) \in \bar{U} \times \bar{U}_0$  it is

$$(17) \quad u_a(z) = \log \frac{1}{|z - z(a)|} + \phi_a(z),$$

where  $\phi_a(z)$  is a continuous function of two variables  $(z, a)$  on the compact set  $\bar{U} \times \bar{U}_0$ . Thus for  $(z, a) \in \bar{U} \times \bar{U}_0$  we have  $\phi_a(z) \leq \text{const.}$

Because  $g(z, a)$  is expressed in  $U$  as

$$(18) \quad g(z, a) = \log \frac{1}{|z - z(a)|} + v(z, a),$$

where  $v(z, a)$  is a harmonic function in a neighborhood of the point  $a$ , the validity of inequality (16) is evident.

Let  $\mu$  be the *equilibrium measure* on  $K$  (for definition see C. Constantinescu, and A. Cornea: *Ideale Ränder Riemannscher Flächen*, p. 48). Then

$$\int_K g(z, a) d\mu(a) \leq 1 \quad \text{for } z \in U.$$

Thus (16) implies

$$\int_K u_a(z) d\mu(a) \leq \text{const.} \quad \text{for } z \in \mathbf{M}.$$

Hence

$$\int_K m(r, a) d\mu(a) = \int_K \left[ \int_{\partial V[r]} f^* u_a * d\tau \right] d\mu(a) = \int_{\partial V[r]} \int_K u_a \circ f d\mu(a) * d\tau = O(1).$$

Furthermore,

$$\begin{aligned} \int_K N(r, a) d\mu(a) &= \int_K \left[ \int_{r_0}^r n(t, a) dt \right] d\mu(a) = \\ &= \int_{r_0}^r \left[ \int_K n(t, a) d\mu(a) \right] dt \leq \text{const. } r = O(r). \end{aligned}$$

Evidently

$$\int_K T(r) d\mu(a) = T(r) \mu(K).$$

From First Main Theorem we obtain

$$T(r) = O(1) + O(r),$$

which contradicts the assumption of  $f$  being transcendental. Therefore the set  $K$  is of capacity zero. QED.

#### References

- [1] *H. Wu*: Mappings of Riemann Surfaces (Nevanlinna Theory,) Proc. Sympos. Pure Math. vol. XI, "Entire functions and Related Parts of Analysis", Amer. Math. Soc., 1968, 480—532.
- [2] *H. Wu*: The equidistribution theory of holomorphic curves, Annals of Math., Studies 64, Princeton Univ. Press, Princeton N. J., 1970.
- [3] *L. Sario* and *K. Noshiro*: Value distribution theory, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1966.
- [4] *J. Fuka*: a personal communication.

*Author's address*: 166 28 Praha 6, Suchbátarova 1905 (katedra matematiky VŠCHT Praha).

PATHS IN POWERS OF GRAPH

ELENA WISZTOVÁ, Žilina

(Received February 7, 1978)

**1. Introduction.** By a graph we shall mean a finite undirected graph with no loop of multiple edge (i.e. a graph in the sense of monographs [1] or [2]). If  $G$  is a graph, then we denote by  $V(G)$ ,  $V_1(G)$ , and  $E(G)$  the vertex set of  $G$ , the set of vertices of degree one in  $G$ , and the edge set of  $G$ , respectively. The distance between vertices  $u$  and  $v$  of  $G$  will be denoted by  $d(u, v, G)$ . By the  $n$ -th power  $G^n$  of  $G$  (where  $n \geq 1$ ) we mean the graph with the properties that  $V(G^n) = V(G)$  and that vertices  $u$  and  $v$  are adjacent in  $G^n$  if and only if  $1 \leq d(u, v, G) \leq n$ . If  $n \geq 1$  and  $u$  is a vertex of  $G$ , then we denote by  $G(u, n)$  the set of vertices which are adjacent to  $u$  in  $G^n$ .

If  $G_1$  and  $G_2$  are graphs, then we denote by  $G_1 \cup G_2$  the graph with  $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$  and  $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$ .

Let  $G$  be a graph. A path connecting vertices  $u$  and  $v$  in  $G$  is referred to as a  $u - v$  path in  $G$ . In the present paper a path in  $G$  will be regarded as a subgraph of  $G$ . A path  $P$  in  $G$  is called *hamiltonian* if  $V(P) = V(G)$ . We say that  $G$  is *hamiltonian* if it contains a hamiltonian path.

Let  $G$  be a nontrivial graph. We say that it is *hamiltonian-connected* if for every pair of distinct vertices  $u$  and  $v$  of  $G$ , there exists a hamiltonian  $u - v$  path in  $G$ . Hamiltonian properties of powers of graphs, especially of the second and third powers, were studied very intensively: see, for example, SEKANINA and CHARTRAND-KAPOOR. Some further references can be found in LESNIAK [7].

In the present paper we shall study a certain general modification of hamiltonian connectedness for higher powers of graphs.

Let  $G$  be a graph. For every positive integer  $i$ , we denote by  $\mathcal{D}_i(G)$  the set of all ordered pairs  $(U_1, U_2)$  with the properties that  $U_1$  and  $U_2$  are disjoint subsets of  $V(G)$ , and  $|U_1| = |U_2| = i$ . Denote

$$\mathcal{D}(G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_i(G).$$

Let  $(U_1, U_2) \in \mathcal{D}(G)$ . We shall say that a set  $\mathcal{P}$  of paths in  $G$  is a  $(U_1, U_2)$ -path system in  $G$ , if

- (i) given  $P \in \mathcal{P}$ , then one end-vertex of  $P$  belongs to  $U_1$ , and the other belongs to  $U_2$ ,

(ii)  $|\mathcal{P}| = |U_1|$ ,

(iii) every vertex of  $G$  belongs to at most one path in  $\mathcal{P}$ . We shall say that  $\mathcal{P}$  is a  $(U_1, U_2)$ -path system on  $G$ , if it is a  $(U_1, U_2)$ -path system in  $G$ , and every vertex of  $G$  belongs to at least one path in  $\mathcal{P}$ . Let  $G$  be a tree, and let  $\mathcal{P}$  be a  $(U_1, U_2)$ -path system in (on)  $G^n$ , where  $n \geq 1$ . We shall say that  $\mathcal{P}$  is  $n$ -good for  $G$  if for every  $P \in \mathcal{P}$  and every pair of distinct vertices  $v$  and  $w$  of  $P$  it holds that if  $d(v, w, G) \leq n$  and no  $u \in V(P - v - w)$  belongs to the  $v - w$  path in  $G$ , then  $vw \in E(P)$ .

Let  $G$  be a graph, and let  $i$  be a positive integer. We shall say that  $G$  is  $i$ -traceable if  $|V(G)| \geq 2i$  and for every  $(U_1, U_2) \in \mathcal{D}_i(G)$ , there exists a  $(U_1, U_2)$ -path system on  $G$ . It is obvious that a nontrivial graph is 1-traceable if and only if it is hamiltonian-connected. In the present paper we shall prove that if  $G$  is a connected graph with at least  $2i$  vertices, where  $i \geq 3$ , then  $G^{i+1}$  is  $i$ -traceable. We recall four theorems which will be very useful for this purpose.

**Theorem A** (J.-L. JOLIVET [3]). *If  $G$  is a connected graph with at least  $n \geq 1$  vertices, then  $G^n$  is  $n$ -connected.*

**Theorem B** (see Theorem 5.14 in HARARY [1]). *A graph with at least  $2n$  vertices ( $n \geq 1$ ) is  $n$ -connected if and only if for every  $(U_1, U_2) \in \mathcal{D}_n(G)$ , there exists a  $(U_1, U_2)$ -path system in  $G$ .*

**Theorem C** (M. SEKANINA [5]). *If  $G$  is a nontrivial connected graph, then  $G^3$  is hamiltonian-connected.*

**Theorem D** (M. Sekanina [6]). *Let  $a, b, c$  and  $d$  be distinct vertices of a connected graph  $G$ . Then there exist a  $a - b$  path  $P_1$  in  $G^4$  and a  $c - d$  path  $P_2$  in  $G^4$  such that  $\{P_1, P_2\}$  is a  $(\{a, c\}, \{b, d\})$ -path system on  $G^4$ .*

**Corollary 1.** *Let  $G$  be a connected graph. If  $|V(G)| \geq 2$ , then  $G^3$  is 1-traceable; if  $|V(G)| \geq 4$ , then  $G^4$  is 2-traceable.*

**2. Results.** We first prove five lemmas.

**Lemma 1.** *Let  $G$  be a connected graph with  $p \geq 2$  vertices. Then for an arbitrary pair of distinct vertices  $x$  and  $y$  of  $G$  there exists a hamiltonian  $x - y$  path  $P$  in  $G^3$  with the property that there exists  $s \in G(x, 2)$  such that  $xs \in E(P)$ .*

**Proof.** We prove the lemma by using induction on  $p$ . If  $p = 2$ , the result is obvious. Assume that  $p \geq 3$ , and that the result is proved for every nontrivial connected graph with at most  $p - 1$  vertices. Let  $x$  and  $y$  be distinct vertices of  $G$ . Since  $G$  is connected, there exists a spanning tree  $T$  of  $G$ . There exists exactly one vertex  $r$  of  $G$  such that  $ry \in E(T)$ , and that  $r$  belongs to the  $x - y$  path in  $T$ . Clearly,  $T - ry$  consists of two components, say  $T_x$  and  $T_y$ , where  $x \in V(T_x)$  and  $y \in V(T_y)$ . Obviously, at least one of the trees  $T_x$  and  $T_y$  is nontrivial.

First, let  $T_x$  be trivial. Then there exists  $s \in V(T_y)$  such that  $sy \in E(T_y)$ . According to Theorem C there exists a hamiltonian  $s - y$  path  $P_y$  in  $(T_y)^3$ . If we denote by  $P$  the path  $P_y + xs$ , then we get the result of the lemma.

Next, let  $T_x$  be nontrivial. Then there exists  $t \in V(T_x - x)$  such that  $t \in T(y, 2)$ . By the induction assumption there exists a hamiltonian  $x - t$  path  $P_x$  in  $(T_x)^3$  with the property that there exists  $s \in T_x(x, 2)$  such that  $xs \in E(P_x)$ . If  $T_y$  is trivial and we denote by  $P$  the path  $P_x + ty$ , then we get the result. Assume that  $T_y$  is nontrivial, and consider  $z \in V(T_y)$  such that  $yz \in E(T_y)$ . According to Theorem C there exists a hamiltonian  $z - y$  path  $P_y$  in  $(T_y)^3$ . Obviously,  $d(t, z, T) \leq 3$ . If we denote by  $P$  the path  $(P_x \cup P_y) + tz$ , then we get the result of the lemma, which completes the proof.

**Corollary 2.** *Let  $G$  be a connected graph with at least three vertices, and let  $u \in V(G)$ . Then there exist vertices  $x_u$  and  $y_u$  of  $G - u$  such that  $x_u \in G(u, 1)$ ,  $y_u \in G(u, 2)$ , and that there exists a hamiltonian  $x_u - y_u$  path in  $G^3 - u$ .*

Corollary 2 immediately implies the following result, which is due to Chartrand and Kapoor [4]: If  $G$  is a connected graph with at least four vertices and  $u \in V(G)$ , then  $G^3 - u$  is hamiltonian.

**Lemma 2.** *Let  $T$  be a tree with at least  $2i$  vertices, where  $i \geq 1$ , and let  $(U_1, U_2) \in \mathcal{D}_i(T)$ . Then there exists a  $(U_1, U_2)$ -path system in  $T^i$  which is  $i$ -good for  $T$ .*

*Proof.* According to Theorem A,  $T^i$  is  $i$ -connected. From Theorem B it follows that there exists a  $(U_1, U_2)$ -path system in  $T^i$ .

Consider a  $(U_1, U_2)$ -path system  $\mathcal{P}$  in  $T^i$  which has the following property: if  $P \in \mathcal{P}$ , then there exists no path  $P'$  such that  $V(P') \subseteq V(P)$ ,  $|V(P')| < |V(P)|$ , and that  $(\mathcal{P} - \{P\}) \cup \{P'\}$  is a path system in  $T^i$ . We shall show that  $\mathcal{P}$  is  $i$ -good for  $T$ .

On the contrary, we assume that  $\mathcal{P}$  is not  $i$ -good for  $T$ . From the definition of an  $i$ -good path system it follows that there exists  $P_0 \in \mathcal{P}$  such that there exist distinct  $v, w \in V(P_0)$  with the properties that  $vw \notin E(P_0)$ ,  $d(v, w, T) \geq i$ , and that no  $u \in V(P_0 - v - w)$  belongs to the  $v - w$  path in  $T$ . Since  $v$  and  $w$  are distinct vertices of  $P_0$ , we have that there exists a  $v - w$  path  $Q$  in  $T^i$  which is a subgraph of  $P_0$ . Since  $vw \notin E(P_0)$ , we have  $|V(Q)| \geq 3$ . We denote by  $P'$  the path  $P_0 - V(Q - v - w)$ . Since  $P'$  and  $P_0$  have the same end vertices, we have that  $(\mathcal{P} - \{P_0\}) \cup \{P'\}$  is a  $(U_1, U_2)$ -path system in  $T^i$ , which is a contradiction. Hence the lemma follows.

Let  $T$  be a nontrivial tree, and let  $(U_1, U_2) \in \mathcal{D}(T)$ . We denote by  $T(U_1, U_2)$  the minimum subtree  $T'$  of  $T$  with the property that  $U_1 \cup U_2 \subseteq V(T')$ . Obviously,  $V_1(T(U_1, U_2)) \subseteq U_1 \cup U_2$ .

We shall say that  $T$  is  $(U_1, U_2)$ -primitive if there exists no  $v \in V(T(U_1, U_2)) - (U_1 \cup U_2)$  with the property that each component  $T_0$  of  $T - v$  satisfies  $(V(T_0) \cap U_1, V(T_0) \cap U_2) \in \mathcal{D}(T_0)$ . It is obvious that if  $T$  is  $(U_1, U_2)$ -primitive, then  $T(U_1, U_2)$  is also  $(U_1, U_2)$ -primitive.

**Lemma 3.** Let  $T$  be a tree with at least  $2i$  vertices, where  $i \geq 1$ , and let  $(U_1, U_2) \in \mathcal{D}_i(T)$ . Assume that  $T$  is identical with  $T(U_1, U_2)$ , and that  $T$  is  $(U_1, U_2)$ -primitive. Then there exists a  $(U_1, U_2)$ -path system on  $T^i$  which is  $i$ -good for  $T$ .

*Proof.* According to Lemma 2, there exists a  $(U_1, U_2)$ -path system  $\mathcal{P}_0$  in  $T^i$  which is  $i$ -good for  $T$ .

If  $\mathcal{Q}$  is a  $(U_1, U_2)$ -path system in  $T^i$ , then we denote

$$V(\mathcal{Q}) = \bigcap_{Q \in \mathcal{Q}} V(Q).$$

Assume that  $\mathcal{P}$  is a  $(U_1, U_2)$ -path system in  $T^i$  which is  $i$ -good for  $T$ , and that there exists a vertex  $v \in V(T) - V(\mathcal{P})$ . Since  $T$  is  $(U_1, U_2)$ -primitive, there exists a component  $T_1$  of  $T - v$  such that  $(V(T_1) \cap U_1, V(T_1) \cap U_2) \notin \mathcal{P}(T_1)$ . Therefore,  $|V(T_1) \cap U_1| \neq |V(T_1) \cap U_2|$ . Since  $|U_1| = |U_2|$  there exists a component  $T_2$  of  $T - v$  such that  $T_2$  is different from  $T_1$  and  $|V(T_2) \cap U_1| \neq |V(T_2) \cap U_2|$ . This implies that there exists a path  $P \in \mathcal{P}$  with the property that there exists  $v_1, v_2 \in V(P)$  such that  $v_1v_2 \in E(P)$ , and that  $v$  belongs to the  $v_1 - v_2$  path in  $T$ . We denote by  $P'$  the path obtained from  $P - v_1v_2$  by adding the vertex  $v$  and the edges  $v_1v$  and  $vv_2$ . It is easy to see that  $(\mathcal{P} - \{P\}) \cup \{P'\}$  is a  $(U_1, U_2)$ -path system in  $T^i$  which is  $i$ -good for  $T$ , and that  $V(\mathcal{P} - \{P\}) \cup \{P'\} = V(\mathcal{P}) \cup \{v\}$ .

