Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

ADJUNKTIONSFÄHIGE ZWEIDIMENSIONALE KUGEL- UND LINIENMANNIGFALTIGKEITEN IM DREIDIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUM

ZDENĚK VANČURA, Praha

(Eingegangen am 16. Mai 1977)

Im vorgelegten Artikel, der mit [11], [12], [13] eng zusammenhängt, versuchen wir den Begriff von adjunktionsfähigen bzw. adjunktionsunfähigen zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum zweckmässig zu definieren und systematisch zu studieren*).

Definition 1. *Die zweidimensionale Kugelmannigfaltigkeit* (*Kugelkongruenz*) wollen wir als *adjunktionsfähig* bezeichnen, wenn zu ihr eine adjungierte zweidimensionale Linienmannigfaltigkeit existiert.

Die zweidimensionale Linienmannigfaltigkeit (*Linienkongruenz*) wollen wir als *adjunktionsfähig* bezeichnen, wenn eine zweidimensionale Kugelmannigfaltigkeit existiert, zu welcher die zweidimensionale Linienmannigfaltigkeit adjungiert wird.

Die zweidimensionale Kugel- bzw. *Linienmannigfaltigkeit*, welche nicht adjunktionsfähig ist, wollen wir als *adjunktionsunfähig* bezeichnen.

Satz 1. *Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kugelkongruenz* $^{*2}\mathbf{p}(^*\mathbf{s}(^*u_1, {}^*u_2); {}^*r(^*u_1, {}^*u_2)) = {}^2\mathbf{p}(^*u_1, {}^*u_2) = {}^4\mathbf{p}(^*u_1, {}^*u_2, {}^*u_3 = c_3\ {}^*u_4 = c_4) = \mathbf{p}(^*u_1, {}^*u_2, {}^*u_3 = c_3, {}^*u_4 = c_4)$, *wo* $^*u_1, \ldots, {}^*u_4$ *Parameter aus* [12] (*Gleichungen* (9)) *des Kugelraums* $\mathbf{p}$ *sind, adjunktionsfähig ist, besteht darin, dass bei den Tensoren* $^{*ss}T_{ij}(^*u_1, {}^*u_2) = {}^{*ss}T_{ij}(^*u_1, {}^*u_2, {}^*u_3 = c_3, {}^*u_4 = c_4) = {}^{*ss}T_{ij}$, $^{*ls}T_{ij}(^*u_1, {}^*u_2) = {}^{*ls}T_{ij}(^*u_1, {}^*u_2) = {}^{*ls}T_{ij}(^*u_1, {}^*u_2, {}^*u_3 = c_3, {}^*u_4 = c_4) = {}^{*ls}T_{ij}$ *aus* [12] (*Gleichungen* (3) *bis* (8)), *und also mit Rücksicht auf* [11] (*Satz* 1.10, *Gleichung* (1,89)) *und* [12] (*Gleichungen* (10)) *bei*

*) Wegen der Druckfähigkeit erscheint man notwendig die Bezeichnungen aus [11], [12], [13] folgendermassen zu vereinfachen: Die über den Buchstaben T, $\boldsymbol{f}$, $\mathbf{p}$ stehenden Indizes links oben an diese Buchstaben anzubringen, alle anderen über bzw. unter den Buchstaben stehenden Indizes wegzulassen, das Symbol aus [13] (Gleichung (79) bzw. (81)) durch $\boldsymbol{D}$ bzw. $\boldsymbol{D}$ zu ersetzen.

$$(1) \qquad {}^{*ls}T_{ij} = {}^{*}r\,{}^{*}r_k\,{}^{*}\Gamma^k_{ij} - {}^{*}r\,{}^{*}r_{ij} - {}^{*}r_i\,{}^{*}r_j + {}^{*ss}T_{ij}\,, \quad i, j = 1, 2\,,$$

$${}^{*}\Gamma^k_{ij} = \tfrac{1}{2}\,{}^{*ss}T^{ka}\left(\frac{\partial\,{}^{*ss}T_{ja}}{\partial\,{}^{*}u_i} + \frac{\partial\,{}^{*ss}T_{ia}}{\partial\,{}^{*}u_j} - \frac{\partial\,{}^{*ss}T_{ij}}{\partial\,{}^{*}u_a}\right), \quad {}^{*ss}T^{ka}\,{}^{*ss}T_{kb} = \delta^a_b\,,$$

$$k, a, b = 1, 2\,,$$

einer der folgenden Fälle eintritt:

a) *Die Mittelpunktfläche* $^{*}\mathbf{s}$ *ist unabwickelbar.*

b) *Die Mittelpunktfläche* $^{*}\mathbf{s}$ *ist abwickelbar, von einer Ebene verschieden, und bei ihren Asymptotenlinien* $^{*}u_i =$ konst (i *ein von den Werten* 1, 2) *gilt*

$$(2) \qquad \left({}^{*ls}T_{ii+(-1)^{i+1}}({}^{*}u_1, {}^{*}u_2) = {}^{*ls}T_{ii+(-1)^{i+1}}({}^{*}u_1, {}^{*}u_2, {}^{*}u_3 = c_3, {}^{*}u_4 = c_4)\right,$$

$${}^{*ls}T_{i+(-1)^{i+1}\,i+(-1)^{i+1}}({}^{*}u_1, {}^{*}u_2) =$$

$$\left. = {}^{*ls}T_{i+(-1)^{i+1}\,i+(-1)^{i+1}}({}^{*}u_1, {}^{*}u_2, {}^{*}u_3 = c_3, {}^{*}u_4 = c_4)\right) \neq (0, 0)\,.$$

c) *Die Mittelpunktfläche* $^{*}\mathbf{s}$ *ist eine Ebene und es gilt*

$$(3) \qquad \det\left|{}^{*ls}T_{ij}({}^{*}u_1, {}^{*}u_2) = {}^{*ls}T_{ij}({}^{*}u_1, {}^{*}u_2, {}^{*}u_3 = c_3, {}^{*}u_4 = c_4)\right| \neq 0\,,$$

$$i, j = 1, 2\,.$$

Beweis. Aus [11] (Behauptungen d), e), f), h), Gleichungen (4,8) bis (4,13)), aus [12] (Gleichungen (10)), aus der Unabhängigkeit der Tensoren $^{*}r$, $^{*}r_i$, $^{*ss}T_{ij}$, $^{*ds}T_{ij}$ von Bewegungen, die ein kartesisches Hilfskoordinatensystem $\langle {}^{*}S; {}^{*}\mathbf{s}_1, {}^{*}\mathbf{s}_2, {}^{*}\mathbf{d}\rangle$ in das fest gewählte kartesische Koordinatensystem $Oxyz$ überführen, aus der Definition der Linienkongruenz unter Anwendung der Plückerschen Linienkoordinaten ([5] I, Definition (1,1). S. 108) und aus der Definition 1 folgt:

Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kugelkongruenz $^{2}\mathbf{p}({}^{*}u_1, {}^{*}u_2)$ adjunktionsfähig ist, besteht darin, dass die Matrix

$$(4) \qquad \left\|\begin{matrix} 0, & 0, & -1, & -{}^{*}r\,{}^{*}r_2\,{}^{*ss}T_{22}^{-1/2}, & {}^{*}r\,{}^{*}r_1\,{}^{*ss}T_{11}^{-1/2}, & 0 \\ -{}^{*ds}T_{11}\,{}^{*ss}T_{11}^{-1}, & 0, & 0, & {}^{*ss}T_{11}^{-1/2}\,{}^{*ss}T_{22}^{-1/2}\,{}^{*ls}T_{12}, & -{}^{*ss}T_{11}^{-1}\,{}^{*ls}T_{11}, & {}^{*}r_2\,{}^{*ss}T_{11}^{-1}\,{}^{*ss}T_{22}^{-1/2}\,{}^{*ds}T_{11} \\ 0, & -{}^{*ds}T_{22}\,{}^{*ss}T_{22}^{-1}, & 0, & {}^{*ss}T_{22}^{-1}\,{}^{*ls}T_{22}, & -{}^{*ss}T_{11}^{-1/2}\,{}^{*ss}T_{22}^{-1/2}\,{}^{*ls}T_{12}, & {}^{*}r_1\,{}^{*ss}T_{11}^{-1/2}\,{}^{*ss}T_{22}^{-1}\,{}^{*ds}T_{22} \end{matrix}\right\|$$

den Rang 3 hat.

Von hier aus und daraus, dass die Fläche $^{*}\mathbf{s}$ unabwickelbar bzw. abwickelbar, von einer Ebene verschieden, mit Asymptotenlinien $^{*}u_i =$ konst (i ein von den Werten 1, 2), bzw. die Ebene durch die Beziehungen ${}^{*ds}T_{11}\,{}^{*ds}T_{22} \neq 0$, ${}^{*ds}T_{12} = 0$, bzw. ${}^{*ds}T_{ii} \neq 0$, ${}^{*ds}T_{ii+(-1)^{i+1}} = 0$, ${}^{*ds}T_{i+(-1)^{i+1}\,i+(-1)^{i+1}} = 0$, bzw. ${}^{*ds}T_{ij} = 0$ ($i, j = 1, 2$) charakterisiert wird, folgen die Behauptungen des Satzes 1.

Satz 2. *Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die, in beliebigen Parametern* $u_1, \ldots, u_4$ *des Kugelraums* $\mathbf{p} = {}^4\mathbf{p}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ *durch die Gleichungen*

$$(5) \qquad \varphi_k(u_1, u_2, u_3, u_4) = c_k\,, \quad \det\left|\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_j}\right| \neq 0\,, \quad c_k = \text{konst}\,, \quad (k, j = 3, 4)$$

ausgedrückte Kugelkongruenz ${}^2\mathbf{p} = {}^2\mathbf{p}(u_1, u_2) = (\mathbf{s}(s_1(u_1, u_2), s_2(u_1, u_2), s_3(u_1, u_2)); r(u_1, u_2))$ *adjunktionsfähig ist, besteht darin, dass (bei zweckmässiger Bezeichnung von Parametern, bei Summationsindizes* $k = 1, 2$, $m, n, p, q, u, v = 1, 2, 3, 4$ *und bei nicht gebundenen Buchstabenindizes* $b, c = 1, 2$) *einer der folgenden Fälle* a), $\text{b})_{1,2}$, c) *eintritt:*

a)

$$(6) \qquad \det\left|D^p_b D^q_c\, {}^{ds}T_{pq}\right| \neq 0\,,$$

$\text{b})_1$

$$(7)_1 \qquad {}^{ss}T_{mn}\, {}^{ds}T_{pq} D^n_2 D^q_2 (D^m_1 D^p_2 - D^m_2 D^p_1) \neq 0\,,$$

$$(7) \qquad D^m_i D^n_i\, {}^{ds}T_{mn} \neq 0\,, \quad D^m_i D^n_{i+(-1)^{i+1}}\, {}^{ds}T_{mn} = D^m_{i+(-1)^{i+1}} D^n_{i+(-1)^{i+1}}\, {}^{ds}T_{mn} = 0\,,$$

$$\begin{aligned}(8) \quad & (rD^2(\det|D^p_b D^q_c\, {}^{ss}T_{pq}|)^{-1}\, D^u_k r_u D^m_{k+(-1)^{k+1}} D^n_{k+(-1)^{k+1}}\, {}^{ss}T_{mn}[(D^{-2} D^p_{i+(-1)^{i+1}} \,. \\ & .\, D^q_k\, {}^{ss}T_{pq})_v\, D^v_i + (D^{-2} D^p_i D^q_k\, {}^{ss}T_{pq})_v\, D^v_{i+(-1)^{i+1}} - (D^{-2} D^p_i D^q_{i+(-1)^{i+1}} \,. \\ & .\, {}^{ss}T_{pq})_v\, D^v_k] - 2rDD^n_{i+(-1)^{i+1}}(D^{-1} D^m_i r_m)_n - 2D^m_i D^n_{i+(-1)^{i+1}} r_m r_n + \\ & + 2D^m_i D^n_{i+(-1)^{i+1}}\, {}^{ss}T_{mn}\,, \\ & rD^2(\det|D^p_b D^q_c\, {}^{ss}T_{pq}|)^{-1}\, D^u_k r_u D^m_{k+(-1)^{k+1}} D^n_{k+(-1)^{k+1}}\, {}^{ss}T_{mn}[2(D^{-2} D^p_{i+(-1)^{i+1}} \,. \\ & .\, D^q_k\, {}^{ss}T_{pq})_v\, D^v_{i+(-1)^{i+1}} - (D^{-2} D^p_{i+(-1)^{i+1}} D^q_{i+(-1)^{i+1}}\, {}^{ss}T_{pq})_v\, D^v_k] - \\ & - 2rDD^n_{i+(-1)^{i+1}}(D^{-1} D^m_{i+(-1)^{i+1}} r_m)_n - 2D^m_{i+(-1)^{i+1}} D_{i+(-1)^{i+1}} r_m r_n + \\ & + 2D^m_{i+(-1)^{i+1}} D^n_{i+(-1)^{i+1}}\, {}^{ss}T_{mn}) \neq (0, 0)\,,\end{aligned}$$

