Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

DER VERALLGEMEINERTE LJAPUNOVSCHE OSZILLATIONSSATZ

JIŘÍ HNILICA, Praha

(Eingegangen am 4. Oktober 1977)

In dieser Arbeit untersuchen wir die lineare homogene verallgemeinerte Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten (siehe [2])

$$\text{(H)} \qquad dx = d[A_\lambda]\, x\,,$$

wobei $x = (x_1, x_2)^*$ eine Vektorfunktion und $A_\lambda(s)$ eine 2×2-Matrix der Form

$$A_\lambda(s) = \begin{pmatrix} 0, & s \\ -\lambda\, \Phi(s), & 0 \end{pmatrix}$$

sind. Seien ferner Φ eine reelle Funktion mit lokal endlicher Variation im ganzen Interval $(-\infty, +\infty)$ und $\lambda \in C$ ein Parameter. Die Matrix $A_\lambda(s)$ der Gleichung (H) ist eine ω-periodische Funktion im „integralen" Sinn, d. h. es gibt soeine konstante 2×2-Matrix C_λ, dass die Gleichung

$$A_\lambda(s + \omega) - A_\lambda(s) = C_\lambda$$

für alle $s \in (-\infty, +\infty)$ gilt. Unter einer Lösung von (H) in einem Interval $\langle a, b \rangle$ verstehen wir soeine Funktion $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^* : \langle a, b \rangle \to R_2$, für welche die Gleichung $x(u) = x(t) + \int_t^u d[A_\lambda(s)]\, x(s)$ für alle $u, t \in \langle a, b \rangle$ gilt, wobei das Integral in der letzten Gleichung das Perron-Stieltjesche (oder äquivalent das Kurzweilsche) Integral ist (siehe [6]). Das so definierte System (H) ist eine Verallgemeinerung der Hill'schen Differentialgleichung mit einem multiplikativen Parameter λ, $\ddot{x} + \lambda\, p(t)\, x = 0$ (siehe [8]), wobei $p(t)$ eine in R definierte, ω-periodische und integrierbare Funktion ist. Wenn man $\Phi(s) = \int_a^s p(t)\, dt$ setzt, $a \in R$, dann ist die Gleichung (H) mit der entsprechenden Matrix $A_\lambda(s)$ der Hill'schen Differentialgleichung $\ddot{x} + \lambda\, p(t)\, x = 0$, äquivalent. Das System (H) erfüllt die Existenz- und Eindeutigkeitsbedingungen im ganzen Interval $(-\infty, +\infty)$ (siehe [1]). Für das System (H) gilt auch die Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Floquettheorie (siehe [1]) der im klassischen Fall gut bekannt ist.

In dieser Arbeit zeigen wir, dass die Verallgemeinerung des Ljapunovschen Oszillationssatzes (siehe [5]), der im klassischen Fall das Verhalten der Lösung der

Gleichung (H) in der Abhängigkeit vom Verlauf des Parameters λ ganz charakterisiert (siehe [5]), gilt. Zuerst beweisen wir einige Behauptungen. Der triviale Fall $\Phi(s) = $ $= \text{const}$ wird in der Arbeit ausgeschlossen. Eine wichtige Role hat bei der Untersuchung der Gleichung (H) die sog. charakteristische Funktion $A(\lambda)$ der Gleichung (H), die ähnlich wie im klassischen Fall definiert ist, d.h. $A(\lambda) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} X(\omega, \lambda)$, wobei $X(\omega, \lambda)$ die Monodromiematrix der Gleichung (H) ist. Es gilt folgendes Lemma.

Lemma 1. *Sei* $-1 < A(\lambda_0) < 1$ *für* $\lambda_0 \in R$. *Dann sind alle Lösungen der Gleichung* $\mathrm{d}x = \mathrm{d}[A_{\lambda_0}]\, x$ *beschränkt.*

Beweis. Nach Lemma 2 in [8] hat die charakteristische Gleichung der Monodromiematrix $X(\omega, \lambda_0)$ des Systems $\mathrm{d}x = \mathrm{d}[A_{\lambda_0}]\, x$ folgende Form

$$\varrho^2 - 2A(\lambda_0)\, \varrho + 1 = 0\,,$$

wobei $A(\lambda)$ die charakteristische Funktion des Systems (H) ist. Also ist es klar, dass es zwei komplexvereinigte Multiplikatoren ϱ_1, ϱ_2 der Gleichung $\mathrm{d}x = \mathrm{d}[A_{\lambda_0}]\, x$ gibt, so dass $|\varrho_1| = |\varrho_2| = 1$ ist. Nach Lemma 1 in [8] folgt, dass alle Lösungen des Systems (H) beschränkt sind; dass Lemma 1. ist bewiesen.

Lemma 2. *Sei* $X(t, \lambda)$, $X(0, \lambda) = E$ *die Fundamentalmatrix der Gleichung* (H). *Dann gibt es stetige Funktionen* $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$, *so dass folgende Abschätzungen gelten.*

(i) $\|X(t, \lambda)\| \leqq 2\, C_1(\lambda)\, e^{C_1(\lambda).C_2(\lambda)}$,

(ii) $\operatorname{var}(\langle 0, t\rangle; X(t, \lambda)) \leqq 4\, C_1(\lambda)\,.\, C_2(\lambda)\, e^{C_1(\lambda).C_2(\lambda)}$

für alle $t \in \langle 0, \omega\rangle$, $\lambda \in R$.

Beweis. Diese Ungleichungen ergeben wir leicht durch eine unmittelbare Anwendung des Satzes III. 1.11 von [1].

Satz 1. *Sei* $x(t, \lambda) = (x_1(t, \lambda), x_2(t, \lambda))$ *eine beliebige Lösung der Gleichung* (H). *Dann ist* $x(t, \lambda)$ *unendlich differenzierbar in* λ, *d.h. für jedes* $k \in N$ *gibt es* $x_1^{(k)}(t, \lambda)$, $x_2^{(k)}(t, \lambda)$, $t \in \langle 0, \omega\rangle$, $\lambda \in C$, *wobei der obere Index* $k \in N$, *die* k-*te Ableitung nach* $\lambda \in C$ *bezeichnet.*

Wenn wir $x^{(k)}(t, \lambda) = (x_1^{(k)}(t, \lambda), x_2^{(k)}(t, \lambda))$ *bezeichnen, dann ist* $x^{(k)}(t, \lambda)$ *eine Lösung der Gleichung*

(G) $$\mathrm{d}x^{(k)} = \mathrm{d}[A_\lambda]\, x^{(k)} + \mathrm{d}g_k\,,$$

wobei

$$g_k(t, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \displaystyle\int_0^t x_1^{(k-1)}(s, \lambda)\, \mathrm{d}\Phi(s) \end{pmatrix}$$

ist. Dabei ist die Anfangsbedingung $x^{(k)}(0, \lambda) = 0$, $\lambda \in C$ $t \in \langle 0, \omega\rangle$ *erfüllt.*

Bemerkung. Von (G) folgt, dass $x_1^{(k)}(t, \lambda) = \int_0^t x_2^{(k)}(s, \lambda)\, ds$ ist, also sind alle Funktionen $x_1^{(k)}(t, \lambda)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ im ganzen Interval $\langle 0, \omega \rangle$ für alle $\lambda \in C$ stetig.