If  $V(\mathcal{P}_0) = V(T)$ , then  $\mathcal{P}_0$  is a  $(U_1, U_2)$ -path system on  $T^i$ . Assume that  $V(\mathcal{P}_0) \neq V(T)$ ; if we reiterate the above procedure, then from  $\mathcal{P}_0$  we can construct a  $(U_1, U_2)$ -path system on  $T^i$  which is  $i$ -good for  $T$ .

Hence the lemma follows.

Let  $T$  be a nontrivial tree, and let  $(U_1, U_2) \in \mathcal{D}(T)$ . If  $v \in V(T(U_1, U_2))$ , then we denote by  $T(v, U_1, U_2)$  the component of  $T - E(T(U_1, U_2))$  which contains  $v$ . Further, we denote by  $m(T, U_1, U_2)$  the number of vertices  $v \in V(T(U_1, U_2)) - V_1(T(U_1, U_2))$  with the property that  $T(v, U_1, U_2)$  is nontrivial.

**Lemma 4.** Let  $T$  be a tree with at least  $2i$  vertices, where  $i \geq 3$ , and let  $(U_1, U_2) \in \mathcal{D}_i(T)$ . Assume that  $T$  is  $(U_1, U_2)$ -primitive and that  $m(T, U_1, U_2) = 0$ . Then there exists a  $(U_1, U_2)$ -path system on  $T^{i+1}$ .

*Proof.* We denote the tree  $T(U_1, U_2)$  by  $S$ . If  $v \in V_1(S)$ , then we denote  $T(v, U_1, U_2)$  by  $T(v)$ . Moreover, we denote

$$W = \{w \in V_1(S); T(w) \text{ is nontrivial}\}.$$

Corollary 2 implies that for every  $w \in W$  there exist  $x_w, y_w \in V(T(w) - w)$  such that  $x_w \in T(w, 1)$ ,  $y_w \in T(w, 2)$ , and that there exists a hamiltonian  $x_w - y_w$  path in  $(T(w))^3 - w$ , say a hamiltonian path  $P(w)$ . According to Lemma 3, there exists a  $(U_1, U_2)$ -path system on  $S^i$  which is  $i$ -good for  $S$ , say a  $(U_1, U_2)$ -path system  $\mathcal{P}$ .

We distinguish two cases:

1. There exists no  $P_0 \in \mathcal{P}$  with the following properties:

(i)  $P_0$  contains only two vertices, say  $a$  and  $b$ ;

(ii)  $a, b \in W$ ; and

(iii)  $d(a, b, T) = i$ .

2. There exists  $P_0 \in \mathcal{P}$  with the properties (i)–(iii).

Case 1. Let  $P$  be an arbitrary path in  $\mathcal{P}$ , and let  $u$  and  $v$  be the end vertices of  $P$ . There exist vertices  $u'$  and  $v'$  such that  $uu', vv' \in E(P)$ . Obviously,  $P$  is a path in  $T^i$ . If  $u \in W$ , then  $(P \cup P(u)) - uu' + uy_u + x_u u'$  is a path in  $T^{i+1}$ . Let  $u, v \in W$ ; then either  $|V(P)| \geq 3$  or  $d(u, v, T) < i$ ; this means that  $(P \cup P(u) \cup P(v)) - uu' - vv' + uy_u + x_u u' + v'x_v + y_v v$  is a path in  $T^{i+1}$ . This observation yields that the paths of  $\mathcal{P}$  can be extended to a  $(U_1, U_2)$ -path system on  $T^{i+1}$ .

Case 2. Without loss of generality we assume that  $a \in U_1$  and  $b \in U_2$ . We denote by  $Z$  the set of all vertices of the  $a - b$  path in  $T$  which do not belong to  $U_1 \cup U_2$ . Since  $S$  is  $(U_1, U_2)$ -primitive, we have that there exists no  $x \in V(S - a - b) - ((U_1 - \{a\}) \cup (U_2 - \{b\})) - Z$  such that every component  $S_0$  of  $S - a - b - x$  satisfies  $(V(S_0) \cap U_1, V(S_0) \cap U_2) \in \mathcal{D}(S_0)$ . Consider an arbitrary vertex  $c \in Z$ . We denote by  $S_a$  or  $S_b$  the component of  $S - c$  which contains  $a$  or  $b$ , respectively. Assume that  $c$  has the following properties:

(1) Every component  $S_0 \neq S_a, S_b$  of  $S - c$  satisfies

$$(V(S_0) \cap U_1, V(S_0) \cap U_2) \in \mathcal{D}(S_0)$$

(2) either

$$|V(S_a) \cap U_1| = |V(S_a) \cap U_2| + 1,$$

$$|V(S_b) \cap U_1| = |V(S_b) \cap U_2| - 1$$

or

$$|V(S_a) \cap U_1| = |V(S_a) \cap U_2| - 1,$$

$$|V(S_b) \cap U_1| = |V(S_b) \cap U_2| + 1.$$

Then every component  $S'_0$  of  $S - a - b - c$  satisfies

$$(V(S'_0) \cap U_1, V(S'_0) \cap U_2) \in \mathcal{D}(S'_0).$$

We denote by  $Z'$  the set of all  $c \in Z$  which have the properties (1) and (2). Moreover, we denote  $Z_0 = Z' \cup \{a, b\}$ . Then every component  $S'$  of  $S - Z_0$  satisfies

$$(U_1 \cap V(S'), U_2 \cap V(S')) \in \mathcal{D}(S'),$$

$S'$  is  $(U_1 \cap V(S'), U_2 \cap V(S'))$ -primitive

and  $S'$  is identical with  $S'(U_1 \cap V(S'), U_2 \cap V(S'))$ .

According to Lemma 3, for each component  $S'$  of  $S - Z_0$  there exists a  $(U_1 \cap V(S'), U_2 \cap V(S'))$ -path system  $\mathcal{P}_{S'}$  on  $(S')^{i-1}$  which is  $(i - 1)$ -good for  $S'$ . Denote

$$\mathcal{P}_0 = \bigcup \mathcal{P}_{S'}, \text{ over all components } S' \text{ of } S - Z_0.$$

Subcase 2.1. Let  $|Z_0| \geq 3$ . Then there exists an  $a - b$  path  $P_0$  in  $T^{i-1}$  such that  $V(P_0) = Z_0$  and that  $\mathcal{P}_0 \cup \{P_0\}$  is a  $(U_1, U_2)$ -path system on  $S^{i-1}$  which is  $(i - 1)$ -

good for  $S$ . If we denote  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cup \{P_0\}$ , we have a  $(U_1, U_2)$ -path system on  $S^i$  which is  $i$ -good for  $S$  and which fulfils the condition of Case 1.

Subcase 2.2. Let  $|Z_0| < 3$ . Then  $Z_0 = \{a, b\}$ . We denote by  $P_0$  the graph with  $V(P_0) = \{a, b\}$  and  $E(P_0) = \{ab\}$ . It is clear that  $S - a - b$  has exactly one component. This implies that  $\mathcal{P}_0$  is a  $(U_1 - \{a\}, U_2 - \{b\})$ -path system on  $(S - a - b)^{i-1}$  which is  $(i - 1)$ -good for  $S - a - b$  (and therefore for  $S$ ). Denote  $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_0 \cup \{P_0\}$ .

Subcase 2.2.1. Assume that there exists  $P_1 \in \mathcal{P}' - \{P_0\}$  with the property that at least two vertices of  $P_1$ , say vertices  $v$  and  $w$ , belong to the  $a - b$  path in  $S$ . We can assume that  $d(a, v, S) < d(a, w, S)$ ; for an illustration see Fig. 1. Obviously,

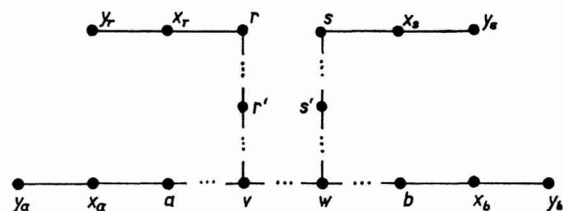


Fig. 1.

$d(v, w, S) \leq i - 2$ . Since  $\mathcal{P}_0$  is  $(i - 1)$ -good for  $S$ , we have that  $vw \in E(P_1)$ . Let  $r$  and  $s$  be the end vertices of  $P_1$ . There exist vertices  $r'$  and  $s'$  such that  $rr'$  and  $ss'$  are edges of  $P_1$ . Without loss of generality we assume that if  $s \in W$ , then  $r \in W$ . We denote by  $\bar{P}_0$  the path

$$(P_0 \cup P(a)) + ay_a + x_ab$$

and by  $\bar{P}_1$  the path

$$(P_1 \cup P(b)) + vx_b + y_bw, \quad \text{if } r, s \notin W,$$

$$(P_1 \cup P(b) \cup P(r)) + vx_b + y_bw + ry_r + x_r r', \quad \text{if } r \in W, \quad s \notin W,$$

$$(P_1 \cup P(b) \cup P(r) \cup P(s)) + vx_b + y_bw + x_r r' + ry_r + sy_s + x_s s', \quad \text{if } r, s \in W.$$

It is easy to see that both  $\bar{P}_0$  and  $\bar{P}_1$  are paths in  $T^{i+1}$ . If we continue for the paths in  $\mathcal{P}' - \{P_0, P_1\}$  as in Case 1, we can extend  $\mathcal{P}'$  to a  $(U_1, U_2)$ -path system, say  $\bar{\mathcal{P}}$ , on  $T^{i+1}$  such that  $\bar{P}_0, \bar{P}_1 \in \bar{\mathcal{P}}$ .

Subcase 2.2.2. Assume that for every  $P \in \mathcal{P}' - \{P_0\}$  at most one vertex of  $P$  belongs to the  $a - b$  path in  $S$ . Since  $d(a, b, S) = i$ , we have that for every  $P \in \mathcal{P}' - \{P_0\}$  exactly one vertex of  $P$  belongs to the  $a - b$  path in  $S$ . Since  $|V(S)| \geq 2i$ , there exists  $v \in V(S)$  which is adjacent to a vertex on the  $a - b$  path in  $S$ , say a vertex  $z$ . Since  $a, b \in V_1(S)$ , we have that  $a \neq z \neq b$ . There exists  $P_1 \in \mathcal{P}' - \{P_0\}$  such that  $v \in V(P_1)$ . Obviously, there exists exactly one vertex  $w \in V(P_1)$  which belongs to the  $a - b$  path in  $S$ . Without loss of generality we assume that  $d(a, z, S) \leq d(a, w, S)$ . We have that  $d(v, w, S) \leq i - 1$ . Since  $\mathcal{P}_0$  is  $(i - 1)$ -good for  $S$ , we have that  $vw \in E(P_1)$ . Obviously,  $2 \leq d(a, v, S) \leq i$  and  $d(y_a, w, S) \leq i + 1$ . Assume that  $v \in W$  (see Fig. 2).



If  $d(a, v, S) < i$ , then  $d(x_a, x_v, S) \leq i + 1$ .

If  $d(a, v, S) = i$ , then  $z = w$ , and therefore  $d(x_v, x_b, S) = 4 \leq i + 1$  and  $d(w, y_b, S) = 3$ .

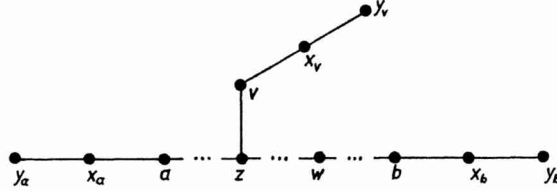


Fig. 2.

Let  $r$  and  $s$  be the end vertices of  $P_1$ . The above observation shows that there exist an  $a - b$  path  $P_0^*$  in  $T^{i+1}$  and a  $r - s$  path  $P_1^*$  in  $T^{i+1}$  such that  $V(P_0^*) \cap V(P_1^*) = \emptyset$  and

$$V(P_0^*) \cup V(P_1^*) = V(P_1) \cup V(T(a)) \cup V(T(b)) \cup V(T(r)) \cup V(T(s)).$$

If we continue for the paths in  $\mathcal{P}' - \{P_0, P_1\}$  as in Case 1, we can extend  $\mathcal{P}'$  to a  $(U_1, U_2)$ -path system, say  $\mathcal{P}^*$ , on  $T^{i+1}$  such that  $P_0^*, P_1^* \in \mathcal{P}^*$ .

If  $T$  is a tree with at least six vertices, then we denote

$$\mathcal{D}^*(T) = \bigcup_{i=3}^{\infty} \mathcal{D}_i(T).$$

**Lemma 5.** Let  $T$  be a tree with at least six vertices, and let  $(U_1, U_2) \in \mathcal{D}^*(T)$ . Assume that  $T$  is  $(U_1, U_2)$ -primitive. Then there exists a  $(U_1, U_2)$ -path system on  $T^{i+1}$ , where  $i = |U_1|$ .

*Proof.* If  $m(T, U_1, U_2) = 0$ , then the result follows immediately from Lemma 4. Let  $m(T, U_1, U_2) \geq 1$ . We shall assume that for every tree  $T'$  with at least six vertices and for every  $(U'_1, U'_2) \in \mathcal{D}^*(T')$  such that  $T'$  is  $(U'_1, U'_2)$ -primitive and that  $m(T', U'_1, U'_2) < m(T, U_1, U_2)$  there exists a  $(U'_1, U'_2)$ -path system on  $(T')^{i'+1}$ , where  $i' = |U'_1|$ .

Since  $m(T, U_1, U_2) \geq 1$ , there exists  $u \in V(T(U_1, U_2)) - V_1(T(U_1, U_2))$  with the property that  $T(u, U_1, U_2)$  is nontrivial. We denote by  $S$  the graph  $T - V(T(u, U_1, U_2) - u)$ . Obviously,  $S$  is a tree,  $(U_1, U_2) \in \mathcal{D}^*(S)$ , and  $S$  is  $(U_1, U_2)$ -primitive. Since  $m(S, U_1, U_2) = m(T, U_1, U_2) - 1$ , the induction assumption implies that there exists a  $(U_1, U_2)$ -path system, say  $\mathcal{Q}$ , on  $S^{i+1}$ . Let  $Q_0$  be the path in  $\mathcal{Q}$  with the property that  $u$  belongs to  $Q_0$ . We distinguish the following two cases:

1. There exists  $Q \in \mathcal{Q} - \{Q_0\}$  with the property that there exist distinct  $v, w \in V(Q)$  such that  $vw \in E(Q)$  and  $u$  belongs to the  $v - w$  path in  $S$ .
2. There exists no  $Q \in \mathcal{Q} - Q_0$  with the above property.

Case 1. Corollary 2 implies that there exist  $x_u, y_u \in V(T(u, U_1, U_2) - u)$  such that  $x_u \in T(u, 1)$ ,  $y_u \in T(u, 2)$ , and that there exists a hamiltonian  $x_u - y_u$  path, say  $P$ , in  $(T(u, U_1, U_2) - u)^3$ . Since  $d(v, w, S) \leq i + 1$  and  $Q \neq Q_0$  we have that  $d(v, u, S) \leq i$  and  $d(w, x_u, S) \leq i + 1$ .

If  $d(v, u, S) < i$ , then  $d(v, y_u, S) \leq i + 1$ , and we denote by  $Q'$  the path  $((Q - vw) \cup P) + vy_u + wx_u$ . If  $d(v, u, S) = i$ , then  $uw \in E(S)$ ,  $d(v, x_u, S) = i + 1$  and  $d(y_u, w, S) \leq 3 \leq i$ , and we denote by  $Q'$  the path  $((Q - vw) \cup P) + vx_u + wy_u$ .

It is clear that  $Q'$  is a path in  $T^{i+1}$ . Therefore,  $(\mathcal{Q} - \{Q\}) \cup \{Q'\}$  is a  $(U_1, U_2)$ -path system on  $T^{i+1}$ .

Case 2. We denote by  $u_1$  and  $u_2$  the end vertices of  $Q_0$  such that  $u_1 \in U_1$  and  $u_2 \in U_2$ . Divide the tree  $S$  into two nontrivial trees  $S_1$  and  $S_2$  such that

- (i)  $S$  is identical with  $S_1 \cup S_2$ ,
- (ii)  $V(S_1) \cap V(S_2) = \{u\}$ ,
- (iii)  $u \in V_1(S_1)$ , and
- (iv)  $u_1 \in V(S_1)$  and  $u_2 \in V(S_2)$ .

