ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

1

105

ISSN 0528-2195

ACADEMIA
PRAHA

ČAS. PRO PĚST. MAT. · SV. 105 · Č. 1 · STR. 1—110 · PRAHA 18. 2. 1980

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(*Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fyziky“*)

SVAZEK 105 (1980)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd

Redakce:

Matematický ústav Československé akademie věd
115 67 Praha 1, Žitná 25

Časopis pro pěstování matematiky. Ročník *105* (1980). — Vydává Československá akademie věd v Academii, nakladatelství Československé akademie věd, Vodičkova 40, 112 29 Praha 1. Redakce: Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1. — Tiskne Polygrafia, n. p., závod 6, nositel Řádu práce, tř. Rudé Armády 171, 182 00 Praha 8. — Objednávky a předplatné přijímá PNS, administrace odborného tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Lze také objednat u každého poštovního úřadu nebo doručovatele. Vychází čtvrtletně. Roční předplatné Kčs 56,—, cena jednotlivého sešitu Kčs 14,—. (Tyto ceny jsou platné pouze pro Československo.)

Sole agents for all western countries KUBON & SAGNER, P.O.B. 68, 8000 München 34, G.F.R. Annual subscription: Vol. 105, 1980 (4 issues) DM 126,—.

Toto číslo vyšlo v únoru 1980

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 105 * PRAHA 18. 2. 1980 * ČÍSLO 1

THE LAPLACE TRANSFORM OF EXPONENTIALLY BOUNDED VECTOR-VALUED FUNCTIONS (REAL CONDITIONS)

MIROSLAV SOVA, Praha

(Received February 28, 1977)

The purpose of this paper is to find characteristic properties of the Laplace transforms of exponentially bounded vector-valued functions in arbitrary, i.e. in particular nonreflexive, Banach spaces (the "representability" problem). The known solution of this problem in reflexive Banach spaces is a special case (Corollary 12) of our main Theorem 10 which gives a complete answer to the representability problem formulated above. This theorem is preceded by some auxiliary facts from functional analysis, partly reminded, partly proved. In section 14 related results are commented.

1. We shall use the following notations: (1) $\mathbb{R}$ – the real number field, (2) (ω, ∞) – the set of all real numbers greater than ω if $\omega \in \mathbb{R}$, (3) $M_1 \to M_2$ – the set of all mappings of the whole set M_1 into the set M_2.

2. In the whole paper, E will denote a Banach space over $\mathbb{R}$. The set of all continuous linear functionals on E is denoted E^*. The basic notions from functional analysis necessary in the sequel can be found in [2], chap. 1 and 2. The notions of measurability and integrability of vector-valued functions and their properties are used in the scope of section 3.1 – 3.7 of [2].

3. Proposition. *Let $f \in (0, \infty) \to E$. Then*

(α) *the function lf is measurable for every $l \in E^*$,*

(β) *there is a null set $N \subseteq (0, \infty)$ and a separable subset $X \subseteq E$ such that $f(t) \in X$ for every $t \in (0, \infty) \setminus N$,*

if and only if the function f is measurable.

Proof. See Theorem 3.5.3 in [2].

4. Proposition. *Let $f \in (0, \infty) \to E$. If the function f is measurable, then*

$$\frac{1}{h}\int_0^h \|f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t)\| \, d\tau \to_{h\to 0+} 0$$

for almost every $t > 0$.

Proof. It is possible to follow almost word by word the argumentation of [3], Theorem 18.5.

5. Proposition. *Let $X \subseteq E$. If the set X is separable, then there exists a countable subset $L \in E^*$ such that for every $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, there is an $l \in L$ for which $l(x_1) \neq l(x_2)$.*

Proof. Since X is separable we can find a subset $X_0 \subseteq E$ such that

(1) X_0 is countable,

(2) $X_0 \subseteq X$, $\overline{X}_0 \supseteq X$.

According to Hahn-Banach theorem we can fix for every $z_1, z_2 \in X_0$, $z_1 \neq z_2$, a linear functional $l_{z_1,z_2} \in E$ so that

(3) $\|l_{z_1,z_2}\| = 1$, $l_{z_1,z_2}(z_1 - z_2) = \|z_1 - z_2\|$ for every $z_1, z_2 \in X_0$, $z_1 \neq z_2$.

Let us now consider some $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. According to (2) we can choose $z_1, z_2 \in X_0$ so that

(4) $\|z_1 - x_1\| \leqq \frac{1}{8}\|x_1 - x_2\|$, $\|z_2 - x_2\| \leqq \frac{1}{8}\|x_1 - x_2\|$.

It follows from (4) that

(5) $z_1 \neq z_2$,

(6) $\|(z_1 - x_1) - (z_2 - x_2)\| \leqq \frac{1}{4}\|x_1 - x_2\|$.

Further we get from (6) that

(7) $\|z_1 - z_2\| = \|(z_1 - x_1) - (z_2 - x_2) + (x_1 - x_2)\| \geqq$
$\geqq \|x_1 - x_2\| - \|(z_1 - x_1) - (z_2 - x_2)\| \geqq \|x_1 - x_2\| - \frac{1}{4}\|x_1 - x_2\| =$
$= \frac{3}{4}\|x_1 - x_2\|$.

Now it would suffice to prove that $l_{z_1,z_2}(x_1 - x_2) \neq 0$. Assume the contrary, i.e.

(8) $l_{z_1,z_2}(x_1 - x_2) = 0$.

Then it follows from (3), (5) and (7) that

(9) $\frac{3}{4}\|x_1 - x_2\| \leqq \|z_1 - z_2\| = l_{z_1,z_2}(x_1 - x_2) =$
$= l_{z_1,z_2}((z_1 - x_1) - (z_2 - x_2) + (x_1 - x_2)) =$
$= l_{z_1,z_2}((z_1 - x_1) - (z_2 - x_2)) \leqq \|(z_1 - x_1) - (z_2 - x_2)\| \leqq \frac{1}{4}\|x_1 - x_2\|.$

Since $x_1 \neq x_2$ the inequality (9) is clearly contradictory and hence (8) cannot be true, i.e. $l_{z_1,z_2}(x_1 - x_2) \neq 0$. We conclude

(10) for every $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ there exist $z_1, z_2 \in X_0$, $z_1 \neq z_2$ so that $l_{z_1,z_2}(x_1) \neq l_{z_1,z_2}(x_2)$.

Let us now denote $L = \{l_{z_1,z_2} : z_1, z_2 \in X_0,\ z_1 \neq z_2\}$. It follows from (1) that L is a countable set and (10) can be written in the form of the assertion of our Proposition.

6. Lemma. *Let x_k, $k \in \{1, 2, \dots\}$, be a sequence in E. If*

(α) *the set $\{x_k : k \in \{1, 2, \dots\}\}$ is relatively weakly compact in E,*

(β) *the sequence $l(x_k)$, $k \in \{1, 2, \dots\}$, is convergent for every $l \in E^*$,*

then the sequence x_k is weakly convergent in E.

Proof. Let us denote $A_k = \{x_j : j \in \{1, 2, \dots\},\ j \geqq k\}$ for every $k \in \{1, 2, \dots\}$. Further let $\bar{A}_k$ be weak closures of A_k, $k \in \{1, 2, \dots\}$.

By assumption (α), $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k$ is non-empty, i.e. we can fix an $x_0 \in E$ so that

(1) $x_0 \in \bar{A}_k$ for every $k \in \{1, 2, \dots\}$.

On the other hand, let $\varepsilon > 0$ and $l \in E^*$.

It follows from (β) that there is a $k_0 \in \{1, 2, \dots\}$ so that $|l(x) - l(y)| \leqq \varepsilon$ for every $x, y \in A_{k_0}$ which implies

(2) $|l(x) - l(y)| \leqq \varepsilon$ *for every* $x, y \in \bar{A}_{k_0}$.

By (1) and (2) we have $|l(x_k) - l(x_0)| \leqq \varepsilon$ for every $k \geqq k_0$.

Since $\varepsilon > 0$ and $l \in E^*$ were arbitrary we obtain the required result.

7. Proposition. *Let x_k, $k \in \{1, 2, \dots\}$, be a sequence in E. If there exist subsets $X \subseteq E$ and $L \subseteq E^*$ such that*

(α) *$x_k \in X$ for every $k \in \{1, 2, \dots\}$,*

(β) *the set X is relatively weakly compact in E,*

(γ) *for every, $x, y \in X$, $x \neq y$, there is an $l \in L$ so that $l(x) \neq l(y)$,*

(δ) *the sequence $l(x_k)$, $k \in \{1, 2 \dots\}$, is convergent for every $l \in L$,* *then the sequence* x_k, $k \in \{1, 2, \dots\}$, *is weakly convergent.*

Proof. Let us denote $C(X)$ the algebra of all real continuous functions on X (the continuity is considered here and in the rest of the proof with respect to the weak topology induced on X).

Further, let $C_0(X)$ be the set of all functions of the form

$$\sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_r \in \\ \{0, 1, \dots, r\}}} a_{i_1 i_2 \dots i_r} \, l_1(x)^{i_1} \, l_2(x)^{i_2} \dots l_r(x)^{i_r}, \quad x \in E,$$

where r runs through $\{0, 1, \dots\}$ and $a_{i_1 i_2 \dots i_r} \in \mathbb{R}$.

It is easy to see from the assumptions (γ) and (δ) that

(1) $C_0(X)$ is a subalgebra of $C(X)$ containing all constant functions and separating the points of X.

(2) the sequence $f(x_k)$, $k \in \{1, 2, \dots\}$, is convergent for every $f \in C_0(X)$,

Using the Weierstrass-Stone theorem we obtain from (1) that

(3) $\overline{C_0(X)} = C(X)$, i.e. every $f \in C(X)$ is uniform limit of a sequence f_k, $k \in \{1, 2, \dots\}$, from $C_0(X)$.

It follows from (2) and (3) that

(4) the sequence $f(x_k)$, $k \in \{1, 2, \dots\}$, is convergent for every $f \in C(X)$.

As a particular case of (4) we have

(5) the sequence $l(x_k)$, $k \in \{1, 2, \dots\}$, is convergent for every $l \in E^*$.

The required weak convergence of the sequence x_k, $k \in \{1, 2, \dots\}$, follows from (α), (β) and (5) by means of Lemma 7.

8. Proposition. *Let* $\omega \in \mathbb{R}$ *and* $\varphi \in (0, \infty) \to \mathbb{R}$, *If*

(α) *the function* φ *is measurable,*

(β) *there is a constant* M *such that* $|\varphi(t)| \leqq M e^{\omega t}$ *for almost every* $t > 0$,

then

$$\frac{1}{p!} \left(\frac{p}{t}\right)^{p+1} \int_0^\infty e^{-p\tau/t} \tau^p \, \varphi(\tau) \, d\tau \to_{p \to \infty, p > \omega t} \varphi(t)$$

for every $t > 0$ *such that*

$$\frac{1}{h} \int_0^h |\varphi(t + \tau) + \varphi(t - \tau) - 2\varphi(t)| \, d\tau \to_{h \to 0+} 0 \, .$$

Proof. Immediate consequence of Theorem 6a in [1], Chap. VII.

9. Proposition. *Let* $\omega \geqq 0$, $M \geqq 0$ *and* $\Phi \in (\omega\ \infty) \to \mathbb{R}$. *Then*

(A_1) *the function* Φ *is infinitely differentiable on* (ω, ∞),

(A_2) $|(\mathrm{d}^p/\mathrm{d}\lambda^p)\, \Phi(\lambda)| \leqq Mp!/(\lambda - \omega)^{p+1}$ *for every* $\lambda > \omega$ *and* $p \in \{0\ 1\ \ldots\}$,

if and only if there exists a function $\varphi \in (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *such that*

(B_1) φ *is measurable on* $(0, \infty)$,

(B_2) $|\varphi(t)| \leqq M\mathrm{e}^{\omega t}$ *for almost every* $t > 0$,

(B_3) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\tau}\, \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \Phi(\lambda)$ *for every* $\lambda > \omega$.

Proof. An easy extension of Theorem 16a in [1], Chap. VII.

10. Theorem. *Let* $\omega \geqq 0$, $M \geqq 0$ *and* $F \in (\Phi, \infty) \to E$. *Then*

(A_1) *the function* F *is infinitely differentiable on* (ω, ∞),

(A_2) $\|(\mathrm{d}^p/\mathrm{d}\lambda^p)\, F(\lambda)\| \leqq Mp!/(\lambda - \omega)^{p+1}$ *for every* $\lambda > \omega$ *and* $p \in \{0, 1, \ldots\}$,

(A_3) *for almost every* $t > 0$, *the set*

$$\left\{\frac{1}{p!}\left(\frac{p}{t}\right)^{p+1} F^{(p)}\left(\frac{p}{t}\right) : p \in \{0, 1, \ldots\},\quad p > \omega t\right\}$$

is relatively weakly compact in E,

if and only if there exists a function $f \in (0, \infty) \to E$ *such that*

(B_1) f *is measurable on* $(0, \infty)$,

(B_2) $\|f(t)\| \leqq M\mathrm{e}^{\omega t}$ *for almost every* $t > 0$,

(B_3) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\tau} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau = F(\lambda)$ *for every* $\lambda > \omega$.

Proof. "Only if". For the sake of simplicity, let us denote

(1) $\displaystyle f_p(t) = \frac{(-1)^p}{p!}\left(\frac{p}{t}\right)^{p+1} F^{(p)}\left(\frac{p}{t}\right)$ for $t > 0$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$, such that $p > \omega t$.

It is easy to see from (A_1) that there is a subspace E_0 of E such that

(2) E_0 is closed and separable,

(3) $F(\lambda) \in E_0$ for every $\lambda > \omega$.

It follows from (2) and (3) that

(4) $F^{(p)}(\lambda) \in E_0$ for every $\lambda > \omega$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$.

Now (1) and (4) imply

(5) $f_p(t) \in E_0$ for every $t > 0$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$ such that $p > \omega t$.

In view of Proposition 5 we obtain from (2) that there is a set $L \subseteq E^*$ such that

(6) L is a countable

(7) for every $x \in E_0$, $x \neq 0$, there is an $l \in L$ such that $l(x) \neq 0$.

By means of Proposition 9 we obtain from (A_1) and (A_2) that for every $l \in E^*$ we can fix a function $\varphi_l \in (0, \infty) \to \mathbb{R}$ such that

(8) φ_l is measurable on $(0, \infty)$ for every $l \in E^*$,

(9) for every $l \in E^*$, $|\varphi_l(t)| \leqq M e^{\omega t}$ for almost all $t > 0$,

(10) $\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} \varphi_l(\tau)\, d\tau = l(F(\lambda))$ for every $\lambda > \omega$ and $l \in E^*$.

By use of Proposition 8 we get from (1), (8), (9) and (10) that

(11) for every $l \in E^*$, $l(f_p(t)) \to_{p\to\infty, p>\omega t} \varphi_l(t)$ for almost every $t > 0$.

It follows from (6) and (11) that there is a set $S_1 \subseteq (0, \infty)$ such that

(12) the set $(0, \infty) \setminus S_1$ is measurable of measure zero,

(13) $l(f_p(t)) \to \varphi_l(t)$ for every $t \in S_1$ and $l \in L$.

On the other hand, it follows from (A_3) that there is a set $S_2 \subseteq (0, \infty)$ such that

(14) the set $(0, \infty) \setminus S_2$ is measurable of measure zero,

(15) the set $\{f_p(t) : p \in \{0, 1, \ldots\}, p > \omega t\}$ is relatively weakly compact in E for every $t \in S_2$.

Let now

(16) $S = S_1 \cap S_2$.

It follows from (12)–(16) that

(17) the set $(0, \infty) \setminus S$ is measurable of measure zero,

(18) the sequence $l(f_p(t))$, $p \in \{0, 1, \ldots\}$, $p > \omega t$, is convergent for every $t \in S$ and $l \in L$,

(19) the set $\{f_p(t) : p \in \{0, 1, \ldots\}, p > \omega t\}$ is relatively weakly compact in E for every $t \in S$.

Now we shall prove that

(20) the sequence $f_p(t)$, $p \in \{0, 1, \ldots\}$, $p > \omega t$ is weakly convergent in E for every $t \in S$.

Indeed, let us first fix a $t \in S$ and a $p_0 \in \{0, 1, \ldots\}$, so that $p_0 > \omega t$. Let us write $x_k = f_{p_0+k}(t)$, $k \in \{1, 2. \ldots\}$, and let X be the weak closure of the set $\{f_p(t) : p \in \in \{0, 1, \ldots\}, p > \omega t\}$. Then the condition ($\alpha$) of Proposition 7 is evidently fulfilled, the condition (β) follows from (19), the condition (γ) from (2), (5) and (7) and the condition (δ) from (18). Now the conclusion of Proposition 7 gives (20).

Let us now define in view of (20)

(21) $f(t) = \text{weak}-\lim\limits_{p\to\infty, p>\omega t} f_p(t)$ for every $t \in S$, $f(t) = 0$ for $t \in (0, \infty) \setminus S$.

It follows from (2), (5) and (21) that

(22) $f(t) \in E_0$ for every $t > 0$.

Further, it follows from (13), (16), (17), (20) and (21) that

(23) for every $l \in E^*$, $l(f(t)) = \varphi_l(t)$ for almost every $t > 0$.

Now (8) and (23) imply the condition (α) of Proposition 3 and (2) and (22) the condition (β). Hence the conclusion of this Proposition shows that

(24) the statement (B_1) holds.

It follows from (1), (21) and (A_2) that

(25) $$|l(f(t))| = \Big|\lim_{p\to\infty, p>\omega t} l(f_p(t))\Big| \leqq \lim_{p\to\infty, p>\omega t} |l(f_p(t))| \leqq \lim_{p\to\infty, p>\omega t} \|l\|\,\|f_p(t)\| \leqq$$

$$\leqq \|l\| \lim_{p\to\infty, p>\omega t} \left\| \frac{(-1)^p}{p!}\left(\frac{p}{t}\right)^{p+1} F^{(p)}\left(\frac{p}{t}\right)\right\| \leqq$$

$$\leqq \|l\| \lim_{p\to\infty, p>\omega t}\left(\frac{1}{p!}\left(\frac{p}{t}\right)^{p+1} \frac{Mp!}{\left(\frac{p}{t} - \omega\right)^{p+1}}\right) = M\|l\| \lim_{p\to\infty, p>\omega t} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega t}{p}\right)^{p+1}} =$$

$$= Me^{\omega t}\|l\| \text{ for every } t \in S \text{ and } l \in E^*.$$

Immediate consequence of (25) is

(26) $\|f(t)\| \leqq Me^{\omega t}$ for every $t \in S$.

Now we see from (17) and (26) that

(27) the statement (B_2) holds.

Finally we obtain from (8)–(10), (23), (24) and (26) that

$$(28)\quad l\left(\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} f(\tau)\,d\tau\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\, l(f(\tau))\,d\tau =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\,\varphi_l(\tau)\,d\tau = l(F(\lambda)) \text{ for every } \lambda > \omega \text{ and } l \in E^*.$$

An immediate consequence of (28) is

(29) the statement (B_3) holds.

The proof of the "only if" part is executed by (24), (26) and (29).

"If" Let us first fix an $f \in (0, \infty) \to E$ such that (B_1), (B_2) and (B_3) hold.

In particular, by (B_3) we have $F(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} f(\tau)\,d\tau$ for every $\lambda > \omega$ and we easily obtain from (B_1), (B_2) by procedures usual in the classical Laplace transform that

(1) the statements (A_1) and (A_2) hold.

Let us now denote

$$(2)\quad S = \left\{t : t > 0,\ \frac{1}{h}\int_0^h \|f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t)\|\,d\tau \to_{h\to 0+} 0\right\}.$$

According to Proposition 4 we obtain from (B_1) and (2) that

(3) the set $(0, \infty) \setminus S$ is measurable of measure zero.

Taking $\varphi(t) = l(f(t))$ for $t > 0$ and $l \in E^*$, we obtain easily from (B_1), (B_2) and (B_3) and from (2) by means of Proposition 8 that

$$(4)\quad \frac{(-1)^p}{p!}\left(\frac{p}{t}\right)^{p+1} l\left(F^{(p)}\left(\frac{p}{t}\right)\right) \to_{p\to\infty,\, p>\omega t} l(f(t)) \text{ for every } t \in S \text{ and } l \in E^*.$$

But (4) implies

(5) the set $\left\{\frac{1}{p!}\left(\frac{p}{t}\right)^{p+1} F^{(p)}\left(\frac{p}{t}\right) : p \in \{0, 1, \ldots\},\ p > \omega t\right\}$ is relatively weakly compact in E for every $t \in S$.

Combining (2) and (5) we have

(6) the statement (A_3) holds.

The proof of "if" part is given by (1) and (6).

11. Remark. The condition (A_3) in the preceding Theorem 10 can be replaced by a formally more general one, namely
(A_3') *for almost every* $t > 0$, *there exists a sequence* $t_p > 0$, $p \in \{0, 1, \ldots\}$, *such that*

$$t_p \to_{p \to \infty} t\,,$$

the set $\left\{\frac{1}{p!}\left(\frac{p}{t_p}\right)^{p+1} F^{(p)}\left(\frac{p}{t_p}\right) : p \in \{0, 1 \ldots\},\ p > \omega t_p\right\}$ *is relatively weakly compact in* E.

The proof of corresponding version of Theorem 10, with the condition (A_3') above, remains almost unchanged and the necessary little adaptations can be left to the reader, but instead of Proposition 8 we need the following

8′. Proposition. *Let* $\omega \in R$ *and* $\varphi \in (0, \infty) \to \mathbb{R}$. *If* (α), (β) *as in Proposition* 8, *then*

$$\frac{1}{p!}\left(\frac{p}{t_p}\right)^{p+1} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-p\tau/t_p}\, \tau^p\, \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau \to_{p\to\infty, p>\omega t_p} \varphi(t)$$

for every $t > 0$ *and every sequence* $t_p > 0$, $p \in \{0, 1, \ldots\}$, *such that* $t_p \to_{p\to\infty} t$ *and*

$$\frac{1}{h}\int_0^h |\varphi(t+\tau) + \varphi(t-\tau) - 2\,\varphi(t)|\, \mathrm{d}\tau \to_{h\to 0+} 0.$$

Proof. See [6], Theorem 1.1. Pollard uses a little different record of the assertion, but the reader easily shows that both formulations are equivalent.

The requirement $t_p \to_{p\to\infty} t$ cannot be weakened as seen on the special case $\varphi(t) = t$, $t > 0$.

12. Theorem. (Miyadera) *Let* $\omega \geqq 0$, $M \geqq 0$ *and* $F \in (\omega, \infty) \to E$. *If the space* E *is reflexive, then*

(A_1) *the function* F *is infinitely differentiable on* (ω, ∞),

(A_2) $\|(\mathrm{d}^p/\mathrm{d}\lambda^p)\, F(\lambda)\| \leqq Mp!/(\lambda - \omega)^{p+1}$ *for every* $\lambda > \omega$ *and* $p \in \{(0, 1, \ldots\}$,

if and only if there exists a function $f \in (0, \infty) \to E$ *such that*

(B_1) f *is measurable on* $(0, \infty)$,

(B_2) $\|f(t)\| \leqq M\mathrm{e}^{\omega t}$ *for almost every* $t > 0$,

(B_3) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\tau} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau = F(\lambda)$ *for every* $\lambda > \omega$.

Proof. In view of Theorem 10 it is only to verify that the condition (A_3) of Theorem 10 follows from conditions (A_1) and (A_2).

Indeed we see from (A_1) and (A_2) that

$$\left\|\frac{1}{p!}\left(\frac{p}{t}\right)^{p+1} F^{(p)}\left(\frac{p}{t}\right)\right\| \leqq M \frac{1}{\left(1-\dfrac{\omega t}{p}\right)^{p+1}} \text{ for every } t>0 \text{ and } p \in \{0, 1, \ldots\} \text{ such}$$

that $p > \omega t$.

Since every bounded set in E is relatively weakly compact owing to the reflexivity of E, the above established inequality proves (A_3) of Theorem 10 even for every $t > 0$ because, as well-known, $\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{\omega t}{p}\right)^{p+1}} \to_{p\to\infty, p>\omega t} e^{\omega t}$ for every $t \in R$.

13. Theorem. *Let $\omega \geqq 0$, $M \geqq 0$, $C \subseteq E$ and $F \in (\omega, \infty) \to E$. If the set C is a convex, symmetric and weakly compact subset of E, then*

(A_1) *the function F is infinitely differentiable on $(0, \infty)$,*

(A_2) $(d^p/d\lambda^p)\, F(\lambda) \in (Mp!/(\lambda-\omega)^{p+1})\, C$ *for every $\lambda > \omega$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$,*

if and only if there exists a function $f \in (0, \infty) \to E$ such that

(B_1) *f is measurable on $(0, \infty)$,*

(B_2) *$f(t) \in Me^{\omega t}C$ for almost every $t > 0$,*

(B_3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} f(\tau)\, d\tau = F(\lambda)$ *for every $\lambda > \omega$.*

Proof. "Only if". Let us denote

(1) $M_0 = \sup\limits_{x \in C} (\|x\|)$.

It follows from (A_2) and (1) that

(2) $\|(d^p/d\lambda^p)\, F(\lambda)\| \leqq M_0 p!/(\lambda-\omega)^{p+1}$ for every $\lambda > \omega$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$.

Further it follows from (A_2) that

(3) $$\frac{1}{p!}\left(\frac{p}{t}\right)^{p+1} F^{(p)}\left(\frac{p}{t}\right) \in \frac{1}{p!}\left(\frac{p}{t}\right)^{p+1} \frac{Mp!}{\left(\dfrac{p}{t}-\omega\right)^{p+1}}\, C = \frac{M}{\left(1-\dfrac{\omega t}{p}\right)^{p+1}}\, C$$

for every $t > 0$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$ such that $p > \omega t$.

But since, as well-known,

$$\frac{1}{\left(1-\frac{\omega t}{p}\right)^{p+1}} \rightarrow_{p\rightarrow\infty, p>\omega t} \mathrm{e}^{\omega t}$$

for every $t > 0$, we see from (3) that

(4) the set $\left\{\frac{1}{p!}\left(\frac{p}{t}\right)^{p+1} F^{(p)}\left(\frac{p}{t}\right) : p \in \{0, 1, \ldots\},\ p > \omega t\right\}$ is relatively weakly compact in E.

We see from (A_1), (2) and (4) that the assumptions (A_1), (A_2) and (A_3) of Theorem 10 are fulfilled and consequently there exists a function $f \in (0, \infty) \rightarrow E$ such that

(5) f is measurable on $(0, \infty)$,

(6) $\|f(t)\| \leqq M_0 \mathrm{e}^{\omega t}$ for almost every $t > 0$,

(7) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\tau} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = F(\lambda)$ for every $\lambda > \omega$.

Using Proposition 4 we obtain from (5) that there is an $S \subseteq (0, \infty)$ such that

(8) the set $(0, \infty) \setminus S$ is measurable of measure zero,

(9) $\frac{1}{h}\int_0^\infty \|f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t)\|\,\mathrm{d}\tau \rightarrow_{h\rightarrow 0+} 0$ for every $t \in S$.

By Proposition 8 we see from (5), (6), (7) and (9) that

(10) $l(f(t)) = \lim\limits_{p\rightarrow\infty, p>\omega t} \frac{(-1)^p}{p!}\left(\frac{p}{t}\right)^{p+1} l\left(F^{(p)}\left(\frac{p}{t}\right)\right)$ for every $t \in S$ and $l \in E^*$.

It follows from (A_2) that

(11) $\frac{(-1)^p}{p!}\left(\frac{p}{t}\right)^{p+1} F^{(p)}\left(\frac{p}{t}\right) \in \frac{M}{\left(1-\frac{\omega t}{p}\right)^{p+1}} C$ for every $t > 0$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$ such that $p > \omega t$.

Now we get from (10) and (11) that

(12) $|l(f(t))| \leqq M\mathrm{e}^{\omega t} \sup\limits_{x\in C}(|l(x)|)$ for every $t \in S$ and $l \in E^*$.

Now we need to prove that

(13) $f(t) \in Me^{\omega t}C$ for every $t \in S$.

If $M = 0$, then (13) is an obvious consequence of (12). Hence we shall suppose $M \neq 0$ and proceed indirectly. If (13) does not hold, then there exists a $t_0 \in S$ such that $f(t_0) \notin Me^{\omega t_0}C$. According to a consequence of Hahn-Banach theorem, we can find an $l_0 \in E^*$ so that

(14) $l_0(f(t_0)) > 1$,

(15) $|l_0(x)| \leqq 1$ for every $x \in Me^{\omega t_0}C$.

In view of supposed $M \neq 0$, the property (15) can be written as

(16) $|l_0(x)| \leqq M^{-1}e^{-\omega t_0}$ for every $x \in C$.

Now we obtain from (12) and (16) that $|l_0(f(t_0))| \leqq Me^{\omega t_0} M^{-1}e^{-\omega t_0} = 1$ which contradicts (14) and thus proves (13).

The "only if" part follows from (5), (7), (8) and (13).

"If." Let us first fix a function $f \in (0, \infty) \to E$ satisfying (B_1), (B_2) and (B_3).

It is easy to see that (A_1) holds.

If $M = 0$, then (A_2) is obvious and thus we shall suppose $M \neq 0$ and proceed indirectly. If (A_2) does not hold, then there exist a $\lambda_0 > \omega$ and a $p_0 \in \{0, 1, \ldots\}$, such that $F^{(p_0)}(\lambda_0) \notin (Mp_0!/(\lambda_0 - \omega)^{p_0+1})\, C$. According to a consequence of Hahn-Banach theorem we can find an $l_0 \in E^*$ such that

(1) $l_0(F^{(p_0)}(\lambda_0)) > 1$,

(2) $|l_0(x)| \leqq 1$ for every $x \in (Mp_0!/(\lambda_0 - \omega)^{p_0+1})\, C$.

In view of supposed $M \neq 0$ we can write (2) in the form

(3) $|l_0(x)| \leqq (\lambda_0 - \omega)^{p_0+1}/Mp_0!$ for every $x \in C$.

Now we obtain from (B_1), (B_2), (B_3) and (3) that

$$|l_0(F^{(p_0)}(\lambda_0))| = \left|l_0\left(\int_0^\infty e^{-\lambda_0\tau}(-\tau)^{p_0} f(\tau)\, d\tau\right)\right| \leqq \int_0^\infty e^{-\lambda_0\tau}\tau^{p_0} |l_0(f(\tau))|\, d\tau \leqq$$

$$\leqq \int_0^\infty e^{-\lambda_0\tau}\tau^{p_0} Me^{\omega\tau} \frac{(\lambda_0 - \omega)^{p_0+1}}{Mp_0!}\, d\tau = 1$$

which contradicts (1) and proves (A_2).

The proof of "if" part is complete.

14. Some comments. The basic result in the problem of representability for numerical exponentially bounded functions is due to D. V. WIDDER and is quoted above as Proposition 11.

The extension of Widder's result to vector-valued functions in reflexive Banach spaces, our Theorem 12, is due to I. MIYADERA [4].

Moreover, Miyadera presented an example showing that the conditions (A_1), (A_2) of Theorem 12 cannot be sufficient for the validity of the mentioned theorem in nonreflexive Banach spaces.

Consequently, an additional condition to (A_1), (A_2) of Theorem 12 is necessary. Our condition (A_3) in Theorem (10) (or (A'_3) in Remark 11) seems the most simple and natural one and solves completely the problem in consideration. Miyadera's theorem is then a simple consequence of Theorem 10.

Another possibility to extend Miyadera's result to nonreflexive spaces is given in Theorem 13 which deals with the representability problem by exponentially weakly compactly bounded functions and is also an easy consequence of Theorem 10.

Recently, the representability problem was attacked by D. LEVIATAN [5] (see Theorem 7 in [5]) from rather different point of view. Leviatan proved, among others, that, under conditions (A_1), (A_2) of Theorem 12, the original function f can be found in dual spaces of appropriate subspaces of E^*.

Finally, let us remark that the proof of Proposition 7, given by means of Weierstrass-Stone theorem, may seem a little unadequate because it is too "analytic" and the problem itself is essentially linear. The result follows also easily from Šmuljan's theorem on weakly convergent subsequences of weakly compact sequences and, moreover, a direct purely "linear" proof can be given.

References

[1] *Widder, D. V.:* The Laplace transform, 1946.

[2] *Hille, E., Phillips, R. S.:* Functional analysis and semigroups, 1957.

[3] *Hewitt, E., Stromberg, K.:* Real and abstract analysis, 1975.

[4] *Miyadera, I.:* On the representation theorem by the Laplace transformation of vector-valued functions, Tôhoku Math. J., *8* (1956), 170—180.

[5] *Leviatan, D.:* Some vector-valued Laplace transforms, Israel J. Math., *16* (1973), 73—86.

[6] *Pollard, H.:* Real inversion formulas for Laplace integrals, Duke Math. J., *7* (1940), 445—452.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

GROUPOIDS WITH A CLOSURE CONDITION

NASEEM AJMAL, Delhi

(Received March 23, 1977)

INTRODUCTION

J. ACZEL [1] while classifying regular algebraic nets corresponding to the classes of isotopic quasigroups and satisfying various closure conditions, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ and $\boldsymbol{H}$, also proved that in a quasigroup, associativity implies Reidemeister condition $\boldsymbol{R}$, i.e., for all x_i, y_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ in the quasigroup,

$$x_1 . y_2 = x_2 . y_1 \; (= q), \quad x_1 . y_4 = x_2 . y_3 \; (= r), \quad x_3 . y_2 = x_4 . y_1 \; (= p)$$

imply that

$$x_3 . y_4 = x_4 . y_3 \; (= s).$$

Further, Aczel [2] proved that Reidemeister condition is necessary and sufficient for associativity of loops.

By putting $x_1 = y_1 = e$ the identity of the loop in condition $\boldsymbol{R}$ we get condition $\boldsymbol{R}'$, i.e.,

$$\text{if} \quad y_2 = x_2 \quad \text{and} \quad y_4 = x_2 . y_3, \quad x_4 = x_3 . y_2 \quad \text{then} \quad x_3 . y_4 = x_4 . y_3 .$$

$\boldsymbol{R}'$ is equivalent to Reidemeister condition $\boldsymbol{R}$ in a loop; further, $\boldsymbol{R}'$ is equivalent to assiciativity in any groupoid.

Here we define another closure condition $\boldsymbol{N}$ for a groupoid $(G, \cdot)$, namely, for all x_i, y_i in G $(i = 1, 2, 3, 4)$,

$$x_1 . y_2 = x_3 . y_1 \; (= q), \quad x_1 . y_4 = x_2 . y_3 \; (= r) \quad x_2 . y_2 = x_4 . y_1 \; (= p)$$

imply that

$$x_3 . y_4 = x_4 . y_3 \; (= s).$$

This condition is certainly different from Reidemeister, Bol and Hexagonal closure conditions.

We observe that in a loop, closure condition $\boldsymbol{N}$ is equivalent to associativity together with commutativity. In a groupoid with an identity, if we put $x_1 = y_1 = e$

the identity of the groupoid in condition N then we get condition N', i.e.,

$$\text{if} \quad y_2 = x_3 \quad \text{and} \quad y_4 = x_2 \,.\, y_3 \,, \quad x_4 = x_2 \,.\, y_2 \quad \text{then} \quad x_3 \,.\, y_4 = x_4 \,.\, y_3 \,.$$

Here N' is equivalent to N_r-associativity (discussed in [3]) in any groupoid.

A groupoid $(G, \cdot)$ satisfies N_r-associativity [3] if $(a \,.\, b) \,.\, c = b \,.\, (a \,.\, c)$ for all a, b, c in G.

In this paper we wish to investigate some of the properties of groupoids satisfying closure condition N. We shall see under what conditions these groupoids are semigroups or groups.

FOTEDAR in [6] has investigated necessary and sufficient conditions for an isotope of a given groupoid to be a semigroup or group. He appears to be successful in giving a partial solution of the problem, assuming the presence of an identity element in the given groupoid. In this connection he has stated that generalized associative law holds in a groupoid $(G, \cdot)$, if there exists a pair of elements (a, b) in G such that

$$[\{x(by)\}\, a]\, z = x[b\{(ya)\, z\}]$$

for all x, y, z in G, and then he has proved the following.

Theorem. *If $(G, \cdot)$ is a groupoid with unit element 1 then the groupoid $(G, 0)$ isotopic to $(G, \cdot)$ under the isotopy $x \,0\, y = x^\alpha \,.\, y^\beta$ is a semigroup iff there exists a pair of elements a, b in G such that*

$$x^\alpha = xa \,, \quad x^\beta = bx$$

for all x in G and $(G, \cdot)$ satisfies the g.a.l.

$$[\{x(by)\}\, a]\, z = x[b\{(ya)\, z\}]$$

for all x, y, z in G. Moreover, $(G, 0)$ is a group iff in addition to the above conditions, $(G, \cdot)$ is a quasigroup.

Finally, he remarks that the presence of an identity element in $(G, \cdot)$ introduces an element of incompleteness in the solution of the problem. In this context, we may invoke the following analogue of a famous theorem due to A. A. ALBERT, proved by N. J. S. HUGHES in 1957.

If a groupoid with a unit element is isotopic to a semigroup, then they are isomorphic.

This result rules out the possibility of finding necessary and sufficient conditions for an isotope of a given groupoid with a unit element to be a semigroup since in that case the groupoid itself becomes a semigroup. Therefore, the theorem proved in this regard states only the following.

If a groupoid with a unit element contains a pair of right non-singular and left non-singular elements such that the g.a.l. is satisfied then it is a semigroup.

Theorem 6 of this paper gives us necessary and sufficient conditions for an isotope of a given groupoid to be an abelian group.

Definition 1. A groupoid $(G, \cdot)$ is called *left equally cancellative* if and only if for all x_1, x_2, y_1 in G,

$$y_1 \,.\, x_1 = y_1 \,.\, x_2 \quad \text{implies} \quad y \,.\, x_1 = y \,.\, x_2 \quad \text{for all } y \text{ in } G\,.$$

Similarly, *right equally cancellative* groupoids are defined. Further, a groupoid is said to be *equally cancellative* if it is both left and right equally cancellative.

Definition 2. A groupoid $(G, \cdot)$ is called *left cancellative* if and only if for all x_1, x_2, y in G,

$$y \,.\, x_1 = y \,.\, x_2 \quad \text{implies} \quad x_1 = x_2\,.$$

Similarly, *right cancellativity* and *(two sided) cancellativity* are defined.

Definition 3. A groupoid $(G, \cdot)$ is an *N-groupoid* if and only if for all x_i, y_i in G $(i = 1, 2, 3, 4)$,

$$x_1 \,.\, y_2 = x_3 \,.\, y_1\,, \quad x_1 \,.\, y_4 = x_2 \,.\, y_3\,,$$

$$x_2 \,.\, y_2 = x_4 \,.\, y_1 \quad \text{imply} \quad x_3 \,.\, y_4 = x_4 \,.\, y_3\,.$$

We shall denote this groupoid by $(G_N, \cdot)$.

When used in connection with a groupoid $(G, \cdot)$ the product xy will be equivalent to $x \,.\, y$.

The first theorem gives us alternative axioms for an abelian group.