Beweis. Sei $x(t, \lambda) = (x_1(t, \lambda), x_2(t, \lambda))$ eine beliebige Lösung der Gleichung (H). Offenbar können wir voraussetzen, dass für die Lösung $x(t, \lambda)$ die Anfangsbedingungen $x_1(0, \lambda) = 1$, $x_2(0, \lambda) = 0$ gelten. Mittels Induktion zeigen wir, dass alle Ableitungen $x_1^{(k)}(t, \lambda)$, $x_2^{(k)}(t, \lambda)$, $k \in N$, $t \in \langle 0, \omega \rangle$, $\lambda \in C$ existieren. Aus der Gleichung (H) ergibt sich

$$\begin{aligned} x_1(t, \lambda) &= 1 + \int_0^t x_2(s, \lambda)\, ds\,, \\ x_2(t, \lambda) &= -\lambda \int_0^t x_1(s, \lambda)\, d\Phi(s)\,, \quad t \in \langle 0, \omega \rangle\,, \quad \lambda \in C\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Sei $\lambda_0 \in C$ eine beliebige komplexe Zahl. Nach (1.1) gilt

$$\begin{aligned} \frac{x_1(t, \lambda) - x_1(t, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} &= \int_0^t \frac{x_2(s, \lambda) - x_2(s, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\, ds\,, \\ \frac{x_2(t, \lambda) - x_2(t, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} &= -\lambda \int_0^t \frac{x_1(s, \lambda) - x_1(s, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\, d\Phi(s) - \\ &\quad - \int_0^t x_1(s, \lambda_0)\, d\,\Phi(s)\,, \quad \lambda \in C\,, \quad \lambda \neq \lambda_0\,, \quad t \in \langle 0, \omega \rangle\,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Wenn wir $z(t, \lambda) = [x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)]/(\lambda - \lambda_0)$ bezeichnen, ergibt sich nach der Gleichung (1.2), dass $z(t, \lambda)$ eine Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} dz &= d[A_\lambda]\, z + dg\,, \\ g(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\int_0^t x_1(s, \lambda_0)\, d\Phi(s) \end{pmatrix}, \quad t \in \langle 0, \omega \rangle \end{aligned} \tag{1.3}$$

ist. Betrachten wir jetzt die verallgemeinerte Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dz &= d[A_{\lambda_0}]\, z + dg\,, \\ g(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\int_0^t x_1(s, \lambda_0)\, d\Phi(s) \end{pmatrix}, \quad t \in \langle 0, \omega \rangle\,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Nach dem Existenzsatz (siehe [1], III. 1.4 Theorem) bekommen wir, dass $z(t, \lambda)$, $z(0, \lambda) = 0$ und $z^*(t)$, $z^*(0) = 0$ Lösungen der Gleichungen (1.3) und (1.4) sind. Für deren Differenz ist

(1.5)
$$z(t, \lambda) - z^*(t) = \int_0^t d[A_\lambda(s)]\, (z(s, \lambda) - z^*(s)) + \int_0^t d[A_\lambda(s) - A_{\lambda_0}(s)]\, z^*(s)\,,$$

$t \in \langle 0, \omega \rangle$, $\lambda \in C$, $\lambda \neq \lambda_0$. Nach (1.5) sehen wir, dass die Funktion $w(t, \lambda) = z(t, \lambda) - z^*(t)$ eine Lösung der Anfangsaufgabe

(1.6)
$$dw = d[A_\lambda]\, w + dh\,,$$
$$h(t, \lambda) = \int_0^t d[A_\lambda(s) - A_{\lambda_0}(s)]\, z^*(s)\,,$$
$$w(0, \lambda) = 0$$

ist. Mit Hilfe des Satzes III. 2.14 in [1] erhalten wir folgende Beziehung

(1.7)
$$w(t, \lambda) = h(t, \lambda) - X(t, \lambda) \int_0^t d_s[X^{-1}(s, \lambda)]\, h(s, \lambda)\,,$$

wobei $X(t, \lambda)$ die Fundamentalmatrix der Gleichung (H) ist. Nach (1.7) gilt also die Abschätzung

(1.8)
$$\|w(t, \lambda)\| \leqq \|h(t, \lambda)\| + \|X(t, \lambda)\| \left\| \int_0^t d_s[X^{-1}(s, \lambda)]\, h(s, \lambda) \right\|.$$

Nach dem Abschätzungssatz für das Perron-Stieltjesche Integral (siehe [9], Kap. II) erhalten wir

(1.9)
$$\|h(t, \lambda)\| \leqq \sup_{s \in \langle 0, \omega \rangle} \|z^*(s)\| \operatorname{var}(\langle 0, t \rangle; A_\lambda(s) - A_{\lambda_0}(s))\,.$$

Da aber die Lösung $z^*(s)$ der Gleichung (1.4) endlicher Variation ist (siehe [1]), folgt nach (1.9) weiter

(1.10)
$$\|h(t, \lambda)\| \leqq C|\lambda - \lambda_0| \operatorname{var}(\langle 0, \omega \rangle; \Phi)\,,$$

wobei $C > 0$ eine Konstante ist. Seien $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$ die im Lemma 2 bestimmte Funktionen. Dann gilt folgende Ungleichung

(1.11)
$$\|X(t, \lambda)\| \leqq 2\, C_1(\lambda)\, e^{C_1(\lambda) \cdot C_2(\lambda)}\,, \quad t \in \langle 0. \omega \rangle\,, \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta_0\,,$$

wobei $\delta_0 > 0$ ist. Ähnlich wie (1.9) bekommen wir

(1.12)
$$\left\| \int_0^t d_s[X^{-1}(s, \lambda)]\, h(s, \lambda) \right\| \leqq \sup_{s \in \langle 0, \omega \rangle} \|h(s, \lambda)\| \operatorname{var}(\langle 0, t \rangle; X^{-1})\,.$$

Ferner ist nach Lemma 2.

(1.13)
$$\operatorname{var}(\langle 0, t \rangle; X^{-1}) \leqq 4\, C_1(\lambda)\, C_2(\lambda)\, e^{C_1(\lambda) \cdot C_2(\lambda)}\,.$$

Nun geben (1.10) (1.11), (1.12), (1.13) und (1.8) die Ungleichung

(1.14)
$$\|w(t, \lambda)\| \leqq C|\lambda - \lambda_0| \operatorname{var}(\langle 0, \omega \rangle; \Phi)\,.$$
$$\cdot\, [(1 + 8\, C_1^2(\lambda)\, C_2(\lambda))\, e^{2C_1(\lambda) \cdot C_2(\lambda)}]\,,$$

für jede $t \in \langle 0, \omega \rangle$. Nach der Definition der Funktion $w(t, \lambda)$ ist offenbar $x^{(1)}(t, \lambda_0) = z^*(t)$, $t \in \langle 0, \omega \rangle$. Jetzt gibt die Eindeutigkeit (siehe [1]), dass $x^{(1)}(t, \lambda_0)$ eine Lösung der Gleichung

$$dx^{(1)} = d[A_{\lambda_0}]\, x^{(1)} + dg\,,$$
$$x^{(1)}(0, \lambda_0) = 0$$

ist. Weil $\lambda_0 \in C$ beliebig gewählt wurde, bekommen wir die Gültigkeit des Satzes für $k = 1$.