We denote by  $T_1$  the tree  $S_1 \cup T(u, U_1, U_2)$ . Clearly,  $T$  is identical with  $T_1 \cup S_2$ . Since there exists no path  $Q \in \mathcal{Q} - \{Q_0\}$  with the property defined in Case 1, we conclude that for every  $Q \in \mathcal{Q} - \{Q_0\}$  either  $V(Q) \subseteq V(T_1)$  or  $V(Q) \subseteq V(S_2)$ . Denote:

$$\begin{aligned} U_{11} &= U_1 \cap V(T_1), \\ U_{12} &= (U_2 \cap V(T_1)) \cup \{u\}, \\ U_{21} &= (U_1 \cap V(S_2)) \cup \{u\}, \\ U_{22} &= U_2 \cap V(S_2). \end{aligned}$$

Obviously,  $(U_{11}, U_{12}) \in \mathcal{D}(T_1)$  and  $(U_{21}, U_{22}) \in \mathcal{D}(S_2)$ . It is easy to see that  $T_1$  is  $(U_{11}, U_{12})$ -primitive,  $S_2$  is  $(U_{21}, U_{22})$ -primitive.

Since  $u \in V(T_1(U_{11}, U_{12})) \cap V(S_2(U_{21}, U_{22}))$ , we have that  $m(T_1, U_{11}, U_{12}) < m(T, U_1, U_2)$  and  $m(S_2, U_{21}, U_{22}) < m(T, U_1, U_2)$ .

Obviously,  $\max(4, |U_{11}| + 1, |U_{21}| + 1) \leq i + 1$ . Combining the induction assumption and Corollary 2, we get that there exists a  $(U_{11}, U_{12})$ -path system  $\mathcal{P}_1$  on  $(T_1)^{i+1}$  and a  $(U_{21}, U_{22})$ -path system  $\mathcal{P}_2$  on  $(S_2)^{i+1}$ . Let  $P_1 \in \mathcal{P}_1$  and  $P_2 \in \mathcal{P}_2$  be the paths with the property that  $u \in V(P_1) \cap V(P_2)$ . Since  $T$  is identical with  $T_1 \cup S_2$  and  $V(T_1) \cap V(S_2) = \{u\}$ , we have that

$$(\mathcal{P}_1 - \{P_1\}) \cup (\mathcal{P}_2 - \{P_2\}) \cup \{(P_1 \cup P_2)\}$$

is a  $(U_1, U_2)$ -path system on  $T^{i+1}$ , which completes the proof.

Now, we can state the main result of the present paper.

**Theorem 1.** Let  $i \geq 3$  and let  $G$  be a connected graph with at least  $2i$  vertices. Then  $G^{i+1}$  is  $i$ -traceable.

*Proof.* Since  $G$  is connected, it is spanned a tree  $T$ . Let  $(U_1, U_2) \in \mathcal{D}_i(T)$ . It is sufficient to prove that there exists a  $(U_1, U_2)$ -path system on  $T^{i+1}$ .

It is easy to see that there exist vertex-disjoint subtrees  $T_1, \dots, T_k$  of  $T$ , where  $k \geq 1$ , such that  $V(T) = V(T_1) \cup \dots \cup V(T_k)$  and, for every  $j = 1, \dots, k$ ,

$$(V(T_j) \cap U_1, V(T_j) \cap U_2) \in \mathcal{D}(T_j) \quad \text{and} \\ T_j \text{ is } (V(T_j) \cap U_1, V(T_j) \cap U_2)\text{-primitive}.$$

Since  $i \geq 3$ , we have that

$$\max(4, |V(T_1) \cap U_1| + 1, \dots, |V(T_k) \cap U_1| + 1) \leq i + 1.$$

Combining Corollary 2 and Lemma 5, we get that for every  $j = 1, \dots, k$  there exists a  $(V(T_j) \cap U_1, V(T_j) \cap U_2)$ -path system, say  $\mathcal{P}_j$ , on  $(T_j)^{i+1}$ . This means that  $\mathcal{P}_1 \cup \dots \cup \mathcal{P}_k$  is a  $(U_1, U_2)$ -path system on  $T^{i+1}$ . Hence the theorem follows.

**Remark 1.**  $G^{i+1}$  in Theorem 1 cannot be replaced by  $G^i$ . For example, if  $G$  is the graph in Fig. 3 and  $U_1$  and  $U_2$  are the sets of vertices denoted by 1 and 2, respectively, then there exists no  $(U_1, U_2)$ -path system on  $G^i$ .

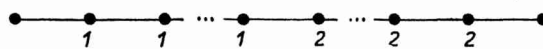


Fig. 3.

**Remark 2.** According to Corollary 2, if  $G$  is a connected graph with at least four vertices, then  $G^4$  is 2-traceable. This power cannot be decreased. For example, if  $G$  is the graph in Fig. 4 and  $U_1$  and  $U_2$  are the sets of vertices denoted by 1 and 2, respectively, then there exists no  $(U_1, U_2)$ -path system on  $G^3$ .

In the end of the present paper we shall prove two results concerning 2-traceable graphs.

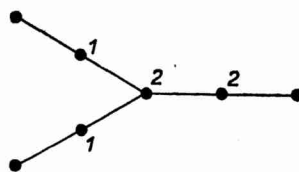


Fig. 4.

**Theorem 2.** Let  $G$  be a 2-traceable graph with at least five vertices. Then  $G$  is 3-connected.

*Proof.* On the contrary, we assume that  $G$  is not 3-connected. Since  $|V(G)| > 3$ , there exists a set  $U_1$  of two vertices of  $G$  such that  $G - U_1$  is disconnected. Let  $G'$

be a component of  $G - U_1$  with the minimum number of vertices. Since  $|V(G)| \geq 5$ , we have that  $|V(G) - U_1 - V(G')| \geq 2$ . Consider an arbitrary two-element subset  $U_2$  of  $V(G) - U_1 - V(G')$ . Let  $v \in V(G')$ . It is obvious that in  $G$  the vertex  $v$  is separated from  $U_2$  by  $U_1$ . This implies that there exists no  $(U_1, U_2)$ -path system on  $G$ , which is a contradiction. Hence the theorem follows.

**Theorem 3.** *Let  $G$  be a 2-traceable graph with at least five vertices. Then  $G$  is hamiltonian-connected.*

**Proof.** According to Theorem 2,  $G$  is 3-connected. Let  $u$  and  $v$  be distinct vertices of  $G$ . Since  $G - u - v$  is connected, there exist distinct vertices  $a$  and  $b$  of  $G - u - v$  such that  $ab \in E(G)$ . Since  $G$  is 2-traceable, there exists a  $(\{u, v\}, \{a, b\})$ -path system on  $G$ . Without loss of generality we assume that there exist a  $u - a$  path  $P_1$  and a  $v - b$  path  $P_2$  such that  $V(P_1) \cap V(P_2) = \emptyset$  and  $V(P_1) \cup V(P_2) = V(G)$ . This means that  $(P_1 \cup P_2) + ab$  is a hamiltonian  $u - v$  path in  $G$ . Hence the theorem follows.

**Remark 3.** The cycle with exactly four vertices is 2-traceable but not hamiltonian-connected.

**Acknowledgement.** The author wishes to express her gratitude to M. SEKANINA and to L. NEBESKÝ for their helpful comments during the preparation of this paper.

#### References

- [1] *F. Harary*: Graph Theory. Addison-Wesley, Reading (Mass.) 1969.
- [2] *M. Behzad* and *G. Chartrand*: Introduction to the Theory of Graphs. Allyn and Bacon, Boston 1971.
- [3] *Jean-Loup Jolivet*: Sur les puissances des graphes connexes. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 272, p. 107—109 (1971), Serie A.
- [4] *G. Chartrand* and *S. F. Kapoor*: The cube of every connected graph is 1-hamiltonian. J. Res. Nat. Bur. Stand. 73 B (1969) 47—48.
- [5] *M. Sekanina*: On an ordering of the of vertices of a connected graph. Publ. Fac. Sci. Univ. Brno 412 (1960), 137—142.
- [6] *M. Sekanina*: Private communication.
- [7] *L. Lesniak-Foster*: Some recent results in hamiltonian graphs. Journal of Graph Theory, vol. 1, 27—36 (1977).

*Author's address*: 010 88 Žilina, Marxa-Engelsa 25 (Fakulta SET, Vysoká škola dopravná).

EINE ISOPERIMETRISCHE UNGLEICHUNG FÜR GESCHLOSSENE  
KURVEN IM VIERDIMENSIONALEN RAUM

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingegangen am 5. Mai 1978)

Im vierdimensionalen euklidischen Raum  $E_4$  wird ein System von Orthogonal-koordinaten  $x_i$  zugrunde gelegt; stets  $i = 1, 2, 3, 4$ . Es bezeichne  $\mathcal{C}$  eine geschlossene rektifizierbare Kurve in  $E_4$  mit dem Bogen  $s$  und mit der Gesamtlänge  $L$ ; es sei

$$(1) \quad x_i = x_i(\tau), \quad \tau = (2\pi/L)s \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

die Parameterdarstellung von  $\mathcal{C}$ . Die Funktionen  $x_i$  sind absolut stetig und haben fast überall die (stets mit Strich bezeichneten) Ableitungen nach  $\tau$ , welche quadratisch integrierbar sind (vgl. [7], Abschn. 3).

Wir setzen

$$(2) \quad F_{ij} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x_i x'_j - x'_i x_j) d\tau, \quad (j = 1, 2, 3, 4; j \neq i);$$

wenn die totalorthogonale Projektion von  $\mathcal{C}$  auf die Koordinatenebene  $(x_i, x_j)$  eine einfache Kurve  $its$ , so  $its$   $|F_{ij}|$  der Flächeninhalt des durch diese Projektion begrenzten Bereiches.

[Nach V. HLAVATÝ ([5], Band I, Kap. I, Abschn. I) stellen die Funktionale (2) einen  $K$ -Punkt dar; wenn wir also für eine andere Kurve  $\mathcal{C}^*$  die Funktionale  $F_{ij}^*$  bilden, so ist

$$|F_{12}F_{34}^* + F_{13}F_{42}^* + F_{14}F_{23}^* + F_{34}F_{12}^* + F_{42}F_{13}^* + F_{23}F_{14}^*|$$

eine Bewegungsinvariante.]

I. J. SCHOENBERG [8] hat bewiesen, dass für eine Kurve  $\mathcal{C}$ , welche noch auf  $E_4$  konvex ist, erstens  $\frac{1}{6}|F_{12}F_{34} + F_{13}F_{42} + F_{14}F_{23}|$  das Volumen ihrer konvexen Hülle ist und zweitens die Ungleichung besteht:

$$(3) \quad L^4 - 2^7 \pi^2 (F_{12}F_{34} + F_{13}F_{42} + F_{14}F_{23}) \geq 0;$$

die Extremalkurven sind spezielle Hyperkreise.

L. BOČEK [3] hat gezeigt, dass

$$(4) \quad L^4 - 16\pi^2 \sum_{i < j} F_{ij}^2 \geq 0,$$

wo die Gleichheit nur für einen Kreis gelten kann (es handelt sich um das vierdimensionale Analogon zu einer Ungleichung in  $E_3$  aus [2], S. 77).

Wir beweisen diesen Satz:

Es seien

$$(5) \quad c_{ij} = -c_{ji}$$

beliebige reelle Zahlen, welche nicht alle Null gleich sind. Wir setzen

$$(6) \quad C = \sum_{i < j} c_{ij}^2 > 0, \quad c = c_{12}c_{34} + c_{13}c_{42} + c_{14}c_{23}.$$

Für jede Kurve  $\mathcal{C}$  gilt die Ungleichung

$$(7) \quad L^2 - 4\pi k^{-1} \sum_{i < j} c_{ij} F_{ij} \geq 0$$

mit

$$(8) \quad k = [\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}(C^2 - 4c^2)^{1/2}]^{1/2} > 0.$$

Das Gleichheitszeichen in (7) gilt dann und nur dann, wenn  $\mathcal{C}$  ein Kreis ist, dessen Parameterdarstellung – falls sein Mittelpunkt zum Nullpunkt gewählt ist – folgendermassen geschrieben werden kann:

$$(9) \quad x_i = p_i \cos \tau + q_i \sin \tau,$$

wo die Konstanten  $p_i, q_i$  folgenden Gleichungen genügen:

$$(10) \quad kq_i + \sum_{j=1}^4 c_{ij}p_j = 0, \quad -kp_i + \sum_{j=1}^4 c_{ij}q_j = 0.$$

Für die weiteren geometrischen Eigenschaften der Extremalkreise siehe Abschn. 4. Im folgenden unterscheiden wir die entgegengesetzten Fälle

$$(11) \quad c_{12} = \varepsilon c_{34}, \quad c_{13} = \varepsilon c_{42}, \quad c_{14} = \varepsilon c_{23};$$

$$(12) \quad (c_{12} - \varepsilon c_{34})^2 + (c_{13} - \varepsilon c_{42})^2 + (c_{14} - \varepsilon c_{23})^2 > 0 \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Während im Fall (12) die Ebene des Extremalkreises (9) eindeutig als Durchschnitt folgender vier dreidimensionalen Räume

$$(13) \quad \begin{aligned} & (c_{12}c - k^2c_{34})x_2 + (c_{13}c - k^2c_{42})x_3 + \\ & \qquad \qquad \qquad + (c_{14}c - k^2c_{23})x_4 = 0, \\ & (c_{21}c - k^2c_{43})x_1 \qquad \qquad \qquad + (c_{23}c - k^2c_{14})x_3 + \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + (c_{24}c - k^2c_{31})x_4 = 0, \\ & (c_{31}c - k^2c_{24})x_1 + (c_{32}c - k^2c_{41})x_2 \qquad \qquad + (c_{34}c - k^2c_{12})x_4 = 0, \\ & (c_{41}c - k^2c_{32})x_1 + (c_{42}c - k^2c_{13})x_2 + (c_{43}c - k^2c_{21})x_3 \qquad = 0 \end{aligned}$$

bestimmt ist, gibt es im Fall (11) eine zweiparametrische Familie von solchen Ebenen (siehe wieder Abschn. 4).

Nach L. Boček [3] folgt aus (4) die Ungleichung

$$(14) \quad L^2 - 4\pi C^{-1/2} \sum_{i < j} c_{ij} F_{ij} \geq 0$$

mit der Gleichheit nur für einen Kreis, dessen Ebene aber schon wieder eine spezielle Lage in Bezug auf das Koordinatensystem hat. Wegen  $k^{-1} \geq C^{-1/2}$  ist (7) schärfer als (14) ( $k^{-1} = C^{-1/2}$  nur für  $c = 0$ ).

Wir heben noch zwei Spezialfälle hervor:

a) Es sei

$$(15) \quad c_{14} = 0, \quad c_{24} = 0, \quad c_{34} = 0;$$

wegen der Ungleichung in (6) gilt (12). Dann reduziert sich die Ungleichung (7) mit  $k$  aus (8) auf

$$L^2 - 4\pi(c_{12}^2 + c_{23}^2 + c_{31}^2)^{-1/2} (c_{12}F_{12} + c_{23}F_{23} + c_{31}F_{31}) \geq 0$$

und das die Ebene des Extremalkreises bestimmende System (13) auf

$$x_4 = 0, \quad c_{32}x_1 + c_{13}x_2 + c_{21}x_3 = 0.$$

Es handelt sich also um das erwähnte Ergebnis von L. Boček [3] für  $n = 3$  oder um den Fall der identischen Kurven aus [7] (siehe (8) in [7]).

b) Es sei  $c_{12} \neq 0$ ,  $c_{13} = c_{14} = c_{23} = c_{24} = c_{34} = 0$ . Dann vereinfacht sich (7) auf  $L^2 - 4\pi|c_{12}|^{-1} c_{12}F_{12} \geq 0$  und (13) auf  $x_4 = 0$ ,  $x_3 = 0$ . Darin ist die klassische isoperimetrische Ungleichung enthalten.

Im Abschn. 1 motivieren wir die Wahl (8) der Konstante  $k$ , im Abschn. 2 beweisen wir die Ungleichung (7) und im Abschn. 3 entscheiden wir über die Gleichheitsbedingung.