Theorem 1. *A groupoid $(G, \cdot)$ satisfies the conditions*

(i) *for all x_2, x_3, y_3 in G,*

$$y_4 = x_2 y_3 \quad \text{and} \quad x_4 = x_2 x_3 \quad \text{imply} \quad x_3 y_4 = x_4 y_3\,;$$

(ii) *$x\,a = b$ is uniquely solvable in x for all a, b in G, if and only if $(G, \cdot)$ is an abelian group.*

Proof. If condition (i) holds in G then by putting the values of $y_4 = x_2 y_3$ and $x_4 = x_2 x_3$ in $x_3 y_4 = x_4 y_3$, we have, for all x_2, x_3, y_3 in G,

$$x_3(x_2 y_3) = (x_2 x_3)\, y_3 \quad (N_r\text{-associativity})\,.$$

Next we prove that $(G, \cdot)$ is commutative.

Let $a, b \in G$, by condition (ii) there exists a unique x in G such that $x\,a = b$.

Now,

$$a\,b = a(x\,a) = (x\,a)\,a = b\,a\,.$$

Then commutativity of $(G, \cdot)$ and condition (ii) imply that $a\,x = b$ is also uniquely solvable in x for every a, b in G, hence $(G, \cdot)$ is a quasigroup. Again commutativity and N_r-associativity imply that $(G, \cdot)$ is associative as well.

Therefore $(G, \cdot)$ is an abelian group.

The converse of Theorem 1 is trivially true.

Theorem 2. *Every N-groupoid is equally cancellative.*

Proof. Suppose $(G_N, \cdot)$ is an N-groupoid and

$$r_1 s_1 = r_2 s_1\,, \quad r_1, r_2, s_1 \text{ in } G_N\,.$$

In closure condition N

$$x_1 y_2 = x_3 y_1\,, \quad x_2 y_2 = x_4 y_1\,, \quad x_1 y_4 = x_2 y_3$$

imply

$$x_3 y_4 = x_4 y_3\,;$$

put

$$x_1 = x_2 = x_3 = r_1\,, \quad x_4 = r_2\,,$$

$$y_1 = y_2 = s_1\,, \qquad y_3 = y_4 = s\,, \quad s \text{ in } G_N\,.$$

This gives

$$r_1 s_1 = r_2 s_1 \quad \text{implies} \quad r_1 s = r_2 s \quad \text{for all } s \text{ in } G\,.$$

Similarly, right equal cancellativity can be proved.

Lemma 1. *Every equally cancellative groupoid with an identity element is cancellative.*

Theorem 3. *A groupoid with an identity element is an N-groupoid if and only if it is a cancellative abelian semigroup.*

Proof. Suppose $(G_N, \cdot)$ is an N-groupoid with an identity element e.

Let x_1, x_2 in G_N, then by condition N equations

$$x_1 x_2 = (x_1 x_2)\, e\,, \quad x_1 e = e x_1\,, \quad e x_2 = x_2 e$$

imply

$$(x_1 x_2)\, e = x_2 x_1\,,$$

i.e., $x_1 x_2 = x_2 x_1$. Hence $(G_N, \cdot)$ is commutative.

Further, if x_1, x_2, x_3 are in G_N then

$$x_2 x_1 = (x_1 x_2)\, e\,, \quad x_2 x_3 = (x_3 x_2)\, e\,, \quad (x_3 x_2)\, x_1 = ((x_3 x_2)\, x_1)\, e$$

imply

$$(x_1 x_2)\, x_3 = ((x_3 x_2)\, x_1)\, e\,.$$

This gives us $(x_1 x_2)\, x_3 = (x_3 x_2)\, x_1$, which reduces to associativity in commutative groupoids.

Cancellativity follows from Theorem 2 and Lemma 1.

Conversely, suppose $(G, \cdot)$ is a cancellative abelian semigroup.

Let $x_i, y_i \in G$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ be such that

$$x_1 y_2 = x_3 y_1 , \quad x_1 y_4 = x_2 y_3 , \quad x_2 y_2 = x_4 y_1 .$$

Then

$$(x_1 y_2)(x_4 y_1)(x_2 y_3) = (x_3 y_1)(x_2 y_2)(x_1 y_4) .$$

Now applying associativity, commutativity and cancellativity we get

$$x_4 y_3 = x_3 y_4 .$$

Hence $(G, \cdot)$ satisfies condition N.

Corollary 3.1. *A loop satisfies closure condition N if and only if it is an abelian group.*

Corollary 3.2. *A groupoid $(G, \cdot)$ is an N-groupoid with an identity element e such that, for all b in G, $a \,.\, b = e$ has a solution in a, if and only if $(G, \cdot)$ is an abelian group.*

Theorem 4. *If $(G_N, \cdot)$ is an N-groupoid with elements r, s such that, for all y in G_N, there exists x in G_N satisfying $xy = s$ and $rG = G$ then for each pair of elements c, d in G_N the equations*

$$xc = d , \quad cy = d$$

are solvable for x and y in G_N.

Proof. We shall first prove that $G_N t = G_N$, where $t \in G_N$ is such that $r\,t = s$.

For an arbitrary y in G_N there exist x_1, y_1, x_2 in G_N such that $x_1 y = s$, $x_1 t = r y_1$, $x_2 y_1 = s$.

By closure condition N, equations

$$x_1 t = r y_1 , \quad x_1 y = rt , \quad rt = x_2 y_1 \quad \text{imply} \quad ry = x_2 t .$$

As y is abitrary, we have $G_N t = G_N$.

The next step is to show that for all x in G_N, $xy = s$ has a solution in y.

Let $x \in G_N$, then there exist y_1, x_1, y_2, x_2 in G_N such that $xt = ry_1$, $x_1 y_1 = rt$, $x_1 t = r y_2$, $x_2 y_2 = rt$.

Due to closure condition N, equations

$$rt = x_2 y_2 , \quad rt = x_1 y_1 , \quad \text{and} \quad x_1 t = r y_2 \quad \text{imply} \quad x_2 t = r y_1 ;$$

from $xt = ry_1$ we get $x_2 t = x\,t$; but G_N is equally cancellative by Theorem 2, therefore $x_2 y_2 = x y_2$ and then $x_2 y_2 = rt = s$, which gives $x y_2 = s$.

Now in order to complete the proof of the theorem, let $x \in G_N$; then there exist y_1, x_1 in G_N such that

$$xt = r y_1 \quad \text{and} \quad x_1 y_1 = rt ;$$

and for arbitrary y_2 in G_N, there exist y_3 in G_N such that

$$x_1 y_2 = r y_3 .$$

From these three equations, applying closure condition N, we get

$$x y_3 = r y_2 .$$

As y_2 is arbitrary and $rG_N = G_N$ we have

$$x \,.\, G_N = G_N \quad \text{for all } x \text{ in } G_N .$$

By symmetric considerations

$$G_N \,.\, y = G_N \quad \text{for all } y \text{ in } G_N .$$

Thus the theorem is proved.

Theorem 5. *Let $(G_N, \cdot)$ be an N-groupoid with elements r, s in G_N such that for all y in G_N there exists x in G_N satisfying $xy = s$ and $rG_N = G_N$. Then a new operation $+$ can be defined on the elements of G_N as follows: For arbitrary but fixed m and n in G_N, define*

$$xn + my = xy \quad \textit{for all } x, y \textit{ in } G_N .$$

Then $+$ is a well defined binary operation on G_N, under which G_N forms an abelian group.

Proof. Consider the mappings from G_N to G_N, given by

$$x \to xn \ (= X) \quad \text{and} \quad y \to my \ (= Y) .$$

Then it follows from Theorem 4 that these mappings are onto G_N.

Next, we shall show that $+$ is a well defined operation. From Theorem 2 we see that

$$x_1 n = x_2 n \quad \text{implies} \quad x_1 y = x_2 y \quad \text{for all } y \text{ in } G_N ,$$

so that

(1) $$x_1 y_1 = x_2 y_1 .$$

Similarly, $my_1 = my_2$ gives

(2) $$x_2 y_1 = x_2 y_2$$

so that if $x_1 n = x_2 n$ and $my_1 = my_2$ then (1) and (2) imply that

$$x_1 y_1 = x_2 y_2$$

and hence $+$ is a well defined operation.

Here mn acts as identity element for the groupoid $(G_N, +)$. Indeed,

$$mn + my = my , \quad xn + mn = xn .$$

Groupoid $(G_N, +)$ also retains the N-groupoid property of $(G_N, \cdot)$. Let

$$X_1 + Y_2 = X_3 + Y_1 , \quad X_1 + Y_4 = X_2 + Y_3 \quad \text{and} \quad X_2 + Y_2 = X_4 + Y_1 ,$$

where X_i, Y_i in G_N $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Then there exist x_i, y_i in G_N $(i = 1, 2, 3, 4)$ such that

$$x_i n = X_i \quad \text{and} \quad m y_i = Y_i$$

and thus

$$x_1 y_2 = x_3 y_1 , \quad x_1 y_4 = x_2 y_3 \quad \text{and} \quad x_2 y_2 = x_4 y_1 ,$$

which implies $x_3 y_4 = x_4 y_3$, which in turn gives

$$X_3 + Y_4 = X_4 + Y_3 .$$

Then Theorem 3 implies that $(G_N, +)$ is an abelian semigroup. For completing the proof of the theorem we have to establish the quasigroup property also in $(G_N, +)$.

Let $C, D \in G_N$, then we shall show that $C + Y = D$ is uniquely solvable in Y. By Theorem 4 there exist c, y in G_N such that $cn = C$ and $cy = D$. Assume $my = Y$, then $C + Y = D$. Further, Theorem 3 gives the uniqueness of the solution. The proof for the solution on the left is similar.

Thus the theorem is proved.

Now we shall take up the problem attempted by Fotedar [6].

Since we know that every isotope of a given groupoid is isomorphic to a principal isotope, there is no loss of generality in the theory of isotopy in restricting our attention to principal isotopes, a fact pointed out in various papers of Albert and Bruck.

Here we start with

Theorem 6. *A groupoid $(G, +)$ isotopic to a given groupoid $(G, \cdot)$ under the isotopy $x + y = x^\alpha y^\beta$ is an abelian group if and only if the following conditions are satisfied*:

$$x^{\alpha^{-1}} = xn , \quad x^{\beta^{-1}} = mx \quad \text{for some } n, m \text{ in } G ,$$

for all x in G; and $(G, \cdot)$ is an N-groupoid such that there exists a pair of elements r, s in G satisfying $rG = G$ and for all y in G, $xy = s$ is solvable in x.

Proof. Suppose $(G, +)$ is a groupoid isotopic to a given groupoid $(G, \cdot)$ under the isotopy

$$x + y = x^\alpha y^\beta . \tag{1}$$

As α and β are permutations of G therefore, without loss of generality, we can consider the above equation in the form

$$x^{\alpha^{-1}} + x^{\beta^{-1}} = xy . \tag{2}$$

From the condition of the theorem

$$x^{\alpha^{-1}} = xn \quad \text{and} \quad x^{\beta^{-1}} = mx$$

we obtain

$$xn + my = xy \quad \text{for some } n, m \text{ in } G .$$

Now, as $(G, \cdot)$ satisfies the conditions of Theorem 5, $(G, +)$ is an abelian group.

Conversely, suppose $(G, +)$ is an abelian group isotopic to a groupoid $(G, \cdot)$ under the isotopy (1). We can consider (1) in the form of (2), i.e.,

$$x^{\alpha^{-1}} + y^{\beta^{-1}} = xy .$$

Let e be the identity element of $(G, +)$ and denote $e^\alpha = m$ and $e^\beta = n$, then putting $n^{\beta^{-1}} = e$ and $m^{\alpha^{-1}} = e$ separately in the relation (2) we get

$$x^{\alpha^{-1}} = xn \quad \text{and} \quad x^{\beta^{-1}} = my ,$$

hence

$$xn + my = xy . \tag{3}$$

Thus, every element of $(G, +)$ can be obtained as right and left translations of n and m, respectively, by some elements of $(G, \cdot)$. Further, the composition $+$ of G is defined by the relation (3).

In view of Theorem 3, $(G, +)$ satisfies the N-groupoid property. We have to show the N-groupoid property in $(G, \cdot)$. Let

$$x_1y_2 = x_3y_1 , \quad x_1y_4 = x_2y_3 \quad \text{and} \quad x_2y_2 = x_4y_1 ,$$

where x_i, y_i in G $(i = 1, 2, 3, 4)$; then there exist X_i, Y_i in G $(i = 1, 2, 3, 4)$ such that

$$x_in = X_i \quad \text{and} \quad my_i = Y_i$$

and thus,

$$X_1 + Y_2 = X_3 + Y_1 , \quad X_1 + Y_4 = X_2 + Y_3 \quad \text{and} \quad X_2 + Y_2 = X_4 + Y_1 ,$$

which means $X_3 + Y_4 = X_4 + Y_3$ which in turn gives $x_3y_4 = x_4y_3$.

Next, as the quasigroup property is invariant under isotopy, $(G, \cdot)$ is a quasigroup, and further, this implies the conditions of the theorem.

This proves the theorem completely.

In addition, if we assume that $(G, \cdot)$ is a finite groupoid then we can restate our Theorem 6 with a slight modification. We start with

Theorem 6'. *If $(G, \cdot)$ is a finite groupoid then $(G, \cdot)$ is isotopic to an abelian group $(G, +)$ under the isotopy $x + y = x^\alpha y^\beta$ if and only if $(G, \cdot)$ is an N-groupoid and there exists a pair of elements r, s in G such that $rG = G$ and $xy = s$ has a solution in x for all y in G.*

Proof. In a groupoid $(G, \cdot)$ satisfying the conditions of Theorem 5, we define a composition $+$ by

$$xn + my = xy \quad \text{for some } n, m \text{ in } G .$$

Further, denote the mappings

$$x \to xn \ (= X) \quad \text{and} \quad y \to my \ (= Y)$$

by α^{-1} and β^{-1}, respectively. Then α^{-1} and β^{-1} are bijections as G is finite. Hence α and β are also bijections, and we can write $x + y = x^{\alpha}y^{\beta}$ for all x, y in G. Consequently $(G, +)$ is isotopic to $(G, \cdot)$; further $(G, +)$ is an abelian group by Theorem 5.

The proof of the converse part of the theorem is the same as that of Theorem 6.

Acknowledgement. I am highly indebted to Prof. P. B. BHATTACHARYA, Head of the Department of Mathematics, University of Delhi, for guidance and encouragement during the preparation of the paper.

References

[1] *Aczel, J.:* Quasigroups, Nets and Nomograms, Advances in Maths., *1* (1965), 383—450.

[2] *Aczel, J.:* Conditions for a loop to be a group and for a groupoid to be a semigroup, Amer. Math. Monthly, *76* (1969), 547—549.

[3] *Ajmal, N.:* Semeoid, To appear.

[4] *Ajmal, N.:* Intertwined groupoids and quasigroups, Notices A.M.S. Vol. *23*, (1976), pp. A272.

[5] *Bruck, R. H.:* A Survey of Binary Systems, Springer-Verlag, Berlin, 1958, 56.

[6] *Fotedar, G. L.:* A generalized associative law and its bearing on isotopy, J. London Math. Soc. (2), *5*, (1972), 477—480.

[7] *Hughes, N. J. S.:* A theorem on isotopic groupoids, J. London Math., Soc., Vol. *32*, (1957), 510—511.

[8] *Taylor, M. A.:* The generalised equations of bisymmetry, associativity and transitivity on quasigroups, Cand. Math. Bull., *15* (*1*), (1972), 119—124.

Author's address: Department of Mathematics, University of Delhi, Delhi - 110007, India.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

POZNÁMKA O LINEÁRNÍ MÍŘE VITUŠKINOVÝCH MNOŽIN

MIROSLAV DONT, Praha

(Received May 23, 1977)

Buď $M \subset \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \subset R^2$ uzavřená množina taková, že její projekce (ortogonální projekce) na osy x a y jsou celé úsečky $\langle 0, 1 \rangle \times \{0\}$ a $\{0\} \times \langle 0, 1 \rangle$. Na první pohled by se zdálo zřejmé, že potom lineární míra této množiny je rovna alespoň délce úhlopříčky čtverce $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ (tj. $\sqrt{2}$), neboť by se zdálo, že úhlopříčka tohoto čtverce je "nejmenší" množina s tou vlastností, že její projekce na osy x a y jsou celé úsečky $\langle 0, 1 \rangle \times \{0\}$, $\{0\} \times \langle 0, 1 \rangle$. Ukážeme však, že tomu tak není a že množina s danou vlastností může mít lineární míru menší než $\sqrt{2}$. V této poznámce však nebudeme pracovat přímo s podmnožinami čtverce $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$, které mají uvedenou vlastnost, ale z technických důvodů budeme pracovat s podmnožinami čtverce $C = \{[x, y] \in R^2; |x - \frac{1}{2}| + |y| \leqq \frac{1}{2}\}$ takovými, že jejich projekce na přímky $y = x$, $y = -x$ jsou celé hrany tohoto čtverce (o délce $\frac{1}{2}\sqrt{2}$), tj. úsečky $p_1 = \{[x, y] \in R^2; y = x, x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle\}$, $p_2 = \{[x, y] \in R^2; y = -x, x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle\}$. Ukážeme, že v C existuje uzavřená množina s danou vlastností, jejíž lineární míra je menší než 1. Nejprve však připomeňme definici lineární (Hausdorffovy) míry a definici topologické limity posloupnosti množin, kterou budeme potřebovat. Dále zopakujme definici množin (které zde nazýváme Vituškinovými), o kterých A. G. VITUŠKIN v citované práci [1] dokázal, že mají kladnou lineární míru, ale nulovou analytickou kapacitu (uvidíme, že právě tyto množiny mají – mimo vlastnost, o které mluví A. G. Vituškin – naši uvedenou vlastnost).

Nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nějaká posloupnost množin $A_n \subset R^2$. Definujme množiny $\limsup A_n$, $\liminf A_n$ takto: Pro $z \in R^2$ píšeme

$$z \in \limsup_{n \to \infty} A_n$$

právě když pro každé otevřené okolí U bodu z platí $U \cap A_n \neq \emptyset$ pro nekonečně mnoho n; píšeme

$$z \in \liminf_{n \to \infty} A_n$$

právě když pro každé otevřené okolí U bodu z je $U \cap A_n = \emptyset$ pouze pro konečně mnoho n. Ekvivalentně: $z \in \liminf A_n$ právě když existuje posloupnost $\{a_n\}$, $a_n \in A_n$, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = z$; $z \in \limsup A_n$ právě když existují $n_1 < n_2 < \ldots$, $a_{n_i} \in A_{n_i}$ tak, že $\lim\limits_{n \to \infty} a_{n_i} = z$. V případě

$$\liminf_{n \to \infty} A_n = \limsup_{n \to \infty} A_n$$

řekneme, že existuje $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$ (topologická limita posloupnosti množin A_n) a píšeme

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \limsup_{n \to \infty} A_n \quad (= \liminf_{n \to \infty} A_n) .$$

Poznamenejme, že $\lim A_n$ je vždy uzavřená množina.

Buď $A \subset R^2$. Výrazem $h(A)$ budeme značit lineární míru množiny A, tj. Hausdorffovu jednodimenzionální míru definovanou následujícím způsobem. Pro $\varepsilon > 0$ položíme

$$h_\varepsilon(A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{diam}(B_n) ,$$

kde infimum bereme přes všechny spočetné systémy $\{B_n\}$, které pokrývají A (tj. $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$), takové, že $\operatorname{diam}(B_n) \leqq \varepsilon$ pro každé n. Dále položíme

$$h(A) = \lim_{\varepsilon \to 0+} h_\varepsilon(A) .$$

Nyní zopakujme definici Vituškinových množin z [1]. Nechť $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ je nějaká posloupnost přirozených čísel, $n_0 = 1$, $n_k > 1$ pro $k = 1, 2, \ldots$. Indukcí definujme množiny $r_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, kde $k = 1, 2, \ldots$, $i_j = 1, 2, \ldots, n_{j-1}$. Položíme $r_{i_1} = r_1 = \langle 0, 1 \rangle \times \times \{0\}$. Předpokládejme, že již máme sestrojenou úsečku $r_{i_2 i_2 \ldots i_{k-1}}$. Tuto úsečku rozdělíme na n_{k-1} stejných částí (úseček) a každou tuto část v rovině R^2 otočíme o úhel $\frac{1}{2}\Pi$ kolem jejího středu. Tyto úsečky přitom uvažujme uzavřené. Tak dostaneme n_{k-1} úseček, které označíme

$$r_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}, \quad i_k = 1, 2, \ldots, n_{k-1} .$$

Dále pro $k = 2, 3, \ldots$ položíme

$$R_k = \bigcup_{i_2=1}^{n_1} \bigcup_{i_3=1}^{n_2} \ldots \bigcup_{i_k=1}^{n_{k-1}} r_{i_1 i_2 \ldots i_k} ;$$

$R_1 = r_1$. Pro pevné k tedy R_k tvoří všechny úsečky tvaru $r_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, které jsou buď všechny rovnoběžné s osou x nebo všechny rovnoběžné s osou y. Počet těchto úseček je $n_1 n_2 \ldots n_{k-1}$. Z konstrukce je dále vidět, že délka těchto úseček je $(n_1 n_2 \ldots n_{k-1})^{-1}$ (tyto úsečky vzniknou dělením úsečky o délce 1 na stejné díly). Nejprve si všimneme, že posloupnost množin R_k má topologickou limitu. Je jasné, že

$$\liminf_{k \to \infty} R_k \subset \limsup_{k \to \infty} R_k .$$

Ukažme, že platí i obrácená inkluze. Buď $z = [x_0, y_0] \in \limsup R_k$. Pro $\varepsilon > 0$ označíme

$$U_\varepsilon = \{[x, y]; |x - x_0| + |y - y_0| < \varepsilon\} .$$

Nyní stačí dokázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje m tak, že pro všechna $k > m$ je $R_k \cap U_\varepsilon \neq \emptyset$. Buď tedy $\varepsilon > 0$. Jelikož $z \in \limsup R_k$, je $R_k \cap U_{\varepsilon/2} \neq \emptyset$ pro nekonečně mnoho k. Zvolme m tak, že $R_m \cap U_{\varepsilon/2} \neq \emptyset$ a zároveň $(n_1 n_2 \dots n_{m-1})^{-1} < \frac{1}{2}\varepsilon$ (pro $k \geqq 1$ je $n_k \geqq 2$ a tedy takové m jistě existuje). Potom ale existují indexy $i_1, i_2, \dots, i_m$ tak, že $\boldsymbol{r}_{i_1 i_2 \dots i_m} \cap U_{\varepsilon/2} \neq \emptyset$. Jelikož délka této úsečky je menší než $\frac{1}{2}\varepsilon$ (a jelikož je rovnoběžná buď s osou x nebo y), platí tedy jistě $\boldsymbol{r}_{i_1 i_2 \dots i_m} \subset U_\varepsilon$. Z tvaru U_ε a z konstrukce daných úseček je ale vidět, že pro tyto (pevné) indexy $i_1, i_2, \dots, i_m$ je $\boldsymbol{r}_{i_1 i_2 \dots i_m i_{m+1} \dots i_k} \subset U_\varepsilon$ pro libovolné indexy $i_{m+1}, \dots, i_k$ $(k > m,\ 1 \leqq i_p \leqq n_{p-1}$ pro $p = m + 1, \dots, k)$. Odtud $R_k \cap U_\varepsilon \neq \emptyset$ pro každé $k > m$, tj. $z \in \liminf R_k$, takže skutečně

$$\liminf_{k \to \infty} R_k = \limsup_{k \to \infty} R_k .$$

Dále si všimneme, že (ortogonální) projekce množiny $\lim R_k$ na přímky $y = x$, $y = -x$ jsou celé úsečky $p_1 = \{[x, y];\ y = x,\ x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle\}$, $p_2 = \{[x, y];\ y = -x,\ x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle\}$. Především je zřejmé, že tyto projekce nemohou být větší, neboť $R_k \subset C$ pro každé k a tedy i $\lim R_k \subset C$. Jelikož při točení daných úseček tvaru $\boldsymbol{r}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ kolem jejich středu o úhel $\frac{1}{2}\Pi$ se jejich projekce na přímky $y = x$, $y = -x$ nemění, je především zřejmé, že projekce všech množin R_k na dané přímky jsou celé úsečky p_1, p_2. Buď např. $z_0 \in p_1$. Je-li p průnik čtverce C s přímkou kolmou na p_1 procházející bodem z_0, pak p je kompaktní úsečka a pro každé k je $p \cap R_k \neq \emptyset$. Volme $z_k \in p \cap R_k$. Potom existuje vybraná konvergentní posloupnost $\{z_{k_i}\}$; nechť $\lim_{i \to \infty} z_{k_i} = z$. Potom jistě

$$z \in \limsup_{k \to \infty} R_k = \lim_{k \to \infty} R_k$$

a odtud je vidět, že z_0 leží v projekci $\lim R_k$ na přímku $y = x$, takže tato projekce je opravdu rovna p_1. Podobně pro p_2.

Dále použijeme ještě toto označení: Pro pevné indexy $i_1, i_2, \dots, i_k$, $m > k$ označme

$$R^m_{i_1 i_2 \dots i_k} = \bigcup_{i_{k+1}=1}^{n_k} \bigcup_{i_{k+2}=1}^{n_{k+1}} \dots \bigcup_{i_m=1}^{n_{m-1}} \boldsymbol{r}_{i_1 i_2 \dots i_k \dots i_m}$$

(jsou to tedy ony úsečky v R_m, které vzniknou dělením úsečky $\boldsymbol{r}_{i_1 i_2 \dots i_k}$); dále položme

$$R_{i_1 i_2 \dots i_k} = \lim_{m \to \infty} R^m_{i_1 i_2 \dots i_k}$$

(že tato limita existuje se dokáže úplně stejně jako existence $\lim R_k$).

Nyní se zabývejme případem, kdy $n_k = 2$ pro každé $k \geqq 1$ (při konstrukci $\boldsymbol{r}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ budeme tedy v tomto případě vždy „předchozí" úsečky dělit na poloviny). Ukážeme, že v tomto případě, pokud značíme $R_0 = \lim R_k$, platí

$$h(R_0) < 1\,.$$

K tomu stačí ukázat, že existuje konstanta $c < 1$ tak, že $h_\varepsilon(R_0) < c$ pro každé $\varepsilon > 0$. K tomu opět stačí ukázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existují množiny A_n tak, že $\operatorname{diam} A_n \leqq \varepsilon$, $\bigcup A_n \supset R_0$, $\sum \operatorname{diam} A_n \leqq c$.

V našem případě budeme R_0 pokrývat jistými obdélníky (mohli bychom R_0 pokrývat kruhy o stejném diametru jako tyto obdélníky – což pro Hausdorffovu míru bývá nejčastější – ale z technického hlediska bude užití obdélníků jednodušší). Sestrojíme obdélníky $A^n_{i_1 i_2 \dots i_n}$ pro $n = 1, 2, \dots$, $i_1 = 1$, $i_j = 1, 2$ pro $j = 2, 3, \dots$ následujícím způsobem. Položíme

$$A^1_1 = \langle \tfrac{1}{8}, \tfrac{7}{8} \rangle \times \langle -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4} \rangle\,;$$

je to minimální obdélník takový, že $R_2 \subset A^1_1$, $R_3 \subset A^1_1$. Z konstrukce R_k je vidět, že potom $R_k \subset A^1_1$ pro každé $k \geqq 2$. Vzhledem k tomu, že A^1_1 je uzavřený, je $R_0 = \lim R_k \subset A^1_1$. Přitom je

$$\operatorname{diam} A^1_1 = \sqrt{(\tfrac{9}{16} + \tfrac{1}{4})} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(13)} < 1\,.$$

Obdélníky $A^n_{i_1 i_2 \dots i_n}$ sestrojíme takto: obdélníky A^1_1 dilatujeme konstantou 2^{1-n}, otočíme o úhel $(n-1)\frac{1}{2}\Pi$ a posuneme tak, aby měl střed ve středu úsečky $r_{i_1 i_2 \dots i_n}$. Z konstrukce tohoto obdélníku a z konstrukce úseček $r_{i_1 i_2 \dots i_k}$ je vidět, že pro pevné indexy $i_1, i_2, \dots, i_n$ je

$$R^m_{i_1 i_2 \dots i_n} \subset A^n_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

pro každé $m \geqq n + 1$. Jelikož

$$R_m = \bigcup_{i_2=1}^{2} \bigcup_{i_3=1}^{2} \dots \bigcup_{i_n=1}^{2} R^m_{i_1 i_2 \dots i_n}\,,$$

je pro každé $m \geqq n + 1$

$$R_m \subset \bigcup_{i_2=1}^{2} \bigcup_{i_3=1}^{2} \dots \bigcup_{i_n=1}^{2} A^n_{i_1 i_2 \dots i_n}\,. \tag{1}$$

Dále platí

$$\operatorname{diam} A^n_{i_1 i_2 \dots i_n} = 2^{1-n}\tfrac{1}{4}\sqrt{13}$$

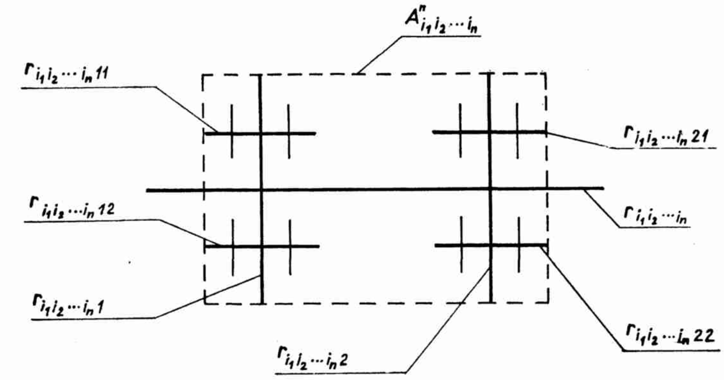
a pro pevné n je počet obdélníků tvaru $A^n_{i_1 i_2 \dots i_n}$ roven 2^{n-1}. Odtud

$$\sum_{i_2=1}^{2} \sum_{i_3=1}^{2} \dots \sum_{i_n=1}^{2} \operatorname{diam} A^n_{i_1 i_2 \dots i_n} = \tfrac{1}{4}\sqrt{13}\,. \tag{2}$$

Konstrukce uvedených obdélníků je názorně vidět z obr. 1. Na obr. 1 volíme n tak, že $r_{i_1 i_2 \dots i_n}$ je rovnoběžná s osou x. Jak je vidět z obrázku, hrany obdélníka $A^n_{i_1 i_2 \dots i_n}$ jsou

$$l_1 = \operatorname{diam} r_{i_1 i_2 \dots i_n 1} = 2^{-n},$$

$$l_2 = \operatorname{diam} r_{i_1 i_2 \dots i_n 1} + \operatorname{diam} r_{i_1 i_2 \dots i_n 1 1} = 3 \,.\, 2^{-n-1},$$



Obr. 1.

takže

$$\operatorname{diam} A^n_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sqrt{(l_1^2 + l_2^2)} = 2^{1-n} \tfrac{1}{4} \sqrt{13}\,.$$

Vzhledem k tomu, že uvedené obdélníky jsou uzavřené, dostáváme podle (1)

$$R_0 = \lim_{m \to \infty} R_m \subset \bigcup_{i_2=1}^{2} \bigcup_{i_3=1}^{2} \dots \bigcup_{i_n=1}^{2} A^n_{i_1 i_2 \dots i_n}\,. \tag{3}$$

Buď $\varepsilon > 0$. Potom existuje n tak, že $2^{1-n} \frac{1}{4} \sqrt{13} < \varepsilon$, takže podle (2) a (3) dostáváme

$$h_\varepsilon(R_0) \leqq \tfrac{1}{4} \sqrt{13}$$

a tedy také

$$h(R_0) \leqq \tfrac{1}{4} \sqrt{(13)} < 1\,.$$

Dostáváme tedy příklad množiny s vlastnostmi, o kterých jsme mluvili v úvodu. Poznamenejme, že v každém případě platí $h(R_0) \geqq \frac{1}{2} \sqrt{2}$, neboť z toho, že např. na přímku $y = x$ má množina R_0 projekci rovnou úsečce o délce $\frac{1}{2} \sqrt{2}$, plyne, že každé spočetné pokrytí R_0 má součet diametrů $\geqq \frac{1}{2} \sqrt{2}$, a tedy dokonce $h_\varepsilon(R_0) \geqq \frac{1}{2} \sqrt{2}$ pro každé $\varepsilon > 0$. Pro naši uvedenou množinu tedy dostáváme odhad

$$\tfrac{1}{2} \sqrt{2} \leqq h(R_0) \leqq \tfrac{1}{4} \sqrt{13}\,.$$

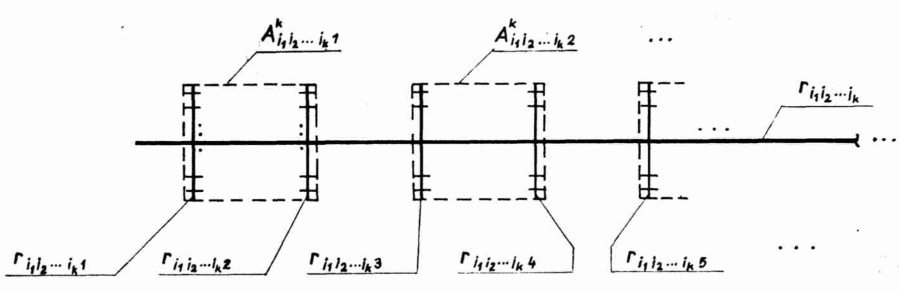
Autoru není známo, jakou má množina R_0 skutečně lineární míru (zřejmé však je, že horní odhad by bylo možné zlepšit).

Nakonec budeme ještě uvažovat případ, kdy položíme $n_k = 2k$ pro $k \geqq 1$ $(n_0 = 1)$. Množinu R_0 budeme v tomto, podobně jako v předchozím případě, pokrývat jistými obdélníky. Pro k přirozené zkonstruujeme obdélníky $A^k_{i_1 i_2 \dots i_k j}$, kde $i_1 = 1$, $i_p =$

$= 1, 2, \ldots, n_{p-1} = 2(p-1), j = 1, 2, \ldots, k$ následujícím způsobem. Buď A_k uzavřený obdélník o hranách

$$l_1 = (2^k k!)^{-1}, \quad l_2 = (2^k k!)^{-1} \left(1 + \frac{1}{2(k+1)}\right),$$

přičemž hrana o délce l_1 je kolmá na $r_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ (druhá hrana je s $r_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ rovnoběžná). Úsečky $r_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}$ vzniknou rozdělením úsečky $r_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ na $2k$ stejných dílů (a otočením těchto dílů o $\frac{1}{2}\Pi$). Pro pevné indexy $i_1, i_2, \ldots, i_k$ je tedy těchto úseček $2k$. Těchto $2k$ úseček sestavíme do k dvojic „sousedních" úseček a tyto dvojice pokryjeme obdélníky $A^k_{i_1 i_2 \ldots i_k j}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, které dostaneme tak, že obdélník A_k posuneme,



Obr. 2.

aby jeho střed ležel na úsečce $r_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ uprostřed příslušné dvojice „sousedních" úseček tvaru $r_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}$ – viz obr. 2. Na obr. 2 volíme k tak, že $r_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ je rovnoběžná s osou x. Přitom je vidět, že obdélníky $A^k_{i_1 i_2 \ldots i_k 1}, A^k_{i_1 i_2 \ldots i_k 2}, \ldots$ musí mít hrany o délce

$$l_1 = \operatorname{diam} r_{i_1 i_2 \ldots i_k 1} = (n_1 n_2 \ldots n_k)^{-1} = (2^k k!)^{-1},$$

$$l_2 = \operatorname{diam} r_{i_1 i_2 \ldots i_k 1} + \operatorname{diam} r_{i_1 i_2 \ldots i_k 1 1} = (2^k k!)^{-1} + (2^{k+1}(k+1)!)^{-1} =$$

$$= (2^k k!)^{-1} \left(1 + \frac{1}{2(k+1)}\right).$$

Odtud

(4) $$\operatorname{diam} A^k_{i_1 i_2 \ldots i_k j} = \frac{1}{2^k k!} \sqrt{\left[1 + \left(1 + \frac{1}{2(k+1)}\right)^2\right]} =$$

$$= \frac{1}{2^k k!} \sqrt{\left[2 + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{4(k+1)^2}\right]}.$$

Dále je snadno vidět, že pro $m \geqq k + 1$ je

$$R^m_{i_1 i_2 \ldots i_k} \subset \bigcup_{j=1}^{k} A^k_{i_1 i_2 \ldots i_k j},$$

tj.

$$R_m \subset \bigcup_{i_2=1}^{2} \bigcup_{i_3=1}^{4} \dots \bigcup_{i_k=1}^{2(k-1)} \bigcup_{j=1}^{k} A^k_{i_1 i_2 \dots i_k j}$$

$(m \geqq k + 1)$ a tedy také

$$(5) \qquad R_0 \subset \bigcup_{i_2=1}^{2} \bigcup_{i_3=1}^{4} \dots \bigcup_{i_k=1}^{2(k-1)} \bigcup_{j=1}^{k} A^k_{i_1 i_2 \dots i_k j} .$$

Počet obdélníků $A^k_{i_1 i_2 \dots i_k j}$ (pro pevné k) je

$$k n_1 n_2 \dots n_{k-1} = k \cdot 2^{k-1}(k-1)! = 2^{k-1} k! .$$

Podle (4) tedy máme

$$(6) \qquad \sum_{i_2=1}^{2} \dots \sum_{i_k=1}^{2(k-1)} \sum_{j=1}^{k} \operatorname{diam} A^k_{i_1 i_2 \dots i_k j} = \frac{1}{2} \sqrt{\left[2 + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{4(k+1)^2}\right]} .$$

Je-li $\varepsilon > 0$, pak jistě existuje k_0 tak, že diam $A^k_{i_1 i_2 \dots i_k j} < \varepsilon$ pro každé $k > k_0$. Podle (5) a (6) nyní máme

$$h_\varepsilon(R_0) \leqq \frac{1}{2} \sqrt{\left[2 + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{4(k+1)^2}\right]}$$

pro každé $k > k_0$, tj.

$$h_\varepsilon(R_0) \leqq \tfrac{1}{2} \sqrt{2} .$$

Jelikož ale nutně $h_\varepsilon(R_0) \geqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$, je $h_\varepsilon(R_0) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (pro každé $\varepsilon > 0$) a tedy

$$h(R_0) = \tfrac{1}{2} \sqrt{2} .$$

Podíváme-li se na úvod této poznámky, dostáváme:

Tvrzení. *Existuje taková uzavřená množina $M \subset \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$, že projekce M na osy x a y jsou celé úsečky $\langle 0, 1 \rangle \times \{0\}$, $\{0\} \times \langle 0, 1 \rangle$ a přitom $h(M) = 1$.*

Literatura

[1] *А. Г. Витушкин:* Пример множества положительной длины, но нулевой аналитической емкости, Доклады АН СССР, 1959, Т. *127*, Но. 2, 246—249.

Adresa autora: 166 27 Praha 6 - Dejvice, Suchbátarova 2 (elektrotechnická fakulta ČVUT).