i ist einer der Werte 1, 2,

$\text{b}_2)$

$$\begin{aligned}(7)_2 \qquad & {}^{ss}T_{mn}\, {}^{ds}T_{pq} D^n_j D^q_j (D^m_1 D^p_2 - D^m_2 D^p_1) = 0\,, \quad j = 1, 2\,, \\ & {}^{ss}T_{mn}\, {}^{ds}T_{pq} (D^n_1 D^q_2 + D^n_2 D^q_1)(D^m_1 D^p_2 - D^m_2 D^p_1) \neq 0\,,\end{aligned}$$

und die Gleichungen (7), (8) *für* $D^m_i = D^m_i$ *und i ist einer der Werte* 1, 2,

c)

$$(9) \qquad D^p_i D^q_j\, {}^{ds}T_{pq} = 0 \quad i, j = 1, 2\,,$$

und bei (immer erreichbarem Wert) $s_3 = 0$

$$\begin{aligned}(10) \qquad & \det|[rr_2 s_{j1} - rr_1 s_{j2} - s_k(s_{j1}s_{k2} - s_{j2}s_{k1})]_i (s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}) - \\ & - [rr_2 s_{j1} - rr_1 s_{j2} - s_k(s_{j1}s_{k2} - s_{j2}s_{k1})](s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21})_i| \neq 0 \quad i, j = 1, 2\,.\end{aligned}$$

Dabei werden $r, {}^{ss}T_{mn}, {}^{ds}T_{mn}$ *und* $\boldsymbol{D}^n_c, D, D^n_c$ *in* (6), $(7)_1$, (7), (8), $(7)_2$, (9) *aus* [12] (*Gleichungen* (8)) *und aus* [13] (*Satz* 17) *genommen.*

Beweis. Für den Tensor ${}^{*ss}T^{ka}$, für welchen mit Rücksicht auf ${}^{*ss}T^{ka}\,{}^{*ss}T_{kb} = \delta^a_b$ $(k, a, b = 1, 2)$ und auf [12] (Gleichungen (9)) ${}^{*ss}T^{ka} = \delta^{ka}(\det|{}^{*ss}T_{bc}|)^{-1}$ $.\, {}^{*ss}T_{k+(-1)^{k+1}a+(-1)^{a+1}}$ gilt, für die zuständigen Christoffelschen Symbole ${}^*\Gamma^k_{ij}$ aus (1) und für ${}^*r{}^*r_k{}^*\Gamma^k_{ij}$, $-{}^*r{}^*r_{ij}$, $-{}^*r_i{}^*r_j$, ${}^{*ss}T_{ij}$ bekommt man im Fall $\text{b})_1$, im Fall $\text{b})_2$ für $D^m_i = \boldsymbol{D}^m_i$, unter Anwendung von [13] (Satz 17, Gleichungen (84), (85), (86) und ihrem Beweis)

$$
\begin{aligned}
(11) \quad {}^{*ss}T^{ka} &= \delta^{ka}(\det|D^{-2}D^p_bD^q_c\,{}^{ss}T_{pq}|)^{-1}\, D^{-2}D^m_{k+(-1)^{k+1}}D^n_{a+(-1)^{a+1}}\,{}^{ss}T_{mn}\,,\\
{}^*\Gamma^k_{ij} &= \tfrac{1}{2}D(\det|D^p_bD^q_c\,{}^{ss}T_{pq}|)^{-1}\, D^m_{k+(-1)^{k+1}}D^n_{k+(-1)^{k+1}}\,{}^{ss}T_{mn}\,.\\
&.\,[(D^{-2}D^p_jD^q_k\,{}^{ss}T_{pq})_n\, D^n_i + (D^{-2}D^p_iD^q_k\,{}^{ss}T_{pq})_n\, D^n_j - (D^{-2}D^p_iD^q_j\,{}^{ss}T_{pq})_n\, D^n_k]\,,\\
{}^*r{}^*r_k{}^*\Gamma^k_{ij} &= \tfrac{1}{2}r(\det|D^p_bD^q_c\,{}^{ss}T_{pq}|)^{-1}\, D^u_kr_uD^m_{k+(-1)^{k+1}}D^n_{k+(-1)^{k+1}}\,{}^{ss}T_{mn}\,.\\
&.\,[(D^{-2}D^p_jD^q_k\,{}^{ss}T_{pq})_v\, D^v_i + (D^{-2}D^p_iD^q_k\,{}^{ss}T_{pq})_v\, D^v_j - (D^{-2}D^p_iD^q_j\,{}^{ss}T_{pq})_v\, D^v_k]\,,\\
-{}^*r{}^*r_{ij} &= -rD^{-1}D^n_j(D^{-1}D^m_ir_m)_n\,,\\
-{}^*r_i{}^*r_j &= -D^{-2}D^m_iD^n_jr_mr_n\,,\\
{}^{*ss}T_{ij} &= D^{-2}D^m_iD^n_j\,{}^{ss}T_{mn}\,,
\end{aligned}
$$

und daraus folgt, unter Anwendung von (1) und von [12] (Gleichungen (7), (9), (10))

$$
\begin{aligned}
(12) \quad {}^{*ls}T_{ij} = \tfrac{1}{2}D^{-2}\{&rD^2(\det|D^p_bD^q_c\,{}^{ss}T_{pq}|)^{-1}\, D^u_kr_uD^m_{k+(-1)^{k+1}}\,.\\
&.\, D^n_{k+(-1)^{k+1}}\,{}^{ss}T_{mn}[(D^{-2}D^p_jD^q_k\,{}^{ss}T_{pq})_v\, D^v_i + (D^{-2}D^p_iD^q_k\,{}^{ss}T_{pq})_v\, D^v_j -\\
&- (D^{-2}D^p_iD^q_j\,{}^{ss}T_{pq})_v\, D^v_k] - 2rDD^n_j(D^{-1}D^m_ir_m)_n - 2D^m_iD^n_jr_mr_n +\\
&+ 2D^m_iD^n_j\,{}^{ss}T_{mn}\}\,, \quad i, j = 1, 2\,.
\end{aligned}
$$

Aus dem Satz 1, Behauptungen a), b) und daraus, dass (6) bzw. (7) eine unabwickelbare bzw. abwickelbare (von einer Ebene verschiedene, mit den Asymptotenlinien ${}^*u_i = konst$) Fläche charakterisiert, folgen die Behauptungen a), $\text{b})_{1,2}$ des Satzes 2.