1. Bekanntlich ist (vgl. [8], Abschn. 8 oder [7], Abschn. 3)

$$(1,1) \quad \int_0^{2\pi} (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2) d\tau = L^2/2\pi;$$

die durch  $k/2\pi$  multiplizierte linke Seite in (7) ist folglich in Hinsicht auf (2) gleich (mit bisher unbestimmter Konstante  $k > 0$ )

$$(1,2) \quad \int_0^{2\pi} \{k(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2) - \sum_{i < j} c_{ij}(x_i x_j' - x_i' x_j)\} d\tau.$$

Angenommen, die Funktionen  $x_i(\tau)$  seien zweiter Klasse. Die notwendigen Bedingungen für das Extremum des Funktionals (1,2) führen zu den Eulerschen Gleichun-

gen. Sie bilden in diesem Fall für  $x'_i$  das d'Alembertsche System

$$(1,3) \quad kx''_i + \sum_{j=1}^4 c_{ij}x'_j = 0$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$(1,4) \quad \lambda^4 + Ck^{-2}\lambda^2 + c^2k^{-4}$$

(vgl. [6]). Die Nullstellen sind durch

$$(1,5) \quad \lambda^2 = [-C \pm (C^2 - 4c^2)^{1/2}] : (2k^2)$$

gegeben. Hier ist nach (6)

$$(1,6) \quad C^2 - 4c^2 = (c_{12}^2 + c_{23}^2 + c_{31}^2 - c_{14}^2 - c_{24}^2 - c_{34}^2)^2 + \\ + 4(c_{31}c_{14} + c_{32}c_{24})^2 + 4(c_{12}c_{24} + c_{13}c_{34})^2 + 4(c_{23}c_{34} + c_{21}c_{14})^2$$

und man bestätigt leicht, dass

$$(1,7) \quad C^2 - 4c^2 \begin{cases} > 0 & \text{im Falle (12),} \\ = 0 & \text{im Falle (11).} \end{cases}$$

Da bekanntlich die zur einfachen Wurzel  $\lambda$  von (1,4) zugehörige Lösung von (1,3) von der Gestalt  $x_i = \gamma_i e^{\lambda \tau}$  mit  $\gamma_i = \text{konst.}$  ist und da – wegen der Geschlossenheit der Kurve  $\mathcal{C}$  und wegen der Wahl (1) des Parameters  $\tau$  – nur periodische Lösungen mit der kleinsten Periode  $2\pi$  in Betracht kommen, so ergibt sich daraus  $\lambda = \pm i$ . Nach (1,5) führt das für  $k$  entweder zu (8) oder zu  $k = [\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}(C^2 - 4c^2)^{1/2}]^{1/2}$ . Aber in diesem zweiten Fall (für genügend kleines  $c^2$ ) ist  $k^{-1}$  beliebig gross.

2. In diesem Abschn. zeigen wir, dass das Funktional (1,2) mit  $k$  aus (8) nichtnegativ ist; dadurch wird die Ungleichung (7) bewiesen.

Für jedes  $k > 0$  lässt sich (1,2) folgendermassen umformen:

$$(2,1) \quad \frac{1}{2}k \sum_{i=1}^4 \int_0^{2\pi} (x'_i + k^{-1} \sum_{j=1}^4 c_{ij}x_j)^2 d\tau + \frac{1}{2}k \sum_{i=1}^4 \int_0^{2\pi} (x_i'^2 - x_i^2) d\tau + \\ + \frac{1}{2}k \sum_{i=1}^4 \int_0^{2\pi} x_i^2 d\tau - \frac{1}{2}k^{-1} \sum_{i=1}^4 \int_0^{2\pi} (\sum_{j=1}^4 c_{ij}x_j)^2 d\tau.$$

Die erste Summe im Ausdruck (2,1) ist offenbar nichtnegativ und was es die nachfolgende Summe wieder (2,1) betrifft, so kann man die Nichtnegativität erreichen: Wir verschieben den Nullpunkt in den Schwerpunkt der Kurve  $\mathcal{C}$ ; dabei bleiben die Funktionale (1,1) und (2) unverändert und für die Mittelwerte der Funktionen (1) auf  $\langle 0, 2\pi \rangle$  gilt dann

$$(2,2) \quad \int_0^{2\pi} x_i(\tau) d\tau = 0,$$



so dass nach dem Lemma von W. WIRTINGER (siehe [1], Kap. V oder [4], Kap. VII) alle Integrale in der zweiten Zeile in (2,1) auch nichtnegativ sind.

Die zweite Zeile von (2,1) lässt sich folgenderweise schreiben:

$$(2,3) \quad \frac{1}{2}k^{-1} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^4 (k^2 - \sum_{j=1}^4 c_{ij}^2) x_i^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^4 \left( \sum_{l=1}^4 c_{il}c_{jl} \right) x_i x_j \right\} d\tau;$$

stets haben wir (5) benutzt.

Im weiteren bleiben wir bei  $k$  aus (8).

In dem zu (12) entgegengesetzten Fall (11) folgt aus (5), (6), (8), dass  $k^2 = \sum_{j=1}^4 c_{ij}^2$ ,

$\sum_{l=1}^4 c_{il}c_{jl} = 0$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4; i \neq j$ ) ist und dass die Form in den Klammern  $\{ \}$  in (2,3) identisch verschwindet.

Im Fall (12) ist nach (8) und (1,7)

$$(2,4) \quad 2k^2 - C = (C^2 - 4c^2)^{1/2} > 0$$

und die Form in den Klammern  $\{ \}$  in (2,3) ist gleich der durch die Konstante  $k^2(2k^2 - C) > 0$  dividierten Form

$$(2,5) \quad \begin{aligned} & [(c_{12}c - k^2c_{34})x_2 + (c_{13}c - k^2c_{42})x_3 + \\ & \quad \quad \quad + (c_{14}c - k^2c_{23})x_4]^2 + \\ & + [(c_{21}c - k^2c_{43})x_1 \quad \quad \quad + (c_{23}c - k^2c_{14})x_3 + \\ & \quad \quad \quad + (c_{24}c - k^2c_{31})x_4]^2 + \\ & + [(c_{31}c - k^2c_{24})x_1 + (c_{32}c - k^2c_{41})x_2 \quad \quad \quad + (c_{34}c - k^2c_{12})x_4]^2 + \\ & + [(c_{41}c - k^2c_{32})x_1 + (c_{42}c - k^2c_{13})x_2 + (c_{43}c - k^2c_{21})x_3]^2. \end{aligned}$$

Man verifiziert das nach einfachen Umformungen auf Grund von (5), (6) und (2,4).

Somit haben wir die Nichtnegativität des Ausdruckes (2,1) oder (1,2) – und folglich auch die Ungleichung (7) – bewiesen.

3. Um jetzt über die Gleichheitsbedingung in (7) zu entscheiden, müssen wir bestimmen, wann die Summen in den zwei Zeilen von (2,1), deren Nichtnegativität wir im Abschn. 2 schrittweise bewiesen haben, verschwinden.

Für die erste Summe in (2,1) ist das genau dann der Fall, wenn

$$(3,1) \quad x_i' + k^{-1} \sum_{j=1}^4 c_{ij}x_j = 0.$$

Die nachfolgende Summe wieder in (2,1) verschwindet nach dem Lemma von W. Wirtinger unter der Bedingung (2,2) dann und nur dann, wenn

$$(3,2) \quad x_i(\tau) = p_i \cos \tau + q_i \sin \tau \quad (p_i, q_i = \text{konst.}).$$

Die zweite Zeile von (2,1) verschwindet im Fall (11) identisch und im Fall (12) nach (2,5) dann und nur dann, wenn die Gleichungen (13) gelten. Man bestätigt unter Zuhilfenahme von (5), (6) und (8) oder (2,4), dass im Falle (12) der Rang der Matrix des Gleichungssystems (13) gleich 2 ist.

Die Konstanten  $p_i, q_i$  in (3,2) müssen so gewählt werden, dass (3,2) eine Lösung von (3,1) ist. Daraus ergeben sich die Bedingungen

$$(3,3) \quad kq_i + \sum_{j=1}^4 c_{ij}p_j = 0, \quad -kp_i + \sum_{j=1}^4 c_{ij}q_j = 0.$$

Die Elimination von  $q_j$  liefert

$$(3,4) \quad k^2p_i + \sum_{j=1}^4 \sum_{l=1}^4 c_{ij}c_{jl}p_l = 0$$

oder in ausführlicher Schreibweise

$$\begin{aligned} & p_1(k^2 - c_{12}^2 - c_{13}^2 - c_{14}^2) - p_2(c_{13}c_{23} + c_{14}c_{24}) - \\ & - p_3(c_{12}c_{32} + c_{14}c_{34}) - p_4(c_{12}c_{42} + c_{13}c_{43}) = 0, \\ & -p_1(c_{23}c_{13} + c_{24}c_{14}) + p_2(k^2 - c_{21}^2 - c_{23}^2 - c_{24}^2) - \\ & - p_3(c_{21}c_{31} + c_{24}c_{34}) - p_4(c_{21}c_{41} + c_{23}c_{43}) = 0, \\ & -p_1(c_{32}c_{12} + c_{34}c_{14}) - p_2(c_{31}c_{21} + c_{34}c_{24}) + \\ & + p_3(k^2 - c_{31}^2 - c_{32}^2 - c_{34}^2) - p_4(c_{31}c_{41} + c_{32}c_{42}) = 0, \\ & -p_1(c_{42}c_{12} + c_{43}c_{13}) - p_2(c_{41}c_{21} + c_{43}c_{23}) - \\ & - p_3(c_{41}c_{31} + c_{42}c_{32}) + p_4(k^2 - c_{41}^2 - c_{42}^2 - c_{43}^2) = 0. \end{aligned}$$

Von jetzt ab unterscheiden wir die entgegengesetzten Fälle (11) und (12).

Im Fall (11) *verschwindet das System (3,4) identisch*, wie leicht aus (5), (6) und (8) folgt, und die Systeme (3,3) sind äquivalent. Folglich gilt in (7) das Gleichheitszeichen nur für (9)  $\equiv$  (3,2) mit (10)  $\equiv$  (3,3).

Im Fall (12) zeigen wir zuerst, dass der Rang der Matrix des Systems (3,4) mindestens 2 ist, dass also die Lösung von (3,4) höchstens von 2 Parametern  $\alpha, \beta$  abhängt. Es bezeichne  $\Delta_{ij}$  ( $i < j$ ) die aus den  $i$ -ten und  $j$ -ten Reihen der Matrix von (3,4) gebildete Hauptdeterminante. Unter Verwendung von (5), (6) und (2,4) erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= (c_{34}^2 - c_{12}^2)k^2 + c_{12}^2C - 2c_{12}c_{34}c, \\ \Delta_{34} &= (c_{12}^2 - c_{34}^2)k^2 + c_{34}^2C - 2c_{34}c_{12}c \end{aligned}$$

und ähnliche Ausdrücke für  $\Delta_{13}, \Delta_{24}$  und  $\Delta_{14}, \Delta_{23}$ . Angenommen, alle  $\Delta_{ij}$  verschwinden. Die Elimination von  $c$  aus  $\Delta_{12}, \Delta_{34}$  bzw. aus  $\Delta_{13}, \Delta_{24}$  bzw. aus  $\Delta_{14}, \Delta_{23}$  liefert

$$\begin{aligned} (c_{34}^2 - c_{12}^2)(2k^2 - C) &= 0, \quad (c_{42}^2 - c_{13}^2)(2k^2 - C) = 0, \\ (c_{23}^2 - c_{14}^2)(2k^2 - C) &= 0, \end{aligned}$$

was aber in Hinsicht auf (2,4) und (12) ein Widerspruch ist.

Zweitens zeigen wir: Ist

$$(3,5) \quad k^2 \neq c_{12}^2 + c_{23}^2 + c_{31}^2,$$

so ist die allgemeine Lösung von (3,4) durch

$$(3,6) \quad \begin{aligned} p_1 &= \alpha(c_{23}c - k^2c_{14}) + \beta k(c_{12}c_{24} + c_{13}c_{34}), \\ p_2 &= \alpha(c_{31}c - k^2c_{24}) + \beta k(c_{21}c_{14} + c_{23}c_{34}), \\ p_3 &= \alpha(c_{12}c - k^2c_{34}) + \beta k(c_{31}c_{14} + c_{32}c_{24}), \\ p_4 &= \beta k(-k^2 + c_{12}^2 + c_{23}^2 + c_{31}^2) \end{aligned}$$

gegeben. Ist dagegen

$$(3,7) \quad k^2 = c_{12}^2 + c_{23}^2 + c_{31}^2,$$

so lautet die allgemeine Lösung von (3,4) bei  $c_{23} \neq 0$  folgendermassen:

$$(3,8) \quad \begin{aligned} p_1 &= \alpha k c_{31} + \beta k c_{12}, \\ p_2 &= -\alpha k c_{23}, \\ p_3 &= -\beta k c_{23}, \\ p_4 &= 0. \end{aligned}$$

Es genügt zu beweisen, dass (3,6) und (3,8) für  $\alpha = 1, \beta = 0$  oder  $\alpha = 0, \beta = 1$  linear unabhängige Lösungen von (3,4) sind.

Wir beginnen mit (3,5).

Eine längere Rechnung, welche sich auf (5), (6) und (2,4) stützt, führt zur Feststellung, dass (3,6) für  $\alpha = 1, \beta = 0$  oder  $\alpha = 0, \beta = 1$  tatsächlich die Lösungen von (3,4) sind. Angenommen, sie seien abhängig. Wegen (3,5) wäre dann  $c_{14} = c_{23}ck^{-2}$ ,  $c_{24} = c_{31}ck^{-2}$ ,  $c_{34} = c_{12}ck^{-2}$ , also  $k^2c = c(c_{12}^2 + c_{23}^2 + c_{31}^2)$  nach (6). Für  $c \neq 0$  ist das im Widerspruch mit (3,5). Für  $c = 0$  wäre  $c_{14} = c_{24} = c_{34} = 0$  und (8) gäbe den Widerspruch mit (3,5).

Gilt dagegen (3,7), so folgt daraus unter Zuhilfenahme von (8) und (6) nach einfachen Umformungen

$$(3,9) \quad (c_{12}c_{24} + c_{13}c_{34})^2 + (c_{21}c_{14} + c_{23}c_{34})^2 + (c_{31}c_{14} + c_{32}c_{24})^2 = 0.$$

Aus der Ungleichung in (8), aus (3,9), (6) und (3,7) ergibt sich

$$(3,10) \quad c_{14} = c_{23}ck^{-2}, \quad c_{24} = c_{31}ck^{-2}, \quad c_{34} = c_{12}ck^{-2}; \quad ck^{-2} \neq \pm 1,$$

weil wir den Fall (12) betrachten. Das System (3,4) reduziert sich dann auf

$$p_1c_{23} + p_2c_{31} + p_3c_{12} = 0, \quad p_4 = 0.$$

Die zu (3,6) oder (3,8) zugehörigen Konstanten  $q_i$  ergeben sich aus (3,3):

$$(3,6^*) \quad \begin{aligned} q_1 &= \alpha k(c_{12}c_{24} + c_{13}c_{34}) - \beta(c_{23}c - k^2c_{14}), \\ q_2 &= \alpha k(c_{21}c_{14} + c_{23}c_{34}) - \beta(c_{31}c - k^2c_{24}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_3 &= \alpha k(c_{31}c_{14} + c_{32}c_{24}) - \beta(c_{12}c - k^2c_{34}), \\
q_4 &= \alpha k(-k^2 + c_{12}^2 + c_{23}^2 + c_{31}^2); \\
(3,8^*) \quad q_1 &= \alpha c_{12}c_{23} - \beta c_{23}c_{31}, \\
q_2 &= \alpha c_{12}c_{31} + \beta(c_{12}^2 + c_{23}^2), \\
q_3 &= -\alpha(c_{23}^2 + c_{31}^2) - \beta c_{12}c_{31}, \\
q_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Auf Grund von (5), (6) und (2,4) verifizieren wir, dass  $x_i$  aus (3,2) mit  $p_i$  und  $q_i$  aus (3,6) und (3,6\*) oder (3,8) und (3,8\*) auch die Gleichungen (13) befriedigen; bei (3,8) und (3,8\*), d. h. für (3,7), benutzt man auch (3,10) (vgl. Abschn. 4, Fall (12) mit (3,7)).

4. Es bleibt noch, den geometrischen Sinn der obigen Lösungen zu erklären. Wir bezeichnen mit  $\mathbf{y}$  den im Nullpunkt gebundenen Vektor  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ .

Im Fall (11) ist nach (3,3), (5), (6) und (8)

$$(4,1) \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0.$$

Folglich ist (3,2)  $\equiv$  (9) für  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} > 0$  die Parameterdarstellung eines Kreises in der durch  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$  aufgespannten Ebene. Diese Ebene hängt von zwei Parametern ab.

Im Fall (12) mit (3,5) folgt aus (3,6) und (3,6\*) in Hinsicht auf (5), (6) und (2,4), dass wieder (4,1) gilt. Diesmal ist die Ebene des Extremalkreises als Durchschnitt der vier Räume (13) eindeutig bestimmt.

Im Fall (12) mit (3,7) gilt ebenso (4,1). Nun reduziert sich nach (3,10) das die Ebene des Extremalkreises bestimmende System (13) auf  $x_1c_{23} + x_2c_{31} + x_3c_{12} = 0$ ,  $x_4 = 0$  (vgl. dazu die Ungleichung aus dem Absatz a) in der Einleitung).