Summary

A NOTE ON LINEAR MEASURE OF VITUSHKIN'S SETS

MIROSLAV DONT, Praha

It is shown that there is a compact set $M \subset \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \subset R^2$ with linear Hausdorff measure 1 but such that its ortogonal projections on the coordinate axes are the whole segments $\langle 0, 1\rangle \times \{0\}$, $\{0\} \times \langle 0, 1\rangle$. The construction of that set is the same as the Vitushkin's construction of the set with positive linear measure but with zero analytic capacity.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

CONJUGATE CYCLIC (v, k, λ)-CONFIGURATIONS*)

VĚROSLAV JURÁK, Poděbrady

(Received July 6, 1977)

I. BASIC DEFINITIONS AND THEOREMS

Definition 1. Let $\mathscr{X} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{v-1}\}$ be a set of distinct integers modulo v and $B_0, B_1, \ldots, B_{b-1}$ a system $\mathscr{B}$ of distinct subsets (blocks) of $\mathscr{X}$. If the system $\mathscr{B}$ satisfies the following axioms:

(I) $|B_i| = k$ $(i = 0, 1, \ldots, b - 1)$,

(II) each pair of distinct elements of $\mathscr{X}$ occurs together in exactly λ distinct sets of $\mathscr{B}$,

(III) the integers v, k, λ satisfy the inequalities $0 < \lambda,\ k < v - 1$,

then $\mathscr{B}$ is called a (b, v, r, k, λ)-*configuration*. (As in [1].)

For the (b, v, r, k, λ)-configurations we have the following theorems:

(IV) each element of $\mathscr{X}$ occurs in exactly r sets of $\mathscr{B}$,

(V) $bk = vr$,

(VI) $r(k - 1) = \lambda(v - 1)$,

(VII) $b \geqq v$ $(\Rightarrow r \geqq k)$.

(The proofs are in [1].)

Definition 2. Let $\mathscr{X} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{v-1}\}$ be a set of distinct integers modulo v and $B_0, B_1, \ldots, B_{v-1}$ a system $\mathscr{B}$ of distinct subsets (blocks) of $\mathscr{X}$. If the system $\mathscr{B}$ satisfies the following axioms:

(1) $|B_i| = k$ $(i = 0, 1, \ldots, v - 1)$,

(2) $|B_i \cap B_j| = \lambda$, $i \neq j$, $(i, j = 0, 1, \ldots, v - 1)$,

(3) the integers v, k, λ satisfy the inequalities $0 < \lambda < k < v - 1$,

*) The author had presented this result in another form at the Conference on Graph Theory — Smolenice (Czechoslovakia), March 1976.

then $\mathscr{B}$ is called a (v, k, λ)-*configuration.* (As in [1].) The system $\mathscr{B}$ is also called the (v, k, λ)-*configuration* $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$. We note that any (v, k, λ)-configuration is in fact a (v, v, k, k, λ)-configuration. (See [1].)

Definition 3. Two (v, k, λ)-configurations $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$, $(\mathscr{X}, \mathscr{B}')$ are said *to be identical* if and only if $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$, and we write $(\mathscr{X}, \mathscr{B}) = (\mathscr{X}, \mathscr{B}')$.

Proposition 1. *Given a* (v, k, λ)-*configuration* $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$, *there exists no* $(v + 1, v, k, k, \lambda)$-*configuration* $(\mathscr{X}, \mathscr{B}^*)$ *such that* $\mathscr{B}^* = \mathscr{B} \cup B$ *where* $B \subset \mathscr{X}$, $B \neq B_i \in \mathscr{B}$ $(i = 0, 1, \ldots, v - 1)$ *and* $|B| = k$.

Proof. From Theorem (V) we get

$$(v + 1)\, k = vk$$

and this implies $k = 0$; a contradiction with Axiom (3).

Definition 4. An isomorphism α of a (v, k, λ)-configuration $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ is a permutation of $\mathscr{X}$ such that if $x \in \mathscr{X}$ and $B \in \mathscr{B}$, then

$$x \in B \Leftrightarrow \alpha(x) \in \alpha(B)\,.$$

(As in [2].) If $\alpha(\mathscr{B}) = \mathscr{B}$, then the isomorphism α is called an *automorphism of the* (v, k, λ)-*configuration* $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$.

Definition 5. A (v, k, λ)-configuration $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ is called *cyclic* if there exists its automorphism α such that

$$\alpha : i \mapsto i + 1 \pmod v \quad \text{for each} \quad i \in \mathscr{X}$$

and the system $\mathscr{B}$ is denoted so that

$$B_i \mapsto B_{i+1}\,, \quad i + 1 \pmod v \quad \text{for each} \quad B_i \in \mathscr{B}\,.$$

(As in [2].)

Proposition 2. *For a given integer j define a mapping* α *of the given cyclic* (v, k, λ)-*configuration* $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ *onto* $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ *by*

$$\alpha : i \mapsto i + j \pmod v \quad \text{for each} \quad i \in \mathscr{X}\,, \quad \text{and}$$

$$B_i \mapsto B_{i+j}\,, \quad i + j \pmod v \quad \text{for each} \quad B_i \in \mathscr{B}\,.$$

Then α *is an automorphism of* $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$.

Proof. This Proposition follows from a composition of automorphisms from Definition 5.

Definition 6. A set $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ of integers modulo v is called a (v, k, λ)-*difference set*, if for each $d \not\equiv 0 \pmod v$ there are exactly λ distinct ordered pairs (a_i, a_j), where $a_i, a_j \in D$, such that $a_i - a_j \equiv d \pmod v$. (As in [2].)

Theorem 1. *A set $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ of integers modulo v is a (v, k, λ)-difference set if and only if a system of v sets $B_p = \{a_1 + p, a_2 + p, \ldots, a_k + p\}$ modulo v $(p = 0, 1, \ldots, v - 1)$ is a cyclic (v, k, λ)-configuration.* (Cf. the proof in [2].) *Hence $B_0 = D$ and each set B_p is a (v, k, λ)-difference set.*

We shall use the (v, k, λ)-configuration $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ where the system $\mathcal{B} = \{B_p\}$ $(p = 0, 1, \ldots, v - 1)$ is the system of sets from Theorem 1, and its isomorphism α which is given by the following definition:

$$\alpha : x \mapsto v - x \pmod v \quad \text{for each} \quad x \in \mathcal{X} .$$

Theorem 1 implies

$$B_p = \{a_1 + p, a_2 + p, \ldots, a_k + p\} \pmod v \; (p = 0, 1, \ldots, v - 1) .$$

Let p be a fixed integer. Then to each $d \not\equiv 0 \pmod v$ there exist exactly λ distinct ordered pairs $(a_i + p, a_j + p)$ where $a_i + p, a_j + p \in B_p$ such that

$$(a_i + p) - (a_j + p) = a_i - a_j \equiv d \pmod v .$$

We get

$$\alpha(B_p) = \{v - (a_1 + p), v - (a_2 + p), \ldots, v - (a_k + p)\} \pmod v$$
$$(p = 0, 1, \ldots, v - 1) .$$

Let p be a fixed integer. Then to each $d \not\equiv 0 \pmod v$ there exist exactly λ distinct ordered pairs $(v - (a_j + p), v - (a_i + p))$ where $v - (a_j + p)$, $v - (a_i + p) \in \alpha(B_p)$ such that

$$(v - (a_j + p)) - (v - (a_i + p)) = a_i - a_j \equiv d \pmod v .$$

The foregoing remarks yield

Proposition 3. *Let a set $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ of integers modulo v be a (v, k, λ)-difference set. Given a fixed integer p, then the set*

$$\alpha(B_p) = \{v - (a_1 + p), v - (a_2 + p), \ldots, v - (a_k + p)\} \pmod v$$

is a (v, k, λ)-difference set. The system of sets

$$\overline{\mathcal{B}} = \{\alpha(B_p)\} \quad (p = 0, 1, \ldots, v - 1)$$

is a cyclic (v, k, λ)-configuration.

It is easy to see the validity of the following two propositions:

Proposition 4. *Let a_i, a_j, p, v be integers. Then*

$$v - a_i \equiv a_j + p \pmod v \Leftrightarrow a_i + a_j \equiv v - p \pmod v .$$

Proposition 5. *Let p be an integer and let $\mathcal{X} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{v-1}\}$ be a set of distinct integers modulo v. Then the congruence*

$$(*) \qquad v - x \equiv x + p \pmod v$$

has at most one solution from $\mathcal{X}$ for v odd and at most two solutions from $\mathcal{X}$ for v even.

These facts are important for the formulation of suppositions in the following considerations.

II. OBSERVATIONS FOR v ODD

Now, we shall prove the following

Lemma 1. *Let v be an odd integer and let the set $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ of integers modulo v be a (v, k, λ)-difference set. We have here a cyclic (v, k, λ)-configuration $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ with the system $\mathcal{B} = \{B_p\}$ $(p = 0, 1, \ldots, v-1)$ where $B_p = \{a_1 + p, a_2 + p, \ldots, a_k + p\}$. If we define an isomorphism of $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ as follows:*

$$\alpha : x \mapsto v - x \pmod v \quad \textit{for each of} \quad x \in X\,,$$

then $B_p \neq \alpha(B_0)$ for all $p = 0, 1, \ldots, v-1$.

Proof. To prove this lemma we consider four cases.

1. Let k be an odd integer. Let each $a_i \in B_0$ satisfy the condition $a_i + a_i \equiv \equiv v - p \pmod v$. Next, let the elements of B_0 be suitably denoted so that

$$a_{2r-1} + a_{2r} \equiv v - p \pmod v\,,$$

where $r = 1, 2, \ldots, (k-1)/2$. Hence we get that

$$v - a_{2r-1} \equiv a_{2r} + p \pmod v$$

and also

$$v - a_{2r} \equiv a_{2r-1} + p \pmod v\,,$$

where $r = 1, 2, \ldots, (k-1)/2$. Then $\alpha(B_0)$ and B_p have $k-1$ elements in common. Since

$$a_k + a_k \not\equiv v - p \pmod v$$

(cf. the suppositions and Proposition 5), it follows that

$$v - a_k \not\equiv a_k + p \pmod v\,.$$

That is, $B_p \neq \alpha(B_0)$.

2. Let again k be an odd integer. Let the elements of B_0 be suitably denoted so that

$$a_1 + a_1 \equiv v - p \pmod v$$

and

(a) $$a_{2r} + a_{2r+1} \equiv v - p \pmod{v}$$

for all $r = 1, 2, \ldots, (k-1)/2$. Hence and from Proposition 4 it follows that $B_p = \alpha(B_0)$.

2_1. Now, let also λ be an odd integer. The number of congruences (a) is $(k-1)/2$, the number of differences $a_{2r} - a_{2r+1}, a_{2r+1} - a_{2r}$, $(r = 1, 2, \ldots, (k-1)/2)$ is $k - 1$ and in view of Axiom (3) it is $k - 1 < v - 2$. Hence there exists at least one number $d \not\equiv 0 \pmod{v}$ for which

$$a_{2r} - a_{2r+1}, a_{2r+1} - a_{2r} \not\equiv d \pmod{v}$$

for all $r = 1, 2, \ldots, (k-1)/2$. Then it is possible that there exists a convenient $s = 1, 2, \ldots, (k-1)/2$ such that

$$\text{either} \quad a_{2s} - a_1 \equiv d \pmod{v} \quad \text{or} \quad a_1 - a_{2s} \equiv d \pmod{v}.$$

This s fulfils

$$a_{2s} + a_{2s+1} \equiv v - p \pmod{v}.$$

Hence in the first case we have in fact also

$$a_1 - a_{2s+1} \equiv d \pmod{v}$$

and in the second case also

$$a_{2s+1} - a_1 \equiv d \pmod{v}.$$

Then to d in the first case there exist two pairs $(a_{2s}, a_1), (a_1, a_{2s+1})$ satisfying

$$a_{2s} - a_1, a_1 - a_{2s+1} \equiv d \pmod{v}$$

and in the second case there exist two pairs $(a_1, a_{2s}), (a_{2s+1}, a_1)$, satisfying

$$a_1 - a_{2s}, a_{2s+1} - a_1 \equiv d \pmod{v}.$$

For each a_t, $t = 2, 3, \ldots, k$, $t \neq 2s$, it is

$$\text{either} \quad a_t - a_1 \not\equiv d \pmod{v} \quad \text{or} \quad a_1 - a_t \not\equiv d \pmod{v}.$$

If there exists no s with the above properties, then there are necessarily such $m, n = 1, 2, \ldots, (k-1)/2$, where $m \neq n$, that either the equivalence

$$a_{2m} - a_{2n} \equiv d \pmod{v} \Leftrightarrow a_{2n+1} - a_{2m+1} \equiv d \pmod{v}$$

or

$$a_{2m} - a_{2n+1} \equiv d \pmod{v} \Leftrightarrow a_{2n} - a_{2m+1} \equiv d \pmod{v}$$

holds. This means that to d there exist either two pairs $(a_{2m}, a_{2n}), (a_{2n+1}, a_{2m+1})$ satisfying

$$a_{2m} - a_{2n}, a_{2n+1} - a_{2m+1} \equiv d \pmod{v}$$

or two pairs (a_{2m}, a_{2n+1}), (a_{2n}, a_{2m+1}) satisfying

$$a_{2m} - a_{2n+1}, a_{2n} - a_{2m+1} \equiv d \pmod{v}.$$

Altogether, we have that the number of pairs (a_i, a_j) with $a_i, a_j \in B_0$ such that

$$a_i - a_j \equiv d \pmod{v},$$

is even; a contradiction with λ odd, Hence $B_p \neq \alpha(B_0)$.

2_2. Now, let λ be an even integer. By congruences (a) we have

$$a_{2r} - a_{2r+1} \equiv 2a_{2r} - v + p \pmod{v}, \quad a_{2r+1} - a_{2r} \equiv 2a_{2r+1} - v + p \pmod{v}$$

Since all elements of B_0 are different, the same holds for all numbers $2a_{2r} - v + p$, $2a_{2r+1} - v + p \pmod{v}$ for all $r = 1, 2, \ldots, (k-1)/2$. None of these numbers are congruent with $0 \pmod{v}$ by the assumption and Proposition 5. Then to some $d \not\equiv 0 \pmod{v}$ there exists a convenient $r = 1, 2, \ldots, (k-1)/2$ such that the congruence

$$a_{2r} - a_{2r+1} \equiv d \pmod{v}$$

holds. To complete the proof we use the same argument as in 2_1 of this, proof, now with this d. However, now the number of pairs (a_i, a_j) with $a_i, a_j \in B_0$ such that

$$a_i - a_j \equiv d \pmod{v}$$

is even or zero. Hence we conclude that the number of these pairs (a_i, a_j) is odd; a contradiction with the assumption that it is even. Thus $B_p \neq \alpha(B_0)$.

3. Let k be an even integer. Let each $a_i \in B_0$ satisfy the condition $a_i + a_i \not\equiv v - p \pmod{v}$. Next, let the elements of B_0 be suitably denoted so that

$$\text{(b)} \qquad a_{2r-1} + a_{2r} \equiv v - p \pmod{v},$$

where $r = 1, 2, \ldots, k/2$. Hence and from Proposition 4 it follows that $B_p = \alpha(B_0)$.

3_1. Let us consider the integer λ to be odd. The number of congruences (b) is $k/2$, the number of differences $a_{2r} - a_{2r-1}$, $a_{2r-1} - a_{2r}$ $(r = 1, 2, \ldots, k/2)$ is k and in view of Axiom (3) it is $k < v - 1$. Hence there exists at least one number $d \not\equiv 0 \pmod{v}$ for which

$$a_{2r} - a_{2r-1}, a_{2r-1} - a_{2r} \not\equiv d \pmod{v}$$

for all $r = 1, 2, \ldots, k/2$. Then there are necessarily such $s, t = 1, 2, \ldots, k/2$, where $s \neq t$, that either the equivalence

$$a_{2s} - a_{2t} \equiv d \pmod{v} \Leftrightarrow a_{2t-1} - a_{2s-1} \equiv d \pmod{v},$$

or

$$a_{2s} - a_{2t-1} \equiv d \pmod{v} \Leftrightarrow a_{2t} - a_{2s-1} \equiv d \pmod{v}$$

holds. This means that to d there exist either two pairs (a_{2s}, a_{2t}), (a_{2t-1}, a_{2s-1}) satisfying

$$a_{2s} - a_{2t}, a_{2t-1} - a_{2s-1} \equiv d \pmod{v}$$

or two pairs (a_{2s}, a_{2t-1}), (a_{2t}, a_{2s-1}) satisfying

$$a_{2s} - a_{2t-1},\ a_{2t} - a_{2s-1} \equiv d \pmod{v}\,.$$

Hence we conclude that for this d the number of pairs (a_i, a_j) with $a_i, a_j \in B_0$ such that

$$a_i - a_j \equiv d \pmod{v}$$

is even; a contradiction with λ odd. Thus $B_p \neq \alpha(B_0)$.

3_2. Let λ be also an even integer. By congruences (b) we have

$$a_{2r} - a_{2r-1} \equiv 2a_{2r} - v + p \pmod{v}\,, \quad a_{2r-1} - a_{2r} \equiv 2a_{2r-1} - v + p \pmod{v}\,.$$

As in 2_2 of this proof these differences are distinct, in fact $\not\equiv 0 \pmod{v}$, for all $r = 1, 2, \ldots, k/2$. Then to each $d \not\equiv 0 \pmod{v}$ there exists a convenient $r = 1, 2, \ldots \ldots, k/2$ such that the congruence

$$a_{2r-1} - a_{2r} \equiv d \pmod{v}$$

holds. Now we proceed with this d in the same way as in 3_1 of this proof. We have here that the number of pairs (a_i, a_j) with $a_i, a_j \in B_0$ such that

$$a_i - a_j \equiv d \pmod{v}$$

is even or zero. Hence we conclude that the number of these pairs (a_i, a_j) is odd; a contradiction with the assumption that λ is even. Thus $B_p \neq \alpha(B_0)$.

4. Let k be an even integer. Let the elements of B_0 be denoted in a suitable way so that

$$a_1 + a_1 \equiv v - p \pmod{v}$$

and

$$a_{2r} + a_{2r+1} \equiv v - p \pmod{v}$$

for all $r = 1, 2, \ldots, (k-2)/2$. Hence and from Proposition 4 it follows that B_p and $\alpha(B_0)$ have $k - 1$ elements in common. In view of Proposition 5 the congruence $(*)$ is satisfied for precisely one element. With regard to the supposition we may assume that this occurs exactly for $x = a_1$, and thus it is

$$v - a_k \not\equiv a_k + p \pmod{v}\,.$$

Then $B_p \neq \alpha(B_0)$.

This completes the proof of Lemma 1.

III. OBSERVATIONS FOR v EVEN

It is quite easy to verify

Proposition 6. *Let v be an even integer. Then the equation*

$$\lambda(v - 1) = k(k - 1)$$

(*which follows from Theorem* (VI)) *is satisfied only for even* λ.

Now, we shall sketch the proof of the following

Lemma 2. *Let v be an even integer and let a set $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ of integers modulo v be a (v, k, λ)-difference set. We have a cyclic (v, k, λ)-configuration $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ wtth the system $\mathscr{B} = \{B_p\}$ $(p = 0, 1, \ldots, v - 1)$ where $B_p = \{a_1 + p, a_2 + p, \ldots, a_k + p\}$. If we define an isomorphism of $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ as follows:*

$$\alpha : x \mapsto v - k \pmod{v} \quad \textit{for each of} \quad x \in \mathscr{X}\,,$$

then $B_p \neq \alpha(B_0)$ for all $p = 0, 1, \ldots, v - 1$.

Proof. 1. Let k be an odd integer. Let each $a_i \in B_0$ satisfy the condition $a_i + a_i \not\equiv v - p \pmod{v}$. Further, let the elements of B_0 be denoted in a suitable way so that

$$a_{2r-1} + a_{2r} \equiv v - p \pmod{v}$$

where $r = 1, 2, \ldots, (k - 1)/2$. If we proceed in the same way as in part 1 of the proof of Lemma 1 then we have also $B_p \neq \alpha(B_0)$.

2. Let k be an odd integer. Let the elements of B_0 be denoted so that

$$a_1 + a_1 \equiv v - p \pmod{v}$$

and

$$a_{2r} + a_{2r+1} \equiv v - p \pmod{v}$$

for all $r = 1, 2, \ldots, (k - 1)/2$. Now we proceed in the same way as in 2_2 of the proof of Lemma 1. Here we have that $B_p \neq \alpha(B_0)$.

3. Let k be an odd integer. Let the elements of B_0 be denoted so that

$$a_1 + a_1 \equiv v - p \pmod{v}\,,$$

$$a_2 + a_2 \equiv v - p \pmod{v}$$

and

$$a_{2r-1} + a_{2r} \equiv v - p \pmod{v}\,,$$

where $r = 2, 3, \ldots, (k - 1)/2$. Then B_p and $\alpha(B_0)$ have $k - 1$ elements in common. Since

$$a_k + a_k \not\equiv v - p \pmod{v}$$

it is

$$v - a_k \not\equiv a_k + p \pmod{v}$$

in view of Proposition 4. Hence $B_p \neq \alpha(B_0)$.

4. Let k be an even integer. Let $a_i + a_i \not\equiv v - p \pmod{v}$ for each $a_i \in B_0$. Further, let the elements of B_0 be denoted so that

$$a_{2r-1} + a_{2r} \equiv v - p \pmod{v}$$

where $r = 1, 2, \ldots, k/2$. Now we proceed in the same way as in 3_2 of the proof of Lemma 1. Here we have $B_p \neq \alpha(B_0)$.

5. Let k be an even integer. Let the elements of B_0 be denoted so that

$$a_1 + a_1 \equiv v - p \pmod{v}$$

and

$$a_{2r} + a_{2r+1} \equiv v - p \pmod{v}$$

for all $r = 1, 2, \ldots, (k-2)/2$. We proceed in this case in the same way as in 4 of the proof of Lemma 1. Here we have that $B_p \not\equiv \alpha(B_0)$.

6. Let k be an even integer. Let the elements of B_0 be denoted so that

$$a_1 + a_1 \equiv v - p \pmod{v}, \quad a_2 + a_2 \equiv v - p \pmod{v}$$

and

$$\text{(c)} \qquad a_{2r-1} + a_{2r} \equiv v - p \pmod{v}$$

for all $r = 2, 3, \ldots, k/2$. From the congruences (c) we obtain

$$a_{2r} - a_{2r-1} \equiv 2a_{2r} - v + p \pmod{v}, \quad a_{2r-1} - a_{2r} \equiv 2a_{2r-1} - v + p \pmod{v}.$$

As in 2_2 of the proof of Lemma 1 these differences are distinct, and $\not\equiv 0 \pmod{v}$ and here even $\not\equiv v/2 \pmod{v}$ for all $r = 2, 3, \ldots, k/2$. Then to some $d \not\equiv 0, v/2 \pmod{v}$ there exists a convenient $r = 2, 3, \ldots, k/2$ such that the congruence

$$a_{2r-1} - a_{2r} \equiv d \pmod{v}$$

holds. Note that

$$a_1 - a_2,\ a_2 - a_1 \not\equiv d \pmod{v}.$$

If we proceed in the same way as in 3_1 of the proof of Lemma 1 with this d, we have again $B_p \not\equiv \alpha(B_0)$.

This completes the proof of Lemma 2.

IV. CONCLUSION

Let, in this section, the set $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ of integers modulo v be a (v, k, λ)-difference set. Hence, the system $\mathscr{B} = \{B_p\}$, $p = 0, 1, \ldots, v-1$ where $B_p = \{a_1 + p, a_2 + p, \ldots, a_k + p\}$ is a cyclic (v, k, λ)-configuration $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ and the system $\overline{\mathscr{B}} = \{\alpha(B_p)\}$, $p = 0, 1, \ldots, v-1$ where $\alpha(B_p) = \{v - (a_1 + p), v - (a_2 + p), \ldots, v - (a_k + p)\}$ is also a cyclic (v, k, λ)-configuration $(\mathscr{X}, \overline{\mathscr{B}})$.

We may summarize the results of the foregoing observations:

Proposition 7. *In view of Proposition 1 we can prolongate a cyclic (v, k, λ)-configuration $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ neither by $\alpha(B_0)$ nor by any one of $\alpha(B_p)$ $(p = 1, 2, \ldots, v-1)$.*

Proposition 8. *Given a cyclic (v, k, λ)-configuration $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ and its isomorphism*

$$\alpha : x \mapsto v - x \quad \textit{for each} \quad x \in \mathscr{X},$$

then α is never an automorphism of $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$.

Theorem 2. *If there exists a cyclic (v, k, λ)-configuration $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$, then if we define an isomorphism of $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ by $\alpha : x \mapsto v - x$ for each $x \in \mathscr{X}$, we get a cyclic (v, k, λ)-configuration $(\mathscr{X}, \overline{\mathscr{B}})$, where $\alpha(\mathscr{B}) = \overline{\mathscr{B}}$ and both the configurations $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$, $(\mathscr{X}, \overline{\mathscr{B}})$ are distinct.*

Corollary. *Let v, k, λ be positive integers. If there exists a cyclic (v, k, λ)-configuration $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ then the number of distinct cyclic (v, k, λ)-configurations is even.*

Consider now a cyclic (v, k, λ)-configuration $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$. Since $v - (v - x) = x$, there exists an automorphism of $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$

$$\alpha^2 : x \mapsto v - x \mapsto v - (v - x) \quad \text{for each} \quad x \in \mathscr{X} .$$

All this entitles us to express the results of this paper in the following way:

Two cyclic (v, k, λ)-configurations $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ and $(\mathscr{X}, \overline{\mathscr{B}})$ may be called conjugate.

References

[1] *Herbert John Ryser:* Combinatorial Mathematics. The Mathematical Association of America, 1963.

[2] *Marshall Hall,* Jr.: Combinatorial Theory. Blaisdell, Waltham (Massachusetts), 1967.

Author's address: 290 35 Poděbrady - Zámek (Katedra matematiky FEL ČVUT).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

ON EXCEPTIONAL VALUES OF HOLOMORPHIC MAPPINGS OF RIEMANN SURFACES

ALOIS KLÍČ, Praha

(Received September 7, 1977)

INTRODUCTION

In the framework of the classical Nevanlinna theory, see [4]–[9], sufficient conditions for $\delta(a) = 0$ have been examined. In this paper we shall solve the same problem for the case of holomorphic mappings $f : \mathbf{V} \to \mathbf{M}$, where $\mathbf{V}$ is an open Riemann surface and $\mathbf{M}$ is a closed Riemann surface. Our basic reference is [2].

The layout of this paper is as follows. Section 1 contains basic concepts and denotations and First and Second Main Theorems. Basic concepts from the Ahlfors theory of covering surfaces are briefly introduced as necessary for the formulation of the Ahlfors covering theorem. The Ahlfors covering theorem is used in Section 2 to derive a generalization of Cartan's formula. Sufficient conditions for $\delta(a) = 0$ are treated in Sections 3 and 4; they are followed by several closing notes in Section 5.

1. DENOTATIONS, BASIC CONCEPTS AND THEOREMS

From now on, it is assumed that $\mathbf{V}$ is an open Riemann surface, $\mathbf{M}$ is a compact Riemann surface and $f : \mathbf{V} \to \mathbf{M}$ is a holomorphic mapping. This standard notation will be adhered to throughout the paper. We shall assume that a *harmonic exhaustion* exists on $\mathbf{V}$.

Definition 1.1. A function $\tau : \mathbf{V} \to [0, s)$, $(s \leqq \infty)$ will be called a *harmonic exhaustion* on the open Riemann surface $\mathbf{V}$ iff

(i) $\tau : \mathbf{V} \to [0, s)$ is onto.
(ii) $\tau \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{V})$.
(iii) τ is proper, i.e. the inverse image of a compact set is compact.
(iv) τ is eventually harmonic, i.e. there exists a number $r(\tau)$, $0 \leqq r(\tau) < s$, such that τ is harmonic on $\{p : \tau(p) \geqq r(\tau)\}$.

If $s < \infty$, we say that $\boldsymbol{V}$ admits a *finite harmonic exhaustion.* If $s = \infty$, we say that $\boldsymbol{V}$ admits an *infinite harmonic exhaustion.*

Theorem 1.0. *A Riemann surface is parabolic if and only if it carries a harmonic exhaustion with $s = \infty$.*

The first part of Theorem 1.0 was proved by NAKAI [12]. If the surface carries a harmonic exhaustion with $s = \infty$, then such surface must be parabolic, because the harmonic measure of the ideal boundary is zero, see [13], p. 204, 6E.

Example. In the classical case of meromorphic functions on $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{C}$, $\log |z|$ outside of a certain disc can be used as an exhaustion function.

Denotation 1.1. The following denotation will be used:

(i) $V[r] = \{p \in \boldsymbol{V},\ \tau(p) \leqq r\}$,

(ii) $\partial V[r] = \{p \in \boldsymbol{V},\ \tau(p) = r\}$,

(iii) $n(r, a)$ denotes the number of pre-images of a in $V[r]$, counting multiplicity,

(iv) $N(r, a) = \int_{r_0}^{r} n(t, a)\, \mathrm{d}t$, where $r_0 \geqq r(\tau)$ is a given number.

Definition 1.2. A real number r is called a *critical value* of a function τ, if $\tau^{-1}(r)$ contains a critical point of τ.

Remark 1.1. $\int_{\partial V[r]} * \mathrm{d}\tau$ is a constant for all $r \geqq r(\tau)$.

For the proof see Corollary 4.3 in [2]; an easy proof can be obtained with help of Green's formula, see [13], p. 133. If we apply Greens formula to the function τ that is harmonic on the compact bordered surface $W = \overline{V[r] \setminus V[r_0]}$, we obtain

$$0 = \int_{\partial W} * \mathrm{d}\tau = \int_{\partial V[r]} * \mathrm{d}\tau - \int_{\partial V[r_0]} * \mathrm{d}\tau .$$

Thus $\int_{\partial V[r]} * \mathrm{d}\tau = \text{const.}$ for every $r \geqq r_0 \geqq r(\tau)$, QED.

With the help of the function τ a holomorphic function ζ is constructed. This function will be used as a coordinate function (or local parameter). Let us suppose that (r_1, r_2) does not contain any critical value of τ, and suppose W is one component of $\mathrm{Int}\,(V[r_2] \setminus V[r_1])$. Let γ be one of the level curves of τ in W, say, $\gamma = W \cap \partial V[r]$ for some $r \in (r_1, r_2)$. We call $\int_\gamma * \mathrm{d}\tau = \Gamma$ a period of $* \mathrm{d}\tau$ and define the conjugate harmonic function ϱ of τ by $\varrho(p) = \int_{p_0}^{p} * \mathrm{d}\tau$, where p_0 is a fixed point of γ. Since $\mathrm{d}(*\mathrm{d}\tau) = 0$, ϱ is defined up to periods, i.e. up to integral multiples of Γ and $\mathrm{d}\varrho = *\mathrm{d}\tau$. Consequently, $\zeta = \tau + \mathrm{i}\varrho$ is a holomorphic function on W, but it is multi-valued. Let $\alpha = \{p \in W, \varrho(p) = 0 \,(\mathrm{mod}\, \Gamma)\}$.

Lemma 1.1. *For $\zeta = \tau + \mathrm{i}\varrho$ as above, $\zeta : W \setminus \alpha \to (r_1, r_2) \times (0, \Gamma) \subset \boldsymbol{C}$ is biholomorphic.*

Proof see [2].

Definition 1.3. The holomorphic coordinate function ζ from Lemma 1.1 in a component of $\tau^{-1}((r_1, r_2))$ is called *a special coordinate function*.

Remark 1.2. It is well known (see Lemma 1.2 in [2]) that on every compact Riemann surface $\boldsymbol{M}$ a Hermitian metric of constant Gaussian curvature can be introduced. Let us denote this metric by G and its volume element by Ω. In local coordinates we have:

$$G = g(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2), \quad \Omega = g\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\,.$$

By a suitable choice of a multiplicative constant the standardization $\int_{\boldsymbol{M}} \Omega = 1$ is easily achieved.

Theorem 1.1. *Let $a \in \boldsymbol{M}$ be a fixed point of $\boldsymbol{M}$. Then there exists a real-valued function u_a with the following properties:*

1. *u_a is $\mathbf{C}^\infty$ in $\boldsymbol{M} \setminus \{a\}$.*
2. $\dfrac{1}{2\pi}\,\mathrm{dd^c}u_a = \Omega$ *in* $\boldsymbol{M} \setminus \{a\}$.
3. *If z is any a-centered holomorphic coordinate function in a neighborhood U of a, then $u_a(z) + \log|z|$ is $\mathbf{C}^\infty$ on U.*
4. $u_a \geqq 0$.

Proof see [2].

Denotation 1.2. Let us set

(i)
$$v(r) = \int_{V[r]} f^*\Omega\,,$$

(ii)
$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial V[r]} f^*u_a * \mathrm{d}\tau\,,$$

(iii)
$$T(r) \int_{r_0}^{r} v(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

$T(r)$ is the *Nevanlinna characteristic function* of the mapping f,

(iv)
$$E(r) = \int_{r_0}^{r} \chi(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

where $\chi(t)$ denotes the *Euler characteristic* of $V[t]$ ($\chi(\boldsymbol{S}) = +2$, where $\boldsymbol{S}$ denotes the Riemann sphere),

(v)
$$\chi = \limsup_{r \to s} \frac{-E(r)}{T(r)}\,.$$

Remark 1.3. Let us recall that for a nonconstant holomorphic mapping $f : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{M}$, where $\boldsymbol{V}$ is a parabolic, we have $T(r) \to \infty$ as $r \to \infty$, for

$$T(r) = \int_{r_0}^{r} v(t)\,\mathrm{d}t > v(r_0)(r - r_0) \to \infty \quad \text{as} \quad r \to \infty\,.$$

Remark 1.4 .A nonnegative function h is defined by the relation

(1) $$f^*\Omega = h\,\mathrm{d}\tau \wedge *\mathrm{d}\tau\,.$$

The function h is not defined at the critical points of τ; see [2], p. 501.

Theorem 1.2. (First Main Theorem). *For every* $r \geqq r(\tau)$,

(2) $$m(r, a) + N(r, a) = T(r) + m(r_0, a)\,.$$

Definition 1.4. Let us put (for $a \in \boldsymbol{M}$)

$$\delta(a) = \limsup_{r \to s} \left(1 - \frac{N(r, a)}{T(r)}\right).$$

The quantity $\delta(a)$ is called *the defect of the value a*. If $\delta(a) > 0$ then the value a is said to be the *deficient* or *Nevanlinna exceptional value*.

Remark 1.5. For a mapping with an unbounded characteristic function $T(r)$ (i.e. $\lim_{r \to s} T(r) = \infty$), the quantity $\delta(a)$ can be defined by the relation

(3) $$\delta(a) = \liminf_{r \to s} \frac{m(r, a)}{T(r)}$$

as can be seen from relation (2) in Theorem 1.2.

Theorem 1.3 (Defect relations). *If* $f : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{M}$ *is holomorphic and* $\boldsymbol{V}$ *admits an infinite harmonic exhaustion, then*

(4) $$\sum_{a \in \boldsymbol{M}} \delta(a) \leqq \chi(\boldsymbol{M}) + \chi\,.$$

If $\boldsymbol{V}$ *admits a finite harmonic exhaustion, then*

(5) $$\sum_{a \in \boldsymbol{M}} \delta(a) \leqq \chi(\boldsymbol{M}) + \chi + \varepsilon\,,$$

where

$$\varepsilon = \limsup_{r \to s} \frac{1}{T(r)} \left\{\frac{L}{4\pi} \log\left(T(r) + \text{const.}\right) + 2 \log \frac{1}{s - r} + \text{const.}\right\}.$$

Basic concepts from the Ahlfors theory of covering surfaces will now be introduced. For a more detailed study we refer to [11], Vol. 2, Chap. VII and X.

Let W and W_0 be two topological spaces and $F : W \to W_0$ a continuous mapping from W into W_0. Let $\mathfrak{N}$ be the set of ordered pairs $[p, F(p)] = [p, p_0]$, $p \in W$ $p_0 \in W_0$, $p_0 = F(p)$. The set $\mathfrak{N}$ will be endowed with a topology in this manner: By a neighborhood of a point $[q, q_0] \in \mathfrak{N}$ we understand the set of pairs $[p, p_0] \in \mathfrak{N}$, where p moves through a neighborhood of the point q. The set $\mathfrak{N}$, endowed with this topology, will be denoted by $(W_0)_F^W$ and $(W_0)_F^W$ will be called a *covering space of the base space* W_0. The point $p_0 \in W_0$ associated with the point $[p, p_0] \in (W_0)_F^W$ is called the *trace point* of $[p, p_0]$; one also says that $[p, p_0]$ *lies over* p_0.

Let W_0 be a compact surface with a *normal metric*, let W be an arbitrary topological surface and F an *inner* mapping. (For definitions of the *normal* metric and the *inner* mapping we refer to [11].) The metric on the base surface W_0 is carried over to the surface W with help of the mapping F in the following manner:

(i) **Length of a curve.** The properties of the inner mapping imply: Each curve β on W can be decomposed into parts, on which the mapping F is *topological* and with each such part the length of its image on the base surface W_0 is associated. The total length of the curve β is equal to the sum of the lengths of these parts.

(ii) **Area.** Let $D \subset W$ be a compact region. We can decompose the region D into parts, on which the mapping F is *topological* and we associate with each such part the area of its image on the base surface W_0. The total area of the region D is equal to the sum of the area of these parts.

Let $W_r \subset W$ be a compact polyhedral region with a boundary ∂W_r. The covering surface $(W_0)_F^{W_r}$ is contained in the covering surface $(W_0)_F^W$.

Definition 1.5. (i) The quantity

$$S_r = \frac{A_r}{A_0}$$

(where A_r is the total area of W_r and A_0 is the area of the base surface W_0) is called the *mean sheat number of* W_r *over* W_0.

(ii) Let γ be a *curve* on W_0. The quantity

$$s_r(\gamma) = \frac{L_r(\gamma)}{L_0(\gamma)}$$

(where $L_0(\gamma)$ stands for the length of γ and $L_r(\gamma)$ for the total length of the arcs *lying over* γ on W_r), is called the *mean sheet number over the curve* γ.

Theorem 1.4 (Ahlfors Covering Theorem). *Let* γ *be a regular curve on the base* *surface W_0. Then there exists a finite number k dependent only on W_0 and γ, such that*

$$|S_r - s_r(\gamma)| \leqq kL_r$$

where L_r is the length of ∂W_r.

2. GENERALIZATION OF CARTAN'S FORMULA

Let us interpret the mapping $f : \mathbf{V} \to \mathbf{M}$ as a covering mapping. Then $(\mathbf{M})_f^{\mathbf{V}}$ is a covering surface. It is possible to assume the metric G on the surface $\mathbf{M}$ (from Remark 1.2) to be normal. By the uniformization theorem, every compact Riemann surface is covered by either the complex plane, or the unit disc, or the Riemann sphere. These three spaces can be equipped with a Hermitian metric that is normal. Consequently, the surface $\mathbf{M}$ can also be equipped with such a metric.

The quantity

$$v(r) = \int_{V[r]} f^*\Omega$$

is the *mean sheet number* of $V[r]$ over $\mathbf{M}$ (for $\int_{\mathbf{M}} \Omega = 1$). The quantity $s_r(\gamma)$ will be denoted from now on by $s(r, \gamma)$. If $\mathrm{d}s$ denotes the *element of arc-length* of the curve γ, then the following identity is evident:

$$s(r, \gamma) = \frac{1}{L_0(\gamma)} \int_\gamma n(r, a)\, \mathrm{d}s(a)\,. \tag{7}$$

With this notation, the relation (6) from Theorem 1.4 yields

$$|v(r) - s(r, \gamma)| \leqq k\, L(r)\,, \tag{8}$$

where $L(r)$ is the length of the curve $\partial V[r]$ in the metric $f^*\Omega$. Thus

$$L(r) = \int_{\partial V[r]} h^{1/2} * \mathrm{d}\tau\,, \tag{9}$$

where the function h is defined by the relation (1) from Remark 1.3.