Also setzen wir jetzt voraus, dass der Satz für $k \in N$ gilt. Wir zeigen die Gültigkeit des Satzes für $k + 1$. Nach der Induktionsvoraussetzung bekommen wir ähnlich wie im ersten Fall folgende Beziehung

$$(1.15) \qquad \frac{x_1^{(k)}(t, \lambda) - x_1^{(k)}(t, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \int_0^t \frac{x_2^{(k)}(s, \lambda) - x_2^{(k)}(s, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\, ds\,,$$

$$\frac{x_2^{(k)}(t, \lambda) - x_2^{(k)}(t, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = - \int_0^t \frac{x_1^{(k)}(s, \lambda) - x_1^{(k)}(s, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\, d\Phi(s) -$$
$$- \int_0^t \left[x_1^{(k)}(s, \lambda_0) + k\, \frac{x_1^{(k-1)}(s, \lambda) - x_1^{(k-1)}(s, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right] d\Phi(s)\,,$$

für $t \in \langle 0, \omega \rangle$, $\lambda \in C$, $\lambda \neq \lambda_0$, wobei $\lambda_0 \in C$ eine beliebig gewählte Zahl ist. Nach (1.15) folgt, dass

$$z(t, \lambda) = \frac{x^{(k)}(t, \lambda) - x^{(k)}(t, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}$$

die Lösung der Gleichung

$$(1.16) \qquad dz = d[A_\lambda]\, z + dg\,,$$

$$g(t, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ - \int_0^t \left[x_1^{(k)}(s, \lambda_0) + k\, \frac{x_1^{(k-1)}(s, \lambda) - x_1^{(k-1)}(s, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right] d\Phi(s) \end{pmatrix},$$

für $t \in \langle 0, \omega \rangle$, $\lambda \in C$, $\lambda \neq \lambda_0$ ist. Betrachten wir jetzt die Gleichung

$$(1.17) \qquad dz^* = d[A_{\lambda_0}]\, z^* + dg_{k+1}\,,$$

$$g_{k+1}(t, \lambda_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(k+1) \int_0^t x_1^{(k)}(s, \lambda_0)\, d\Phi(s) \end{pmatrix}.$$

Ähnlich wie im ersten Teil des Beweises zeigen wir, dass die Differenz $w(t, \lambda) = z(t, \lambda) - z^*(t)$ eine Lösung der Gleichung

(1.18) $$dw = d[A_\lambda]\, w + dh\,, \quad w(0, \lambda) = 0\,,$$

$$h(t, \lambda) = \int_0^t d[A_\lambda(s) - A_{\lambda_0}(s)]\, z^*(s) + H(t, \lambda)\,,$$

$$H(t, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \int_0^t \left[x_1^{(k)}(s, \lambda_0) - \dfrac{x_1^{(k-1)}(s, \lambda) - x_1^{(k-1)}(s, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right] d\Phi(s) \end{pmatrix}$$

für $t \in \langle 0, \omega \rangle$, $\lambda \in C$, $\lambda \neq \lambda_0$ ist. Durch gleiches Verfahren wie im ersten Fall erhalten wir die Abschätzung

(1.19) $$\|w(t, \lambda)\| \leqq \|h(t, \lambda)\| + \|X(t, \lambda)\| \,.\, \left\| \int_0^t d_s[X^{-1}(s, \lambda)]\, h(s, \lambda) \right\|,$$

$t \in \langle 0, \omega \rangle$, $\lambda \in C$, $\lambda \neq \lambda_0$, wobei $X(t, \lambda)$, $X(0, \lambda) = E$ die Fundamentalmatrix der Gleichung (H) ist. Nach (1.18) folgt

(1.20) $$\|h(t, \lambda)\| \leqq C|\lambda - \lambda_0| \operatorname{var}(\langle 0, \omega \rangle; \Phi) + \|H(t, \lambda)\|\,,$$

wobei $C > 0$ eine von λ unabhängige Konstante ist. Die Beziehung (1.18) gibt

(1.21)
$$\|H(t, \lambda)\| \leqq k \int_0^\omega \left| x_1^{(k)}(s, \lambda_0) - \frac{x_1^{(k-1)}(s, \lambda) - x_1^{(k-1)}(s, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right| d \operatorname{var}(\langle 0, s \rangle; \Phi)\,.$$

Mit der Hilfe des Osgoodschen Konvergenzsatzes (siehe [9]), erhalten wir

(1.22) $$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \|H(t, \lambda)\| = 0\,, \quad \text{gleichmässig in} \quad t \in \langle 0, \omega \rangle\,.$$

Also es folgt nach (1.20) und (1.22)

(1.23) $$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \|h(t, \lambda)\| = 0\,, \quad \text{gleichmässig in} \quad t \in \langle 0, \omega \rangle\,.$$

Im ersten Teil des Beweises wurde gezeigt, dass für die Fundamentalmatrix $X(t, \lambda)$ in der δ_0-Umgebung des Punktes λ_0 die Abschätzungen

(1.24) $$\|X(t, \lambda)\| \leqq C < \infty$$

(1.25) $$\operatorname{var}(\langle 0, t \rangle; X^{-1}(s, \lambda)) \leqq D < \infty$$

für $t \in \langle 0, \omega \rangle$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta_0$ gelten, wobei $C > 0$, $D > 0$ von λ unabhängige Konstanten sind. Mit Hilfe des Abschätzungssatzes für Integrale und nach (1.24) erhalten wir

(1.26) $$\|X(t, \lambda)\| \,.\, \left\| \int_0^t d_s[X^{-1}(s, \lambda)]\, h(s, \lambda) \right\| \leqq$$
$$\leqq C \int_0^t \|h(s, \lambda)\| \, d \operatorname{var}(\langle 0, s \rangle; X^{-1}(s, \lambda))\,.$$

Also nach (1.23) und (1.26) gilt folgendes:

(1.27) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass die Ungleichung

$$\|X(t, \lambda)\| \cdot \left\| \int_0^t \mathrm{d}_s[X^{-1}(s, \lambda)]\, h(s, \lambda) \right\| \leqq C \cdot \varepsilon \cdot \mathrm{var}\,(\langle 0, \omega \rangle; X^{-1}(s, \lambda)),$$

für alle $t \in \langle 0, \omega \rangle$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ gilt. Hiervon und von (1.25) folgt

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \|X(t, \lambda)\| \cdot \left\| \int_0^t \mathrm{d}_s[X^{-1}(s, \lambda)]\, h(s, \lambda) \right\| = 0, \tag{1.28}$$

für alle $t \in \langle 0, \omega \rangle$. Nach (1.28), (1.19) und (1.21) ist also offenbar $\lim_{\lambda \to \lambda_0} w(t, \lambda) = 0$, $t \in \langle 0, \omega \rangle$. Nach der Eindeutigkeit der Lösung und (1.17) ist es klar, dass $x^{(k+1)}(t, \lambda_0) = z^*(t)$ eine Lösung der Gleichung

$$\mathrm{d}x^{(k+1)} = \mathrm{d}[A_{\lambda_0}]\, x^{(k+1)} + \mathrm{d}g_{k+1}, \quad x^{(k+1)}(0, \lambda_0) = 0,$$

$$g_{k+1}(t, \lambda_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(k+1) \int_0^t x_1^{(k)}(s, \lambda_0)\, \mathrm{d}\Phi(s) \end{pmatrix}$$

ist. Weil $\lambda_0 \in C$ beliebig gewählt wurde, ist der Beweis des Satzes abgeschlosssen.

Bemerkung. Im ersten Teil des Beweises zeigten wir, dass $x(t, \lambda)$ die erste Ableitung nach $\lambda \in C$ hat. Also ist $x(t, \lambda)$ eine analytische Funktion von λ in der ganzen komplexen Ebene und dadurch ist es ersichltich, dass alle Ableitungen dieser Funktion von λ existieren.

Lemma 3. *Die charakteristische Funktion $A(\lambda)$ der Gleichung* (H) *ist eine anaytische Funktion.*

Beweis. Weil nach der Definition $A(\lambda) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} X(\omega, \lambda) = \frac{1}{2}(x_{11}(\omega, \lambda) + x_{22}(\omega, \lambda))$ ist, folgt die Behauptung unmittelbar von dem Satz 1.