Das 6-Tupel  $\mathbf{C} = (c_{12}, c_{23}, c_{31}; c_{34}, c_{14}, c_{24})$  ist ein Bivektor dann und nur dann, wenn  $c$  aus (6) verschwindet, d. h. wenn  $\mathbf{C}$  der Plücker'schen Relation genügt. Ist das der Fall und setzen wir  $\mathbf{c}_i = (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4})$  ( $c_{ii} = 0$ ), so ist  $\mathbf{c}_i \wedge \mathbf{c}_j = c_{ij}\mathbf{C}$ . Das 6-Tupel

$$\mathbf{C}^* = (c_{12}^* = c_{34}, c_{23}^* = c_{14}, c_{31}^* = c_{24}; c_{34}^* = c_{12}, c_{14}^* = c_{23}, c_{24}^* = c_{31})$$

bildet einen Bivektor unter derselben Bedingung  $c = 0$ . Sind  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{C}^*$  die Bivektoren, so sind sie orthogonal in dem Sinne, dass jeder der Vektoren  $\mathbf{c}_i$  zu jedem der Vektoren  $\mathbf{c}_i^*$  orthogonal ist.

Dagegen das 6-Tupel

$$\begin{aligned}
(4,2) \quad c\mathbf{C} - k^2\mathbf{C}^* &= (cc_{12} - k^2c_{34}, cc_{23} - k^2c_{14}, cc_{31} - k^2c_{24}; \\
&cc_{34} - k^2c_{12}, cc_{14} - k^2c_{23}, cc_{24} - k^2c_{31})
\end{aligned}$$

ist immer ein Bivektor, da nach (5), (6) und (2,4) die Plücker'sche Relation erfüllt ist.

Der durch die  $i$ -te Gleichung (13) bestimmte dreidimensionale Raum ist zum Vektor  $c c_i - k^2 c_i^*$  orthogonal. Folglich können wir sagen:

*Im Fall (12) ist die Ebene des Extremalkreises zum Bivektor (4,2) orthogonal.*

Das ist in Übereinstimmung mit der von L. Boček [3] hergeleiteten Gleichheitsbedingung für den Spezialfall (14) der Ungleichung (7) für  $c = 0$ , wann der Bivektor (4,2) zum Bivektor  $C^*$  proportionell – also zum Bivektor  $C$  orthogonal ist; folglich ist die Ebene des Extremalkreises zum Bivektor  $C$  parallel (d. h. die Bivektoren  $C$  und  $p \wedge q$  sind proportionell; vgl. [3], Satz 2).

#### Literaturverzeichnis

- [1] E. F. Beckenbach - R. Bellman: Inequalities. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1961; 1965.
- [2] W. Blaschke - K. Leichtweiss: Elementare Differentialgeometrie. 5. Aufl. Berlin—Heidelberg—New York 1973.
- [3] L. Boček: Isoperimetrische Ungleichungen für räumliche Kurven und Polygone. Čas. pěst. mat. 104 (1979), 86—92.
- [4] G. H. Hardy - J. E. Littlewood - G. Polya: Inequalities. Cambridge 1934; 2. Aufl. 1952.
- [5] V. Hlavatý: Diferenciální přímková geometrie. Praha 1941 (Differentielle Liniengeometrie, Groningen—Batavia 1945).
- [6] E. Kamke: Differentialgleichungen. Teil I: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 5. Aufl. Leipzig 1964.
- [7] Z. Nádeník: Eine isoperimetrische Ungleichung für die Paareder Raumkurven. Im Druck in Čas. pěst. mat. 105 (1980).
- [8] I. J. Schoenberg: An isoperimetric inequality for closed curves convex in even-dimensional euclidean spaces. Acta Math. 91 (1954), 143—164.

*Anschrift des Verfassers:* 166 29 Praha 6 - Dejvice, Thákurova 7 (Stavební fakulta ČVUT).

CONSTRUCTING THE MINIMAL DIFFERENTIAL RELATION  
WITH PRESCRIBED SOLUTIONS

Jiří JARNÍK, Praha

(Received May 16, 1978)

Let  $R^n$  be the  $n$ -dimensional Euclidean space,  $\mathcal{K}_n$  the system of its nonempty compact convex subsets,  $\mathcal{K}_n^0 = \mathcal{K}_n \cup \{\emptyset\}$ .

Let us denote by  $B(x, r)$ ,  $\bar{B}(x, r)$  respectively the open and the closed ball in  $R^n$  with a centre  $x$  and a radius  $r$ .

Given  $M \subset R^n$ , then  $\Omega(M, \varepsilon)$  is the  $\varepsilon$ -neighbourhood of the set  $M$ ,  $\bar{\Omega}(M, \varepsilon)$  the closure of the neighbourhood. The symbol  $\overline{\text{conv}} M$  stands for the closed convex hull of a set  $M \subset R^n$ ,  $m(A)$  is the (one-dimensional) Lebesgue measure of a set  $A \subset R$ . If  $J$  is an interval,  $M \subset R^n$ , then the upper semicontinuity of a mapping  $F : J \times M \rightarrow \mathcal{K}_n$  or  $F : J \times M \rightarrow \mathcal{K}_n^0$  is defined in the usual way.

Our aim is to prove the following theorem.

**Theorem.** Let  $\alpha < \beta$ . Let  $\Xi$  denote a set of functions  $x : J_x \rightarrow R^n$  with the following properties:

- (i) for each  $x \in \Xi$ ,  $J_x$  is a closed subinterval of  $J = [\alpha, \beta]$ ;
- (ii)  $x$  is absolutely continuous;
- (iii) there exists a function  $\xi : [\alpha, \beta] \rightarrow R^+ = [0, +\infty)$  with  $\int_\alpha^\beta \xi(t) dt \leq 1$  such that  $|\dot{x}(t)| \leq \xi(t)$  holds for almost all  $t \in J_x$ ;
- (iv) to each  $x \in \Xi$  there is  $\tau_x \in J_x$  such that  $|x(\tau_x)| \leq 1$ .

Then there exists a mapping  $Q : H \rightarrow \mathcal{K}_n^0$ , where  $H = [\alpha, \beta] \times \bar{B}(0, 2)$ , such that  $Q(t, \cdot)$  is upper semicontinuous for almost all  $t \in [\alpha, \beta]$ , each  $x \in \Xi$  is a solution of the relation

$$(1) \quad \dot{x} \in Q(t, x)$$

and  $Q$  is minimal in the following sense: if  $S : H \rightarrow \mathcal{K}_n^0$ ,  $S(t, \cdot)$  is upper semicontinuous for almost all  $t \in [\alpha, \beta]$  and each  $x \in \Xi$  is a solution (on  $J_x$ ) of the relation

$$\dot{x} \in S(t, x),$$

then

$$Q(t, x) \subset S(t, x)$$

for almost all  $t \in [\alpha, \beta]$  and all  $x \in \bar{B}(0, 2)$ .

**Remarks.** 1. Let us notice that the minimality property of  $Q$  guarantees its uniqueness.

2. In addition to the upper semicontinuity of  $Q$ , it will be clear from the proof that  $Q(t, x) \subset \bar{B}(0, \xi(t))$  (cf. condition (iii) of Theorem). Hence  $Q$  satisfies assumptions for the existence of solutions of (1).

3. According to [1, Definition 1.4], a mapping  $F : H \rightarrow \mathcal{X}_n^0$  belongs to the class  $\mathcal{SD}^*(H \rightarrow \mathcal{X}_n^0)$  if it satisfies the condition: to every  $\varepsilon > 0$  there is a measurable set  $A_\varepsilon \subset R$  such that  $m(R - A_\varepsilon) < \varepsilon$  and the function  $F|_{H \cap (A_\varepsilon \times R^n)}$  is upper semicontinuous; mappings from  $\mathcal{SD}^*(H \rightarrow \mathcal{X}_n^0)$  may be called Scorza-Dragonian mappings as Scorza-Dragoni introduced the corresponding class of functions  $f : H \rightarrow R$ .

The main result [1, Theorem 1.5] applied to the mapping  $Q : H \rightarrow \mathcal{X}_n^0$  with the properties specified in Theorem yields that there exists a Scorza-Dragonian mapping  $Q_0 : H \rightarrow \mathcal{X}_n^0$  which fulfils  $Q_0(t, x) \subset Q(t, x)$  for almost all  $t \in [\alpha, \beta]$  and all  $x \in \bar{B}(0, 2)$ , and each  $u \in \mathcal{E}$  is a solution of the relation

$$\dot{x} \in Q_0(t, x).$$

Hence necessarily  $Q \equiv Q_0$ , i.e.  $Q$  is Scorza-Dragonian.

**Proof of Theorem.** If  $x, y$  are two functions satisfying conditions (i)–(iv), let us introduce the distance  $\varrho(x, y)$  in the following way:

Denote by  $J_x = [a_x, b_x]$ ,  $J_y = [a_y, b_y]$  the definition intervals of  $x, y$ , respectively, and set

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{for } t \in J_x, \\ x(a_x) & \text{for } \alpha \leq t < a_x, \\ x(b_x) & \text{for } b_x < t \leq \beta; \end{cases}$$

then  $\bar{x} : J \rightarrow R^n$ . Introducing  $\bar{y} : J \rightarrow R^n$  analogously, we define

$$\varrho(x, y) = \max_{t \in J} |\bar{x}(t) - \bar{y}(t)| + |a_x - a_y| + |b_x - b_y|.$$

It is easily verified that this formula defines a metric on the set of functions satisfying (i)–(iv). We shall show that the set  $\mathcal{E}$  has an at most countable dense (with respect to  $\varrho$ ) subset. Indeed, set

$$\Gamma = \{x : J \rightarrow R^n \mid x \text{ satisfies (ii), (iii), (iv)}\}.$$

The set  $\mathcal{E}$  with the above defined metric  $\varrho$  is naturally imbedded into the Cartesian product  $\Gamma \times J \times J$ . As  $\Gamma$  is separable in virtue of (ii)–(iv), we conclude that  $\mathcal{E}$  is separable as well.

Consequently, there is an at most countable dense subset of  $\mathcal{E}$ , say

$$V = \{v_1, v_2, \dots\} \subset \mathcal{E}.$$

Let us denote

$$A_i = \{t \in J_{v_i} \mid \dot{v}_i(t) \text{ does not exist}\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$A = J - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Then  $m(A) = \beta - \alpha$ .

Let us define functions  $Q_i : [\alpha, \beta] \times \bar{B}(0, 2) \rightarrow \mathcal{X}_n^0$ ,  $i = 1, 2, \dots$  by

$$(2) \quad Q_i(t, x) = \begin{cases} \{0\} & \text{for } t \in [\alpha, \beta] - A \\ \overline{\text{conv}} \{\dot{v}_p(t) \mid v_p(t) \in \bar{B}(x, i^{-1})\} & \text{for } t \in A \end{cases}$$

and put

$$Q(t, x) = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i(t, x).$$

We shall prove that the mapping  $Q$  has the properties from Theorem. First, let us introduce an auxiliary result.

**Lemma.** Let  $x_j : [\alpha, \beta] \rightarrow R^n$  satisfy the assumptions (ii), (iii) of Theorem (with  $x$  replaced by  $x_j$ ). Let there exist  $x : [\alpha, \beta] \rightarrow R^n$ ,

$$x(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j(t)$$

for all  $t \in [\alpha, \beta]$ .

Then

$$\dot{x}(t) \in \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{\text{conv}} \{\dot{x}_j(t), \dot{x}_{j+1}(t), \dots\}$$

for almost all  $t \in [\alpha, \beta]$ .

For this lemma, see [2, p. 395, Theorem D 18.3.10] or [3, Lemma 2].

Now we shall prove that each  $u \in \mathcal{E}$  satisfies the relation

$$(3) \quad \dot{u}(t) \in Q(t, u(t))$$

for almost all  $t \in J_u$ .

Indeed, since  $V$  is a set dense in  $\mathcal{E}$ , there exists a sequence  $w_j = v_{k_j} \in V$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , such that

$$(4) \quad u(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} w_j(t).$$

According to Lemma there is a set  $A \subset [\alpha, \beta]$ ,  $m(A) = \beta - \alpha$ , such that

$$\dot{u}(t) \in \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{\text{conv}} \{\dot{w}_j(t), \dot{w}_{j+1}(t), \dots\}$$

for all  $t \in A \cap J_u$ .

Given  $t \in A \cap J_u$ , there exists for every positive integer  $i$  a positive integer  $j$  such that

$$\overline{\text{conv}} \{\dot{w}_j(t), \dot{w}_{j+1}(t), \dots\} \subset Q_i(t, u(t)).$$



(To this aim it is sufficient to choose  $j$  large enough to satisfy  $|w_q(t) - u(t)| \leq i^{-1}$  for all  $q \geq j$ .)

Hence

$$\dot{u}(t) \in Q_i(t, u(t)), \quad i = 1, 2, \dots$$

for almost all  $t$  which implies (3) immediately.

Further, we shall prove that the mapping  $Q(t, \cdot)$  is upper semicontinuous for almost all  $t \in [\alpha, \beta]$ .

Let us first mention an elementary assertion which is an immediate consequence of the compactness of the sets  $Q_i(t, x)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . For every  $\varepsilon > 0$  there is a positive integer  $i(\varepsilon)$  such that

$$(5) \quad Q_i(t, x) \subset \Omega(Q(t, x), \varepsilon)$$

for all  $i \geq i(\varepsilon)$ . Indeed, if this were not the case and if  $Q(t, x) \neq \emptyset$  then we could choose  $\eta > 0$  and a sequence  $z_i \in Q_i(t, x)$ ,  $|z_i - y| \geq \eta > 0$  for  $y \in Q(t, x)$ . However, passing to a convergent subsequence if necessary we obtain  $z_0 \in Q(t, x)$  for  $z_0 = \lim z_i$ , a contradiction. On the other hand, if  $Q(t, x) = \emptyset$  then  $Q_i(t, x) = \emptyset$  for  $i$  sufficiently large and (5) is obvious.

Now let  $(t, x_0) \in H$  and  $\varepsilon > 0$ . Find  $i(\varepsilon)$  so that (5) holds for  $i \geq i(\varepsilon)$  and suppose  $|x - x_0| < (2i(\varepsilon))^{-1}$ ,  $z \in Q(t, x)$ . Then also  $z \in Q_{2i(\varepsilon)}(t, x)$ , i.e. for every  $\eta > 0$  there exists a convex combination

$$\sum_{j=1}^p \beta_j \dot{v}_j(t), \quad \sum_{j=1}^p \beta_j = 1, \quad \beta_j > 0$$

with  $v_j \in V$  so that

$$|z - \sum_{j=1}^p \beta_j \dot{v}_j(t)| < \eta$$

and simultaneously

$$|x - \sum_{j=1}^p \beta_j v_j(t)| \leq \frac{1}{2i(\varepsilon)},$$

hence

$$|x_0 - \sum_{j=1}^p \beta_j v_j(t)| < \frac{1}{i(\varepsilon)}.$$

This means  $z \in Q_{i(\varepsilon)}(t, x_0)$ . Now we conclude from (5) that

$$Q(t, x) \subset Q_{2i(\varepsilon)}(t, x) \subset Q_{i(\varepsilon)}(t, x_0) \subset \Omega(Q(t, x), \varepsilon)$$

provided  $|x - x_0| < \delta = (2i(\varepsilon))^{-1}$  which proves the upper semicontinuity of the map  $Q$ .

It remains to prove that  $Q$  is minimal in the sense mentioned in the theorem. Let us suppose that  $S$  has the properties from the theorem, i.e.  $S : H \rightarrow \mathcal{K}_n^0$ ,  $S(t, \cdot)$  is upper semicontinuous for almost all  $t \in [\alpha, \beta]$  and each  $u \in \Xi$  is a solution of the relation

$$(6) \quad \dot{x} = S(t, x).$$

Let  $\varepsilon > 0$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ . Then there exists a positive integer  $i$  with the following property: if  $y \in B(x, i^{-1})$  then

$$(7) \quad S(t, y) \subset \Omega(S(t, x), \varepsilon).$$

On the other hand, as the set  $V$  is at most countable and all  $v_j \in V$  are solutions of (6), there exists a set  $D \subset [\alpha, \beta]$  with  $m(D) = \beta - \alpha$  such that

$$(8) \quad \dot{v}_j(t) \in S(t, v_j(t)) \quad \text{for } t \in D \cap J_{v_j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Let  $x \in \bar{B}(0, 1)$ ,  $t \in D \cap A$ . Then we have in virtue of the definition of  $Q_i$  (see (2))

$$(9) \quad Q_i(t, x) = \overline{\text{conv}} \{ \dot{v}_p(t) \mid v_p(t) \in \bar{B}(x, i^{-1}) \} \subset \overline{\text{conv}}_p \cup S(t, v_p(t))$$

where the union is taken over all  $p$  such that

$$v_p(t) \in \bar{B}(x, i^{-1}).$$

Consequently, (7) and (9) together imply

$$Q(t, x) = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i(t, x) \subset \bar{\Omega}(S(t, x), \varepsilon).$$

The number  $\varepsilon > 0$  has been arbitrary, hence the last inclusion holds for all  $\varepsilon > 0$ . This implies immediately  $Q(t, x) \subset S(t, x)$  for all  $t \in D \cap A$ , i.e. for almost all  $t \in [\alpha, \beta]$  which completes the proof of the theorem.