The following well-known lemma will be used:

Lemma 2.1. *Suppose ψ is a once continuously differentiable, positive, increasing function on $[r_0, \infty)$. Then for any real number $\varepsilon > 0$, $\psi'(t) \leqq \{\psi(t)\}^{1+\varepsilon}$ on $[r_0, \infty)$ except on an open set $I \subset [r_0, \infty)$ for which $\int_I \mathrm{d}t < \infty$.*

Definition 2.1. Let $S(r, f)$ denote the quantity defined by

$$S(r, f) = o\{T(r)\}$$

for $r \to \infty$, $r \in [r_0, \infty) \setminus I$, $\int_I \mathrm{d}x < \infty$.

Lemma 2.2. *Let $f : \mathbf{V} \to \mathbf{M}$ be a nonconstant holomorphic mapping from a parabolic Riemann surface* $\mathbf{V}$ *into* $\mathbf{M}$. *Then*

$$\int_{r_0}^{r} L(t)\,\mathrm{d}t = S(r, f)\,.$$

Proof. Let K_0 denote the set of critical values of the function τ. Then

$$\int_{r_0}^{r} L(t)\,\mathrm{d}t = \int_{(r_0,r)\setminus K_0} L(t)\,\mathrm{d}t = \int_{(r_0,r)\setminus K_0} \left(\int_{\partial V[t]} h^{1/2} * \mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}t\,. \tag{10}$$

If the Schwarz inequality is applied to the inner integral, we obtain

$$\int_{\partial V[t]} h^{1/2} * \mathrm{d}\tau \leqq \left\{\int_{\partial V[t]} h * \mathrm{d}\tau\right\}^{1/2} \left\{\int_{\partial V[t]} * \mathrm{d}\tau\right\}^{1/2} = \sqrt{L} \left\{\int_{\partial V[t]} h * \mathrm{d}\tau\right\}^{1/2}. \tag{11}$$

The following result is obtained from (10), (11) by repeated application of the Schwarz inequality:

$$\begin{aligned}
\int_{r_0}^{r} L(t)\,\mathrm{d}t &\leqq \sqrt{L} \int_{(r_0,r)\setminus K_0} \left(\int_{\partial V[t]} h * \mathrm{d}\tau\right)^{1/2} \mathrm{d}t \leqq \\
&\leqq \sqrt{L} \left\{\int_{(r_0,r)\setminus K_0} \left(\int_{\partial V[t]} h * \mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}t\right\}^{1/2} \left(\int_{r_0}^{r} \mathrm{d}t\right)^{1/2} = \\
&= \sqrt{L} \sqrt{(r - r_0)} \left\{\int_{(r_0,r)\setminus K_0} \left(\int_{\partial V[t]} h * \mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}t\right\}^{1/2} \leqq \\
&\leqq \sqrt{L} \sqrt{(r - r_0)} \sqrt{\left(\int_{V[r]\setminus V[r_0]} h\,\mathrm{d}\tau \wedge * \mathrm{d}\tau\right)} = \\
&= \sqrt{L} \sqrt{(r - r_0)} \sqrt{(v(r) - v(r_0))} \leqq \sqrt{L} \sqrt{(r\,.\,v(r))}\,,
\end{aligned}$$

i.e. we proved

$$\int_{r_0}^{r} L(t)\,\mathrm{d}t \leqq \sqrt{L} \sqrt{(r\,.\,v(r))}\,. \tag{12}$$

As

$$r\,.\,v(r) = r \frac{\mathrm{d}T(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}T(r)}{\mathrm{d}\ln r},$$

Lemma 2.1 applied to the function $\psi(t) = T(r)$, where $t = \ln r$ and $\varepsilon = \frac{1}{2}$ yields

$$r\,v(r) \leqq \{T(r)\}^{3/2} \tag{13}$$

outside of the set I for which $\int_I \ln x\,\mathrm{d}x < \infty$. Finally, as a consequence of (12), (13), we obtain

$$\int_{r_0}^{r} L(t)\,\mathrm{d}t \leqq \sqrt{L}\,\{T(r)\}^{3/4} = S(r, f)\,, \qquad \text{QED.}$$

Lemma 2.3. *$n(t, a)$ is a measurable function on $[0, s) \times \boldsymbol{M}$.*

Corollary. *$n(t, a)$ is an integrable function on $[r_1, r_2] \times \gamma$, where $[r_1, r_2]$ is any finite closed subinterval of $(r(\tau), s)$ and γ is a regular curve on $\boldsymbol{M}$.*

Proof of Lemma 2.3. Let $(t, a) \in [0, s) \times \boldsymbol{M}$, $(t_i, a_i) \to (t, a)$ as $i \to \infty$. We will prove

$$\limsup_{i \to \infty} n(t_i, a_i) \leqq n(t, a),$$

which is equivalent to the semi-continuity. Let $\{t_i\} = \{r_i\} \cup \{s_i\}$ where $r_i \geqq t$, $s_i \leqq t$. It suffices to prove

(i) $\limsup_{i \to \infty} n(r_i, a_i) \leqq n(t, a)$,

(ii) $\limsup_{i \to \infty} n(s_i, a_i) \leqq n(t, a)$.

First we prove the following statement: *There exists such a neighborhood U of the point a that*

(iii) *$n(t, a') \leqq n(t, a)$ for all $a' \in U$.*

Let us denote $f^{-1}(a) \cap V[t] = \{p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_m\}$ where $\{p_1, \ldots, p_k\} \in V[t] \setminus \partial V[t]$ and $\{q_1, \ldots, q_m\} \in \partial V[t]$. We can choose neighborhoods $U_1, \ldots, U_k$ of the points $p_1, \ldots, p_k$ with the following properties:

a) $U_i \subset V[t] \setminus \partial V[t]$ for $i = 1, 2, \ldots, k$;

b) If f assumes the value a at the point p_i with a multiplicity m_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, then for an arbitrary $a' \in U$ exactly m_i distinct simple roots of the equation $f(z) = a'$ lie in U_i. Hence for an arbitrary $a' \in U$, the contributions of the points from U_i to $n(t, a')$ and $n(t, a)$ are equal.

We will now investigate the points $q_1, \ldots, q_m$. Let the neighborhoods $V_1, \ldots, V_m$ of the points $q_1, \ldots, q_m$ have the property *b)* above. Then for an arbitrary $a' \in U$ the contributions of the points from V_j to $n(t, a')$ are less or equal than to $n(t, a)$, as some preimages of the point a' can lie outside of $V[t]$.

We will first prove (ii). It is self-evident that $n(s_i, a_i) \leqq n(t, a_i)$ and according to (iii) $n(t, a_i) \leqq n(t, a)$ for every i sufficiently large. Hence (ii) is valid. As for (i) we will prove it by contradiction. Assume (i) is false, then

$$\limsup_{i \to \infty} n(r_i, a_i) > n(t, a).$$

Passing to a subsequence if necessary, we may assume that we have $\lim_{i \to \infty} n(r_i, a_i) > n(t, a)$, where $r_1 \geqq r_2 \ldots \geqq t$, and furthermore that $V[r_1]$ encloses the same number of preimages of the point a as $V[t]$, i.e., $n(r_1, a) = n(t, a)$. For every i sufficiently large we have $n(r_i, a_i) \leqq n(r_1, a_i) \leqq n(r_1, a) = n(t, a)$, which contradicts our assumption, therefore (i) is valid.

Proof of Corollary. The function $n(t, a)$ is semi-continuous on the set $[0, s) \times \boldsymbol{M}$, hence $n(t, a)$ is also semi-continuous on the set $[0, s) \times \gamma$. The set $[r_1, r_2] \times \gamma$ is a compact set, thus the semi-continuous function $n(t, a)$ is bounded on $[r_1, r_2] \times \gamma$ and hence integrable, QED.

Remark 2.1. Let γ be a curve on $\boldsymbol{M}$ and $L_0(\gamma)$ its length. Let ds be the element of arc-length of the curve γ and

$$ds^0 = \frac{ds}{L_0(\gamma)}.$$

The relation (7) can now be written as

$$s(r, \gamma) = \int_\gamma n(r, a)\, ds^0(a).$$

Theorem 2.1 (Generalized Cartan's formula). *Let $f : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{M}$ be a holomorphic mapping from a parabolic Riemann surface $\boldsymbol{V}$ into $\boldsymbol{M}$, γ a regular curve on $\boldsymbol{M}$. Then*

$$T(r) = \int_\gamma N(r, a)\, ds^0(a) + S(r, f). \tag{14}$$

Proof. From the relation (8) we obtain by integration

$$\left| \int_{r_0}^r v(t)\, dt - \int_{r_0}^r s(t, \gamma)\, dt \right| \leqq k \,.\int_{r_0}^r L(t)\, dt. \tag{15}$$

Furthermore, (Fubini Theorem and Lemma 2.3)

$$\int_{r_0}^r s(t, \gamma)\, dt = \int_{r_0}^r \left(\int_\gamma n(t, a)\, ds^0(a) \right) dt =$$

$$= \int_\gamma \left(\int_{r_0}^r n(t, a)\, dt \right) ds^0(a) = \int_\gamma N(r, a)\, ds^0(a).$$

Substitution in the relation (15) yields

$$\left| T(r) - \int_\gamma N(r\ a)\, ds^0(a) \right| \leqq S(r, f). \tag{16}$$

QED.

3. THE CASE OF A PARABOLIC RIEMANN SURFACE

Theorem 3.1. *Let $f : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{M}$ be a transcendental*[1]) *holomorphic mapping from a parabolic Riemann surface $\boldsymbol{V}$ into $\boldsymbol{M}$ $a_0 \in \boldsymbol{M}$, and $D(a_0)$ its neighborhood. Let the portion of surface $(\boldsymbol{M})_f^{\boldsymbol{V}}$ over the neighborhood $D(a_0)$ consist of a system of*

[1]) Let us recall that the mapping f: $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{M}$ is *transcendental* iff $\lim_{r \to \infty} (r/T(r)) = 0$, see [2].

regions $G_\nu \subset (\mathbf{M})_f^{\mathbf{V}}$ *with the following properties: If* $G_\nu \subset (\mathbf{M})_f^{\mathbf{V}}$ *is an arbitrary domain over* $D(a_0)$, *then over every point* $a \in D(a_0)$ *there lie just* λ_ν *points and* $1 \leqq \lambda_\nu \leqq \Lambda < \infty$; *every ramification point of an order* m *is counted* $(m + 1)$-*times. Then the value* a_0 *is not a deficient value of the mapping* f, *i.e.*

$$\delta(a_0) = 0 .$$

Proof. Let $a_0 \in \mathbf{M}$ and let $D(a_0)$ be its neighborhood with the property required by Theorem 3.1. Then every neighborhood $U(a_0) \subset D(a_0)$ has this property. We can choose a chart $\{U, \varphi\}$ in the neighborhood of the point a_0 so that $\varphi(a_0) = 0$ and

$$\varphi(\bar{D}(a_0)) = \{z \in \mathbf{C} \ |z| \leqq 1\} .$$

Then

$$\gamma = \varphi^{-1}(\{z \in \mathbf{C}, \ |z| = R, \ R < 1\})$$

is a regular curve in $D(a_0)$ $a_0 \in \operatorname{Int} \gamma$, where

$$\operatorname{Int} \gamma = \varphi^{-1}(\{z \in \mathbf{C}, \ |z| < R\}) .$$

Let d be the distance between γ and $\partial D(a_0)$ on the surface $\mathbf{M}$. Let $\bar{F}_\nu$ denote the closed set of the points from G_ν, lying over $\overline{\operatorname{Int} \gamma}$. The set $\bar{F}_\nu$ consists of not more than λ_ν closed regions. It is known that $\mathbf{V}$ and $(\mathbf{M})_f^{\mathbf{V}}$ are homeomorphic (even conformally equivalent), i.e. a homeomorphic mapping ψ exists,

$$\psi : \mathbf{V} \to (\mathbf{M})_f^{\mathbf{V}} .$$

Let us denote $D_\nu = \psi^{-1}(G_\nu)$, $\bar{C}_\nu = \psi^{-1}(\bar{F}_\nu)$. Further, let a_γ be an arbitrary point on γ. Every set D_ν contains the same number of a_0-points and a_γ-points, namely λ_ν. All a_0-points and a_γ-points are contained in $\bigcup_\nu \bar{C}_\nu \subset \bigcup_\nu D_\nu$. If $\bar{C}_\nu \subset V[r]$, then the functions $n(r, a_0)$ and $n(r, a_\gamma)$ have the same increment on the set $V[r]$. The increment equals λ_ν.

Let $k(r)$ denote the number of sets $\bar{C}_\nu$ that have a nonempty intersection with both $V[r]$ and $\mathbf{V} \setminus V[r]$. Then

$$n(r, a_\gamma) - n(r, a_0) \leqq \Lambda \, k(r) , \tag{17}$$

as the number of a_γ-points in $\bar{C}_\nu$ is less than or equal to Λ. If $k(r) \geqq 2$, then the whole $\partial V[r]$ cannot lie in a single set D_ν. If $\partial V[r]$ intersects $k(r) \geqq 2$ distinct sets $\bar{C}_\nu$, then $f(\partial V[r])$ intersects "*the ring*" $D(a_0) \setminus \overline{\operatorname{Int} \gamma}$ at least $2\,k(r)$-times, connecting the points on $\partial D(a_0)$ with the points on γ. Thus

$$L(r) \geqq 2\,k(r) \,.\, d , \tag{18}$$

$$k(r) \leqq \frac{1}{2d} L(r) . \tag{19}$$

From the relations (17) and (18) we obtain

$$n(r, a_\gamma) - n(r, a_0) \leqq \Lambda \max(1, k(r)) \leqq \Lambda\left(1 + \frac{1}{2d} L(r)\right). \tag{20}$$

Integrating the relation (20) from r_0 to r we have

$$N(r, a_\gamma) - N(r, a_0) \leqq \Lambda\left(r + \frac{1}{2d}\int_{r_0}^{r} L(t)\,\mathrm{d}t\right). \tag{21}$$

Further integration along γ gives

$$\int_\gamma N(r, a_\gamma)\,\mathrm{d}s^0 - N(r, a_0) \leqq \Lambda\left(r + \frac{1}{2d}\int_{r_0}^{r} L(t)\,\mathrm{d}t\right). \tag{22}$$

Using Theorem 2.1 and Lemma 2.2 we have

$$T(r) - N(r, a_0) \leqq \Lambda\left(r + \frac{1}{2d} S(r, f)\right). \tag{23}$$

Using Theorem 1.2 on the left hand side of (23) we obtain

$$m(r, a_0) \leqq S(r, f)\,, \quad \text{i.e.} \quad \delta(a_0) = 0\,, \qquad \text{QED.}$$

4. THE CASE OF A HYPERBOLIC RIEMANN SURFACE

We shall prove a theorem analogous to Theorem 3.1 for an open Riemann surface with *finite harmonic exhaustion.* The following well-known lemma will be used (see [2]):

Lemma 4.1. *Suppose ψ is a once differentiable positive increasing function on $[0, s)$, $s < \infty$. Then for every real number $\varepsilon > 0$,*

$$\psi'(r) \leqq \frac{1}{s - r}\{\psi(r)\}^{1+\varepsilon}$$

for all $r \in [0, s) \setminus I_1$, where $I_1 \subset [0, s)$ is an open set such that

$$\int_{I_1} \mathrm{d}\log(s - r) > -\infty\,.$$

We recall that the relation (12) is also valid for a Riemann surface admitting finite harmonic exhaustion. Since

$$r < s < \infty$$

in this case, the relation (12) can be rewritten as

$$(24) \qquad \int_{r_0}^{r} L(t)\, dt \leqq \sqrt{L}\sqrt{s}\sqrt{v(r)}\,.$$

If Lemma 4.1 is applied to the function $T(r)$, the result is

$$v(r) \leqq \frac{1}{s-r}\{T(r)\}^{1+\varepsilon}.$$

The inequality

$$(25) \qquad \sqrt{v(r)} \leqq \frac{1}{\sqrt{(s-r)}}\{T(r)\}^{1/2+\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0 \textit{ arbitrary})$$

is valid on $[0, s)\setminus I_1$.

Let $T(r)$ grow so rapidly that

$$(26) \qquad \frac{1}{\sqrt{(s-r)}}\{T(r)\}^{1/2+\varepsilon} = o\{T(r)\}$$

is valid for $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Then Lemma 2.2 is also true for a surface with finite harmonic exhaustion.

Definition 4.1. Let $Q(r, f)$ denote the quantity defined by

$$Q(r, f) = o\{T(r)\}$$

for $r \to s$, $r \in [r_0, s)\setminus I_1$, where I_1 is the set from Lemma 4.1.

Lemma 4.2. *Let $f : \mathbf{V} \to \mathbf{M}$ be a holomorphic mapping from an open Riemann surface $\mathbf{V}$, admitting finite harmonic exhaustion, into $\mathbf{M}$. If the relation (26) is valid, then*

$$\int_{r_0}^{r} L(t)\, dt = Q(r, f)\,.$$

Proof follows at once from the relations (24), (25), (26). Furthermore, the following theorems are true.

Theorem 4.1. *Let $f : \mathbf{V} \to \mathbf{M}$ be a holomorphic mapping from an open Riemann surface $\mathbf{V}$, admitting finite harmonic exhaustion, into $\mathbf{M}$ and let γ be a regular curve on $\mathbf{M}$. If the relation (26) is valid, then*

$$T(r) = \int_{\gamma} N(r, a)\, ds^0(a) + Q(r, f)\,.$$

(This is *generalized Cartan's formula* in the case $s < \infty$.)

Theorem 4.2. *Let $f : \mathbf{V} \to \mathbf{M}$ be a holomorphic mapping from an open Riemann surface* $\mathbf{V}$, *admitting finite harmonic exhaustion, into* $\mathbf{M}$. *Let the relation* (26) *be valid. Then under the assumptions of Theorem* 3.1 *its assertion also holds, i.e.* $\delta(a_0) = 0$.

The proofs of Theorems 4.1 and 4.2 are analogous to the proofs of Theorems 2.1 and 3.1. For this reason they are omitted.

Remark 4.1. It is possible to give a weaker condition on the rapidity of the growth $T(r)$ than (26). If Lemma 4.1 is applied to the function $\log T(r)$, the result is

$$\frac{T'(r)}{T(r)} \leqq \frac{1}{s-r}\,[\log T(r)]^{1+\varepsilon}\,,$$

i.e.

$$v(r) \leqq \frac{1}{s-r}\,T(r)\,[\log T(r)]^{1+\varepsilon}\,.$$

Then instead of (26) we can introduce the condition

$$(26)' \qquad \frac{1}{\sqrt{(s-r)}}\sqrt{T(r)}\,[\log T(r)]^{1/2+\varepsilon} = o\{T(r)\}\,.$$

Remark 4.2. In this remark an example of a mapping satisfying (26) is given. Let $D = \{z \in \mathbf{C},\ |z| < 1\}$ and consider the function

$$f(z) = -1 + \exp\frac{2\pi i}{(1-z)^3}$$

defined on D. The point $z = 1$ is an essential singularity of f. The zeros of f in D are located at $z_k = 1 - (1/\sqrt[3]{k})$, $k = 1, 2, \ldots$ and so a circle of radius $r < 1$ encloses at most $1/(1-r)^3$ zeros of f, up to a constant which is independent of r. Further, we define a harmonic exhaustion of D with help of the function $\tau(z) = \log e|z|$; then $\tau : D \to [0, 1)$. Let us put $r_0 = 2/e$. Then

$$\int_{r_0}^{r} n(t, 0)\,dt \geqq \int_{r_0}^{r}\left[\frac{1}{(1-e^{t-1})^3} + \text{const.}\right]dt \geqq \frac{1}{(1-e^{r-1})^2} = O\left\{\frac{1}{(1-r)^2}\right\}.$$

From First Main Theorem we obtain

$$T(r) \geqq O\left\{\frac{1}{(1-r)^2}\right\},$$

hence $T(r)$ satisfies the condition (26).

For the function $f(z) = -1 + \exp[2\pi i/(1-z)^2]$ we similarly obtain $T(r) = O\{1/(1-r)\}$ so that the condition (26) is not fulfilled.

5. CLOSING REMARKS

In this section we mention several consequences of the preceding theorems. Most of these results, known from [1], Chap. VI, are obtained here in a quite different way. The following lemma will be needed:

Lemma 5.1 (Generalized l'Hospital rule). *Let g and h be differentiable functions on an interval $[a, b)$, $b \leqq \infty$, such that h' exists and is nowhere zero on $[a, b)$. If*

$$\lim_{x \to b-} g(x) = \lim_{x \to b-} h(x) = 0$$

or if

$$\lim_{x \to b-} g(x) = \lim_{x \to b-} h(x) = \infty ,$$

then

$$\liminf_{x \to b-} \frac{g'}{h'} \leqq \liminf_{x \to b-} \frac{g}{h} \leqq \limsup_{x \to b-} \frac{g}{h} \leqq \limsup_{x \to b-} \frac{g'}{h'} . \tag{27}$$

Proof see [12].

(i) As a consequence of Lemma 2.2 we have

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{\int_{r_0}^{r} L(t)\, dt}{T(r)} = 0 .$$

Because $(\int_{r_0}^{r} L(t)\, dt)' = L(r)$ and $(T(r))' = v(r)$, we obtain using Lemma 5.1

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{L(r)}{v(r)} \leqq \liminf_{r \to \infty} \frac{\int_{r_0}^{r} L(t)\, dt}{T(r)} = 0 . \tag{28}$$

The relation (28) implies the following assertion:

If $f : \mathbf{V} \to \mathbf{M}$ is a holomorphic mapping of a parabolic Riemann surface $\mathbf{V}$ into $\mathbf{M}$, then the covering surface $(\mathbf{M})_f^{\mathbf{V}}$ is regularly exhaustible.

(ii) Similarly, we have as a consequence of Lemma 4.2:

If $f : \mathbf{V} \to \mathbf{M}$ is a holomorphic mapping of an open Riemann surface $\mathbf{V}$, admitting finite harmonic exhaustion, into $\mathbf{M}$, for which the relation (26) is valid, then the covering surface $(\mathbf{M})_f^{\mathbf{V}}$ is regularly exhaustible.

(iii) In the case of a parabolic Riemann surface H. Wu gave in [2] a simple proof that $f(\mathbf{V})$ is *open dense* in $\mathbf{M}$. A much stronger result is known (see [1]): If $\mathbf{V}$ is parabolic, then $\mathbf{M} \setminus f(\mathbf{V})$ has the *capacity zero.*

The following assertion follows from Theorem 2.1:

If $\mathbf{V}$ is a parabolic Riemann surface and $f : \mathbf{V} \to \mathbf{M}$ a holomorphic mapping, then for an arbitrary regular curve γ on $\mathbf{M}$ the intersection

$$f(\mathbf{V}) \cap \gamma$$

is nonempty.

Proof. The assumption $f(\mathbf{V}) \cap \gamma = \emptyset$ leads to a contradiction in virtue of the relation (14), viz.

$$T(r) = o\{T(r)\}$$

on the set $[r_0, \infty) \setminus I$.

Theorem 4.1 implies the following result:

If an open Riemann surface $\mathbf{V}$ carries a finite harmonic exhaustion and $f : \mathbf{V} \to \mathbf{M}$ is a holomorphic mapping for which the relation (26) is valid, then for an arbitrary regular curve γ on $\mathbf{M}$, the intersection

$$f(\mathbf{V}) \cap \gamma$$

is nonempty.

References

[1] *L. Sario* and *K. Noshiro:* Value Distribution Theory, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1966.

[2] *H. Wu:* Mappings of Riemann Surfaces (Nevanlinna Theory), Proc. Sympos. Pure Math., vol. *XI*, "Entire Functions and Related Parts of Analysis", Amer. Math. Soc., 1968, 480 to 532.

[3] *H. Wu:* The Equidistribution Theory of Holomorphic Curves, Annals of Math., Studies 64, Princeton Univ. Press, Princeton N.J., 1970.

[4] *E. F. Collingwood:* Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions entieres d'ordre fini, C.r. Acad. sci. *197*, 1924, 1125—1127.

[5] *H. Cartan:* Sur les valeurs exceptionnelles d'une fonction méromorphe dans tout le plan, C.r. Acad. sci. *190*, 1930, 1003—1005.

[6] *S. Kakutani:* On the Exceptional Value of Meromorphic Functions, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan *17*, 1935, 174—176.

[7] *O. Teichmüller:* Eine Umkehrung des Zweiten Hauptsatzes der Wertverteilungslehre, Deutsche Math. *2*, 1937, 96—107.

[8] *H. L. Selberg:* Eine Ungleichung der Potentialtheorie und ihre Anwendung in der Theorie der meromorphen Funktionen, Comment. Math. Helv. *18*, 1946, 309—326.

[9] *Y. Tumura:* Sur une extension d'un theoreme de M. Teichmüller, Proc. Imp. Acad. Tokyo *19*, 1943, 55—59.

[10] *R. Nevanlinna:* Analytic Functions, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1970.

[11] *S. Stoilow:* Teorija funkcij kompleksnogo peremennogo, Izd. inostrannoj literatury, Moskva 1962.

[12] *R. C. Buck:* Advanced Calculus, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1965.

[13] *L. V. Ahlfors, L. Sario:* Riemann Surfaces, Princeton Univ. Press, Princeton N. J., 1960.

Author's address: 166 28 Praha 6, Suchbátarova 1905 (katedra matematiky VŠCHT Praha).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

ON CHARACTERIZATION OF THE SPHERE IN E^4 BY MEANS OF THE PARALLELNESS OF CERTAIN VECTOR FIELDS

KAREL SVOBODA, Brno

(Received September 16, 1977)

In this paper we present a certain generalization of the results contained in [3]. Using the parallelness of a certain normal vector field associated to a given couple of tangent vector fields, we prove theorems analogous to those of [3] to get the base for other considerations.

1. Let M be a surface in the 4-dimensional Euclidean space E^4 and ∂M its boundary. Let the surface M be covered by domains U_α in such a way that in any U_α there is a field of orthonormal frames $\{M; v_1, v_2, v_3, v_4\}$ with $v_1, v_2 \in T(M)$, $v_3, v_4 \in N(M)$, $T(M)$, $N(M)$ being the tangent and the normal bundle of M, respectively. Then

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M &= \omega^1 v_1 + \omega^2 v_2 , \\ \mathrm{d}v_1 &= \omega_1^2 v_2 + \omega_1^3 v_3 + \omega_1^4 v_4 , \\ \mathrm{d}v_2 &= -\omega_1^2 v_1 + \omega_2^3 v_3 + \omega_2^4 v_4 , \\ \mathrm{d}v_3 &= -\omega_1^3 v_1 - \omega_2^3 v_2 + \omega_3^4 v_4 , \\ \mathrm{d}v_4 &= -\omega_1^4 v_1 - \omega_2^4 v_2 - \omega_3^4 v_3 ; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \mathrm{d}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i , \quad \mathrm{d}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j , \\ \omega_i^j + \omega_j^i = 0 , \qquad \omega^3 = \omega^4 = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3, 4) . \end{gathered} \tag{2}$$

Using the well-known prolongation procedure, we get the existence of real functions a_i, b_i $(i = 1, 2, 3)$, α_i, β_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, $A_i, B_i, \ldots, E_i$ $(i = 1, 2)$ in each U_α such that

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= a_1\omega^1 + a_2\omega^2 , \quad \omega_2^3 = a_2\omega^1 + a_3\omega^2 , \\ \omega_1^4 &= b_1\omega^1 + b_2\omega^2 , \quad \omega_2^4 = b_2\omega^1 + b_3\omega^2 ; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}a_1 - 2a_2\omega_1^2 - b_1\omega_3^4 = \alpha_1\omega^1 + \alpha_2\omega^2 , \\ &\mathrm{d}a_2 + (a_1 - a_3)\,\omega_1^2 - b_2\omega_3^4 = \alpha_2\omega^1 + \alpha_3\omega^2 , \end{aligned} \tag{4}$$

$$d a_3 + 2a_2\omega_1^2 - b_3\omega_3^4 = \alpha_3\omega^1 + \alpha_4\omega^2 ,$$
$$d b_1 - 2b_2\omega_1^2 + a_1\omega_3^4 = \beta_1\omega^1 + \beta_2\omega^2 ,$$
$$d b_2 + (b_1 - b_3)\,\omega_1^2 + a_2\omega_3^4 = \beta_2\omega^1 + \beta_3\omega^2 ,$$
$$d b_3 + 2b_2\omega_1^2 + a_3\omega_3^4 = \beta_3\omega^1 + \beta_4\omega^2 ;$$

$$\begin{aligned}
(5)\qquad & d\alpha_1 - 3\alpha_2\omega_1^2 - \beta_1\omega_3^4 = A_1\omega^1 + (B_1 - a_2K - \tfrac{1}{2}b_1k)\,\omega^2 ,\\
& d\alpha_2 + (\alpha_1 - 2\alpha_3)\,\omega_1^2 - \beta_2\omega_3^4 = (B_1 + a_2K + \tfrac{1}{2}b_1k)\,\omega^1 +\\
&\quad + (C_1 + a_1K - \tfrac{1}{2}b_2k)\,\omega^2 ,\\
& d\alpha_3 + (2\alpha_2 - \alpha_4)\,\omega_1^2 - \beta_3\omega_3^4 = (C_1 + a_3K + \tfrac{1}{2}b_2k)\,\omega^1 +\\
&\quad + (D_1 + a_2K - \tfrac{1}{2}b_3k)\,\omega^2 ,\\
& d\alpha_4 + 3\alpha_3\omega_1^2 - \beta_4\omega_3^4 = (D_1 - a_2K + \tfrac{1}{2}b_3k)\,\omega^1 + E_1\omega^2 ,\\
& d\beta_1 - 3\beta_2\omega_1^2 + \alpha_1\omega_3^4 = A_2\omega^1 + (B_2 - b_2K + \tfrac{1}{2}a_1k)\,\omega^2 ,\\
& d\beta_2 + (\beta_1 - 2\beta_3)\,\omega_1^2 + \alpha_2\omega_3^4 = (B_2 + b_2K - \tfrac{1}{2}a_1k)\,\omega^1 +\\
&\quad + (C_2 + b_1K + \tfrac{1}{2}a_2k)\,\omega^2 ,\\
& d\beta_3 + (2\beta_2 - \beta_4)\,\omega_1^2 + \alpha_3\omega_3^4 = (C_2 + b_3K - \tfrac{1}{2}a_2k)\,\omega^1 +\\
&\quad + (D_2 + b_2K + \tfrac{1}{2}a_3k)\,\omega^2 ,\\
& d\beta_4 + 3\beta_3\omega_1^2 + \alpha_4\omega_3^4 = (D_2 - b_2K - \tfrac{1}{2}a_3k)\,\omega^1 + E_2\omega^2 ,
\end{aligned}$$

where
$$K = a_1a_3 - a_2^2 + b_1b_3 - b_2^2 , \quad k = (a_1 - a_3)\,b_2 - (b_1 - b_3)\,a_2 ,$$
the function K being the Gauss curvature of M. As always,
$$H = (a_1 + a_3)^2 + (b_1 + b_3)^2$$
denotes the mean curvature and
$$\xi = (a_1 + a_3)\,v_3 + (b_1 + b_3)\,v_4$$
the mean curvature vector field of M.

Let us remark that the normal vector field $n = xv_3 + yv_4$ being parallel in $N(M)$ we have $k = 0$ (see [1], p. 61), and since $v_1, v_2 \in T(M)$ generates an orthogonal conjugate net of lines on M, [2], we have

$$(6)\qquad a_2 = 0 , \quad b_2 = 0$$

and again $k = 0$ on M. In addition, in the last case, because of (4), there are real functions ϱ, σ such that

$$\begin{aligned}
(7)\qquad & \omega_1^2 = \varrho\omega^1 + \sigma\omega^2 ,\\
& \alpha_2 = \varrho(a_1 - a_3) , \quad \alpha_3 = \sigma(a_1 - a_3) ,\\
& \beta_2 = \varrho(b_1 - b_3) , \quad \beta_3 = \sigma(b_1 - b_3) .
\end{aligned}$$

Like in [3], all theorems contained in this contribution are proved by means of the maximum principle.

Let $f : M \to \mathscr{R}$ be a real function. The covariant derivatives f_i, f_{ij} $(i, j = 1, 2)$ of its restriction to U_α with respect to the frames $\{M; v_1, v_2, v_3, v_4\}$ are introduced by the formulas

$$(8) \qquad df = f_1\omega^1 + f_2\omega^2 ,$$

$$df_1 - f_2\omega_1^2 = f_{11}\omega^1 + f_{12}\omega^2 , \quad df_2 + f_1\omega_1^2 = f_{12}\omega^1 + f_{22}\omega^2 .$$

We use the maximum principle in this form:

Let M be a surface in E^4 and ∂M its boundary. Let f be a real-valued function on M and f_i, f_{ij} $(i, j = 1, 2)$ its covariant derivatives. Let (i) $f \geqq 0$ on M; (ii) $f = 0$ on ∂M; (iii) f satisfy the equation

$$a_{11}f_{11} + 2a_{12}f_{12} + a_{22}f_{22} + a_1f_1 + a_2f_2 + a_0f = a$$

with $a_0 \leqq 0$, $a \geqq 0$ and the quadratic form $a_{ij}x^ix^j$ positive definite. Then $f = 0$ on M.

In the following we use the function $f : M \to \mathscr{R}$ defined by

$$(9) \qquad f = H - 4K = (a_1 - a_3)^2 + (b_1 - b_3)^2 + 4a_2^2 + 4b_2^2 ,$$

satisfying $f \geqq 0$ on M and $f = 0$ at the umbilical points of M. Using (4), (5) and (8) we get the covariant derivatives of f, in particular

$$(10) \quad \begin{aligned} f_{11} = {} & -2[(a_1 - a_3)\,a_3 + (b_1 - b_3)\,b_3 - 4(a_2^2 + b_2^2)]\,K - \\ & - [k + 4(a_1b_2 - a_2b_1)]\,k + 2(\alpha_1 - \alpha_3)^2 + 2(\beta_1 - \beta_3)^2 + \\ & + 8(\alpha_2^2 + \beta_2^2) + 2(a_1 - a_3)(A_1 - C_1) + 2(b_1 - b_3)(A_2 - C_2) + \\ & + 8(a_2B_1 + b_2B_2) , \\ f_{22} = {} & 2[(a_1 - a_3)\,a_1 + (b_1 - b_3)\,b_1 + 4(a_2^2 + b_2^2)]\,K - \\ & - [k + 4(a_2b_3 - a_3b_2)]\,k + 2(\alpha_2 - \alpha_4)^2 + 2(\beta_2 - \beta_4)^2 + \\ & + 8(\alpha_3^2 + \beta_3^2) + 2(a_1 - a_3)(C_1 - E_1) + 2(b_1 - b_3)(C_2 - E_2) + \\ & + 8(a_2D_1 + b_2D_2) . \end{aligned}$$

2. Let M be a surface in E^4 and let $V_1, V_2 \in T(M)$ be fixed orthonormal vector fields. In all the following considerations we choose orthonormal frames $\{M; v_1, v_2, v_3, v_4\}$ of M in such a way that $V_1 = v_1$, $V_2 = v_2$ at any point $m \in M$. Define further normal vector fields $V_{ii}, V_{jii}, V_{kjii}$ $(i, j, k = 1, 2)$ by the relations

$$V_{ii} = (V_iV_i)^N , \quad V_{jii} = (V_jV_{ii})^N , \quad V_{kjii} = (V_kV_{jii})^N \quad (i, j, k = 1, 2) ,$$

where $(Y)^N$ denotes the normal component of the vector field Y.

It is easy to see that

$$V_{11} = a_1 v_3 + b_1 v_4\,, \quad V_{22} = a_3 v_3 + b_3 v_4\,. \tag{11}$$

Suppose further that V_1, V_2 generate an orthogonal conjugate net of lines on M, i.e. we have (6) and (7) on M. Then we get from (11) using (1), (3) and (4)

$$\mathrm{d}V_{11} = V_{111}\omega^1 + V_{211}\omega^2\,, \quad \mathrm{d}V_{22} = V_{122}\omega^1 + V_{222}\omega^2 \pmod{v_1, v_2}$$

with

$$\begin{aligned} V_{111} &= \alpha_1 v_3 + \beta_1 v_4\,, \quad V_{211} = \alpha_2 v_3 + \beta_2 v_4\,, \\ V_{122} &= \alpha_3 v_3 + \beta_3 v_4\,, \quad V_{222} = \alpha_4 v_3 + \beta_4 v_4\,. \end{aligned} \tag{12}$$

By differentiating the relations (12) and using (1), (3), (5) we obtain

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V_{111} &= V_{1111}\omega^1 + V_{2111}\omega^2\,, \quad \mathrm{d}V_{211} = V_{1211}\omega^1 + V_{2211}\omega^2\,, \\ \mathrm{d}V_{122} &= V_{1122}\omega^1 + V_{2122}\omega^2\,, \quad \mathrm{d}V_{222} = V_{1222}\omega^1 + V_{2222}\omega^2 \pmod{v_1, v_2}\,, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} V_{1111} &= (A_1 + 3\alpha_2\varrho)\, v_3 + (A_2 + 3\beta_2\varrho)\, v_4\,, \\ V_{2111} &= (B_1 + 3\alpha_2\sigma)\, v_3 + (B_2 + 3\beta_2\sigma)\, v_4\,, \\ V_{1211} &= [B_1 - (\alpha_1 - 2\alpha_3)\,\varrho]\, v_3 + [B_2 - (\beta_1 - 2\beta_3)\,\varrho]\, v_4\,, \\ V_{2211} &= [C_1 + a_1 K - (\alpha_1 - 2\alpha_3)\,\sigma]\, v_3 + [C_2 + b_1 K - (\beta_1 - 2\beta_3)\,\sigma]\, v_4\,, \\ V_{1122} &= [C_1 + a_3 K - (2\alpha_2 - \alpha_4)\,\varrho]\, v_3 + [C_2 + b_3 K - (2\beta_2 - \beta_4)\,\varrho]\, v_4\,, \\ V_{2122} &= [D_1 - (2\alpha_2 - \alpha_4)\,\sigma]\, v_3 + [D_2 - (2\beta_2 - \beta_4)\,\sigma]\, v_4\,, \\ V_{1222} &= (D_1 - 3\alpha_3\varrho)\, v_3 + (D_2 - 3\beta_3\varrho)\, v_4\,, \\ V_{2222} &= (E_1 - 3\alpha_3\sigma)\, v_3 + (E_2 - 3\beta_3\sigma)\, v_4\,, \end{aligned} \tag{13}$$

ϱ, σ being the functions defined by (7).

From (11) it follows that

$$\xi = V_{11} + V_{22}\,.$$

This vector field can be considered as a special case of the normal field

$$X = PV_{11} + QV_{22} = (Pa_1 + Qa_3)\, v_3 + (Pb_1 + Qb_3)\, v_4\,, \tag{14}$$

where $P, Q \in \mathscr{R}$ are constants with $P^2 + Q^2 \neq 0$.