Lemma 4. *Sei Φ eine monotone, von links stetige Funktion. Dann können wir die charakteristische Funktion $A(\lambda)$ in der Form*

$$A(\lambda) = 1 - A_1\lambda + A_2\lambda^2 - \ldots, \quad \lambda \in C$$

ausdrücken. Dabei gilt

a) $A_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ *für nichtfallendes Φ,*

b) $A_n < 0$, $n = 1, 2, \ldots$ *für nichtwachsendes Φ.*

Beweis. Wir beweisen lediglich die Behauptung a), der Beweis der Behauptung b) ist analogisch. Sei

$$X(t, \lambda) = \begin{pmatrix} x_1(t, \lambda), & y_1(t, \lambda) \\ x_2(t, \lambda), & y_2(t, \lambda) \end{pmatrix}, \quad X(0, \lambda) = E \tag{4.1}$$

die Fundamentalmatrix der Gleichung (H). Ähnlich wie im klassischen Fall kann man die Matrix $X(t, \lambda)$ durch die Reihe

$$X(t, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j(t, \lambda), \quad t \in \langle 0, \omega \rangle, \quad \lambda \in C \tag{4.2}$$

ausdrücken. Dabei konvergiert diese Reihe absolut und gleichmässig in $t \in \langle 0, \omega \rangle$ und $\lambda \in C$, $|\lambda| \leqq \Lambda$, wobei $\Lambda > 0$ eine beliebige Zahl ist. Ferner gilt

$$K_0(t, \lambda) = E, \tag{4.3}$$

$$K_j(t, \lambda) = \int_0^t \mathrm{d}[A_\lambda(s)]\, K_{j-1}(s, \lambda), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Von (4.2) und (4.3) bekommen wir durch eine Berechnung die Beziehung

$$X(t, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j\, V_j(t)\, \lambda^j, \tag{4.4}$$

wobei

$$V_j(t) = \begin{pmatrix} \varphi_j^1(t), & \psi_j^1(t) \\ \varphi_j^2(t), & \psi_j^2(t) \end{pmatrix}$$

dabei konvergiert die Reihe gleichmässig in t, λ für $t \in \langle 0, \omega \rangle$, $|\lambda| \leqq \Lambda$, $\Lambda > 0$. Die Funktionen $x(t, \lambda) = (x_1(t, \lambda), x_2(t, \lambda))$ und $y(t, \lambda) = (y_1(t, \lambda), y_2(t, \lambda))$ sind offenbar Lösungen der Gleichung (H). Nach (4.1) und (4.4) folgt

$$\begin{aligned} x(t, \lambda) &= \varphi_0(t) - \lambda\, \varphi_1(t) + \lambda^2\, \varphi_2(t) - \ldots, \\ y(t, \lambda) &= \psi_0(t) - \lambda\, \psi_1(t) + \lambda^2\, \psi_2(t) - \ldots, \end{aligned} \tag{4.5}$$

wobei $\varphi_j(t) = (\varphi_j^1(t), \varphi_j^2(t))$, $\psi_j(t) = (\psi_j^1(t), \psi_j^2(t))$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ ist. Nach der Definition der Lösung der Gleichung (H) erhalten wir

$$\begin{aligned} x_1(t, \lambda) &= 1 + \int_0^t x_2(s, \lambda)\, \mathrm{d}s, \\ x_2(t, \lambda) &= -\lambda \int_0^t x_1(s, \lambda)\, \mathrm{d}\Phi(s), \\ y_1(t, \lambda) &= \int_0^t y_2(s, \lambda)\, \mathrm{d}s, \\ y_2(t, \lambda) &= 1 - \lambda \int_0^t y_1(s, \lambda)\, \mathrm{d}\Phi(s). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Hiervon und von (4.5) ist

(4.7)
$$\varphi_0^1(t) \equiv 1\,,$$
$$\varphi_k^1(t) = \int_0^t \left(\int_0^s \varphi_{k-1}^1(u)\, \mathrm{d}\Phi(u) \right) \mathrm{d}s\,, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Dann gibt der Substitutionssatz und die Integration per-partes (siehe [1])

(4.8)
$$\varphi_0^1(t) \equiv 1\,,$$
$$\varphi_k^1(t) = \int_0^t (t - s)\, \varphi_{k-1}^1(s)\, \mathrm{d}\Phi(s)\,.$$

Durch dasselbe Verfahren ergibt sich die Beziehung

(4.9)
$$\psi_0^2(t) \equiv 1\,,$$
$$\psi_k^2(t) = \int_0^t (\Phi(t) - \Phi(s))\, \psi_{k-1}^2(s) \mathrm{d}\, s\,.$$

Weil $A(\lambda) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} X(\omega, \lambda)$ ist, folgt von (4.5), (4.8) und (4.9)

(4.10)
$$A(\lambda) = 1 - A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + \ldots\,, \quad \lambda \in C$$
$$A_n \;= \tfrac{1}{2}(\varphi_n^1(\omega) + \psi_n^2(\omega))\,, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Da nach der Voraussetzung die Funktion Φ nichtfallende ist, folgt mittels der Induktion von (4.8) und (4.9), dass $A_n > 0$ für jedes $n \in N$ ist. Also ist das Lemma 3. bewiesen.

In Weiteren werden wir die Frage der Nullstellen der charakteristischen Funktion $A(\lambda)$ untersuchen. Wir zeigen, dass die Funktion $A(\lambda)$ unendlich viele reelle und nur reelle Nullstellen hat.

Die Gleichung (H) können wir äquivalent in der folgenden Operatorform schreiben:

(H′)
$$Lx = \lambda Q x\,,$$

wobei

$$Lx = \begin{pmatrix} -\;x_2(t) - x_2(0)) \\ x_1(t) - x_1(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^t x_2(s)\, \mathrm{d}s \end{pmatrix},$$
$$Qx = \begin{pmatrix} \int_0^t x_1(s)\, \mathrm{d}\Phi(s) \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind. Betrachten wir die folgende Randwertaufgabe

(H″)
$$Lx = \lambda Q x\,, \quad x(\omega, \lambda) = \varrho x(0, \lambda)\,, \quad \varrho \in C\,, \quad |\varrho| = 1\,.$$

Lemma 5. *Sei Φ eine monotone Funktion. Dann kann die Randwertaufgabe* (H″) *nur abzählbar viele Eigenwerte haben. Alle diese Eigenwerte sind reell und können nur einen unendlicher Häufungspunkt haben.*

Beweis. Sei $X(t, \lambda)$ die Fundamental matrix der Gleichung (H). Dann können wir jede Lösung $x(t, \lambda)$ dieser Gleichung in der Form $x(t, \lambda) = X(t, \lambda)\, x(0, \lambda)$ schreiben. Die Aufgabe (H″) besitzt eine nichttriviale Lösung, wenn $\det(X(\omega, \lambda) - \varrho E) = 0$ ist. Nach Lemma 3 ist $X(\omega, \lambda)$ eine analytische Funktion in der Variablen λ. Also bilden die Nullstellen der Funktion $F(\lambda) = \det(X(\omega, \lambda) - \varrho E)$ eine abzählbare Menge, die nur unendliche Häufungspunkte haben kann.