#### References

- [1] Jarník, J. and Kurzweil, J.: On conditions on right hand sides of differential relations. Časopis pěst. mat. 102 (1977), 334—349.
- [2] Kurzweil, J.: Ordinary differential equations. SNTL - Publishing House of Technical Literature, Praha 1978 (Czech).
- [3] Krbeč, P. and Kurzweil, J.: Kneser's theorem for multivalued differential delay equations. Časopis pěst. mat. 104 (1979), 1—8.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV) Czechoslovakia.

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČLÁNKU  
V CIZÍM JAZYKU

ZDENĚK DOSTÁL, Ostrava:  $l_\infty$ -norm of iterates and the spectral radius of matrices. ( $l_\infty$ -norma iterací a spektrální poloměr matic.)

V práci je odvozen rekurentní vzorec pro  $\max \{|A^k|_\infty : |A|_\infty \leq 1, |A|_\delta \leq r, A \in C^{nn}$ , kde  $r = 2^{1/n} - 1$  a  $k \geq n$ . Dále je explicitně vyčíslena matice, která maxima dosahuje.

OTAKAR JAROCH, Praha: *Integral representation of orthogonal exponential polynomials*. (Integrální vyjádření ortogonálních exponenciálních mnohočlenů.)

Ortogonální exponenciální mnohočleny  $oep_n(t)$  jsou výsledkem ortogonalizace soustavy exponenciálních funkcí v  $L_2(0, +\infty)$  a mají aplikace v některých technických a přírodních vědách. V článku se dokazují dvě integrální vyjádření, která odpovídají integrálu Schlöfliho a Laplaceovu z teorie Legendreových mnohočlenů.

KAREL SVOBODA, Brno: *Characterizations of the sphere in  $E^4$  by means of the pseudoparallel mean curvature vector field*. (Charakterizace kulové plochy v  $E^4$  pomocí pseudoparalelnosti vektorového pole střední křivosti.)

V článku je zaveden pojem pseudoparalelnosti vektorového pole  $\xi$  střední křivosti a za použití této vlastnosti pole  $\xi$  je dokázána 4-dimensionální verze klasické  $H$ -věty a jisté její zobecnění.

JARMILA NOVOTNÁ, Praha: *Variations of discrete analogues of Wirtinger's inequality*. (Odměny diskretních analogií Wirtingerovy nerovnosti.)

Článek je věnován diskretním analogiím Wirtingerovy nerovnosti. Tři z uvedených nerovností byly již dříve v literatuře známy. V článku je uveden jednoduchý postup důkazu hlavní věty založený na použití reálných trigonometrických mnohočlenů, který umožňuje dokázat i její zostření. Ze základních nerovností jsou odvozeny další, příp. také se zostřením. V závěru je ukázáno jedno použití diskretních nerovností v geometrii.

ALOIS KLÍČ, Praha: *Some remarks on the Nevanlinna theory of holomorphic mappings of Riemann surfaces*. (Několik poznámek k Nevanlinnově teorii holomorfních zobrazení Riemannových ploch.)

V článku jsou studovány vlastnosti transcendentních holomorfních zobrazení otevřených Riemannových ploch do kompaktních Riemannových ploch.

ELENA WISZTOVÁ, Žilina: *Paths in powers of graphs*. (Cesty v mocninách grafů.)

V článku je studovaná istá modifikácia hamiltonovskej súvislosti pre vyššie mocniny grafů. Je zavedený pojem  $i$ -priechodného grafu a dokázané, že ak  $G$  je súvislý graf s aspoň  $2i$  vrcholmi, kde  $i \geq 3$ , potom  $G^{i+1}$  je  $i$ -priechodný.

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha: *Eine isoperimetrische Ungleichung für geschlossene Kurven im vierdimensionalen Raum*. (Izoperimetrická nerovnost pro uzavřené křivky ve čtyřdimensionálním prostoru.)

Pro délku křivky a pro plošné obsahy jejich projekcí na 6 souřadnicových rovin ortogonálního systému platí nerovnost s mnoha speciálními případy.

Jiří JARNÍK, Praha: *Constructing the minimal differential relation with prescribed solutions.*  
(Konstrukce minimální diferenciální relace s předepsanými řešeními.)

Nechť  $\mathcal{E}$  je množina absolutně spojitých a lokálně omezených funkcí. Autor dokazuje, že existuje takové zobrazení  $Q$  z  $R^{n+1}$  do množiny kompaktních konvexních množin v  $R^n$ , že každá funkce  $u \in \mathcal{E}$  je řešením diferenciální relace  $\dot{x} \in Q(T, x)$  a přitom  $Q$  je minimální v tom smyslu, že má-li  $S$  obdobné vlastnosti, je  $Q(t, x) \subset S(t, x)$  pro skoro všechna  $t$  a všechna  $x$ .

RECENSE

*John Wermer: BANACH ALGEBRAS AND SEVERAL COMPLEX VARIABLES.* Graduate Texts in Mathematics 35. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1976. Stran ix + 161. Cena DM 36,20.

Během posledního čtvrtstoletí byly objeveny hluboké souvislosti mezi teorií analytických funkcí jedné i více proměnných a teorií komutativních Banachových algeber. Tak například G. E. Šilov užil silných prostředků teorie funkcí k řešení takových algebraických otázek jako je otázka existence netriviálních idempotentů v Banachově algebře. Tyto problémy se dodnes nepodařilo rozřešit jinou cestou. Na druhé straně pojmy vznikající z teorie Banachových algeber (prostor maximálních ideálů, Šilovova hranice, Gleasonovy části aj.) vedly k novým otázkám a novým metodám v teorii funkcí.

Recenzovaná kniha je, jak sám její název dobře vystihuje, věnována této oblasti vztahů mezi analýzou a algebrou. U čtenáře nepředpokládá prakticky žádné znalosti z teorie analytických funkcí více proměnných a potřebný aparát rozvíjí soběstačným způsobem v míře nutné pro účely této knihy. V této části kniha sleduje výklad R. Gunninga a H. Rossiho resp. L. Hörmandera, jejichž knihy o teorii komplexních funkcí více proměnných jsou u nás známy též z ruského překladu. Z aplikací v teorii Banachových algeber, ke kterým Wermerova kniha směřuje, jmenujme operační kalkulus více proměnných, Šilovovu větu o existenci idempotentů, Rossiho lokální princip maxima, dále autorovu větu o maximalitě algebry analytických funkcí na jednotkovém kruhu v algebře všech spojitých funkcí a Rudinovu charakterizaci algebry analytických funkcí (obrácení principu maxima). Zejména na posledním příkladě je vidět, jak přirozené je uvažovat *algebru* jistých objektů, nikoli jen objekt sám. V těchto partiích se kniha vhodně doplňuje s monografiemi A. Browdera, T. W. Gamelina a E. I. Stouta věnovanými teorii uniformních algeber. V odlišnosti od nich je další část Wermerovy knihy zaměřena hlavně na otázky teorie uniformních aproximací na kompaktních množinách v prostoru  $n$  komplexních proměnných. V knize Gamelinově je systematicky probrán rovinný případ ( $n = 1$ ). Pro  $n > 1$  úplná teorie nexistuje, avšak některé závažné dílčí problémy byly vyřešeny. Domnívám se, že právě v těchto otázkách zaujme kniha své originální místo v matematické literatuře.

Jaroslav Zemánek, Praha

*Fred H. Croom: BASIC CONCEPTS OF ALGEBRAIC TOPOLOGY.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1978. Stran x + 177, 46 obr., cena DM 36,—.

O algebraické topologii bylo napsáno mnoho prací, monografií i učebnic. Téměř všechny se hemží posloupnostmi písmen a šipek, z nich jsou sestavovány různé diagramy a smysl toho všeho nezavěšený čtenář jen těžko může vyjádřit natož pak ocenit obyčejnými slovy. Recenzovaná kniha Freda Crooma však zaručeně není tohoto druhu. Především se čtenář konečně dozví, že algebraická topologie se snaží studovat zcela přirozené otázky jako je např. struktura (rozložení) děr v topologickém prostoru nebo pojem souvislosti topologického prostoru. Pro tyto účely vytváří se určitý algebraický aparát, složený z jistých grup, pomocí něhož lze srovnávat resp. charakterizovat vlastnosti původních prostorů. Smysl algebraické topologie vyplývá tedy z účinnosti algebraických metod při řešení problémů v topologii a geometrii.

Autor našel zřejmě jedinou rozumnou cestu pro uvedení začátečníka do oblasti algebraické topologie. Základní důraz je kladen na řádnou motivaci zaváděných pojmů. Kniha je prostoupena velmi cennými historickými poznámkami s uvedením problémů, jež byly aktuální v období vzniku algebraické topologie a tento vznik vlastně vyvolaly resp. ovlivnily počáteční vývoj (jde zejména o problémy spojené s roztínáním roviny, exaktní důkaz Jordanovy věty apod.). To způsobuje, že knihu bude schopen číst, a to dokonce se značným potěšením, každý matematik včetně posluchačů vysokých škol.

Jsou vyloženy dva způsoby zavedení algebraického aparátu: homologie a homotopie. V samotné algebraické topologii nejde ovšem kniha příliš daleko, zůstává na elementární úrovni: geometrické komplexy a polyédry, simplicijální homologické grupy, simplicijální aproximace, fundamentální homotopická grupa, nakrývací prostory, vyšší homotopické grupy a některé další otázky (jako např. Lefschetzova věta o pevném bodu a její důsledek — věta Brouwerova). Některé hlubší výsledky, jejichž formulaci může čtenář na dané úrovni porozumět a ocenit jejich smysl, jsou uvedeny bez důkazu. V knize jsou také vhodná cvičení a tři dodatky pro osvěžení základních vědomostí z teorie množin, obecné topologie a algebry. Myslím, že je to jedna z nejzdařilejších knih v poslední době.

*Jaroslav Zemánek, Praha*

*I. Stewart: LIE ALGEBRAS GENERATED BY FINITE-DIMENSIONAL IDEALS. Research Notes in Mathematics 2. Pitman Publishing, London—San Francisco—Melbourne 1975. Stran 154. Cena neuvedena.*

Autor se pokouší o jistý přístup k teorii nekonečně-dimenzionálních Lieových algeber založený na zobecnění strukturní teorie konečně-dimenzionálních Lieových algeber nad algebraicky uzavřeným tělesem charakteristiky nula. Motivací pro tento přístup se staly analogické postupy v teorii grup při přechodu od grup konečných k nekonečným. Myslím, že je to vhodná cesta i pro nespecializovaného čtenáře k proniknutí do teorie Lieových algeber.

*Jaroslav Zemánek, Praha*

*Ottó Steinfeld: QUASI-IDEALS IN RINGS AND SEMIGROUPS. Disquisitiones Mathematicae Hungaricae 10. Akadémiai Kiadó, Budapest 1978. Stran xi + 154. Cena neuvedena.*

V pologrupě  $S$  se kvazi-ideálem, podle definice, rozumí neprázdná podmnožina  $Q$ , která splňuje inkluzi  $QS \cap SQ \subseteq Q$ . Obdobně v asociativním okruhu  $A$  je kvazi-ideál definován jako (aditivní) podgrupa  $Q$  aditivní struktury  $\langle A, + \rangle$ , která splňuje inkluzi  $QA \cap AQ \subseteq Q$ . Tento pojem zobecňuje pojem jednostranného ideálu v obvyklém smyslu. Je však zajímavé, že také např. průnik levého a pravého ideálu je kvazi-ideálem.

Pojem kvazi-ideálu zavedl autor této knihy v letech 1953—1956 ve snaze pochopit analogie resp. odlišnosti mezi dvěma velkými oblastmi algebry — teorií okruhů a teorií pologrup. Recenzovaná kniha shrnuje a uspořádává prakticky všechny výsledky, kterých se v tomto směru dosud dosáhlo. V novém oboru pracovalo aktivně asi dvacet matematiků. Mnoho zajímavých problémů zůstává otevřených. Tyto jsou uvedeny na příslušných místech v textu a ještě jednou drobnějším tiskem na konci knihy. Myslím, že v době stále většího pronikání algebraických metod do nejrozličnějších odvětví matematiky může tato mladá teorie i kniha jí věnovaná sehrát úspěšnou roli.

*Jaroslav Zemánek, Praha*

*E. E. Moise, GEOMETRIC TOPOLOGY IN DIMENSIONS 2 AND 3. Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1977, 92 obr., x + 262 str., cena DM 45,—.*

Kniha se zabývá topologií metrických, separabilních, lokálně euklidovských prostorů, zkráceně variet, dimenze 2 a 3. Obsah lze rozdělit do tří větších celků:

- I. Topologie 2-dimenzionálních variet — kapitoly 1.—8. a 21.—22.
- II. Topologie euklidovských prostorů  $R_2$  a  $R_3$  — kapitoly 9.—20.
- III. Topologie 3-dimenzionálních variet — kapitoly 23.—36.

Část I. obsahuje tři hlavní výsledky. Jsou to triangulační věta: *Každá 2-dimenzionální varieta je triangulovatelná* (kap. 8). Hauptvermutung: *Každé dvě triangulace téže 2-dimenzionální variety jsou kombinatoricky ekvivalentní* (tj. existují zjemnění těchto triangulací, která jsou izomorfní) (kap. 8). V kapitole 4 je dokázána Jordanova věta. Třetím hlavním výsledkem je klasifikace kompaktních 2-dimenzionálních variet v kapitolách 21.—22. Zde jsou také spočítány Eulerovy charakteristiky a homologické grupy těchto variet.

Kapitoly 9.—20. jsou věnovány studiu euklidovských prostorů dimenze 2 a 3.

Triangulovatelná podmnožina  $M$  euklidovského prostoru  $R_n$  se nazývá krotká (tame), existuje-li homeomorfismus prostoru  $R_n$ , který zobrazuje  $M$  na polyedr. V opačném případě se nazývá divoká (wild).

Také zde jsou dokázána tři hlavní tvrzení týkající se  $R_2$ .

- a) Schönfliova věta: *Uzávěr vnitřku topologické kružnice v  $R_2$  je homeomorfní s 2-dimenzionálním simplexem* (kap. 9).
- b) *Každá triangulovatelná podmnožina  $R_2$  je krotká* (kap. 10).
- c) *Každý homeomorfismus dvou kompaktních, totálně nesouvislých podmnožin  $R_2$  lze rozšířit na homeomorfismus celé roviny  $R_2$*  (kap. 13).

Kapitola 17. obsahuje slabší verzi Schönfliovy věty ve třetí dimenzi: *Pro každou polyedrální sféru  $S$  v  $R_3$  existuje po částech lineární homeomorfismus  $R_3$ , který  $S$  zobrazuje na hranici 3-dimenzionálního simplexu.*

Kapitoly 18.—20. obsahují příklady, které vyvracejí věty a), b), c) v prostoru  $R_3$ . Je zde Antoineova konstrukce totálně nesouvislé kompaktní množiny v  $R_3$ , jejíž doplněk není jednoduše souvislý. Pomocí této množiny je zkonstruována divoká úsečka a divoká sféra v  $R_3$ . Důkaz divokosti je založen na skutečnosti, že žádná z těchto množin nemá jednoduše souvislý doplněk. Tyto příklady jsou v následujících kapitolách vylepšeny o divokou úsečku a divokou sféru s jednoduše souvislými doplňky.