First of all we prove that the normal vector field X is invariant on M when choosing the orthonormal frames in the above mentioned way. To this end, consider another orthonormal frame $\{M; \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ on M such that $V_1 = \bar{v}_1$, $V_2 = \bar{v}_2$. Then we have

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= v_1\,, \quad \bar{v}_3 = \varepsilon \cos\sigma \,.\, v_3 - \sin\sigma \,.\, v_4\,, \\ \bar{v}_2 &= v_2\,, \quad \bar{v}_4 = \varepsilon \sin\sigma \,.\, v_3 + \cos\sigma \,.\, v_4 \quad (\varepsilon^2 = 1) \end{aligned} \tag{15}$$

and the following lemma is valid:

Lemma 1. *On M, it is*

$$\bar{X} = X .$$

Proof. It is easy to see that

$$\bar{a}_1 = \varepsilon(a_1 \cos \sigma + b_1 \sin \sigma), \quad \bar{b}_1 = -(a_1 \sin \sigma + b_1 \cos \sigma),$$
$$\bar{a}_3 = \varepsilon(a_3 \cos \sigma + b_3 \sin \sigma), \quad \bar{b}_3 = -(a_3 \sin \sigma + b_3 \cos \sigma)$$

and according to (15) and the preceding equations we obtain

$$\bar{V}_{11} = V_{11}, \quad \bar{V}_{22} = V_{22} .$$

As $\bar{P} = P$, $\bar{Q} = Q$, our assertion is proved.

Now, define normal vector fields X_i, X_{ij} $(i, j = 1, 2)$ by the formulas

$$X_i = (V_i X)^N, \quad X_{ij} = (V_i X_j)^N \quad (i, j = 1, 2),$$

where the symbol $(Y)^N$ denotes again the normal component of the vector field Y. Then we have the following

Lemma 2. *Let $V_1, V_2 \in T(M)$ generate an orthogonal conjugate net of lines on M. Then for the normal vector field $X = PV_{11} + QV_{22}$, $P, Q \in \mathscr{R}$ we have*

$$X_1 = PV_{111} + QV_{122}, \quad X_2 = PV_{211} + QV_{222}, \tag{16}$$

$$X_{11} = PV_{1111} + QV_{1122}, \quad X_{12} = PV_{1211} + QV_{1222}, \tag{17}$$
$$X_{21} = PV_{2111} + QV_{2122}, \quad X_{22} = PV_{2211} + QV_{2222} .$$

Proof. The relation (14) yields

$$\mathrm{d}X = P\,\mathrm{d}V_{11} + Q\,\mathrm{d}V_{22}$$

and hence

$$\mathrm{d}X = (PV_{111} + QV_{122})\,\omega^1 + (PV_{211} + QV_{222})\,\omega^2 \pmod{v_1, v_2}$$

which implies (16). Further

$$\mathrm{d}X_1 = P\,\mathrm{d}V_{111} + Q\,\mathrm{d}V_{122}, \quad \mathrm{d}X_2 = P\,\mathrm{d}V_{211} + Q\,\mathrm{d}V_{222},$$

that is

$$\mathrm{d}X_1 = (PV_{1111} + QV_{1122})\,\omega^1 + (PV_{2111} + QV_{2122})\,\omega^2,$$
$$\mathrm{d}X_2 = (PV_{1211} + QV_{1222})\,\omega^1 + (PV_{2211} + QV_{2222})\,\omega^2 \pmod{v_1, v_2}.$$

This proves the validity of (17).

Thus, assuming that $V_1, V_2 \in T(M)$ generate an orthogonal conjugate net of lines on M, we have from (12) and (16)

$$X_1 = (P\alpha_1 + Q\alpha_3)\,v_3 + (P\beta_1 + Q\beta_3)\,v_4, \tag{18}$$
$$X_2 = (P\alpha_2 + Q\alpha_4)\,v_3 + (P\beta_2 + Q\beta_4)\,v_4$$

and from (13) and (17)

$$(19)\qquad \begin{aligned} X_{11} &= \{PA_1 + Q(C_1 + a_3K) + \varrho[(3P - 2Q)\,\alpha_2 + Q\alpha_4]\}\, v_3 + \\ &\quad + \{PA_2 + Q(C_2 + b_3K) + \varrho[(3P - 2Q)\,\beta_2 + Q\beta_4]\}\, v_4\,, \\ X_{12} &= \{PB_1 + QD_1 - \varrho[P\alpha_1 - (2P - 3Q)\,\alpha_3]\}\, v_3 + \\ &\quad + \{PB_2 + QD_2 - \varrho[P\beta_1 - (2P - 3Q)\,\beta_3]\}\, v_4\,, \\ X_{21} &= \{PB_1 + QD_1 + \sigma[(3P - 2Q)\,\alpha_2 + Q\alpha_4]\}\, v_3 + \\ &\quad + \{PB_2 + QD_2 + \sigma[(3P - 2Q)\,\beta_2 + Q\beta_4]\}\, v_4\,, \\ X_{22} &= \{P(C_1 + a_1K) + QE_1 - \sigma[P\alpha_1 - (2P - 3Q)\,\alpha_3]\}\, v_3 + \\ &\quad + \{P(C_2 + b_1K) + QE_2 - \sigma[P\beta_1 - (2P - 3Q)\,\beta_3]\}\, v_4\,. \end{aligned}$$

By these remarks we have completed all preliminaries necessary for our considerations.

3. Now we are going to prove the basic

Theorem 1. *Let M be a surface in E^4 and ∂M its boundary. Let*

(i) $K > 0$ *on* M;

(ii) *there exist* $V_1, V_2 \in T(M)$ *generating an orthogonal conjugate net of lines on* M;

(iii) $X = PV_{11} + QV_{22}$, *where* $P, Q \in \mathscr{R}$ *satisfy the relations* $P^2 + Q^2 > 0$, $PQ \geqq 0$, *be parallel in* $N(M)$;

(iv) ∂M *consist of umbilical points.*

Then M is a part of a 2-dimensional sphere in E^4.

Proof. As remarked, we use the maximum principle for the invariant function f defined by (9). Since the assumption (ii) implies (6) in M, we have in virtue of (10)

$$(20)\quad Pf_{11} + Qf_{22} - 2[(a_1 - a_3)(Qa_1 - Pa_3) + (b_1 - b_3)(Qb_1 - Pb_3)]\,K = \\ = 2V + 2\Phi$$

where

$$(21)\qquad V = P[(\alpha_1 - \alpha_3)^2 + (\beta_1 - \beta_3)^2] + Q[(\alpha_2 - \alpha_4)^2 + (\beta_2 - \beta_4)^2] + \\ + 4P(\alpha_2^2 + \beta_2^2) + 4Q(\alpha_3^2 + \beta_3^2)$$

and

$$(22)\qquad \Phi = (a_1 - a_3)\,[P(A_1 - C_1) + Q(C_1 - E_1)] + \\ + (b_1 - b_3)\,[P(A_2 - C_2) + Q(C_2 - E_2)]\,.$$

Now, the condition (iii) for X defined by (14) yields

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}(Pa_1 + Qa_3) - (Pb_1 + Qb_3)\,\omega_3^4 = 0\,, \\ &\mathrm{d}(Pb_1 + Qb_3) + (Pa_1 + Qa_3)\,\omega_3^4 = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

and hence according to (4) and (6)

$$\begin{aligned} &P\alpha_1 + Q\alpha_3 = 0\,, \quad P\alpha_2 + Q\alpha_4 = 0\,, \\ &P\beta_1 + Q\beta_3 = 0\,, \quad P\beta_2 + Q\beta_4 = 0\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Differentiating these equations and using (24) again, we obtain the relations

$$\begin{aligned} &[PA_1 + Q(C_1 + a_3K)]\,\omega^1 + (PB_1 + QD_1)\,\omega^2 + \\ &\quad + [(3P - 2Q)\,\alpha_2 + Q\alpha_4]\,\omega_1^2 = 0\,, \\ &[PA_2 + Q(C_2 + b_3K)]\,\omega^1 + (PB_2 + QD_2)\,\omega^2 + \\ &\quad + [(3P - 2Q)\,\beta_2 + Q\beta_4]\,\omega_1^2 = 0\,, \\ &(PB_1 + QD_1)\,\omega^1 + [P(C_1 + a_1K) + QE_1]\,\omega^2 - \\ &\quad - [P\alpha_1 - (2P - 3Q)\,\alpha_3]\,\omega_1^2 = 0\,, \\ &(PB_2 + QD_2)\,\omega^1 + [P(C_2 + b_1K) + QE_2]\,\omega^2 - \\ &\quad - [P\beta_1 - (2P - 3Q)\,\beta_3]\,\omega_1^2 = 0\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Multiply the equations containing $A_1, \ldots, E_1$ by $a_1 - a_3$ and the relations containing $A_2, \ldots, E_2$ by $b_1 - b_3$. Then according to (7) we get in particular

$$\begin{aligned} &(a_1 - a_3)\,[PA_1 + Q(C_1 + a_3K)] + \alpha_2[(3P - 2Q)\,\alpha_2 + Q\alpha_4] = 0\,, \\ &(b_1 - b_3)\,[PA_2 + Q(C_2 + b_3K)] + \beta_2[(3P - 2Q)\,\beta_2 + Q\beta_4] = 0\,, \\ &(a_1 - a_3)\,[P(C_1 + a_1K) + QE_1] - \alpha_3[P\alpha_1 - (2P - 3Q)\,\alpha_3] = 0\,, \\ &(b_1 - b_3)\,[P(C_2 + b_1K) + QE_2] - \beta_3[P\beta_1 - (2P - 3Q)\,\beta_3] = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

and hence

$$\begin{aligned} &(a_1 - a_3)\,[P(A_1 - C_1) + Q(C_1 - E_1)] = (a_1 - a_3)\,(Pa_1 - Qa_3)\,K - \\ &\quad - \alpha_2[(3P - 2Q)\,\alpha_2 + Q\alpha_4] - \alpha_3[P\alpha_1 - (2P - 3Q)\,\alpha_3]\,, \\ &(b_1 - b_3)\,[P(A_2 - C_2) + Q(C_2 - E_2)] = (b_1 - b_3)\,(Pb_1 - Qb_3)\,K - \\ &\quad - \beta_2[(3P - 2Q)\,\beta_2 + Q\beta_4] - \beta_3[P\beta_1 - (2P - 3Q)\,\beta_3]\,. \end{aligned}$$

Using these relations we obtain from (22)

$$\begin{aligned} \Phi = {} &[(a_1 - a_3)\,(Pa_1 - Qa_3) + (b_1 - b_3)\,(Pb_1 - Qb_3)]\,K - \\ &- \alpha_2[(3P - 2Q)\,\alpha_2 + Q\alpha_4] - \alpha_3[P\alpha_1 - (2P - 3Q)\,\alpha_3] - \\ &- \beta_2[(3P - 2Q)\,\beta_2 + Q\beta_4] - \beta_3[P\beta_1 - (2P - 3Q)\,\beta_3] \end{aligned}$$

and the equation (20) has the form

$$(27) \qquad Pf_{11} + Qf_{22} - 2(P + Q)fK = 2W$$

where

$$W = V - \alpha_2[(3P - 2Q)\alpha_2 + Q\alpha_4] - \alpha_3[P\alpha_1 - (2P - 3Q)\alpha_3] -$$
$$- \beta_2[(3P - 2Q)\beta_2 + Q\beta_4] - \beta_3[P\beta_1 - (2P - 3Q)\beta_3].$$

From this identity and from (21) we finally have

$$W = P[(\alpha_1 - \tfrac{3}{2}\alpha_3)^2 + (\beta_1 - \tfrac{3}{2}\beta_3)^2] + Q[(\alpha_4 - \tfrac{3}{2}\alpha_2)^2 + (\beta_4 - \tfrac{3}{2}\beta_2)^2] +$$
$$+ \tfrac{1}{4}(4P + 3Q)(\alpha_2^2 + \beta_2^2) + \tfrac{1}{4}(3P + 4Q)(\alpha_3^2 + \beta_3^2).$$

If $P \geqq 0$, $Q \geqq 0$ and $P^2 + Q^2 > 0$, we have $-(P + Q)K \leqq 0$, $W \geqq 0$ and the quadratic form corresponding to $Pf_{11} + Qf_{22}$ is positive definite so that, according to the maximum principle, the theorem is true. On the other hand, if $P \leqq 0$, $Q \leqq 0$ and $P^2 + Q^2 > 0$, it is $-(P + Q)K \geqq 0$, $W \leqq 0$ and the form corresponding to $Pf_{11} + Qf_{22}$ is negative definite. Then it is sufficient to multiply the equation (27) by -1 to get the condition (iii) of the maximum principle. Thus the assertion is proved.

As an immediate consequence of this theorem we introduce

Corollary 1. *Let M be a surface in E^4 possessing the properties* (i), (ii) *and* (iv) *of Theorem* 1. *Let*

(iii′) *$V_{11} \in N(M)$ or $V_{22} \in N(M)$ be parallel in $N(M)$.*
Then M is a part of a 2-dimensional sphere in E^4.

It is sufficient to put $P = 1$, $Q = 0$ or $P = 0$, $Q = 1$ in Theorem 1.

From the proof of Theorem 1, we easily see that in the case $P = Q$ we can omit the assumption (ii). But there is another interesting possibility how to do it. It is formulated in

Theorem 2. *Let M be a surface in E^4 satisfying the conditions:*

(i) *$K > 0$ on M;*

(ii) *there are orthonormal vector fields $V_1, V_2 \in T(M)$ such that linearly independent vector fileds*
$X = PV_{11} + QV_{22} \in N(M)$, $\quad Y = RV_{11} + SV_{22} \in N(M)$, $\quad P, Q, R, S \in \mathscr{R}$, *are parallel in $N(M)$;*

(iii) *∂M consists of umbilical points.*

Then M is a part of a 2-dimensional sphere in E^4.

Proof. The condition (ii) yields (23) and

$$\mathrm{d}(Ra_1 + Sa_3) - (Rb_1 + Sb_3)\,\omega_3^4 = 0\,,$$
$$\mathrm{d}(Rb_1 + Sb_3) + (Ra_1 + Sa_3)\,\omega_3^4 = 0$$

and hence according to (4)

$$(P\alpha_1 + Q\alpha_3)\,\omega^1 + (P\alpha_2 + Q\alpha_4)\,\omega^2 + 2a_2(P - Q)\,\omega_1^2 = 0\,,$$
$$(P\beta_1 + Q\beta_3)\,\omega^1 + (P\beta_2 + Q\beta_4)\,\omega^2 + 2b_2(P - Q)\,\omega_1^2 = 0\,,$$
$$(R\alpha_1 + S\alpha_3)\,\omega^1 + (R\alpha_2 + S\alpha_4)\,\omega^2 + 2a_2(R - S)\,\omega_1^2 = 0\,,$$
$$(R\beta_1 + S\beta_3)\,\omega^1 + (R\beta_2 + S\beta_4)\,\omega^2 + 2b_2(R - S)\,\omega_1^2 = 0\,,$$
$$PS - QR \neq 0\,.$$

First of all suppose $P \neq Q$, $R \neq S$. Multiply the first two equations by $R - S$ and the other two by $P - Q$. Subtracting the corresponding equations we get

$$(R - S)(P\alpha_1 + Q\alpha_3) - (P - Q)(R\alpha_1 + S\alpha_3) = 0\,,$$
$$(R - S)(P\alpha_2 + Q\alpha_4) - (P - Q)(R\alpha_2 + S\alpha_4) = 0\,,$$
$$(R - S)(P\beta_1 + Q\beta_3) - (P - Q)(R\beta_1 + S\beta_3) = 0\,,$$
$$(R - S)(P\beta_2 + Q\beta_4) - (P - Q)(R\beta_2 + S\beta_4) = 0$$

and hence

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 0\,, \quad \alpha_2 + \alpha_4 = 0\,,$$
$$\beta_1 + \beta_3 = 0\,, \quad \beta_2 + \beta_4 = 0\,.$$

We could obtain the same relations assuming either $P = Q$ or $R = S$. The exterior differentiation of these equations and their repeated use finally implies

$$(28)\qquad A_1 + C_1 + a_3K = 0\,, \quad C_1 + E_1 + a_1K = 0\,, \quad B_1 + D_1 = 0\,,$$
$$A_2 + C_2 + b_3K = 0\,, \quad C_2 + E_2 + b_1K = 0\,, \quad B_2 + D_2 = 0\,.$$

Now, consider the function f defined by (9). Since the assumption (ii) implies $k = 0$ on M, we obtain according to (10)

$$(29)\qquad f_{11} + f_{22} - 2fK = 2V + 2\Phi + 8\varphi + 8(a_2^2 + b_2^2)\,K$$

where

$$(30)\qquad V = (\alpha_1 - \alpha_3)^2 + (\alpha_2 - \alpha_4)^2 + (\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 - \beta_4)^2 +$$
$$+ 4(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + 4(\beta_2^2 + \beta_3^2)\,,$$
$$\Phi = (a_1 - a_3)(A_1 - E_1) + (b_1 - b_3)(A_2 - E_2)\,,$$
$$\varphi = a_2(B_1 + D_1) + b_2(B_2 + D_2)\,.$$

From (28) it follows immediately that $\varphi = 0$ and

$$\Phi = [(a_1 - a_3)^2 + (b_1 - b_3)^2]\,K\,.$$

Thus the relation (29) has the form

$$f_{11} + f_{22} - 4fK = 2V$$

and the maximum principle yields our assertion.

Notice that in the case $P = Q$ we have $X = P\xi$, where ξ is the mean curvature vector field, and thus we can omit the supposition concerning the vector field Y. Analogously in the case $R = S$. (See [3].)

Corollary 2. *Let M be a surface in E^4 with the properties* (i) *and* (ii) *of Theorem* 2. *Then the condition*

(ii) *linearly independent vector fields $V_{11}, V_{22} \in N(M)$ are parallel in $N(M)$ implies that M is a part of a 2-dimensional sphere in E^4.*

We put $P = 1$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 1$ in Theorem 2.

Now, we introduce a certain modification of Theorem 1.

Theorem 3. *Let M be a surface in E^4, ∂M its boundary and let*

(i) *$K > 0$ on M;*

(ii) *there exist $V_1, V_2 \in T(M)$ generating an orthogonal conjugate net of lines on M;*

(iii) *$X = PV_{11} + QV_{22} \in N(M)$, $P, Q \in \mathcal{R}$, $P^2 + Q^2 > 0$, $PQ \geqq 0$, be such that $X_1, X_2 \in N(M)$ are parallel in $N(M)$;*

(iv) *∂M consist of umbilical points.*

Then M is a part of a 2-dimensional sphere in E^4.

Proof. Consider the vector field X. The parallelness of X_1, X_2 is expressed, according to (18), by the formulas

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(P\alpha_1 + Q\alpha_3) - (P\beta_1 + Q\beta_3)\,\omega_3^4 = 0\,,\\
&\mathrm{d}(P\beta_1 + Q\beta_3) + (P\alpha_1 + Q\alpha_3)\,\omega_3^4 = 0\,,\\
&\mathrm{d}(P\alpha_2 + Q\alpha_4) - (P\beta_2 + Q\beta_4)\,\omega_3^4 = 0\,,\\
&\mathrm{d}(P\beta_2 + Q\beta_4) + (P\alpha_2 + Q\alpha_4)\,\omega_3^4 = 0\,.
\end{aligned}$$

Now, using (5), we obtain the equations (25) and with regard to the proof of Theorem 1 our assertion is true.

Again we have

Corollary 3. *Let M be a surface in E^4 satisfying the conditions* (i), (ii) *and* (iv) *of Theorem* 3. *Let*

(iii′) $V_{111}, V_{211} \in N(M)$ *or* $V_{122}, V_{222} \in N(M)$ *be parallel in* $N(M)$.
Then M *is a part of a 2-dimensional sphere in* E^4.

It is sufficient to put $P = 1$, $Q = 0$ or $P = 0$, $Q = 1$ in Theorem 3.

We complete the results of this corollary by

Theorem 4. *Let* M *be a surface in* E^4 *and* ∂M *its boundary. Let*

(i) $K > 0$ *on* M;

(ii) *there exist* $V_1, V_2 \in T(M)$ *generating an orthogonal conjugate net on* M;

(iii) $V_{111}, V_{222} \in N(M)$ *be parallel in* $N(M)$;

(iv) ∂M *consist of umbilical points.*

Then M *is a part of a 2-dimensional sphere in* E^4.

Proof. The assumption (ii) implies (6) and (7) on M. The condition (iii) and relations (12) yield further

$$\mathrm{d}\alpha_1 - \beta_1\omega_3^4 = 0\,, \quad \mathrm{d}\beta_1 + \alpha_1\omega_3^4 = 0\,,$$
$$\mathrm{d}\alpha_4 - \beta_4\omega_3^4 = 0\,, \quad \mathrm{d}\beta_4 + \alpha_4\omega_3^4 = 0$$

and hence using (5) and (6) we conclude

$$A_1\omega^1 + B_1\omega^2 + 3\alpha_2\omega_1^2 = 0\,, \quad A_2\omega^1 + B_2\omega^2 + 3\beta_2\omega_1^2 = 0\,,$$
$$D_1\omega^1 + E_1\omega^2 - 3\alpha_3\omega_1^2 = 0\,, \quad D_2\omega^1 + E_2\omega^2 - 3\beta_3\omega_1^2 = 0\,.$$

Thus by means of (7) we have in particular

$$(a_1 - a_3)\,A_1 + 3\alpha_2^2 = 0\,, \quad (b_1 - b_3)\,A_2 + 3\beta_2^2 = 0\,,$$
$$(a_1 - a_3)\,E_1 - 3\alpha_3^2 = 0\,, \quad (b_1 - b_3)\,E_2 - 3\beta_3^2 = 0\,. \tag{31}$$

Now, because of (6), the equation (29) has the form

$$f_{11} + f_{22} - 2fK = 2V + 2\Phi\,,$$

the functions V, Φ being defined by (30). According to (30) and (31) we get

$$\Phi = -3(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)$$

so that $V + \Phi \geqq 0$. This and the maximum principle complete the proof.

4. We revert to the considerations concerning the normal vector field X and we prove the following assertion generalizing Theorem 3.

Theorem 5. *Let* M *be a surface in* E^4 *and* ∂M *its boundary. Let*

(i) $K > 0$ *on* M;

(ii) *there exist* $V_1, V_2 \in T(M)$ *generating an orthogonal conjugate net of lines on* M;

(iii) $X = PV_{11} + QV_{22} \in N(M)$, $P, Q \in \mathscr{R}$, $P^2 + Q^2 > 0$, $PQ \geqq 0$, *be such that*

(a) $\langle X_{11} + S(X_{12} - X_{21}), V_{11} - V_{22} \rangle \geqq 0$

on M, *where* $S : M \to \mathscr{R}$ *is a function with* $S^2 \leqq \frac{3}{7}$, *and*

(b) $X_2 \in N(M)$ *is parallel in* $N(M)$

or

(iii′) $X = PV_{11} + QV_{22} \in N(M)$, $P, Q \in \mathscr{R}$, $P^2 + Q^2 > 0$, $PQ \geqq 0$, *be such that*

(a)′ $\langle -X_{22} + S(X_{12} - X_{21}), V_{11} - V_{22} \rangle \geqq 0$

on M, $S : M \to \mathscr{R}$ *being a function satisfying* $S^2 \leqq \frac{3}{7}$, *and*

(b′) $X_1 \in N(M)$ *is parallel in* $N(M)$;

(iv) ∂M *consist of umbilical points.*

Then M *is a part of a 2-dimensional sphere in* E^4.

Proof. We prove Theorem 5 under the supposition (iii), its proof with (iii′) being analogous.

The condition (ii) implies (6) and (7) on M, and according to (11) and (19) the assumption (iii) (a) yields

$$
\begin{aligned}
(32) \qquad (a_1 - a_3)[PA_1 + Q(C_1 + a_3K)] + (b_1 - b_3)[PA_2 + Q(C_2 + b_3K)] = \\
= \langle X_{11} + S(X_{12} - X_{21}), V_{11} - V_{22} \rangle - \\
- \alpha_2[(3P - 2Q)\alpha_2 + Q\alpha_4] - \beta_2[(3P - 2Q)\beta_2 + Q\beta_4] + \\
+ S[P(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + (P + Q)(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3) + Q(\alpha_3\alpha_4 + \beta_3\beta_4)] .
\end{aligned}
$$

The condition (iii) (b) is expressed by the two last equations of (25) from the proof of Theorem 3. Following the proof of Theorem 1, we have the last two equations of (26) and adding them we obtain

$$
\begin{aligned}
(a_1 - a_3)[P(C_1 + a_1K) + QE_1] + (b_1 - b_3)[P(C_2 + b_1K) + QE_2] = \\
= \alpha_3[P\alpha_1 - (2P - 3Q)\alpha_3] + \beta_3[P\beta_1 - (2P - 3Q)\beta_3] .
\end{aligned}
$$

Using this relation and (32), we get from (22)

$$
\begin{aligned}
(33) \qquad \Phi = \langle X_{11} + S(X_{12} - X_{21}), V_{11} - V_{22} \rangle + \\
+ [(a_1 - a_3)(Pa_1 - Qa_3) + (b_1 - b_3)(Pb_1 - Qb_3)] K - \\
- \alpha_2[(3P - 2Q)\alpha_2 + Q\alpha_4] - \beta_2[(3P - 2Q)\beta_2 + Q\beta_4] - \\
- \alpha_3[P\alpha_1 - (2P - 3Q)\alpha_3] - \beta_3[P\beta_1 - (2P - 3Q)\beta_3] + \\
+ S[P(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + (P + Q)(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3) + Q(\alpha_3\alpha_4 + \beta_3\beta_4)]
\end{aligned}
$$

and thus the equation (20) has the form (27) with

$$\begin{aligned}W = \langle X_{11} + S(X_{12} - X_{21}),\ V_{11} - V_{22}\rangle + V - \\ - (3P - 2Q)(\alpha_2^2 + \beta_2^2) + (2P - 3Q)(\alpha_3^2 + \beta_3^2) - \\ - P(\alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3) - Q(\alpha_2\alpha_4 + \beta_2\beta_4) + \\ + S[P(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + (P + Q)(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3) + Q(\alpha_3\alpha_4 + \beta_3\beta_4)],\end{aligned}$$

V being the function defined by (21). Using (21) we obtain

$$\begin{aligned}W = \langle X_{11} + S(X_{12} - X_{21}),\ V_{11} - V_{22}\rangle + \\ + P[(\alpha_1 - \alpha_3)^2 + (\beta_1 - \beta_3)^2] + Q[(\alpha_2 - \alpha_4)^2 + (\beta_2 - \beta_4)^2] + \\ + (P + 2Q)(\alpha_2^2 + \beta_2^2) + (2P + Q)(\alpha_3^2 + \beta_3^2) - \\ - P(\alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3) - Q(\alpha_2\alpha_4 + \beta_2\beta_4) + \\ + S[P(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + (P + Q)(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3) + Q(\alpha_3\alpha_4 + \beta_3\beta_4)]\end{aligned}$$

and hence

$$\begin{aligned}W = \langle X_{11} + S(X_{12} - X_{21}),\ V_{11} - V_{22}\rangle + \\ + P[(\alpha_1 - \tfrac{3}{2}\alpha_3 + \tfrac{1}{2}S\alpha_2)^2 + (\beta_1 - \tfrac{3}{2}\beta_3 + \tfrac{1}{2}S\beta_2)^2] + \\ + Q[(\alpha_4 - \tfrac{3}{2}\alpha_2 + \tfrac{1}{2}S\alpha_3)^2 + (\beta_4 - \tfrac{3}{2}\beta_2 + \tfrac{1}{2}S\beta_3)^2] + \\ + \tfrac{1}{4}P[\varphi(\alpha_2, \alpha_3) + \varphi(\beta_2, \beta_3)] + \tfrac{1}{4}Q[\varphi(\alpha_3, \alpha_2) + \varphi(\beta_3, \beta_2)]\end{aligned} \tag{34}$$

where

$$\varphi(x, y) = (4 - S^2)\,x^2 + 10xy + 3y^2 .$$

The quadratic form $\varphi(x, y)$ being non-negative for all x and y in virtue of $|S| \leqq \sqrt{\frac{3}{7}}$, we have $W \geqq 0$. Considerations analogous to those from the proof of Theorem 1 imply the validity of our assertion.

Remark. The special case ($P = 1$, $Q = 1$) of the preceding theorem was proved in [3] under the supposition that S satisfies the inequality $|S| \leqq 4\sqrt{(2)} - 5$. As $\frac{3}{7} < 4\sqrt{(2)} - 5$, the result obtained in [3] is a little better than that of Theorem 5. However, in the case $PQ > 0$, we can replace the inequality $|S| \leqq \sqrt{\frac{3}{7}}$ independent of P, Q by a more suitable one. In fact, the last two terms on the right-hand side of (34) are equal to the sum of two quadratic forms of the type

$$(4P + 3Q - PS^2)\,x^2 + 10(P + Q)\,Sxy + (3P + 4Q - QS^2)\,y^2$$

which are non-negative for all S satisfying

$$S^2 \leqq (PQ)^{-1}\,[14(P + Q)^2 + PQ] - 2|P + Q|\sqrt{[49(P + Q)^2 + 4PQ]} .$$

A special case of Theorem 5 is this

Corollary 4. *Let M be a surface in E^4 possessing the properties* (i), (ii) *and* (iv) *of Theorem* 5. *Let*

(iii) $X = PV_{11} + QV_{22} \in N(M)$, $P, Q \in \mathscr{R}$, $P^2 + Q^2 > 0$, $PQ \geqq 0$, *be such that*

(a) $X_{11} + S(X_{12} - X_{21}) = 0$ *on* M, $S : M \to \mathscr{R}$ *being a function with* $S^2 \leqq \frac{3}{7}$, *and*

(b) $X_2 \in N(M)$ *is parallel in* $N(M)$

or

(iii′) $X = PV_{11} + QV_{22} \in N(M)$, $P, Q \in \mathscr{R}$, $P^2 + Q^2 > 0$, $PQ \geqq 0$, *be such that*

(a′) $-X_{22} + S(X_{12} - X_{21}) = 0$ *on* M, *where* $S : M \to \mathscr{R}$ *is a function satisfying* $S^2 \leqq \frac{3}{7}$, *and*

(b′) $X_1 \in N(M)$ *is parallel in* $N(M)$.

Then M is a part of a 2-*dimensional sphere in* E^4.

From the other special cases of Theorem 5 concerning the vector fields V_{11}, V_{22} we introduce only those restricted by $S = 0$.

Corollary 5. *Let M* be *a surface in* E^4 *satisfying the conditions* (i), (ii) *and* (iv) *of Theorem* 5. *Let*

(iii) (a) $\langle V_{1111}, V_{11} - V_{22}\rangle \geqq 0$ *on* M *and*

(b) $V_{211} \in N(M)$ *be parallel in* $N(M)$

or

(a) $\langle V_{1122}, V_{11} - V_{22}\rangle \geqq 0$ *on* M *and*

(b) $V_{222} \in N(M)$ *be parallel in* $N(M)$

or

(iii′) (a′) $\langle -V_{2211}, V_{11} - V_{22}\rangle \geqq 0$ *on M and*

(b′) $V_{111} \in N(M)$ *be parallel in* $N(M)$

or

(a′) $\langle -V_{2222}, V_{11} - V_{22}\rangle \geqq 0$ *on M and*

(b′) $V_{122} \in N(M)$ *be parallel in* $N(M)$.

Then M is a part of a 2-*dimensional sphere in* E^4.

The result follows from Theorem 5 by Lemma 2 for $P = 1$, $Q = 0$ or $P = 0$, $Q = 1$ and $S = 0$.

We complete the assertions of Corollary 5 by

Theorem 6. *Let M be a surface in E^4 and ∂M its boundary. Let*

(i) $K > 0$ *on* M;

(ii) *there exist* $V_1, V_2 \in T(M)$ *generating an orthogonal conjugate net on* M;

(iii) (a) $\langle V_{1111}, V_{11} - V_{22} \rangle \geqq 0$ *on* M *and*

(b) $V_{222} \in N(M)$ *be parallel in* $N(M)$

or

(iii′) (a′) $\langle -V_{2222}, V_{11} - V_{22} \rangle \geqq 0$ *on* M *and*

(b′) $V_{111} \in N(M)$ *be parallel in* $N(M)$;

(iv) ∂M *consist of umbilical points.*

Then M *is a part of a 2-dimensional sphere in* E^4.

Proof. We have (6) and (7) on M. From (11), (13) we get

$$\langle V_{1111}, V_{11} - V_{22} \rangle = (a_1 - a_3) A_1 + (b_1 - b_3) A_2 + 3(\alpha_2^2 + \beta_2^2).$$

The condition (iii)(b) is expressed by the two last equations of (31) from the proof of Theorem 4. Thus (30) implies

$$_{\nu}\Phi = \langle V_{1111}, V_{11} - V_{22} \rangle - 3(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)$$

and hence

(35) $$f_{11} + f_{22} - 2fK = 2W$$

where

$$W = V + \Phi = \langle V_{1111}, V_{11} - V_{22} \rangle +$$
$$+ (\alpha_1 - \alpha_3)^2 + (\alpha_2 - \alpha_4)^2 + (\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 - \beta_4)^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2,$$

V being defined by (30). The maximum principle completes our proof.

A generalization of Theorem 5 is given by the following

Theorem 7. *Let* M *be a surface in* E^4 *and* ∂M *its boundary. Let*

(i) $K > 0$ *on* M;

(ii) *there exist* $V_1, V_2 \in T(M)$ *generating an orthogonal conjugate net of lines on* M;

(iii) $X = PV_{11} + QV_{22} \in N(M)$, $P, Q \in \mathscr{R}$, $P^2 + Q^2 > 0$, $PQ \geqq 0$, *be such that*

$$\langle X_{11} - X_{22} + S(X_{12} - X_{21}), V_{11} - V_{22} \rangle \geqq 0$$

on M, $S : M \to \mathscr{R}$ *being a function with* $S^2 \leqq \frac{3}{7}$;

(iv) ∂M *consist of umbilical points.*

Then M *is a part of a 2-dimensional sphere in* E^4.

Proof. We choose orthonormal frames in the usual way and we have the relations (6) and (7), and the equations (20), (21) and (22) on M.

Using (11) and (19) we see that the expression (22) has the form

$$\begin{aligned}\Phi = \langle X_{11} - X_{22} + S(X_{12} - X_{21}),\ V_{11} - V_{22}\rangle + \\ + [(a_1 - a_3)(Pa_1 - Qa_3) + (b_1 - b_3)(Pb_1 - Qb_3)]\,K - \\ - \alpha_2[(3P - 2Q)\,\alpha_2 + Q\alpha_4] - \beta_2[(3P - 2Q)\,\beta_2 + Q\beta_4] - \\ - \alpha_3[P\alpha_1 - (2P - 3Q)\,\alpha_3] - \beta_3[P\beta_1 - (2P - 3Q)\,\beta_3] + \\ + S[P(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + (P + Q)(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3) + Q(\alpha_3\alpha_4 + \beta_3\beta_4)]\,.\end{aligned}$$

This relation is, however, formally the same as (33), so that we have (27) where W is given by (34) when writing $X_{11} - X_{22} + S(X_{12} - X_{21})$ instead of $X_{11} + S(X_{12} - X_{21})$. Thus the assertion is proved.

First of all let us introduce this trivial

Corollary 6. *Let M be a surface in E^4 possessing the properties* (i), (ii) *and* (iv) *of Theorem* 7. *Let*

(iii) $X = PV_{11} + QV_{22} \in N(M)$, $P, Q \in \mathcal{R}$, $P^2 + Q^2 > 0$, $PQ \geqq 0$, *be such that* $X_{11} - X_{22} + S(X_{12} - X_{21}) = 0$ *on* M, S *being a real-valued function on M such that* $S^2 \leqq \frac{3}{7}$.

Then M is a part of a 2-dimensional sphere in E^4.

Theorem 7, as a very special case, contains these two results:

Corollary 7. *Let M be a surface in E^4 satisfying the conditions* (i), (ii) *and* (iv) *of Theorem* 7. *Let*

(iii) $\langle V_{1111} - V_{2211}, V_{11} - V_{22}\rangle \geqq 0$ *on* M

or

(iii′) $\langle V_{1122} - V_{2222}, V_{11} - V_{22}\rangle \geqq 0$ *on* M.

Then M is a part of a 2-dimensional sphere in E^4.

Both the assertions follow from Theorem 7 and Lemma 2 for $P = 1$, $Q = 0$ or $P = 0$, $Q = 1$ and $S = 0$.

We complete again these two results by

Theorem 8. *Let M be a surface in E^4 and let*

(i) $K > 0$ *on* M;

(ii) *there exist* $V_1, V_2 \in T(M)$ *generating an orthogonal conjugate net on* M;

(iii) $\langle V_{1111} - V_{2222}, V_{11} - V_{22}\rangle \geqq 0$ *on* M;

(iv) ∂M *consist of umbilical points.*

Then M is a part of a 2-dimensional sphere in E^4.

Proof. The condition (ii) implies again (6) and (7). From (11) and (13), using (7), we obtain

$$\langle V_{1111} - V_{2222}, V_{11} - V_{22} \rangle =$$
$$= (a_1 - a_3)(A_1 - E_1) + (b_1 - b_3)(A_2 - E_2) + 3(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)$$

and hence from (30)

$$\Phi = \langle V_{1111} - V_{2222}, V_{11} - V_{22} \rangle - 3(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2).$$

Thus we have the equation (35) with

$$W = V + \Phi = \langle V_{1111} - V_{2222}, V_{11} - V_{22} \rangle +$$
$$+ (\alpha_1 - \alpha_3)^2 + (\alpha_2 - \alpha_4)^2 + (\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 - \beta_4)^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2,$$

V being again defined by (30). This completes the proof.

References

[1] *A. Švec:* Contributions to the global differential geometry of surfaces. Rozpravy ČSAV 87, 1, 1977, 1—94.

[2] *A. Švec:* On orthogonal conjugate nets in E^4. Comm. mat. Univ. Car. *16*, 1 1975, 183—187.

[3] *K. Svoboda:* Some global characterizations of the sphere in E^4. Čas. pro pěst. matem. *4*, 103 (1978), 391—399.

Author's address: 602 00 Brno, Gorkého 13 (Katedra matematiky FS VUT).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

ON FORMS AND CONNECTIONS ON FIBRE BUNDLES

ANTON DEKRÉT, Zvolen

(Received October 20, 1977)

Let $\pi : E \to M$ be a fibre bundle. Let J^1E be the first prolongation of E, i.e. J^1E is the set of 1-jets of all local cross-sections of E. Let us recall (see for example [1], [4]) that a connection on E is a global cross-section $\Gamma : E \to J^1E$, that is a distribution of horizontal tangent subspaces Γ_u, where $T_uE = T_uE_x \oplus \Gamma_u$, $u \in E$, $\pi u = x$. In this paper we find some relations between forms and connections on E. Our considerations are in the category C^∞.

1. Let M be a differentiable manifold. Let $L(M)$ or $\Lambda(M)$ or $S(M)$ be the algebra of all forms or of all antisymmetric or of all symmetric forms, respectively, on M. Let $\psi : TM \to TM$ or $\varphi : \bigwedge^{r+1} TM \to TM$ be a vector bundle morphism or an antisymmetric vector bundle morphism, respectively. Let ω or ε be a form or an antisymmetric form, respectively, of degree p on M. Let f be a function on M. Put

$$D_\psi f = 0\,, \quad d_\varphi f = 0\,,$$

$$(D_\psi \omega)(X_1, \ldots, X_p) = \sum_{i=1}^{p} \omega(X_1, \ldots, \psi X_i, \ldots, X_p)\,,$$

$$(d_\varphi \varepsilon)(X_1, \ldots, X_{r+p}) = \sum_{\sigma \in S} \operatorname{sgn} \sigma \varepsilon[\varphi(X_{\sigma 1}, \ldots, X_{\sigma(r+1)}), \ldots, X_{\sigma(r+p)}]$$

where S is the set of all such permutations of the set $\{1, \ldots, r + p\}$ that $\sigma 1 < \ldots \ldots < \sigma(r + 1)$; $\sigma(r + 2) < \ldots < \sigma(r + p)$.