Aus dem Satz 1, Behauptung c) und aus [11] (Satz 5.3, Behauptung a) im Fall einer Ebene, Satz 1.3 im Fall $s_3 = 0$, und also, mit Rücksicht auf Gleichungen (1, 2), (1, 3), aus $d_{13} = d_{23} = 0$, $k(B) = k(AB) = 0$) bekommt man:

Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kugelkongruenz $(\boldsymbol{s}(s_1, s_2, 0); r)$ adjunktionsfähig ist, besteht darin, dass die Mittenfläche $\boldsymbol{l} = 2^{-1}(d_{24}d_{12}^{-1}, -d_{14}d_{12}^{-1}, 0)$ eine Fläche ist, d. h. die Vektoren $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2$ sind linear unabhängig, und demzufolge gilt

$$\det|d_{j4i}d_{12} - d_{j4}d_{12i}| \neq 0\,, \quad i, j = 1, 2\,.$$

Daraus und weiter aus (9) (mit Rücksicht auf [12], Gleichungen (10), (7) und auf [13], 1) im Beweis des Satzes 17 für eine Ebene charakteristisch) und aus (27), (29′) im Beweis des Satzes 3 bekommt man die Behauptung c) des Satzes 2.

Satz 3. 1. *Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Linienkongruenz* $\mathbf{p} = \mathbf{p}(p^1(u_1, u_2), \ldots, p^6(u_1, u_2))$, $\sum_{a=1}^{3} (p^a)^2 = 1$, $p^3 \neq 0$, *wo h den Rang der Matrix*

$$(13) \qquad \left\| \begin{matrix} p^1, & p^2, & p^3 \\ p_1^1, & p_1^2, & p_1^3 \\ p_2^1, & p_2^2, & p_2^3 \end{matrix} \right\|$$

bezeichnet, adjunktionsfähig ist, d. h. dass eine Kugelkongruenz ($\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_1(u_1, u_2), s_2(u_1, u_2), s_3(u_1, u_2))$; $r = r(u_1, u_2)$) *existiert, zu welcher die Linienkongruenz* $\mathbf{p}$ *adjungiert wird, besteht darin, dass*

entweder $h = 3$,

$$(14) \qquad s_i = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} p^1, & p^2, & p^3 \\ p_1^1, & p_1^2, & p_1^3 \\ p_2^1, & p_2^2, & p_2^3 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \lambda, & p^j, & p^k \\ \lambda_1, & p_1^j, & p_1^k \\ \lambda_2, & p_2^j, & p_2^k \end{vmatrix}$$

$$j \neq i \neq k\,, \quad j < k\,, \quad i, j, k = 1, 2, 3\,,$$

oder $h = 2$, $p^i p_c^j - p_c^i p^j \neq 0$, $i < j$, *dabei sind* i, j *zwei von den Werten* 1, 2, 3, c *einer der Werte* 1, 2, $h_\lambda = 2$ *der Rang der aus* (13) *durch Erweiterung um die Spalte* $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ *entstehenden Matrix,*

$$(15) \qquad s_i = (-1)^{k-i+\mathrm{inv}\,jk} \begin{vmatrix} p^i, & p^j \\ p_c^i, & p_c^j \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \lambda - p^k\sigma, & p^j \\ \lambda_c - p_c^k\sigma, & p_c^j \end{vmatrix},$$

$$s_j = (-1)^{k-j+\mathrm{inv}\,ik} \begin{vmatrix} p^i, & p^j \\ p_c^i, & p_c^j \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \lambda - p^k\sigma, & p^i \\ \lambda_c - p_c^k\sigma, & p_c^i \end{vmatrix},$$

$$s_k = \sigma\,, \quad i \neq k \neq j\,, \quad k = 1, 2, 3\,,$$

oder $h = 1$, $h_\lambda = 1$ *der Rang der aus* (13) *durch Erweiterung um die Spalte* $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ *entstehenden Matrix,*

$$(16) \qquad s_i = {}^i\sigma \quad i = 1, 2\,, \quad s_3 = (p^3)^{-1} \left(\lambda - \sum_{j=1}^{2} p^j\,{}^j\sigma\right),$$

und

$$(17) \qquad r = \left[2 \int (p^3)^{-1} \left(p^4 s_{2i} - p^5 s_{1i} + p^3 \sum_{j=1}^{3} s_j s_{ji}\right) \mathrm{d}u_i + c\right]^{1/2} > 0$$

sind, dabei stellen $\lambda = \lambda(u_1, u_2)$, *bzw.* $\lambda = \lambda(u_1, u_2)$, $\sigma = \sigma(u_1, u_2)$, *bzw.* $\lambda = \lambda(u_1, u_2)$, ${}^i\sigma = {}^i\sigma(u_1, u_2)$ $i = 1, 2$ *solche Lösungen der partiellen Differentialgleichungen*

$$(18') \qquad [(p^3)^{-1} p^4]_2 s_{21} - [(p^3)^{-1} p^5]_2 s_{11} = [(p^3)^{-1} p^4]_1 s_{22} - [(p^3)^{-1} p^5]_1 s_{12} ,$$

$$(18) \qquad \sum_{i=1}^{3} p^i s_{ij} = 0 , \quad j = 1, 2$$

dar, für welche

$$(19) \qquad s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} \neq 0 ,$$

$$(20) \qquad 1 - (D_k^m(r + u_4)_m)^2 (D_k^n D_k^p {}^{ss}T_{np})^{-1} > 0 ,$$

gilt und ausserdem im Fall $h = 2$ gelten die Bedingungen b)$_{1,2}$ *aus dem Satz* 2, *und im Fall $h = 1$ die Bedingungen* c) *aus dem Satz* 2, *wo die in* $(7)_1$, (7), (8), $(7)_2$, (9), (20) *stehenden Ausdrücke aus* [12] (*Gleichungen* (4), (5), (6), (8)) *und aus* [13] (*Satz* 17), *unter Anwendung von* ${}^4p_i = s_i + \delta_{i3}u_3$ $(i = 1, 2, 3)$, ${}^4p_6 = r + u_4$ $({}^4p_5 = 1)$, $\varphi_k = u_k$ $(k = 3, 4)$ *entstehen.*

2. *Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kugelkongruenz* $(\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_1, s_2, s_3); r)$ *aus der Behauptung* 1 *von Kugeln mit konstantem Halbmesser gebildet wird, besteht darin, dass*

$$(21) \qquad p^4 s_{2i} - p^5 s_{1i} + p^3 \sum_{j=1}^{3} s_j s_{ji} = 0 , \quad i = 1, 2$$

gilt.

Beweis. Mit Rücksicht auf die Proportionalität der Plückerschen Linienkoordinaten p^1, p^2, p^3 mit den Richtungskosinen von Geraden der Linienkongruenz kann man immer erreichen, dass $\sum_{a=1}^{3} (p^a)^2 = 1$, $p^3 \neq 0$ gilt.

