ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 105 * PRAHA 19. 5. 1980 * ČÍSLO 2

RELATION BETWEEN REAL AND COMPLEX PROPERTIES OF THE LAPLACE TRANSFORM

MIROSLAV SOVA, Praha

(Received February 28, 1977)

It is well-known that Widder's theory [1] of representability by Laplace transform of numerical functions gives necessary and sufficient conditions for the existence of originals of certain classes. These conditions are especially simple for the class of images of exponentially bounded measurable functions and we shall deal in the sequel only with this type.

Widder's theory was generalized to reflexive Banach spaces by MIYADERA [2] and further results and generalizations to non-reflexive Banach spaces were obtained by the author in [3] and [4].

All above mentioned results are of Widder's type, i.e. they are based on the behavior of the derivatives of the Laplace images on the real halfaxis. But there are also other sufficient conditions based on the behavior of the images on lines parallel to the imaginary axis. In the sequel we shall show a simple way how to get also conditions of complex character from Widder's type theories.

For the sake of simplicity we restrict ourselves to reflexive spaces only because Miyadera's theorem [2] will be our basic tool. But it is easy to obtain in this way also the corresponding results for the situations examined in [3] and [4].

1. We shall use the following notation: (1) $\mathbb{R}$ – the real number field, (2) $\mathbb{R}^+$ – the set of all positive real numbers, (3) (ω, ∞) – the set of all real numbers greater than ω if $\omega \in \mathbb{R}$, (4) $\mathbb{C}$ – the complex number field, (5) $(\operatorname{Re} z > \omega)$ – the set of all complex numbers whose real part is greater than ω if $\omega \in \mathbb{R}$, (6) $M_1 \to M_2$ – the set of all mappings of the whole set M_1 into the set M_2.

2. In the whole paper, E will denote a Banach space over $\mathbb{C}$ with the norm $\|\cdot\|$.

3. Functional analysis (including the theory of vector-valued functions) is used to the extent of the first three chapters of [7], certain special subjects (e.g. II.4, III.3) being omitted. The reader interested only in the numerical case needs nothing more than the basic facts from the modern differential and integral calculus.

4. Lemma. *Let* $\alpha \in R$, $J \in \{z : \operatorname{Re} z \geqq \alpha\} \to E$ *and* $k \in \{0, 1, \ldots\}$. *If*

(α) *the function* J *is continuous on the set* $\{z : \operatorname{Re} z \geqq \alpha\}$,

(β) *the function* J *is analytic on the set* $\{z : \operatorname{Re} z > \alpha\}$,

(γ) *there is a* $K \geqq 0$ *so that* $\|J(z)\| \leqq K(1 + |z|)^k$ *for every* $z \in C$, $\operatorname{Re} z \geqq \alpha$,

then

$$J^{(p)}(\lambda) = (-1)^p \frac{p!}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J(\alpha + i\beta)}{(\lambda - \alpha - i\beta)^{p+1}} \, d\beta$$

for every $\lambda > \alpha$ *and* $p \in \{k + 1, k + 2, \ldots\}$.

Proof. Let us fix a $\lambda > \alpha$.

Further, let $K \geqq 0$ be chosen so that (γ) holds.

By virtue of Cauchy's integral theorem we obtain from (α) and (β) that (a sketch will be helpful)

$$(1) \qquad \frac{2\pi}{p!} J^{(p)}(\lambda) = -\int_{-N}^{N} \frac{J(\alpha + i\beta)}{(\alpha + i\beta - \lambda)^{p+1}} \, d\beta + \int_{-N}^{N} \frac{J(\alpha + 2N + i\beta)}{(\alpha + 2N + i\beta - \lambda)^{p+1}} \, d\beta + i\int_{0}^{2N} \frac{J(\alpha + \eta + iN)}{(\alpha + \eta + iN - \lambda)^{p+1}} \, d\eta - i\int_{0}^{2N} \frac{J(\alpha + \eta - iN)}{\alpha + \eta - iN - \lambda)^{p+1}} \, d\eta$$

for every $p \in \{0, 1, \ldots\}$ and $N > \frac{1}{2}\lambda$.

Using (γ), we obtain

$$(2) \qquad \left\| \frac{J(\alpha + i\beta)}{(\alpha + i\beta - \lambda)^{p+1}} \right\| \leqq \frac{K(1 + (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2})^k}{((\lambda - \alpha)^2 + \beta^2)^{(p+1)/2}}$$

for every $\beta \in R$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$.

$$(3) \quad \left\| \int_{-N}^{N} \frac{J(\alpha + 2N + i\beta)}{(\alpha + 2N + i\beta - \lambda)^{p+1}} \, d\beta \right\| \leqq K \int_{-N}^{N} \frac{[1 + ((\alpha + 2N)^2 + \beta^2)^{1/2}]^k}{[(\lambda - \alpha + 2N)^2 + \beta^2]^{(p+1)/2}} \, d\beta \leqq$$

$$\leqq K \int_{-N}^{N} \frac{[1 + ((\alpha + 2N)^2 + N^2)^{1/2}]^k}{(\lambda - \alpha + 2N)^{p+1}} \, d\beta = \frac{2NK[1 + ((\alpha + 2N)^2 + N^2)^{1/2}]^k}{(\lambda - \alpha + 2N)^{p+1}},$$

$$\left\| \int_{0}^{2N} \frac{J(\alpha + \eta + iN)}{(\alpha + \eta + iN - \lambda)^{p+1}} \, d\eta \right\| \leqq K \int_{0}^{2N} \frac{[1 + ((\alpha + \eta)^2 + N^2)^{1/2}]^k}{[(\lambda + \eta - \alpha)^2 + N^2]^{(p+1)/2}} \, d\eta \leqq$$

$$\leqq K \int_{0}^{2N} \frac{[1 + ((\alpha + 2N)^2 + N^2)^{1/2}]^k}{N^{p+1}} \, d\eta \leqq \frac{2K[1 + ((\alpha + 2N)^2 + N^2)^{1/2}]^k}{N^p},$$

$$\left\| \int_0^{2N} \frac{J(\alpha + \eta - iN)}{(\alpha + \eta + iN - \lambda)^{p+1}} d\eta \right\| \leqq \frac{2K[1 + ((\alpha + 2N)^2 + N^2)^{1/2}]^k}{N^p}$$

for every $p \in \{0, 1, \ldots\}$ and $N > \frac{1}{2}\lambda$.

It follows from (2) that

(4) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J(\alpha + i\beta)}{(\alpha + i\beta - \lambda)^{p+1}} d\beta \quad \text{exists for every} \quad p \in \{k + 1, k + 2, \ldots\},$$

(5) $$\frac{J(\alpha + i\beta)}{(\alpha + i\beta - \lambda)^{p+1}} d\beta \to_{N-\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J(\alpha + i\beta)}{(\alpha + i\beta - \lambda)^{p+1}} d\beta$$

for every $p \in \{k + 1, k + 2, \ldots\}$.

Further, by (3) we obtain

(6) $$\int_{-N}^{N} \frac{J(\alpha + 2N + i\beta)}{(\alpha + 2N + i\beta - \lambda)^{p+1}} d\beta \to_{N\to\infty} 0,$$

$$\int_0^{2N} \frac{J(\alpha + \eta + iN)}{(\alpha + \eta + iN - \lambda)^{p+1}} d\eta \to_{N\to\infty} 0,$$

$$\int_0^{2N} \frac{J(\alpha + \eta - iN)}{(\alpha + \eta - iN - \lambda)^{p+1}} d\eta \to_{N\to\infty} 0$$

for every $p \in \{k + 1, k + 2, \ldots\}$.

The desired result follows from (1), (4), (5) and (6).

5. Proposition. *Let M, ω be two nonnegative constants and $F \in (\text{Re}\, z > \omega) \to E$. If the function F is analytic in the domain $(\text{Re}\, z > \omega)$, then the following two statements (A), (B) are equivalent:*

(A) (I) *for every $\alpha > \omega$, there exist a $k \in \{0, 1, \ldots\}$ and a $K \geqq 0$ so that $\|F(z)\| \leqq K(1 + |z|)^k$ for every $z \in C$, $\text{Re}\, z > \alpha$,*

(II) *for every $\alpha > \omega$, there exists an $l \in \{0, 1, \ldots\}$ so that*

$$\frac{1}{2\pi} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\alpha + i\beta)}{(1 - is\beta)^r} d\beta \right\| \leqq M$$

for every $s > 0$ and $r \in \{l + 2, l + 3, \ldots\}$,

(III) $F(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \infty,\ \lambda > \omega)$;

(B) $$\|F^{(p)}(\lambda)\| \leqq \frac{Mp!}{(\lambda - \omega)^{p+1}}$$

for every $\lambda > \omega$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$.

Proof. (A) $\Rightarrow$ (B). We first fix an arbitrary $\alpha > \omega$.

Now we choose $k, l \in \{0, 1, \ldots\}$ so that the assumptions A (I), (II) hold.

Denoting $J(z) = F(z)$ for $z \in C$, $\operatorname{Re} z > \alpha$, we observe that according to (A) (I), all assumptions of Lemma 4 are fulfilled and consequently we obtain

$$(1) \qquad F^{(p)}(\lambda) = (-1)^p \frac{p!}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\alpha + i\beta)}{(\lambda - \alpha - i\beta)^{p+1}} \, d\beta$$

for every $\lambda > \alpha$ and $p \in \{k + 1, k + 2, \ldots\}$.

Further, we write

(2) $q = \max(k, l)$.

It follows from (A) (II) and from (1) and (2) that

$$(3) \qquad \|F^{(p)}(\lambda)\| = \frac{p!}{2\pi} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\alpha + i\beta)}{(\lambda - \alpha - i\beta)^{p+1}} \, d\beta \right\| =$$

$$= \frac{p!}{(\lambda - \alpha)^{p+1}} \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\alpha + i\beta)}{\left(1 - i \dfrac{1}{\lambda - \alpha} \beta\right)^{p+1}} \, d\beta \right\| \leqq \frac{Mp!}{(\lambda - \alpha)^{p+1}}$$

for every $\lambda > \alpha$ and $p \in \{q + 1, q + 2, \ldots\}$.

Let us now define

$$(4) \qquad F_0(\lambda) = \frac{(-1)^q}{q!} \int_{\lambda}^{\infty} (\mu - \lambda)^q F^{(q+1)}(\mu) \, d\mu \quad \text{for} \quad \lambda > \alpha$$

which is admissible according to (3).

Further, we obtain easily from (3) and (4) that

$$(5) \qquad F_0^{(p)}(\lambda) = \frac{(-1)^{q-p}}{(q - p)!} \int_{\lambda}^{\infty} (\mu - \lambda)^{q-p} F^{(q+1)}(\mu) \, d\mu \quad \text{for every} \quad \lambda > \alpha \quad \text{and}$$

$p \in \{0, 1, \ldots, q\}$,

(6) $F_0^{(q+1)}(\lambda) = F^{q+1}(\lambda)$ for every $\lambda > \alpha$.

Now we are able to prove that

$$(7) \qquad \|F_0^{(p)}(\lambda)\| \leqq \frac{Mp!}{(\lambda - \alpha)^{p+1}} \quad \text{for every} \quad \lambda > \alpha \quad \text{and} \quad p \in \{0, 1, \ldots, q + 1\}.$$

Indeed we see from (5) that

$$(8)\qquad F_0^{(p)}(\lambda) = \int_\lambda^\infty F_0^{(p+1)}(\mu)\,\mathrm{d}\mu \quad \text{for every} \quad \lambda > \alpha \quad \text{and} \quad p \in \{0, 1, \ldots, q\}.$$

By (3) and (6)

$$(9)\qquad \|F_0^{(q+1)}(\lambda)\| \leqq \frac{M(q+1)!}{(\lambda-\alpha)^{q+2}} \quad \text{for every} \quad \lambda > \alpha\,.$$

Now (7) follows from (8) and (9) by a simple finite induction.

On the other hand, we see from (6) that $F_0 - F$ is a polynomial. Further, by assumption (A) (III) and by (7), $F_0(\lambda) - F(\lambda) \to_{\lambda\to\infty} 0$. Both these facts imply that

$$(10)\qquad F_0(\lambda) = F(\lambda) \quad \text{for every} \quad \lambda > \alpha\,.$$

Since $\alpha > \omega$ was chosen arbitrary, we see from (3), (7) and (10) that

$$(11)\quad \|F^{(p)}(\lambda)\| \leqq \frac{Mp!}{(\lambda-\alpha)^{p+1}} \quad \text{for every} \quad \alpha > \omega\,, \quad \lambda > \alpha \quad \text{and} \quad p \in \{0, 1, \ldots\}\,.$$

Now letting $\alpha \to \omega_+$ in (11) we obtain at once the desired property (B).

The proof of (A) $\Rightarrow$ (B) is complete.

(B) $\Rightarrow$ (A). We need the following relation

$$(1)\qquad \lambda - |\lambda - z| \to_{\substack{\lambda\to\infty \\ \lambda > \operatorname{Re} z}} \operatorname{Re} z \quad \text{for every} \quad z \in C\,, \quad \operatorname{Re} z > 0\,.$$

Indeed, we can write

$$\lambda - |\lambda - z| = \lambda - [(\lambda - \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2]^{1/2} =$$

$$= \lambda - (\lambda - \operatorname{Re} z)\left[1 + \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\lambda - \operatorname{Re} z}\right)^2\right]^{1/2} =$$

$$= \lambda\left(1 - \left[1 + \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\lambda - \operatorname{Re} z}\right)^2\right]^{1/2}\right) + \operatorname{Re} z\left[1 + \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\lambda - \operatorname{Re} z}\right)^2\right]^{1/2} =$$

$$= -\frac{\lambda}{2}\int_0^{(\operatorname{Im} z/(\lambda - \operatorname{Re} z))^2} \frac{1}{(1+\alpha)^{1/2}}\,\mathrm{d}\alpha + \operatorname{Re} z\left[1 + \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\lambda - \operatorname{Re} z}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Clearly the second member in the last term tends to $\operatorname{Re} z$ as $\lambda \to \infty$. The first tends to zero because

$$\lambda\int_0^{(\operatorname{Im}/(\lambda - \operatorname{Re} z))^2} \frac{1}{(1+\alpha)^{1/2}}\,\mathrm{d}\alpha \leqq \lambda\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\lambda - \operatorname{Re} z}\right)^2.$$

Hence (1) holds.

According to (1), for every $z \in C$, Re $z > \omega$, there exists $\lambda(z) > \omega$ so that

$$\lambda - \omega > |z - \lambda| \quad \text{for every} \quad \lambda > \lambda(z). \tag{2}$$

Because the function F is assumed analytic in the domain (Re $z > \omega$) we obtain from (B) and (2) that

$$\|F(z)\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^k(\lambda)}{k!} (z - \lambda)^k \right\| \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|F^{(k)}(\lambda)\|}{k!} |z - \lambda|^k \leqq \tag{3}$$

$$\leqq M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \omega)^{k+1}} |z - \lambda|^k = \frac{M}{\lambda - \omega} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|z - \lambda|}{\lambda - \omega} \right)^k =$$

$$= \frac{M}{\lambda - \omega} \frac{1}{1 - \dfrac{|z - \lambda|}{\lambda - \omega}} = \frac{M}{\lambda - \omega - |z - \lambda|} \quad \text{for every} \quad z \in C,$$

Re $z > \omega$ and $\lambda > \lambda(z)$.

Letting $\lambda \to \infty$, we get from (1) and (3) that

$$\|F(z)\| \leqq \frac{M}{\operatorname{Re} z - \omega} \quad \text{for every} \quad z \in C, \quad \operatorname{Re} z > \omega. \tag{4}$$

It is clear from (4) that the conditions (A) (I), (III) are fulfilled and it remains to prove (A) (II).

Given a fixed $\alpha > \omega$, let us denote $J(z) = F(z)$ for $z \in C$, Re $z \geqq \alpha$, we see from (4) that all assumptions of Lemma 4 are fulfilled with $k = 0$ and consequently we obtain

$$F^{(p)}(\lambda) = (-1)^p \frac{p!}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\alpha + i\beta)}{(\lambda - \alpha - i\beta)^{p+1}} \, d\beta \tag{5}$$

for every $\alpha > \omega$, $\lambda > \alpha$ and $p \in \{1, 2, \ldots\}$.

Writing $\lambda - \alpha = s$ and $p + 1 = r$ in (5) we obtain that

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\alpha + i\beta)}{(1 - is\beta)^r} \, d\beta = (-1)^p \frac{s^r}{(r - 1)!} F^{(r-1)}(s + \alpha) \tag{6}$$

for every $\alpha > \omega$, $s > 0$ and $r \in \{2, 3, \ldots\}$.

It is now immediate that (B) and (6) give (A) (II) with $l = 0$.

The proof of (B) $\Rightarrow$ (A) is complete.

6. Auxiliary theorem (Miyadera [2], Widder [1] in the numerical case). *Let M, ω be two nonnegative constants and $F \in (\omega, \infty) \to E$. If the space E is reflexive, then* *the following two statements* (A), (B) *are equivalent:*

(A) (I) *the function F is infinitely differentiable on* (ω, ∞),

(II) $$\left\| \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\lambda^p} F(\lambda) \right\| \leqq \frac{Mp!}{(\lambda - \omega)^{p+1}} \quad \textit{for every} \quad \lambda > \omega \quad \textit{and}$$

$p \in \{0, 1, \ldots\}$;

(B) *there exists a function $f \in \mathbb{R}^+ \to E$ such that*

(I) *f is measurable on* $\mathbb{R}^+$,

(II) $\|f(t)\| \leqq M\mathrm{e}^{\omega t}$ *for almost all* $t \in \mathbb{R}^+$,

(III) $$F(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\tau} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau \quad \textit{for every} \quad \lambda > \omega\,.$$

7. **Theorem.** *Let M, ω be two nonnegative constants and $F \in (\mathrm{Re}\, z > \omega) \to E$. If the space E is reflexive, then the following two statements* (A), (B) *are equivalent:*

(A) (I) *the function F is analytic in the domain* $(\mathrm{Re}\, z > \omega)$,

(II) *for every $\alpha > \omega$, there exist a $k \in \{0, 1, \ldots\}$ and a $K \geqq 0$ so that* $\|F(z)\| \leqq K(1 + |z|)^k$ *for every* $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, z > \alpha$,

(III) *for every $\alpha > \omega$, there exists an $l \in \{0, 1, \ldots\}$ so that*

$$\frac{1}{2\pi} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\alpha + \mathrm{i}\beta)}{(1 - \mathrm{i}s\beta)^r} \mathrm{d}\beta \right\| \leqq M$$

for every $s > 0$ *and* $r \in \{l + 2, l + 3, \ldots\}$,

(IV) $F(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \infty,\ \lambda > \omega)$;

(B) *there exists a function $f \in \mathbb{R}^+ \to E$ such that*

(I) *f is measurable on* $\mathbb{R}^+$,

(II) $\|f(t)\| \leqq M\mathrm{e}^{\omega t}$ *for almost every* $t \in \mathbb{R}^+$,

(III) $$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z\tau} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau = F(z) \quad \textit{for every} \quad z \in \mathbb{C}\,, \quad \mathrm{Re}\, z > \omega\,.$$

Proof. Immediate consequence of Theorem 6 and Proposition 5.

8. **Remark.** In an analogous way as above, it is possible to get complex characterizations of Laplace transforms of exponentially Lipschitzian and exponentially weakly compactly bounded functions – cf. [3], [4] – and also of analogous types of integrable functions.

In the case of exponentially Lipschitzian functions the reader obtains easily the corresponding result from Theorem 4 of [3] by means of Proposition 5 which plays the fundamental role in the relation between "real" and "complex" characteristic properties of Laplace transform.

In the case of exponentially weakly compactly bounded functions, we apply Theorem 13 of [4] but before applying Proposition 5, this must be somewhat modified. Namely, we first choose a convex circled closed subset C of E and replace the inequality in (A) (III) by

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\alpha+\mathrm{i}\beta)}{(1-\mathrm{i}s\beta)^r}\,\mathrm{d}\beta\in C \quad \textit{for every} \quad \alpha>\omega\,,\ s>0 \quad \textit{and} \quad r\in\{l+2,\ l+3,\ \ldots\}\,,$$

and further (B) by

$$F^{(p)}(\lambda)\in\frac{p!}{(\lambda-\omega)^{p+1}}\,C \quad \textit{for every} \quad \lambda>\omega \quad \textit{and} \quad p\in\{0,1,\ldots\}\,.$$

The proof of such a modified Proposition 5 proceeds without essential changes and may be left to the reader.

9. Remark. The condition (A) (III) of Theorem 7 represents a weakening of classically known sufficient conditions of the type of absolute integrability of F over lines parallel to imaginary axis, i.e. of the type

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|F(\alpha+\mathrm{i}\beta)\|\,\mathrm{d}\beta<\infty\,.$$

See, for example, [5, Chap. VII] or [6].

10. Remark. It is clear that the inequality in (A) (III) of Theorem 7 cannot be replaced by

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\|F(\alpha+\mathrm{i}\beta)\|}{|(1-\mathrm{i}s\beta)^r|}\,\mathrm{d}\beta\leqq M$$

for every $s>0$ and $r\in\{l+2,\ l+3,\ldots\}$,

since this implies, by Fatou's lemma,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\|F(\alpha+\mathrm{i}\beta)\|\,\mathrm{d}\beta\leqq M$$

and this inequality is essentially less general than that of (A) (III) as may be seen from the function $F(z)=1/z$.

11. Remark. The conditions (A) (I) and (II) of Theorem 7 may be understood as necessary and sufficient conditions for the function F to be the Laplace transform of an exponentially bounded distribution with nonnegative support (cf. [8]). Thus the conditions (A) (III) and (IV) of the same theorem specify the class of functions whose distribution originals are functions.

References

[1] *Widder, D. V.:* The Laplace transform, 1946.
[2] *Miyadera, I.:* On the representation theorem by the Laplace transformation of vector-valued functions, Tôhoku Math. J., *8* (1956), 170—180.
[3] *Sova, M.:* The Laplace transform of exponentially Lipschitzian vector-valued functions, Čas. pěst. mat., *104* (1979), 370—381.
[4] *Sova, M.:* The Laplace transform of exponentially bounded vector-valued functions, Čas. pěst. mat., *105* (1980), 1—13.
[5] *Doetsch, G.:* Handbuch der Laplace-Transformation, Band I, 1950.
[6] *Ditkin, V. A.:* Operacionoje isčislenije, Uspechi mat. nauk, 1947, No 6, 75—158.
[7] *Hille, E., Phillips, R. S.:* Functional analysis and semi-groups, 1957.
[8] *Doetsch, G.:* Introduction to the theory and application of the Laplace transform, 1974.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

ADJUNKTIONSFÄHIGE ZWEIDIMENSIONALE KUGEL- UND LINIENMANNIGFALTIGKEITEN IM DREIDIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUM

ZDENĚK VANČURA, Praha

(Eingegangen am 16. Mai 1977)

Im vorgelegten Artikel, der mit [11], [12], [13] eng zusammenhängt, versuchen wir den Begriff von adjunktionsfähigen bzw. adjunktionsunfähigen zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum zweckmässig zu definieren und systematisch zu studieren*).

Definition 1. *Die zweidimensionale Kugelmannigfaltigkeit* (*Kugelkongruenz*) wollen wir als *adjunktionsfähig* bezeichnen, wenn zu ihr eine adjungierte zweidimensionale Linienmannigfaltigkeit existiert.

Die zweidimensionale Linienmannigfaltigkeit (*Linienkongruenz*) wollen wir als *adjunktionsfähig* bezeichnen, wenn eine zweidimensionale Kugelmannigfaltigkeit existiert, zu welcher die zweidimensionale Linienmannigfaltigkeit adjungiert wird.

Die zweidimensionale Kugel- bzw. *Linienmannigfaltigkeit*, welche nicht adjunktionsfähig ist, wollen wir als *adjunktionsunfähig* bezeichnen.

Satz 1. *Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kugelkongruenz* $*^2\mathbf{p}(*\mathbf{s}(*u_1, *u_2); *r(*u_1, *u_2)) = {}^2\mathbf{p}(*u_1, *u_2) = {}^4\mathbf{p}(*u_1, *u_2, *u_3 = c_3\ *u_4 = c_4) = \mathbf{p}(*u_1, *u_2, *u_3 = c_3, *u_4 = c_4)$, *wo* $*u_1, \ldots, *u_4$ *Parameter aus* [12] (*Gleichungen* (9)) *des Kugelraums* $\mathbf{p}$ *sind, adjunktionsfähig ist, besteht darin, dass bei den Tensoren* $*^{ss}T_{ij}(*u_1, *u_2) = *^{ss}T_{ij}(*u_1, *u_2, *u_3 = c_3, *u_4 = c_4) = *^{ss}T_{ij}$, $*^{ls}T_{ij}(*u_1, *u_2) = *^{ls}T_{ij}(*u_1, *u_2) = *^{ls}T_{ij}(*u_1, *u_2, *u_3 = c_3, *u_4 = c_4) = *^{ls}T_{ij}$ *aus* [12] (*Gleichungen* (3) *bis* (8)), *und also mit Rücksicht auf* [11] (*Satz* 1.10, *Gleichung* (1,89)) *und* [12] (*Gleichungen* (10)) *bei*

*) Wegen der Druckfähigkeit erscheint man notwendig die Bezeichnungen aus [11], [12], [13] folgendermassen zu vereinfachen: Die über den Buchstaben T, f, $\mathbf{p}$ stehenden Indizes links oben an diese Buchstaben anzubringen, alle anderen über bzw. unter den Buchstaben stehenden Indizes wegzulassen, das Symbol aus [13] (Gleichung (79) bzw. (81)) durch D bzw. D zu ersetzen.

$$(1) \qquad {}^{*ls}T_{ij} = {}^*r\,{}^*r_k\,{}^*\Gamma^k_{ij} - {}^*r\,{}^*r_{ij} - {}^*r_i\,{}^*r_j + {}^{*ss}T_{ij}, \quad i, j = 1, 2,$$

$${}^*\Gamma^k_{ij} = \tfrac{1}{2}\,{}^{*ss}T^{ka}\left(\frac{\partial\,{}^{*ss}T_{ja}}{\partial\,{}^*u_i} + \frac{\partial\,{}^{*ss}T_{ia}}{\partial\,{}^*u_j} - \frac{\partial\,{}^{*ss}T_{ij}}{\partial\,{}^*u_a}\right), \quad {}^{*ss}T^{ka}\,{}^{*ss}T_{kb} = \delta^a_b,$$

$$k, a, b = 1, 2,$$

einer der folgenden Fälle eintritt:

a) *Die Mittelpunktfläche* $^*\mathbf{s}$ *ist unabwickelbar.*

b) *Die Mittelpunktfläche* $^*\mathbf{s}$ *ist abwickelbar, von einer Ebene verschieden, und bei ihren Asymptotenlinien* $^*u_i =$ konst (i *ein von den Werten* 1, 2) *gilt*

$$(2) \qquad \left({}^{*ls}T_{ii+(-1)^{i+1}}({}^*u_1, {}^*u_2) = {}^{*ls}T_{ii+(-1)^{i+1}}({}^*u_1, {}^*u_2, {}^*u_3 = c_3, {}^*u_4 = c_4),\right.$$
$${}^{*ls}T_{i+(-1)^{i+1}i+(-1)^{i+1}}({}^*u_1, {}^*u_2) =$$
$$\left. = {}^{*ls}T_{i+(-1)^{i+1}i+(-1)^{i+1}}({}^*u_1, {}^*u_2, {}^*u_3 = c_3, {}^*u_4 = c_4)\right) \neq (0, 0).$$

c) *Die Mittelpunktfläche* $^*\mathbf{s}$ *ist eine Ebene und es gilt*

$$(3) \qquad \det\left|{}^{*ls}T_{ij}({}^*u_1, {}^*u_2) = {}^{*ls}T_{ij}({}^*u_1, {}^*u_2, {}^*u_3 = c_3, {}^*u_4 = c_4)\right| \neq 0,$$
$$i, j = 1, 2.$$

Beweis. Aus [11] (Behauptungen d), e), f), h), Gleichungen (4,8) bis (4,13)), aus [12] (Gleichungen (10)), aus der Unabhängigkeit der Tensoren $^*r$, $^*r_i$, ${}^{*ss}T_{ij}$, ${}^{*ds}T_{ij}$ von Bewegungen, die ein kartesisches Hilfskoordinatensystem $\langle {}^*S; {}^*\mathbf{s}_1, {}^*\mathbf{s}_2, {}^*\mathbf{d}\rangle$ in das fest gewählte kartesische Koordinatensystem $Oxyz$ überführen, aus der Definition der Linienkongruenz unter Anwendung der Plückerschen Linienkoordinaten ([5] I, Definition (1,1). S. 108) und aus der Definition 1 folgt:

Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kugelkongruenz $^2\mathbf{p}({}^*u_1, {}^*u_2)$ adjunktionsfähig ist, besteht darin, dass die Matrix

$$(4) \qquad \left\| \begin{matrix} 0, & 0, & -1, & -{}^*r\,{}^*r_2\,{}^{*ss}T_{22}^{-1/2}, & {}^*r\,{}^*r_1\,{}^{*ss}T_{11}^{-1/2}, & 0 \\ -{}^{*ds}T_{11}\,{}^{*ss}T_{11}^{-1}, & 0, & 0, & {}^{*ss}T_{11}^{-1/2}\,{}^{*ss}T_{22}^{-1/2}\,{}^{*ls}T_{12}, & -{}^{*ss}T_{11}^{-1}\,{}^{*ls}T_{11}, & {}^*r_2\,{}^{*ss}T_{11}^{-1}\,{}^{*ss}T_{22}^{-1/2}\,{}^{*ds}T_{11} \\ 0, & -{}^{*ds}T_{22}\,{}^{*ss}T_{22}^{-1}, & 0, & {}^{*ss}T_{22}^{-1}\,{}^{*ls}T_{22}, & -{}^{*ss}T_{11}^{-1/2}\,{}^{*ss}T_{22}^{-1/2}\,{}^{*ls}T_{12}, & {}^*r_1\,{}^{*ss}T_{11}^{-1/2}\,{}^{*ss}T_{22}^{-1}\,{}^{*ds}T_{22} \end{matrix} \right\|$$

den Rang 3 hat.