Seien λ_1, λ_2 beliebige Eigenwerte der Aufgabe (H″) und seien $u(t, \lambda_1) = (u_1(t, \lambda_1), u_2(t, \lambda_1))$ und $v(t, \lambda_2) = (v_1(t, \lambda_2), v_2(t, \lambda_2))$ die zugehörende nichttriviale Lösungen. In Weiteren schreiben wir kurz nur u, v. Es gilt also $Lu = \lambda_1 Qu$, $u(\omega, \lambda_1) = \varrho\, u(0, \lambda_1)$ und $Lv = \lambda_2 Qv$, $v(\omega, \lambda_2) = \varrho\, v(0, \lambda_2)$. Wir drücken die Integrale

$$\int_0^\omega \mathrm{d}[(Lu)']\, \bar{v} \quad \text{und} \quad \int_0^\omega u'\, \mathrm{d}[\overline{Lv}]$$

aus (der Streifen bedeutet die komplexvereinigte Zahl und der Strich bedeutet den entsprechenden Zeilenvektor).

Mit Hilfe des Substitutionssatzes (siehe [1]) ergeben wir

$$\int_0^\omega \mathrm{d}[(Lu)']\, \bar{v} = -\int_0^\omega \mathrm{d}[u_2(t)]\, \bar{v}_1(t) + \int_0^\omega \mathrm{d}[u_1(t)]\, \bar{v}_2(t) - \int_0^\omega u_2(t)\, \bar{v}_2(t)\, \mathrm{d}t\,,$$

$$\int_0^\omega u'\, \mathrm{d}[\overline{Lv}] = -\int_0^\omega u_1(t)\, \mathrm{d}\bar{v}_2(t) + \int_0^\omega u_2(t)\, \mathrm{d}\bar{v}_1(t) - \int_0^\omega u_2(t)\, \bar{v}_2(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Hiervon und von der Integration per-partes erhalten wir

$$\int_0^\omega \mathrm{d}[(Lu)']\, \bar{v} - \int_0^\omega u'\, \mathrm{d}[\overline{Lv}] = u_1\bar{v}_2\big|_0^\omega - u_2\bar{v}_1\big|_0^\omega\,. \tag{5.1}$$

Weil u, v Lösungen der Randwertaufgabe (H″) sind, gilt

$$u_1(\omega) = \varrho\, u_1(0)\,, \quad u_2(\omega) = \varrho\, u_2(0)\,,$$
$$\bar{v}_1(\omega) = \bar{\varrho}\, \bar{v}_1(0)\,, \quad \bar{v}_2(\omega) = \bar{\varrho}\, \bar{v}_2(0)\,. \tag{5.2}$$

Dann folgt nach (5.1) und (5.2)

$$\int_0^\omega \mathrm{d}[(Lu)']\, \bar{v} - \int_0^\omega u'\, \mathrm{d}[\overline{Lv}] = 0\,. \tag{5.3}$$

Weil für die Funktionen u, v die Beziehungen $Lu = \lambda_1 Qu$ und $Lv = \lambda_2 Qv$ gelten, ist nach (5.3) und mit der Hilfe des Substitutionssatzes

$$(5.4) \qquad \int_0^\omega \mathrm{d}[(Lu')]\,\bar{v} = \lambda_1 \int_0^\omega u_1\bar{v}_1\,\mathrm{d}\Phi\,,$$

$$\int_0^\omega u'\,\mathrm{d}[\overline{Lv}] = \bar{\lambda}_2 \int_0^\omega u_1\bar{v}_1\,\mathrm{d}\Phi\,.$$

Hiervon folgt also

$$(5.5) \qquad (\lambda_1 - \bar{\lambda}_2)\int_0^\omega u_1\bar{v}_1\,\mathrm{d}\Phi = 0\,.$$

Legen wir in (5.5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, d.h. $u_1(t) = v_1(t)$, wir erhalten dann

$$(5.6) \qquad (\lambda - \bar{\lambda})\int_0^\omega (u_1(t))^2\,\mathrm{d}\Phi(t) = 0\,.$$

Durch eine kurze Berechnung können wir zeigen, dass $\int_0^\omega (u_1(t))^2\,\mathrm{d}\Phi(t) \neq 0$ ist (der Fall Φ = const war schon früher ausgeschlossen). Dann folgt nach (5.6) $\lambda = \bar{\lambda}$, also ist λ eine reelle Zahl und dadurch ist das Lemma 5. bewiesen.

Folgerung. Sei Φ eine monotone Funktion. Dann hat die Funktion $A(\lambda) - \alpha$, wobei $A(\lambda)$ die charakteristische Funktion der Gleichung (H) und α eine reelle Zahl $-1 \leqq \alpha \leqq 1$ sind, nur reelle Nullstellen.

Beweis. Es ist offenbar, dass eine beliebige Nullstelle λ_0 der Funktion $A(\lambda) - \alpha$ gleichzeitig ein Eigenwert der Randwertaufgabe (H″) ist. Die Behauptung folgt nun unmittelbar vom Lemma 5.

In weiterem Satz zeigen wir eine interesante geometrische Eigenschaft der Funtion $A(\lambda)$.

Satz 2. *Seien Φ eine monotone Funktion und $A(\lambda)$ die charakteristische Funktion der Gleichung* (H). *Sei $\lambda_0 \in R$ ein Stationärpunkt der Funktion $A(\lambda)$, d.h. $\dot{A}(\lambda_0) = 0$. Dann gilt*

a) $|A(\lambda_0)| \geqq 1$,

b) $A(\lambda_0)\,.\,\ddot{A}(\lambda_0) < 0$,

wobei wir mit dem Punkt die Ableitung nach der Variablen λ bezeichnen.

Beweis. Offenbar können wir ohne weiteres voraussetzen, dass Φ eine nichtfallende Funktion ist. Sei $X(t, \lambda) = (x_{ij}(t, \lambda))_{i,j=1,2}$, $X(0, \lambda) = E$ die Fundamentalmatrix der Gleichung (H). Es gilt also

$$(2.1) \qquad x_{11}(t, \lambda) = 1 + \int_0^t x_{21}(s, \lambda)\,\mathrm{d}s\,,$$

$$x_{12}(t, \lambda) = \int_0^t x_{22}(s, \lambda)\,\mathrm{d}s\,,$$

$$x_{21}(t, \lambda) = -\lambda \int_0^t x_{11}(s, \lambda)\, \mathrm{d}\Phi(s),$$

$$x_{22}(t, \lambda) = 1 - \lambda \int_0^t x_{12}(s, \lambda)\, \mathrm{d}\Phi(s).$$

Die Funktionen $x^1(t, \lambda) = (x_{11}(t, \lambda), x_{21}(t, \lambda))$, $x^2(t, \lambda) = (x_{12}(t, \lambda), x_{22}(t, \lambda))$ sind also Lösungen der Gleichung (H). Nach dem Satz 1 gelten für die Ableitungen $\dot{x}^1(t, \lambda)$, $\dot{x}^2(t, \lambda)$ dieser Funktionen nach λ die Gleichungen

$$\text{(2.2)} \qquad \mathrm{d}\dot{x}^1 = \mathrm{d}[A_\lambda]\, \dot{x}^1 + \mathrm{d}H^1, \quad \dot{x}^1(0, \lambda) = 0,$$

$$H^1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\int_0^t x_{11}(s, \lambda)\, \mathrm{d}\Phi(s) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{d}\dot{x}^2 = \mathrm{d}[A_\lambda]\, \dot{x}^2 + \mathrm{d}H^2, \quad \dot{x}^2(0, \lambda) = 0,$$

$$H^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\int_0^t x_{12}(s, \lambda)\, \mathrm{d}\Phi(s) \end{pmatrix},$$

für $t \in \langle 0, \omega)$ und $\lambda \in C$. Wenn wir die Lösungen $\dot{x}^1(t, \lambda)$ und $\dot{x}^2(t, \lambda)$ mit der Hilfe der Formel für die Variation der Konstanten (siehe [1]) ausdrücken, ergibt sich nach (2.2) die Gleichung

$$\text{(2.3)} \qquad \begin{pmatrix} \dot{x}_{11}(t, \lambda) \\ \dot{x}_{21}(t, \lambda) \end{pmatrix} = H^1(t) - X(t, \lambda) \int_0^t \mathrm{d}[X^{-1}(s, \lambda)]\, H^1(s),$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{12}(t, \lambda) \\ \dot{x}_{22}(t, \lambda) \end{pmatrix} = H^2(t) - X(t, \lambda) \int_0^t \mathrm{d}[X^{-1}(s, \lambda)]\, H^2(s).$$