Zbývající část je věnována 3-dimenzionálním varietám. Základním prostředkem studia je Papakyriakopoulosova věta (Loop theorem): *Buď  $M$  3-dimenzionální varieta s hranicí  $B$  a nechť  $K$  je triangulace  $M$ . Nechť dále existuje spojitě zobrazení kružnice do  $B$ , které je homotopicky triviální v  $M$  a není homotopicky triviální v  $B$ . Potom existuje polyedrální (vzhledem k triangulaci  $K$ ) 2-dimenzionální buňka  $X$ , jejíž hranice leží v  $B$  a není v  $B$  homotopicky triviální* (kap. 25). Dále jsou dokázána některá zesílení Papakyriakopoulosovy věty a s jejich pomocí je vybudován aparát k důkazu triangulační věty a Hauptvermutung pro 3-dimenzionální variety (kap. 35. a 36.).

Kapitola 28. obsahuje příklad 3-dimenzionální kompaktní souvislé variety, která není jednoduše souvislá a jejíž homologické grupy se rovnají homologickým grupám 3-dimenzionální sféry.

Část I. s výjimkou kapitol 21. a 22. je elementární a nevyžaduje žádné předběžné znalosti, stejně jako tvrzení o rovině v části II. Ke konstrukci protipříkladů v  $R_3$  je hojně využívána teorie uzlů, která je v potřebné míře uvedena. Bez důkazu jsou ponechána pouze tvrzení týkající se fundamentální grupy. Počínaje kapitolou 22. je předpokládána znalost homologických grup simplicialních komplexů. Rovněž bez důkazu je ve třetí části použita Poincarého dualita a van Kampenova věta o fundamentální grupě sjednocení dvou topologických prostorů, jejichž průnik je jednoduše souvislý.

Prakticky celá část III. klade značné nároky na prostorovou představivost.

Jiří Tůma, Praha

C. C. Heyde, E. Seneta: I. J. BIENAYMÉ STATISTICAL THEORY ANTICIPATED. Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin 1977. Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 3. xiv + 172 stran, 1 obr., cena DM 46,—.

Knihy je nejen významný příspěvek k dosti zanedbávané historii matematické statistiky, ale i připomenutím díla vynikajícího, i když dnes již téměř zapomenutého francouzského statistika,

I. J. Bienaymé (1796—1878). Autoři uvádějí čtenáře do zajímavého matematického světa tehdejší doby a ve světle současného stavu teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky diskutují Bienaymého příspěvky teorii i aplikacím. Jejich hloubka i šíře současného matematika, který toto jméno zná nejlépe v souvislosti s Bienaymého-Čebyševovou nerovností, překvapují. Vždyť Bienaymé předstihl Galtona a Watsona o 28 let při studiu jednoduchého větvičného procesu, významné jsou jeho příspěvky k zákonům velkých čísel v souvislosti se studiem statistické homogenity a stability, našel simultánní konfidenční oblast pro koeficienty vícenásobné normální regrese, zformuloval centrální limitní větu v bayesovském modelu teorie pravděpodobnosti, byl prvním statistikem, který si uvědomil princip postačitelnosti, významné jsou jeho příspěvky v demografii.

Již tento stručný výčet ospravedlňuje titul monografie.

Bienaymé byl vynikající vědeckou osobností své doby (od r. 1852 členem francouzské akademie) a fundovaně napsaná monografie je nejen oceněním jeho díla, ale i zajímavým materiálem pro historiky matematiky a vůbec pro všechny statistiky, kteří se zajímají o filosoficko-historické zdroje své vědy.

Josef Štěpán, Praha

*F. Rehbock: GEOMETRISCHE PERSPEKTIVE. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1979, str. ix + 155, 80 stran obrázků, cena DM 29,50.*

Knih, ve kterých lze najít poučení, jak snadno a jednoduše konstruovat názorné perspektivy buď hotových objektů nebo jejich návrhů před realizací, není mnoho, klade-li se současně navíc požadavek teoretického zdůvodnění. Jednou z nich je právě tato kniha. V ní použil autor stejné metodické uspořádání jako ve své knize *Darstellende Geometrie*, která vyšla v témž nakladatelství poprvé v roce 1957, v 2. opraveném vydání v roce 1964 (její recenze je v *Apl. mat.* 10 (1965), 154—155) a v roce 1969 již ve 3. vydání. Autorův přístup k výkladu spočívá v tom, že vlevo od obrazové strany je vždy text a lze proto při studiu knihy bez rušivého obracení listů sledovat vše co spolu souvisí.

Teoretická část je členěna do šesti odstavců, závěr tvoří praktický odstavec vhodně nazvaný „Obrazy bez textu — podněty“.

V prvním odstavci je vyložena základní středová promítání se zřetelem k využití v geometrické perspektivě, v našich učebnicích častěji zvané trojúhelníková perspektiva. Už zde se v obrazech doprovázejících text objevují technické objekty, např. krabice v různých polohách vzhledem k průmětně, železniční koleje s pražci a křížovatkou se silnicí (v téže úrovni) apod.

V druhém odstavci jsou pojednány obrazy rovnoběžných přímek a rovin nejen v tzv. obecné poloze, nýbrž i pro jejich zvláštní polohu k průmětně i zvolené základní rovině, zejména ve speciálním případě tzv. lineární perspektivy.

Ve třetím odstavci následuje výklad o kolmosti přímek a rovin v geometrické perspektivě, čtvrtý a pátý odstavec obsahuje další důležité pojmy týkající se měření úhlů a úseček. V šestém odstavci jsou aplikovány vyložené pojmy a konstrukce v lineární perspektivě zvláště na sestavení vlastních a vržených stínů daného objektu, na perspektivu kružnice a jeho závěr tvoří výklad k použití vázané perspektivy zvláště v tzv. architektním uspořádání.

Při studiu knihy je ovšem nutné, aby čtenář vše co je vykládáno (na sudé stránce) a je doprovázeno příslušným obrázkem (na liché stránce) sám si znovu rýsoval a to zejména proto, že v obrazech, které jsou značně větší než je obvyklé v našich učebnicích, jsou úmyslně vynechány pomocné konstrukce. Také označení pojmů je jiné než u nás, při pozorném čtení nečiní potíže, navíc jsou všechny důležité pojmy a jejich označení uvedeny souhrnně na zvláštní stránce na konci knihy. Lineární perspektiva jako část deskriptivní geometrie není již v učebních osnovách pro gymnázia. Na stavebních fakultách a fakultách architektury vysokých technických škol vzhledem k nynější hodinové dotaci je třeba ji vykládat více z hlediska praxe a jako velmi dobrý metodický návod může posloužit právě Rehbockova kniha, jejíž způsob výkladu je ovšem vhodný také pro zájemce



z řad studentů a absolventů Akademie výtvarných umění a Vysoké školy umělecko-průmyslové.

Jedná se o velmi pěkně připravenou publikaci a i když co do obsahu není v ní zdaleka uvedeno tolik látky jako např. v učebnici Kadeřávek-Klíma-Kounovský: *Deskriptivní geometrie I*, přináší z hlediska metodiky některé nové prvky pro výuku a psaní učebnic deskriptivní geometrie.

Karel Drábek, Praha

*Oswald Giering, Otto Kozinowski, Hans Seybold: KONSTRUKTIVE INGENIERGEOMETRIE.* Carl Hansen Verlag, München—Wien 1976, str. 176, obr. 174.

V této učebnici deskriptivní geometrie pro vysoké technické školy je velmi stručně a u většiny vět, zvláště souvisejících s diferenciální geometrií křivek a ploch, bez příslušného důkazu, vyloženo vše, co z této disciplíny potřebuje student pro další použití v teoretických i praktických předmětech. Je však známo, že deskriptivní geometrie není v učebních osnovách většiny technických škol, i když na druhé straně např. absolventi mnichovské techniky s deskriptivní geometrií jsou obvykle přijímáni před těmi, kteří ji za svého studia neabsolvovali.

Rovněž v praxi lze knihu s úspěchem využívat a to právě vzhledem k praktickým aplikacím v ní obsaženým. Celý výklad je rozvržen do 16 kapitol a používá se v něm důsledně úvah v rozšířeném euklidovském prostoru. Po zobrazení bodu, přímky a roviny je zavedena nejdříve afinita mezi dvěma různoběžnými rovinami, pak v rovině a její použití pro konstrukce elipsy. Pro přiřazené pravouhlé průměty se důsledně používá pravotočivý systém souřadnic. V tzv. Mongeově promítání (název používaný nyní v našich učebnicích) jsou provedeny všechny základní úlohy polohy a metrické úlohy. Velmi časté je použití třetí průmětny při řešení jednotlivých úloh. Úvahám o křivkách a plochách předchází pomocné konstrukce týkající se diferenciálně geometrických vlastností s aplikací na vlastnosti skutečného a zdánlivého obrysu. Po klasifikaci přímkových ploch jsou uvedeny nejjednodušší vlastnosti hyperbolického paraboloidu a jednodílného hyperboloidu, jako jediných ploch s dvěma soustavami povrchových přímk. Kuželosečky jsou pojednány jako rovinné řezy rotační kuželové plochy s jednotnou definicí využívající řídicí přímky a z toho teprve plynoucími ohniskovými vlastnostmi. Rovinný řez kuželové plochy je použit pro výklad o pojmu kolineace. Pro plochy druhého stupně, rotační plochy a rourové plochy po základních pojmech následují jejich základní konstrukce. Průniky ploch jsou konstruovány bodově, zvláště je ukázána konstrukce tečny v bodě průniku. Při těchto konstrukcích je užito také Dupinovy indikatrix a Meusnierovy věty. Po ukázce rozvinutí ploch s konstrukcí rozvinutelné plochy spojující dvě dané rovinné křivky je využit šroubový pohyb ke konstrukci kruhové šroubovice s jejími nejdůležitějšími vlastnostmi a některých technicky důležitých šroubových ploch. Kniha je ukončena výkladem o kótovaném promítání s aplikací v topografických plochách a axonometrickým promítáním, speciálně pak pravouhlou axonometrií. Závěr je poplatný době: jde v něm o tzv. konstruktivní počítačovou geometrii, kde jsou velmi stručně uvedeny zásady použití kreslicího stroje.

Textem je rozsah knihy velmi malý, většina stran je zaplněna obrázky jednak doprovázejícími text, jednak určenými pro cvičení (tzn. že je tu úloha dána základními údaji a student má do něj zakreslit její příslušné řešení). Domnívám se, že kniha má získat další zájemce o deskriptivní geometrii a její aplikace v praxi a tím zpětně působit pro její větší uplatnění ve výuce základních teoretických předmětů na technických školách, možná i pro její zavedení — aspoň v základech — na střední školy v NSR. Pro naše poměry není vhodný způsob výkladu použitý v knize: na její rozsah je tu příliš mnoho věcí uvedeno bez důkazu, dále je zde značně praktických aplikací (i když jinak potřebných), které má čtenář sám provést, takovou úlohu stačí uvést jako cvičení na konci jednotlivých odstavců.

Karel Drábek, Praha

*J. Lindenstrauss, L. Tzafriri: CLASSICAL BANACH SPACES II, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 97, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1979; 243 stran, cena DM 78,—.*

Kniha je druhým dílem čtyřdílné práce, která si klade za cíl seznámit čtenáře s hlavními výsledky a moderními směry výzkumu v geometrii Banachových prostorů, s důrazem na studium struktury tzv. klasických Banachových prostorů, jako jsou prostory  $C(K)$ ,  $L_p(\mu)$ , apod.

Zatímco první díl (Classical Banach spaces I, Springer-Verlag 1977) se zabývá prostory posloupností, tento díl, nazvaný *Prostory funkcí*, je věnován převážně studiu Banachových svazů. Od čtenáře se předpokládá kromě znalosti běžné látky z funkcionální analýzy a teorie míry rovněž znalost prvního dílu knihy.

Kniha je rozdělena na dvě části. První z nich, obsahující sedm kapitol, se zabývá obecnou teorií Banachových svazů. První kapitola je úvodní, druhé dvě jsou věnovány reprezentaci a struktuře podprostorů Banachových svazů. Zvláštní pozornosti zasluhuje kapitola čtvrtá, kde je detailně studována teorie  $p$ -konvexity a  $p$ -konkavity, která je užitečným nástrojem ke studiu Banachových svazů. Další dvě kapitoly jsou věnovány pojům uniformní konvexity a hladkosti prostorů a pojmu typu a kotýpu, a to nejen pro případ Banachových svazů, ale i pro obecné prostory. Sedmá kapitola se zabývá vlastností aproximace, obsahuje Szankowského příklad uniformně konvexního Banachova svazu, který nemá vlastnost aproximace (tedy ani Schauderovu basi).

Druhá část, obsahující opět sedm kapitol, se zabývá speciálními typy prostorů měřitelných funkcí nad prostorem s mírou  $\Omega$ , které jsou invariantní vzhledem k libovolné míře zachovávající transformaci prostoru  $\Omega$  (tzv. r.i. prostory). V první kapitole jsou uvedeny základní výsledky a příklady r.i. prostorů nad intervalem (omezeným i neomezeným) s Lebesgueovou mírou, druhá kapitola obsahuje Boydovu interpolační větu, která zobecňuje klasické interpolační věty Rieszova-Thorinova a Marcinkiewiczova. Třetí a čtvrtá kapitola studují bezpodmínečnost basí a doplňkové prostory v r.i. prostorech nad  $[0, 1]$ . Jemnější studium Haarových systémů dává v páté kapitole výsledky o jednoznačnosti r.i. struktury na daném r.i. prostoru nad  $[0, 1]$ . V šesté kapitole jsou studovány prostory, které lze reprezentovat jako vhodné r.i. prostory nad  $[0, \infty)$  a konečně poslední kapitola se zabývá geometrickými aspekty interpolační teorie v obecných Banachových prostorech.

Knihu uzavírá bohatý soupis literatury obsahující 137 citací.

Vcelku jde o publikaci velmi užitečnou a zdařilou. Kniha není a ani nechce být vyčerpávající ve studovaném oboru. Její hlavní předností je její modernost, převážná část výsledků je z poměrně nedávné doby. Průnik s ostatními knihami je skutečně minimální a obsahuje vlastně jen základní materiál. I když většina výsledků je velice nová, podařilo se autorům napsat knihu přehledně a zajímavě, a to bez újmy na přesnosti.

Jiří Vilímovský, Praha

L. A. Steen, J. A. Seebach, Jr.: COUNTEREXAMPLES IN TOPOLOGY. Second edition. Vydalo Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin 1978. Stran xi + 244, cena DM 26,—.

Je dobře známo, že ve vývoji matematiky i při jejím studiu je vedle výstavby teorie důležité i tvoření a zkoumání příkladů. V této knize je shromážděn velký soubor různých příkladů topologických prostorů. Vlastní obsah knihy (po instruktivní předmluvě) se dělí na čtyři části.

První část je nazvána *Základní definice*. Její rozsah je 38 stran. Text není členěn na definice a věty, jsou však stručně a přehledně uvedeny všechny pojmy a vlastnosti (bez důkazů), s nimiž se bude dále pracovat. Je rozdělena na pět oddílů: 1. *Obecný úvod*. Topologií na množině se rozumí soustava všech otevřených podmnožin. Vedle zcela základních pojmů (např. okolí, base, podprostor, uzávěr) se uvažují různé typy limitních bodů, různé druhy zobrazení, součiny, kvocienty, filtry. 2. *Axiomy oddělování*. Jsou zavedeny axiomy  $T_0$ ,  $T_1$  atd. a ještě další příbuzné. Autoři někdy postupují nezvykle ale pečlivě, odlišují např. prostory regulární a  $T_3$ . 3. *Kompaktnost*. Sem jsou zařazeny i různé oslabené kompaktnosti a různé typy parakompaktnosti. 4. *Souvislost*. Jsou zavedeny různé druhy souvislosti a nesouvislosti. 5. *Metrické prostory*. Po nejzákladnějších pojmech se probírají totální omezenost, úplnost, podmínky pro metrisovatelnost a ele-

mentární fakta o uniformitách a uniformisovatelnost. Oddíly 2, 3 a 4 jsou ilustrovány mnoha pěknými Vennovými diagramy a implikačními schémata, jež ukazují vztahy mezi uvažovanými vlastnostmi a všude jsou doplněny odkazy na příklady v druhé části knihy.

Druhá část zaujímá 120 stran a má název *Protipříklady*. Obsahuje 143 číslovaných a výstižně nazvaných příkladů topologických prostorů. V každém příkladě se po definici prostoru podrobně rozebírají jeho vlastnosti, formou podobnou cvičením s návody. Vyšetřují se všechny vlastnosti zavedené v první části. Začíná se diskretními prostory, potom přicházejí příklady stále obtížnější, mezi nimi např. různé uspořádané prostory, dávno klasické příklady Aleksandrovovy a Urysonovy, dále příklady novější; nejnovější je z roku 1969 (První vydání knihy vyšlo v roce 1970.). Pochopení usadňuje spousta obrázků. Některé příklady nejsou doslova příkladem prostoru; buď jsou obecné (např.  $\beta$ -obal, zvláštní metriky) nebo se zase zkoumají speciální podmnožiny známého prostoru.