Von hier aus und daraus, dass die Fläche $^*\mathbf{s}$ unabwickelbar bzw. abwickelbar, von einer Ebene verschieden, mit Asymptotenlinien $^*u_i =$ konst (i ein von den Werten 1, 2), bzw. die Ebene durch die Beziehungen ${}^{*ds}T_{11}\,{}^{*ds}T_{22} \neq 0$, ${}^{*ds}T_{12} = 0$, bzw. ${}^{*ds}T_{ii} \neq 0$, ${}^{*ds}T_{ii+(-1)^{i+1}} = 0$, ${}^{*ds}T_{i+(-1)^{i+1}i+(-1)^{i+1}} = 0$, bzw. ${}^{*ds}T_{ij} = 0$ ($i, j = 1, 2$) charakterisiert wird, folgen die Behauptungen des Satzes 1.

Satz 2. *Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die, in beliebigen Parametern* $u_1, \ldots, u_4$ *des Kugelraums* $\mathbf{p} = {}^4\mathbf{p}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ *durch die Gleichungen*

$$(5) \qquad \varphi_k(u_1, u_2, u_3, u_4) = c_k\,, \quad \det \left|\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_j}\right| \neq 0\,, \quad c_k = \text{konst}\,, \quad (k, j = 3, 4)$$

ausgedrückte Kugelkongruenz ${}^2\mathbf{p} = {}^2\mathbf{p}(u_1, u_2) = (\mathbf{s}(s_1(u_1, u_2), s_2(u_1, u_2), s_3(u_1, u_2)); r(u_1, u_2))$ *adjunktionsfähig ist, besteht darin, dass (bei zweckmässiger Bezeichnung von Parametern, bei Summationsindizes* $k = 1, 2$, $m, n, p, q, u, v = 1, 2, 3, 4$ *und bei nicht gebundenen Buchstabenindizes* $b, c = 1, 2$*) einer der folgenden Fälle* a), b)$_{1,2}$, c) *eintritt:*

a)

$$(6) \qquad \det \left|D_b^p D_c^q \, {}^{ds}T_{pq}\right| \neq 0\,,$$

b)$_1$

$$(7)_1 \qquad {}^{ss}T_{mn} {}^{ds}T_{pq} D_2^n D_2^q (D_1^m D_2^p - D_2^m D_1^p) \neq 0\,,$$

$$(7) \qquad D_i^m D_i^n {}^{ds}T_{mn} \neq 0\,, \quad D_i^m D_{i+(-1)^{i+1}}^n {}^{ds}T_{mn} = D_{i+(-1)^{i+1}}^m D_{i+(-1)^{i+1}}^n {}^{ds}T_{mn} = 0\,,$$

$$\begin{aligned}
(8) \quad & (rD^2(\det|D_b^p D_c^q \, {}^{ss}T_{pq}|)^{-1} D_k^u r_u D_{k+(-1)^{k+1}}^m D_{k+(-1)^{k+1}}^n \, {}^{ss}T_{mn}[(D^{-2} D_{i+(-1)^{i+1}}^p \,. \\
& .\, D_k^q \, {}^{ss}T_{pq})_v \, D_i^v + (D^{-2} D_i^p D_k^q \, {}^{ss}T_{pq})_v \, D_{i+(-1)^{i+1}}^v - (D^{-2} D_i^p D_{i+(-1)^{i+1}}^q \,. \\
& .\, {}^{ss}T_{pq})_v \, D_k^v] - 2rDD_{i+(-1)^{i+1}}^n (D^{-1} D_i^m r_m)_n - 2D_i^m D_{i+(-1)^{i+1}}^n r_m r_n + \\
& + 2D_i^m D_{i+(-1)^{i+1}}^n \, {}^{ss}T_{mn}\,, \\
& rD^2(\det|D_b^p D_c^q \, {}^{ss}T_{pq}|)^{-1} D_k^u r_u D_{k+(-1)^{k+1}}^m D_{k+(-1)^{k+1}}^n \, {}^{ss}T_{mn}[2(D^{-2} D_{i+(-1)^{i+1}}^p \,. \\
& .\, D_k^q \, {}^{ss}T_{pq})_v \, D_{i+(-1)^{i+1}}^v - (D^{-2} D_{i+(-1)^{i+1}}^p D_{i+(-1)^{i+1}}^q \, {}^{ss}T_{pq})_v \, D_k^v] - \\
& - 2rDD_{i+(-1)^{i+1}}^n (D^{-1} D_{i+(-1)^{i+1}}^m r_m)_n - 2D_{i+(-1)^{i+1}}^m D_{i+(-1)^{i+1}} r_m r_n + \\
& + 2D_{i+(-1)^{i+1}}^m D_{i+(-1)^{i+1}}^n \, {}^{ss}T_{mn}) \neq (0, 0)\,,
\end{aligned}$$

i ist einer der Werte 1, 2,

b$_2$)

$$\begin{aligned}
(7)_2 \qquad & {}^{ss}T_{mn} {}^{ds}T_{pq} D_j^n D_j^q (D_1^m D_2^p - D_2^m D_1^p) = 0\,, \quad j = 1, 2\,, \\
& {}^{ss}T_{mn} {}^{ds}T_{pq} (D_1^n D_2^q + D_2^n D_1^q)(D_1^m D_2^p - D_2^m D_1^p) \neq 0\,,
\end{aligned}$$

und die Gleichungen (7), (8) *für* $D_i^m = \boldsymbol{D}_i^m$ *und i ist einer der Werte* 1, 2,

c)

$$(9) \qquad D_i^p D_j^q \, {}^{ds}T_{pq} = 0 \quad i, j = 1, 2\,,$$

und bei (immer erreichbarem Wert) $s_3 = 0$

$$\begin{aligned}
(10) \qquad & \det |[rr_2 s_{j1} - rr_1 s_{j2} - s_k(s_{j1}s_{k2} - s_{j2}s_{k1})]_i (s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}) - \\
& - [rr_2 s_{j1} - rr_1 s_{j2} - s_k(s_{j1}s_{k2} - s_{j2}s_{k1})](s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21})_i| \neq 0 \quad i, j = 1, 2\,.
\end{aligned}$$

Dabei werden r, ${}^{ss}T_{mn}$, ${}^{ds}T_{mn}$ und $\boldsymbol{D}^n_c$, D, D^n_c in (6), $(7)_1$, (7), (8), $(7)_2$, (9) aus [12] (Gleichungen (8)) und aus [13] (Satz 17) genommen.

Beweis. Für den Tensor ${}^{*ss}T^{ka}$, für welchen mit Rücksicht auf ${}^{*ss}T^{ka}\,{}^{*ss}T_{kb} = \delta^a_b$ $(k, a, b = 1, 2)$ und auf [12] (Gleichungen (9)) ${}^{*ss}T^{ka} = \delta^{ka}(\det|{}^{*ss}T_{bc}|)^{-1}$ $.\,{}^{*ss}T_{k+(-1)^{k+1}a+(-1)^{a+1}}$ gilt, für die zuständigen Christoffelschen Symbole ${}^*\Gamma^k_{ij}$ aus (1) und für ${}^*r^*r_k{}^*\Gamma^k_{ij}$, $-{}^*r^*r_{ij}$, $-{}^*r_i{}^*r_j$, ${}^{*ss}T_{ij}$ bekommt man im Fall $b)_1$, im Fall $b)_2$ für $D^m_i = \boldsymbol{D}^m_i$, unter Anwendung von [13] (Satz 17, Gleichungen (84), (85), (86) und ihrem Beweis)

$$
\begin{aligned}
(11)\qquad {}^{*ss}T^{ka} &= \delta^{ka}(\det|D^{-2}D^p_bD^q_c\,{}^{ss}T_{pq}|)^{-1}\,D^{-2}D^m_{k+(-1)^{k+1}}D^n_{a+(-1)^{a+1}}\,{}^{ss}T_{mn}\,,\\
{}^*\Gamma^k_{ij} &= \tfrac{1}{2}D(\det|D^p_bD^q_c\,{}^{ss}T_{pq}|)^{-1}\,D^m_{k+(-1)^{k+1}}D^n_{k+(-1)^{k+1}}\,{}^{ss}T_{mn}\,.\\
&\quad.\,[(D^{-2}D^p_jD^q_k\,{}^{ss}T_{pq})_n\,D^n_i + (D^{-2}D^p_iD^q_k\,{}^{ss}T_{pq})_n\,D^n_j - (D^{-2}D^p_iD^q_j\,{}^{ss}T_{pq})_n\,D^n_k]\,,\\
{}^*r^*r_k{}^*\Gamma^k_{ij} &= \tfrac{1}{2}r(\det|D^p_bD^q_c\,{}^{ss}T_{pq}|)^{-1}\,D^u_kr_uD^m_{k+(-1)^{k+1}}D^n_{k+(-1)^{k+1}}\,{}^{ss}T_{mn}\,.\\
&\quad.\,[(D^{-2}D^p_jD^q_k\,{}^{ss}T_{pq})_v\,D^v_i + (D^{-2}D^p_iD^q_k\,{}^{ss}T_{pq})_v\,D^v_j - (D^{-2}D^p_iD^q_j\,{}^{ss}T_{pq})_v\,D^v_k]\,,\\
-{}^*r^*r_{ij} &= -rD^{-1}D^n_j(D^{-1}D^m_ir_m)_n\,,\\
-{}^*r_i{}^*r_j &= -D^{-2}D^m_iD^n_jr_mr_n\,,\\
{}^{*ss}T_{ij} &= D^{-2}D^m_iD^n_j\,{}^{ss}T_{mn}\,,
\end{aligned}
$$

und daraus folgt, unter Anwendung von (1) und von [12] (Gleichungen (7), (9), (10))

$$
\begin{aligned}
(12)\qquad {}^{*ls}T_{ij} &= \tfrac{1}{2}D^{-2}\{rD^2(\det|D^p_bD^q_c\,{}^{ss}T_{pq}|)^{-1}\,D^u_kr_uD^m_{k+(-1)^{k+1}}\,.\\
&\quad.\,D^n_{k+(-1)^{k+1}}\,{}^{ss}T_{mn}[(D^{-2}D^p_jD^q_k\,{}^{ss}T_{pq})_v\,D^v_i + (D^{-2}D^p_iD^q_k\,{}^{ss}T_{pq})_v\,D^v_j -\\
&\quad- (D^{-2}D^p_iD^q_j\,{}^{ss}T_{pq})_v\,D^v_k] - 2rDD^n_j(D^{-1}D^m_ir_m)_n - 2D^m_iD^n_jr_mr_n +\\
&\quad+ 2D^m_iD^n_j\,{}^{ss}T_{mn}\}\,,\quad i, j = 1, 2\,.
\end{aligned}
$$

Aus dem Satz 1, Behauptungen a), b) und daraus, dass (6) bzw. (7) eine unabwickelbare bzw. abwickelbare (von einer Ebene verschiedene, mit den Asymptotenlinien ${}^*u_i = konst$) Fläche charakterisiert, folgen die Behauptungen a), $b)_{1,2}$ des Satzes 2.

Aus dem Satz 1, Behauptung c) und aus [11] (Satz 5.3, Behauptung a) im Fall einer Ebene, Satz 1.3 im Fall $s_3 = 0$, und also, mit Rücksicht auf Gleichungen (1, 2), (1, 3), aus $d_{13} = d_{23} = 0$, $k(B) = k(AB) = 0$) bekommt man:

Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kugelkongruenz $(\boldsymbol{s}(s_1, s_2, 0); r)$ adjunktionsfähig ist, besteht darin, dass die Mittenfläche $\boldsymbol{l} = 2^{-1}(d_{24}d^{-1}_{12}, -d_{14}d^{-1}_{12}, 0)$ eine Fläche ist, d. h. die Vektoren $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2$ sind linear unabhängig, und demzufolge gilt

$$\det|d_{j4i}d_{12} - d_{j4}d_{12i}| \neq 0\,,\quad i, j = 1, 2\,.$$

Daraus und weiter aus (9) (mit Rücksicht auf [12], Gleichungen (10), (7) und auf [13], 1) im Beweis des Satzes 17 für eine Ebene charakteristisch) und aus (27), (29′) im Beweis des Satzes 3 bekommt man die Behauptung c) des Satzes 2.

Satz 3. 1. *Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Linienkongruenz* $\mathbf{p} = \mathbf{p}(p^1(u_1, u_2), \ldots, p^6(u_1, u_2))$, $\sum_{a=1}^{3} (p^a)^2 = 1$, $p^3 \neq 0$, *wo* h *den Rang der Matrix*

$$(13) \qquad \begin{Vmatrix} p^1, & p^2, & p^3 \\ p^1_1, & p^2_1, & p^3_1 \\ p^1_2, & p^2_2, & p^3_2 \end{Vmatrix}$$

bezeichnet, adjunktionsfähig ist, d. h. dass eine Kugelkongruenz ($\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_1(u_1, u_2), s_2(u_1, u_2), s_3(u_1, u_2))$; $r = r(u_1, u_2)$) *existiert, zu welcher die Linienkongruenz* $\mathbf{p}$ *adjungiert wird, besteht darin, dass*

entweder $h = 3$,

$$(14) \qquad s_i = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} p^1, & p^2, & p^3 \\ p^1_1, & p^2_1, & p^3_1 \\ p^1_2, & p^2_2, & p^3_2 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \lambda, & p^j, & p^k \\ \lambda_1, & p^j_1, & p^k_1 \\ \lambda_2, & p^j_2, & p^k_2 \end{vmatrix}$$

$$j \neq i \neq k\,, \quad j < k\,, \quad i, j, k = 1, 2, 3\,,$$

oder $h = 2$, $p^i p^j_c - p^i_c p^j \neq 0$, $i < j$, *dabei sind* i, j *zwei von den Werten* $1, 2, 3$, c *einer der Werte* $1, 2$, $h_\lambda = 2$ *der Rang der aus* (13) *durch Erweiterung um die Spalte* $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ *entstehenden Matrix,*

$$(15) \qquad s_i = (-1)^{k-i+\mathrm{inv}\,jk} \begin{vmatrix} p^i, & p^j \\ p^i_c, & p^j_c \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \lambda - p^k\sigma, & p^j \\ \lambda_c - p^k_c\sigma, & p^j_c \end{vmatrix},$$

$$s_j = (-1)^{k-j+\mathrm{inv}\,ik} \begin{vmatrix} p^i, & p^j \\ p^i_c, & p^j_c \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \lambda - p^k\sigma, & p^i \\ \lambda_c - p^k_c\sigma, & p^i_c \end{vmatrix},$$

$$s_k = \sigma\,, \quad i \neq k \neq j\,, \quad k = 1, 2, 3\,,$$

oder $h = 1$, $h_\lambda = 1$ *der Rang der aus* (13) *durch Erweiterung um die Spalte* $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ *entstehenden Matrix,*

$$(16) \qquad s_i = {}^i\sigma \quad i = 1, 2\,, \quad s_3 = (p^3)^{-1} \left(\lambda - \sum_{j=1}^{2} p^{j\,j}\sigma\right),$$

und

$$(17) \qquad r = \left[2 \int (p^3)^{-1} \left(p^4 s_{2i} - p^5 s_{1i} + p^3 \sum_{j=1}^{3} s_j s_{ji}\right) \mathrm{d}u_i + c\right]^{1/2} > 0$$

sind, dabei stellen $\lambda = \lambda(u_1, u_2)$, *bzw.* $\lambda = \lambda(u_1, u_2)$, $\sigma = \sigma(u_1, u_2)$, *bzw.* $\lambda = \lambda(u_1, u_2)$, ${}^i\sigma = {}^i\sigma(u_1, u_2)$ $i = 1, 2$ *solche Lösungen der partiellen Differentialgleichungen*

$$(18') \qquad [(p^3)^{-1} p^4]_2 s_{21} - [(p^3)^{-1} p^5]_2 s_{11} = [(p^3)^{-1} p^4]_1 s_{22} - [(p^3)^{-1} p^5]_1 s_{12},$$

$$(18) \qquad \sum_{i=1}^{3} p^i s_{ij} = 0, \quad j = 1, 2$$

dar, für welche

$$(19) \qquad s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} \neq 0,$$

$$(20) \qquad 1 - (D_k^m(r + u_4)_m)^2 (D_k^n D_k^p {}^{ss}T_{np})^{-1} > 0,$$

gilt und ausserdem im Fall $h = 2$ gelten die Bedingungen $\mathrm{b})_{1,2}$ *aus dem Satz* 2, *und im Fall $h = 1$ die Bedingungen* c) *aus dem Satz* 2, *wo die in* $(7)_1$, (7), (8), $(7)_2$, (9), (20) *stehenden Ausdrücke aus* [12] (*Gleichungen* (4), (5), (6), (8)) *und aus* [13] (*Satz* 17), *unter Anwendung von* ${}^4p_i = s_i + \delta_{i3}u_3$ $(i = 1, 2, 3)$, ${}^4p_6 = r + u_4$ $({}^4p_5 = 1)$, $\varphi_k = u_k$ $(k = 3, 4)$ *entstehen.*

2. *Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kugelkongruenz* ($\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_1, s_2, s_3)$; r) *aus der Behauptung* 1 *von Kugeln mit konstantem Halbmesser gebildet wird, besteht darin, dass*

$$(21) \qquad p^4 s_{2i} - p^5 s_{1i} + p^3 \sum_{j=1}^{3} s_j s_{ji} = 0, \quad i = 1, 2$$

gilt.

Beweis. Mit Rücksicht auf die Proportionalität der Plückerschen Linienkoordinaten p^1, p^2, p^3 mit den Richtungskosinen von Geraden der Linienkongruenz kann man immer erreichen, dass $\sum_{a=1}^{3} (p^a)^2 = 1$, $p^3 \neq 0$ gilt.

1a) Es sei eine adjunktionsfähige Linienkongruenz $\mathbf{p}(p^1, \ldots, p^6)$ gegeben, d. h. es existiert eine Kugelkongruenz ($\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_1, s_2, s_3)$; r), zu welcher die Linienkongruenz $\mathbf{p}$ adjungiert wird. Mit Rücksicht auf [11] (Behauptung e) im Beweis des Satzes 4.1) kann man dann die Plückerschen Linienkoordinaten so normieren, dass

$$(22) \qquad -\mathbf{d} = (p^1, p^2, p^3), \quad p^3 \neq 0,$$

$$(23) \qquad -\mathbf{d} \times \mathbf{l} = (p^4, p^5, p^6)$$

und also für $\mathbf{l} = \mathbf{l}(l_1, l_2, l_3)$ mit Rücksicht auf $p^1p^4 + p^2p^5 + p^3p^6 = 0$

$$(24) \qquad l_1 = (p^3)^{-1} [p^1(p^3\lambda - p^1p^5 + p^2p^4) + p^5],$$

$$l_2 = (p^3)^{-1} [p^2(p^3\lambda - p^1p^5 + p^2p^4) - p^4], \quad l_3 = p^3\lambda - p^1p^5 + p^2p^4$$

gilt, wo $\lambda = \lambda(u_1, u_2)$ eine stetig differenzierbare Funktion bezeichnet.

Aus [11] (Definitionen 1.1, 1.2, 4.1, Satz 1.2, Gleichungen (1,2), (1,18)), aus den Gleichungen (22), (24) und aus der Theorie der Hüllflächen des zweiparametrigen

Flächensystems folgt, dass die Mittelpunktfläche $\mathbf{s}(s_1, s_2, s_3)$ der Kugelkongruenz $(\mathbf{s}(s_1, s_2, s_3); r)$ als Hüllfläche des zweiparametrigen Systems von Ebenen

$$p^1x + p^2y + p^3z = \lambda \tag{25}$$

erscheint, und also (18),

$$\begin{aligned} p^1s_1 + p^2s_2 + p^3s_3 &= \lambda\,, \\ p^1_1s_1 + p^2_1s_2 + p^3_1s_3 &= \lambda_1\,, \\ p^1_2s_1 + p^2_2s_2 + p^3_2s_3 &= \lambda_2\,, \end{aligned} \tag{26}$$

$$d_{12} = 2(s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}) \neq 0 \tag{27}$$

gilt.

Aus den vorhergehenden Festellungen, aus den Eigenschaften des sphärischen Abbildes der unabwickelbaren $(h = 3)$ bzw. abwickelbaren $(h = 2)$ Flächen, aus den Gleichungen $\boldsymbol{d} \,.\, \boldsymbol{d} = 1$ $\boldsymbol{d} \,.\, \boldsymbol{d}_i = 0$ $(i = 1, 2)$ und aus dem Satz 1 folgt die Notwendigkeit der Erfüllung derjenigen Bedingungen von der Behauptung 1 des Satzes 3, welche die Gleichungen (14), (15), (16), (18) und die Ungleichheit (19) enthalten.

Aus der Definition der hesasphärischen Koordinaten bekommt man, dass

$$p_i = s_i \;(i = 1, 2, 3)\,, \quad p_4 = r^2 - \sum_{k=1}^{3} s_k^2\,, \quad p_5 = 1\,, \quad p_6 = r \tag{28}$$

die hexasphärischen Koordinaten der Kugelkongruenz $(\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_1, s_2, s_3); r)$ sind. Daraus, mit Rücksicht auf [10] (S. 317–318), [12] (S. 224–225, 221–222, Gleichungen (7)), mit Rücksicht darauf, dass bei der am Schluss des Teiles 1 des Satzes 3 erwähnten Parametrisierung des Kugelraums die Kugelkongruenz $(\mathbf{s}; r)$ die Gleichungen $u_k = 0$ $(k = 3, 4)$ hat und mit Rücksicht auf [13] (Satz 17, Gleichungen (85), (86)) erscheint die Ungleichheit (20) mit der vorausgesetzten Existenz zweier reeller verschiedener Brennpunkte von Kugeln der Kugelkongruenz $(\mathbf{s}; r)$ äquivalent.

Aus [11] (Sätze 1.2, 1.3) und aus den Gleichungen (22), (24) bekommt man

$$d_{14} = 2(p^3)^{-1}\, p^4 d_{12}\,, \quad d_{24} = 2(p^3)^{-1}\, p^5 d_{12}\,. \tag{29}$$

Aus den Gleichungen (28) und aus [11] (Satz 1.2) bekommt man

$$d_{i4} = 4\Big[-s_{i2}rr_1 + s_{i1}rr_2 - \sum_{k=1}^{3} s_k(s_{i1}s_{k2} - s_{i2}s_{k1})\Big]\,, \quad i = 1, 2\,. \tag{29'}$$

Das System der Gleichungen (29), (29′) hat mit Rücksicht auf (19) genau eine Lösung

$$2rr_i = 2(p^3)^{-1}\,\Big(p^4s_{2i} - p^5s_{1i} + p^3\sum_{j=1}^{3} s_js_{ji}\Big) \quad i = 1, 2\,. \tag{30}$$

Daraus, mit Rücksicht auf (infolge der Ausgangsvoraussetzung) die erfüllte Integrabilitätsbedingung

$$(31)\qquad [(p^3)^{-1}(p^4 s_{21} - p^5 s_{11} + p^3 \sum_{j=1}^{3} s_j s_{j1})]_2 =$$

$$= [(p^3)^{-1}(p^4 s_{22} - p^5 s_{12} + p^3 \sum_{j=1}^{3} s_j s_{j2})]_1$$

des Systems (30), die mit der Bedingung (18′) äquivalent ist, folgt die Notwendigkeit der Erfüllung derjenigen Bedingungen der Behauptung 1 des Satzes 3, welche die Gleichungen (18′), (17) enthalten.

Aus der Ausgangsvoraussetzung, daraus, dass $h = 2$ bzw. $h = 1$ eine abwickelbare (von einer Ebene verschiedene) Fläche bzw. eine Ebene charakterisiert, aus dem Satz 1, aus der am Schluss des Teiles 1 des Satzes 3 erwähnten Parametrisierung des Kugelraums und aus dem Satz 2 bekommt man die Notwendigkeit der Erfüllung des Schlussteils von Behauptung 1 des Satzes 3.

1b) Es sei $\mathbf{p}(p^1, \ldots, p^6)$ eine solche Linienkongruenz, welche die Bedingungen der Behauptung 1 des Satzes 3 erfüllt. Aus diesen Bedingungen, aus [11] (Sätze 1.16, 1.2, Gleichung (1,18)), aus [10] (S. 317–318), aus [12] (S. 224–225), aus [11] (Definition 4.1), aus den Sätzen 1, 2, daraus, dass die Gleichungen (14) bzw. (15) bzw. (16), immer mit betreffenden Bedingungen, den Gleichungen (26), (27) äquivalent sind, und aus der Theorie von Hüllflächen des zweiparametrigen Flächensystems folgt:

Die Fläche $\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_1, s_2, s_3)$ und der Halbmesser r bestimmen die Kugelkongruenz $(\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_1, s_2, s_3); r)$ von Kugeln mit zwei reellen, verschiedenen Brennpunkten, deren Verbindungslinien die adjungierte Linienkongruenz ${}^1F\,{}^2F({}^*p^1, \ldots, {}^*p^6)$ bilden. Dabei kann man die Plückerschen Linienkoordinaten so normieren, dass für sie und den Einheitsvektor ${}^*\mathbf{d}$ der Normalen der Fläche $\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_1, s_2, s_3)$

$$(32)\qquad \sum_{i=1}^{3} ({}^*p^i)^2 = 1\,, \quad {}^*p^3 \neq 0\,, \quad {}^*p^i = p^i \ (i = 1, 2, 3)\,,$$

$$ {}^*\mathbf{d}({}^*p^1, {}^*p^2, {}^*p^3) = \mathbf{d}(p^1, p^2, p^3)$$

gilt.