1a) Es sei eine adjunktionsfähige Linienkongruenz $\mathbf{p}(p^1, \ldots, p^6)$ gegeben, d. h. es existiert eine Kugelkongruenz $(\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_1, s_2, s_3); r)$, zu welcher die Linienkongruenz $\mathbf{p}$ adjungiert wird. Mit Rücksicht auf [11] (Behauptung e) im Beweis des Satzes 4.1) kann man dann die Plückerschen Linienkoordinaten so normieren, dass

$$(22) \qquad -\mathbf{d} = (p^1, p^2, p^3) , \quad p^3 \neq 0 ,$$

$$(23) \qquad -\mathbf{d} \times \mathbf{l} = (p^4, p^5, p^6)$$

und also für $\mathbf{l} = \mathbf{l}(l_1, l_2, l_3)$ mit Rücksicht auf $p^1p^4 + p^2p^5 + p^3p^6 = 0$

$$(24) \qquad l_1 = (p^3)^{-1} [p^1(p^3\lambda - p^1p^5 + p^2p^4) + p^5] ,$$
$$l_2 = (p^3)^{-1} [p^2(p^3\lambda - p^1p^5 + p^2p^4) - p^4] , \; l_3 = p^3\lambda - p^1p^5 + p^2p^4$$

gilt, wo $\lambda = \lambda(u_1, u_2)$ eine stetig differenzierbare Funktion bezeichnet.

Aus [11] (Definitionen 1.1, 1.2, 4.1, Satz 1.2, Gleichungen (1,2), (1,18)), aus den Gleichungen (22), (24) und aus der Theorie der Hüllflächen des zweiparametrigen

Flächensystems folgt, dass die Mittelpunktfläche $\mathfrak{s}(s_1, s_2, s_3)$ der Kugelkongruenz $(\mathfrak{s}(s_1, s_2, s_3); r)$ als Hüllfläche des zweiparametrigen Systems von Ebenen

$$(25) \qquad p^1x + p^2y + p^3z = \lambda$$

erscheint, und also (18),

$$(26) \qquad \begin{aligned} p^1s_1 + p^2s_2 + p^3s_3 &= \lambda\,, \\ p_1^1s_1 + p_1^2s_2 + p_1^3s_3 &= \lambda_1\,, \\ p_2^1s_1 + p_2^2s_2 + p_2^3s_3 &= \lambda_2\,, \end{aligned}$$

$$(27) \qquad d_{12} = 2(s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}) \neq 0$$

gilt.

Aus den vorhergehenden Festellungen, aus den Eigenschaften des sphärischen Abbildes der unabwickelbaren $(h = 3)$ bzw. abwickelbaren $(h = 2)$ Flächen, aus den Gleichungen $\boldsymbol{d} \,.\, \boldsymbol{d} = 1$ $\boldsymbol{d} \,.\, \boldsymbol{d}_i = 0$ $(i = 1, 2)$ und aus dem Satz 1 folgt die Notwendigkeit der Erfüllung derjenigen Bedingungen von der Behauptung 1 des Satzes 3, welche die Gleichungen (14), (15), (16), (18) und die Ungleichheit (19) enthalten.

Aus der Definition der hesasphärischen Koordinaten bekommt man, dass

$$(28) \qquad p_i = s_i \; (i = 1, 2, 3)\,, \quad p_4 = r^2 - \sum_{k=1}^{3} s_k^2\,, \quad p_5 = 1\,, \quad p_6 = r$$

die hexasphärischen Koordinaten der Kugelkongruenz $(\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(s_1, s_2, s_3); r)$ sind. Daraus, mit Rücksicht auf [10] (S. 317–318), [12] (S. 224–225, 221–222, Gleichungen (7)), mit Rücksicht darauf, dass bei der am Schluss des Teiles 1 des Satzes 3 erwähnten Parametrisierung des Kugelraums die Kugelkongruenz $(\mathfrak{s}; r)$ die Gleichungen $u_k = 0$ $(k = 3, 4)$ hat und mit Rücksicht auf [13] (Satz 17, Gleichungen (85), (86)) erscheint die Ungleichheit (20) mit der vorausgesetzten Existenz zweier reeller verschiedener Brennpunkte von Kugeln der Kugelkongruenz $(\mathfrak{s}; r)$ äquivalent.

Aus [11] (Sätze 1.2, 1.3) und aus den Gleichungen (22), (24) bekommt man

$$(29) \qquad d_{14} = 2(p^3)^{-1}\, p^4 d_{12}\,, \quad d_{24} = 2(p^3)^{-1}\, p^5 d_{12}\,.$$

Aus den Gleichungen (28) und aus [11] (Satz 1.2) bekommt man

$$(29') \qquad d_{i4} = 4\Big[-s_{i2}rr_1 + s_{i1}rr_2 - \sum_{k=1}^{3} s_k(s_{i1}s_{k2} - s_{i2}s_{k1})\Big]\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Das System der Gleichungen (29), (29′) hat mit Rücksicht auf (19) genau eine Lösung

$$(30) \qquad 2rr_i = 2(p^3)^{-1}\Big(p^4s_{2i} - p^5s_{1i} + p^3 \sum_{j=1}^{3} s_js_{ji}\Big) \quad i = 1, 2\,.$$

Daraus, mit Rücksicht auf (infolge der Ausgangsvoraussetzung) die erfüllte Integrabilitätsbedingung

$$(31) \qquad [(p^3)^{-1}(p^4 s_{21} - p^5 s_{11} + p^3 \sum_{j=1}^{3} s_j s_{j1})]_2 =$$

$$= [(p^3)^{-1}(p^4 s_{22} - p^5 s_{12} + p^3 \sum_{j=1}^{3} s_j s_{j2})]_1$$

des Systems (30), die mit der Bedingung (18′) äquivalent ist, folgt die Notwendigkeit der Erfüllung derjenigen Bedingungen der Behauptung 1 des Satzes 3, welche die Gleichungen (18′), (17) enthalten.

Aus der Ausgangsvoraussetzung, daraus, dass $h = 2$ bzw. $h = 1$ eine abwickelbare (von einer Ebene verschiedene) Fläche bzw. eine Ebene charakterisiert, aus dem Satz 1, aus der am Schluss des Teiles 1 des Satzes 3 erwähnten Parametrisierung des Kugelraums und aus dem Satz 2 bekommt man die Notwendigkeit der Erfüllung des Schlussteils von Behauptung 1 des Satzes 3.