Nach Lemma 2 in [8] ist $\det X(t, \lambda) = 1$, also gilt

$$\text{(2.4)} \qquad X^{-1}(t, \lambda) = \begin{pmatrix} x_{22}(t, \lambda), & -x_{12}(t, \lambda) \\ -x_{21}(t, \lambda), & x_{11}(t, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Durch eine Berechnung können wir zeigen, dass folgendes gilt:

$$\text{(2.5)} \qquad \dot{X}(t, \lambda) = X(t, \lambda) \,.\, \Omega(t, \lambda),$$

wobei

$$\Omega(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \int_0^t x_{11} \,.\, x_{12}\, \mathrm{d}\Phi, & \int_0^t (x_{12})^2\, \mathrm{d}\Phi \\ -\int_0^t (x_{11})^2\, \mathrm{d}\Phi, & -\int_0^t x_{11} \,.\, x_{12}\, \mathrm{d}\Phi \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\Omega(t, \lambda)$ können wir in der Form

$$\Omega(t, \lambda) = J \,.\, P(t, \lambda) \tag{2.6}$$

schreiben, wobei

$$J = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$P(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \int_0^t (x_{11})^2 \,\mathrm{d}\Phi, & \int_0^t x_{11} \,.\, x_{12} \,\mathrm{d}\Phi \\ \int_0^t x_{11} \,.\, x_{12} \,\mathrm{d}\Phi, & \int_0^t (x_{12})^2 \,\mathrm{d}\Phi \end{pmatrix}$$

ist. Also ist $P(t, \lambda) = (p_{ij}(t, \lambda))_{i,j=1,2}$ eine symmetrische Matrix. Nach dem Satz 1. und nach (2.5) ergibt sich, dass für die zweite Ableitung $\ddot{X}(t, \lambda)$ der Fundamentalmatrix

$$\ddot{X}(t, \lambda) = X(t, \lambda)\,(\Omega^2(t, \lambda) + \dot{\Omega}(t, \lambda)) \tag{2.7}$$

gilt. Durch kurze Berechnung erhalten wir dann, dass die Gleichung

$$\begin{aligned} \ddot{X}(t, \lambda) &= X(t, \lambda)\,(-\delta(t, \lambda)\, E + \dot{\Omega}(t, \lambda))\,, \\ \delta(t, \lambda) &= \det P(t, \lambda) \end{aligned} \tag{2.8}$$

gilt. Im Weiteren werden wir einfach $P(t, \lambda) = \int_0^t Q(s, \lambda)\,\mathrm{d}\Phi(s)$ schreiben, wobei

$$Q(s, \lambda) = \begin{pmatrix} (x_{11}(s, \lambda))^2, & x_{11}(s, \lambda) \,.\, x_{12}(s, \lambda) \\ x_{11}(s, \lambda) \,.\, x_{12}(s, \lambda), & (x_{12}(s, \lambda))^2 \end{pmatrix}$$

ist. So werden auch andere Integrale einer Matrixfunction „nach der Funktion Φ" bezeichnet. Sei $\lambda_0 \in R$ eine beliebige reelle Zahl. Für den Differenzanteil gilt

$$\frac{1}{h}\,[P(t, \lambda_0 + h) - P(t, \lambda_0)] = \int_0^t \frac{Q(s, \lambda_0 + h) - Q(s, \lambda_0)}{h}\,\mathrm{d}\Phi(s)\,. \tag{2.9}$$

Hiervon und nach dem Osgoodschen Konvergenzsatz (siehe [9]) erhalten wir

$$\dot{P}(t, \lambda_0) = \int_0^t \dot{Q}(s, \lambda_0)\,\mathrm{d}\Phi(s)\,, \quad t \in \langle 0, \omega \rangle\,. \tag{2.10}$$

Wenn wir die Matrix $Q(s, \lambda)$ in der Form $Q(s, \lambda) = X'(s, \lambda)\, R\, X(s, \lambda)$, ausdrücken, wobei $R = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$ ist, dann folgt nach (2.10)

$$\dot{P}(t, \lambda) = \int_0^t \dot{X}'(s, \lambda)\, R\, X(s, \lambda)\,\mathrm{d}\Phi(s) + \int_0^t X'(s, \lambda)\, R\, \dot{X}(s, \lambda)\,\mathrm{d}\Phi(s)\,, \tag{2.11}$$

für $t \in \langle 0, \omega \rangle$, $\lambda \in R$, wobei der Strich die transponierte Matrix bezeichnet. Die Beziehungen (2.5) und (2.6) geben

$$\dot{X}(s, \lambda) = X(s, \lambda) J \int_0^s X'(\tau, \lambda) R X(\tau, \lambda) \, d\Phi(\tau), \tag{2.12}$$

$$\dot{X}'(s, \lambda) = -\int_0^s X'(\tau, \lambda) R X(\tau, \lambda) \, d\Phi(\tau) \, . \, J X'(s, \lambda).$$

Also wir haben nach (2.11) und (2.12) den folgenden Ausdruck für die Matrix $\dot{P}(t, \lambda)$:

$$\dot{P}(t, \lambda) = \int_0^t \left[\int_0^s (Q(s, \lambda) J Q(\tau, \lambda) - Q(\tau, \lambda) J Q(s, \lambda)) \, d\Phi(\tau) \right] d\Phi(s). \tag{2.13}$$

Durch direkte Berechnung können wir feststellen, dass für das Element $\dot{p}_{12}(t, \lambda)$ der Matrix $\dot{P}(t, \lambda)$ die Gleichnung

$$\dot{p}_{12}(t, \lambda) = \int_0^t d\Phi(s) \left[\int_0^s (x_{11}(s, \lambda))^2 (x_{12}(\tau, \lambda))^2 - \right. \tag{2.14}$$

$$\left. - (x_{11}(\tau, \lambda))^2 (x_{12}(s, \lambda))^2 \, d\Phi(\tau) \right].$$

gilt. Hiervon erhalten wir mit Hilfe der Dirichletschen Formel (siehe [9]) die Beziehung

$$\dot{p}_{12}(t, \lambda) = \int_0^t (x_{12}(\tau, \lambda))^2 \left[\int_\tau^t (x_{11}(s, \lambda))^2 \, d\Phi(s) - \right. \tag{2.15}$$

$$\left. - \int_0^\tau (x_{11}(s, \lambda))^2 \, d\Phi(s) \right] d\Phi(\tau),$$

für $t \in \langle 0, \omega \rangle$ und $\lambda \in R$.