Aus [11] (Gleichung (1,2), Satz 1.2), aus (32), (28), (17), (27), aus [11] (der dritten Gleichung in (1,3)), aus der ersten Gleichung in (26) und aus ${}^*p_i = p_i$ $(i = 1, 2, 3)$ ergibt sich

$$(33)\qquad {}^*d_{12} = d_{12}\,, \quad \sqrt{{}^*k(B)} = -(p^3)^{-1} d_{12}\,, \quad {}^*d_{13} = -(p^3)^{-1} p^2 d_{12}\,,$$

$${}^*d_{23} = (p^3)^{-1} p^1 d_{12}\,, \quad {}^*d_{14} = 2(p^3)^{-1} p^4 d_{12}\,, \quad {}^*d_{24} = 2(p^3)^{-1} p^5 d_{12}\,,$$

$${}^*k(AB) = -4 d_{12}^2 (p^3)^{-2} (p^3 \lambda - p^1 p^5 + p^2 p^4)\,.$$

Aus den Gleichungen (33) und aus [11] (Satz 1.3) bekommt man für die Mittenfläche ${}^*\mathbf{l}({}^*l_1, {}^*l_2, {}^*l_3)$ der Kugelkongruenz $(\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_1, s_2, s_3); r)$ die Beziehung

$$(34)\qquad {}^*\mathbf{l}({}^*l_1, {}^*l_2, {}^*l_3) = \mathbf{l}(l_1, l_2, l_3)\,, \quad {}^*l_i = l_i\,, \quad i = 1, 2, 3\,,$$

wo l_i $(i = 1, 2, 3)$ durch die Gleichungen (24) gegeben werden. Daraus, mit Rücksicht auf die Gleichungen (32), (34), auf [11] (Behauptung e) im Beweis des Satzes 4.1) und mit Rücksicht auf die Äquivalenz (23) mit (24) ergibt sich

$$(35) \qquad (p^4, p^5, p^6) = -\mathbf{d} \times \mathbf{l} = -{}^*\mathbf{d} \times {}^*\mathbf{l} = ({}^*p^4, {}^*p^5, {}^*p^6).$$

Aus den Gleichungen (32) und (35) folgt, dass die der Kugelkongruenz ($\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_1, s_2, s_3)$; r) adjungierte Linienkongruenz ${}^1F\ {}^2F({}^*p^1, \ldots, {}^*p^6)$ mit der betrachteten Linienkongruenz $\mathbf{p}(p^1, \ldots, p^6)$ identisch ist.

Daraus folgt, dass die Bedingungen von der Behauptung 1 des Satzes 3 für die Adjunktionsfähigkeit der Linienkongruenz hinreichend sind.

Der Beweis der Behauptung 2 des Satzes 3 ergibt sich aus der bewiesenen Behauptung 1 des Satzes 3, aus der Ungleichheit in (17) und aus der Gleichung (30).

Satz 4. *Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kugelkongruenz* $({}^*\mathbf{s}({}^*u_1, {}^*u_2); {}^*r({}^*u_1, {}^*u_2)) = ({}^*\mathbf{s}; {}^*r)$, *wo* ${}^*u_1, {}^*u_2$ *die Krümmungsparameter der Mittelpunktfläche* ${}^*\mathbf{s}$ *bezeichnen, adjunktionsunfähig ist, besteht darin, dass einer der folgenden Fälle eintritt:*

A. *Die Mittelpunktfläche* ${}^*\mathbf{s}$ *stellt eine abwickelbare, von einer Ebene verschiedene Fläche dar und die h-te Brennfläche* ${}^{*h}\mathbf{f}$ $(h = 1, 2)$ *der Kugelkongruenz* $({}^*\mathbf{s}; {}^*r)$ *wird durch die gemeinsamen h-ten Brennpunkte von Kugeln der Kanalflächen mit den Mittelpunktkurven in den Asymptotenlinien der Fläche* ${}^*\mathbf{s}$ *gebildet.*

Wenn dieser Fall eintritt, werden entweder beide Brennflächen durch Kurven, oder eine Brennfläche durch eine Kurve und die andere durch einen Punkt gebildet. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Brennfläche ${}^{*h}\mathbf{f}$ *einen Punkt darstellt, besteht darin, dass bei den Asymptotenlinien* ${}^*u_i = $ *konst der Fläche* ${}^*\mathbf{s}$

$$(36) \qquad {}^{*ls}T_{ii} = (-1)^{h+1}\, {}^*r\Big(1 - \sum_{j=1}^{2} {}^*r_j^2\, {}^{*ss}T_{jj}^{-1}\Big)^{1/2}\, {}^{*ds}T_{ii}$$

gilt.

B. *Die Mittelpunktfläche* ${}^*\mathbf{s}$ *ist eine Ebene und die Brennflächen* ${}^{*h}\mathbf{f}$ $(h = 1, 2)$ *der Kugelkongruenz* $({}^*\mathbf{s}; {}^*r)$ *stellen keine Flächen dar.*

Wenn dieser Fall eintritt, werden beide Brennflächen entweder durch Kurven oder durch Punkte gebildet. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass beide Brennflächen durch Punkte gebildet werden, besteht darin, dass

$$(37) \qquad {}^{*ls}T_{ij} = 0 \quad i, j = 1, 2$$

gilt.

B e w e i s. Aus dem Satz 1 und aus der Definition 1 folgt:

1. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kugelkongruenz $({}^*\mathbf{s}({}^*u_1, {}^*u_2); {}^*r({}^*u_1, {}^*u_2))$, wo ${}^*u_1, {}^*u_2$ die Krümmungsparameter der Mittel-

punktfläche $*\mathfrak{s}$ bezeichnen, adjunktionsunfähig ist, besteht darin, dass einer der folgenden Fälle eintritt:

a) Die Mittelpunktfläche $*\mathfrak{s}$ ist eine abwickelbare, von einer verschiedene Fläche und bei ihren Asymptotenlinien $*u_i = konst$, d. h. bei $*^{ds}T_{ii} \neq 0$, $*^{ds}T_{i+(-1)^{i+1}i+(-1)^{i+1}} = *^{ds}T_{ii+(-1)^{i+1}} = 0$ gilt

$$(38) \qquad *^{ls}T_{ii+(-1)^{i+1}} = *^{ls}T_{i+(-1)^{i+1}i+(-1)^{i+1}} = 0\,.$$

b) Die Mittelpunktfläche $*\mathfrak{s}$ ist eine Ebene, d. h. $*^{ds}T_{ij} = 0$ für $i, j = 1, 2$ und es gilt

$$(39) \qquad \det\left|*^{ls}T_{ij}\right| = 0 \quad i, j = 1, 2\,.$$

Aus [11] (Behauptung 1, Gleichungen (6,3), (6,4) im Beweis des Satzes 6.1, Satz 1.9, Gleichungen (1,48), (1,50), Behauptung 11, Gleichung (1,80) im Beweis des Satzes 1.9, Satz 1.10, Gleichungen (1,86), (1,89)), aus [12] (Gleichungen (10)) und aus der Unabhängigkeit der Tensoren $*r$, $*r_i$, $*^{ss}T_{ij}$, $*^{ds}T_{ij}$, $*^{ls}T_{ij}$ von Bewegungen, die ein kartesisches Hilfskoordinatensystem $\langle *S; *\mathfrak{s}_1, *\mathfrak{s}_2, *\mathfrak{s}_3\rangle$ in das festgewählte kartesische Koordinatensystem $Oxyz$ überführen, ergibt sich:

2. Für die Brennflächen $*^h\mathfrak{f}$ $(h = 1, 2)$ der Kugelkongruenz $(\mathfrak{s}^*(*u_1, *u_2); *r(*u_1, *u_2))$ gilt für die Krümmungsparametern $*u_1$, $*u_2$ der Mittelpunktfläche $*\mathfrak{s}$

$$(40) \qquad *^h\mathfrak{f}_{i'} = \Big(*^{ss}T_{11}^{-1/2}\, *^{ls}T_{1i'} + (-1)^h\, *r\big(1 - \sum_{j=1}^{2} *r_j^2\, *^{ss}T_{jj}^{-1}\big)^{1/2}\,.$$

$$.\, *\delta_{i'}^1\, *^{ss}T_{i'i'}^{-1/2}\, *^{ds}T_{i'i'}\,, \quad *^{ss}T_{22}^{-1/2}\, *^{ls}T_{2i'} + (-1)^h\,.$$

$$.\, *r\big(1 - \sum_{j=1}^{2} *r_j^2\, *^{ss}T_{jj}^{-1}\big)^{1/2}\, *\delta_{i'}^2\, *^{ss}T_{i'i'}^{-1/2}\, *^{ds}T_{i'i'}\,,$$

$$*r*r_{i'}\, *^{ss}T_{i'i'}^{-1}\, *^{ds}T_{i'i'} + (-1)^h\big(1 - \sum_{j=1}^{2} *r_j^2\, *^{ss}T_{jj}^{-1}\big)^{-1/2} \sum_{k=1}^{2} *r_k\, *^{ss}T_{kk}^{-1}\, *^{ls}T_{ki'}\Big)$$

$$h = 1, 2\,, \quad i' = 1, 2\,.$$

Aus den Bedingungen in 1a), aus $*^{ss}T_{jj} > 0$ und aus $*r\big(1 - \sum_{j=1}^{2} *r_j^2\, *^{ss}T_{jj}^{-1}\big)^{1/2} > 0$ folgt:

3. Die Gleichungen (38) sind mit den Gleichungen $*^h\mathfrak{f}_{i+(-1)^{i+1}} = \mathfrak{o}$ $(h = 1, 2)$ äquivalent. Im Fall $*^h\mathfrak{f}_{i+(-1)^{i+1}} = \mathfrak{o}$ $(h = 1, 2)$ ist die Gleichung $*^h\mathfrak{f}_i = \mathfrak{o}$ mit der Gleichung (36) äquivalent.

Aus den Bedingungen in 1b), aus (40), aus $*^{ss}T_{jj} > 0$, aus $*r\big(1 - \sum_{j=1}^{2} *r_j^2\, *^{ss}T_{jj}^{-1}\big)^{1/2} > 0$ und daraus, dass die dritte Spalte der Matrix $\|*^h\mathfrak{f}_1, *^h\mathfrak{f}_2\|$ eine Linearkombination ihrer übrigen Spalten darstellt, ergibt sich:

4. Die Gleichung (39) ist mit der linearen Abhängigkeit von Vektoren $*^h\mathfrak{f}_1$, $*^h\mathfrak{f}_2$ $(h = 1, 2)$ äquivalent. Im Fall der linearen Abhängigkeit von Vektoren $*^h\mathfrak{f}_1$, $*^h\mathfrak{f}_2$

kann dann (für $h = 1, 2$) entweder höchstens einer von ihnen oder jeder von ihnen einen Nullvektor darstellen. Der Fall ${}^{*h}\mathbf{f}_1 = {}^{*h}\mathbf{f}_2 = \mathbf{o}\,(h = 1, 2)$ ist mit der Gleichung (37) äquivalent.

Aus den Behauptungen 1 bis 4, aus [11] (Definition 2.1) und aus den Bemerkungen 1A), B) folgen die Behauptungen des Satzes 4.

Bemerkung 1. A) Die Kugelkongruenzen

$$^2\mathbf{p}(u_1, u_2, (u_1 + u_2)^2, 1, 1, (u_1^2 + u_2^2 + (u_1 + u_2)^4 + 1)^{1/2}),$$

$$^2\mathbf{p}\left(\tfrac{1}{2}(u_1 - u_2), \tfrac{1}{2}(u_1 + u_2), u_1^2, 0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}(2u_1^4 + u_1^2 + u_2^2)^{1/2}\right)$$

kann man als Beispiele der adjunktionsunfähigen Kugelkongruenzen aus dem Satz 4, Behauptung A auffassen. Zwei Kurven bzw. eine Kurve und ein Punkt bilden die Brennflächen der ersten bzw. der zweiten Kugelkongruenz.

B) Die Kugelkongruenzen

$$^2\mathbf{p}(u_1, u_2, u_1, -u_1^2, 1, (u_1^2 + u_2^2)^{1/2}) \quad u_1 > 0, \quad u_2 > 0,$$

$$^2\mathbf{p}(u_1, u_2, u_1, 1, 1, (2u_1^2 + u_2^2 + 1)^{1/2})$$

kann man als Beispiele der adjunktionsunfähigen Kugelkongruenzen aus dem Satz 4, Behauptung B auffassen. Zwei Kurven bzw. zwei Punkte bilden die Brennflächen der ersten bzw. der zweiten Kugelkongruenz.

Satz 5. *Hinreichende Bedingung dafür, dass die Linienkongruenz* $\mathbf{p}(p^1(u_1, u_2), \ldots$ $\ldots, p^6(u_1, u_2))$, $\sum_{a=1}^{3}(p^a)^2 = 1$, $p^3 \neq 0$ *wo* $h = 2$ *der Rang der Matrix* (13), $p^1p_c^2 -$ $- p^2p_c^1 \neq 0$, c *einer der Werte* 1, 2 *ist, adjunktionsunfähig ist, besteht darin, dass*

$$((p^3)^{-1} p^4)_c = ((p^3)^{-1} p^5)_c = 0, \tag{41}$$

$$((p^3)^{-1} p^4)_{c+(-1)^{c+1}} \neq -p^2(p^1)^{-1}((p^3)^{-1} p^5)_{c+(-1)^{c+1}}$$

gilt.

Beweis. Aus den Gleichungen (15) bekommt man bei $p^1p_c^2 - p^2p_c^1 \neq 0$, $k = 3$, c einer der Werte 1, 2, für $s_{ic} = \partial s_i/\partial u_c\,(i = 1, 2)$

$$\begin{aligned} s_{ic} = {} & (p^1p_c^2 - p^2p_c^1)^{-2}\{[(-1)^i(p^1p_c^2 - p^2p_c^1)_c\, p_c^{i+(-1)^{i+1}} + \\ & + (-1)^{i+(-1)^{i+1}}(p^1p_c^2 - p^2p_c^1)\, p_{cc}^{i+(-1)^{i+1}}]\,\lambda + \\ & + (-1)^{i+(-1)^{i+1}}(p^1p_c^2 - p^2p_c^1)_c\, p^{i+(-1)^{i+1}}\lambda_c + \\ & + (-1)^i(p^1p_c^2 - p^2p_c^1)\, p^{i+(-1)^{i+1}}\lambda_{cc} + [(-1)^i(p^1p_c^2 - p^2p_c^1)_c\,. \\ & .\,(p^{i+(-1)^{i+1}}p_c^3 - p^3p_c^{i+(-1)^{i+1}}) + (-1)^{i+(-1)^{i+1}}(p^1p_c^2 - p^2p_c^1)\,. \\ & .\,(p^{i+(-1)^{i+1}}p_c^3 - p^3p_c^{i+(-1)^{i+1}})_c]\,\sigma + [(-1)^i(p^1p_c^2 - p^2p_c^1)_c\,. \end{aligned} \tag{42}$$

$$. p^{i+(-1)^{i+1}} p^3 + (-1)^{i+(-1)^{i+1}} (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1) .$$
$$. (p^{i+(-1)^{i+1}} p_c^3 - p^3 p_c^{i+(-1)^{i+1}}) + (-1)^{i+(-1)^{i+1}} (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1) .$$
$$. (p^{i+(-1)^{i+1}} p^3)_c] \, \sigma_c + (-1)^{i+(-1)^{i+1}} (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1) p^{i+(-1)^{i+1}} p^3 \sigma_{cc}\} .$$

Mit Rücksicht auf $(p^a p_c^b - p^b p_c^a)_c = p^a p_{cc}^b - p^b p_{cc}^a (a, b = 1, 2, 3)$ beweist man, dass

$$(43) \quad p^2 = -p^2 (p^1)^{-1} (-p^1) ,$$
$$- (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)_c \, p_c^2 + (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1) p_{cc}^2 =$$
$$= -p^2 (p^1)^{-1} [(p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1) \, p_c^1 - (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1) \, p_{cc}^1] ,$$
$$- (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)_c (p^2 p_c^3 - p^3 p_c^2) + (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1) (p^2 p_c^3 - p^3 p_c^2)_c =$$
$$= -p^2 (p^1)^{-1} [(p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)_c (p^1 p_c^3 - p^3 p_c^1) -$$
$$- (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1) (p^1 p_c^3 - p^3 p_c^1)_c] ,$$
$$- (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)_c \, p^2 p^3 + (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1) (p^2 p_c^3)_c +$$
$$+ (p^2 p_c^3 - p^3 p_c^2) (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1) = -p^2 (p^1)^{-1} [(p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1)_c \, p^1 p^3 -$$
$$- (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1) (p^1 p_c^3 - p^3 p_c^1) - (p^1 p_c^2 - p^2 p_c^1) (p^1 p^3)_c]$$

gilt.

Aus (42), (43) folgt

$$(44) \qquad s_{1c} = -p^2 (p^1)^{-1} s_{2c} .$$

Aus dem den Fall $h = 2$ betreffenden Teil des Satzes 3, aus (41) und (44) ergibt sich, dass bei $s_{21} \neq 0$ bzw. $s_{21} = 0$ kein, mit Rücksicht auf den Satz 3 in Betracht kommender, Vektor $\mathbf{s}(s_1(u_1, u_2), s_2(u_1, u_2), s_3(u_1, u_2))$ existiert, der die Gleichung (18) bzw. die Ungleichheit (19) erfüllt, und also mit Rücksicht auf die Definition 1 die betrachtete Linienkongruenz adjunktionsunfähig ist.

B e m e r k u n g 2. Die Linienkongruenzen

$$\mathbf{p}_2 \Big(\cos (u_1 + u_2), \frac{\sqrt{3}}{2} \sin (u_1 + u_2), \tfrac{1}{2} \sin (u_1 + u_2), a(u_2) \sin (u_1 + u_2) ,$$

$$b(u_2) \sin (u_1 + u_2), -2 \left[a(u_2) \cos (u_1 + u_2) + \frac{\sqrt{3}}{2} b(u_2) \sin (u_1 + u_2) \right] \Big) ,$$

$$2 \frac{da}{du_2} \neq \sqrt{(3)} \, \mathrm{tg} (u_1 + u_2) \frac{db}{du_2} , \quad 0 < u_1 + u_2 < \frac{\pi}{2} ,$$

kann man als Beispiele der adjunktionsunfähigen Linienkongruenzen aus dem Satz 5 auffassen.

Literatur

[1] *W. Blaschke:* Vorlesungen über Differentialgeometrie III. Berlin 1929.

[2] *S. P. Finikov:* Teorija kongruencij. Moskva—Leningrad 1950.

[3] *V. Hlavatý:* Zur Lie'schen Kugelgeometrie: I. Kanalflächen. Věstník Král. čes. společnosti nauk, Praha 1941.

[4] *V. Hlavatý:* K Lieově kulové geometrii: II. Kongruence (Elementární vlastnosti). Rozpravy II. tř. České akademie, roč. *LI*, č. 33.

[5] *V. Hlavatý:* Diferenciální přímková geometrie I, II. Rozpravy II. tř. Čes. akademie, roč. *L*, č. 27.

[6] *V. Hlavatý:* Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet. JČMF Praha 1937.

[7] *V. F. Kagan:* Osnovy teorii pověrchnostěj v tenzornom izloženii I, II. Moskva—Leningrad 1947, 1948.

[8] *V. I. Šulikovskij:* Klassičeskaja differencialnaja geometrija v tenzornom izloženii. Moskva 1963.

[9] *Z. Vančura:* Les congruences de Lie-sphères (*L*-sphères). Spisy přír. fak. Karlovy univ., Praha 1950.

[10] *Z. Vančura:* Pláště kongruence koulí. Časopis pro pěstování matemtiky *80* (1955).

[11] *Z. Vančura:* Kulové kongruence a jejich pláště. Adjungované přímkové kongruence a jejich pláště. Rozpravy Československé akademie věd, *78*, Praha 1968.

[12] *Z. Vančura:* Differentialgeometrie der zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum I. Commentationes mathemat. univers. Carol. *16*, 2 (1975).

[13] *Z. Vančura:* Differentialgeometrie der zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltikeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum II. Commentationes mathemat. univers. Carol. *16*, 3 (1975).

Anschrift des Verfassers: 166 29 Praha 6 - Dejvice, Thámova 7 (stavební fakulta ČVUT).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

AN EXAMPLE OF REMOVABLE SINGULARITIES FOR BOUNDED HOLOMORPHIC FUNCTIONS

JIŘÍ MATYSKA, Praha

(Received August 1, 1977)

I. INTRODUCTION

The results concerning removable singularities for bounded holomorphic functions are usually described in terms of analytic capacity which is a set function introduced by L. AHLFORS in [1] (and given name later by V. D. EROCHIN). Information about the definition of analytic capacity and its basic properties can be found e.g. in [14], [4], [6], [10]. The concept of analytic capacity will be used here for conciseness only and all we actually need are the following two propositions:

I. A set F (relatively) closed in a domain D of the complex plane $\mathbb{C}$ is a set of removable singularities for bounded functions holomorphic on $D \setminus F$ if and only if every compact $K \subset F$ is a set of removable singularities for bounded functions holomorphic on $\mathbb{C} \setminus K$.

II. Let K be a compact subset of $\mathbb{C}$. Then the following properties are equivalent:

(i) K has zero analytic capacity.

(ii) K is a set of removable singularities for bounded functions holomorphic on $\mathbb{C} \setminus K$.

(iii) Every bounded function holomorphic on $\mathbb{C} \setminus K$ is a constant function.

Much research has been done on the relations of the analytic capacity to various metric characterizations of the set. We shall be interested in its relation to the linear (Hausdorff) measure of the set only. The first steps in this direction were made by P. PAINLEVÉ at the end of the last century. The results of his treatise [11] imply, among other, that every compact of zero linear measure has also zero analytic capacity. About 1909 several communications appeared in Comptes Rendus, where A. DENJOY investigated the behaviour of Cauchy integrals on the support of the corresponding measure. It was shown there that, given a compact subset of a straight line with positive measure, one can construct a nonconstant function bounded and holomorphic on its complement in the complex plane (cf. [2]). Thus a compact situated on a straight line has zero analytic capacity if and only if it has zero linear measure. Let us note that CH. POMMERENKE in [12] and L. D. IVANOV in [7] obtained later a deeper result, namely that the analytic capacity of a compact on a straight line is one quarter of the corresponding linear measure.

We shall say briefly that a set lying in the complex plane has the Denjoy property if each of its compact subsets of zero analytic capacity has also zero linear measure. Thus every straight line has the Denjoy property, but a simple arc need not have this property at all. In fact, several examples of compact sets with zero analytic capacity and positive linear measure were constructed by A. G. VITUŠKIN, L. D. IVANOV and J. GARNETT (cf. [17], [9], [5]) and any such compact is a perfect discontinuum, which lies on a simple arc by a result of Denjoy from 1910 (cf. [2]). The assertion that every rectifiable curve has the Denjoy property is usually called the Denjoy conjecture. This assertion has been generally proved only recently*). Earlier some results were obtained concerning comparability of the linear measure and the analytic capacity of sets with additional conditions on the curves or continua on which they are situated (cf. L. D. IVANOV [8], N. A. ŠIROKOV [13], J. FUKA and J. KRÁL [3]).

According to the Denjoy conjecture, the rectifiability is sufficient for an arc to have the Denjoy property, and one may ask to what extent it is necessary. A common feature of all mentioned examples is that the corresponding sets with zero analytic capacity and positive linear measure are in a certain sense very "dispersed" and it is therefore not clear à priori whether such a set can be situated on a "nice" curve. Modifying a method of Vituškin it is possible to construct a real function satisfying the Hölder condition such that its graph carries a compact of positive linear measure and zero analytic capacity. In the following we construct such a function satisfying the Hölder condition for every exponent $\alpha \in (0, 1)$. The graph of this function has not the Denjoy property although the function is only "a little worse" than a Lipschitz function, the graph of which is rectifiable.

II. ESSENTIAL CONSTRUCTIONS NEEDED IN THE SEQUEL

1. As usual, we shall denote by $\mathbb{C}$ the set of all complex numbers which will be identified with the Euclidean plane $\mathbb{R}^2$. For $E \subset \mathbb{C}$ we shall denote by $\operatorname{int} E$ and $\operatorname{diam} E$ the interior and the diameter of E, respectively. If $A, B \subset \mathbb{C}$, then

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{|a - b| : a \in A,\ b \in B\}. \tag{1}$$

Given $E \subset \mathbb{C}$ and $\varepsilon > 0$ we put

$$\mathscr{H}_\varepsilon(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{diam} E_n : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,\ \operatorname{diam} E_n \leqq \varepsilon\right\}. \tag{2}$$

*) The validity of the Denjoy conjecture is a consequence of the recent result of Calderón on the boundedness of Cauchy's operator. It is necessary to combine Calderón's result from [16] with earlier results of DAVIE, HAVIN and HAVINSON (cf. [17], [18], [19]).

The linear (Hausdorff) measure of E is defined by

(3) $$\mathscr{H}(E) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \mathscr{H}_\varepsilon(E) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathscr{H}_\varepsilon(E).$$

It can be easily shown that the linear measure of the orthogonal projection of E into an arbitrary straight line is not greater than the linear measure of E.

2. Let $\Delta \subset \mathbb{R}$ be a compact interval. Given positive integers k, j such that $1 \leqq j \leqq k$ we denote by $(j \mid k)\,\Delta$ the j-th of the compact intervals which arise by dividing Δ into k non-overlapping parts of equal length. Moreover, if $q \in (0, 1)$ we denote by $(j \mid k; q)\,\Delta$ the compact interval concentric with $(j \mid k)\,\Delta$, the length of which is a $(1 - q)$ – multiple of the length of $(j \mid k)\,\Delta$. Thus we put

(4) $$(j \mid k)\,\Delta = \left\langle a + (j-1)\frac{b-a}{k},\ a + j\frac{b-a}{k} \right\rangle,$$

$$(j \mid k; q)\,\Delta = \left\langle a + (j - 1 + \tfrac{1}{2}q)\frac{b-a}{k},\quad a + (j - \tfrac{1}{2}q)\frac{b-a}{k} \right\rangle$$

in the case $\Delta = \langle a, b \rangle$.

Given a compact interval $\Delta \subset \mathbb{R}$ and numbers k, q, v such that k is a positive integer, $0 < q < 1, v > 0$, there exists a unique function $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with the following properties:

(5_1) φ is continuous in $\mathbb{R}$;

(5_2) $\varphi(x) = 0$ for $x \notin \Delta$;

(5_3) $\varphi(x) = (-1)^{j-1}\, v$ for $x \in (j \mid k; q)\,\Delta,\ j = 1, 2, \ldots, k$;

(5_4) φ is affine on each interval $J \subset \Delta \setminus \bigcup_{j=1}^{k} ((j \mid k; q)\,\Delta)$.

In what follows we shall use

(6) $$v = v(\Delta; k) = (2k)^{-1}\,\mathscr{H}(\Delta)$$

and the corresponding function φ will be denoted more explicitly by $\varphi_{\Delta;k,q}$ (if necessary). Then obviously

(7) $$\max \left|\varphi_{\Delta;k,q}(x)\right| = v(\Delta; k).$$

If we put, in addition,

(8) $$\sigma(\Delta; k, q) = q\, v(\Delta; k) = (2k)^{-1}\, q\, \mathscr{H}(\Delta),$$

then σ is the length of intervals contiguous to $(j \mid k; q)\,\Delta$ in $(j \mid k)\,\Delta$.

3. The following constructions will depend on the choice of two sequences of numbers, one of them being a sequence of positive integers k_n and the other a sequence of real numbers $q_n \in (0, 1)$, $n = 1, 2, \ldots$ We shall restrict this choice by some additional conditions later, but we shall assume in the following that the numbers k_n and q_n are fixed and we shall not designate the dependence on this choice any more.