Let us recall the following properties.

Lemma 1. *The mapping $D_\psi : \omega \to D_\psi \omega$ is a differentiation of degree* 0 *on algebras $L(M)$, $\Lambda(M)$, $S(M)$.*

Lemma 2. *The mapping $d_\varphi : \omega \to d_\varphi \omega$ is a differentiation of degree r on $\Lambda(M)$, that is*

$$d_\varphi(\omega_1 \wedge \omega_2) = d_\varphi \omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{pr}\, \omega_1 \wedge d_\varphi \omega_2\,,$$

where ω_1 is a p-form on M; i.e., if r is even or uneven, then d_φ is a differentiation or antidifferentiation of degree r on $\Lambda(M)$.

For $\varepsilon \in \Lambda(M)$ $d_\psi^{\tilde{}}\varepsilon = D_\psi \varepsilon$.

2. Let $\pi : E \to M$ be a fibre bundle. Let (x^i, y^α) or $(x^i, y^\alpha, y_i^\alpha)$, $i = 1, \ldots, \dim M$, $\alpha = 1, \ldots, \dim E_x$, be a local chart on E or on J^1E, respectively. Let a connection $\Gamma : E \to J^1E$ be locally given by $(x^i, y^\alpha) \to (x^i, y^\alpha, y_i^\alpha = a_i(x, y))$. Denote by Γ_u the horizontal tangent subspace determined by $\Gamma(u)$, $u \in E$. Then $T_uE = \Gamma_u \oplus T_uE_x$, $x = \pi u$. There are two canonical projections $v : T_uE \to T_uE_x$, $h : T_uE \to \Gamma_u$ and we have two canonical vector bundle morphisms $h : TE \to TE$ and $v : TE \to VTE$, where VTE denotes the fibre bundle of all vertical tangentvectors on E. Let ω be a form on E. Denote by $h^*\omega$ and $v^*\omega$ the forms ωh and ωv, respectively.

Proposition 1. *Let ω be a form of degree p on E. Then*

$$D_h\omega + D_v\omega = p\omega\,, \tag{1}$$
$$v^*D_v\omega = p(v^*\omega) = D_v(v^*\omega)\,,$$
$$h^*D_h\omega = p(h^*\omega) = D_h(h^*\omega)\,.$$

Proof.

$$\omega(X_1, \ldots, X_p) = \omega(hX_1 + vX_1, X_2, \ldots, X_p) = \omega(hX_1, \ldots, X_p) + \omega(xX_1, \ldots, X_p)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\omega(X_1, \ldots, X_p) = \omega(X_1, \ldots, X_{p-1}, hX_p + vX_p) = \omega(X_1, \ldots, hX_p) + \omega(X_1, \ldots, vX_p)\,.$$

By summation we get $D_h\omega + D_v\omega = p\omega$. Then $v^*D_v\omega = p(v^*\omega)$, $h^*D_h\omega = p(h^*\omega)$ and by the definitions of D_v, D_h we get $D_v(v^*\omega) = p(v^*\omega)$, $D_h(h^*\omega) = p(h^*\omega)$.

Since $v \,.\, h = h \,.\, v = 0$, the definitions of D_v and D_h immediately yield

Proposition 2. *The composition of D_v and D_h is commutative, i.e. $D_v \,.\, D_h = D_h \,.\, D_v$.*

A form ω of order p on E will be said to be Γ-vertical or total Γ-vertical, if $h^*\omega = 0$ or if $\omega(X_1, \ldots, X_p) = 0$ when at least one vector of the set $\{X_1, \ldots, X_p\}$ is horizontal. This implies

Proposition 3. *The form $v^*\omega$ or $D_v\omega$ is total Γ-vertical or Γ-vertical, respectively.*

Proposition 4. *If a form ω is total Γ-vertical then $D_h\omega = 0$ and $D_v\omega = p\omega$.*

It is easy to see that $\omega - h^*\omega$ is Γ-vertical.

Let us recall (see [2]) that a form ω is semi-basic if $\omega(X_1, \ldots, X_p) = 0$ when $\exists i \in \{1, \ldots, p\} : X_i \in VTE$. Therefore an antisymmetric p-form is semi-basic if and only if $i_Y\omega = 0$ for any vertical tangent vector Y, where $i_Y\omega$ denotes the contraction of ω by Y. Locally, a form ω is semi-basic if

$$\omega = a_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_p}\,.$$

If ω is semi-basic then $D_v\omega = 0$ and $D_h\omega = p\omega$.

An antisymmetric p-form on E will be said to be quasi-semi-basic if $i_Y\omega$ is semi-basic for any $Y \in VTE$. Locally, ω is quasi-semi-basic if and only if

(3) $$\omega = a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + a_{i_1 \dots i_{p-1}\alpha} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}} \wedge dy^\alpha .$$

By the definition of D_h, D_v we have $D_v(dx^i) = 0$, $D_v(dy^\alpha) = dy^\alpha - a_i^\alpha dx^i$, $D_h(dx^i) = dx^i$, $D_h(dy^\alpha) = a_i^\alpha dx^i$. This gives

Proposition 5. *If ω is quasi-semi-basic but not semi-basic then $D_v\omega$ and $D_h\omega$ are quasi-semi-basic but not semi-basic.*

Recall (see for example [1], [4]) that the curvature form of Γ is an antisymmetric 2-morphism

$$\Phi : TE \otimes TE \to TE$$
$$\Phi(X_u, Y_u) = v([hX, hY]) ,$$

where $[hX, hY]$ is the Lie bracket of such fields X, Y on E that $X_u \in X$, $Y_u \in Y$, $u \in E$. Locally

(4) $$\Phi = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial a_k^\alpha}{\partial y^\beta} a_j^\beta - \frac{\partial a_j^\alpha}{\partial y^\beta} a_k^\beta + \frac{\partial a_k^\alpha}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j^\alpha}{\partial x^k}\right) dx^j \wedge dx^k\right] \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} =$$
$$= \tfrac{1}{2} A_{jk}^\alpha dx^j \wedge dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} .$$

The mapping d_Φ is an antidifferentiation of the first degree and

(5) $$d_\Phi(dx^i) = 0 , \quad d_\Phi(dy^\alpha) = \tfrac{1}{2} A_{jk}^\alpha dx^j \wedge dx^k .$$

Proposition 6. *Let Φ be the curvature form of the connection Γ. Then* $d_\Phi d_\Phi = 0$.

Proof. The mapping d_Φ being an antidifferentiation of $\Lambda(E)$ with the property $d_\Phi f = 0$ for any function f on E, it is determined by its action on $\Lambda^1(E)$. Using (5) we get our assertion.

Denote $H_u = \{\Phi(X, Y) : X, \ Y \in T_uE\}$.

Proposition 7. *Let ω be a $(p - 1)$-form on E. Let $i_Y\omega = 0$ for any vector tangent field, the value of which lie in the spaces H_u. Then $d_\Phi\omega = 0$.*

Proof. $d_\Phi\omega(X_1, \dots, X_{p+1}) = \sum_{\sigma\in S} \operatorname{sgn} \sigma\omega(\Phi(X_{s_1}, X_{s_2}), X_{s_3}, \dots, X_{s_{p+1}}) = \sum_{\sigma\in S} \operatorname{sgn} \sigma i_{\Phi(X_{s_1}, X_{s_2})}\omega(X_{s_3}, \dots, X_{s_{p+1}})$. This completes our proof.

Quite analogously, if $i_Y\omega = 0$ for any horizontal tangent vector Y then $\omega \in \operatorname{Ker} D_h$.

Let d denote the exterior differentiation on $\Lambda(E)$. Then $\bar{d} = D_v d - dD_v$ is an antidifferentiation of degree 1 on $\Lambda(E)$. By Proposition 3 we get

(6) $$h^*\bar{d} = -h^* dD_v .$$

Proposition 8. *Let ω be a p-form on E. Then*

$$h^*(\bar{d}\omega) = -h^* d_\Phi \omega .$$

Proof. $h^* dD_v\omega(X_1, \ldots, X_{p+1}) = dD_v\omega(hX_1, \ldots, hX_{p+1}) =$

$$= -\sum_{i<j} (-1)^{i+j} D_v\omega([hX_i, hX_j], hX_1, \ldots, \widehat{hX_i}, \ldots, \widehat{hX_j}, \ldots, hX_{p+1}) =$$

$$= -\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega(v[hX_i, hX_j], hX_1, \ldots, \widehat{hX_i}, \ldots, \widehat{hX_j}, \ldots, hX_{p+1}) =$$

$$= \sum_{i<j} (-1)^{i-1+j-2} \omega(\Phi(hX_i, hX_j), hX_1, \ldots, \widehat{hX_i}, \ldots, \widehat{hX_j}, \ldots, hX_{p+1}) =$$

$= d_\Phi\omega(hX_1, \ldots, hX_{p+1}) = h^* d_\Phi\omega(X_1, \ldots, X_{p+1})$, where the symbol $\wedge$ indicates that a vector $\hat{X}$ is dropped. The relation (6) completes our proof.

Proposition 9. *If the form $D_v\omega$ is closed then $\bar{d}\omega$ is Γ-vertical. If the form ω is closed then $D_v\omega$ is closed if and only if $\bar{d}\omega = 0$.*

Proof follows from the definition of $\bar{d}$.

3. In the sequel we are going to study in detail some relations between bilinear forms and connections on E. Let $\omega = a_{ij} dx^i \otimes dx^j + a_{\alpha i} dy^\alpha \otimes dx^i + a_{i\alpha} dx^i \otimes \otimes dy^\alpha + a_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes dy^\beta$ be a bilinear form on E. Then $D_h\omega$ is quasi-semi-basic. Let $Y = b^\alpha(\partial/\partial y^\alpha)$ be a vertical tangent field. Then

$$i_Y\omega = a_{\alpha i} b^\alpha dx^i + a_{\alpha\beta} b^\alpha dy^\beta , \quad h^*(i_Y\omega) = (a_{\alpha i} + a_{\alpha\beta} a_i^\beta)\, b^\alpha dx^i .$$

The form ω will be said to be associated with a connection Γ on E if $h^* i_Y\omega = 0$ for any vertical tangent vector Y. Locally, a bilinear form ω is associated with a connection Γ on E if and only if

$$(7) \qquad a_{\alpha i} + a_{\alpha\beta} a_i^\beta = 0 .$$

Let ${}^\omega T_u = \{X \in T_u E : i_Y\, \omega(X) = 0 \text{ for any } Y \in T_u E_m, \pi u = m\}$. The bilinear form ω on E will be called connecting if the distribution of the tangent subspaces ${}^\omega T_u$ determineds a connection on E. If ω is connecting then the connection of the tangent subspaces ${}^\omega T_u$ will be denoted by ${}^\omega\Gamma$.

As $\dim \{i_Y\omega : Y \in T_u E_m\} \leqq \dim E_m$, we have $\dim {}^\omega T_u \geqq \dim M$. Then the mapping $u \to {}^\omega T_u$ is a connection if and only if the assertion

$$(Z \in T_u E_m \wedge Z \in {}^\omega T_u) \Rightarrow Z = 0$$

is true for any $u \in E$. Locally, let $Z = c^\alpha(\partial/\partial y^\alpha)$. Then $Z \in {}^\omega T_u$ if and only if $i_Y\, \omega(Z) = 0$ for any $Y \in T_u E_m$, i.e. if and only if $a_{\alpha\beta} c^\alpha = 0$. Then ω is connecting if and only if $\det (a_{\alpha\beta}) \neq 0$, i.e. if and only if the restriction of ω to vertical tangent vectors is a regular form. This yields

Proposition 10. *Let ω be connecting. Then ω is associated with a connection Γ if and only if $\Gamma = {}^{\omega}\Gamma$.*

Let us recall that if ω is quasi-semi-basic then it is not connecting. If ω is a 2-form (i.e. antisymmetric of the second order) then it can be connecting only if $\dim E_x$ is even.

Proposition 11. *Let ω be a connecting 2-form on E. Then the connection ${}^{\omega}\Gamma$ is integrable if and only if*

$$h^*(L_Y\omega - i_Y d\omega) = 0$$

for any vertical tangent field Y.

Proof. By definition ${}^{\omega}\Gamma$ is integrable if and only if $h^*(di_Y\omega) = 0$ for any vertical tangent field Y. The known relation $L_Y = i_Y d + di_Y$ completes our proof.

Let ω or Γ be a bilinear form or a connection, respectively, on E. Denote by $\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{12}, \omega_{21}$ the following forms:

$$\omega_{10}(X, Y) = \omega(hX, Y), \quad \omega_{20}(X, Y) = \omega(vX, Y),$$
$$\omega_{01}(X, Y) = \omega(X, hY), \quad \omega_{02}(X, Y) = \omega(X, vY),$$
$$\omega_{12}(X, Y) = \omega(hX, vY), \quad \omega_{21}(X, Y) = \omega(vX, hY).$$

Lemma 3. *Let ω or Γ be a bilinear form or a connection, respectively, on E. Then*

$$\begin{aligned} \omega_{10} &= h^*\omega + \omega_{12}, & \omega_{20} &= v^*\omega + \omega_{21}, \\ \omega_{01} &= h^*\omega + \omega_{21}, & \omega_{02} &= v^*\omega + \omega_{12}, \\ D_h\omega &= \omega_{10} + \omega_{01}, & D_v\omega &= \omega_{20} + \omega_{02}, \\ D_h\omega - D_v\omega &= 2(h^*\omega - v^*\omega), & \omega &= h^*\omega + D_vD_h\omega + v^*\omega, \\ D_vD_h\omega &= \omega_{12} + \omega_{21}, & D_vD_v\omega &= D_v\omega + 2v^*\omega, \end{aligned}$$
$$D_hD_h\omega = D_h\omega + 2h^*\omega. \tag{8}$$

Proof. $\omega_{10}(X, Y) = \omega(hX, hY + vY) = \omega(hX, hY) + \omega(hX, vY) = h^*\omega(X, Y) + \omega_{12}(X, Y)$. The other relations can be proved analogously.

Proposition 12. *A bilinear form ω is associated with a connection Γ if and only if $\omega_{21} = 0$.*

Proof. Let $\omega_{21} = 0$. Then $h^*i_Y\,\omega(X) = i_Y\,\omega(hX) = \omega(Y, hX) = \omega_{21}(Y, X) = 0$ for any vertical tangent vector Y. Let ω be associated with Γ. Then $\omega_{21}(Y, X) = \omega(vY, hX) = h^*i_{vY}\,\omega(X) = 0$.

Corollary. *The forms $\omega_{02}, \omega_{10}, \omega_{12}, h^*\omega, v^*\omega$ are associated with Γ.*

Lemma 4. *Let ω be either antisymmetric or symmetric. Then $\omega_{21} = 0$ if and only if $\omega_{12} = 0$.*

Proof is obvious.

Proposition 13. *Let ω be either antisymmetric or symmetric. Then ω is associated with a connection Γ if and only if $D_h\omega$ is semi-basic.*

Proof. $\omega_{21}(Y, X) = \omega(vY, hX) = D_h\omega(vY, X) = i_{vY}D_h\omega(X)$. Then the definition of the semi-basic form and Proposition 12 complete our proof.

Proposition 14. *Let ω be either antisymmetric or symmetric. Then ω is associated with Γ if and only if $i_Z\omega$ is semi-basic for any horizontal vector Z.*

Proof. $\omega_{12}(X, Y) = \omega(hX, vY) = i_{hX}\omega(vY)$. Proposition 12 and Lemma 4 complete the proof.

By the relation (8) we get

Proposition 15. *Let ω be either antisymmetric or symmetric and associated with Γ. Then*

$$D_hD_v\omega = 0\,, \quad D_v\omega = 2v^*\omega\,, \quad D_h\omega = 2h^*\omega\,, \quad \omega = h^*\omega + v^*\omega\,.$$

Corollary. *If ω is associated with Γ, Γ-vertical and either antisymmetric or symmetric then $D_v^n\omega = 2^n\omega$.*

Lemma 5. *Let ω or Γ be a bilinear form or a connection, respectively, on E. Then*

$$(\omega - h^*\omega)_{21} = (D_v\omega)_{21} = (D_h\omega)_{21} = (\omega_{20})_{21} = (\omega_{01})_{21} = \omega_{21}\,.$$

Proof. $(\omega - h^*\omega)_{21}(X, Y) = (\omega - h^*\omega)(vX, hY) = \omega(vX, hY) = \omega_{21}(X, Y)$. The other relations can be proved analogously.

Corollary of Lemma 5 and Proposition 12. *Let ω or Γ be a bilinear form or a connection respectively on E. Then the forms ω, $\omega - h^*\omega$, $D_v\omega$, $D_h\omega$, ω_{20}, ω_{01} are associated with Γ if and only if one of them is associated with Γ.*

Proposition 16. *Let ω be a bilinear connecting form on E. Let Γ be a connection on E. Then the forms $\omega - h^*\omega$, $D_v\omega$, ω_{20}, ω_{02}, $v^*\omega$ determined by Γ are connecting and $\Gamma = {}^{\omega_{02}}\Gamma = {}^{v^*\omega}\Gamma$.*

Proof. Let locally $\omega = a_{ij}dx^i \otimes dx^j + a_{\alpha i}dy^\alpha \otimes dx^i + a_{i\alpha}dx^i \otimes dy^\alpha + a_{\alpha\beta}dy^\alpha \otimes \otimes dy^\beta$. Let

$$\Omega \in \{D_v\omega, \omega_{20}, \omega_{02}, \omega - h^*\omega, v^*\omega\}\,.$$

Then $\Omega = C_{ij}dx^i \otimes dx^j + C_{\alpha i}dy^\alpha \otimes dx^i + C_{i\alpha}dx^i \otimes dy^\alpha + ca_{\alpha\beta}dy^\alpha \otimes dy^\beta$ where $c \neq 0$ is a constant. As $\det(ca_{\alpha\beta}) \neq 0$ we conclude that Ω is connecting. By Proposition 10 and Corollary of Proposition 12, $\Gamma = {}^{\omega_{20}}\Gamma = {}^{v^*\omega}\Gamma$.

Proposition 17. *Let ω be a bilinear connecting form on E. Let $\omega - h^*\omega$, $D_v\omega$, ω_{20} be determined by ${}^{\omega}\Gamma$. Then*

$$^{\omega}\Gamma = {}^{\omega - h^*\omega}\Gamma = {}^{D_v\omega}\Gamma = {}^{\omega_{20}}\Gamma\,.$$

Proof. The form ω is associated with ${}^{\omega}\Gamma$. Therefore by Lemma 5 and Proposition 12 the forms $\omega - h^*\omega$, $D_v\omega$, ω_{20} are associated with ${}^{\omega}\Gamma$. Then Propositions 16 and 10 complete our proof.

Proposition 18. *Let ω be a connecting 2-form on E. Then a connection Γ on E is integrable if and only if $d_{\Phi}\omega$ is semi-basic.*

Proof. Let us recall that Γ is integrable if and only if the curvature form Φ of Γ vanishes, i.e. if $A_{jk} = 0$. Let $\omega = \frac{1}{2}a_{ij}dx^i \wedge dx^j + a_{\alpha i}dy^{\alpha} \wedge dx^i + \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}dy^{\alpha} \wedge dy^{\beta}$. Then $d_{\Phi}\omega = a_{\alpha i}A^{\alpha}_{jk}dx^j \wedge dx^k \wedge dx^i + a_{\alpha\beta}A^{\alpha}_{jk}dx^j \wedge dx^k \wedge dy^{\beta}$ is semibasic if and only if $a_{\alpha\beta}A^{\alpha}_{jk} = 0$. As $\det(a_{\alpha\beta}) \neq 0$, it holds $a_{\alpha\beta}A^{\alpha}_{jk} = 0$ if and only if $A^{\alpha}_{jk} = 0$.

Remark. Using the local expresion of $d_{\Phi}\omega$ we obtain: If ω is a connecting 2-form and Γ is a connection on E then $d_{\Phi}\omega$ is semi-basic if and only if $d_{\Phi}\omega = 0$.

Let Ω be a ternary from on E. Let Γ be a connection on E. Denote by Ω_{112} the form determined by

$$\Omega_{112}(X, Y, Z) = \Omega(hX, hY, vZ)\,.$$

Lemma 6. *Let ω be a connecting 2-form on E. Let Γ be a connection on E. Let Φ be the curvature form of Γ. Then $d_{\Phi}\omega = 0$ if and only if $(d_{\Phi}\omega)_{112} = 0$.*

Proof. Locally, $(d_{\Phi}\omega)_{112} = -a_{\alpha\beta}A^{\alpha}_{jk}a^{\beta}_i dx^j \wedge dx^k \wedge dx^i + a_{\alpha\beta}A^{\alpha}_{jk}dx^j \wedge dx^k \wedge$ $\wedge\, dy^{\beta}$. This yields our assertion.

Proposition 19. *Let ω be a 2-form on E. Then*

$$(d(v^*\omega))_{112} = -(d_{\Phi}\omega)_{112}$$

for any connection Γ on E.

Proof. $(dv^*\omega)_{112}(X, Y, Z) = dv^*\omega(hX, hY, vZ) = hX(v^*\omega(hY, vZ)) -$
$- hY(v^*\omega(hX, vZ)) + vZ(v^*\omega(hX, hY)) - v^*\omega([hX, hY], vZ) + v^*\omega([X, vZ], hY) -$
$- v^*\omega([hY, vZ], hX) = -\omega(v[hX, hY], vZ) = -(d_{\Phi}\omega)_{112}(X, Y, Z)$.

Corollary of Proposition 18, 19 and Lemma 6. *Let ω be a connecting 2-form on E. Then a connection Γ is integrable if and only if $(dv^*\omega)_{112} = 0$.*

Proposition 20. *Let ω be a connecting 2-form on E. Then the connection ${}^{\omega}\Gamma$ is integrable if and only if*

$$(dd_v\omega)_{112} = 0\,.$$

Proof. The form ω is associated with ${}^{\omega}\Gamma$. Therefore $d_v\omega = 2v^*\omega$. The previous corollary completes our proof.

References

[1] *Dekrét A.*: Horizontal structures on fibre manifolds, Math. Slovaca 27, 1977, No. 3, 257—265.
[2] *Godbillon C.*: Géométrie différentielle et mécanique analytique, Russian, MIR Moskva 1973.
[3] *Лумисте Г.*: Связность в однородных расслоениях, Мат. сборник, Новая серия Т. *69*, 1966, Но 3, 434—469.
[4] *Pradines J.*: Suites exactes vectorielles doubles et connections, C.R.A.S. Paris *278*, 1974, 1587—1590.

Author's address: 960 53 Zvolen, Štúrova 4 (katedra matematiky VŠLD).

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

VĚROSLAV JURÁK, Poděbrady: *Conjugate cyclic (v, k, λ)-configurations.* (Konjugované cyklické (v, k, λ)-konfigurace.)

V článku jsou studovány konjugované cyklické (v, k, λ)-konfigurace pomocí jistých isomorfismů těchto konfigurací.

ALOIS KLÍČ, Praha: *On exceptional values of holomorphic mappings of Riemann surfaces.* (O výjimečných hodnotách holomorfních zobrazení Riemannových ploch.)

Buď $f: V \to M$ holomorfní zobrazení otevřené Riemannovy plochy V do kompaktní Riemannovy plochy M. V článku jsou odvozeny zobecněné Cartanovy formule. S jejich pomocí jsou dokázány věty, dávající postačující podmínky pro to, aby hodnota $a_0 \in M$ nebyla defektní, tj. aby Nevanlinnův defekt $\delta(a_0) = 0$.

KAREL SVOBODA, Brno: *On characterization of the sphere in E^4 by means of the parallelness of certain vector fields.* (O charakterizaci koule v E^4 na základě rovnoběžnosti jistých vektorových polí.)

Autor zobecňuje výsledky svého předchozího článku. Na základě rovnoběžnosti jistého normálního vektorového pole, které je přiřazeno dané dvojici tečných vektorových polí, se dokazují věty analogické výsledkům z předchozího článku. Tyto věty jsou výchozím bodem pro další úvahy.

ANTON DEKRÉT, Zvolen: *On forms and connections on fibre bundles.* (O formách a konexiách na fibrovaných priestoroch.)

Nech na fibrovanom priestore $\pi : E \to M$ je daná konexia $\Gamma: E \to J^1 E$. V tejto práci sú popísané vlastnosti derivácií typu i_* na algebre $\Lambda(E)$, určené formou konexie $v : TE \to VTE$ a formou krivosti $\Phi : TE \wedge TE \to VTE$. Ak bilineárna forma ω je regulárna na fibroch, tak existuje na E práve jedna konexia $\bar{\Gamma}$ tak, že $\omega(Y, X) = 0$ pre každý vertikálny vektor Y a každý horizontálny vektor X na E. Pomocou vlastností formy ω sú najdené nutné a postačujúce podmienky, aby konexia $\bar{\Gamma}$ bola integrabilná.

RECENSE

Václav Medek - Jozef Zámožík: KONŠTRUKTÍVNA GEOMETRIA PRE TECHNIKOV. Alfa, Vydavatel'stvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava; SNTL, Nakladatelství technické literatury, Praha 1978. Str. 541, cena Kčs 40,—.

Číslice [1]—[4] se vztahují k těmto knihám:

[1] *F. Kadeřávek - J. Klíma - J. Kounovský: Deskriptivní geometrie.* Díl I 1928, díl II 1932.
[2] *J. Kounovský - F. Vyčichlo: Deskriptivní geometrie pro samouky.* 1948, 2. vyd. 1951.
[3] *J. Klapka: Deskriptivní geometrie.* 1949, 2. vyd. 1951.
[4] Recensovaná učebnice, určená studentům stavební fakulty SVŠT a VŠD.

[4] představuje v několika směrech velmi výrazný a velmi prospěšný zlom v naší literatuře o deskriptivní geometrii.

Česká geometrická škola, která se rozvinula ve druhé polovině minulého století, vedla v deskriptivní geometrii téměř výhradně k syntetickým metodám a tak ji nezdravě izolovala od ostatní geometrie. V. Medek a J. Zámožík naopak spojují deskriptivní geometrii s geometrií analytickou, s geometrií diferenciální a s výpočetní technikou. Jejich kniha se přiřazuje ke směru, pro který F. Hohenberg razil termín „konstruktivní geometrie" (viz jeho knihu „Konstruktive Geometrie in der Technik" 1956).

Nejobsáhlejší dílo v naší literatuře o deskriptivní geometrii je kompendium [1], které bylo určeno nejen pro studenty technik, ale též pro kandidáty učitelství na gymnasiích. Pozdější učebnice látku velmi omezily, metodicky propracovaly a přizpůsobily studentům technických škol. Zůstaly však buď zcela (jako [2]) anebo až na menší výjimky (jako [3]) u syntetické metody.

Téměř stejný počet stran v [2] a [4] usnadňuje srovnání těchto dvou učebnic, mezi nimiž leží 30 let. Připomínám ještě, že [2] byla po zásluze velmi ceněna; viz k tomu třeba [3], str. 6 a 391.

Mongeovo promítání na dvě průmětny a kótované promítání jsou ze 110 str. v [2] zkráceny na 40 str. v [4] (počty stran jsou ovšem všude přibližné); v [4] je axonometrie v rozsahu 50 str., o níž je v [2] jen malá zmínka; naopak [4] se jen krátce zastavuje u speciálního případu axonometrie — u šikmého promítání, kterému [2] věnuje 10 str. Středové promítání zaujímá v [2] 30 str. a v [4] je rozšířeno na 50 str. Osvětlení je v [2] vyhrazeno 60 str., ale [4] má příslušný samostatný oddíl zcela krátký. Jednoduchým plochám (tj. mnohostěnům a plochám válcovým, kuželovým a kulové) je v [2] věnováno 210 str., v [4] pouze 40 str. Rotační plochy jsou v [2] i [4] v přibližně stejném rozsahu 30 str. Kuželosečky jsou v [2] probírány v odstavcích o jednoduchých plochách a projektivním vlastnostem — až po věty Pascalovu a Brianchonovu — je vyhražen samostatný odst. o 20 str.; jemu v [4] korespondují jen asi 3 str. z odst. o kuželosečkách, který má v dodatcích rozsah 30 str. a začíná jejich elementárními vlastnostmi.

Tímto výčtem je — až na úvod a dodatky po 20 str. — vyčerpána [2], ale jen asi 1/2 z [4]. Posun je dvojí a v obou případech velmi prospěšný:

a) Předně obecný výklad je v [4] proti [2] značně zkrácen a je jen malým zlomkem z [1]. (I když mnoho přihlédneme k daleko širšímu určení [1], nelze v tom nevidět ústup deskriptivní geometrie od dřívějšího významného postavení v učebních plánech technik.) Naopak jsou v [4] velmi rozšířeny aplikace, které se v [2] omezují na několik stránek v dodatku (učebnice [2] byla ovšem určena pro studium teorie bez specifického zaměření, ale i tak je malý rozsah aplikací z dnešního pohledu nápadný). V [4] jsou na 120 str. uvedeny plochy přímkové, kvadratické, šroubové, topografické i řada dalších speciálních ploch z technické stavební praxe; geodetické aplikace ve fotogrammetrii a kartografii zabírají přes 40 str. V důrazu na praktické použití se [4] shoduje s [3], v níž aplikacím ve strojírenství je věnováno mnoho místa.

b) Za druhé v [4] je v dodatcích analytická geometrie (30 str.) a diferenciální geometrie (30 str.), používané v celé knize; asi desetistránkový odstavec o čarách a plochách předcházející kapitoly o speciálních plochách lze považovat za konstruktivní aplikace diferenciální geometrie. Navíc jsou na mnoha místech základní programy pro počítač, které připravují k důslednějšímu využívání výpočetní techniky.

K tomuto druhému posunu připojím ještě dvě poznámky:

1. Před 15 lety jsem na katedře matematiky a deskriptivní geometrie stavební fakulty ČVUT poprvé vyložil, proč bude třeba spojit analytickou geometrii s deskriptivní (srv. můj článek „O geometrii a deskriptivní geometrii", Pokroky *17* (1972), 187—193; viz zvl. str. 193). Proto je pro mě Medkova a Zámožíkova učebnice [4] velkým zadostiučiněním. Bohužel s diferenciální geometrií je věc problematičtější zvláště při posledním zkrácení deskriptivní geometrie v učebním plánu. Potřebné poznatky z matematiky jsou totiž k dispozici až ve 2. semestru. Ostatně jakési rozpaky autorů nad diferenciální geometrií ploch lze tušit i z toho, že jí v dodatcích věnovali pouhých 6 str.

2. Zařazení jednoduchých programů pro počítače je v našich poměrech dalším originálním rysem učebnice [4]. Jeho význam pro stavební praxi je ovšem dalekosáhlý a nepochybně se bude ještě zvětšovat. Je chyba, že někteří mladí učitelé deskriptivní geometrie na technice stojí stranou tohoto proudu. Rovněž je chyba, že budoucí středoškolští učitelé deskriptivní geometrie se s ním na matematicko-fyzikální fakultě KU podrobněji nesetkají. Tento proud je v zahraničí silný a oba autoři jej úspěšně zachytili. Při řešení dílčího úkolu státního plánu základního výzkumu vytvořili metody, které se významně uplatnily v praxi. Jednoduché programy začlenili do své knihy z nadhledu vlastních bohatých zkušeností.

Metodicky je kniha [4] výborná, obrázky jsou pečlivé. Nakladatelství Alfa ji vypravilo vzorně.

Kniha vzbudila zaslouženou pozornost na Technické universitě v Drážďanech. Připravuje se německý překlad. Bude nepochybně velmi úpěšnou učebnicí.

Zbyněk Nádeník, Praha

Yung-Chen Lu: SINGULARITY THEORY AND AN INTRODUCTION TO CATASTROPHE THEORY, Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin, 1976, v edici Universitext, stran XII + 199, obr. 78, cena DM 29,30.

Kniha je rozšířenou versí cyklu šesti přednášek, které autor přednesl pro účastníky konference „Structural stability, catastrophe theory and their applications in the sciences" konané v dubnu 1975 v Battelle Seattle Research Center. Konference se setkala s velkým zájmem nejen u specialistů v oboru teorie singularit a katastrof, ale zúčastnilo se jí též mnoho matematiků zabývajících se aplikacemi matematiky ve fyzice, biologii, medicině a sociologii i řada specialistů z těchto vědních oborů. První tři Luovy přednášky byly předneseny před zahájením konference a měly přípravný charakter, poslední tři se konaly v týdnu po konferenci a pojednávaly o speciálnějších otázkách teorie singularit a katastrof. Celý cyklus byl určen nespecialistům jako úvod do teorie singularit a katastrof a jeho cílem bylo seznámit posluchače se základními myšlenkami a výsledky této teorie. Stejný charakter i cíl má i tato publikace.

První ze šesti kapitol, nazvaná „Introduction to Singularity Theory with Historical Remarks", obsahuje krátkou intuitivní diskusi pojmů stability a generičnosti, přehled elementárních pojmů diferenciální geometrie, definici stability, lokální stability, singulárních a regulárních bodů hladkého zobrazení, a též některé Whitneyovy věty o hladkých zobrazeních, imersích a vnořeních, jež spolu s Morseovým lemmatem a jeho globální versí poskytují první obecné příklady stabilních a lokálně stabilních zobrazení a ilustrují též pojem generičnosti. Určitým nedostatkem tohoto jinak pěkného úvodu je snad jen přílišná stručnost historických poznámek, omezujících se v podstatě pouze na citace některých Morseových, Whitneyových i jiných prací, jež sehrály důležitou roli v rozvoji teorie singularit.

V kapitole 2 „On Singularities of Mappings from the Plane to the Plane" se nejprve definují některé důležité pojmy, jako např. r-džety, prostory r-džetů a r-džetová rozšíření hladkých zobrazení a transversalita zobrazení a podvariet. Je zde vyslovena též Thomova věta o transversalitě a jako příklad na její použití je dokázána hustota množiny Morseových funkcí v prostoru všech hladkých funkcí na R^n. Hlavním tématem je však fundamentální Whitneyova práce z roku 1955 o singularitách hladkých zobrazení z roviny do roviny. Výkladu výsledků této práce je věnována větší část kapitoly, přičemž autorovým cílem není vyložit Whitneyovu práci v maximální obecnosti a se všemi podrobnostmi, nýbrž geometricky osvětlit a ilustrovat její hlavní myšlenky a usnadnit tak čtenáři jejich pochopení.

Kapitola 3 „Unfoldings of Mappings" seznamuje čtenáře s pojmy nutnými k formulaci Thomovy klasifikační věty pro stabilní rozvinutí kodimense $\leqq 4$, nazývané též větou o sedmi elementárních katastrofách, a s některými výsledky potřebnými k jejímu důkazu. Zavádí se zde pojem germu zobrazení, pravé a oboustranné ekvivalence germů, pravé a oboustranné k-určenosti, konečné určenosti a pravé a oboustranné kodimense germu a dokazuje se Matherova věta, dávající jednoduchou algebraickou podmínku pro pravou k-určenost germu. V další části kapitoly je definován pojem rozvinutí germu a versálního (stabilního), universálního a k-transversálního rozvinutí, formulují se nutné a postačující podmínky algebraického charakteru pro to, aby rozvinutí germu bylo versální resp. universální, a dokazuje se též existence universálního rozvinutí pro libovolný konečně určený germ. Je zde uvedena též Malgrangeova přípravná věta v Matherově tvaru a podán její důkaz ve speciálním případě, kdy je jeho myšlenka značně jednodušší a snadno pochopitelná. I zde je však výchozím bodem Malgrangeova věta o dělení, jejíž důkaz je — podobně jako několik jiných důkazů přesahujících rámec této knihy — vynechán. Závěr kapitoly je věnován formulaci již zmíněné Thomovy věty o sedmi elementárních katastrofách a klasifikační věty pro singulární germy (pravé) kodimense $\leqq 4$, jež představuje velmi důležitý článek důkazu Thomovy věty. Důkaz obou vět, jenž je dosti dlouhý a komplikovaný, je však podán až v závěru knihy v dodatku 2.

V kapitole 4 „Catastrophe Theory" autor na četných příkladech fyzikálního rázu objasňuje, jak teorie singularit může být použita při studiu nespojitě probíhajících přírodních jevů, a zavádí základní pojmy teorie katastrof, mimo jiné pojem katastrofické množiny potenciální funkce $V: R^n \times R^r \rightarrow R$ s prostorem stavů R^n a prostorem parametrů R^r a pojem elementární katastrofy. V případě, že $r \leqq 4$ a V je lokálně stabilní jako rozvinutí kodimense r, Thomova klasifikační věta říká, že existuje pouze sedm různých typů elementárních katastrof. Z těchto sedmi typů se zde podrobně probírá katastrofa typu „cusp", a to v souvislosti s Van der Waalsovou rovnicí. K základním pojmům teorie katastrof a k Thomově klasifikační větě se autor vrací ještě v dodatku 1 „Thom's Three Basic Principles", kde krátce vysvětluje Thomovy fundamentální principy morfogenese a ukazuje, v čem spočívá důležitost Thomovy klasifikační věty. Tato část knihy se však zdá být poněkud méně zdařilou než ostatní kapitoly a čtenář, který jí bude chtít porozumět, bude možná nucen obrátit se ještě k jiným pramenům.

Kapitola 5 „Thom-Whitney Stratification Theory" je úvodem do teorie stratifikací, jež vlastně patří do algebraické geometrie, ale je velice užitečná též v teorii singularit. Základní myšlenka této teorie spočívá v rozkladu variety se singularitami (algebraické, analytické či jiné) na disjunktní sjednocení hladkých variet, z nichž každá je tvořena body, jež jsou v určitém smyslu „stejně špatné". Objasnění intuitivního smyslu tohoto pojmu a též ilustraci Whitneyových podmínek regularity, jež mu dávají přesný význam a jež jsou hlavním tématem této kapitoly, je věnována celá řada příkladů. V závěru kapitoly jsou pak bez důkazu uvedeny některé fundamentální věty týkající se existence regulárních stratifikací, souvislosti mezi podmínkami regularity a intuitivním smyslem pojmu „stejně špatné body", a topologické ekvivalence stratifikovaných variet.

Kapitola 6 „C^0-Sufficiency of Jets" se zabývá některými otázkami topologické ekvivalence germů hladkých zobrazení. Definuje se zde C^0-postačitelnost a v-postačitelnost r-džetu $Z \in J^r(n, p)$ v C^{r+1} a dokazuje se, že v případě $p = 1$ každá z těchto vlastností je ekvivalentní existenci kladných čísel ε a δ takových, že $|\text{grad } Z(x)| \geqq \varepsilon |x|^{r-\delta}$ pro všechna x v okolí počátku. S pomocí tohoto kriteria se pak rozebírá řada obsažných příkladů. V závěru kapitoly se krátce diskutuje C^0-postačitelnost a v-postačitelnost v případě $p > 1$, kdy je situace již značně složitější.