Jetzt werden wir die Eigenschaften der charakteristischen Funktion $A(\lambda)$ der Gleichung (H) untersuchen. Von (2.5) und (2.6) folgt

$$\dot{A}(\lambda) = \tfrac{1}{2} \operatorname{Tr} \dot{X}(\omega, \lambda) = \tfrac{1}{2} \operatorname{Tr}[X(\omega, \lambda) J P(\omega, \lambda)], \tag{2.16}$$

$$\ddot{A}(\lambda) = \tfrac{1}{2} \operatorname{Tr} \ddot{X}(\omega, \lambda) = \tfrac{1}{2} \operatorname{Tr}[X(\omega, \lambda)(-\delta(\omega, \lambda) E + \dot{\Omega}(\omega, \lambda))].$$

Sei $\lambda_0 \in R$ ein beliebiger Stationärpunkt der Funktion $A(\lambda)$, d.h. es gelte $\dot{A}(\lambda_0) = 0$. Also ist nach (2.16)

$$\operatorname{Tr}(X_0 J P_0) = 0, \quad \text{wobei } X_0 = X(\omega, \lambda_0) \text{ und } P_0 = P(\omega, \lambda_0). \tag{2.17}$$

Weil P_0 eine symmetrische Matrix ist, gibt es soeine orthogonale Transformation T, dass die Matrix $\bar{P}_0 = T^{-1} P_0 T$ eine diagonale Matrix ist. Es ist sofort ersichtlich, dass durch diese Transformation die charakteristische Funktion $A(\lambda)$ sich nicht ändert. Die Matrix $\bar{X}(\omega, \lambda) = T^{-1} X(\omega, \lambda) T$ ist offenbar wieder eine Monodromiematrix der Gleichung (H). Ferner gilt nach (2.5) und (2.6) die Beziehung

$$\dot{\bar{X}}(\omega, \lambda) = \bar{X}(\omega, \lambda)(T^{-1}JT)\bar{P}, \tag{2.18}$$

wobei $\bar{P} = T^{-1} P(\omega, \lambda) T$ wieder eine symmetrische Matrix ist. Weil die Eigenvektoren der Matrix P_0 gegenseitig orthogonal sind, können wir die Transformation T so wählen, dass die Gleichungen

$$\bar{P}_0 = \begin{pmatrix} \varrho_1, & 0 \\ 0, & \varrho_2 \end{pmatrix}$$

und $T^{-1}JT = J$ gelten. Dabei sind ϱ_1, ϱ_2 reelle Eigenwerte. Offenbar gilt $\det P_0 = \det \bar{P}_0$ und $\operatorname{Tr} P_0 = \operatorname{Tr} \bar{P}_0$. Hiervon folgt (wir bezeichnen $p_1 = p_{11}(\omega, \lambda_0)$, $p_2 = p_{22}(\omega, \lambda_0)$ und $p = p_{12}(\omega, \lambda_0) = p_{21}(\omega, \lambda_0)$)

$$\begin{aligned} p_1 p_2 - p^2 &= \varrho_1 \varrho_2, \\ p_1 + p_2 &= \varrho_1 + \varrho_2. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Für die Elemente p_1, p_2 und p gilt nach (2.6)

$$\begin{aligned} p_1 &= \int_0^\omega (x_{11}(t, \lambda_0))^2 \, d\Phi(t), \\ p_2 &= \int_0^\omega (x_{12}(t, \lambda_0))^2 \, d\Phi(t), \\ p &= \int_0^\omega x_{11}(t, \lambda_0) \, . \, x_{12}(t, \lambda_0) \, d\Phi(t). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Die Benützung der Cauchyungleichung liefert die Ungleichungen

$$\det P_0 > 0, \quad p_1 > 0, \quad p_2 > 0$$

und also ist

$$\varrho_1 > 0, \quad \varrho_2 > 0. \tag{2.21}$$

Von den vorgehenden Betrachtungen folgt, dass wir im Weiteren

$$P_0 = \begin{pmatrix} p_1, & 0 \\ 0, & p_2 \end{pmatrix}, \quad p_1 > 0, \quad p_2 > 0 \tag{2.22}$$

voraussetzen können. Weil $\operatorname{Tr}(X_0 J P_0) = 0$ ist, folgt von (2.22)

$$-x_{12}(\omega, \lambda_0) \, p_1 + x_{21}(\omega, \lambda_0) \, p_2 = 0. \tag{2.23}$$

Also geben (2.22) und (2.23) sofort

$$x_{12}(\omega, \lambda_0) \, x_{21}(\omega, \lambda_0) \geqq 0. \tag{2.24}$$

Nachdem det $X(\omega, \lambda_0) = 1$ ist, ergibt sich nach (2.24)

$$x_{11}(\omega, \lambda_0)\, x_{22}(\omega, \lambda_0) \geqq 1\,. \tag{2.25}$$

Hiervon und von (2.24) folgt ferner die Ungleichung

$$|x_{11}(\omega, \lambda_0) + x_{22}(\omega, \lambda_0)| = |x_{11}(\omega, \lambda_0)| + |x_{22}(\omega, \lambda_0)| \geqq$$
$$\geqq 2\sqrt{|x_{11}(\omega. \lambda_0)|}\sqrt{|x_{22}(\omega, \lambda_0)|} \geqq 2\,.$$

Für den Stationärpunkt λ_0 der Funktion $A(\lambda)$ gilt also

$$|A(\lambda_0)| \geqq 1\,, \tag{2.26}$$

dadurch ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Jetzt zeigen wir, dass ein Stationärpunkt $\lambda_0 \in R$ der Funktion $A(\lambda)$ ein lokales Maximum gibt, solange $A(\lambda_0) \geqq 1$, bzw. ein lokales Minimum, solange $A(\lambda_0) \leqq -1$ ist. Wir unterscheiden zwei Fälle, $A(\lambda_0) = \pm 1$ und dann $|A(\lambda_0)| > 1$.

a) Sei $A(\lambda_0) = \pm 1$, zum B. $A(\lambda_0) = 1$. Dann gilt $x_{11}(\omega, \lambda_0) + x_{22}(\omega, \lambda_0) = 2$. Die Ungleichung $(x_{11}(\omega, \lambda_0) - 1)^2 \leqq 0$, die von der Beziehung (2.25) folgt, liefert unmittelbar die Gleichungen

$$x_{11}(\omega, \lambda_0) = x_{22}(\omega, \lambda_0) = 1 \tag{2.27}$$

und also ist

$$x_{12}(\omega, \lambda_0) \,.\, x_{21}(\omega, \lambda_0) = 0\,. \tag{2.28}$$

Hiervon und von (2.22) und (2.23) haben wir

$$x_{12}(\omega, \lambda_0) = 0 = x_{21}(\omega, \lambda_0)\,, \tag{2.29}$$

es ist also $X_0 = X(\omega, \lambda_0) = E$. Nach (2.16) gilt ferner die Gleichung $\ddot{A}(\lambda_0) = = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}[-\delta(\omega, \lambda_0)\, E + \dot{\Omega}(\omega, \lambda_0)]$ and hiervon bekommen wir sofort die Ungleichung

$$\ddot{A}(\lambda_0) = -\delta(\omega, \lambda_0) = -p_1 p_2 < 0\,.$$

Die Beweisführung im restlichen Fall $A(\lambda_0) = -1$ ist dieselbe.

b) Sei $A(\lambda_0) > 1$ (der Fall $A(\lambda_0) < -1$ ist analogisch). Die Eigenwerte ϱ_1, ϱ_2 der Matrix X_0 können wir durch die Formel

$$\varrho_{1,2} = A(\lambda_0) \pm \sqrt{(A(\lambda_0)^2 - 1)} \tag{2.30}$$

ausdrücken. Hiervon sind die Ungleichungen $0 < \varrho_1 < 1 < \varrho_2$, $\varrho_2 = 1/\varrho_1$ ersichtlich. Es gibt also eine Transformation L, so dass $L^{-1}X_0L$ eine diagonale Matrix ist. Wir können also voraussetzen, dass die Matrix X_0 der Form

$$X_0 = \begin{pmatrix} \varrho_1, & 0 \\ 0, & \varrho_2 \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

ist. Nach (2.16) und (2.31) ergibt sich

$$0 = \dot{A}(\lambda_0) = (\varrho_1 - \varrho_2)\, p_{12}(\omega, \lambda_0)\,. \tag{2.32}$$