We shall denote by $\mathscr{W}$ the set of all sequences of positive integers j_n such that $1 \leqq j_n \leqq k_n$, $n = 1, 2, \ldots$ For $\{j_n\} \in \mathscr{W}$ we define by induction

$$\tilde{\Delta}_{j_1} = (j_1 \mid k_1)\langle 0, 1\rangle\,, \quad \Delta_{j_1} = (j_1 \mid k_1; q_1)\langle 0, 1\rangle\,; \tag{9}$$

$$\tilde{\Delta}_{j_1,\ldots,j_{n+1}} = (j_{n+1} \mid k_{n+1})\,\Delta_{j_1,\ldots,j_n}\,,$$

$$\Delta_{j_1,\ldots,j_{n+1}} = (j_{n+1} \mid k_{n+1}; q_{n+1})\,\Delta_{j_1,\ldots,j_n}\,.$$

The intervals $\tilde{\Delta}_{j_1,\ldots,j_n}$ will be termed the unreduced intervals of order n and the intervals $\Delta_{j_1,\ldots,j_n}$ will be termed the reduced intervals of order n; moreover, the interval $\langle 0, 1\rangle$ will be termed the (reduced) interval of order 0.

It is easily shown by induction that the following assertions hold:

(a) any two different unreduced intervals of the same order n do not overlap and have the same length $\tilde{h}_n$;

(b) all reduced intervals of the same order n are mutually disjoint and have the same length h_n;

(c) we have $h_0 = 1$, $\tilde{h}_n = k_n^{-1} h_{n-1}$, $h_n = (1 - q_n)\,\tilde{h}_n$ for $n = 1, 2, \ldots$; this implies

$$h_n = \prod_{m=1}^{n} k_m^{-1}(1 - q_m)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,; \tag{10}$$

(d) the number of all reduced intervals of order n is

$$p_n = \prod_{m=1}^{n} k_m\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Furthermore, it is seen that the quantities $v(\Delta_{j_1,\ldots,j_{n-1}}; k_n)$ and $\sigma(\Delta_{j_1,\ldots,j_{n-1}}; k_n, q_n)$ depend on n only and we shall denote them simply by v_n and σ_n, respectively; thus

$$v_n = (2(1 - q_n))^{-1}\, h_n = (2k_n)^{-1}\, h_{n-1}\,, \quad \sigma_n = q_n v_n\,. \tag{12}$$

Finally, let us notice that the distance of two neighboring reduced intervals of order n, which lie in the same interval of order $n - 1$, is exactly $2\sigma_n$ and that the distance of any two reduced intervals of order n in any other position is greater than $2\sigma_n$. Therefore the distance of two unreduced intervals of order $n + 1$, which are not included in the same interval of order n, is at least $2\sigma_n$.

4. Using the ordering of the real line we shall introduce a new indexing for intervals of the same order. We shall denote by $\Delta_i^{(n)}$ the reduced interval of order n, which lies on the l-th place ($1 \leqq l \leqq p_n$) in the ordering from the left to the right; the analogous notation will be used for unreduced intervals etc. This means that we set

$$(13) \qquad \Delta_1^{(0)} = \langle 0, 1 \rangle\,, \quad \tilde{\Delta}_l^{(n)} = (j \mid k_n)\,\Delta_{l'}^{(n-1)}\,, \quad \Delta_l^{(n)} = (j \mid k_n; q_n)\,\Delta_{l'}^{(n-1)}$$

with positive integers l', j uniquely determined by conditions

$$(13') \qquad l = (l' - 1)\,k_n + j\,, \quad 1 \leqq j \leqq k_n\,.$$

Let us notice that $1 \leqq l' \leqq p_{n-1}$, since $1 \leqq l \leqq p_n$.

Both the intervals $\Delta_l^{(n)} = \Delta_{j_1,\ldots,j_n}$ and $\tilde{\Delta}_l^{(n)} = \tilde{\Delta}_{j_1,\ldots,j_n}$ have a common center, which we shall denote by $s_l^{(n)}$ or $s_{j_1,\ldots,j_n}$. Hence

$$(14) \qquad \tilde{\Delta}_l^{(n)} = \langle s_l^{(n)} - v_n, s_l^{(n)} + v_n \rangle\,,$$

$$\Delta_l^{(n)} = \langle s_l^{(n)} - v_n + \sigma_n, s_l^{(n)} + v_n - \sigma_n \rangle = \langle s_l^{(n)} - \tfrac{1}{2}h_n, s_l^{(n)} + \tfrac{1}{2}h_n \rangle\,.$$

5. For every positive integer n we define

$$(15) \qquad \psi_n = \sum_{l=1}^{p_{n-1}} \omega_l^{(n-1)} \varphi_{\Delta_l^{(n-1)};k_n,q_n}\,,$$

$$(16) \qquad \chi_n = \sum_{m=1}^{n} \psi_m\,,$$

where $\varphi\ldots$ are the functions described in Section 2 restricted to the interval $\langle 0, 1 \rangle$ and where each $\omega_l^{(n-1)}$ is either 1 or -1. The choice of these signs is fully arbitrary and we shall not restrict it anywhere.

Since the reduced intervals of the same order are disjoint, it follows from (15) that the function ψ_n takes the constant value v_n or $-v_n$ on each reduced interval of order n and that

$$(17) \qquad \max_{0 \leqq x \leqq 1} |\psi_n(x)| = v_n\,.$$

Furthermore, it follows from (16) that the function χ_n is also constant on each reduced interval of order n with

$$(18) \qquad \chi_{n+1}(s_{j_1,\ldots,j_{n+1}}) = \chi_n(s_{j_1,\ldots,j_n}) \pm v_n\,,$$

if $1 \leqq j_1 \leqq k_1, \ldots, 1 \leqq j_{n+1} \leqq k_{n+1}$, and that

$$(19) \qquad \max_{0 \leqq x \leqq 1} |\chi_n(x)| \leqq \sum_{m=1}^{n} v_m\,.$$

6. Further we put

$$(20) \qquad L_l^{(n)} = \tilde{\Delta}_l^{(n)} \times \langle \chi_n(s_l^{(n)}) - \sigma_n, \chi_n(s_l^{(n)}) + \sigma_n \rangle\,.$$

If we denote by $\Gamma_l^{(n)}$ the boundaries of these rectangles (with negative orientation if needed), then we have

(21) $$\mathscr{H}(\Gamma_l^{(n)}) = 4(v_n + \sigma_n) = 4(1 + q_n)\, v_n = 2h_n(1 - q_n)^{-1}(1 + q_n)\,.$$

Similarly to Section 4 we shall also use the notation $L_{j_1,\ldots,j_n}$ and $\Gamma_{j_1,\ldots,j_n}$.

If $|l' - l''| \geqq 2$, then obviously $\operatorname{dist}(L_{l'}^{(n)}, L_{l''}^{(n)}) \geqq 2v_n = (1 - q_n)^{-1} h_n$. Let us consider two rectangles $L_l^{(n)}, L_{l+1}^{(n)}$ the projections $\tilde{\Delta}_l^{(n)}, \tilde{\Delta}_{l+1}^{(n)}$ of which are subsets of the same interval $\Delta_{l^*}^{(n-1)}$. Then $|\chi_n(s_l^{(n)}) - \chi_n(s_{l+1}^{(n)})| = 2v_n$ by the definition of the function $\varphi_{\Delta_{l^*}^{(n-1)};k_n,q_n}$ and hence $\operatorname{dist}(L_l^{(n)}, L_{l+1}^{(n)}) = 2(v_n - \sigma_n) = 2(1 - q_n)\, v_n = h_n$. This means that

(22) $$\operatorname{dist}(L_{j_1,\ldots,j_{n-1},j_n'}\,,\ L_{j_1,\ldots,j_{n-1},j_n''}) \geqq h_n$$

if $1 \leqq j_1 \leqq k_1, \ldots, 1 \leqq j_{n-1} \leqq k_{n-1}, 1 \leqq j_n' \leqq k_n, 1 \leqq j_n'' \leqq k_n, j_n' \neq j_n''$.

7. We desire to find a condition for the validity of the inclusion

(23) $$L_{j_1,\ldots,j_n,j_{n+1}} \subset \operatorname{int}(L_{j_1,\ldots,j_n})\,.$$

In virtue of the inclusion $\tilde{\Delta}_{j_1,\ldots,j_n,j_{n+1}} \subset \Delta_{j_1,\ldots,j_n}$ it suffices by (18) when

(24) $$v_{n+1} + \sigma_{n+1} < \sigma_n\,.$$

Since $v_{n+1} + \sigma_{n+1} = (2k_{n+1})^{-1}(1 + q_{n+1})\, h_n$ and $\sigma_n = \frac{1}{2}q_n(1 - q_n)^{-1} h_n$, the condition (24) is equivalent to $k_{n+1}^{-1}(1 + q_{n+1}) < (1 - q_n)^{-1} q_n$ or, which is the same, to the condition

(P1) $$k_{n+1} > (1 + q_{n+1})(q_n^{-1} - 1)\,.$$

The choice of k_1 is not restricted by this. But if we choose $k_1 \geqq 2$, then $v_1 + \sigma_1 = (2k_1)^{-1}(1 + q_1) < \frac{1}{2}$ and any rectangle $L_l^{(1)}$ is contained in the rectangle

(25) $$L_1^{(0)} = \langle 0, 1\rangle \times \langle -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle\,.$$

In what follows we shall always suppose that the numbers k_n, q_n are chosen so that $k_1 \geqq 2$ and that the condition (P1) is fulfilled for $n = 1, 2, \ldots$. We have then (23) for every sequence $\{j_n\} \in \mathscr{W}$ and all rectangles $L_l^{(n)}$ are contained in the rectangle $L_1^{(0)}$. From (22) we then obtain easily by induction that any two different rectangles of order n satisfy

(26) $$\operatorname{dist}(L_{l'}^{(n)}, L_{l''}^{(n)}) \geqq h_n\,(l' \neq l'')$$

(even $\operatorname{dist}(L_{l'}^{(n)}, L_{l''}^{(n)}) > h_{n-1}$, if both rectangles lie in different rectangles of order $n - 1$).

8. The assumptions made about the choice of the numbers k_n, q_n guarantee uniform convergence of the functions χ_n. Indeed, from (24) we obtain by induction $v_{n+2} + \ldots + v_{n+p} + \sigma_{n+p} < \sigma_{n+1}$ for any integer $p \geqq 2$ and hence

$$(27) \qquad \sum_{p=n+1}^{\infty} v_p \leqq v_{n+1} + \sigma_{n+1} < \sigma_n .$$

According to (17) this means exactly that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$ is uniformly convergent on $\langle 0, 1 \rangle$ and we put

$$(28) \qquad \chi(x) = \lim_{n\to\infty} \chi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \quad \text{for} \quad x \in \langle 0, 1 \rangle .$$

We have thus defined a continuous function the graph of which we denote by G, i.e.

$$(29) \qquad G = \{x + \mathrm{i}\chi(x) \in \mathbb{C} : x \in \langle 0, 1 \rangle\} .$$

According to (27), $|\chi(x) - \chi_n(x)| \leqq \sum_{p=n+1}^{\infty} v_p < \sigma_n$ and hence $(\Delta_l^{(n)} \times \mathbb{R}) \cap G \subset$ $\subset \operatorname{int} L_l^{(n)}$.

9. The rectrictions of the function χ to the intervals $\Delta_l^{(n)}$ are to a certain degree analogous to the function χ itself. Let us introduce some transformations of the complex plane to describe this analogy which is important in the sequel.

Given positive integers $n, l \leqq p_n$ we put

$$(30) \qquad T_l^{(n)}(w) = h_n w + (s_l^{(n)} - \tfrac{1}{2}h_n) + \mathrm{i}\chi(s_l^{(n)} - \tfrac{1}{2}h_n)$$

for any $w \in \mathbb{C}$, so that $T_l^{(n)}$ is a composition of a homothety and a translation. The transformation $T_l^{(n)}$ maps the interval $\langle 0, 1 \rangle$ of the real line on the line segment $\Delta_l^{(n)} \times \chi_n(\Delta_l^{(n)})$ and the inverse transfotmation maps the graph of the function χ on the graph of the function $\chi_l^{(n)}$, which is defined by

$$(31) \qquad \chi_l^{(n)}(t) = h_n^{-1}(\chi(s_l^{(n)} + h_n(t - \tfrac{1}{2})) - \chi(s_l^{(n)} - \tfrac{1}{2}h_n)) .$$

The restriction of the function $\chi_l^{(n)}$ to the interval $\langle 0, 1 \rangle$ results by an analogous construction as the function χ, if we use the chosen sequences of numbers k_n, q_n beginning from the $(n + 1)$-th member. It is namely

$$(32) \qquad \chi_l^{(n)}(t) = h_n^{-1} \sum_{p=n+1}^{\infty} \psi_p(s_l^{(n)} + h_n(t - \tfrac{1}{2})) .$$

The inequality (27) implies then the estimate

$$(33) \qquad \max_{0\leqq t\leqq 1} |\chi_l^{(n)}(t)| \leqq h_n^{-1}(v_{n+1} + \sigma_{n+1}) < k_{n+1}^{-1}.$$

10. Definition of compacts H, K. We put

$$(34) \qquad H = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{p_n} \Delta_l^{(n)} = \bigcup_{\{j_n\}\in\mathscr{W}} \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{j_1,\ldots,j_n},$$

$$(35) \qquad K = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{p_n} L_l^{(n)} = \bigcup_{\{j_n\}\in\mathscr{W}} \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{j_1,\ldots,j_n},$$

and further

$$H_l^{(n)} = H \cap \Delta_l^{(n)}, \quad K_l^{(n)} = K \cap L_l^{(n)} \tag{36}$$

for $n = 0, 1, 2, \ldots;\ l = 1, 2, \ldots, p_n$.

We will prove that

$$K = G \cap (H \times \mathbb{R}); \tag{37}$$

this means that K is the graph of the restriction of the function χ to the set H. If $x \in H$, then there exists a sequence $\{j_n'\} \in \mathscr{W}$ such that $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{j_1',\ldots,j_n}$ (even $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{j_1',\ldots,j_n'}$). According to Section 8 it follows that $x + i\chi(x) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{j_1',\ldots,j_n'} \subset K$. This means that $G \cap (H \times \mathbb{R}) \subset K$. On the other hand, if $x + iy \in K$, then there exists a sequence $\{j_n''\} \in \mathscr{W}$ such that $x + iy \in \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{j_1'',\ldots,j_n''}$. Hence $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{\Delta}_{j_1'',\ldots,j_n''}$. Since $\tilde{\Delta}_{j_1'',\ldots,j_{n+1}''} \subset \Delta_{j_1'',\ldots,j_n''}$, it follows that $x \in H$. Further, it holds $|y - \chi_n(x)| = |y - \chi_n(s_{j_1'',\ldots,j_n''})| \leqq \sigma_n$, which implies $y = \lim_{n\to\infty} \chi_n(x) = \chi(x)$. This means that $x + iy \in G$. Hence $K \subset G \cap (H \times \mathbb{R})$.

It can be shown similarly that

$$K_l^{(n)} = G \cap (H_l^{(n)} \times \mathbb{R}) \tag{38}$$

for any n, $l \leqq p_n$.

III. PROPERTIES OF THE OBJECTS CONSTRUCTED

1. Linear measures of H and K. Since the reduced intervals of order n are disjoint, it holds

$$\mathscr{H}\Big(\bigcup_{l=1}^{p_n} \Delta_l^{(n)}\Big) = p_n h_n = \prod_{m=1}^{n} (1 - q_m),$$

and hence

$$\mathscr{H}(H) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q_m). \tag{39}$$

Now we shall compute the linear measure of K. Let $\varepsilon > 0$. Since $\operatorname{diam} L_l^{(n)} = 2(v_n^2 + \sigma_n^2)^{1/2} = 2v_n(1 + q_n^2)^{1/2} = k_n^{-1} h_{n-1}(1 + q_n^2)^{1/2}$,

$$\mathscr{H}_\varepsilon(K) \leqq (1 + q_n^2)^{1/2} \prod_{m=1}^{n-1} (1 - q_m) \tag{40}$$

holds for any n large enough. Hence $\prod_{m=1}^{\infty}(1 - q_m) = 0$ implies $\mathscr{H}_\varepsilon(K) = 0$, because $q_n \in (0, 1)$. If $\prod_{m=1}^{\infty}(1 - q_m) > 0$, then $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$ and (40) implies $\mathscr{H}_\varepsilon(K) \leqq \leqq \prod_{m=1}^{\infty}(1 - q_m)$. In each case by making $\varepsilon \to 0+$ we obtain $\mathscr{H}(K) = \prod_{m=1}^{\infty}(1 - q_m)$. According to (39) we have thus $\mathscr{H}(K) \leqq \mathscr{H}(H)$. The opposite inequality is a consequence of (37), since the linear measure does not increase by the orthogonal projection. Combining these facts we get

$$\mathscr{H}(K) = \mathscr{H}(H) = \prod_{u=1}^{\infty}(1 - q_m)\,. \tag{41}$$

2. Decomposition of a function holomorphic on $\mathbb{C} \setminus K$. Given a complex function f holomorphic on $\mathbb{C} \setminus K$ such that $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ we define functions $f_l^{(n)}$ $n = 0, 1, \ldots;$ $l = 1, 2, \ldots, p_n$, holomorphic on $\mathbb{C} \setminus K_l^{(n)}$ in the following way: If $z \in \mathbb{C} \setminus L_l^{(n)}$, we put

$$f_l^{(n)}(z) = (2\pi \mathrm{i})^{-1} \int_{\Gamma_l^{(n)}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta\,, \tag{42}$$

and then we continue this function holomorphically to $\mathbb{C} \setminus K_l^{(n)}$. The functions $f_l^{(n)}$ vanish at ∞ and

$$f(z) = \sum_{l=1}^{p_n} f_l^{(n)}(z) \tag{43}$$

on $\mathbb{C} \setminus K$.

3. Uniform boundedness of $f_l^{(n)}$. We shall assume that the function f established in the previous section is bounded and we set $\|f\| = \sup_{z\in\mathbb{C}\setminus K} |f(z)|$. If $\prod_{m=1}^{\infty}(1 - q_m) = 0$, then K has zero linear measure and f vanishes everywhere by the result of Painlevé cited in Introduction. Thus we shall assume that $\prod_{m=1}^{\infty}(1 - q_m) > 0$. Then $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$ and there exists $q^* = \max_{n=1,2,\ldots} q_n < 1$.

Let us fix positive integers n and $l \leqq p_n$. If $l' \neq l$ and $z \in L_{l'}^{(n)}$, then (21), (26) and (12) imply the estimates

$$\begin{aligned} |f_l^{(n)}(z)| &\leqq (2\pi)^{-1} \|f\| \left(\operatorname{dist}(L_{l'}^{(n)}, L_l^{(n)})\right)^{-1} \mathscr{H}(\Gamma_l^{(n)}) \leqq \\ &\leqq (2\pi)^{-1} \|f\|\, h_n^{-1}(1 - q_n)^{-1}\, 2h_n(1 + q_n) \leqq 2\pi^{-1}\|f\|\,(1 - q^*)^{-1}\,. \end{aligned} \tag{44}$$

Let us set further

$$f_l^{(n)*}(z) = f(z) - f_l^{(n)}(z) \tag{45}$$

for $z \in \mathbb{C} \setminus K$ and let us continue this function holomorphically to $(\mathbb{C} \setminus K) \cup K_l^{(n)}$. On $\Gamma_l^{(n)*} = \bigcap_{\substack{l'=1 \\ l' \neq l}}^{p_n} \Gamma_{l'}^{(n)}$ we have by (44)

$$|f_l^{(n)*}(z)| \leq \|f\| \left(1 + 2\pi^{-1}(1 - q^*)^{-1}\right). \tag{46}$$

Since $\lim_{z \to \infty} f_l^{(n)*}(z) = 0$, the same estimate holds on $\mathbb{C} \setminus L_l^{(n)*}$ with $L_l^{(n)*} = \bigcup_{\substack{l'=1 \\ l' \neq l}}^{p_n} L_{l'}^{(n)}$.

This implies

$$|f_l^{(n)}(z)| \leq 2\|f\| \left(1 + \pi^{-1}(1 - q^*)^{-1}\right) \tag{47}$$

on $\mathbb{C} \setminus L_l^{(n)*} \setminus K_l^{(n)}$, since $f_l^{(n)}(z) = f(z) - f_l^{(n)*}(z)$ on this set. On $L_l^{(n)*}$ we have the estimate (44), hence (47) holds on the whole set $\mathbb{C} \setminus K_1^{(n)}$.

4. New integral representation of $f_l^{(n)}$. Retaining our assumptions and notation we put

$$\lambda(H_l^{(n)}) = (2\pi \mathrm{i})^{-1} \int_{\Gamma_l^{(n)}} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta \tag{48}$$

for every admissible n, l. Let us show that we can extend the set function λ to a complex measure with support in H.

For $x \in \langle 0, 1 \rangle \setminus H$ let n_x be the smallest n such that $x \notin \bigcup_{l=1}^{p_n} \Delta_l^{(n)}$. Let us further denote by $J_x^{(n)}$ the set of all l's such that the interval $\Delta_l^{(n)}$ precedes x. Since

$$\lambda(H_{j_1,\ldots,j_n}) = \sum_{j=1}^{k_{n+1}} \lambda(H_{j_1,\ldots,j_n,j}) \tag{49}$$

the value of $\sum_{l \in J_x^{(n)}} \lambda(H_l^{(n)})$ is independent of n for every $x \in \langle 0, 1 \rangle \setminus H$ and $n \geq n_x$.

We can thus define a function P on $\langle 0, 1 \rangle \setminus H$ putting

$$P(x) = \sum_{l \in J_x^{(n)}} \lambda(H_l^{(n)}), \tag{50}$$

where we choose $n \geq n_x$.

Let $x, y \in \langle 0, 1 \rangle \setminus H$, $x < y$. If we choose $n \geq \max(n_x, n_y)$, then

$$P(y) - P(x) = \sum_{l \in J_{x,y}^{(n)}} \lambda(H_l^{(n)}) \quad \text{with} \quad J_{x,y}^{(n)} = J_y^{(n)} \setminus J_x^{(n)},$$

and hence

$$|P(y) - P(x)| \leqq \sum_{l \in J_{x,y}^{(n)}} |\lambda(H_l^{(n)})| \leqq (2\pi)^{-1} \|f\| \sum_{l \in J_{x,y}^{(n)}} \mathscr{H}(\Gamma_l^{(n)}) .$$

But $\mathscr{H}(\Gamma_l^{(n)}) = 2(1 - q_n)^{-1} (1 + q_n) \mathscr{H}(\Delta_l^{(n)})$ by (21) and, consequently,

$$|P(y) - P(x)| \leqq \pi^{-1} \|f\| (1 - q_n)^{-1} (1 + q_n) \sum_{l \in J_{x,y}^{(n)}} \mathscr{H}(\Delta_l^{(n)}) \leqq$$

$$\leqq 2\pi^{-1} \|f\| (1 - q^*)^{-1} (y - x) .$$

We can thus extend the function P to $\langle 0, 1 \rangle$ in such a way that

$$|P(y) - P(x)| \leqq 2\pi^{-1} \|f\| (1 - q^*)^{-1} |y - x| \tag{51}$$

holds for every $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$.

The function P is then the distribution function of a complex measure λ, which is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure and the density of which is, moreover, bounded. This means that there exists a bounded complex function p on the interval $\langle 0, 1 \rangle$ such that

$$P(x) = \int_0^x p(t) \, dt \tag{52}$$

for every $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Since P is constant on each interval contiguous to the set H, we can suppose that $p(x) = 0$ for every $x \in \mathbb{R} \setminus H$. Then

$$\lambda(H_l^{(n)}) = \int_{\Delta_l^{(n)}} p(x) \, dx = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_l^{(n)}} f(\zeta) \, d\zeta \tag{53}$$

for every admissible n, l.

For fixed n, l and $z \in \mathbb{C} \setminus L_l^{(n)}$ let us examine the sums $\sum \lambda(H_{l'}^{(m)}) (s_{l'}^{(m)} + i\chi(s_{l'}^{(m)}) - z)^{-1}$, where m is large enough and l' are indexes such that $H_{l'}^{(m)} \subset \Delta_l^{(n)}$. We find out that

$$f_l^{(n)}(z) = \int_{\Delta_l^{(n)}} \frac{p(x)}{x + i\chi(x) - z} \, dx . \tag{54}$$

5. Removability of singularities on K. Now let us prove that K is a set of removable singularities for bounded holomorphic functions. If K has zero linear measure, then this is true by a result of Painlevé as we have mentioned above. If K has a positive linear measure, then it suffices to show that the bounded function f examined in the previous sections vanishes everywhere. Since we have

$$f(z) = \int_0^1 \frac{p(x)}{x + i\chi(x) - z} \, dx \tag{55}$$

as a special case of (54), it suffices to show that the function p vanishes almost everywhere on $\mathbb{R}$.

For n, l fixed let us change the variable in the integral (54) setting

$$x = S_l^{(n)}(t) = h_n t + s_l^{(n)} - \tfrac{1}{2}h_n . \tag{56}$$

The function $S_l^{(n)}$ is the real part of the function $T_l^{(n)}$ from (30) and it maps the interval $\langle 0, 1\rangle$ onto $\Delta_l^{(n)}$. Every function $f_l^{(n)}$ will thus be expressed by an integral over the interval $\langle 0, 1\rangle$. Using the substitution (56) we get

$$f_l^{(n)}(z) = \int_0^1 \frac{p(S_l^{(n)}(t))}{t + \mathrm{i}\,\chi_l^{(n)}(t) - w}\, \mathrm{d}t = F_l^{(n)}(w) , \tag{57}$$

where $\chi_l^{(n)}$ is defined by (31) and $z = T_l^{(n)}(w)$. From Section 3 it follows that the functions $F_l^{(n)}$, $n = 0, 1, \ldots; l = 1, 2, \ldots, p_n$ are uniformly bounded on $\mathbb{C} \setminus L_1^{(0)}$.

Let $x_0 \in H$ be a Lebesgue point of the function p. For every positive integer n we denote by l_n the index for which $x_0 \in \Delta_{l_n}^{(n)}$. Then

$$\left| F_{l_n}^{(n)}(w) - p(x_0) \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t - w} \right| \leqq$$

$$\leqq (\operatorname{dist}(w, L_1^{(0)}))^{-1} \int_0^1 |pS_{l_n}^{(n)}(t) - p(x_0)|\, \mathrm{d}t +$$

$$+ |p(x_0)| \left| \int_0^1 \left(\frac{1}{t + \mathrm{i}\chi_{l_n}^{(n)}(t) - w} - \frac{1}{t - w} \right) \mathrm{d}t \right| \leqq$$

$$\leqq (\operatorname{dist}(w, L_1^{(0)}))^{-1}\, h_n^{-1} \int_{\Delta_{l_n}(n)} |p(x) - p(x_0)|\, \mathrm{d}x +$$

$$+ |p(x_0)|\, (\operatorname{dist}(w, L_1^{(0)}))^{-2} \max_{0 \leqq t \leqq 1} |\chi_{l_n}^{(n)}|t)$$

for every $w \in \mathbb{C} \setminus L_1^{(0)}$. According to (33) we have thus

$$\left| F_{l_n}^{(n)}(w) - p(x_0) \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t - w} \right| \leqq \tag{58}$$

$$\leqq (\operatorname{dist}(w, L_1^{(0)}))^{-1}\, h_n^{-1} \int_{\Delta_{l_n}(n)} |p(x) - p(x_0)|\, \mathrm{d}x +$$

$$+ k_{n+1}^{-1} |p(x_0)|\, (\operatorname{dist}(w, L_1^{(0)}))^{-2} .$$

Since $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$, (P1) implies $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$. Using further the fact that x_0 is a Lebesgue point of p we infer from (58) that

$$\lim_{n\to\infty} F_{l_n}^{(n)}(w) = p(x_0) \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t - w} . \tag{59}$$

Since the functions $F_l^{(n)}$ are uniformly bounded on $\mathbb{C} \setminus L_1^{(0)}$, the function $p(x_0) \,.\, \int_0^1 (t - w)^{-1}\, \mathrm{d}t$ must be bounded there, too. But $\int_0^1 (t - w)^{-1}\, \mathrm{d}t = \ln(1 - w^{-1})$

for every $w < 0$ and this function is not bounded on $(-\infty, 0)$. This means that $p(x_0) = 0$.