1b) Es sei $\mathbf{p}(p^1, \ldots, p^6)$ eine solche Linienkongruenz, welche die Bedingungen der Behauptung 1 des Satzes 3 erfüllt. Aus diesen Bedingungen, aus [11] (Sätze 1.16, 1.2, Gleichung (1,18)), aus [10] (S. 317–318), aus [12] (S. 224–225), aus [11] (Definition 4.1), aus den Sätzen 1, 2, daraus, dass die Gleichungen (14) bzw. (15) bzw. (16), immer mit betreffenden Bedingungen, den Gleichungen (26), (27) äquivalent sind, und aus der Theorie von Hüllflächen des zweiparametrigen Flächensystems folgt:

Die Fläche $\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_1, s_2, s_3)$ und der Halbmesser r bestimmen die Kugelkongruenz $(\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_1, s_2, s_3); r)$ von Kugeln mit zwei reellen, verschiedenen Brennpunkten, deren Verbindungslinien die adjungierte Linienkongruenz ${}^1F\,{}^2F(*p^1, \ldots, *p^6)$ bilden. Dabei kann man die Plückerschen Linienkoordinaten so normieren, dass für sie und den Einheitsvektor $*\mathbf{d}$ der Normalen der Fläche $\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_1, s_2, s_3)$

$$(32) \qquad \sum_{i=1}^{3} (*p^i)^2 = 1\,, \quad *p^3 \neq 0\,, \quad *p^i = p^i \ (i = 1, 2, 3)\,,$$

$$*\mathbf{d}(*p^1, *p^2, *p^3) = \mathbf{d}(p^1, p^2, p^3)$$

gilt.

Aus [11] (Gleichung (1,2), Satz 1.2), aus (32), (28), (17), (27), aus [11] (der dritten Gleichung in (1,3)), aus der ersten Gleichung in (26) und aus $*p_i = p_i$ $(i = 1, 2, 3)$ ergibt sich

$$(33) \qquad *d_{12} = d_{12}\,, \quad \sqrt{*k(B)} = -(p^3)^{-1} d_{12}\,, \quad *d_{13} = -(p^3)^{-1}\, p^2 d_{12}\,,$$

$$*d_{23} = (p^3)^{-1}\, p^1 d_{12}\,, \quad *d_{14} = 2(p^3)^{-1}\, p^4 d_{12}\,, \quad *d_{24} = 2(p^3)^{-1}\, p^5 d_{12}\,,$$

$$*k(AB) = -4d_{12}^2 (p^3)^{-2}\,(p^3\lambda - p^1 p^5 + p^2 p^4)\,.$$

Aus den Gleichungen (33) und aus [11] (Satz 1.3) bekommt man für die Mittenfläche $*\mathbf{l}(*l_1, *l_2, *l_3)$ der Kugelkongruenz $(\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_1, s_2, s_3); r)$ die Beziehung

$$(34) \qquad *\mathbf{l}(*l_1, *l_2, *l_3) = \mathbf{l}(l_1, l_2, l_3)\,, \quad *l_i = l_i\,, \quad i = 1, 2, 3\,,$$

wo l_i $(i = 1, 2, 3)$ durch die Gleichungen (24) gegeben werden. Daraus, mit Rücksicht auf die Gleichungen (32), (34), auf [11] (Behauptung e) im Beweis des Satzes 4.1) und mit Rücksicht auf die Äquivalenz (23) mit (24) ergibt sich

$$(35) \qquad (p^4, p^5, p^6) = -\mathbf{d} \times \mathbf{l} = -{}^*\mathbf{d} \times {}^*\mathbf{l} = ({}^*p^4, {}^*p^5, {}^*p^6)\,.$$

Aus den Gleichungen (32) und (35) folgt, dass die der Kugelkongruenz ($\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_1, s_2, s_3)$; r) adjungierte Linienkongruenz ${}^1F\,{}^2F({}^*p^1, \ldots, {}^*p^6)$ mit der betrachteten Linienkongruenz $\mathbf{p}(p^1, \ldots, p^6)$ identisch ist.

Daraus folgt, dass die Bedingungen von der Behauptung 1 des Satzes 3 für die Adjunktionsfähigkeit der Linienkongruenz hinreichend sind.

Der Beweis der Behauptung 2 des Satzes 3 ergibt sich aus der bewiesenen Behauptung 1 des Satzes 3, aus der Ungleichheit in (17) und aus der Gleichung (30).

Satz 4. *Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kugelkongruenz* $({}^*\mathbf{s}({}^*u_1, {}^*u_2); {}^*r({}^*u_1, {}^*u_2)) = ({}^*\mathbf{s}; {}^*r)$, *wo* ${}^*u_1, {}^*u_2$ *die Krümmungsparameter der Mittelpunktfläche* ${}^*\mathbf{s}$ *bezeichnen, adjunktionsunfähig ist, besteht darin, dass einer der folgenden Fälle eintritt:*

A. *Die Mittelpunktfläche* ${}^*\mathbf{s}$ *stellt eine abwickelbare, von einer Ebene verschiedene Fläche dar und die h-te Brennfläche* ${}^{*h}\mathbf{f}$ $(h = 1, 2)$ *der Kugelkongruenz* $({}^*\mathbf{s}; {}^*r)$ *wird durch die gemeinsamen h-ten Brennpunkte von Kugeln der Kanalflächen mit den Mittelpunktkurven in den Asymptotenlinien der Fläche* ${}^*\mathbf{s}$ *gebildet.*

Wenn dieser Fall eintritt, werden entweder beide Brennflächen durch Kurven, oder eine Brennfläche durch eine Kurve und die andere durch einen Punkt gebildet. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Brennfläche ${}^{*h}\mathbf{f}$ *einen Punkt darstellt, besteht darin, dass bei den Asymptotenlinien* ${}^*u_i =$ *konst der Fläche* ${}^*\mathbf{s}$

$$(36) \qquad {}^{*ls}T_{ii} = (-1)^{h+1}\,{}^*r\Big(1 - \sum_{j=1}^{2} {}^*r_j^2\,{}^{*ss}T_{jj}^{-1}\Big)^{1/2}\,{}^{*ds}T_{ii}$$

gilt.

B. *Die Mittelpunktfläche* ${}^*\mathbf{s}$ *ist eine Ebene und die Brennflächen* ${}^{*h}\mathbf{f}$ $(h = 1, 2)$ *der Kugelkongruenz* $({}^*\mathbf{s}; {}^*r)$ *stellen keine Flächen dar.*

Wenn dieser Fall eintritt, werden beide Brennflächen entweder durch Kurven oder durch Punkte gebildet. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass beide Brennflächen durch Punkte gebildet werden, besteht darin, dass

$$(37) \qquad {}^{*ls}T_{ij} = 0 \quad i, j = 1, 2$$

gilt.