Hiervon folgt unmittelbar

$$p_{12}(\omega, \lambda_0) = 0\,. \tag{2.33}$$

Eine analogische Berechnung gibt ferner, dass

$$\ddot{A}(\lambda_0) = \tfrac{1}{2}[-\delta(\omega, \lambda_0)(\varrho_1 + \varrho_2) + \dot{p}_{12}(\omega, \lambda_0)(\varrho_1 - \varrho_2)] \tag{2.34}$$

gilt. Hiervon erhalten wir sofort die Gleichung

$$\ddot{A}(\lambda_0) = \tfrac{1}{2}[-(\varrho_1 + \varrho_2)\, p_{11}(\omega, \lambda_0)\, p_{22}(\omega, \lambda_0) + (\varrho_1 - \varrho_2)\, \dot{p}_{12}(\omega, \lambda_0)]\,. \tag{2.35}$$

Weil Φ eine nichtfallende Funktion ist, erhalten wir nach (2.15) die Ungleichung

$$\dot{p}_{12}(\omega, \lambda_0) \leqq p_{11}(\omega, \lambda_0)\, p_{22}(\omega, \lambda_0)\,. \tag{2.36}$$

Hiervon und von (2.35) folgt also, dass $\ddot{A}(\lambda_0) < 0$ ist. Dadurch ist auch im zweiten Fall gezeigt, dass die zubeweisende Ungleichung gilt. Der Satz ist so bewiesen.

Lemma 6. *Sei Φ eine monotone von links stetige Funktion. Dann hat die charakteristische Funktion $A(\lambda)$ der Gleichung* (H) *unendlich viele reelle und nur reelle Nullstellen. Die Folge dieser Nullstellen strebt zu $\lambda_0 = \infty$.*

Beweis. Nach Lemma 5 genügt es zu zeigen, dass die Funktion $A(\lambda)$ unendlich viele Nullstellen hat. Diese Behauptung beweisen wir mittels des Hadamardschen Satzes über die Entwicklung einer analytischen Funktion in ein unendliches Produkt (siehe [3], Kap. VII, Satz 10.1). Wir zeigen, dass die Ordnung der Funktion $A(\lambda)$ höchstens $\frac{1}{2}$ sein kann. Es ist leicht zu zeigen, dass die charakteristische Funktion $\bar{A}(\lambda)$ der Gleichung

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}[\bar{A}_\lambda]\, x, \quad \bar{A}_\lambda(s) = \begin{pmatrix} 0, & \sqrt{(\lambda)}\, s \\ -\sqrt{(\lambda)}\, \Phi(s), & 0 \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

und die charakteristische Funktion $A(\lambda)$ der Gleichung (H) gleichartig sind. Die Lösung $\bar{x}(t, \lambda)$, $\bar{x}(0, \lambda) = x_0$ der Gleichung (6.1) erfüllt die Abschätzung

$$\|\bar{x}(t, \lambda)\| \leqq \|x_0\| + \int_0^t \|\bar{x}(s, \lambda)\|\, \mathrm{d}\, \mathrm{var}\,(\langle 0, s\rangle; \bar{A}_\lambda)\,. \tag{6.2}$$

Nach der Voraussetzung sind die Funktionen $\bar{A}_\lambda(s)$ und $\mathrm{var}\,(\langle 0, s\rangle; \bar{A}_\lambda)$ von links stetig. Die Benützung des Satzes I. 4.30 in [1] liefert die Ungleichung

$$\|\bar{x}(t, \lambda)\| \leqq \|x_0\| \,.\, e^{\mathrm{var}(\langle 0, t\rangle; \bar{A}_\lambda)}\,. \tag{6.3}$$

Hiervon ist gleich zu sehen, dass die Ungleichung

$$|\bar{A}(\lambda)| \leqq e^{\operatorname{var}(\langle 0,\omega\rangle;\bar{A}_\lambda)}$$

gilt und also ist

$$(6.4) \qquad |A(\lambda)| \leqq e^{C\sqrt{|\lambda|}},$$

wobei

$$C = (\omega + \operatorname{var}(\langle 0, \omega\rangle; \Phi) < \infty .$$

Die Ordnung der Funktion $A(\lambda)$ ist also höchstens $\frac{1}{2}$ und der Hadamardsche Satz gibt die Produktzerlegung

$$A(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - \lambda/\lambda_j),$$

wobei λ_j, $j = 1, 2, \ldots$ die Nullstellen der Funktion $A(\lambda)$ sind. Nach Lemma 4. ist es offenbar, dass die Funktion $A(\lambda)$ unendlich verschiedene Nullstellen besitzt. Das Lemma ist bewiesen.

Der verallgemeinerte Ljapunovsche Oszillationssatz. *Sei Φ eine reelle, nicht fallende Funktion, die im ganzen Interval $(-\infty, +\infty)$ definiert ist. Ist weiter $\Phi(t + \omega) - \Phi(t) = c$, für alle $t \in (-\infty, +\infty)$, wo $\omega > 0$ und $c \in R$ Konstanten sind, so gibt es eine Folge*

$$0 = \Lambda_0 < \lambda_1 \leqq \Lambda_1 < \lambda_2 \leqq \Lambda_2 < \ldots \to \infty$$

so dass für $\lambda \in (\Lambda_i, \lambda_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots$ alle Lösungen der Gleichung

$$(\mathrm{H}) \qquad \mathrm{d}x = \mathrm{d}[A_\lambda]\, x\,, \quad A_\lambda(s) = \begin{pmatrix} 0, & s \\ -\lambda\, \Phi(s), & 0 \end{pmatrix}$$

beschränkt sind.

Beweis. Wir zeigen, dass man voraussetzen kann, dass die Funktion Φ von links stetig ist. Sei Φ eine beliebige Funktion, welche die Voraussetzungen unseres Satzes erfüllt. Betrachten wir die Gleichung

$$(\tilde{\mathrm{H}}) \qquad \mathrm{d}x = \mathrm{d}[\tilde{A}_\lambda]\, x\,, \quad \tilde{A}_\lambda(s) = \begin{pmatrix} 0, & s \\ -\lambda\, \tilde{\Phi}(s), & 0 \end{pmatrix},$$

wo

$$\tilde{\Phi}(s) = \lim_{u \to s-} \Phi(u)$$

ist.

Seien $\tilde{x}(t, \lambda) = (\tilde{x}_1(t, \lambda), \tilde{x}_2(t, \lambda))$ und $x(t, \lambda) = (x_1(t, \lambda), x_2(t, \lambda))$ Lösungen der Gleichungen $(\tilde{\mathrm{H}})$, bzw. (H). Die Definition der Lösung der Verallgemeinerten Differentialgleichungen gibt unmittelbar, dass $x_1(t, \lambda) = \tilde{x}_1(t, \lambda)$, $t \in R$, $\lambda \in C$ ist. Ferner ist

$$x_2(t, \lambda) - \tilde{x}_2(t, \lambda) = \int_0^t x_1(s, \lambda)\, \mathrm{d}[\Phi(s) - \tilde{\Phi}(s)] = x_1(t, \lambda)\, [\Phi(t) - \tilde{\Phi}(t_-)]$$