Since p vanishes on $\mathbb{R} \setminus H$ and $p(x) = 0$ at every Lebesgue point $x \in H$, p vanishes almost everywhere, q.e.d.

6. Modulus of continuity of χ. Finally, let us prove the following assertion:

Let ω be a positive function nondecreasing on $(0, 1\rangle$ such that

$$\lim_{\delta \to 0+} \frac{\delta}{\omega(\delta)} = 0\,, \quad \omega(0) = \omega(0+)\,. \tag{60}$$

Then for every choice of numbers $q_n \in (0, 1)$ there exist positive integers k_n satisfying (P1) such that

$$|\chi(x) - \chi(y)| \leqq \omega(|x - y|) \tag{61}$$

for the corresponding function χ.

For this purpose let us choose the numbers $c_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ such that $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < 1$. According to (60) we may then fix numbers $\delta_n > 0$ such that

$$\delta \leqq q_n c_n\, \omega(\delta) \tag{62}$$

if $0 < \delta \leqq \delta_n$. Finally, we choose by induction integers k_n such that (P1) holds and $2\,\sigma_n \leqq \delta_n$, that is

$$k_n \geqq \delta_n^{-1} q_n h_{n-1}\,. \tag{P2}$$

Then $|\psi_n(x) - \psi_n(y)| \leqq q_n^{-1}|x - y| \leqq c_n\, \omega(|x - y|)$ if $|x - y| < 2\sigma_n$, and $|\psi_n(x) - \psi_n(y)| \leqq 2v_n = q_n^{-1}\, 2\sigma_n \leqq c_n\, \omega(2\sigma_n) \leqq c_n\, \omega(|x - y|)$ if $|x - y| \geqq 2\sigma_n$. This means that

$$|\psi_n(x) - \psi_n(y)| \leqq c_n\, \omega(|x - y|) \tag{63}$$

for every $x, y \in \langle 0, 1\rangle$, $n = 1, 2, \ldots$. By adding up we get

$$|\chi(x) - \chi(y)| \leqq \omega(|x - y|) \tag{64}$$

for every $x, y \in \langle 0, 1\rangle$.

7. Notes. a) Choosing $\omega(\delta) = \delta(\ln(\delta^{-1}) + 1)$ in the previous section, we obtain a function the modulus of continuity of which is of order $o(\delta^{\alpha})$ for every $\alpha \in (0, 1)$.

b) An essential role is played by the set K. The function χ can be modified in such a way that it may be affine on the intervals contiguous to the set H. Its modulus of continuity will not "become worse" by this modification.

References

[1] *L. Ahlfors:* Bounded analytic functions, Duke Math. J. *14* (1947), 1—11.

[2] *A. Denjoy:* Notice sur les travaux scientifiques, Paris, Hermann, 1934 (in A. Denjoy: Articles et Mémoires II, Gauthiers-Villars, Paris, 1955, pp. 983—1078).

[3] *J. Fuka, J. Král:* Analytic capacity and linear measure, Czech. Math. J. *28* (1978), 445—461.

[4] *T. W. Gamelin:* Uniform algebras, Prentice-Hall 1969.

[5] *J. Garnett:* Positive length but zero analytic capacity, Proc. Amer. Math. Soc. *24* (1970), 696—699.

[6] *J. Garnett:* Analytic capacity and measure, Lecture Notes in Math. vol. 217, Springer-Verlag 1972.

[7] *L. D. Ivanov:* Ob analitičeskoj jemkosti linějnych množestv, Uspechi mat. nauk *17* (1962), No 6, 143—144.

[8] *L. D. Ivanov:* O gipotěze Danžura, Uspechi mat. nauk *18* (1963), No 4, 147—149.

[9] *L. D. Ivanov:* Variacii množestv i funkcij, Nauka, Moskva 1975.

[10] *M. S. Mel'nikov, S. V. Sinanjan:* Voprosy teorii približenij funkcij odnogo kompleksnogo peremennogo, Sovremennyje problemy matematiky *4* (1975), 143—250.

[11] *P. Painlevé:* Sur les lignes singulières des fonctions analytiques, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Sci. Math. et Sci. Phys. *2* (1888) 1—130.

[12] *Ch. Pommerenke:* Über die analytische Kapazität, Archiv der Math. *11* (1960), 270—274.

[13] *N. A. Širokov:* Analitičeskaja jemkost' množestv blizkich k gladkoj krivoj, Vestn. Lenin. univ. *4* (1973), No 19, 73—78.

[14] *A. G. Vituškin:* Analitičeskaja jemkost' množestv i někotoryje jejo svojstva, Doklady AN SSSR 123 (1958), 778—781.

[15] *A. G. Vituškin:* Primer množestva položitěl'noj dliny, no nulevoj analitičeskoj jemkosti, Doklady AN SSSR *127* (1959), 246—249.

[16] *A. P. Calderón:* Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA *4* (*74*) 1977, 1324—1327.

[17] *A. M. Davie:* Analytic capacity and approximation problems, Trans. Amer. Math. Soc. *171* (1972), 409—444.

[18] *V. P. Havin, S. J. Havinson:* Někotoryje ocenki analitičeskoj jemkosti, Doklady AN SSSR *138* (1961), 789—792.

[19] *V. P. Havin:* Graničnyje svojstva integralov tipa Koši i garmoničeski soprjažennych funkcij v oblast'ach so sprjaml'ajemoj granicej, Matem. sbornik *68* (*110*) 1965, 499—517.

Author's address: 166 29 Praha 6, Thákurova 7 (České vysoké učení technické).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

DER VERALLGEMEINERTE LJAPUNOVSCHE OSZILLATIONSSATZ

JIŘÍ HNILICA, Praha

(Eingegangen am 4. Oktober 1977)

In dieser Arbeit untersuchen wir die lineare homogene verallgemeinerte Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten (siehe [2])

$$\text{(H)} \qquad dx = d[A_\lambda]\, x\,,$$

wobei $x = (x_1, x_2)^*$ eine Vektorfunktion und $A_\lambda(s)$ eine 2×2-Matrix der Form

$$A_\lambda(s) = \begin{pmatrix} 0, & s \\ -\lambda\, \Phi(s), & 0 \end{pmatrix}$$

sind. Seien ferner Φ eine reelle Funktion mit lokal endlicher Variation im ganzen Interval $(-\infty, +\infty)$ und $\lambda \in C$ ein Parameter. Die Matrix $A_\lambda(s)$ der Gleichung (H) ist eine ω-periodische Funktion im „integralen" Sinn, d. h. es gibt soeine konstante 2×2-Matrix C_λ, dass die Gleichung

$$A_\lambda(s + \omega) - A_\lambda(s) = C_\lambda$$

für alle $s \in (-\infty, +\infty)$ gilt. Unter einer Lösung von (H) in einem Interval $\langle a, b\rangle$ verstehen wir soeine Funktion $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^* : \langle a, b\rangle \to R_2$, für welche die Gleichung $x(u) = x(t) + \int_t^u d[A_\lambda(s)]\, x(s)$ für alle $u, t \in \langle a, b\rangle$ gilt, wobei das Integral in der letzten Gleichung das Perron-Stieltjesche (oder äquivalent das Kurzweilsche) Integral ist (siehe [6]). Das so definierte System (H) ist eine Verallgemeinerung der Hill'schen Differentialgleichung mit einem multiplikativen Parameter λ, $\ddot{x} + \lambda\, p(t)\, x = 0$ (siehe [8]), wobei $p(t)$ eine in R definierte, ω-periodische und integrierbare Funktion ist. Wenn man $\Phi(s) = \int_a^s p(t)\, dt$ setzt, $a \in R$, dann ist die Gleichung (H) mit der entsprechenden Matrix $A_\lambda(s)$ der Hill'schen Differentialgleichung $\ddot{x} + \lambda\, p(t)\, x = 0$, äquivalent. Das System (H) erfüllt die Existenz- und Eindeutigkeitsbedingungen im ganzen Interval $(-\infty, +\infty)$ (siehe [1]). Für das System (H) gilt auch die Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Floquettheorie (siehe [1]) der im klassischen Fall gut bekannt ist.

In dieser Arbeit zeigen wir, dass die Verallgemeinerung des Ljapunovschen Oszillationssatzes (siehe [5]), der im klassischen Fall das Verhalten der Lösung der

Gleichung (H) in der Abhängigkeit vom Verlauf des Parameters λ ganz charakterisiert (siehe [5]), gilt. Zuerst beweisen wir einige Behauptungen. Der triviale Fall $\Phi(s) = $ $= \text{const}$ wird in der Arbeit ausgeschlossen. Eine wichtige Role hat bei der Untersuchung der Gleichung (H) die sog. charakteristische Funktion $A(\lambda)$ der Gleichung (H), die ähnlich wie im klassischen Fall definiert ist, d.h. $A(\lambda) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} X(\omega, \lambda)$, wobei $X(\omega, \lambda)$ die Monodromiematrix der Gleichung (H) ist. Es gilt folgendes Lemma.

Lemma 1. *Sei* $-1 < A(\lambda_0) < 1$ *für* $\lambda_0 \in R$. *Dann sind alle Lösungen der Gleichung* $\mathrm{d}x = \mathrm{d}[A_{\lambda_0}]\, x$ *beschränkt.*

Beweis. Nach Lemma 2 in [8] hat die charakteristische Gleichung der Monodromiematrix $X(\omega, \lambda_0)$ des Systems $\mathrm{d}x = \mathrm{d}[A_{\lambda_0}]\, x$ folgende Form

$$\varrho^2 - 2A(\lambda_0)\, \varrho + 1 = 0\,,$$

wobei $A(\lambda)$ die charakteristische Funktion des Systems (H) ist. Also ist es klar, dass es zwei komplexvereinigte Multiplikatoren ϱ_1, ϱ_2 der Gleichung $\mathrm{d}x = \mathrm{d}[A_{\lambda_0}]\, x$ gibt, so dass $|\varrho_1| = |\varrho_2| = 1$ ist. Nach Lemma 1 in [8] folgt, dass alle Lösungen des Systems (H) beschränkt sind; dass Lemma 1. ist bewiesen.

Lemma 2. *Sei* $X(t, \lambda)$, $X(0, \lambda) = E$ *die Fundamentalmatrix der Gleichung* (H). *Dann gibt es stetige Funktionen* $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$, *so dass folgende Abschätzungen gelten.*

(i) $\|X(t, \lambda)\| \leqq 2\, C_1(\lambda)\, e^{C_1(\lambda) . C_2(\lambda)}$,

(ii) $\operatorname{var}(\langle 0, t\rangle; X(t, \lambda)) \leqq 4\, C_1(\lambda) \,.\, C_2(\lambda)\, e^{C_1(\lambda) . C_2(\lambda)}$

für alle $t \in \langle 0, \omega\rangle$, $\lambda \in R$.

Beweis. Diese Ungleichungen ergeben wir leicht durch eine unmittelbare Anwendung des Satzes III. 1.11 von [1].

Satz 1. *Sei* $x(t, \lambda) = (x_1(t, \lambda), x_2(t, \lambda))$ *eine beliebige Lösung der Gleichung* (H). *Dann ist* $x(t, \lambda)$ *unendlich differenzierbar in* λ, *d.h. für jedes* $k \in N$ *gibt es* $x_1^{(k)}(t, \lambda)$, $x_2^{(k)}(t, \lambda)$, $t \in \langle 0, \omega\rangle$, $\lambda \in C$, *wobei der obere Index* $k \in N$, *die* k*-te Ableitung nach* $\lambda \in C$ *bezeichnet.*

Wenn wir $x^{(k)}(t, \lambda) = (x_1^{(k)}(t, \lambda), x_2^{(k)}(t, \lambda))$ *bezeichnen, dann ist* $x^{(k)}(t, \lambda)$ *eine Lösung der Gleichung*

(G) $$\mathrm{d}x^{(k)} = \mathrm{d}[A_\lambda]\, x^{(k)} + \mathrm{d}g_k\,,$$

wobei

$$g_k(t, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \displaystyle\int_0^t x_1^{(k-1)}(s, \lambda)\, \mathrm{d}\Phi(s) \end{pmatrix}$$

ist. Dabei ist die Anfangsbedingung $x^{(k)}(0, \lambda) = 0$, $\lambda \in C$ $t \in \langle 0, \omega\rangle$ *erfüllt.*

Bemerkung. Von (G) folgt, dass $x_1^{(k)}(t, \lambda) = \int_0^t x_2^{(k)}(s, \lambda)\, ds$ ist, also sind alle Funktionen $x_1^{(k)}(t, \lambda)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ im ganzen Interval $\langle 0, \omega \rangle$ für alle $\lambda \in C$ stetig.

Beweis. Sei $x(t, \lambda) = (x_1(t, \lambda), x_2(t, \lambda))$ eine beliebige Lösung der Gleichung (H). Offenbar können wir voraussetzen, dass für die Lösung $x(t, \lambda)$ die Anfangsbedingungen $x_1(0, \lambda) = 1$, $x_2(0, \lambda) = 0$ gelten. Mittels Induktion zeigen wir, dass alle Ableitungen $x_1^{(k)}(t, \lambda)$, $x_2^{(k)}(t, \lambda)$, $k \in N$, $t \in \langle 0, \omega \rangle$, $\lambda \in C$ existieren. Aus der Gleichung (H) ergibt sich

$$(1.1) \qquad x_1(t, \lambda) = 1 + \int_0^t x_2(s, \lambda)\, ds ,$$

$$x_2(t, \lambda) = -\lambda \int_0^t x_1(s, \lambda)\, d\Phi(s) , \quad t \in \langle 0, \omega \rangle , \quad \lambda \in C .$$

Sei $\lambda_0 \in C$ eine beliebige komplexe Zahl. Nach (1.1) gilt

$$(1.2) \qquad \frac{x_1(t, \lambda) - x_1(t, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \int_0^t \frac{x_2(s, \lambda) - x_2(s, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\, ds ,$$

$$\frac{x_2(t, \lambda) - x_2(t, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -\lambda \int_0^t \frac{x_1(s, \lambda) - x_1(s, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\, d\Phi(s) -$$

$$- \int_0^t x_1(s, \lambda_0)\, d\,\Phi(s) , \quad \lambda \in C , \quad \lambda \neq \lambda_0 , \quad t \in \langle 0, \omega \rangle .$$

Wenn wir $z(t, \lambda) = [x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)]/(\lambda - \lambda_0)$ bezeichnen, ergibt sich nach der Gleichung (1.2), dass $z(t, \lambda)$ eine Lösung der Gleichung

$$(1.3) \qquad dz = d[A_\lambda]\, z + dg ,$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\int_0^t x_1(s, \lambda_0)\, d\Phi(s) \end{pmatrix} , \quad t \in \langle 0, \omega \rangle$$

ist. Betrachten wir jetzt die verallgemeinerte Differentialgleichung

$$(1.4) \qquad dz = d[A_{\lambda_0}]\, z + dg ,$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\int_0^t x_1(s, \lambda_0)\, d\Phi(s) \end{pmatrix} , \quad t \in \langle 0, \omega \rangle .$$

Nach dem Existenzsatz (siehe [1], III. 1.4 Theorem) bekommen wir, dass $z(t, \lambda)$, $z(0, \lambda) = 0$ und $z^*(t)$, $z^*(0) = 0$ Lösungen der Gleichungen (1.3) und (1.4) sind. Für deren Differenz ist

$$(1.5) \qquad z(t, \lambda) - z^*(t) = \int_0^t d[A_\lambda(s)]\, (z(s, \lambda) - z^*(s)) + \int_0^t d[A_\lambda(s) - A_{\lambda_0}(s)]\, z^*(s) ,$$

$t \in \langle 0, \omega \rangle$, $\lambda \in C$, $\lambda \neq \lambda_0$. Nach (1.5) sehen wir, dass die Funktion $w(t, \lambda) = z(t, \lambda) - z^*(t)$ eine Lösung der Anfangsaufgabe

$$(1.6) \qquad \begin{aligned} dw &= d[A_\lambda]\, w + dh\,, \\ h(t, \lambda) &= \int_0^t d[A_\lambda(s) - A_{\lambda_0}(s)]\, z^*(s)\,, \\ w(0, \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

ist. Mit Hilfe des Satzes III. 2.14 in [1] erhalten wir folgende Beziehung

$$(1.7) \qquad w(t, \lambda) = h(t, \lambda) - X(t, \lambda) \int_0^t d_s[X^{-1}(s, \lambda)]\, h(s, \lambda)\,,$$

wobei $X(t, \lambda)$ die Fundamentalmatrix der Gleichung (H) ist. Nach (1.7) gilt also die Abschätzung

$$(1.8) \qquad \|w(t, \lambda)\| \leqq \|h(t, \lambda)\| + \|X(t, \lambda)\| \left\| \int_0^t d_s[X^{-1}(s, \lambda)]\, h(s, \lambda) \right\|.$$

Nach dem Abschätzungssatz für das Perron-Stieltjesche Integral (siehe [9], Kap. II) erhalten wir

$$(1.9) \qquad \|h(t, \lambda)\| \leqq \sup_{s \in \langle 0, \omega \rangle} \|z^*(s)\| \operatorname{var}(\langle 0, t \rangle; A_\lambda(s) - A_{\lambda_0}(s))\,.$$

Da aber die Lösung $z^*(s)$ der Gleichung (1.4) endlicher Variation ist (siehe [1]), folgt nach (1.9) weiter

$$(1.10) \qquad \|h(t, \lambda)\| \leqq C|\lambda - \lambda_0| \operatorname{var}(\langle 0, \omega \rangle; \Phi)\,,$$

wobei $C > 0$ eine Konstante ist. Seien $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$ die im Lemma 2 bestimmte Funktionen. Dann gilt folgende Ungleichung

$$(1.11) \qquad \|X(t, \lambda)\| \leqq 2\, C_1(\lambda)\, e^{C_1(\lambda) \cdot C_2(\lambda)}\,, \quad t \in \langle 0. \omega \rangle\,, \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta_0\,,$$

wobei $\delta_0 > 0$ ist. Ähnlich wie (1.9) bekommen wir

$$(1.12) \qquad \left\| \int_0^t d_s[X^{-1}(s, \lambda)]\, h(s, \lambda) \right\| \leqq \sup_{s \in \langle 0, \omega \rangle} \|h(s, \lambda)\| \operatorname{var}(\langle 0, t \rangle; X^{-1})\,.$$

Ferner ist nach Lemma 2.

$$(1.13) \qquad \operatorname{var}(\langle 0, t \rangle; X^{-1}) \leqq 4\, C_1(\lambda)\, C_2(\lambda)\, e^{C_1(\lambda) \cdot C_2(\lambda)}\,.$$

Nun geben (1.10) (1.11), (1.12), (1.13) und (1.8) die Ungleichung

$$(1.14) \qquad \begin{aligned} \|w(t, \lambda)\| &\leqq C|\lambda - \lambda_0| \operatorname{var}(\langle 0, \omega \rangle; \Phi)\,. \\ &\cdot [(1 + 8\, C_1^2(\lambda)\, C_2(\lambda))\, e^{2C_1(\lambda) \cdot C_2(\lambda)}]\,, \end{aligned}$$

für jede $t \in \langle 0, \omega \rangle$. Nach der Definition der Funktion $w(t, \lambda)$ ist offenbar $x^{(1)}(t, \lambda_0) = z^*(t)$, $t \in \langle 0, \omega \rangle$. Jetzt gibt die Eindeutigkeit (siehe [1]), dass $x^{(1)}(t, \lambda_0)$ eine Lösung der Gleichung

$$\mathrm{d}x^{(1)} = \mathrm{d}[A_{\lambda_0}]\, x^{(1)} + \mathrm{d}g\,,$$
$$x^{(1)}(0, \lambda_0) = 0$$

ist. Weil $\lambda_0 \in C$ beliebig gewählt wurde, bekommen wir die Gültigkeit des Satzes für $k = 1$.

Also setzen wir jetzt voraus, dass der Satz für $k \in N$ gilt. Wir zeigen die Gültigkeit des Satzes für $k + 1$. Nach der Induktionsvoraussetzung bekommen wir ähnlich wie im ersten Fall folgende Beziehung

$$\frac{x_1^{(k)}(t, \lambda) - x_1^{(k)}(t, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \int_0^t \frac{x_2^{(k)}(s, \lambda) - x_2^{(k)}(s, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\, \mathrm{d}s\,, \tag{1.15}$$

$$\frac{x_2^{(k)}(t, \lambda) - x_2^{(k)}(t, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -\int_0^t \frac{x_1^{(k)}(s, \lambda) - x_1^{(k)}(s, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\, \mathrm{d}\Phi(s) -$$
$$- \int_0^t \left[x_1^{(k)}(s, \lambda_0) + k\, \frac{x_1^{(k-1)}(s, \lambda) - x_1^{(k-1)}(s, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right] \mathrm{d}\Phi(s)\,,$$

für $t \in \langle 0, \omega \rangle$, $\lambda \in C$, $\lambda \neq \lambda_0$, wobei $\lambda_0 \in C$ eine beliebig gewählte Zahl ist. Nach (1.15) folgt, dass

$$z(t, \lambda) = \frac{x^{(k)}(t, \lambda) - x^{(k)}(t, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}$$

die Lösung der Gleichung

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}[A_\lambda]\, z + \mathrm{d}g\,, \tag{1.16}$$

$$g(t, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\displaystyle\int_0^t \left[x_1^{(k)}(s, \lambda_0) + k\, \frac{x_1^{(k-1)}(s, \lambda) - x_1^{(k-1)}(s, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right] \mathrm{d}\Phi(s) \end{pmatrix},$$

für $t \in \langle 0, \omega \rangle$, $\lambda \in C$, $\lambda \neq \lambda_0$ ist. Betrachten wir jetzt die Gleichung

$$\mathrm{d}z^* = \mathrm{d}[A_{\lambda_0}]\, z^* + \mathrm{d}g_{k+1}\,, \tag{1.17}$$

$$g_{k+1}(t, \lambda_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(k+1) \displaystyle\int_0^t x_1^{(k)}(s, \lambda_0)\, \mathrm{d}\Phi(s) \end{pmatrix}.$$

Ähnlich wie im ersten Teil des Beweises zeigen wir, dass die Differenz $w(t, \lambda) = z(t, \lambda) - z^*(t)$ eine Lösung der Gleichung

$$(1.18) \qquad dw = d[A_\lambda]\, w + dh\,, \quad w(0, \lambda) = 0\,,$$

$$h(t, \lambda) = \int_0^t d[A_\lambda(s) - A_{\lambda_0}(s)]\, z^*(s) + H(t, \lambda)\,,$$

$$H(t, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \displaystyle\int_0^t \left[x_1^{(k)}(s, \lambda_0) - \frac{x_1^{(k-1)}(s, \lambda) - x_1^{(k-1)}(s, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right] d\Phi(s) \end{pmatrix}$$

für $t \in \langle 0, \omega \rangle$, $\lambda \in C$, $\lambda \neq \lambda_0$ ist. Durch gleiches Verfahren wie im ersten Fall erhalten wir die Abschätzung

$$(1.19) \qquad \|w(t, \lambda)\| \leqq \|h(t, \lambda)\| + \|X(t, \lambda)\| \,.\, \left\| \int_0^t d_s[X^{-1}(s, \lambda)]\, h(s, \lambda) \right\|,$$

$t \in \langle 0, \omega \rangle$, $\lambda \in C$, $\lambda \neq \lambda_0$, wobei $X(t, \lambda)$, $X(0, \lambda) = E$ die Fundamentalmatrix der Gleichung (H) ist. Nach (1.18) folgt

$$(1.20) \qquad \|h(t, \lambda)\| \leqq C|\lambda - \lambda_0| \operatorname{var}(\langle 0, \omega \rangle; \Phi) + \|H(t, \lambda)\|\,,$$

wobei $C > 0$ eine von λ unabhängige Konstante ist. Die Beziehung (1.18) gibt

(1.21)

$$\|H(t, \lambda)\| \leqq k \int_0^\omega \left| x_1^{(k)}(s, \lambda_0) - \frac{x_1^{(k-1)}(s, \lambda) - x_1^{(k-1)}(s, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right| d \operatorname{var}(\langle 0, s \rangle; \Phi)\,.$$

Mit der Hilfe des Osgoodschen Konvergenzsatzes (siehe [9]), erhalten wir

$$(1.22) \qquad \lim_{\lambda \to \lambda_0} \|H(t, \lambda)\| = 0\,, \quad \text{gleichmässig in} \quad t \in \langle 0, \omega \rangle\,.$$

Also es folgt nach (1.20) und (1.22)

$$(1.23) \qquad \lim_{\lambda \to \lambda_0} \|h(t, \lambda)\| = 0\,, \quad \text{gleichmässig in} \quad t \in \langle 0, \omega \rangle\,.$$

Im ersten Teil des Beweises wurde gezeigt, dass für die Fundamentalmatrix $X(t, \lambda)$ in der δ_0-Umgebung des Punktes λ_0 die Abschätzungen

$$(1.24) \qquad \|X(t, \lambda)\| \leqq C < \infty$$

$$(1.25) \qquad \operatorname{var}(\langle 0, t \rangle; X^{-1}(s, \lambda)) \leqq D < \infty$$

für $t \in \langle 0, \omega \rangle$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta_0$ gelten, wobei $C > 0$, $D > 0$ von λ unabhängige Konstanten sind. Mit Hilfe des Abschätzungssatzes für Integrale und nach (1.24) erhalten wir

$$(1.26) \qquad \|X(t, \lambda)\| \,.\, \left\| \int_0^t d_s[X^{-1}(s, \lambda)]\, h(s, \lambda) \right\| \leqq$$

$$\leqq C \int_0^t \|h(s, \lambda)\| \, d \operatorname{var}(\langle 0, s \rangle; X^{-1}(s, \lambda))\,.$$

Also nach (1.23) und (1.26) gilt folgendes:

(1.27) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass die Ungleichung

$$\|X(t, \lambda)\| \cdot \left\| \int_0^t \mathrm{d}_s[X^{-1}(s, \lambda)]\, h(s, \lambda) \right\| \leqq C \,.\, \varepsilon \,.\, \operatorname{var}\left(\langle 0, \omega\rangle; X^{-1}(s, \lambda)\right),$$

für alle $t \in \langle 0, \omega\rangle$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ gilt. Hiervon und von (1.25) folgt

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \|X(t, \lambda)\| \cdot \left\| \int_0^t \mathrm{d}_s[X^{-1}(s, \lambda)]\, h(s, \lambda) \right\| = 0\,, \tag{1.28}$$

für alle $t \in \langle 0, \omega\rangle$. Nach (1.28), (1.19) und (1.21) ist also offenbar $\lim_{\lambda \to \lambda_0} w(t, \lambda) = 0$, $t \in \langle 0, \omega\rangle$. Nach der Eindeutigkeit der Lösung und (1.17) ist es klar, dass $x^{(k+1)}(t, \lambda_0) = z^*(t)$ eine Lösung der Gleichung

$$\mathrm{d}x^{(k+1)} = \mathrm{d}[A_{\lambda_0}]\, x^{(k+1)} + \mathrm{d}g_{k+1}\,, \quad x^{(k+1)}(0, \lambda_0) = 0\,,$$

$$g_{k+1}(t, \lambda_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(k+1) \int_0^t x_1^{(k)}(s, \lambda_0)\, \mathrm{d}\Phi(s) \end{pmatrix}$$

ist. Weil $\lambda_0 \in C$ beliebig gewählt wurde, ist der Beweis des Satzes abgeschlosssen.