Čtvrtá část se nazývá *Dodatky*. Prvních 17 stran zabírají různé přehledné tabulky. Za číslem prostoru ihned vyčteme o každé uvažované vlastnosti, zda ji má či nemá. Tabulek můžeme užít i obráceně; když hledáme prostor, který určité vlastnosti má a určité nemá. Dále následuje 149 cvičení, jež doplňují výklad v první i druhé části. Po cvičeních jsou zařazeny poznámky, a to opět ke všem oddílům první části i k příkladům. Poznámky jsou převážně odkazy na literaturu. Jsou různého charakteru, od obsáhlejších doplňků výkladu až ke sdělení, kdo je autorem příkladu. Čtvrtou část a celou knihu uzavírá bibliografie se 139 prameny a rejstřík.

Třetí část je nazývána *Teorie metrisovatelnosti* a byla zařazena teprve do druhého vydání. Zaujímá 21 stran a je revidovanou verzí Steenova článku, jenž vyšel v roce 1972 v časopise *American Mathematical Monthly*. Metrisovatelnost je zde chápána ve velmi obecném smyslu, zkoumají se např. semimetrisovatelnost, existence speciálních basí, kolektivní normalita. Nejprve je podán přehledný výklad všech pojmů, doplněný diagramy a schémata. Následuje stručný popis 15 příkladů prostorů, opět oživený obrázky a ukončený přehlednou tabulkou. Všude v třetí části se přímo v textu využívá odkazů na literaturu. Třetí část obohacuje knihu o novou problematiku. Zpracováním však budí dojem, že do knihy vůbec nepatří. Na stranách 163 a 165 se znovu definují již zavedené pojmy, pro hvězdu se zavádí odlišné označení. Opakují se i některé příklady, jsou ovšem zkoumané z jiných hledisek. Při dalším vydání by bylo rozhodně užitečné obsah třetí části včlenit do textu tak, aby původní koncepce byla zachována.

Knihy je napsána pečlivě a srozumitelně, jistou zběhlost a zkušenost čtenáře však předpokládá. Některá označení jsou nezvyklá avšak důsledná. Tak označení  $A^b$  pro hranici množiny  $A$  nevyžadává nakonec příliš neobvykle vedle znaků  $A^o$ ,  $A^-$  pro vnitřek a uzávěr. Zcela nevhodný se však zdá znak  $x^*$  pro hvězdu bodu  $x$  vzhledem k pokrytí. Hvězdičky se totiž často používá jen k odlišení různých objektů. V knize se najde hodně příkladů topologických prostorů, ne však každý, třeba i dávno známý. V tom je vodítkem rozsah výkladu v první a třetí části. Nesetkáme se tedy např. vůbec s příklady z teorie dimense nebo s prostory, kde uzávěr nemusí být uzavřená množina. Problematika uniformit je zastoupena velmi chudě. Myslím, že všechno o uniformitách se dalo z knihy vypustit a hodnota knihy by se snížila.

Knihy rozhodně není učebnicí topologie. Je však velmi užitečnou příručkou pro každého, kdo chce rozšířit svou znalost obecné topologie.

Jan Hejman, Praha

## ZPRÁVY

### VZPOMÍNKA NA AKADEMIKA BOHUMILA BYDŽOVSKÉHO

KAREL ŠINDELÁŘ, Praha

14. březen 1980 je dnem stého výročí narození velikého českého matematika akademika BOHUMILA BYDŽOVSKÉHO, profesora Karlovy university v Praze a našeho významného veřejného, školského a kulturního pracovníka.

O neobyčejném světovém kulturním významu tohoto výročí svědčí již ta okolnost, že je UNESCO zařadilo na rok 1980 do svého kalendáře výročí světových osobností a událostí.

Bohumil Bydžovský se narodil dne 14. března 1880 v Duchcově, kde jeho otec, stavební inženýr, pracoval na výstavbě dolů a železnic. Své útlé dětství prožil mezi severočeskými doly, horníky a železničáři. Již ve čtvrtém roce věku do jeho života tragicky zasáhl osud: ztratil svoji matku, která zemřela, když jí bylo teprve 24 let. Jeho otec se po druhé již neoženil a sám vychovával své čtyři děti, které mu tak zůstaly. Tak vyrůstal Bohumil Bydžovský od té doby v rodině jen svého otce, svých dvou bratří a jedné sestry. Při častých změnách působiště svého otce v severočeském pohraničí musel mladý Bohumil Bydžovský několikrát chodit i do německé školy.

Teprve ve věku deseti let se dostal do Prahy na Akademické gymnázium, které jako vynikající žák ukončil maturitou roku 1898. Další čtyři roky jeho života vyplnilo studium na filozofické fakultě university v Praze, kde byl zapsán jako posluchač matematiky a fyziky. Největší vliv na universitě na něj měl profesor Eduard Weyr, který vzbudil jeho zájem o geometrii. Za rok po ukončení studia státní závěrečnou zkouškou získal hodnost doktora filozofie na základě své disertační práce *O integrálech hypereliptických* na námět od profesora Karla Petra. To bylo již roku 1903 uprostřed jeho působení na různých středních školách v Praze a ve středních Čechách, z nichž roku 1910 po své habilitaci na filozofické fakultě přešel trvale na pražské vysoké školy.

Ještě před tím roku 1904 pojal za manželku PhDr. Marii Komínkovou, profesorku pražského dívčího gymnázia Minerva. Jejich manželství bylo obdařeno dvěma syny, roku 1906 Janem a roku 1908 Ladislavem.

Jako docent působil krátce mimo universitu i na ČVUT v Praze. Mimořádným profesorem university byl jmenován roku 1917. Po osvobození roku 1918 přešel na nově vytvořené ministerstvo školství a národní osvěty, z něhož se po roce opět vrátil na filozofickou fakultu university v Praze. Roku 1920 byl jmenován jejím

řádným profesorem. Po rozdělení filozofické fakulty na fakultu filozofickou a přírodovědeckou byl roku 1930 zvolen děkanem přírodovědecké fakulty Karlovy university v Praze.

Když byly dne 17. listopadu 1939 české vysoké školy uzavřeny, uchýlil se do jihočeského rodiště své choti ve Veselí nad Lužnicí. Tam však byli oba roku 1942 zatčeni a vězněni v koncentračním táboře ve Svatobořicích u Kyjova. Ale ani toto utrpení profesora Bydžovského nezlomilo. Po propuštění a návratu do Veselí organizoval hrdinně a úspěšně hnutí odporu proti okupantům.

Ve znovuosvobozené vlasti se roku 1945 ihned vrátil na universitu do Prahy a roku 1946 byl zvolen jejím rektorem. Úřad rektora zastával téměř dva roky a ve funkci rektora vedl oslavy šestistého výročí založení Karlovy university v Praze. Na trvalý odpočinek odešel až roku 1957 v 78. roce svého života.

Během svého působení na Karlově universitě v Praze napsal tři vysokoškolské učebnice několikrát vydané a věnované analytické geometrii, lineární algebře a obšířnou učebnici algebraické geometrie.

Vědecké dílo akademika Bydžovského obsahuje šedesát prací. Kromě dvou z nich z diferenciální geometrie, věnovaných geodetickým křivkám na středových rotačních kvadrikách, patří jako celek do algebraické geometrie. Ta je obsažena ve všech jeho zbývajících pracích, jež je možno rozdělit zhruba do tří skupin. I v nich však autor ukazuje, že algebraickou metodu zkoumání geometrických útvarů dovede vhodně spojovat s metodou syntetickou.

Nejobsáhlejší z těchto tří skupin tvoří pojednání o algebraických čarách, rovinných i prostorových. Pozoruhodných výsledků bylo v této oblasti dosaženo zejména mistrným použitím teorie eliptických funkcí, které přineslo profesorovi Bydžovskému světové uznání již v první polovině jeho života. V dalších pracích autor ukázal na možnost aplikace eliptických funkcí i na čáry vyšších rodů než jedna prostřednictvím jejich adjungovaných čar, zvláště při vyšetřování jejich systémů, zejména sítí. Tato tematika vzbudila velký zájem v zahraničí, zvláště profesora Godeauxa v Belgii. Profesor Bydžovský využil dosažených výsledků v mnoha oblastech geometrie, zejména však vrhl nové jasné světlo na některé výsledky největších matematiků předcházející generace od Salmona až po Cremonu. Nevyhýbal se ani vyšetřování ploch.

Druhá z nich je věnována biracionálním transformacím. Od lineárních zobrazení, hlavně kolineací, vede cesta badatele Bydžovského ke Cremonovým transformacím v těsném sepětí se studiem čar rovinných i prostorových a skupin bodů na těchto čarách. Nejobecnější výsledky jsou pak involutorní kvadratické transformace v projektivních prostorech libovolné dimenze a jejich rozklad na transformace jednodušší.

Poslední třetí skupina prací akademika Bydžovského je věnována konfiguracím. Nejprve vyšetřoval konfiguraci Brianchonovu, potom Pascalovu a Hesseovu opět skvělým využitím eliptických funkcí. Rovinné konfigurace  $(12_4, 16_3)$  zkoumal již před druhou světovou válkou a vrátil se k nim ještě několikrát po ní.

Poslední vědecká práce akademika Bohumila Bydžovského vyšla roku 1963, ve kterém slavil své 83. narozeniny.

Vedle vědecké a pedagogické činnosti se akademik Bydžovský mnoho angažoval v našem veřejném životě. Po celý život pracoval v didaktice středoškolské matematiky, byl autorem a spoluautorem mnoha pokrokových středoškolských učebnic a sbírky matematických příkladů, které vyšly v mnoha vydáních a byly překládány i do cizích jazyků.

Jako řádný profesor Karlovy university v Praze byl povolán do čela snah o přebudování našeho školství, zejména středního. I když všechny své záměry nemohl tehdy prosadit, přece školská reforma z roku 1933, vypracovaná komisí pod jeho předsednictvím, ovlivnila už tehdy významně naše školství a přispěla k jeho pokrokovému a demokratickému charakteru. Po ukončení druhé světové války se stal profesor Bydžovský jedním z předních zastánců a propagátorů jednotné školy, jež byla uskutečněna až po roce 1948.

Mnoho práce vykonal profesor Bydžovský v Jednotě československých matematiků a fyziků. Za to byl už roku 1928 zvolen jejím čestným členem. Po mnoho let byl hlavním redaktorem Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky a dvakrát stanul v čele Jednoty ve funkci předsedy, kterou zastával celkem 13 let.

Mnoho času, sil a schopností věnoval profesor Bydžovský organizaci našeho vědeckého života. Pracoval často i na vedoucích místech našich dřívějších poměrně roztroušených vědeckých institucí, jejichž nástupkyní se stala na sklonku roku 1952 Československá akademie věd. Za své zásluhy se stal hned od počátku jejím řádným členem – akademikem. I ve svém pokročilém věku téměř 73 let vykonal akademik Bydžovský v ČSAV ještě mnoho práce, zejména v oblasti vydavatelské.

Na poli mezinárodní spolupráce v matematice vytvořil již roku 1920 s prof. Petrem a prof. Hostinským Národní komitét zastupující Československo v Mezinárodní matematické unii. Československou matematiku reprezentoval na mnoha svých cestách do zahraničí, zvláště na mezinárodní matematické kongresy, jichž se účastnil velmi aktivně, vědecky i organizačně. Mezinárodní referativní matematické časopisy přinášely po mnoho let zprávy o československých matematicích i jejich práci, napsané s nesmírnou pečlivostí a vzácnou objektivností profesorem Bydžovským. Na druhé straně našemu životu přibližoval výsledky světové matematiky velmi užitečnými recenzemi zahraničních publikací, hlavně z oboru algebraické a diferenciální geometrie.

Naší širší veřejnosti věnoval akademik Bydžovský svoji spolupráci při vydávání naučných slovníků, encyklopedií i publikací podobného charakteru, pro něž s velikou pečlivostí sestavoval matematická hesla. Jméno akademika Bydžovského je také uváděno v mnoha našich i zahraničních publikacích pro informaci matematické i širší veřejnosti.

Za své zásluhy byl akademik Bydžovský vyznamenán Řádem republiky a mnoha dalšími poctami, zahraničními i domácími.

Po celý svůj život však zůstal nesmírně skromný, lidský a laskavý, nesmírně dobrý, pokrokový a šlechetný, vždy schopný a připravený rozdávat svoji pomoc i vzácnou duševní pohodu všem, kteří potřebovali. Jeho hluboká duševní rovnováha, smysl pro

krásu a nesmírná dobrota srdce vyzařovaly z celé jeho osobnosti: z jeho přednášek, seminářů, zkoušek, z každého jeho slova i činu.

O tom by nejlépe mohli vyprávět jeho žáci. Škola algebraické geometrie, kterou u nás založil, dosud staví na jeho vědeckém i lidském odkazu.

Akademik Bohumil Bydžovský nás navždy opustil dne 6. května 1969 a byl za tři týdny následován svojí chotí Dr. Marií Bydžovskou rozenou Komínkovou. Jeho zpopelněné ostatky jsou uloženy na Olšanských hřbitovech v těsné blízkosti třídy Jana Želivského, ale jeho památka stále žije v srdcích jeho žáků a nikdy v nich neuhasne.

#### KOBRA

Ve dnech 1.—5. října 1979 se v hotelu Rekreat na Horním Bradle v Železných horách konala podzimní škola Kobra o teorii obrazců. Uspořádala ji závodní pobočka ČVTS při Matematickém ústavu ČSAV ve spolupráci s matematickou vědeckou sekci JČSMF. Hlavním cílem školy bylo seznámit účastníky s Grenanderovou teorií syntézy obrazců a se základními matematicko-statistickými metodami rozpoznávání obrazců. Kromě toho měli účastníci školy možnost přednésti zde sdělení o svých výsledcích i o zkušenostech s praktickými aplikacemi metod vícerozměrné analýzy. Na programu školy byl rovněž diskusní večer o otevřených otázkách.

Podzimní školy Kobra se zúčastnilo 61 odborníků z 39 výzkumných a vysokoškolských pracovišť. Byly předneseny tyto referáty a sdělení:

Z. ŠIDÁK: *Základní orientace o syntéze a rozpoznávání obrazců*

F. ZÍTEK: *Generátory — základní kameny výstavby obrazců*

J. HUSTÝ: *Bayesovská teorie rozhodování*

S. HOJEK: *Konfigurace*

P. PUDIL: *Kvantitativní míra efektivnosti příznaků vybraných metodami diskriminační analýzy*

P. KRATOCHVÍL: *Pravděpodobnosti na konfiguracích*

Z. ŠIDÁK: *Obrazy v syntéze obrazců, I.*

E. NEUSTUPNÝ: *Syntéza archeologických struktur*

I. PAVLŮ: *Algoritmus krystalizace tříd*

V. KOUTNÍK: *Odhadování parametrů a učení s učitelem*

M. JOSÍFKO: *Některé problémy užití diskriminační analýzy v sociálních vědách*

M. KVASNICA: *Rychlý algoritmus pro určení orientace kvádrů*

J. VONDRÁČEK: *Neparametrické odhady rozložení pravděpodobnosti*

A. FILÁČEK: *Lineární diskriminační funkce*

P. KRATOCHVÍL: *Obrazy v syntéze obrazců, II.*

A. LEŠANOVSKÝ: *Deformace v syntéze obrazců, I.*

A. LUKASOVÁ: *Hierarchická aglomerativní shlukovací procedura*

P. NAHODIL: *Některé rychlé metody shlukové analýzy a jejich aplikace v medicíně*

Z. ŠIDÁK: *Deformace v syntéze obrazců, II.*

Kromě toho byla ve středu 3. října odpoledne uspořádána exkurse do Slatiňan s návštěvou hippologického musea a Výzkumné stanice pro chov koní, což je pracoviště, kde se úspěšně uplatňují metody matematické statistiky v chovatelské praxi.

Podzimní škola Kobra splnila bezpochyby svůj účel. K jejímu zdaru přispělo též příjemné prostředí hotelu Rekreat i počasí, které škole opravdu přálo.

Škola Kobra volně navázala na letní školu shlukové analýzy, kterou pořádala JČSMF v září 1976 v Harrachově. Začíná se tak realizovat záměr uspořádání delšího cyklu škol věnovaných postupně různým metodám vícerozměrné analýzy dat. S další školou cyklu nazvanou Diana a zaměřenou především na problematiku diskriminační analýzy se předběžně počítá na rok 1982.

František Zítek, Praha