Beweis. Aus dem Satz 1 und aus der Definition 1 folgt:

1. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kugelkongruenz $({}^*\mathbf{s}({}^*u_1, {}^*u_2); {}^*r({}^*u_1, {}^*u_2))$, wo ${}^*u_1, {}^*u_2$ die Krümmungsparameter der Mittel-

punktfläche $*\mathbf{s}$ bezeichnen, adjunktionsunfähig ist, besteht darin, dass einer der folgenden Fälle eintritt:

a) Die Mittelpunktfläche $*\mathbf{s}$ ist eine abwickelbare, von einer verschiedene Fläche und bei ihren Asymptotenlinien $*u_i = konst$, d. h. bei ${}^{*ds}T_{ii} \neq 0$, ${}^{*ds}T_{i+(-1)^{i+1}i+(-1)^{i+1}} = {}^{*ds}T_{ii+(-1)^{i+1}} = 0$ gilt

$$(38) \qquad {}^{*ls}T_{ii+(-1)^{i+1}} = {}^{*ls}T_{i+(-1)^{i+1}i+(-1)^{i+1}} = 0\,.$$

b) Die Mittelpunktfläche $*\mathbf{s}$ ist eine Ebene, d. h. ${}^{*ds}T_{ij} = 0$ für $i, j = 1, 2$ und es gilt

$$(39) \qquad \det\left|{}^{*ls}T_{ij}\right| = 0 \quad i, j = 1, 2\,.$$

Aus [11] (Behauptung 1, Gleichungen (6,3), (6,4) im Beweis des Satzes 6.1, Satz 1.9, Gleichungen (1,48), (1,50), Behauptung 11, Gleichung (1,80) im Beweis des Satzes 1.9, Satz 1.10, Gleichungen (1,86), (1,89)), aus [12] (Gleichungen (10)) und aus der Unabhängigkeit der Tensoren $*r$, $*r_i$, ${}^{*ss}T_{ij}$, ${}^{*ds}T_{ij}$, ${}^{*ls}T_{ij}$ von Bewegungen, die ein kartesisches Hilfskoordinatensystem $\langle *S; *\mathbf{s}_1, *\mathbf{s}_2, *\mathbf{s}_3\rangle$ in das festgewählte kartesische Koordinatensystem $Oxyz$ überführen, ergibt sich:

2. Für die Brennflächen ${}^{*h}\mathbf{f}$ $(h = 1, 2)$ der Kugelkongruenz $(\mathbf{s}^*(*u_1, *u_2); *r(*u_1, *u_2))$ gilt für die Krümmungsparametern $*u_1$, $*u_2$ der Mittelpunktfläche $*\mathbf{s}$

$$(40) \qquad {}^{*h}\mathbf{f}_{i'} = \Big({}^{*ss}T_{11}^{-1/2}\,{}^{*ls}T_{1i'} + (-1)^h\,*r\Big(1 - \sum_{j=1}^{2} *r_j^2\,{}^{*ss}T_{jj}^{-1}\Big)^{1/2} \,.$$
$$.\,*\delta_{i'}^1\,{}^{*ss}T_{i'i'}^{-1/2}\,{}^{*ds}T_{i'i'}\,, \quad {}^{*ss}T_{22}^{-1/2}\,{}^{*ls}T_{2i'} + (-1)^h \,.$$
$$.\,*r\Big(1 - \sum_{j=1}^{2} *r_j^2\,{}^{*ss}T_{jj}^{-1}\Big)^{1/2} *\delta_{i'}^2\,{}^{*ss}T_{i'i'}^{-1/2}\,{}^{*ds}T_{i'i'}\,,$$
$$*r*r_{i'}\,{}^{*ss}T_{i'i'}^{-1}\,{}^{*ds}T_{i'i'} + (-1)^h\Big(1 - \sum_{j=1}^{2} *r_j^2\,{}^{*ss}T_{jj}^{-1}\Big)^{-1/2} \sum_{k=1}^{2} *r_k\,{}^{*ss}T_{kk}^{-1}\,{}^{*ls}T_{ki'}\Big)$$
$$h = 1, 2\,, \quad i' = 1, 2\,.$$

Aus den Bedingungen in 1a), aus ${}^{*ss}T_{jj} > 0$ und aus $*r\big(1 - \sum_{j=1}^{2} *r_j^2\,{}^{*ss}T_{jj}^{-1}\big)^{1/2} > 0$ folgt:

3. Die Gleichungen (38) sind mit den Gleichungen ${}^{*h}\mathbf{f}_{i+(-1)^{i+1}} = \mathbf{o}$ $(h = 1, 2)$ äquivalent. Im Fall ${}^{*h}\mathbf{f}_{i+(-1)^{i+1}} = \mathbf{o}$ $(h = 1, 2)$ ist die Gleichung ${}^{*h}\mathbf{f}_i = \mathbf{o}$ mit der Gleichung (36) äquivalent.

Aus den Bedingungen in 1b), aus (40), aus ${}^{*ss}T_{jj} > 0$, aus $*r\big(1 - \sum_{j=1}^{2} *r_j^2\,{}^{*ss}T_{jj}^{-1}\big)^{1/2} > 0$ und daraus, dass die dritte Spalte der Matrix $\|{}^{*h}\mathbf{f}_1, {}^{*h}\mathbf{f}_2\|$ eine Linearkombination ihrer übrigen Spalten darstellt, ergibt sich:

4. Die Gleichung (39) ist mit der linearen Abhängigkeit von Vektoren ${}^{*h}\mathbf{f}_1$, ${}^{*h}\mathbf{f}_2$ $(h = 1, 2)$ äquivalent. Im Fall der linearen Abhängigkeit von Vektoren ${}^{*h}\mathbf{f}_1$, ${}^{*h}\mathbf{f}_2$

kann dann (für $h = 1, 2$) entweder höchstens einer von ihnen oder jeder von ihnen einen Nullvektor darstellen. Der Fall ${}^{*h}\mathbf{f}_1 = {}^{*h}\mathbf{f}_2 = \mathbf{o}\,(h = 1, 2)$ ist mit der Gleichung (37) äquivalent.

Aus den Behauptungen 1 bis 4, aus [11] (Definition 2.1) und aus den Bemerkungen 1A), B) folgen die Behauptungen des Satzes 4.

Bemerkung 1. A) Die Kugelkongruenzen

$$^2\mathbf{p}(u_1, u_2, (u_1 + u_2)^2, 1, 1, (u_1^2 + u_2^2 + (u_1 + u_2)^4 + 1)^{1/2}),$$

$$^2\mathbf{p}\left(\tfrac{1}{2}(u_1 - u_2), \tfrac{1}{2}(u_1 + u_2), u_1^2, 0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}(2u_1^4 + u_1^2 + u_2^2)^{1/2}\right)$$

kann man als Beispiele der adjunktionsunfähigen Kugelkongruenzen aus dem Satz 4, Behauptung A auffassen. Zwei Kurven bzw. eine Kurve und ein Punkt bilden die Brennflächen der ersten bzw. der zweiten Kugelkongruenz.