Bemerkung. Im ersten Teil des Beweises zeigten wir, dass $x(t, \lambda)$ die erste Ableitung nach $\lambda \in C$ hat. Also ist $x(t, \lambda)$ eine analytische Funktion von λ in der ganzen komplexen Ebene und dadurch ist es ersichltich, dass alle Ableitungen dieser Funktion von λ existieren.

Lemma 3. *Die charakteristische Funktion $A(\lambda)$ der Gleichung* (H) *ist eine anaytische Funktion.*

Beweis. Weil nach der Definition $A(\lambda) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} X(\omega, \lambda) = \frac{1}{2}(x_{11}(\omega, \lambda) + x_{22}(\omega, \lambda))$ ist, folgt die Behauptung unmittelbar von dem Satz 1.

Lemma 4. *Sei Φ eine monotone, von links stetige Funktion. Dann können wir die charakteristische Funktion $A(\lambda)$ in der Form*

$$A(\lambda) = 1 - A_1\lambda + A_2\lambda^2 - \ldots, \quad \lambda \in C$$

ausdrücken. Dabei gilt

a) $A_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ *für nichtfallendes* Φ,

b) $A_n < 0$, $n = 1, 2, \ldots$ *für nichtwachsendes* Φ.

Beweis. Wir beweisen lediglich die Behauptung a), der Beweis der Behauptung b) ist analogisch. Sei

$$X(t, \lambda) = \begin{pmatrix} x_1(t, \lambda), & y_1(t, \lambda) \\ x_2(t, \lambda), & y_2(t, \lambda) \end{pmatrix}, \quad X(0, \lambda) = E \tag{4.1}$$

die Fundamentalmatrix der Gleichung (H). Ähnlich wie im klassischen Fall kann man die Matrix $X(t, \lambda)$ durch die Reihe

$$X(t, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j(t, \lambda), \quad t \in \langle 0, \omega \rangle, \quad \lambda \in C \tag{4.2}$$

ausdrücken. Dabei konvergiert diese Reihe absolut und gleichmässig in $t \in \langle 0, \omega \rangle$ und $\lambda \in C$, $|\lambda| \leqq \Lambda$, wobei $\Lambda > 0$ eine beliebige Zahl ist. Ferner gilt

$$K_0(t, \lambda) = E, \tag{4.3}$$

$$K_j(t, \lambda) = \int_0^t \mathrm{d}[A_\lambda(s)] \, K_{j-1}(s, \lambda), \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Von (4.2) und (4.3) bekommen wir durch eine Berechnung die Beziehung

$$X(t, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \, V_j(t) \, \lambda^j, \tag{4.4}$$

wobei

$$V_j(t) = \begin{pmatrix} \varphi_j^1(t), & \psi_j^1(t) \\ \varphi_j^2(t), & \psi_j^2(t) \end{pmatrix}$$

dabei konvergiert die Reihe gleichmässig in t, λ für $t \in \langle 0, \omega \rangle$, $|\lambda| \leqq \Lambda$, $\Lambda > 0$. Die Funktionen $x(t, \lambda) = (x_1(t, \lambda), x_2(t, \lambda))$ und $y(t, \lambda) = (y_1(t, \lambda), y_2(t, \lambda))$ sind offenbar Lösungen der Gleichung (H). Nach (4.1) und (4.4) folgt

$$x(t, \lambda) = \varphi_0(t) - \lambda \, \varphi_1(t) + \lambda^2 \, \varphi_2(t) - \ldots, \tag{4.5}$$

$$y(t, \lambda) = \psi_0(t) - \lambda \, \psi_1(t) + \lambda^2 \, \psi_2(t) - \ldots,$$

wobei $\varphi_j(t) = (\varphi_j^1(t), \varphi_j^2(t))$, $\psi_j(t) = (\psi_j^1(t), \psi_j^2(t))$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ ist. Nach der Definition der Lösung der Gleichung (H) erhalten wir

$$x_1(t, \lambda) = 1 + \int_0^t x_2(s, \lambda) \, \mathrm{d}s, \tag{4.6}$$

$$x_2(t, \lambda) = -\lambda \int_0^t x_1(s, \lambda) \, \mathrm{d}\Phi(s),$$

$$y_1(t, \lambda) = \int_0^t y_2(s, \lambda) \, \mathrm{d}s,$$

$$y_2(t, \lambda) = 1 - \lambda \int_0^t y_1(s, \lambda) \, \mathrm{d}\Phi(s).$$

Hiervon und von (4.5) ist

(4.7)
$$\varphi_0^1(t) \equiv 1\,,$$
$$\varphi_k^1(t) = \int_0^t \left(\int_0^s \varphi_{k-1}^1(u)\, \mathrm{d}\Phi(u) \right) \mathrm{d}s\,, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Dann gibt der Substitutionssatz und die Integration per-partes (siehe [1])

(4.8)
$$\varphi_0^1(t) \equiv 1\,,$$
$$\varphi_k^1(t) = \int_0^t (t - s)\, \varphi_{k-1}^1(s)\, \mathrm{d}\Phi(s)\,.$$

Durch dasselbe Verfahren ergibt sich die Beziehung

(4.9)
$$\psi_0^2(t) \equiv 1\,,$$
$$\psi_k^2(t) = \int_0^t (\Phi(t) - \Phi(s))\, \psi_{k-1}^2(s) \mathrm{d}\, s\,.$$

Weil $A(\lambda) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} X(\omega, \lambda)$ ist, folgt von (4.5), (4.8) und (4.9)

(4.10)
$$A(\lambda) = 1 - A_1\lambda + A_2\lambda^2 + \ldots\,, \quad \lambda \in C$$
$$A_n = \tfrac{1}{2}(\varphi_n^1(\omega) + \psi_n^2(\omega))\,, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Da nach der Voraussetzung die Funktion Φ nichtfallende ist, folgt mittels der Induktion von (4.8) und (4.9), dass $A_n > 0$ für jedes $n \in N$ ist. Also ist das Lemma 3. bewiesen.

In Weiteren werden wir die Frage der Nullstellen der charakteristischen Funktion $A(\lambda)$ untersuchen. Wir zeigen, dass die Funktion $A(\lambda)$ unendlich viele reelle und nur reelle Nullstellen hat.

Die Gleichung (H) können wir äquivalent in der folgenden Operatorform schreiben:

(H′)
$$Lx = \lambda Qx\,,$$

wobei

$$Lx = \begin{pmatrix} -\; x_2(t) - x_2(0)) \\ x_1(t) - x_1(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^t x_2(s)\, \mathrm{d}s \end{pmatrix},$$
$$Qx = \begin{pmatrix} \int_0^t x_1(s)\, \mathrm{d}\Phi(s) \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind. Betrachten wir die folgende Randwertaufgabe

(H″)
$$Lx = \lambda Qx\,, \quad x(\omega, \lambda) = \varrho x(0, \lambda)\,, \quad \varrho \in C\,, \quad |\varrho| = 1\,.$$

Lemma 5. *Sei Φ eine monotone Funktion. Dann kann die Randwertaufgabe* (H″) *nur abzählbar viele Eigenwerte haben. Alle diese Eigenwerte sind reell und können nur einen unendlicher Häufungspunkt haben.*

Beweis. Sei $X(t, \lambda)$ die Fundamental matrix der Gleichung (H). Dann können wir jede Lösung $x(t, \lambda)$ dieser Gleichung in der Form $x(t, \lambda) = X(t, \lambda)\, x(0, \lambda)$ schreiben. Die Aufgabe (H″) besitzt eine nichttriviale Lösung, wenn $\det\left(X(\omega, \lambda) - \varrho E\right) = 0$ ist. Nach Lemma 3 ist $X(\omega, \lambda)$ eine analytische Funktion in der Variablen λ. Also bilden die Nullstellen der Funktion $F(\lambda) = \det\left(X(\omega, \lambda) - \varrho E\right)$ eine abzählbare Menge, die nur unendliche Häufungspunkte haben kann.

Seien λ_1, λ_2 beliebige Eigenwerte der Aufgabe (H″) und seien $u(t, \lambda_1) = (u_1(t, \lambda_1), u_2(t, \lambda_1))$ und $v(t, \lambda_2) = (v_1(t, \lambda_2), v_2(t, \lambda_2))$ die zugehörende nichttriviale Lösungen. In Weiteren schreiben wir kurz nur u, v. Es gilt also $Lu = \lambda_1 Qu$, $u(\omega, \lambda_1) = \varrho\, u(0, \lambda_1)$ und $Lv = \lambda_2 Qv$, $v(\omega, \lambda_2) = \varrho\, v(0, \lambda_2)$. Wir drücken die Integrale

$$\int_0^\omega \mathrm{d}[(Lu)']\,\bar{v} \quad \text{und} \quad \int_0^\omega u'\,\mathrm{d}[\overline{Lv}]$$

aus (der Streifen bedeutet die komplexvereinigte Zahl und der Strich bedeutet den entsprechenden Zeilenvektor).

Mit Hilfe des Substitutionssatzes (siehe [1]) ergeben wir

$$\int_0^\omega \mathrm{d}[(Lu)']\,\bar{v} = -\int_0^\omega \mathrm{d}[u_2(t)]\,\bar{v}_1(t) + \int_0^\omega \mathrm{d}[u_1(t)]\,\bar{v}_2(t) - \int_0^\omega u_2(t)\,\bar{v}_2(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

$$\int_0^\omega u'\,\mathrm{d}[\overline{Lv}] = -\int_0^\omega u_1(t)\,\mathrm{d}\bar{v}_2(t) + \int_0^\omega u_2(t)\,\mathrm{d}\bar{v}_1(t) - \int_0^\omega u_2(t)\,\bar{v}_2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Hiervon und von der Integration per-partes erhalten wir

$$\int_0^\omega \mathrm{d}[(Lu)']\,\bar{v} - \int_0^\omega u'\,\mathrm{d}[\overline{Lv}] = u_1\bar{v}_2\Big|_0^\omega - u_2\bar{v}_1\Big|_0^\omega\,. \tag{5.1}$$

Weil u, v Lösungen der Randwertaufgabe (H″) sind, gilt

$$\begin{aligned} u_1(\omega) &= \varrho\, u_1(0)\,, \quad & u_2(\omega) &= \varrho\, u_2(0)\,, \\ \bar{v}_1(\omega) &= \bar{\varrho}\,\bar{v}_1(0)\,, \quad & \bar{v}_2(\omega) &= \bar{\varrho}\,\bar{v}_2(0)\,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Dann folgt nach (5.1) und (5.2)

$$\int_0^\omega \mathrm{d}[(Lu)']\,\bar{v} - \int_0^\omega u'\,\mathrm{d}[\overline{Lv}] = 0\,. \tag{5.3}$$

Weil für die Funktionen u, v die Beziehungen $Lu = \lambda_1 Qu$ und $Lv = \lambda_2 Qv$ gelten, ist nach (5.3) und mit der Hilfe des Substitutionssatzes

$$(5.4) \qquad \int_0^\omega \mathrm{d}[(Lu')]\,\bar{v} = \lambda_1 \int_0^\omega u_1 \bar{v}_1 \,\mathrm{d}\Phi\,,$$

$$\int_0^\omega u'\,\mathrm{d}[\overline{Lv}] = \bar{\lambda}_2 \int_0^\omega u_1 \bar{v}_1 \,\mathrm{d}\Phi\,.$$

Hiervon folgt also

$$(5.5) \qquad (\lambda_1 - \bar{\lambda}_2) \int_0^\omega u_1 \bar{v}_1 \,\mathrm{d}\Phi = 0\,.$$

Legen wir in (5.5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, d.h. $u_1(t) = v_1(t)$, wir erhalten dann

$$(5.6) \qquad (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^\omega (u_1(t))^2 \,\mathrm{d}\Phi(t) = 0\,.$$

Durch eine kurze Berechnung können wir zeigen, dass $\int_0^\omega (u_1(t))^2 \,\mathrm{d}\Phi(t) \neq 0$ ist (der Fall Φ = const war schon früher ausgeschlossen). Dann folgt nach (5.6) $\lambda = \bar{\lambda}$, also ist λ eine reelle Zahl und dadurch ist das Lemma 5. bewiesen.

Folgerung. Sei Φ eine monotone Funktion. Dann hat die Funktion $A(\lambda) - \alpha$, wobei $A(\lambda)$ die charakteristische Funktion der Gleichung (H) und α eine reelle Zahl $-1 \leqq \alpha \leqq 1$ sind, nur reelle Nullstellen.

Beweis. Es ist offenbar, dass eine beliebige Nullstelle λ_0 der Funktion $A(\lambda) - \alpha$ gleichzeitig ein Eigenwert der Randwertaufgabe (H″) ist. Die Behauptung folgt nun unmittelbar vom Lemma 5.

In weiterem Satz zeigen wir eine interesante geometrische Eigenschaft der Funtion $A(\lambda)$.

Satz 2. *Seien Φ eine monotone Funktion und $A(\lambda)$ die charakteristische Funktion der Gleichung* (H). *Sei $\lambda_0 \in R$ ein Stationärpunkt der Funktion $A(\lambda)$, d.h. $\dot{A}(\lambda_0) = 0$. Dann gilt*

a) $|A(\lambda_0)| \geqq 1$,

b) $A(\lambda_0) \,.\, \ddot{A}(\lambda_0) < 0$,

wobei wir mit dem Punkt die Ableitung nach der Variablen λ bezeichnen.

Beweis. Offenbar können wir ohne weiteres voraussetzen, dass Φ eine nichtfallende Funktion ist. Sei $X(t, \lambda) = (x_{ij}(t, \lambda))_{i,j=1,2}$, $X(0, \lambda) = E$ die Fundamentalmatrix der Gleichung (H). Es gilt also

$$(2.1) \qquad x_{11}(t, \lambda) = 1 + \int_0^t x_{21}(s, \lambda)\,\mathrm{d}s\,,$$

$$x_{12}(t, \lambda) = \int_0^t x_{22}(s, \lambda)\,\mathrm{d}s\,,$$

$$x_{21}(t, \lambda) = -\lambda \int_0^t x_{11}(s, \lambda)\, d\Phi(s),$$

$$x_{22}(t, \lambda) = 1 - \lambda \int_0^t x_{12}(s, \lambda)\, d\Phi(s).$$

Die Funktionen $x^1(t, \lambda) = (x_{11}(t, \lambda), x_{21}(t, \lambda))$, $x^2(t, \lambda) = (x_{12}(t, \lambda), x_{22}(t, \lambda))$ sind also Lösungen der Gleichung (H). Nach dem Satz 1 gelten für die Ableitungen $\dot{x}^1(t, \lambda)$, $\dot{x}^2(t, \lambda)$ dieser Funktionen nach λ die Gleichungen

(2.2) $$d\dot{x}^1 = d[A_\lambda]\, \dot{x}^1 + dH^1, \quad \dot{x}^1(0, \lambda) = 0,$$

$$H^1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\int_0^t x_{11}(s, \lambda)\, d\Phi(s) \end{pmatrix}$$

und

$$d\dot{x}^2 = d[A_\lambda]\, \dot{x}^2 + dH^2, \quad \dot{x}^2(0, \lambda) = 0,$$

$$H^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\int_0^t x_{12}(s, \lambda)\, d\Phi(s) \end{pmatrix},$$

für $t \in \langle 0, \omega)$ und $\lambda \in C$. Wenn wir die Lösungen $\dot{x}^1(t, \lambda)$ und $\dot{x}^2(t, \lambda)$ mit der Hilfe der Formel für die Variation der Konstanten (siehe [1]) ausdrücken, ergibt sich nach (2.2) die Gleichung

(2.3) $$\begin{pmatrix} \dot{x}_{11}(t, \lambda) \\ \dot{x}_{21}(t, \lambda) \end{pmatrix} = H^1(t) - X(t, \lambda) \int_0^t d[X^{-1}(s, \lambda)]\, H^1(s),$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{12}(t, \lambda) \\ \dot{x}_{22}(t, \lambda) \end{pmatrix} = H^2(t) - X(t, \lambda) \int_0^t d[X^{-1}(s, \lambda)]\, H^2(s).$$

Nach Lemma 2 in [8] ist $\det X(t, \lambda) = 1$, also gilt

(2.4) $$X^{-1}(t, \lambda) = \begin{pmatrix} x_{22}(t, \lambda), & -x_{12}(t, \lambda) \\ -x_{21}(t, \lambda), & x_{11}(t, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Durch eine Berechnung können wir zeigen, dass folgendes gilt:

(2.5) $$\dot{X}(t, \lambda) = X(t, \lambda) \,.\, \Omega(t, \lambda),$$

wobei

$$\Omega(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \int_0^t x_{11} \,.\, x_{12}\, d\Phi, & \int_0^t (x_{12})^2\, d\Phi \\ -\int_0^t (x_{11})^2\, d\Phi, & -\int_0^t x_{11} \,.\, x_{12}\, d\Phi \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\Omega(t, \lambda)$ können wir in der Form

$$(2.6) \qquad \Omega(t, \lambda) = J \,.\, P(t, \lambda)$$

schreiben, wobei

$$J = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$P(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \int_0^t (x_{11})^2 \, d\Phi, & \int_0^t x_{11} \,.\, x_{12} \, d\Phi \\ \int_0^t x_{11} \,.\, x_{12} \, d\Phi, & \int_0^t (x_{12})^2 \, d\Phi \end{pmatrix}$$

ist. Also ist $P(t, \lambda) = (p_{ij}(t, \lambda))_{i,j=1,2}$ eine symmetrische Matrix. Nach dem Satz 1. und nach (2.5) ergibt sich, dass für die zweite Ableitung $\ddot{X}(t, \lambda)$ der Fundamentalmatrix

$$(2.7) \qquad \ddot{X}(t, \lambda) = X(t, \lambda) (\Omega^2(t, \lambda) + \dot{\Omega}(t, \lambda))$$

gilt. Durch kurze Berechnung erhalten wir dann, dass die Gleichung

$$(2.8) \qquad \begin{aligned} \ddot{X}(t, \lambda) &= X(t, \lambda) (-\delta(t, \lambda) E + \dot{\Omega}(t, \lambda)) \,, \\ \delta(t, \lambda) &= \det P(t, \lambda) \end{aligned}$$

gilt. Im Weiteren werden wir einfach $P(t, \lambda) = \int_0^t Q(s, \lambda) \, d\Phi(s)$ schreiben, wobei

$$Q(s, \lambda) = \begin{pmatrix} (x_{11}(s, \lambda))^2, & x_{11}(s, \lambda) \,.\, x_{12}(s, \lambda) \\ x_{11}(s, \lambda) \,.\, x_{12}(s, \lambda), & (x_{12}(s, \lambda))^2 \end{pmatrix}$$

ist. So werden auch andere Integrale einer Matrixfunction „nach der Funktion Φ" bezeichnet. Sei $\lambda_0 \in R$ eine beliebige reelle Zahl. Für den Differenzanteil gilt

$$(2.9) \qquad \frac{1}{h} [P(t, \lambda_0 + h) - P(t, \lambda_0)] = \int_0^t \frac{Q(s, \lambda_0 + h) - Q(s, \lambda_0)}{h} \, d\Phi(s) \,.$$

Hiervon und nach dem Osgoodschen Konvergenzsatz (siehe [9]) erhalten wir

$$(2.10) \qquad \dot{P}(t, \lambda_0) = \int_0^t \dot{Q}(s, \lambda_0) \, d\Phi(s) \,, \quad t \in \langle 0, \omega \rangle \,.$$

Wenn wir die Matrix $Q(s, \lambda)$ in der Form $Q(s, \lambda) = X'(s, \lambda) \, R \, X(s, \lambda)$, ausdrücken, wobei $R = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$ ist, dann folgt nach (2.10)

$$(2.11) \qquad \dot{P}(t, \lambda) = \int_0^t \dot{X}'(s, \lambda) \, R \, X(s, \lambda) \, d\Phi(s) + \int_0^t X'(s, \lambda) \, R \, \dot{X}(s, \lambda) \, d\Phi(s) \,,$$

für $t \in \langle 0, \omega \rangle$, $\lambda \in R$, wobei der Strich die transponierte Matrix bezeichnet. Die Beziehungen (2.5) und (2.6) geben

$$\text{(2.12)} \qquad \dot{X}(s, \lambda) = X(s, \lambda)\, J \int_0^s X'(\tau, \lambda)\, R\, X(\tau, \lambda)\, \mathrm{d}\Phi(\tau)\,,$$

$$\dot{X}'(s, \lambda) = -\int_0^s X'(\tau, \lambda)\, R\, X(\tau, \lambda)\, \mathrm{d}\Phi(\tau)\,.\, J\, X'(s, \lambda)\,.$$

Also wir haben nach (2.11) und (2.12) den folgenden Ausdruck für die Matrix $\dot{P}(t, \lambda)$:

$$\text{(2.13)} \quad \dot{P}(t, \lambda) = \int_0^t \left[\int_0^s (Q(s, \lambda)\, J\, Q(\tau, \lambda) - Q(\tau, \lambda)\, J\, Q(s, \lambda))\, \mathrm{d}\Phi(\tau)\right] \mathrm{d}\Phi(s)\,.$$

Durch direkte Berechnung können wir feststellen, dass für das Element $\dot{p}_{12}(t, \lambda)$ der Matrix $\dot{P}(t, \lambda)$ die Gleichnung

$$\text{(2.14)} \qquad \dot{p}_{12}(t, \lambda) = \int_0^t \mathrm{d}\Phi(s) \left[\int_0^s (x_{11}(s, \lambda))^2\, (x_{12}(\tau, \lambda))^2 - \right.$$

$$\left. - (x_{11}(\tau, \lambda))^2\, (x_{12}(s, \lambda))^2\, \mathrm{d}\Phi(\tau)\right].$$

gilt. Hiervon erhalten wir mit Hilfe der Dirichletschen Formel (siehe [9]) die Beziehung

$$\text{(2.15)} \qquad \dot{p}_{12}(t, \lambda) = \int_0^t (x_{12}(\tau, \lambda))^2 \left[\int_\tau^t (x_{11}(s, \lambda))^2\, \mathrm{d}\Phi(s) - \right.$$

$$\left. - \int_0^\tau (x_{11}(s, \lambda))^2\, \mathrm{d}\Phi(s)\right] \mathrm{d}\Phi(\tau)\,,$$

für $t \in \langle 0, \omega \rangle$ und $\lambda \in R$.

Jetzt werden wir die Eigenschaften der charakteristischen Funktion $A(\lambda)$ der Gleichung (H) untersuchen. Von (2.5) und (2.6) folgt

$$\text{(2.16)} \qquad \dot{A}(\lambda) = \tfrac{1}{2} \operatorname{Tr} \dot{X}(\omega, \lambda) = \tfrac{1}{2} \operatorname{Tr}[X(\omega, \lambda)\, J\, P(\omega, \lambda)]\,,$$

$$\ddot{A}(\lambda) = \tfrac{1}{2} \operatorname{Tr} \ddot{X}(\omega, \lambda) = \tfrac{1}{2} \operatorname{Tr}[X(\omega, \lambda)\, (-\delta(\omega, \lambda)\, E + \dot{\Omega}(\omega, \lambda))]\,.$$

Sei $\lambda_0 \in R$ ein beliebiger Stationärpunkt der Funktion $A(\lambda)$, d.h. es gelte $\dot{A}(\lambda_0) = 0$. Also ist nach (2.16)

$$\text{(2.17)} \qquad \operatorname{Tr}(X_0 J P_0) = 0\,, \quad \text{wobei} \quad X_0 = X(\omega, \lambda_0) \quad \text{und} \quad P_0 = P(\omega, \lambda_0)\,.$$

Weil P_0 eine symmetrische Matrix ist, gibt es soeine orthogonale Transformation T, dass die Matrix $\bar{P}_0 = T^{-1} P_0 T$ eine diagonale Matrix ist. Es ist sofort ersichtlich, dass durch diese Transformation die charakteristische Funktion $A(\lambda)$ sich nicht ändert. Die Matrix $\overline{X}(\omega, \lambda) = T^{-1} X(\omega, \lambda)\, T$ ist offenbar wieder eine Monodromiematrix der Gleichung (H). Ferner gilt nach (2.5) und (2.6) die Beziehung

$$\dot{\overline{X}}(\omega, \lambda) = \overline{X}(\omega, \lambda)\,(T^{-1}JT)\,\overline{P}\,, \tag{2.18}$$

wobei $\overline{P} = T^{-1} P(\omega, \lambda)\, T$ wieder eine symmetrische Matrix ist. Weil die Eigenvektoren der Matrix P_0 gegenseitig orthogonal sind, können wir die Transformation T so wählen, dass die Gleichungen

$$\overline{P}_0 = \begin{pmatrix} \varrho_1, & 0 \\ 0, & \varrho_2 \end{pmatrix}$$

und $T^{-1}JT = J$ gelten. Dabei sind ϱ_1, ϱ_2 reelle Eigenwerte. Offenbar gilt $\det P_0 = \det \overline{P}_0$ und $\operatorname{Tr} P_0 = \operatorname{Tr} \overline{P}_0$. Hiervon folgt (wir bezeichnen $p_1 = p_{11}(\omega, \lambda_0)$, $p_2 = p_{22}(\omega, \lambda_0)$ und $p = p_{12}(\omega, \lambda_0) = p_{21}(\omega, \lambda_0)$)

$$\begin{aligned} p_1 p_2 - p^2 &= \varrho_1 \varrho_2\,, \\ p_1 + p_2 &= \varrho_1 + \varrho_2\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Für die Elemente p_1, p_2 und p gilt nach (2.6)

$$\begin{aligned} p_1 &= \int_0^\omega (x_{11}(t, \lambda_0))^2 \,\mathrm{d}\Phi(t)\,, \\ p_2 &= \int_0^\omega (x_{12}(t, \lambda_0))^2 \,\mathrm{d}\Phi(t)\,, \\ p &= \int_0^\omega x_{11}(t, \lambda_0)\,.\,x_{12}(t, \lambda_0)\,\mathrm{d}\Phi(t)\,. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Die Benützung der Cauchyungleichung liefert die Ungleichungen

$$\det P_0 > 0\,, \quad p_1 > 0\,, \quad p_2 > 0$$

und also ist

$$\varrho_1 > 0\,, \quad \varrho_2 > 0\,. \tag{2.21}$$

Von den vorgehenden Betrachtungen folgt, dass wir im Weiteren

$$P_0 = \begin{pmatrix} p_1, & 0 \\ 0, & p_2 \end{pmatrix}, \quad p_1 > 0\,, \quad p_2 > 0 \tag{2.22}$$

voraussetzen können. Weil $\operatorname{Tr}(X_0 J P_0) = 0$ ist, folgt von (2.22)

$$-x_{12}(\omega, \lambda_0)\, p_1 + x_{21}(\omega, \lambda_0)\, p_2 = 0\,. \tag{2.23}$$

Also geben (2.22) und (2.23) sofort

$$x_{12}(\omega, \lambda_0)\, x_{21}(\omega, \lambda_0) \geqq 0\,. \tag{2.24}$$

Nachdem $\det X(\omega, \lambda_0) = 1$ ist, ergibt sich nach (2.24)

(2.25) $$x_{11}(\omega, \lambda_0)\, x_{22}(\omega, \lambda_0) \geqq 1 .$$

Hiervon und von (2.24) folgt ferner die Ungleichung

$$|x_{11}(\omega, \lambda_0) + x_{22}(\omega, \lambda_0)| = |x_{11}(\omega, \lambda_0)| + |x_{22}(\omega, \lambda_0)| \geqq$$
$$\geqq 2 \sqrt{|x_{11}(\omega. \lambda_0)|}\, \sqrt{|x_{22}(\omega, \lambda_0)|} \geqq 2 .$$