Kniha je napsána zajímavě, dostatečně jasně a srozumitelně, určitou vyjímkou je pouze dodatek věnovaný Thomovým třem základním principům. Pozornému čtenáři však neujde poměrně značný počet drobných přepsání a některé jiné menší nedostatky víceméně formálního charakteru, jež u publikací tohoto druhu bývají poměrně časté. Většina z nich je však lehce opravitelná a jen nepatrně ovlivňuje srozumitelnost výkladu. Zvláštností ale i velkou předností Luovy knihy je neobvykle velký počet příkladů. Celkem je jich v knize více než 90 a všechny hrají ve výkladu důležitou roli. Některé z nich ilustrují definice a osvětlují zaváděné pojmy, jiné slouží k předběžné motivaci vět a jiné zase ukazují, jak tyto věty mohou být použity při řešení konkrétních problémů. Jsou tu příklady velmi jednoduché i poměrně složité, avšak skoro všechny jsou velmi instruktivní. Naproti tomu je zde jenom velmi málo důkazů, což lze podle mého názoru považovat za určitý nedostatek. Je však nutno objektivně říci, že vynechané důkazy většinou značně přesahují rámec elementárního úvodu do teorie singularit ať už svou obtížností nebo použitými prostředky, takže jejich zařazením by kniha patrně ztratila svou další velkou přednost, jíž jsou skutečně minimální požadavky na předběžné vědomosti čtenáře, omezující se na běžné znalosti matematické analýzy.

Celkově je Luova kniha velmi pěkným úvodem do teorie singularit a katastrof a vysoké ocenění a doporučení, které jí v úvodu dává P. Hilton, jí, myslím, po právu náleží.

Vojtěch Bartík, Praha

INVARIANT WAVE EQUATIONS, Proceedings, Erice, 1977, Edited by Giorgio Velo and Arthur S. Wightman. Lecture Notes in Physics, 73, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1978, ii + 416 stran.

Publikace je souborem přednášek z mezinárodní školy o matematické fyzice „Ettore Majorana", konané ve dnech 27. 6.—9. 7. 1977 v Erice na Sicilii.

Předmětem referátů byly otázky spojené s Lorentzovsky a Euklidovsky invariantními lineárními i nelineárními vlnovými rovnicemi, jež hrají významnou úlohu v soudobé teorii elementárních částic a v kvantové teorii pole. Cílem sborníku je usnadnit začátečníkovi orientaci v rozsáhlé literatuře a odborníka pak seznámit s některými nejnovějšími výsledky v tomto oboru.

Úvodní a nejrozsáhlejší stať A. S. Wightmana seznamuje čtenáře se základními pojmy a poznatky z teorie invariantní vlnové rovnice a s jejich souvislostí s fyzikální problematikou, tj. především s problémem vnějšího pole. Následující příspěvek L. Gårdinga je věnován matematickým aspektům této teorie. Především nelineární teorii invariantních vlnových rovnic jsou věnovány dosti rozsáhlé práce W. Strausse a J. Fröhlicha. Článek D. Zwanzigera se zabývá metodou charakteristik a akausálními rovnicemi. R. Seiler a S. N. M. Ruijsenaars pojednávají o částicích se spinem ne větším než 1 ve vnějších polích. Význam solitonů pro kvantovou teorii popisuje J. L. Gervais. V kratších přednáškách se C. Parenti - F. Strocchi - G. Velo a R. Stora zabývají nelineární relativistickou teorií pole resp. Yangovými-Millsovými instantony (tj. řešeními jistého typu eliptických diferenciálních rovnic).

Otto Vejvoda, Praha

A. Carasso & A. P. Stone (Editors): IMPROPERLY POSED BOUNDARY VALUE PROBLEMS, Pitman Publishing, London, San Francisco, Melbourne 1975.

Recenzovaná kniha je sborníkem dvanácti prací na téma: Nekorektní úlohy (improperly posed problems) v parciálních diferenciálních rovnicích a obsahuje téměř všechny odpolední přednášky proslovené na stejnojmenné konferenci, která se konala v srpnu roku 1975 v Albuquerque v americkém státě New Mexico. Tato regionální konference byla téměř výlučně záležitostí amerických matematiků. Hlavním řečníkem byl profesor L. E. Payne z Cornellovy University, který se ujal všech dopoledních přednášek. Jejich soubor bude publikován organizací SIAM v tzv. CBSM Regional Conference Series in Applied Mathematics. Dvanáct prací ostatních účastníků konference jsou matematická pojednání o nejrůznějších problémech, které vznikají v meteorologii, geofyzice, dynamice kapalin, elasticitě atd. Čtenář specialista v nich najde stručnou a přesnou informaci o metodách řešení nekorektně zadaných speciálních úloh i cenné bibliografické údaje, které ho uvedou do této moderní a zajímavé matematické disciplíny.

Ivan Straškraba, Praha

Aldo Bressan: RELATIVISTIC THEORIES OF MATERIALS. Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 29. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1978; XIV + 290 str., cena DM 98,—.

Monografie pojednává o fenomenologických teoriích termomechanických a elektromagnetických vlastností materiálů v rámci speciální a obecné relativity.

Prvním problémem relativistických teorií materiálů je formulace základních rovnic termomechaniky a elektrodynamiky kontinua v relativistickém tvaru. Přepis základních rovnic nerelativistické termomechaniky nevyvolává žádné obtíže; ty vznikají až při „relativizaci" Clausiovy-Duhemovy nerovnosti, která vyjadřuje druhý zákon termodynamiky pro spojitá prostředí. V knize je ukázáno, že existují hned dvě relativistické verze, které se od nerelativistické v lokálně přirozeném systému souřadnic liší jenom o členy řádu c^{-2}, přičemž na základě teoretických úvah je těžké rozhodnout, která z nich skutečně platí (o experimentálních testech ani nemluvě).

Maxwellovy fenomenologické rovnice neexistují v nerelativistickém tvaru a jejich obvyklý zápis ve speciálně relativistickém tvaru se lehce zobecní na obecně relativistický tvar. Je však známo, že již klasická Maxwellova elektrodynamika neznala správný výraz pro hustotu ponderomotorické síly a hustotu produkce Jouleova tepla v případě nelineárního a neizotropního dielektrika. Tuto neznalost přirozeně neodstraňuje ani obecná relativita; reprodukuje se v ní jako neznalost správného výrazu pro elektromagnetický tenzor energie a hybnosti. V recenzované knize uvažuje autor celkem sedm (!) možných výrazů pro tento tenzor (zde čtenář pochopí v plném rozsahu význam pověstného Einsteinova přirovnání tenzoru křivosti k mramorovému pilíři a tenzoru energie a hybnosti k výtvoru ze slámy). Z hlediska této nejednoznačnosti je množné číslo slova „teorie" v názvu monografie zcela na místě.

Kromě tohoto okruhu základních otázek jsou v knize studovány konstituční vztahy, které popisují odezvu materiálu při dané deformaci, teplotě a intenzitách elektrického a magnetického pole. Konkrétní forma Clausiovy-Duhemovy nerovnosti a elektromagnetického tenzoru energie a hybnosti kladou na konstituční vztahy různá omezení, jež jsou v řadě speciálních případů odvozena. Jako aplikace jsou podrobně vyloženy výsledky o šíření elastických vln. V jedné ze závěrečných kapitol je nastíněno shrnutí a zobecnění teorie ve formě relativistické teorie materiálů s pamětí.

Je užito „klasického" indexového značení, které je z hlediska cíle a použitých metod nejvýhodnější. Interpretace výsledků v termínech prostorových a časových veličin je prováděna velice systematicky v rámci formalismu rozvinutého v úvodní části. Na některých místech se používá diskutovaných harmonických souřadnic. Kniha neobsahuje žádná konkrétní řešení gravitačních rovnic při daných konstitučních rovnicích pro úhrnný tenzor energie a hybnosti.

Relativistic Theories of Materials není úvodem do relativistických fenomenologických teorií; bude spíše užitečná těm, kteří již z dané problematiky něco znají a chtějí si svoje znalosti prohloubit. Těmto čtenářům ji lze plně doporučit.

Miroslav Šilhavý, Praha

Kufner, A., John, O., Fučík, S.: FUNCTION SPACES. Akademia, Praha, 1977. Vydání první, 456 stran, 13 obrázků, cena 175,— Kčs.

Kniha *Function spaces*, jak již název napovídá, je věnována systematickému a podrobnému studiu lineárních vektorových prostorů, jejichž prvky jsou reálné nebo komplexní funkce. (V kapitole o prostorech spojitých funkcí je navíc též zmínka o abstraktních funkcích, zobrazujících euklidovský prostor R^n do normovaného lineárního prostoru X.)

Teorie těchto prostorů úzce navazuje na abstraktní funkcionální analýzu, zahrnuje ovšem též vyšetřování řady hlubokých vlastností spjatých s vnitřní strukturou studovaných prostorů. (Namátkou uveďme věty o vnoření či věty o stopách.) Výsledky této teorie představují rozsáhlý materiál pro aplikace zejména na poli diferenciálních rovnic.

O důležitosti studovaného předmětu svědčí rozsáhlá literatura, která se jím zabývá (jen pečlivá bibliografie, uvedená v recensované knize, zahrnuje 400 titulů, a další články se denně objevují). Přitom však většina výsledků je roztroušena v časopiseckých článcích, případně tvoří pomocný materiál v monografiích jiného zaměření. Monografie předkládaného typu až dosud scházela nejen v české, ale i ve světové literatuře. (Těch několik knih, věnovaných speciálně prostorům funkcí — krom prací citovaných v knize „Function spaces“ uveďme knihu R. A. Adamse *Sobolev spaces* — je užšího zaměření.)

Kniha „Function spaces“ vznikla na základě seminářů, věnovaných funkčním prostorům, které se konaly na matematicko-fyzikální fakultě KU. Uveďme zde stručný přehled otázek v knize studovaných.

V úvodní části knihy je shrnut stručný přehled základních pojmů a vět funkcionální analýzy, používaných v dalším textu. První část vlastního obsahu je věnována prostorům hladkých funkcí (tj. spojité, hölderovské, spojitě diferencovatelné funkce). Ve druhé části jsou shrnuty prostory integrovatelných funkcí (Lebesgueovy, Orliczovy, Campanatovy a Morreovy prostory). Třetí část pak je věnována prostorům diferencovatelných funkcí (s integrálními normami). Jsou zde studovány klasické Sobolevovy prostory, Sobolevovy-Orliczovy prostory, a přehledně řada dalších prostorů tohoto typu (Nikolského prostory, Besovovy prostory, Sloboděckého prostory, různé typy anisotropních prostorů, váhové prostory).

Kniha je doplněna rozsáhlou bibliografií, autorským a věcným rejstříkem a přehledem užitých symbolů. Výklad je přístupný čtenáři se znalostmi na úrovni základního universitního kursu matematiky. Navíc stručné přehledy používaných pojmů a vět (již zmíněný přehled pojmů funkcionální analýzy, přehled výsledků teorie Lebesgueova integrálu, uvedený ve druhé části knihy, stručný přehled teorie distribucí v části třetí) značně ulehčují četbu.

Čtenář se seznámí se širokým spektrem základních vlastností funkčních prostorů (velice neúplný výčet: jsou studovány otázky reflexivity, separability, existence Schauderovy báze, charakterisace kompaktních podmnožin, vyjádření funkcionálů, duální prostory, různé definice Sobolevových prostorů a jejich vztah, Sobolevova věta o vnoření, věty o stopách, věty Kondrašovova typu o kompaktním vnoření atd.); řada dalších pojmů je alespoň zmíněna s odkazy na literaturu. Výklad je srozumitelný, doplněný řadou příkladů. To vše činí z referované publikace velice zdařilou knihu, která bude jistě užitečná široké obci matematiků.

Pavel Doktor, Praha

EQUADIFF IV, Proceedings, Prague, 1977. Edited by J. Fábera. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1979, xix + 441 str., cena $ 21,30.

Ve dnech 22.—26. srpna 1977 se konala v Praze již čtvrtá konference o diferenciálních rovnicích a jejich aplikacích EQUADIFF IV. Byla pořádána Matematickým ústavem Československé akademie věd ve spolupráci s některými dalšími československými vědeckými institucemi. Svým zaměřením navázala na předchozí konference Equadiff, které se konaly v Praze (1962), v Bratislavě (1966) a v Brně (1972). Konference se účastnilo okolo 350 matematiků, z toho přes polovinu ze zahraničí. Její jednání probíhalo tradičně ve 3 základních sekcích:

1. obyčejné diferenciální rovnice;
2. parciální diferenciální rovnice;
3. numerické metody a aplikace.

Přednesené příspěvky byly vesměs hodnotné a umožnily účastníkům udělat si dobrý přehled o stavu moderní matematiky v oboru diferenciálních rovnic.

Recenzovaný sborník přináší seznam všech referovaných přednášek (jejich počet byl 63) i jednotlivých sdělení (157). Z pěti přednášek, které byly prosloveny na plenárních zasedáních (*O. Borůvka*: Algebraic methods in the theory of global properties of the oscillatory equations $Y'' = Q(t)\,Y$, *J. Nečas*: On the existence and regularity of weak solutions to variational equations and inequalities, *O. A. Olejnik*: Energetičeskije ocenki analogičnyje principu Saint-Venanta i ich priloženija, *J. Kyncl, I. Marek*: Some problems in neutron transport theory, *W. N. Everitt*: Singular problems in the calculus of variations and ordinary differential equations) jsou otištěny pouze prvé čtyři.

Dále sborník obsahuje výběr 45 příspěvků (psaných v jazyce anglickém), které se týkají teorie obyčejných diferenciálních rovnic (např. Coddington, Gamkrelidze, Knobloch, Mawhin, Neuman, Rjabov, Šeda, Tvrdý-Schwabik, Vrkoč), rovnic se zpožděným argumentem (Kamenskij-Myškis, Švec), teorie regulace (Conti, Dragan-Halanay, Klötzer), parabolických rovnic (Amann, Bebernes, Dümmel, Kačur), hyperbolických rovnic (Hall, Nohel, Rabinowitz), nelineárních eliptických problémů (Fučík, Hess), aplikací Sobolevových prostorů s vahou a Běsovových prostorů (Kufner, Triebel), teorie potenciálu (Král, Hansen, Mazja), variačních nerovností (Mosco), Navier-Stokesových rovnic (Ladyženskaja), teorie pružnosti (Capriz, Brilla), teorie přenosu neutronů (Mika), spektrálních aproximací (Descloux-Nassif-Rappaz), Cauchyova problému a stability numerických řešení abstraktních rovnic (Sova, Taufer-Vitásek), numerických metod (Axelsson, Gajewski, Hlaváček, Iljin, Nedoma, Rektorys) aj.

Leopold Herrmann, Praha

Karel Marx: MATEMATICKÉ RUKOPISY. Nakladatelství Svoboda. Praha 1978. 558 str., 5 obr., cena 16,— Kčs.

Překlad knihy Matematičeskije rukopisi, Nauka, Moskva 1968 pořízený kolektiem překladatelů pod vedením akad. Josefa Nováka. V knize je zachycena Marxova rukopisná pozůstalost, v níž se odráží jeho matematická činnost, a poznámky redakce ruského vydání. Kniha byla odměněna výroční cenou nakladatelství Svoboda za společensky angažovaná díla a tvorbu roku 1978.

Redakce

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

ZEMŘEL PROF. DR. JOSEF BREJCHA, CSc.

SYLVA ŠANTAVÁ, Brno

V březnu 1979 zemřel po krátké a těžké nemoci ve věku 71 roků prof. RNDr. Paed. Dr. JOSEF BREJCHA, CSc., nositel státního vyznamenání Za zásluhy o výstavbu, nositel stříbrné medaile VUT, bývalý proděkan a vedoucí katedry matematiky a deskriptivní geometrie strojní fakulty VUT v Brně, čestný člen JČSMF, člen vědecké rady strojní fakulty, člen četných odborných komisí a dlouholetý funkcionář společenských organisací.

Prof. Brejcha byl až do posledních dnů svého života činný jako pedagog i jako vědecký pracovník. V minulém roce jsme oslavili jeho sedmdesátiny a netušili jsme, že jen několik měsíců nás dělí ode dne, kdy se navždy s profesorem Brejchou budeme muset rozloučit.

Profesor Brejcha pocházel z učitelské rodiny, již od dob studií byl jednoznačně zaměřen na matematiku. Absolvoval reálné gymnasium v Sušici a přírodovědeckou fakultu Karlovy university a po vojenské presenční službě r. 1933 jako aprobovaný kandidát pro obor matematika a fyzika nastoupil na školách nižších stupňů, neboť na středních a vysokých školách nebylo místa. Teprve od r. 1936 působil jako středoškolský profesor, nejprve v Opavě, později od r. 1938 do r. 1948 na 1. Státní reálce v Brně. Již jako středoškolský profesor věnoval se odborněvědecké činnosti a publikoval. Bylo tedy zcela samozřejmé, že v roce 1948 se stal členem nové pedagogické fakulty v Brně, odtud v roce 1950 přešel na stavební fakultu VUT. Jako tajemník katedry matematiky a deskriptivní geometrie zasloužil se o vybudování této katedry. V roce 1955 byl jmenován docentem, v roce 1957 se stal vedoucím nově zřízené katedry matematiky a deskr. geometrie strojní fakulty VUT v Brně, a v r. 1960 byl jmenován vysokoškolským profesorem. Snaha o rozkvět katedry a fakulty byla vždy charakteristickým rysem jeho práce. Na všech pracovištích se věnoval obětavě a úspěšně pedagogické práci, napsal i v tomto směru řadu článků a pojednání, účastnil se organisace pedagogických konferencí; přednesl na těchto konferencích řadu referátů a přispěl budování vysokoškolské metodiky. Za svého dlouholetého působení prof. Brejcha vychoval nejen mnoho studentů středních škol, pedagogické fakulty, stavebních a strojních inženýrů, ale vyškolil i řadu vysokoškolských učitelů. Pedagogické a výchovné práci se věnoval s láskou a porozuměním, jak odpovídalo i jeho lidsky ušlechtilé povaze a stálé pohotovosti lidem pomáhat. Prof. Brejcha má značné zásluhy o vybudování strojní fakulty v Brně, zejména o zřízení a počáteční personální obsazení Laboratoře počítacích strojů při FS v r. 1961, která byla první institucí tohoto druhu na vysokých školách v ČSSR. Prof. Brejcha byl několikrát vyhodnocen jako vzorný pracovník, v r. 1965 obdržel stříbrnou medaili VUT a v r. 1967 vyznamenání za ,,Zásluhy o výstavbu". Za svou záslužnou práci v JČSMF byl jmenován jejím zasloužilým členem.

Publikační činnost prof. Brejchy obsahuje řadu vědeckých a jiných odborných článků, serie úloh, skripta, spoluautorství na učebnicích a monografiích. Vědecké práce prof. Brejchy zahrnují široký okruh otázek v oboru elementární a diferenciální geometrie. Významnou částí publikační činnosti je i jeho činnost úlohářská. Jeho jméno jako autora soutěžních, převážně geometrických úloh pro studenty lze nalézt téměř v každém ročníku Rozhledů matematicko-přírodovědeckých, později, od r. 1936, matematicko-fyzikálních. Některé jeho originální úlohy byly uveřejněny i v problémových částech časopisů Elemente der Mathematik a Časopisu pro pěstování matematiky. Prof. Brejcha je také spoluautorem knihy Frank a kolektiv ,,Matematika", kde zpracoval část Diferenciální a integrální počet funkce jedné a více proměnných.

Profesor Brejcha zůstává trvale v paměti svých žáků, spolupracovníků, přátel a široké veřejnosti jako vynikající matematik, pedagog, učitel a spolupracovník, především však jako vzácný a ušlechtilý člověk.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

ZEMŘEL DOCENT SVATOPLUK FUČÍK

JEAN MAWHIN, Louvain-la-Neuve, JINDŘICH NEČAS a BŘETISLAV NOVÁK, Praha

V pátek dne 18. května 1979 utrpěla československá a světová matematika těžkou ztrátu. V ranních hodinách podlehl zákeřné a těžké nemoci docent matematicko-fyzikální fakulty University Karlovy RNDr. SVATOPLUK FUČÍK, CSc. Na smutečním shromáždění konaném v pátek 25. května 1979 ve velké obřadní síni strašnického krematoria se se zesnulým rozloučili za matematicko-fyzikální fakultu její proděkan prof. dr. Ivo Marek, DrSc. a za Jednotu československých matematiků a fyziků a za pracovníky MÚ ČSAV prof. dr. Jaroslav Kurzweil, DrSc., člen korespondent ČSAV. Chtěli bychom v následujících řádcích připomenout těm, kteří doc. Fučíka znali, obrovskou práci kterou za svůj život vykonal a těm, kteří ho již poznat nemohou, přiblížit co nejvíce jeho osobnost a dílo.

Svatopluk Fučík se narodil 21. října 1944 v Praze. Základní a střední školu absolvoval v Hradci Králové a v letech 1962—1967 studoval na matematicko-fyzikální fakultě UK specializaci matematická analýza. Jeho diplomová práce měla název *Lokální stupeň zobrazení.* Z problematiky diplomové práce vznikly dvě publikované práce [1] a [2], na jejichž základě získal v r. 1969 titul doktora přírodních věd. V letech 1967—1969 byl aspirantem na katedře matematické analýzy. Aspiranturu ukončil kandidátskou prácí *Řešení nelineárních operátorových rovnic.* Počátky a celé rozsáhlé první období více než desetileté vědecké dráhy doc. S. Fučíka jsou spjaty se jménem doc. dr. J. Nečase, DrSc., který byl vedoucím jeho diplomové práce, školitelem v aspirantuře, učitelem a spolupracovníkem v letech dalších.

Od roku 1969 až do své smrti pracoval na katedře matematické analýzy MFF UK postupně jako asistent a odborný asistent. Habilitační práci *O některých problémech nelineární spektrální analýzy* napsal v roce 1973; v roce 1977 byl jmenován a ustanoven docentem matematiky.

Brzy po svém příchodu na katedru se stal jednou z vůdčích postav vědecké i pedagogické práce nejen na katedře, ale i na ostatních matematických pracovištích fakulty. Mnoho energie a času věnoval rozvoji vědecké práce na katedře matematické analýzy a jejích aplikací v oblasti funkcionální analýzy a diferenciálních rovnic jako vedoucí příslušného oddělení katedry.

Činnost doc. Fučíka se neomezovala jen na práci na MFF UK. Vědecky úzce spolupracoval s MÚ ČSAV. Účastnil se i práce v rámci státního plánu základního výzkumu, jednak jako řešitel několika dílčích úkolů, jednak od r. 1976 jako odpovědný řešitel dílčího úkolu „Metody funkcionální analýzy a její aplikace v teorii aproximací a spektrální teorii nelineárních operátorů" a člen koordinační rady hlavního úkolu „Matematická analýza". Od r. 1971 pracoval doc. Fučík v JČSMF, zejména v její matematické vědecké sekci, kde byl dlouhá léta členem výboru a od roku 1978 jejím předsedou. Současně byl i členem ÚV JČSMF. K nemalým Fučíkovým zásluhám patří také to, že pod strohou obálkou Informace MVS JČSMF se skrýval současný a dobře čitelný text s patrnými stopami jeho osobitého humoru.

Přejděme nyní ke stručné charakteristice vědeckého díla doc. Fučíka.

Hned na počátku oslnivé vědecké dráhy doc. Fučíka se projevuje jeho zájem o nelineární funkcionální analýzu. Ve své diplomové práci se zabývá základní otázkou nelineárních zobrazení v R^n, stupněm zobrazení, a nově zpracovává definici E. Heinze. Fučíkovo zpracování stupně zobrazení se pak objevuje v knize D[5], sepsané spolu s J. Nečasem, J. Součkem a V. Součkem a v textu E[5]. Z této problematiky, jak již bylo výše řečeno, jsou tři práce A[1], A[2] a A[3]. V práci A[1] zobecňuje doc. Fučík Rotheho větu o pevném bodu. Rovněž práce A[2] pojednává o existenci pevného bodu pro zobrazení $T = B + C$, kde B je typu kontrakce a C má přibližně vlastnosti totálně spojitého zobrazení. Základní Fučíkovo tvrzení je zobecněním věty Kačurovského-Krasnoselského-Zabrejky. Poslední z této serie prací, práce A[3] se týká surjektivity operátoru $h = I + H$, kde nelineární operátor H má v jistém smyslu normu menší než jedna.

Další etapou vědecké práce doc. Fučíka je Fredholmova alternativa pro nelineární operátor $\lambda T - S$. Doc. Fučík na rozdíl od S. I. Pochožajeva, který spolu s J. Nečasem zavedl tento pojem do nelineární funkcionální analýzy, vyšetřuje operátory T a S, zobrazující Banachův prostor X do obecného Banachova prostoru Y a nikoli pouze do X^x. O zobrazení T předpokládá doc. Fučík, že je to (K, L, a)-homeomorfismus X na Y: $L\|\mathscr{X}\|_{X_2}^a \leqq \|T(\mathscr{X})\|_Y \leqq K\|\mathscr{X}\|_X^a$.

Jedna z Fučíkových versí Fredholmovy alternativy zní: *Nechť T je a-homogenní (K, L, a)-homeomorfismus, S je liché, a-homogenní, totálně spojité zobrazení. Potom $\lambda T - S$ je regulárně surjektivní (tj. inverzní zobrazení je omezené) tehdy a jenom tehdy, není-li λ vlastní číslo dvojice (T, S).*

Této problematice jsou věnovány Fučíkovy práce A[5], A[6] a tyto výsledky jsou rovněž vtěleny do knihy D[5].

V následujícím období se vědecká aktivita doc. Fučíka šířila mnoha směry. Snad nejzávažnější jsou v této době práce, týkající se spektra operátoru $\lambda f' - g'$, kde f a g jsou dva sudé funkcionály. Doc. Fučík spolu s J. Nečasem zobecnil Ljusterníkovu-Schnirelmannovu teorii o existenci kritických a vlastních čísel, viz práce A[10]. Zobecnění se týkalo hladkosti funkcionálů f a g, takže abstraktní teorii bylo možno aplikovat též na prostory typu L_p, $1 < p < 2$. Hlavní myšlenkou bylo nahrazení homotopických deformací, získaných řešením abstraktní diferenciální rovnice, pouze jejich přiblížením. Hlavním jeho výsledkem (spolu s J. Nečasem, J. Součkem a V. Součkem) bylo tvrzení o spočetnosti kritických čísel funkcionálu g vzhledem k varietě $f(x) = r$ pro reálně analytické funkcionály f a g. Základem tohoto tvrzení je práce Jiřího a Vladimíra Součka o Morseho větě pro reálně analytické funkce. Tyto výsledky a Fučíkovy práce A[9], A[11], A[12], A[13], A[15], A[18], A[19] byly dílem vtěleny do knihy D[5].

Podstatná část matematického díla doc. Fučíka je věnována studiu oborů hodnot nelineárně perturbovaných neinvertibilních lineárních operátorů v Banachových prostorech a aplikacím těchto výsledků na diferenciální rovnice. I když jeho výsledky zahrnují abstraktní, parciální i obyčejné diferenciální rovnice, omezíme se pro jednoduchost většinou na obyčejné diferenciální rovnice. Připomeňme, že S. Fučík, který měl vynikající smysl pro humor, hovořil o obyčejných diferenciálních rovnicích jako o parciálních diferenciálních rovnicích v dimensi menší než $\pi/3$.

Užitím alternativní metody spolu s Schauderovou větou o pevném bodě, nalezli v roce 1970 Landesman a Lazer jako první nutnou a postačující podmínku, kterou musí splňovat funkce $f \in L^2(0, \pi)$, aby Dirichletova úloha

$$(1) \qquad \begin{aligned} u'' + n^2 u + g(u) &= f(x)\,, \\ u(0) = u(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

měla alespoň jedno řešení, kde g je spojitá funkce, splňující podmínku

$$(2) \qquad -\infty < g(-\infty) < g(s) < g(+\infty) < +\infty\,, \quad s \in (-\infty, +\infty)\,,$$

kde $g(\pm\infty)$ označuje limity $\lim\limits_{s \to \pm\infty} g(s)$, jejichž existenci předpokládáme. Tento výsledek a jeho odpovídající abstraktní verse (J. Nečas, S. Fučík) indukovala práci A[23], kde je podobným způsobem řešena tato otázka za slabší podmínky

$$(3) \qquad \begin{gathered} -\infty < g(-\infty) \leqq g(s) \leqq g(+\infty) < +\infty\,, \quad s \in (-\infty, +\infty)\,, \\ g(0) \neq g(\pm\infty) \end{gathered}$$

a pro případ $g(s) = |s|^p \sin g(s)$, $p \in (0, 1)$. Základní obecný výsledek této práce pojednává o rovnicích v Hilbertově prostoru, které mají tvar

$$(4) \qquad A(u) - S(u) = h\,,$$

kde A je lineární zobrazení množiny $D(A) \subset H$ do H, $h \in H$ a operátor S zobrazující H do H splňuje následující podmínku

$$(5) \qquad |S(u)| \leqq \mu_1 + \mu_2 |u|^\delta\,, \quad \delta \in \langle 0, 1)\,.$$

Rozšíření tohoto výsledku pro $\delta = 1$ a dostatečně malá μ_2 je publikováno v A[21]. Shrnutí těchto výsledků a mnohá jejich zobecnění, získaná podobnými metodami obsahuje práce A[22]. Doc. Fučík dále pokračoval v této problematice a v práci A[20] započal studovat případy, které dosud byly neřešené, a to použitím metody „seříznutých" (truncated) rovnic, nejprve pro speciální případ (1) pro $n = 1$, $g(+\infty) = g(-\infty) = 0$. Příslušný problém pro libovolné n je studován v A[33] a obecnější výsledky (s aplikacemi na eliptické problémy) jsou obsahem práce A[37], kde je využito velmi užitečné myšlenky expansivních funkcí. Rovnice s expansivními nelinearitami jsou dále vyšetřovány v práci A[40], v níž jsou zavedeny expansivní periodické funkce, s jejichž pomocí užitím alternativní metody a topologického stupně zobrazení je ukázána existence nekonečně mnoha řešení některých rovnic typu (4), kde nulová množina A má lichou dimensi a S je Němyckého operátor asociovaný s expansivně periodickou nelinearitou.

Vzhledem k podmínce, která je kladena na funkci g, zahrnují všechny výše uvedené výsledky speciální případ (1), okrajovou úlohu tvaru

$$(6) \qquad \begin{aligned} u'' + h(u) &= f(x)\,, \\ u(0) = u(\pi) &= 0\,, \end{aligned}$$

kde h je spojitá funkce, pro níž

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{h(u)}{u} = \lim_{u \to +\infty} \frac{h(u)}{u} = n^2 . \tag{7}$$

Ve své fundamentální práci A[31], nazývá doc. Fučík funkci h neskákající, jsou-li obě limity v (7) stejné, v opačném případě pak skákající. Výše zmíněné práce se tedy týkají případu neskákajících nelinearit. Případ, kdy h „nepřekročí" vlastní hodnotu příslušné lineární úlohy, tj.

$$n^2 < \lim_{u \to -\infty} \frac{h(u)}{u} \neq \lim_{u \to +\infty} \frac{h(u)}{u} < (n + 1)^2$$

byl dobře znám a snadno řešen. Případ, kdy h „skočí" od první k druhé vlastní hodnotě příslušné lineární úlohy, tj.

$$\lim_{u \to -\infty} \frac{h(u)}{u} < 1 < \lim_{u \to +\infty} \frac{h(u)}{u} < 4 ,$$

začali studovat Ambrosetti a Prodi v r. 1973. V práci A[31] studuje doc. Fučík jako první existenci řešení pro případy, kdy nelinearita „přeskočí" jednu libovolnou vlastní hodnotu, neb více než jednu, neb „skáče-li" z jedné do následující vlastní hodnoty a také zvlášť případ, kdy nelinearita „odskočí" z jedné vlastní hodnoty. Práce spočívá na velmi vtipném využití Lerayova-Schauderova stupně zobrazení. V práci A[27] nalezneme výsledky Ambrosettiho-Prodiho typu pro slabá řešení, založená na alternativní metodě a Banachově větě o pevném bodu. Obecná abstraktní formulace úloh se skákajícími nelinearitami je dána v A[30].

V r. 1977 ukázal J. Mawhin, že podobné výsledky platí nejen pro obyčejné a eliptické parciální diferenciální rovnice, ale také pro periodická řešení parciálních diferenciálních rovnic evolučního typu. S. Fučík ihned začal v této oblasti pracovat. Práce A[38] zahrnuje případ nelineární telegrafní rovnice a práce A[35] a A[42] případ nelineární rovnice vedení tepla; případ nelineární rovnice nosníku je uvažován v B[16]. Je třeba na tomto místě připomenout, že významné výsledky O. Vejvody a jeho skupiny o periodických řešeních slabě nelineárních evolučních rovnic vytvořily v Praze velmi příznivé „počáteční" podmínky pro práci na těchto úlohách. Tato problematika je dále studována v práci A[41], která zobecňuje a doplňuje výsledky prací A[33], A[37], A[38] a A[42].

V r. 1976 ukázali Ahmad, Lazer a Paul, že při studiu problému typu (4) dává variační přístup lepší výsledky než topologické metody v případě, že A je samoadjungovaný a S potenciální operátor. Jejich výsledky zobecnil S. Fučík podstatně v pracích A[34] a A[39]; mohl zde plně prokázat svoji mistrnou znalost variačních metod, kterou získal prací ve skupině J. Nečase.

Další Fučíkovy práce zahrnují problémy typu (4), kde S nesplňuje podmínku růstu (5), $\delta \in \langle 0, 1 \rangle$. Odpovídající obecný základ není stále v jednotné formě a mnohé problémy zůstávají otevřené. Tak v práci A[25] je zkoumána využitím metody střelby a Brouwerova stupně zobrazení existence periodických řešení rovnice

$$x'' + g(x) = f(x),$$

kde $g(u)/u \to +\infty$ pro $u \to +\infty$, v práci A[29] je pojednáno o existenci periodických řešení rovnic vyššího řádu tvaru

$$x^{(2k)} + \sum_{j=1}^{2k-1} a_j x^{(2k-j)} + g(x) + h(x)\,x' = f(t)$$

(zde je použita Schauderova věta o pevném bodu) a v práci A[26] je vyšetřována odpovídající vektorová rovnice užitím koincidenčního stupně zobrazení. V práci A[36] je studován problém resonance v první vlastní hodnotě pro parciální diferenciální rovnici

$$-\Delta u - \lambda_1 u + g(u) = f(x), \quad x \in \Omega\,; \quad u(x) = 0\,, \quad x \in \partial\Omega\,,$$

pro spojitou, neklesající a superlineární funkci g. Je zde opět využita alternativní metoda kombinovaná s teorií monotonních operátorů.

Všechny Fučíkovy práce, které jsme mohli jen krátce popsat, přinášejí takové vědecké výsledky, že i jejich stručná charakteristika ukazuje jejich významný přínos v této oblasti nelineární funkcionální analýzy a diferenciálních rovnic, jak podstatným zlepšením předchozích výsledků, tak otevřením nových směrů vědecké práce. Toto je však pouze jedna stránka Fučíkova základního přínosu k této oblasti matematiky. Jeho aktivita značně ovlivnila práci pražské skupiny matematiků, zaměřených v tomto směru. Byl organizátorem a spoluorganizátorem řady letních škol, seminářů, byl duší řady spoluprací československých matematiků se zahraničními pracovišti. Na jeho výsledky navazovalo a navazují desítky matematiků.

V celé řadě přehledných prací (B[9], B[11], B[12]), které vznikly na základě jeho přednášek na různých konferencích a zejména v obsažném díle D[11], které je vlastně jeho vědeckou závětí a jehož poslední versi dokončoval v nemocnici, vytvořil krásný obraz stavu našich znalostí v této oblasti. Jeho dílo neopomíjí mnohé otevřené problémy, z nichž mnohé jsou dodnes neřešeny, a zaznamenává tak hlavní směr bádání v posledních letech. Není sporu o tom, že Fučíkovo dílo bude pro dlouhé období nejlepším průvodcem pro kohokoliv, kde se zajímá o tuto problematiku a o její neřešené problémy.

Rozsáhlá a mnohostranná byla i pedagogická činnost doc. Fučíka. Zde se výrazně projevila jeho neutuchající činorodost, která vyvěrala z hlubokých znalostí, vynikajících učitelských schopností a v neposlední řadě i z jeho schopností organizačních. Doc. Fučík dokázal ve vědecké i pedagogické práci získat pro své myšlenky své spolupracovníky a žáky, neboť patřil všemi svými vlastnostmi a znalostmi k rozeným vůdčím osobnostem, které dokáží strhnout ostatní nejen osobní autoritou, ale zejména vlastním příkladem a pracovitostí, nakažlivým nadšením i optimismem.

Všechny jeho přednášky vynikaly průzračností a bezprostředním kontaktem s posluchači.

Doc. Fučík se v posledním období zúčastnil aktivně prakticky všech etap výuky matematické analýzy. Zaměřil se zejména na zavedení metod funkcionální analýzy do přednášek matematické analýzy v prvním dvouletí studia a na vybudování třísemestrálního kursu funkcionální analýzy. Výsledkem jeho úvah o způsobu výuky a praktických zkušeností učitele je celá řada učebních textů D[1], [2], [3], [4], [7], E[6]. Kvalitu této práce dokumentuje např. D[9], což je německé vydání D[2], které doc. Fučík pro toto vydání podstatně rozšířil.

Další oblastí pedagogického působení doc. Fučíka bylo vedení výběrových přednášek a seminářů pro posluchače a jejich vyústění ve studentské vědecké práce posluchačů v rámci SVOČ, práce ročníkové, diplomové i rigorosní. Podobně jako ze zkušeností z povinné výuky vyrůstaly učební texty, vzniklo i zde několik interních rozmnožovaných textů pro posluchače (texty E[2], [4], [5], [8]), skriptum D[6] a v důsledku i vědecké monografie D[5], D[8], D[10], D[11]).

Pod vedením doc. Fučíka vznikla řada prací posluchačů fakulty i jejich absolventů. Většinou získávaly přední místa ve fakultních kolech SVOČ i v kolech celostátních. Doc. Fučík sám dlouhá léta pracoval v porotách těchto soutěží. Spolu s dlouholetým členstvím v komisích pro státní závěrečné zkoušky specializací matematická analýza i aplikovaná matematika, v rigorosní komisi pro matematickou analýzu na MFF UK a v posledním období i členstvím v komisi pro obhajoby kandidátských prací v oboru matematická analýza, tím byla vlastně uzavírána jeho dlouhodobá a soustavná práce s posluchači a mladými matematiky. Srovnáme-li časový sled, vyjádřený v jednotlivých částech seznamu vědeckých a ostatních prací doc. Fučíka s prací pedagogickou, zjistíme pozoruhodnou jednotu pedagogické a vědecké práce ve všech jejích aspektech; semináře pro posluchače přerůstaly v semináře vědecké a ve všem prosvítá duch a smysl pro kolektivní práci, kterou dovedl výborně podněcovat.

Celá rozsáhlá uvedená vèedecká a pedagogická práce doznala v brzku řady uznání a ocenění. Již v r. 1972 obdržel vyznamenání 1. stupně JČSMF za úspěchy ve vědecké práci, v r. 1975 pak 1. cenu v soutěži mladých matematiků. Ve stejném roce obdržel na MFF UK diplom za rozvoj pracovní iniciativy. V roce 1978 u příležitosti oslav 25. výročí založení MFF UK byla jeho rozsáhlá práce pro fakultu oceněna udělením medaile II. stupně MFF UK, v roce 1979 byla jeho práce A[39] oceněna prémií Českého literárního fondu a konečně cyklus jeho prací o řešení nelineárních operátorových rovnic byl v témže roce vysoce oceněn Cenou ministra školství ČSR.