B) Die Kugelkongruenzen

$$^2\mathbf{p}(u_1, u_2, u_1, -u_1^2, 1, (u_1^2 + u_2^2)^{1/2}) \quad u_1 > 0\,, \quad u_2 > 0\,,$$

$$^2\mathbf{p}(u_1, u_2, u_1, 1, 1, (2u_1^2 + u_2^2 + 1)^{1/2})$$

kann man als Beispiele der adjunktionsunfähigen Kugelkongruenzen aus dem Satz 4, Behauptung B auffassen. Zwei Kurven bzw. zwei Punkte bilden die Brennflächen der ersten bzw. der zweiten Kugelkongruenz.

Satz 5. *Hinreichende Bedingung dafür, dass die Linienkongruenz* $\mathbf{p}(p^1(u_1, u_2), \ldots$ $\ldots, p^6(u_1, u_2))$, $\sum_{a=1}^{3} (p^a)^2 = 1$, $p^3 \neq 0$ *wo* $h = 2$ *der Rang der Matrix* (13), $p^1 p_c^2 -$ $- p^2 p_c^1 \neq 0$, c *einer der Werte* 1, 2 *ist, adjunktionsunfähig ist, besteht darin, dass*

$$\text{(41)} \qquad ((p^3)^{-1}\, p^4)_c = ((p^3)^{-1}\, p^5)_c = 0\,,$$
$$((p^3)^{-1}\, p^4)_{c+(-1)^{c+1}} \neq -p^2(p^1)^{-1}\, ((p^3)^{-1}\, p^5)_{c+(-1)^{c+1}}$$

gilt.

Beweis. Aus den Gleichungen (15) bekommt man bei $p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1 \neq 0$, $k = 3$, c einer der Werte 1, 2, für $s_{ic} = \partial s_i / \partial u_c\,(i = 1, 2)$

$$\text{(42)} \qquad s_{ic} = (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)^{-2}\, \{[(-1)^i\, (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)_c\, p_c^{i+(-1)^{i+1}} +$$
$$+ (-1)^{i+(-1)^{i+1}} (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)\, p_{cc}^{i+(-1)^{i+1}}]\, \lambda +$$
$$+ (-1)^{i+(-1)^{i+1}}\, (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)_c\, p^{i+(-1)^{i+1}} \lambda_c +$$
$$+ (-1)^i\, (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)\, p^{i+(-1)^{i+1}} \lambda_{cc} + [(-1)^i\, (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)_c \,.$$
$$. (p^{i+(-1)^{i+1}} p_c^3 - p^3 p_c^{i+(-1)^{i+1}}) + (-1)^{i+(-1)^{i+1}}\, (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)\,.$$
$$. (p^{i+(-1)^{i+1}} p_c^3 - p^3 p_c^{i+(-1)^{i+1}})_c]\, \sigma + [(-1)^i\, (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)_c \,.$$

$$. \, p^{i+(-1)^{i+1}} p^3 + (-1)^{i+(-1)^{i+1}} (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1) \, .$$
$$. \, (p^{i+(-1)^{i+1}} p_c^3 - p^3 p_c^{i+(-1)^{i+1}}) + (-1)^{i+(-1)^{i+1}} (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1) \, .$$
$$. \, (p^{i+(-1)^{i+1}} p^3)_c] \, \sigma_c + (-1)^{i+(-1)^{i+1}} (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1) p^{i+(-1)^{i+1}} p^3 \sigma_{cc}\} \, .$$

Mit Rücksicht auf $(p^a p_c^b - p^b p_c^a)_c = p^a p_{cc}^b - p^b p_{cc}^a (a, b = 1, 2, 3)$ beweist man, dass

$$
\begin{aligned}
(43) \qquad & p^2 = -p^2 (p^1)^{-1} (-p^1) \, , \\
& -(p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)_c \, p_c^2 + (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1) p_{cc}^2 = \\
& = -p^2 (p^1)^{-1} \left[(p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1) \, p_c^1 - (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1) \, p_{cc}^1 \right] , \\
& -(p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)_c (p^2 p_c^3 - p^3 p_c^2) + (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)(p^2 p_c^3 - p^3 p_c^2)_c = \\
& = -p^2 (p^1)^{-1} \left[(p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)_c (p^1 p_c^3 - p^3 p_c^1) - \right. \\
& \left. - (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)(p^1 p_c^3 - p^3 p_c^1)_c \right] , \\
& -(p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)_c \, p^2 p^3 + (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)(p^2 p_c^3)_c + \\
& + (p^2 p_c^3 - p^3 p_c^2)(p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1) = -p^2 (p^1)^{-1} \left[(p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)_c \, p^1 p^3 - \right. \\
& \left. - (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)(p^1 p_c^3 - p^3 p_c^1) - (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)(p^1 p^3)_c \right]
\end{aligned}
$$

gilt.

Aus (42), (43) folgt

$$(44) \qquad s_{1c} = -p^2 (p^1)^{-1} \, s_{2c} \, .$$

Aus dem den Fall $h = 2$ betreffenden Teil des Satzes 3, aus (41) und (44) ergibt sich, dass bei $s_{21} \neq 0$ bzw. $s_{21} = 0$ kein, mit Rücksicht auf den Satz 3 in Betracht kommender, Vektor $\mathbf{s}(s_1(u_1, u_2), s_2(u_1, u_2), s_3(u_1, u_2))$ existiert, der die Gleichung (18) bzw. die Ungleichheit (19) erfüllt, und also mit Rücksicht auf die Definition 1 die betrachtete Linienkongruenz adjunktionsunfähig ist.

Bemerkung 2. Die Linienkongruenzen

$$\mathbf{p}_2 \Bigg(\cos (u_1 + u_2), \ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin (u_1 + u_2), \ \tfrac{1}{2} \sin (u_1 + u_2), \ a(u_2) \sin (u_1 + u_2) \, ,$$

$$b(u_2) \sin (u_1 + u_2), \ -2 \left[a(u_2) \cos (u_1 + u_2) + \frac{\sqrt{3}}{2} \, b(u_2) \sin (u_1 + u_2) \right] \Bigg) ,$$

$$2 \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}u_2} \neq \sqrt{(3)} \operatorname{tg} (u_1 + u_2) \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u_2} \, , \quad 0 < u_1 + u_2 < \frac{\pi}{2} \, ,$$

kann man als Beispiele der adjunktionsunfähigen Linienkongruenzen aus dem Satz 5 auffassen.