Für den Stationärpunkt λ_0 der Funktion $A(\lambda)$ gilt also

(2.26) $$|A(\lambda_0)| \geqq 1 ,$$

dadurch ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Jetzt zeigen wir, dass ein Stationärpunkt $\lambda_0 \in R$ der Funktion $A(\lambda)$ ein lokales Maximum gibt, solange $A(\lambda_0) \geqq 1$, bzw. ein lokales Minimum, solange $A(\lambda_0) \leqq -1$ ist. Wir unterscheiden zwei Fälle, $A(\lambda_0) = \pm 1$ und dann $|A(\lambda_0)| > 1$.

a) Sei $A(\lambda_0) = \pm 1$, zum B. $A(\lambda_0) = 1$. Dann gilt $x_{11}(\omega, \lambda_0) + x_{22}(\omega, \lambda_0) = 2$. Die Ungleichung $(x_{11}(\omega, \lambda_0) - 1)^2 \leqq 0$, die von der Beziehung (2.25) folgt, liefert unmittelbar die Gleichungen

(2.27) $$x_{11}(\omega, \lambda_0) = x_{22}(\omega, \lambda_0) = 1$$

und also ist

(2.28) $$x_{12}(\omega, \lambda_0) \,.\, x_{21}(\omega, \lambda_0) = 0 .$$

Hiervon und von (2.22) und (2.23) haben wir

(2.29) $$x_{12}(\omega, \lambda_0) = 0 = x_{21}(\omega, \lambda_0) ,$$

es ist also $X_0 = X(\omega, \lambda_0) = E$. Nach (2.16) gilt ferner die Gleichung $\ddot{A}(\lambda_0) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}[-\delta(\omega, \lambda_0) E + \dot{\Omega}(\omega, \lambda_0)]$ and hiervon bekommen wir sofort die Ungleichung

$$\ddot{A}(\lambda_0) = -\delta(\omega, \lambda_0) = -p_1 p_2 < 0 .$$

Die Beweisführung im restlichen Fall $A(\lambda_0) = -1$ ist dieselbe.

b) Sei $A(\lambda_0) > 1$ (der Fall $A(\lambda_0) < -1$ ist analogisch). Die Eigenwerte ϱ_1, ϱ_2 der Matrix X_0 können wir durch die Formel

(2.30) $$\varrho_{1,2} = A(\lambda_0) \pm \sqrt{(A(\lambda_0)^2 - 1)}$$

ausdrücken. Hiervon sind die Ungleichungen $0 < \varrho_1 < 1 < \varrho_2$, $\varrho_2 = 1/\varrho_1$ ersichtlich. Es gibt also eine Transformation L, so dass $L^{-1} X_0 L$ eine diagonale Matrix ist. Wir können also voraussetzen, dass die Matrix X_0 der Form

(2.31) $$X_0 = \begin{pmatrix} \varrho_1, & 0 \\ 0, & \varrho_2 \end{pmatrix}$$

ist. Nach (2.16) und (2.31) ergibt sich

$$(2.32) \qquad 0 = \dot{A}(\lambda_0) = (\varrho_1 - \varrho_2)\, p_{12}(\omega, \lambda_0)\,.$$

Hiervon folgt unmittelbar

$$(2.33) \qquad p_{12}(\omega, \lambda_0) = 0\,.$$

Eine analogische Berechnung gibt ferner, dass

$$(2.34) \qquad \ddot{A}(\lambda_0) = \tfrac{1}{2}[-\delta(\omega, \lambda_0)(\varrho_1 + \varrho_2) + \dot{p}_{12}(\omega, \lambda_0)(\varrho_1 - \varrho_2)]$$

gilt. Hiervon erhalten wir sofort die Gleichung

$$(2.35) \quad \ddot{A}(\lambda_0) = \tfrac{1}{2}[-(\varrho_1 + \varrho_2)\, p_{11}(\omega, \lambda_0)\, p_{22}(\omega, \lambda_0) + (\varrho_1 - \varrho_2)\, \dot{p}_{12}(\omega, \lambda_0)]\,.$$

Weil Φ eine nichtfallende Funktion ist, erhalten wir nach (2.15) die Ungleichung

$$(2.36) \qquad \dot{p}_{12}(\omega, \lambda_0) \leqq p_{11}(\omega, \lambda_0)\, p_{22}(\omega, \lambda_0)\,.$$

Hiervon und von (2.35) folgt also, dass $\ddot{A}(\lambda_0) < 0$ ist. Dadurch ist auch im zweiten Fall gezeigt, dass die zubeweisende Ungleichung gilt. Der Satz ist so bewiesen.

Lemma 6. *Sei Φ eine monotone von links stetige Funktion. Dann hat die charakteristische Funktion $A(\lambda)$ der Gleichung* (H) *unendlich viele reelle und nur reelle Nullstellen. Die Folge dieser Nullstellen strebt zu $\lambda_0 = \infty$.*

Beweis. Nach Lemma 5 genügt es zu zeigen, dass die Funktion $A(\lambda)$ unendlich viele Nullstellen hat. Diese Behauptung beweisen wir mittels des Hadamardschen Satzes über die Entwicklung einer analytischen Funktion in ein unendliches Produkt (siehe [3], Kap. VII, Satz 10.1). Wir zeigen, dass die Ordnung der Funktion $A(\lambda)$ höchstens $\frac{1}{2}$ sein kann. Es ist leicht zu zeigen, dass die charakteristische Funktion $\bar{A}(\lambda)$ der Gleichung

$$(6.1) \qquad \mathrm{d}x = \mathrm{d}[\bar{A}_\lambda]\, x\,, \quad \bar{A}_\lambda(s) = \begin{pmatrix} 0, & \sqrt{(\lambda)}\, s \\ -\sqrt{(\lambda)}\, \Phi(s), & 0 \end{pmatrix}$$

und die charakteristische Funktion $A(\lambda)$ der Gleichung (H) gleichartig sind. Die Lösung $\bar{x}(t, \lambda)$, $\bar{x}(0, \lambda) = x_0$ der Gleichung (6.1) erfüllt die Abschätzung

$$(6.2) \qquad \|\bar{x}(t, \lambda)\| \leqq \|x_0\| + \int_0^t \|\bar{x}(s, \lambda)\|\, \mathrm{d}\,\mathrm{var}\,(\langle 0, s\rangle; \bar{A}_\lambda)\,.$$

Nach der Voraussetzung sind die Funktionen $\bar{A}_\lambda(s)$ und $\mathrm{var}\,(\langle 0, s\rangle; \bar{A}_\lambda)$ von links stetig. Die Benützung des Satzes I. 4.30 in [1] liefert die Ungleichung

$$(6.3) \qquad \|\bar{x}(t, \lambda)\| \leqq \|x_0\| \,.\, e^{\mathrm{var}(\langle 0, t\rangle; \bar{A}_\lambda)}\,.$$

Hiervon ist gleich zu sehen, dass die Ungleichung

$$|\bar{A}(\lambda)| \leqq e^{\operatorname{var}(\langle 0,\omega\rangle;\bar{A}_\lambda)}$$

gilt und also ist

$$(6.4) \qquad |A(\lambda)| \leqq e^{C\sqrt{|\lambda|}},$$

wobei

$$C = (\omega + \operatorname{var}(\langle 0, \omega\rangle; \Phi) < \infty .$$

Die Ordnung der Funktion $A(\lambda)$ ist also höchstens $\frac{1}{2}$ und der Hadamardsche Satz gibt die Produktzerlegung

$$A(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - \lambda/\lambda_j),$$

wobei λ_j, $j = 1, 2, \ldots$ die Nullstellen der Funktion $A(\lambda)$ sind. Nach Lemma 4. ist es offenbar, dass die Funktion $A(\lambda)$ unendlich verschiedene Nullstellen besitzt. Das Lemma ist bewiesen.

Der verallgemeinerte Ljapunovsche Oszillationssatz. *Sei Φ eine reelle, nicht fallende Funktion, die im ganzen Interval $(-\infty, +\infty)$ definiert ist. Ist weiter $\Phi(t + \omega) - \Phi(t) = c$, für alle $t \in (-\infty, +\infty)$, wo $\omega > 0$ und $c \in R$ Konstanten sind, so gibt es eine Folge*

$$0 = \Lambda_0 < \lambda_1 \leqq \Lambda_1 < \lambda_2 \leqq \Lambda_2 < \ldots \to \infty$$

so dass für $\lambda \in (\Lambda_i, \lambda_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots$ alle Lösungen der Gleichung

$$(\mathrm{H}) \qquad \mathrm{d}x = \mathrm{d}[A_\lambda]\, x, \quad A_\lambda(s) = \begin{pmatrix} 0, & s \\ -\lambda\, \Phi(s), & 0 \end{pmatrix}$$

beschränkt sind.

Beweis. Wir zeigen, dass man voraussetzen kann, dass die Funktion Φ von links stetig ist. Sei Φ eine beliebige Funktion, welche die Voraussetzungen unseres Satzes erfüllt. Betrachten wir die Gleichung

$$(\tilde{\mathrm{H}}) \qquad \mathrm{d}x = \mathrm{d}[\tilde{A}_\lambda]\, x, \quad \tilde{A}_\lambda(s) = \begin{pmatrix} 0, & s \\ -\lambda\, \tilde{\Phi}(s), & 0 \end{pmatrix},$$

wo

$$\tilde{\Phi}(s) = \lim_{u \to s-} \Phi(u)$$

ist.

Seien $\tilde{x}(t, \lambda) = (\tilde{x}_1(t, \lambda), \tilde{x}_2(t, \lambda))$ und $x(t, \lambda) = (x_1(t, \lambda), x_2(t, \lambda))$ Lösungen der Gleichungen $(\tilde{\mathrm{H}})$, bzw. (H). Die Definition der Lösung der Verallgemeinerten Differentialgleichungen gibt unmittelbar, dass $x_1(t, \lambda) = \tilde{x}_1(t, \lambda)$, $t \in R$, $\lambda \in C$ ist. Ferner ist

$$x_2(t, \lambda) - \tilde{x}_2(t, \lambda) = \int_0^t x_1(s, \lambda)\, \mathrm{d}[\Phi(s) - \tilde{\Phi}(s)] = x_1(t, \lambda)\, [\Phi(t) - \tilde{\Phi}(t_-)]$$

nach [1], I. 4, I. 5, da die Funktion $\Phi - \tilde{\Phi}$ endlicher Variation ist und nur auf einer abzählbaren Menge in R von Null verschieden ist. Daher ergibt sich dann sofort, dass wenn $\tilde{x}$ beschränkt sein wird, so hat auch x dieselbe Eigenschaft.

Sei also Φ eine von links stetige Funktion. Dann hat die charakteristische Funktion $A(\lambda)$ der Gleichung (H) nach Lemma 3, 5, und 6 und nach dem Satz 2, folgende Eigenschaften:

(i) $A(\lambda)$ ist unendlich diferenzierbar in $\lambda \in C$,

(ii) es gibt unendlich viele reelle (und nur reelle) Nullstellen λ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\lambda_n \in \langle 0, +\infty)$ der Funktion $A(\lambda)$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ und $A(0) = 1$,

(iii) ist $\dot{A}(\lambda_0) = 0$, $\lambda_0 \in R$, so gilt $|A(\lambda_0)| \geqq 1$ und $A(\lambda_0) . \ddot{A}(\lambda_0) < 0$.

Die Benützung dieser Eigenschaften liefert unmittelbar eine Folge

$$0 = \Lambda_0 < \lambda_1 \leqq \Lambda_1 < \lambda_2 \leqq \Lambda_2 \ldots \to \infty$$

so dass für $\lambda \in (\Lambda_i, \lambda_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ die Ungleichung

$$|A(\lambda)| < 1$$

gilt. Also sind nach dem Lemma 1. alle Lösungen der Gleichung (H) beschränkt, wenn $\lambda \in (\Lambda_i, \lambda_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ ist. Der Satz ist bewiesen.

Bemerkung. Die Zahlen λ_{i+1}, Λ_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ sind Eigenwerte der Randwertaufgabe $Lx = \lambda Qx$, $x(\omega, \lambda) = \varrho\, x(0, \lambda)$, $\varrho = \pm 1$ (siehe Beweis des Lemmas 5.)

Bemerkung. Ist $\lambda = \Lambda_i, \lambda_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, so gibt es eine periodische Lösung der Gleichung (H), die die Periode ω, bzw. 2ω hat.

Literatur

[1] *Schwabik Št., Tvrdý M., Vejvoda O.:* Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints, Academia, Praha 1978 (im Druck).

[2] *Schwabik Št.:* Verallgmeinerte lineare Differentialgleichungssysteme, Čas. pěst. mat. *96* (1971), 183—211.

[3] *Saks S., Zygmund A.:* Analytic Functions, Monografie Matematyczne, Bd. XXVIII, Warszawa—Wroclaw, 1952.

[4] *Ljapunov A. M.:* Sur une equation differentielle lineáire du second ordre, C.R., *CXXVIII*, 15, 1899, 910—913; Sbornik sočiněnij II, vydavatelství AN SSSR, 1956, 401—403.

[5] *Ljapunov A. M.:* Sur une equation transcendente et les equations differentielles linéaires du second ordre a coefficients periodiques, C. R., *CXXVIII*, 18, 1899, 1085—1088; Sbornik sočiněnij II, AN SSSR, 1956, 403—406.

[6] *Kurzweil J.:* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter, Czech. Math. J. *7 (82)* 1957), 418—449.

[7] *Krejn M. G.*: O charakterističeskoj funkciji $A(\lambda)$ linějnoj kanoničeskoj sistěmy differencialnogo uravněnija vtorogo porjadka s periodičeskimi koefficientami, PMM, *XXI*, 1957, 320—329.
[8] *Hnilica J.*: Verallgemeinerte Hill'sche Differentialgleichung, Čas. pěst. mat., *101*. 1976, 293—302.
[9] *Hildebrandt T. H.*: Introduction to the Theory of Integration, Academie Press, New York—London, 1963.

Anschrift des Verfassers: 140 00 Praha 4, Budějovická 5, (ČKD Polovodiče).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

RANGES OF a-HOMOGENEOUS OPERATORS AND THEIR PERTURBATIONS

PAVEL DRÁBEK, Plzeň

(Received October 18, 1977)

1. Introduction. Let us consider the equation

$$Jx - \mu Sx^+ + \nu Sx^- + Gx = f$$

where μ and ν are real parameters. The properties of the maps $J, S, G, x \mapsto x^+$, $x \mapsto x^-$ will be specified in Section 2. This paper continues the investigation in [6] and offers a generalization of the results contained in [5], [3] and [4]. We also complete some results from [7], Appendix V. In the proofs of the assertions contained in this paper we use the theory of Leray-Schauder degree. The properties of the degree used here are taken from [7].

Section 2 is a summary of the main results contained in the paper [6]. In Section 3 we give some applications of the second part of this paper to the boundary value problems for differential equations, particularly for the nonlinear Sturm-Liouville equation of the second order and for a certain type of partial differential equations. Section 4 is devoted to the study of the nonlinear Sturm-Liouville equation of the second order with constant coefficients. We discuss the existence of weak solutions of the homogeneous boundary value problem in dependence on the parameters μ and ν. In the case of nonexistence of the weak solution we give some sufficient conditions on the right hand side of the equation in order that the boundary value problem may have at least one weak solution. The methods of the proofs are based on the properties of the Leray-Schauder degree and on the methods of classical analysis.

2. Ranges of positive a-homogeneous nonlinear operators-Summary. Let X, Y and Z be Banach spaces with zero elements O_X, O_Y, O_Z and with norms $\|x\|_X$, $\|y\|_Y$, $\|z\|_Z$, respectively. A subset C of Z is called *a cone* if it is closed, convex, invariant under multiplication by nonnegative real numbers, and if $C \cap (-C) = \{O_Z\}$. We suppose that a given fixed cone C in Z has the following properties:

(Z 1) If $z \in Z$ then there exists a uniquely determined couple $z^+, z^- \in C$ such that $z = z^+ - z^-$ and $z_1^+ - z^+ \in C$, $z_1^- - z^- \in C$ for each $z_1^+, z_1^- \in C$, $z = z_1^+ - z_1^-$. For each $t \geqq 0$ it is

$$(tz)^+ = tz^+ \quad \text{and} \quad (tz)^- = tz^- , \quad (-z)^+ = z^- .$$

(Z 2) The mapping $z \to z^+$ is continuous.

(Z 3) $X \subset Z$ and the identity mapping $X \to Z$ is continuous.

Let $a > 0$ be fixed and let J be a mapping defined on X with values in the space Y, and suppose that the following assumptions are fulfilled:

(J 1) J is positively a-homogeneous.

(J 2) J is one-to-one, J is continuous in O_X and J^{-1} is continuous.

(J 3) J is odd.

Let S be an operator defined on Z, acting into Y and satisfying

(S 1) S is positively a-homogeneous.

(S 2) S is continuous.

(S 3) The mappings $x \to Sx^+$, $x \to Sx^-$ are completely continuous operators from X into Y.

Suppose that $G : X \to Y$ is a completely continuous operator. Denote $\mathscr{R}_{[\mu,\nu]}(J, S, G) = \{f \in Y; \exists x_0 \in X : Jx_0 - \mu Sx_0^+ + \nu Sx_0^- + Gx_0 = f\}$ and

$\mathbf{A}_{-1} = \{[\mu, \nu] \in \mathbf{R}^2; \exists x_0 \neq O_X : Jx_0 - \mu Sx_0^+ + \nu Sx_0^- = O_Y\}$,

$\mathbf{A}_0 = \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{A}_{-1}$,

$\mathbf{A}_1 = \{[\mu, \nu] \in \mathbf{A}_0;\ \mathrm{d}[\tilde{F}; K_Y(1), O_Y] \neq 0\}$,

where $\tilde{F} : y \to y - \mu S(J^{-1}y)^+ + \nu S(J^{-1}y)^-$, $y \in Y$,

$\mathbf{A}_2 = \{[\mu, \nu] \in \mathbf{A}_0;\ \mathscr{R}_{[\mu,\nu]}(J, S, O) \neq Y\}$,

$\mathbf{A}_3 = \{[\mu, \nu] \in \mathbf{R}^2;\ \mathscr{R}_{[\mu,\nu]}(J, S, O) = Y\}$.

Then the sets $\mathbf{A}_i$, $i = -1, 0, 1, 2, 3$ are symmetric subsets of $\mathbf{R}^2$ and the following assertions are valid:

(i) $\mathbf{A}_0$ is open in $\mathbf{R}^2$ and moreover, if $[\alpha, \beta] \in \mathbf{R}^2$, $|\alpha| + |\beta| < c_2(\mu, \nu)/s$, $[\mu, \nu] \in \mathbf{A}_0$, then $[\mu + \alpha, \nu + \beta] \in \mathbf{A}_0$ where

$$c_2(\mu, \nu) = \inf_{\|x\|_X = 1} \|Jx - \mu Sx^+ + \nu Sx^-\|_Y > 0$$

and

$$s = \max\{\sup_{\|x\|_X = 1} \|Sx^+\|_Y \sup_{\|x\|_X = 1} \|Sx^-\|_Y\} < +\infty .$$

(ii) For $[\mu, \nu] \in \mathbf{A}_0$ the set $\mathscr{R}_{[\mu,\nu]}(J, S, O)$ is closed in Y.

(iii) $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}_3$.

(iv) $\mathbf{A}_1$ is an open subset of $\mathbf{R}^2$.

(v) $\mathbf{A}_1$ is a union of some components of $\mathbf{A}_0$.

(vi) Let $\boldsymbol{T}$ be a component of $\boldsymbol{A}_0$ containing a point $[\lambda, \lambda]$ for some real number λ. Then $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{A}_1$.

(vii) Let $[\mu, \nu] \in \boldsymbol{A}_1$ and suppose that

$$\lim_{\|x\|_X \to \infty} \sup \frac{\|Gx\|_Y}{\|x\|_X^a} < c_2(\mu, \nu)\,.$$

Then $\mathscr{R}_{[\mu,\nu]}(J, S, G) = Y$.

(viii) For a given $[\mu, \nu] \in \boldsymbol{A}_2$ there exists $c_3(\mu, \nu) > 0$ such that if

$$\lim_{\|x\|_X \to \infty} \sup \frac{\|Gx\|_Y}{\|x\|_X^a} \leqq c_3(\mu, \nu)$$

then $\mathscr{R}_{[\mu,\nu]}(J, S, G) \neq Y$.

(ix) $\boldsymbol{A}_2$ is an open set in $\mathbf{R}^2$.

For the proofs of these assertions see [6].

3. Applications to differential equations. In this section we study the question of the existence of weak solutions of the boundary value problem for the nonlinear Sturm-Liouville equation of the second order and for partial differential equations of a certain type.

Let $L_p(\Omega)$, $C^k(\bar{\Omega})$ denote the usual function spaces on a bounded domain Ω in the real Euclidean N-space $\mathbf{R}^N$ (the boundary $\partial\Omega$ is sufficiently smooth if $N > 1$) with norms defined as usual, where $p \in \langle 1, \infty)$ is a real number and k is a nonnegative integer. Let $W^{k,p}(\Omega)$ and $W_0^{k,p}(\Omega)$, respectively, denote the Sobolev spaces (see e.g. [8], [9]) with the norms

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqq k} \left(\int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}$$

and

$$\|f\|_{W_0{}^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| = k} \left(\int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p},$$

respectively. It is possible to prove that the norms $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ and $\|\cdot\|_{W_0{}^{k,p}(\Omega)}$ are equivalent on the space $W_{0^{k,p}}(\Omega)$.

Let V be a subspace of the Sobolev space $W^{1,p}(0, \pi)$ which fulfils one and only one from the following conditions:

(i) $V = W^{1,p}(0, \pi)$;

(ii) $V = \{u \in W^{1,p}(0, \pi);\ u(0) = 0\}$ or
$V = \{u \in W^{1,p}(0, \pi);\ u(\pi) = 0\}$;

(iii) $V = W_0^{1,p}(0, \pi)$.

In the case (i) the norm $\|\cdot\|_V$ is supposed to be equal to $\|\cdot\|_{W^{1,p}(0,\pi)}$, in the cases (ii) and (iii) the norm $\|\cdot\|_V$ is equal to $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(0,\pi)}$.

Let us suppose in the sequel $p \geqq 2$. Put $X = Z = V$, $Y = X^*$ and $C = \{u \in X; u(t) \geqq 0 \text{ for all } t \in \langle 0, \pi \rangle\}$. Let a, b, c be real functions defined on $\langle 0, \pi \rangle$. Suppose that $a(t) > 0$ for all $t \in \langle 0, \pi \rangle$ and $a \in C^1(\langle 0, \pi \rangle)$, $b(t) \geqq 0$, $c(t) > 0$ for all $t \in \langle 0, \pi \rangle$ and $b, c \in C(\langle 0, \pi \rangle)$. The real numbers A_0, A_1, B_0, B_1 are supposed to satisfy the inequalities

$$A_0 \geqq 0\,, \quad A_1 \geqq 0\,, \quad B_0 \geqq 0\,, \quad B_1 \geqq 0\,.$$

In the cases (i) and (ii), we assume moreover $b(t) \not\equiv 0$ for all $t \in \langle 0, \pi \rangle$ or $A_0 + A_1 > 0$. Let $\lambda_1 c(t) - b(t) > 0$ for all $t \in \langle 0, \pi \rangle$, where $\lambda_1 > 0$ is the least eigenvalue of the problem

$$Ju - \lambda Su = O_Y$$

(the operators J and S will be defined by the relation (3.1) and (3.2) below). The fact $\lambda_1 > 0$ is proved in [7], Appendix V. In the case (i) suppose that

$$B_0 = B_1 = 0 \quad \text{and} \quad A_0 + A_1 > 0$$

or

$$\begin{cases} \lambda_1 B_0 - A_0 \geqq 0\,, \quad \lambda_1 B_1 - A_1 \geqq 0 \\ \lambda_1 B_0 - A_0 + \lambda_1 B_1 - A_1 > 0\,. \end{cases}$$

Denote

(3.1) $$(Ju, v)_X = \int_0^\pi [a(t)\,|u'(t)|^{p-2}\,u'(t)\,v'(t) + b(t)\,|u(t)|^{p-2}\,u(t)\,v(t)]\,\mathrm{d}t + A_0|u(0)|^{p-2}\,u(0)\,v(0) + A_1|u(\pi)|^{p-2}\,u(\pi)\,v(\pi)\,,$$

(3.2) $$(Su, v)_X = \int_0^\pi c(t)\,|u(t)|^{p-2}\,u(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t + B_0|u(0)|^{p-2}\,u(0)\,v(0) + B_1|u(\pi)|^{p-2}\,u(\pi)\,v(\pi)\,,$$

(3.3) $$(F, v)_X = \int_0^\pi f(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

where the symbol $(\cdot, \cdot)_X$ is used for the duality between X^* and X; $f \in L_1(0, \pi)$.

3.1. Definition. Let $f \in L_1(0, \pi)$ and let

(3.4) $$(Ju, v)_X - \mu(Su^+, v)_X + \nu(Su^-, v)_X = (F, v)_X$$

hold for each $v \in V$. Then u is called *the weak solution* of the nonlinear Sturm-Liouville equation of the second order with the right hand side f.

3.2. Lemma. *The operators J and S satisfy the conditions* (J 1)–(J 3) *and* (S 1)–(S 3), *respectively, from Section* 2.

Proof. The continuity of Němyckij's operator acting from $L_p(0, \pi)$ into $L_q(0, \pi)$ $(q = p/(p-1))$ and the continuity of the imbedding from $W^{1,p}(0, \pi)$ into $C(\langle 0, \pi \rangle)$ imply that the operator J is continuous. The conditions (J 1) and (J 3) can be verified. There exists $c > 0$ such that

$$(Ju - Jv, u - v)_X \geqq c \|u - v\|_X^p \tag{3.5}$$

holds for each $u, v \in X$ (because the inequality

$$(|x|^{p-2} x - |y|^{p-2} y)(x - y) \geqq \tilde{c}|x - y|^p$$

holds for any real numbers x and y with a suitable constant $\tilde{c} > 0$). From the theorem of Minty-Browder (see e.g. [1]) we conclude the surjectivity of J. The inequality (3.5) implies the injectivity of J and the continuity of J^{-1}. The condition (J 2) is verified. The operator S is a strongly continuous mapping of X into Y because the imbedding from $W^{1,p}(0, \pi)$ into $C(\langle 0, \pi \rangle)$ is strongly continuous. Thus the conditions on the operator S can be verified.

Let us present some regularity properties of the weak solution.