Neobyčejné a ojedinělé je dílo, které nám doc. Fučík zanechal. Strohý výčet činnosti umocněný krátkostí časového úseku, který mu nelítostná choroby vyměřila, v němž navíc žil prostým životem otce rodiny se všemi jeho radostmi a strastmi, však svědčí o neobyčejnosti jeho osobnosti. Jeho nevšední pracovitost, nesmírnou lásku k matematice, obětavost v práci na fakultě i mimo ni zná každý, kdo s ním spolupracoval. Jeho posluchači, žáci a spolupracovníci znají jeho pečlivost a náročnost na straně jedné, takt a pochopení na straně druhé. V paměti všech zůstane jeho poctivá otevřenost, čestnost, osobitý humor, který pomohl překlenout mnohá úskalí a dovést práci k úspěšnému konci. Snad tušil, že jeho čas je omezen. Snad proto do všeho, co dělal, dával vše. Snad proto jeho snaha o porozumění a kontakt s každým. Přesto však pracoval a bojoval do poslední chvíle. Jeho obchod je jak pro fakultu, tak i pro matematiku těžkou ztrátou, kterou si uvědomujeme, ale jejíž vážnost v budoucnu ještě tíživěji pocítíme. Zanechal nám nejen výsledky své práce, ale i příklad svého života.

SEZNAM PRACÍ DOC. RNDR. SVATOPTUKA FUČÍKA, CSC.

A. Původní vědecké práce

1. Fixed point theorems based on Leray-Schauder degree, Comment. Math. Univ. Carolin. *8* (1967), 683—690.
2. Fixed point theorems for sum of nonlinear mappings, Comment. Math. Univ. Carolin. *9* (1968), 133—143.
3. Solving of nonlinear operator's equations in Banach spaces, Comment. Math. Univ. Carolin. *10* (1969), 177—188.
4. Remarks on monotone operators, Comment. Math. Univ. Carolin. *11* (1970), 271—284.
5. Note on the Fredholm alternative for nonlinear operators, Comment. Math. Univ. Carolin. *12* (1971), 213—226.
6. Fredholm alternative for nonlinear operators in Banach spaces and its applications to the differential and integral equations, Časopis pěst. mat. *96* (1971), 371—390.
7. On the convergence of sequences of linear operators and adjoint operators, Comment. Math. Carolin. *12* (1971), 753—763 (spolu s *J. Milotou*).
8. On the existence of Schauder bases in Sobolev spaces, Comment. Math. Univ. Carolin. *13* (1972), 163—175 (spolu s *O. Johnem* a *J. Nečasem*).
9. Strengthening upper bound for the number of critical levels of nonlinear functionals, Comment. Math. Univ. Carolin. *13* (1972), 297—310 (spolu s *J. Nečasem, J. Součkem* a *V. Součkem*).
10. Ljusternik-Schnirelmann theorem and nonlinear eigenvalue problems, Math. Nachr. *53* (1972), 277—289 (spolu s *J. Nečasem*).
11. Upper bound for the number of critical levels for nonlinear operators in Banach spaces of the type of second order nonlinear partial differential operators, Journal Functional Analysis *11* (1972), 314—333 (spolu s *J. Nečasem, J. Součkem* a *V. Součkem*).
12. New infinite dimensional versions of Morse-Sard theorem, Boll. Unione Mat. Ital. *6* (1972), 317—322 (spolu s *J. Nečasem, J. Součkem* a *V. Součkem*).
13. Upper bound for the number of eigenvalues for nonlinear operators, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa *27* (1973), 53—71 (spolu s *J. Nečasem, J. Součkem* a *V. Součkem*).
14. Note to nonlinear spectral theory: Application to boundary value problems for ordinary integrodifferential equations, Comment. Math. Univ. Carolin. *14* (1973), 583—608 (spolu s *Tran Dien Hienem*).
15. Note to nonlinear spectral theory: Application to the nonlinear integral equations of the Lichtenstein type, Math. Nachr. *58* (1973), 257—267 (spolu s *J. Nečasem, J. Součkem* a *V. Součkem*).
16. Existence řešení nelineárních okrajových úloh, Acta Polytechnica *4* (1973), 17—24.
17. Kačanov-Galerkin method, Comment. Math. Univ. Carolin. *14* (1973), 651—659 (spolu s *A. Kratochvílem* a *J. Nečasem*).

18. Krasnoselskii's main bifurcation theorem, Arch. Rat. Mech. Anal. *54* (1974), 328—339 (spolu s *J. Nečasem, J. Součkem* a *V. Součkem*).
19. Morse-Sard theorem in infinite dimensional Banach spaces and investigation of the set of all critical levels, Časopis pěst. mat. *99* (1974), 217—243 (spolu s *M. Kučerou, J. Nečasem, J. Součkem* a *V. Součkem*).
20. Further remark on a theorem by E. M. Landesman and A. C. Lazer, Comment. Math. Univ. Carolin. *15* (1974), 259—271.
21. Surjectivity of operators involving linear noninvertible part and nonlinear compact perturbation, Funkcial. Ekvac. *17* (1974), 73—83.
22. Nonlinear equations with noninvertabile linear part, Czechoslovak Math. J. *24* (*99*), (1974), 467—495.
23. Ranges of nonlinear asymptotically linear operators, J. Differential Equations *17* (1975), 375—394 (spolu s *M. Kučerou* a *J. Nečasem*).
24. Kačanov's method and its application, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. *20* (1975), 907—916 (spolu s *A. Kratochvílem* a *J. Nečasem*).
25. Periodic solutions of the equation $x''(t) + g(x(t)) = p(t)$, Časopis pěst. mat. *100* (1975), 160—175 (spolu s *V. Lovicarem*).
26. Periodic solutions of some nonlinear differential equations of higher order, Časopis pěst. mat. *100* (1975), 276—283 (spolu s *J. Mawhinem*).
27. Remarks on a result by A. Ambrosetti and G. Prodi, Boll. Un. Mat. Ital. *11* (1975), 259—267.
28. Linear and nonlinear variational inequalities on halfspaces, Comment. Math. Univ. Carolin. *16* (1975), 663—682 (spolu s *J. Milotou*).
29. Periodic solutions of generalized Liénard equation with forcing term, Colloquia Math. Soc. J. Bolyai, *15*, Diff. Equat., Keszthely 1975, 155—169.
30. Remarks on the solvability and nonsolvability of weakly nonlinear equations, Comment. Math. Univ. Carolin. *17* (1976), 61—70.
31. Boundary value problems with jumping nonlinearities, Časopis pěst. mat. *101* (1976), 69—87.
32. Ranges of operators involving linear noninvertible part and nonlinear perturbation, Beiträge Anal. *9* (1976), 19—21.
33. Remarks on some nonlinear boundary value problems, Comment. Math. Univ. Carolin. *17* (1976), 721—730.
34. Nonlinear equations with linear part of resonance: variational approach, Comment. Math. Univ. Carolin. *18* (1977), 723—734.
35. Note to periodic solvability of the boundary value problem for nonlinear heat equation, Comment. Math. Univ. Carolin. *18* (1977), 735—740 (spolu s *V. Šťastnovou*).
36. Remarks on superlinear boundary value problems, Bull. Austral. Math. Soc. *16* (1977), 181—188.
37. Boundary value problems with bounded nonlinearity and general null-space of the linear part, Math. Z. *155* (1977), 129—138 (spolu s *M. Krbcem*).
38. Generalized periodic solutions of nonlinear telegraph equations, Nonlinear Anal. *2* (1978), 609—617 (spolu s *J. Mawhinem*).
39. Nonlinear potential equations with linear parts at resonance, Časopis pěst. mat. *103* (1978), 78—94.
40. Nonlinear equations with expansive nonlinearities (spolu s *A. Ambrosettim*), Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII N.S. *24* (1978), 209—219.
41. Nonlinear perturbations of linear operators having null-space with strong unique continuous property (spolu s *P. Hessem*), Nonlinear Anal. *3* (1979), 271—277.
42. Weak periodic solutions of the boundary value problem for nonlinear heat equation (spolu s *V. Šťastnovou*), Aplikace mat. *24* (1979), 284—303.

B. Předběžná sdělení a články ve sbornících konferencí

1. Fredholm alternative for nonlinear operators in Banach spaces and its applications to the differential and integral equations, Comment. Math. Univ. Carolin. *11* (1970), 271—284.
2. Upper bound for the number of eigenvalues for nonlinear operators, Comment. Math. Univ. Carolin. *13* (1972), 191—195, (spolu s *J. Nečasem, J. Součkem* a *V. Součkem*).
3. Spectral theory of nonlinear operators, Proc. of Equadiff III, Czechoslovak conference on differentical equations and their applications, Brno 1972, 163—174 (spolu s *Nečasem*).
4. Topics on nonlinear spectral theory, Theory of nonlinear operators, Proc. of a summer school held in October 1972 at Neuendorf, Hiddensee, GDR, Akademie Verlag, Berlin 1974, 57—73 (spolu s *M. Kučerou, J. Součkem* a *V. Součkem*).
5. Modernější a účelnější pojetí diferenciálního počtu funkcí více proměnných, Sborník referátů na pedagogické konferenci MFF UK.
6. Kačanov-Galerkin method and its application, Acta Univ. Carolinae, Math.-Physica *15* (1974), 31—33, Proc. of the third conference on basic problems of numerical mathematics (spolu s *A. Kratochvílem* a *J. Nečasem*).
7. Boundary value and periodic problem for the equation $x''(t) + g(x(t)) = p(t)$, Comment. Math. Univ. Carolin. *15* (1974), 351—355 (spolu s *V. Lovicarem*).
8. Spektral'nyj analiz nelinejnych operatorov, Časopis pěst. mat. *100* (1975), 179—192.
9. Solvability and nonsolvability of weakly nonlinear equations, Proceedings Int. Summer School "Theory of Nonlinear operators. Constructive Aspects" held in September 1975 at Berlin. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften der DDR, Jahrgang 1977, 57—68.
10. Solvability of nonlinear equations, Sborník konference v Kühlungsbornu, NDR.
11. Nonlinear noncoercive boundary value problems, Proc. of Conference, Equadiff IV, Praha 1976.
12. Open problems in the solvability of nonlinear equations, Proc. of Conference, Oberwolfach 1976.
13. Generalized periodic solutions of nonlinear telegraph equations, Comment. Math. Univ. Carolin. *18* (1977), 813—816 (spolu s *J. Mawhinem*).
14. Variational noncoercive nonlinear problems, Proc. Int. Summer School "Theory of Nonlinear Operators. Constructive Aspects", held in September 1977 in Berlin. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften der DDR, Jahrgang 1978, Nr. 6 N, 61—69.
15. Nonlinear perturbations of linear operators having null-space with strong unique continuation property, Comment. Math. Univ. Carolin. *19* (1978), 403—407.
16. Nonlinear noncoercive problems: Generalized periodic solutions of nonlinear beam equation, 3° seminario di Analisi Funzionale ed Applicazioni S.A.F.A. III, Bari 1978, stran 52.

C. Články populární a pedagogické

1. O práci s nadanými posluchači na katedře matematické analýzy MFF UK, Pokroky mat., fyz. a astr. *16* (1971), 181—186 (spolu s *B. Novákem* a *J. Milotou*).
2. O Schauderových bázích a jejich aplikacích, Pokroky mat., fyz. a astr. *19* (1974), 11—18 (spolu s *A. Kufnerem*).

D. Skripta a knižní publikace

1. Referáty a praktika z matematické analýzy, UK Praha 1970 (spoluautor), stran 225.
2. Úvod do variačního počtu, SPN, Praha 1972 (spolu s *J. Nečasem* a *V. Součkem*), stran 178.
3. Problémy z matematické analýzy, SPN, Praha 1972 (spoluautor), stran 420.
4. Příklady z matematické analýzy II, Metrické prostory, SPN, Praha 1972; 2. vydání SPN, Praha 1977, stran 123.
5. Spectral analysis of nonlinear operators, Springer Verlag 1973, Lecture Notes in Mathematics No 346 (spolu s *J. Nečasem, J. Součkem* a *V. Součkem*), stran 287.

6. Prostory funkcí I, SPN, Praha 1973 (spolu s *O. Johnem* a *A. Kufnerem*), stran 171.
7. Matematická analýza II, SPN, Praha 1975 (spolu s *J. Milotou*), stran 359.
8. Function spaces, Noordhoff a Academia, Praha 1977 (spolu s *O. Johnem* a *A. Kufnerem*), stran 454.
9. Einführung in die Variationsrechnung, Teubner-Texte zur Mathematik, Teubner Verlag, Leipzig 1977 (spolu s *J. Nečasem, J. Součkem* a *V. Součkem*), stran 175.
10. Nelineární diferenciální rovnice, SNTL, Praha 1978 (spolu s *A. Kufnerem*), stran 344.
11. Solvability of nonlinear equations and boundary value problems, D. Riedel Publishing Company 1980, stran 490.
12. Nonlinear analysis, function spaces and applications, Proceedings of a Spring School. Teubner-Verlag, Leipzig 1979 (editor spolu s *A. Kufnerem*), str. 224.
13. Nonlinear differential equations, Elsevier, Amsterdam a SNTL, Praha 1980 (spolu s *A. Kufnerem*), stran 359.

E. Rozmnožované texty

1. Věty o pevných bodech operátorů, skripta pro letní školu na Richtrových boudách, 1969, stran 54.
2. Texty přednášek na semináři „Řešení nelineárních operátorových rovnic" konaného na MFF UK v letech 1969—71, stran 52.
3. Texty referátů na semináři „Parciální diferenciální rovnice" konaného v r. 1970 v MÚ ČSAV, stran 51.
4. Texty referátů na semináři „Banachovy prostory funkcí více proměnných" konaného na MFF UK v r. 1970, stran 35.
5. Pomocný text pro účastníky semináře „Řešení nelineárních operátorových rovnic" konaného na MFF UK v letech 1971—72, stran 258 (spolu s *J. Nečasem, J. Součkem* a *V. Součkem*).
6. Pomocný text z funkcionální analýzy pro posluchače 3. ročníku v r. 1973, stran 390 (spolu s *J. Milotou*).
7. Nelineární diferenciální rovnice, text pro účastníky letní školy o parciál. difer. rovnicích, Stachy, Šumava, 1976 (spolu s *A. Kufnerem*), stran 497.
8. Ranges of nonlinear operators, text semináře konaného na MFF UK v r. 1977—78, stran 399.

F. Recenze

1. A. Kufner, J. Kadlec, Fourier series, Časopis pěst. mat. *98* (1973), 108—109.
2. Theory of nonlinear operators (Proceedings of Summer School held in September 1971 at Babylon, Czechoslovakia), Aplikace mat. *19* (1974), 50—51.
3. R. Sikorski, Diferenciální a integrální počet. Funkce více proměnných. Časopis pěst. mat. *99* (1974), 198—199.
4. Theory od Nonlinear Operators (Proceedings of a Summer School held in September 1971 at Babylon, Czechoslovakia), Czechoslovak Math. J. *24* (*99*), (1974), 165—166.
5. Theory of Nonlinear Operators (Proccedings of a Summer School held in October 1972 at Neuendorf, Hiddensee, GDR), Aplikace mat. *20* (1975), 457.
6. Nonlinear Functional Analysis and Differential Equations (Proceedings of the Michigan State University Conference. Edited by L. Cesari, R. Kannan, J. D. Schurr), Aplikace mat. *23* (1978), 233—234.
7. J. E. Marsden, M. McCracken, The Hopf Bifurcation and its Applications, Aplikace mat. *23* (1978), 302—303.
8. L. Garding, Encounter with Mathematics, Časopis pěst. mat. *103* (1978), 418—419.
9. J. Lindenstrauss - L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I (Sequence spaces), Časopis pěst. mat. *104* (1979), 99.
10. R. Courant, Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces, Časopis pěst. mat. *104* (1979), 99.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

K ŠEDESÁTINÁM PROF. MARKA ŠVECE, DRSC.

JAROSLAV KURZWEIL, Praha

Dne 10. října 1979 oslavil 60. narozeniny významný československý matematik, profesor MARKO ŠVEC, DrSc., vynikající odborník v teorii diferenciálních rovnic a vysokoškolský učitel, který vychoval celé generace techniků, přírodovědců a matematiků.

Marko Švec se narodil v Kmeťově, okr. Nové Zámky. Středoškolské vzdělání získal na gymnáziích v Nových Zámkách a v Šuranech a potom studoval matematiku a fyziku na přírodovědecké fakultě Slovenské univerzity v Bratislavě. Státní zkoušky složil v r. 1944 a v letech 1944–1949 byl středoškolským profesorem na gymnáziích v Šuranech a v Bratislavě. V r. 1949 přešel na elektrotechnickou fakultu Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě, kde působil jako odborný asistent do r. 1955, jako docent do r. 1966 a jako profesor v letech 1966–1968. Od r. 1968 je profesorem na katedře matematické analýzy Univerzity Komenského v Bratislavě. V letech 1969–1972 a v r. 1974 přednášel jako expert organizace UNESCO na univerzitě v Bahii v Brazilii. Titul RNDr. získal na přírodovědecké fakultě Slovenské univerzity v Bratislavě v r. 1949, vědeckou hodnost kandidáta fyzikálně-matematických věd mu udělila přírodovědecká fakulta Univerzity Jana Evangelisty Purkyně v Brně v r. 1957 a vědecká rada Univerzity J. E. Purkyně v Brně mu udělila vědeckou hodnost doktora fyzikálně-matematických věd r. 1965.

Ve svých vědeckých pracích se Marko Švec zabývá širokým okruhem otázek z oblasti obyčejných diferenciálních rovnic. Velké úsilí věnoval vyšetřování asymptotických a oscilatorických vlastností diferenciálních rovnic řádu vyššího než druhého a to lineárních i nelineárních; tato obtížná problematika jej přitahovala od samého začátku jeho vědecké dráhy. Již v práci [2] dokázal, že rovnice

$$x^{(n)} + Q(t)\, x = 0\,, \tag{1}$$

kde $Q(t) > 0$ pro $t \in R$, má tuto vlastnost:

(E) každé netriviální řešení má nejvýše jeden dvojnásobný nulový bod.

Dále nalezl řadu vlastností, které pro obecnou lineární diferenciální rovnici čtvrtého řádu plynou z vlastnosti (E). Mimořádné závažný a zajímavý výsledek je obsažen v práci [5]: je-li $Q(t) \geqq 0$ pro $t \geqq a$, pak

(F) všechna řešení rovnice (1) mají týž charakter pro $t \to \infty$ (tj. buď jsou všechna oscilatorická nebo žádné).

M. Biernacki formuloval hypotézu, že za jistých předpokladů o Q existují alespoň dvě lineárně nezávislá řešení rovnice (1), která se blíží k nule pro $t \to \infty$, a že existují řešení neohraničená pro $t \to \infty$. Marko Švec dokázal v [6], že hypotéza o existenci dvou lineárně nezávislých řešení, která se blíží k nule, je správná za podstatně slabších předpokladů o Q. K důkazu existence neomezených řešení potřeboval podmínku $0 < m \leqq Q(t) \leqq M < \infty$. Za zvláštní zmínku stojí metoda, jíž Marko Švec použil: Nechť je $Q(t) \geqq 0$ pro $t \in R$ a nechť funkce Q není identicky rovna nule na žádném otevřeném intervalu. Předpokládejme ještě, že všechna řešení rovnice (1) oscilují pro $t \to \infty$. Nechť S je množina takových řešení u rovnice (1), že v každém nulovém bodě ϱ řešení u platí

$$\dot{u}(\varrho)\, \ddot{u}(\varrho)\, \dddot{u}(\varrho) \neq 0\,, \quad \operatorname{sgn} \dot{u}(\varrho) \neq \operatorname{sgn} \ddot{u}(\varrho) \neq \operatorname{sgn} \dddot{u}(\varrho)\,.$$

O množině S dokázal Marko Švec řadu výsledků, z nichž uvedeme

(2) $S \neq \emptyset$ a existují dvě lineárně nezávislá řešení, která patří do S.

(3) Je-li $u \in S$, pak $\dot{u}$ je omezená funkce pro $t \to \infty$ a platí $\int^\infty Q u^2 \,dt < \infty$, $\int^\infty \ddot{u}^2 \,dt < \infty$.

(4) Nechť w je triviální řešení rovnice (1). $S \cup \{w\}$ je množina řešení, jejichž první derivace je omezená pro $t \to \infty$. $S \cup \{w\}$ je lineární prostor dimense 2.

(5) Nechť platí $0 < m \leqq Q(t)$. Pak pro každé řešení $u \in S$ platí $\lim_{t \to \infty} u(t) = 0 = \lim_{t \to \infty} \dot{u}(t)$.

V pracích [10] a [11] je lineární diferenciální rovnice třetího řádu vyšetřována v souvislosti s vlastnostmi

(V_1) Má-li řešení u dvojnásobný nulový bod ϱ, pak $u(t) \neq 0$ pro $t < \varrho$.

(V_2) Má-li řešení u dvojnásobný nulový bod ϱ, pak $u(t) \neq 0$ pro $t > \varrho$.

Dokazuje, že rovnice třetího řádu má vlastnosti (V_1), (V_2) právě tehdy, má-li každé její řešení nejvýše dva nulové body (nebo jeden dvojnásobný) a to je ekvivalentní s možností vyjádřit příslušný diferenciální operátor jako superposici tří diferenciálních operátorů prvního řádu. Jsou nalezeny podmínky postačující k tomu, aby rovnice třetího řádu měla vlastnosti (V_1) nebo (V_2) a jsou nalezeny souvislosti těchto vlastností, vlastností koeficientů a asymptotických a oscilatorických vlastností řešení. Asymptotické vzorce pro řešení rovnice (1) (a také pro řešení obdobné rovnice třetího řádu) jsou odvozeny v [7]. Předpokládá se, že Q je hladká funkce, $Q(t) > 0$ pro $t \geqq a$, a že jistý integrál diverguje a jiné konvergují. Práce [7] tak zajímavým způsobem doplňuje práci [6].

V práci [16] je vyšetřena souvislost mezi oscilatorickými vlastnostmi lineární a nelineární diferenciální rovnice druhého řádu. Jsou nalezeny podmínky, které zaručují, že řešení nelineární diferenciální rovnice mají obdobné vlastnosti jako řešení lineární rovnice. V práci [20] je dokázáno, že rovnice

$$\ddot{y} = g(t, y)$$

má periodické řešení s periodou T; přitom se předpokládá, že funkce $g : R^2 \to R$ je spojitá, má periodu T vzhledem k proměnné t a platí

$$\int_0^y g(t, u)\, du \geqq \alpha^2 y^2 + C, \quad \alpha \neq 0.$$

Tento výsledek je odvozen variační metodou; autor užívá Ritzovy metody ke stanovení maxima funkcionálu

$$\int_0^T [-\dot{y}^2 - G(t, y)]\, dt,$$

kde $G(t, y) = \int_0^y g(t, u)\, du$ a dokazuje, že z posloupnosti přibližných řešení lze vybrat posloupnost s dobrými konvergenčními vlastnostmi.

V práci [9] jsou vyšetřeny oscilatorické vlastnosti řešení rovnice

$$y^{(n)} + f(t)\, y^\alpha = 0,$$

v pracích [3] a [4] je pojem disperse zavedený O. Borůvkou pro lineární diferenciální rovnice druhého řádu rozšířen a využit ke studiu vlastností rovnice (1) a obdobné rovnice vyššího řádu; jsou též vyšetřovány jisté okrajové úlohy a je dokázána existence soustavy vlastních funkcí. Polylokální okrajové úloze pro diferenciální rovnice a jejich soustavy je věnována práce [1]; jsou nalezeny velmi obecné podmínky pro existenci řešení.

Celek jednotný co do tématu i metody tvoří práce [12]–[15], [17]–[19]. Z nich nejstarší (podle data „došlo do redakce") je práce [15]. V ní je dokázáno, že rovnice

$$y^{(n)} + Q(t)\, y = 0 \tag{6}$$

má řešení u, které splňuje podmínky

$$(-1)^i\, u^{(i)}(t) > 0\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1\,, \tag{7}$$

$$\lim_{t\to\infty} u^{(i)}(t) = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,, \tag{8}$$

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 1 \tag{9}$$

jestliže funkce Q je nezáporná, není rovna identicky nule na žádném intervalu a

$$\int^{\infty} t^{n-1}\, Q(t)\, \mathrm{d}t = \infty\,.$$

Tento výsledek je rozšířen na rovnici

$$y^{(n)} + B(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})\, y = 0\,. \tag{10}$$

Přitom funkce B je vhodným způsobem majorizována. V důkazu se využije předchozího výsledku o rovnici (6): K dané funkci v existuje jediné řešení u rovnice

$$x^{(n)} + B(t, v, \dot{v}, \ldots, v^{(n-1)})\, x = 0$$

s vlastnostmi (7)–(9). Položíme $Tv = u$ a hledáme pevný bod zobrazení T; je přirozené, že se pracuje s příslušnými integrálními rovnicemi a že se aplikuje Schauderova věta o pevném bodě. Také ve zbývajících pracích této skupiny jde o rovnici (10), o existenci jejích řešení, která splňují jisté limitní podmínky pro $t \to \infty$ a případně také některé počáteční podmínky pro $t = 0$. Vždy se hledá pevný bod pro příslušný integrální operátor na neomezeném intervalu. Při přímém použití Schauderovy věty je třeba dokazovat, že jisté množiny funkcí definovaných na neomezeném intervalu jsou kompaktní. Marko Švec zavádí pojem q-konvergence, což je jistá forma bodové konvergence. Využívá toho, že operátory, které jsou odvozeny z vyšetřovaného problému pro rovnici (10), jsou na vhodných množinách funkcí spojité vzhledem ke q-konvergenci a zobrazují tyto množiny na množiny q-kompaktní. Tímto obratem se autor vyhnul značným technickým obtížím.

Rovnice

$$\dot{x} = Ax + f(t, x) \tag{11}$$

$$\dot{x} = Ax \tag{12}$$

budeme nazývat ekvivalentní, jestliže ke každému řešení u jedné z nich existuje takové řešení v té druhé rovnice, že

$$u(t) - v(t) \to 0 \quad \text{pro} \quad t \to \infty\,. \tag{13}$$

Podmínky pro ekvivalenci rovnic (11) a (12) hledal Marko Švec v pracích [21], [22]. Jako ukázku uveďme tento výsledek:

Nechť matice A je v Jordanově kanonickém tvaru, nechť p je maximum řádů těch bloků, že pro příslušné vlastní číslo je $\operatorname{Re} \lambda = 0$ a položme $p = 1$, jestliže takové bloky neexistují. Nechť platí

$$\|f(t, x)\| \leqq F(t, \|x\|)\,,$$

kde F je spojitá, nerostoucí vzhledem k druhé proměnné a nechť je

$$\int^{\infty} t^{p-1} F(t, c)\, \mathrm{d}t < \infty \quad \text{pro každé} \quad c \in R^{+}\,.$$

Potom ke každému omezenému řešení u rovnice (11) existuje takové řešení v rovnice (12), že platí (13). Obdobným postupem je nalezena obecná postačující podmínka pro asymptotickou ekvivalenci rovnic (11), (12). V práci [25] je problematika asymptotické ekvivalence spojena s asymptotickými vlastnostmi řešení, a jsou odvozeny postačující podmínky pro asymptotickou ekvivalenci obecných nelineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu. Výsledky jsou rozšířeny i na funkcionální diferenciální rovnice. Vlastnostem funkcionálních diferenciálních rovnic jsou věnovány práce [23], [24]. Je v nich vyšetřována existence $\lim\limits_{t \to T-0} x(t)$, kde x je řešení funkcionální diferenciální rovnice, jejíž pravá strana je definována pro $t < T$ a je vyřešena řada úloh (závislost limity na počáteční podmínce, existence řešení s předepsanou limitou).

Již tento stručný popis vědeckých publikací prof. Švece ukazuje, že je to dílo bohaté tématicky i metodicky. Obsahuje množství původních myšlenek a postupů. Je často citováno, je oceňováno odborníky doma i v zahraničí. Přineslo konečné řešení některých problémů a naopak dalo podnět řadě autorů k dalším výzkumům. V teorii obyčejných diferenciálních rovnic vyšších řádů hrají mimořádnou úlohu různé technické obraty (využívání identit, nerovností, odhady aj.); Marko Švec je mistrem v použití technických obratů, má však současně vzácnou schopnost objevovat obecné formulace a pracovat s nimi; právě toto spojení schopností téměř protikladných vede k výsledkům mimořádně hodnotným a zajímavým. Připomeňme v této souvislosti práci Marko Švece s vlastnostmi (E), (V_1), (V_2), tvrzení (F) či studium vlastností množiny S v práci [6], zavedení a využití q-konvergence.

Již více než 20 let vede prof. Švec seminář s tématikou obyčejných a funkcionálních diferenciálních rovnic. Tohoto semináře se pravidelně účastní vědečtí a pedagogičtí pracovníci a aspiranti nejen z Bratislavy, ale i z jiných středisek. Prof. Švec dal impuls k vzniku mnohých prací a svými radami, nápady ovlivnil mnoho pracovníků v tomto oboru. Vychoval řadu aspirantů, z nichž mnozí dosáhli pozoruhodných vědeckých výsledků a stali se známí i v zahraničí.

Prof. Švec se věnuje se zanícením pedagogicko-výchovné práci. Vychoval celou řadu inženýrů a absolventů přírodovědecké fakulty Univerzity Komenského a vzbudil u nich upřímný zájem o matematiku i o její aplikace v technické praxi i v přírodních vědách. Je spoluautorem rozsáhlé monografie *Matematika* I, II. V monografii jsou vyloženy ty partie matematiky, kterých se tradičně nejvíce užívá v technických oborech a kterým se učí na vysokých školách technického směru. O tom, jak citelnou mezeru vyplnila tato monografie v naší literatuře, svědčí opakovaná vydání.

Prof. Švec zastával a zastává řadu důležitých funkcí ve školství a ve vědeckém životě. Byl proděkanem elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické v letech 1956—58. Je členem vědecké rady přírodovědecké fakulty Univerzity Komenského, členem redakčních rad časopisů Acta matematica přírodovědecké fakulty Univerzity Komenského a Aplikace matematiky, předsedou komise matematické analýzy pro udělení titulu RNDr. Je členem celostátní komise pro obhajoby doktorských disertací v oboru diferenciální rovnice a aplikace analýzy, předsedou komise pro obhajoby kandidátských disertací v oboru matematická analýza a místopředsedou komise pro obhajoby kandidátských disertačních prací v oboru teorie vyučování matematice.

Všichni, kdo prof. Marka Švece poznali a zejména ti, kdo měli příležitost s ním spolupracovat a od něho se učit, mu srdečně blahopřejí k šedesátinám a přejí mu hodně zdraví a hodně úspěchů v činnosti vědecké i učitelské.

SEZNAM PŮVODNÍCH VĚDECKÝCH PRACÍ PROF. M. ŠVECE, DrSc.

[1] K problému jednoznačnosti integrálov systému lineárnych diferenciálnych rovníc. Mat.-fyz. sborník SAV, 1952, 3—22

[2] Über einige neue Eigenschaften der oszillatorischen Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung. Czech. Math. J., T. *4* (*79*), 1954, 75—94.

[3] Sur les dispersions des intégrales de l'équation $y^{(4)} + Q(x)\,y = 0$. Czech. Math. J., T. *5* (*80*), 1955, 26—60.

[4] Eine Eigenwertaufgabe der Differentialgleichung $y^{(n)} + Q(x, \lambda)\,y = 0$. Czech. Math. J., T. *6* (*81*), 1956, 46—71.

[5] Sur une propriété des inégrales de l'équation $y^{(n)} + Q(x)\,y = 0$, $n = 3, 4$. Czech. Math. J., T. *7* (*82*), 1957, 450—461.

[6] Sur le comportement asymptotique des intégrales de l'équation $y^{(4)} + Q(x)\,y = 0$. Czech. Math. J., T. *8* (*83*), 1958, 230—244.

[7] Asymptotische Darstellung der Lösungen der Differentialgleichung $y^{(n)} + Q(x)\,y = 0$, $n = 3, 4$. Czech. Math. J., T. *12*, (87), 1962, 572—581.

[8] On various properties of the solutions of third- and fourth-order linear differential equations. Equadiff 1962. Proceedings of the Conference held in Prague in September 1962, Differential Equations and Their Applications, 187—198.
[9] Le caractère oscillatoire des solutions de l'équation $y^{(n)} + f(x)\, y^{\alpha} = 0,\ n > 1$. Czech. Math. J., T. *13* (*88*) 1963, 481—491 (spolu s *I. Ličkem*).
[10] Neskol'ko zamečanij o linejnom differencialnom uravnenii tretego porjadka. Czech. Math. T. *15* (*90*), 1965, 42—49.
[11] Einige asymptotische und oszillatorische Eigenschaften der Differentialgleichung $y''' + A(x)\, y' + B(x)\, y = 0$. Czech. Math. J., T. *15* (*90*), 1965, 378—393.
[12] Fixpunktsatz und monotone Lösungen der Differentialgleichung $y^{(n)} + B(x, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})\, y = 0$. Archivum mathematicum (Brno), T. 2, 1966, 43—55.
[13] L'existence globale et les propriétes asymptotiques d'une équation différentielle non-linéaire d'ordre *n*. Archivum mathematicum (Brno), T. 2, 1966, 141—151.
[14] Les propriétes asymptotiques des solutions d'une équation différentielle non-linéaire d'ordre *n*. Czech. Math. J., T. *17*, (*92*), 1967, 550—557.
[15] Monotone solutions of some differential equations. Colloquium mathematicum, XVIII, 1967, 7—21.
[16] Some oscillatory properties of second order non-linear differential equations. Ann. Mat. Pura ed Appl. (IV), vol. *LXXVII*, 179—192, 1967.
[17] Investigation of the solutions of differential equations on an infinite interval and the fixed point theorems. Proc. of Equadiff. II (1966), Acta FRNUC, Mathematica 1967, 143—153.
[18] Remark on the asymptotic behaviour of the solutions of the differential equations. Acta FRNUC, Mathematica XXII, 1969, 11—18.
[19] Sur un problème aux limites. Czech. Math. J., T. *19* (*94*), 1969, 17—26.
[20] Existence of periodic solutions of differential equations of second order. G.E.O. Giacaglia (ed.), Periodic Orbits, Stability and Resonances, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland 1970, 168—175.
[21] Some remarks on the asymptotic equivalence. Proc. of Equadiff 3, Brno 1972, 155—160.
[22] Asymptotic relationship between solutions of two systems of differential equations. Czech. Math. J., T. *24* (*99*), 1974, 44—58.
[23] Some properties of functional differential equations. Bolletino U.M.I. (4) 11 Suppl. fasc. *3* (1975), 467—477.
[24] Some problems concerning the functional differential equations. Proceeding of Equadiff IV, Prague 1977, 405—414.
[25] Asymptotic equivalence and oscillatory properties of ordinary differential equations. Equazioni differenziali ordinarie ed equazioni funzionali convegno internazionale, Firenze 1978, 213—222.
[26] Behaviour of nonoscillatory solutions of some nonlinear differential equations, Acta facultatis RNUC, v tisku.

Hlavní knižní publikace prof. M. Švece, DrSc.

[1] *Kluvánek - Mišík - Švec:* Matematika I. Slov. vyd. techn. lit., str. 728, 1959 — 1. vydání, 1971 — 4. vydání.
[2] *Kluvánek - Mišík - Švec:* Matematika II. Slov. vyd. techn. lit., str. 856, 1961 — 1. vydání, 1970 — 3. vydání.

Popularizační práce

M. Kolibiar, M. Švec: Za akademikom Jur. Hroncom. Mat. fyz. čas. SAV, *X*. 2, 1960, 123—131.

OSLAVA OSMDESÁTÝCH NAROZENIN AKADEMIKA O. BORŮVKY

Dne 17. 5. 1979 uspořádala brněnská pobočka JČSMF slavnostní schůzi u příležitosti 80-tých narozenin význačného československého matematika akademika OTAKARA BORŮVKY. O životě a díle jubilanta promluvil doc. RNDr. FRANTIŠEK NEUMAN, CSc. Mezi četnými gratulanty byli akademik JOSEF NOVÁK, s pozdravnými dopisy Ústředního výboru JČSMF a kolegia matematiky ČSAV, prof. RNDr. JAROSLAV KURZWEIL, DrSc., čl. korespondent ČSAV, za MÚ ČSAV, doc. RNDr. IVAN KOLÁŘ, DrSc., za brněnskou pobočku MÚ ČSAV, prof. RNDr. MICHAL GREGUŠ, DrSc., za přírodovědeckou fakultu Komenského univerzity v Bratislavě, prof. RNDr. MIROSLAV LAITOCH, CSc., prorektor a prof. RNDr. LADISLAV SEDLÁČEK, CSc., děkan přírodovědecké fakulty, s pozdravnou adresou rektora University Palackého v Olomouci, doc. RNDr. JAN KUČÍREK, CSc., proděkan, s pozdravným dopisem děkana přírodovědecké fakulty Univerzity J. E. Purkyně v Brně a doc. RNDr. VÍTĚZSLAV NOVÁK, CSc., za obor matematika přírodovědecké fakulty UJEP.

Závěrem akademik O. Borůvka gratulantům poděkoval a se stovkou přítomných se podělil o své životní zkušenosti, vzpomenul na své velké učitele a zdůraznil významnou úlohu příznivých životních a pracovních podmínek.

František Neuman, Bedřich Půža, Brno

XXI. MMO

Dvacátá první mezinárodní matematická olympiáda se konala ve dnech 28. 6.—9. 7. 1979 ve Velké Británii za účasti 166 soutěžících ze 23 zemí: Belgie, Brazílie, Bulharska, Československa, Finska, Francie, Holandska, Izraele, Jugoslávie, Kuby, Lucemburska, Maďarska, NDR, NSR, Polska, Rakouska, Rumunska, Řecka, SSSR, Švédska, USA, Velké Británie a Vietnamu; Austrálie byla zastoupena pozorovatelem.

Československo vyslalo na MMO osmičlenné družstvo žáků gymnasií, vesměs vítězů III. kola naší domácí MO. Na mezinárodním foru si z nich nejlépe vedl JAN NEKOVÁŘ (gymnasium v Praze 2, tř. W. Piecka), který v soutěži neztratil ani bod a získal jednu z prvních cen. Čtyři další — JOSEF TKADLEC (g. Bílovec), RADAN KUČERA (g. Brno), JOZEF JIRÁSEK (g. Košice) a MIROSLAV CHLEBÍK (g. Čadca) — byli odměněni třetími cenami.

V neoficiálním pořadí družstev byl na prvním místě Sovětský svaz před Rumunskem a NSR, Československo bylo sedmé.

František Zítek, Praha

PROF. DR. FRANTIŠEK NOŽIČKA ČESTNÝM DOKTOREM HUMBOLTOVY UNIVERSITY

Na návrh vědecké rady Humboltovy university v Berlíně udělil dne 13. září 1979 její rektor B. Klein za vědeckou činnost v oboru matematiky profesoru matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university RNDr. FRANTIŠKU NOŽIČKOVI čestný doktorát Humboltovy university.

Redakce