3.3. Theorem. *Let u be a weak solution of the boundary value problem* (3.4) *with $f \in L_1(0, \pi)$. Then $u \in C^1(\langle 0, \pi \rangle)$. Moreover, if $f \in C(\langle 0, \pi \rangle)$ then $a(t)\,|u'(t)|^{p-2} \,.\, u'(t) \in C^1(\langle 0, \pi \rangle)$.*

Proof. Using (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) and integration by parts we obtain

$$\int_0^\pi M(t)\, v'(t)\, dt = 0\,, \tag{3.6}$$

where

$$\begin{aligned} M(t) = {} & a(t)\,|u'(t)|^{p-2}\, u'(t) - \\ & - \int_0^t \{b(\tau)\,|u(\tau)|^{p-2}\, u(\tau) - \mu\, c(\tau)\,|u^+(\tau)|^{p-2}\, u^+(\tau) + \\ & + \nu\, c(\tau)\,|u^-(\tau)|^{p-2}\, u^-(\tau) - f(\tau)\}\, d\tau\,. \end{aligned}$$

The function $M(t)$ is an element of $L_q(0, \pi)$ $(q = p/(p-1))$ and the identity (3.6) holds for each $v \in \mathscr{D}(0, \pi)$ (where $\mathscr{D}(0, \pi)$ is the set of all infinitely differentiable functions with compact supports in $(0, \pi)$). It is

$$\int_0^\pi \frac{dM}{dt}\, v(t)\, dt = 0 \tag{3.7}$$

for each $v \in \mathscr{D}(0, \pi)$, where dM/dt denotes the derivative of $M(t)$ in the sense of distributions. The expression (3.7) implies $M(t) = \bar{c}$ almost everywhere in $\langle 0, \pi \rangle$, where $\bar{c}$ is a constant. Let us denote

$$F(t, z) = a(t)\,|z|^{p-2}\,z -$$
$$- \int_0^t \{b(\tau)\,|u(\tau)|^{p-2}\,u(\tau) - \mu\,c(\tau)\,|u^+(\tau)|^{p-2}\,u^+(\tau) +$$
$$+ \nu\,c(\tau)\,|u^-(\tau)|^{p-2}\,u^-(\tau) - f(\tau)\}\,\mathrm{d}\tau - \bar{c}\,, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle\,, \quad z \in \mathbf{R}^1\,.$$

By the same argument as in the proof of Lemma 3.2 there exists a constant $c_1 > 0$ such that

$$(F(t, z_1) - F(t, z_2))\,(z_1 - z_2) \geqq c_1|z_1 - z_2|^p$$

for each $t \in \langle 0, \pi \rangle$, $z_1, z_2 \in \mathbf{R}^1$. This inequality implies for each $t \in \langle 0, \pi \rangle$ the existence of $z(t)$ which is determined uniquely and

$$F(t, z(t)) = 0\,. \tag{3.8}$$

Moreover, the function $z(t)$ is continuous on $\langle 0, \pi \rangle$. However, from (3.8) we obtain $z(t) = u'(t)$ almost everywhere in $\langle 0, \pi \rangle$. The proof of the second part of this theorem is similar to the first one.

3.4. Remark. Let us remark that many other interesting properties can be proved for the weak solution of the boundary value problem (3.4). Let us mention for instance that if the function u is a weak solution of the boundary value problem (3.4) and $f \equiv 0$ then u and its derivative u' have only a finite number of zeros in $\langle 0, \pi \rangle$. For the proof see [7], Appendix V.

3.5. Theorem. *Let* $[\mu, \nu] = [\lambda + \alpha,\ \lambda + \beta]$, *where* $|\alpha| + |\beta| < c_2(\lambda, \lambda)/s$ *(for* $c_2(\lambda, \lambda)$ *and* s *see Section* 2*). Then the boundary value problem* (3.4) *has at least one weak solution* $u \in V$ *for an arbitrary right hand side* $f \in L_1(0, \pi)$*. If* $f \in C(\langle 0, \pi \rangle)$ *then the boundary value problem* (3.4) *has at least one classical solution in the sense of* 3.3.

3.6. Theorem. *Let* $[\mu, \nu] \in A_1$ *and let* $g(t, z)$ *be a real function defined on* $\langle 0, \pi \rangle \times \mathbf{R}^1$*. Let the function* $g(t, z)$ *satisfy Carathéodory's conditions and, moreover, let there exist a function* $r(t) \in L_q(0, \pi)$ *so that*

$$|g(t, z)| \leqq r(t) + c_2(\mu, \nu)\,|z|^{p-1}$$

holds for each $z \in \mathbf{R}^1$ *and for almost all* $t \in (0, \pi)$ $(q = p/(p - 1))$.

Then the boundary value problem

$$(Ju, v)_X - \mu(Su^+, v)_X + \nu(Su^-, v)_X + (Gu, v)_X = (F, v)_X \tag{3.9}$$

has at least one weak solution for an arbitrary right hand side $f \in L_1(0, \pi)$*. If we* *suppose* $g(t, z) \in C(\langle 0, \pi\rangle \times \mathbf{R}^1)$ *and* $f \in C(\langle 0, \pi\rangle)$, *the boundary value problem* (3.9) *has at least one classical solution in the sense of* 3.3.

3.7. Remark. The last expression on the left hand side of (3.9) is defined as follows:

$$(Gu, v)_X = \int_0^\pi g(t, u(t))\, v(t)\, dt\,, \quad u, v \in X\,.$$

To prove Theorems 3.5 and 3.6 means nothing else than to verify the assumptions from Section 2.

3.8. Remark. Similar theorems about the existence of weak solutions of the boundary value problem (3.4) or (3.9), may be formulated for the nonlinear Sturm-Liouville equation of the fourth order (for operators J and S see for instance [7], Appendix V).

Let k be a positive integer, $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ a bounded domain ($N \geqq 1$) with a lipschitzian boundary $\partial\Omega$ if $N > 1$. Let $a_{ij} \in L_1(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$ (i and j are multiindices). Suppose there exists a constant $\gamma > 0$ such that

$$\sum_{|i|=|j|=k} a_{ij}(t)\, \eta_i \eta_j \geqq \gamma \sum_{|i|=k} \eta_i^2 \tag{3.10}$$

for all $\eta_i \in \mathbf{R}^1$, $|i| = k$, and almost all $t \in \Omega$. Put $X = W_0^{k,2}(\Omega)$, $Y = X^*$, $Z = L_2(\Omega)$, $C = \{f \in L_2(\Omega);\ f(t) \geqq 0$ for almost all $t \in \Omega\}$. For $c \in L_\infty(\Omega)$ define the operators J and S:

$$(Ju, v)_X = \sum_{|i|=|j|=k} \int_\Omega a_{ij}(t)\, D^i u(t)\, D^j v(t)\, dt \tag{3.11}$$

and

$$(Sz, v)_X = \int_\Omega c(t)\, z(t)\, v(t)\, dt\,, \tag{3.12}$$

for all $u \in X$, $v \in X^*$, $z \in Z$.

3.9. Definition. Let $f \in L_2(\Omega)$ and let $g(t, z)$ be acting from $\Omega \times \mathbf{R}^1$ into $\mathbf{R}^1$ and satisfy Carathèodory's conditions. Suppose there exists such a function $r(t) \in L_2(\Omega)$ and a constant $c_2 > 0$ that

$$|g(t, z)| < r(t) + c_2|z|$$

holds for each $z \in \mathbf{R}^1$ and almost all $t \in \Omega$. The function $u \in W_0^{k,2}(\Omega)$ is said to be the weak solution of the Dirichlet problem

$$\begin{aligned} \sum_{|i|=|j|=k} (-1)^j D^j(a_{ij}(t)\, D^i u(t)) - \mu\, c(t)\, u^+(t) + \nu\, c(t)\, u^-(t) + {} \\ + g(t, u(t)) = f(t)\,, \quad t \in \Omega\,, \\ u(t) = 0\,, \quad t \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.13}$$

if the identity

$$(3.14) \qquad (Ju, v)_X - \mu(Su^+, v)_X + \nu(Su^-, v)_X + (Gu, v)_X = (F, v)_X$$

holds for all $v \in W_0^{k,2}(\Omega)$ (the operators G and F are the same as in the special case $\Omega = (0, \pi)$).

3.10. Lemma. *The operators J and S satisfy the conditions* (J 1)–(J 3) *and* (S 1)–(S 3), *respectively, from Section* 2.

For the proof we use the same arguments as in 3.2.

Denote by $\sigma(S(J^{-1}))$ the spectrum of the completely continuous operator $S(J^{-1})$.

3.11. Theorem. *Let the couple of parameters μ and ν satisfy $[\mu, \nu] = [\lambda + \alpha, \lambda + \beta]$, where α, β, λ are real numbers such that*

$$|\alpha| + |\beta| < \frac{\gamma}{s} \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(S(J^{-1}))).$$

Then the Dirichlet problem (3.13) (*with $g \equiv 0$*) *has at least one weak solution for every $f \in L_2(\Omega)$.*

Proof. The space Y is a Hilbert space and that is why

$$c_2(\lambda, \lambda) = \inf_{\|u\|_X = 1} \|Ju - \lambda Su\|_Y = \inf_{\|u\|_X = 1} \|Ju - \lambda S(J^{-1}(Ju))\|_Y \geqq$$
$$\geqq \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(S(J^{-1}))) \inf_{\|u\|_X = 1} \|Ju\|_Y \geqq \gamma \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(S(J^{-1})))$$

(see e.g. [10]). Now it is sufficient to apply the assertions from Section 2.

4. Nonlinear Sturm-Liouville equation of the second order with constant coefficients. This section deals with the solvability of the homogeneous Dricihlet problem for the Sturm-Liouville equation of the second order with constant coefficients. The results from Sections 2 and 3 are used in the proofs of the assertions of this part and the the sets $\mathbf{A}_i$, $i = -1, 0, 1, 2, 3$ are investigated.

We are concerned first with the initial value problem

$$(4.1) \qquad -(|u'(t)|^{p-2} u'(t))' - \mu|u^+(t)|^{p-2} u^+(t) + \nu|u^-(t)|^{p-2} u^-(t) = f(t),$$
$$u(t_0) = \alpha_1, \quad u'(t_0) = \alpha_2, \quad t \in \mathbf{R}^1$$

where α_1, α_2, t_0 are real numbers and $f \in L_{1,loc}(\mathbf{R}^1)$ (the space of locally Lebesgue integrable functions on a real line $\mathbf{R}^1$).

4.1. Definition. Let u be a real function of the real variable, suppose u' to be continuous and $|u'|^{p-2} u'$ absolutely continuous on each compact interval in $\mathbf{R}^1$. If the function u fulfils the initial conditions in (4.1) and the equation (4.1) holds almost everywhere in $\mathbf{R}^1$ then u is called *a solution of the initial value problem* (4.1).

4.2. Remark. If $f \in C(I)$ for an interval $I \subset \mathbf{R}^1$ then $|u'|^{p-2} u' \in C^1(I)$ and the equation (4.1) holds for each $t \in I$ (see 3.3).

4.3. Remark. Suppose that $\mu > 0$ and $\nu > 0$. It is possible to prove that the condition $f \in L_{1,loc}(\mathbf{R}^1)$ guarantees the existence of a solution of the initial value problem (4.1) and the solution is determined uniquely. The method of the proof of these assertions is similar to that used in the theory of ordinary differential equations of the type $y' = f(x, y)$ (see e.g. [2]).

Elementary properties of the equation

$$-(|u'|^{p-2} u')' - \mu|u^+|^{p-2} u^+ + \nu|u^-|^{p-2} u^- = k \tag{4.2}$$

where k is a constant, yield the following assertions.

If the function u satisfies (4.2) and the initial conditions

$$u(0) = 0\,, \quad u'(0) = \alpha_2 > 0$$

then

$$t_0 = \inf\{t > 0;\ u'(t) = 0\} \tag{4.3}$$

is a finite number and

$$u^+(t_0 + t) = u^+(t_0 - t)$$

for all $t \in \langle 0, t_0 \rangle$.

If $\alpha_2 < 0$, it is possible to prove that t_0 defined by (4.3) is a finite number and

$$u^-(t_0 + t) = u^-(t_0 - t)$$

holds for each $t \in \langle 0, t_0 \rangle$.

If the function u is a solution of (4.2) with $k = 0$ and

$$u(0) = 0\,, \quad u'(0) = \alpha_2 \neq 0$$

then u is a periodic function with the period $((\lambda_1/\mu)^{1/p} - (\lambda_1/\nu)^{1/p})\,\pi$ where λ_1 is the least eigenvalue of the boundary value problem

$$\begin{gathered} -(|u'|^{p-2} u')' - \lambda|u|^{p-2} u = 0\,, \\ u(0) = u(\pi) = 0\,. \end{gathered} \tag{4.4}$$

These assertions based only on the elementary properties of the equation (4.2) enable us to prove the following theorem.

4.4. Theorem. *All eigenvalues of the boundary value problem* (4.4) *form a sequence* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ *with*

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty .$$

To the least eigenvalue λ_1 *there corresponds one and only one eigenfunction* u (*we suppose that* $v'(0) = 1$ *for each eigenfunction* v) *Moreover,* $u(t) > 0$ *for all* $t \in (0, \pi)$. *If* $\lambda_n (n \geqq 2)$ *is an eigenvalue of* (4.4) *and* v_n *is the corresponding eigenfunction then there exists* $t_0 \in (0, \pi)$ *such that* $v_n(t_0) = 0$. *To each* λ_n *there corresponds one and only one eigenfunction* v_n.

Proof. Let $\lambda \in \mathbf{R}^1$ be an eigenvalue of (4.4) and let v be the corresponding eigenfunction. Assume $v(t) > 0$ in some right reduced neighbourhood of zero $P_+(0)$. For $\lambda < 0$ we obtain from the equation (4.4) that

$$\{t \in (0, \pi\rangle;\ v(t) = 0\} = \emptyset .$$

For $\lambda = 0$ we obtain $v \equiv 0$ in $\langle 0, \pi\rangle$. This yields the inequality $\lambda > 0$ for each eigenvalue of the problem (4.4). Denote $\lambda_1 = \inf\{\lambda > 0; \lambda \text{ is an eigenvalue of } (4.4)\}$. Using Remark 4.3 it is possible to prove that the set of eigenvalues of the problem (4.4) is nonempty. Assume that $\lambda_1 > 0$. There exists a sequence of eigenvalues $\{\tau_m\}_{m=1}^{\infty}$, a sequence of the corresponding eigenfunctions $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ and a sequence of real numbers $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ so that $\lim_{m \to \infty} \tau_m = \lambda_1$ and $\|t_m w_m\|_X = 1$, $m = 1, 2, \ldots$ There exists a subsequence $\{t_{m_k} w_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ and $w_0 \in X$ such that $t_{m_k} w_{m_k} \rightharpoonup^X w_0$ (i.e. $\{t_{m_k} w_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converges weakly to w_0 in the space X). The operator S is strongly continuous and so $S(t_{m_k} w_{m_k}) \to^{X^*} S w_0$ and $\tau_{m_k} S(t_{m_k} w_{m_k}) \to^{X^*} \lambda_1 S w_0$. Thus we have $J(t_{m_k} w_{k_k}) \to^{X^*}$ $\to^{X^*} \lambda_1 S w_0$. In virtue of the continuity of the operator J^{-1}, it is $t_{m_k} w_{m_k} \to^X w_0$ and so

$$J w_0 - \lambda_1 S w_0 = 0 .$$

It is proved that λ_1 is an eigenvalue. For $\lambda_1 = 0$ it is $J(t_{m_k} w_{m_k}) \to^{X^*} O_X$ and so $t_{m_k} w_{m_k} \to^X O_X$ which is a contradiction with $\|t_{m_k} w_{m_k}\|_X = 1$. So we have $\lambda_1 > 0$.

Let u_1 be the eigenfunction corresponding to λ_1. Suppose there exists such $t \in$ $\in (0, \pi)$ that $u(t) = 0$. Choose $t_0 \in (0, \pi)$ so that $t_0 = \min\{t \in (0, \pi);\ u(t) = 0\}$ (this step is senseful according to 3.4). Define

$$\tilde{u}(t) = u\left(\frac{t_0}{\pi} t\right), \quad t \in \langle 0, \pi\rangle .$$

Then

$$-(|\tilde{u}'|^{p-2} \tilde{u}')' - \left(\frac{t_0}{\pi}\right)^p \lambda_1 (|\tilde{u}|^{p-2} \tilde{u}) = 0 ,$$

$$\tilde{u}(0) = \tilde{u}(\pi) = 0$$

which is a contradiction with the fact that λ_1 is the least eigenvalue. We have proved that no eigenfunction corresponding to λ_1 changes its sign.

Directly from the equation (4.4) it is possible to prove that to each eigenvalue λ there corresponds one and only one eigenfunction v. Denote $\lambda_k = k^p \lambda_1$, $k \geqq 2$, k an integer. Define a function v_k in this way:

$$v_k : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{k} u_{\lambda_1}(kt), & t \in \left\langle 2l \dfrac{\pi}{k}, (2l+1) \dfrac{\pi}{k} \right\rangle, \\ -\dfrac{1}{k} u_{\lambda_1}(kt), & t \in \langle 0, \pi \rangle \setminus \left\langle 2l \dfrac{\pi}{k}, (2l+1) \dfrac{\pi}{k} \right\rangle \end{cases}$$

where $l = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}k$ if k is even, $l = 1, 2, \ldots, [\frac{1}{2}k] + 1$ if k is an odd number; the symbol $[t]$ denotes the integer part of the real number t and u_{λ_1} is an eigenfunction corresponding to the least eigenvalue λ_1. In this way we obtain eigenfunctions v_k which correspond to the eigenvalues λ_k for all $k \geqq 2$. On the other hand, if v is an eigenfunction corresponding to λ_k for some $k \geqq 2$ then according to 4.3 we have $v = v_k$ in $\langle 0, \pi \rangle$. Finally, if $\lambda \neq \lambda_1$ is an eigenvalue of (4.4) and v is the corresponding eigenfunction then there exists $t \in (0, \pi)$ such that $v(t) = 0$. Put $t_0 = \inf \{t \in (0, \pi\rangle; v(t) = 0\}$. According to 4.3 it is

$$v(t) = \frac{t_0}{\pi} u\left(\frac{\pi}{t_0} t\right), \quad t \in \langle 0, t_0 \rangle .$$

Similarly, if $t_1 = \inf \{t \in (t_0, \pi\rangle; v(t) = 0\}$ then

$$v(t) = -\frac{t_1 - t_0}{\pi} u\left(\frac{\pi}{t_1 - t_0}(t - t_0)\right), \quad t \in \langle t_0, t_1 \rangle .$$

This fact implies the existence of $k \geqq 2$ such that $\lambda = k^p \lambda_1 = \lambda_k$.

Let us recall that in Section 3 we have defined the weak solution of the boundary value problem

$$-(|u'|^{p-2} u')' - \mu |u^+|^{p+2} u^+ + \nu |u^-|^{p-2} u^- = f, \qquad u(0) = u(\pi) = 0 . \tag{4.5}$$

4.5. Theorem. *Boundary value problem (4.5) with $f \equiv 0$ has a nontrivial weak solution if and only if one of the following conditions holds:*

(i) $\mu = \lambda_1$, ν *arbitrary;*

(ii) μ *arbitrary,* $\nu = \lambda_1$;

(iii) $\mu > \lambda_1$, $\nu > \lambda_1$

$$w_1(\mu, \nu) = \frac{(\mu)^{1/p} (\nu)^{1/p}}{((\mu)^{1/p} + (\nu)^{1/p}) (\lambda_1)^{1/p}} \in \mathbf{N} ,$$

$$w_2(\mu, \nu) = \frac{((\mu)^{1/p} - (\lambda_1)^{1/p})(\nu)^{1/p}}{((\mu)^{1/p} + (\nu)^{1/p})(\lambda_1)^{1/p}} \in \mathbf{N},$$

$$w_3(\mu, \nu) = \frac{((\nu)^{1/p} - (\lambda_1)^{1/p})(\mu)^{1/p}}{((\mu)^{1/p} + (\nu)^{1/p})(\lambda_1)^{1/p}} \in \mathbf{N},$$

where $\mathbf{N}$ *denotes the set of all positive integers.*

Proof. Let u be a nontrivial weak solution of (4.5). Then $u \in C^1(\langle 0, \pi \rangle)$ according to 3.3 and according to 3.4 the function u has only a finite number of zeros in $\langle 0, \pi \rangle$. If the function u has no zero in $(0, \pi)$ then according to 4.3 we obtain (i) or (ii). In the opposite case it is possible to divide the interval $\langle 0, \pi \rangle$ into a finite number of subintervals so that on each of them it is either $u(t) \geqq 0$ or $u(t) \leqq 0$. In accordance with 4.3 it is

$$u(t) = K_1 u_{\lambda_1}\left(\left(\frac{\mu}{\lambda_1}\right)^{1/p}(t - \alpha)\right), \quad t \in \left(\alpha, \alpha + \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^{1/p}\pi\right)$$

if $u(t) > 0$ on $(\alpha, \alpha + (\lambda_1/\mu)^{1/p}\pi)$;

$$u(t) = -K_2 u_{\lambda_1}\left(\left(\frac{\nu}{\lambda_1}\right)^{1/p}(t - \beta)\right), \quad t \in \left(\beta, \beta + \left(\frac{\lambda_1}{\nu}\right)^{1/p}\pi\right)$$

if $u(t) < 0$ on $(\beta, \beta + (\lambda_1/\nu)^{1/p}\pi)$, where $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ are suitable constants such that $u \in C^1(\langle 0, \pi \rangle)$ and u_{λ_1} is an eigenfunction corresponding to the least eigenvalue λ_1. If $u \in C_0^1(\langle 0, \pi \rangle)$ (i.e. $u \in C^1(\langle 0, \pi \rangle)$ and $u(0) = 0$, $u(\pi) = 0$) then the condition (iii) is necessarily fulfilled. On the other hand, if one of the conditions (i), (ii) or (iii) is fulfilled then in the same way as in the first part of the proof it is possible to construct a nontrivial weak solution of (4.5) with $f \equiv 0$.

From Section 2 and from the previous theorem we obtain the existence result for weak solutions of (4.5). The reader is invited to see the figure in 4.10.

4.6. Theorem. *Let the parameters* μ *and* ν *fulfil one of the conditions*

(i) $\mu < \lambda_1$, $\nu < \lambda_1$;

(ii) $\mu > \lambda_1$, $\nu > \lambda_1$,

$$\frac{((\mu)^{1/p} - (\lambda_1)^{1/p})(\nu)^{1/p}}{((\mu)^{1/p} + (\nu)^{1/p})(\lambda_1)^{1/p}} < 1, \quad \frac{((\nu)^{1/p} - (\lambda_1)^{1/p})(\mu)^{1/p}}{((\mu)^{1/p} + (\nu)^{1/p})(\lambda_1)^{1/p}} < 1;$$

$$k - 1 < \frac{((\mu)^{1/p} - (\lambda_1)^{1/p})(\nu)^{1/p}}{((\mu)^{1/p} + (\nu)^{1/p})(\lambda_1)^{1/p}} < k, \quad k - 1 < \frac{((\nu)^{1/p} - (\lambda_1)^{1/p})(\mu)^{1/p}}{((\mu)^{1/p} + (\nu)^{1/p})(\lambda_1)^{1/p}} < k;$$

$k \in \mathbf{N}$, $k \geqq 2$. *Then the boundary value problem* (4.5) *has at least one weak solution for an arbitrary right hand side* $f \in L_1(0, \pi)$.

4.7. Theorem. *Let the assumptions of* (4.6) *be fulfilled. Moreover, let* $g : \langle 0, \pi \rangle \times \times \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ *satisfy the conditions from* 3.6. *Then the boundary value problem*

$$-(|u'(t)|^{p-2} u'(t))' - \mu|u^+(t)|^{p-2} u^+(t) + \nu|u^-(t)|^{p-2} u^-(t) + g(t, u(t)) = f(t),$$
$$u(0) = u(\pi) = 0$$

has at least one weak solution.

Denote by $\Phi_{+1}^{\{\mu,\nu\}}$ and $\Phi_{-1}^{\{\mu,\nu\}}$ (if there is no danger of misunderstanding, we write Φ_{+1} and Φ_{-1} only) the solutions of the initial value problem

$$(4.6) \qquad -(|u'(t)|^{p-2} u'(t))' - \mu|u^+(t)|^{p-2} u^+(t) + \nu|u^-(t)|^{p-2} u^-(t) = 0,$$
$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1 \quad \text{and} \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = -1,$$

respectively. Using the elementary properties of the solution of (4.6) we can prove that

$$\{[\mu, \nu] \in \mathbf{R}^2;\ \mu \leqq 0,\ \nu > \lambda_1\} \cup \{[\mu, \nu] \in \mathbf{R};\ \mu > \lambda_1,\ \nu \leqq 0\} \subset \mathbf{A}_2 .$$

Theorem 4.6 implies that $[\mu, \nu]$ is an element of a component of $\mathbf{A}_0$ which does not contain the point $[\lambda, \lambda]$ for any $\lambda \in \mathbf{R}^1$ if and only if

$$(4.7) \qquad \Phi_{+1}^{\{\mu,\nu\}}(\pi) \,.\, \Phi_{-1}^{\{\mu,\nu\}}(\pi) > 0 .$$

In the sequel we shall prove that in the case (4.7) there exists no weak solution of (4.5) for a certain right hand side $f \in L_1(0, \pi)$.

4.8. Lemma. *Suppose there exists such a* $t_0 \in (0, \pi)$ *that*

$$\Phi_{\pm 1}(t) > 0, \quad \Phi'_{\pm 1}(t) < 0 \quad \text{for all} \quad t \in \langle t_0, \pi \rangle .$$

Then there exists a right hand side $f \in L_1(0, \pi)$ *such that the boundary value problem* (4.5) *has no weak solution.*

Proof. Let $f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ be such a function that $f \in L_1(\mathbf{R}^1)$, $f(t) = 0$ for all $t \in \in (-\infty, t_0\rangle \cup (\pi, +\infty)$ and $f(t) < 0$ for $t \in (t_0, \pi\rangle$. We have $f \in L_1(0, \pi)$. Let Φ_α be the weak solution of the boundary value problem (4.5) with the right hand side f and suppose $\Phi_\alpha(0) = 0$, $\Phi_\alpha(0) = \alpha$. For $\alpha > 0$ according to 4.3 it is

$$\Phi_\alpha(t) = \alpha\, \Phi_{+1}(t), \quad t \in \langle 0, t_0 \rangle .$$

Put $t_1 = \inf \{t \in (t_0, \pi\rangle;\ \Phi_\alpha(t) = 0\}$. The interval (t_0, t_1) contains a point τ_1 with the property

$$(4.8) \qquad \left(\frac{\Phi_\alpha}{\Phi_{+1}}\right)'(\tau_1) < 0 .$$

In the opposite case

$$\frac{\Phi_\alpha(\tau)}{\Phi_{+1}(\tau)} \geqq \frac{\Phi_\alpha(t_0)}{\Phi_{+1}(t_0)} = \alpha > 0, \quad \tau \in (t_0, t_1)$$

which is impossible. From (4.8) we obtain

$$(4.9) \qquad (\Phi'_\alpha \Phi_{+1} - \Phi_\alpha \Phi'_{+1})(\tau_1) < 0$$

which is the same as $F(\tau_1) < 0$, where

$$F : \tau \mapsto (|\Phi'_\alpha|^{p-2} \Phi'_\alpha (\Phi_{+1})^{p-1} - (\Phi_\alpha)^{p-1} |\Phi'_{+1}|^{p-2} \Phi'_{+1})(\tau),$$

for the function $z \to |z|^{p-2} z$ is increasing on $\mathbf{R}^1$. It is possible to prove the existence of a set $\mathscr{A} \subset (t_0, \tau_1)$ with *meas* $\mathscr{A} > 0$ such that the following conditions are fulfilled:

(i) $\Phi'_\alpha(t) < 0$,
(ii) $F(t) < 0$,
(iii) $F'(t) < 0$
for all $t \in \mathscr{A}$.

Really, if $\Phi'_\alpha(t) < 0$ for all $t \in (t_0, \tau_1)$ then (ii) and (iii) are fulfilled because $F(t_0) = 0$, $F(\tau_1) < 0$ and F is absolutely continuous on (t_0, τ_1). In the opposite case denote $\tau_2 = \sup \{\tau < \tau_1;\ \Phi'_\alpha(\tau) = 0\}$. It is $\tau_2 < \tau_1$ (see 3.4) and according to (4.9) we have $\Phi'_\alpha(\tau_1) < 0$. We conclude $\Phi'_\alpha(t) < 0$, $t \in (\tau_2, \tau_1)$. Since $F(\tau_2) > 0$, $F(\tau_1) < 0$, the conditions (i)–(iii) aree fulfilled. We have

$$(4.10) \qquad F'(t) = F_1(t) + F_2(t) < 0 \quad \text{for all} \quad t \equiv \mathscr{A},$$

where

$$F_1(t) = [(|\Phi'_\alpha|^{p-2} \Phi'_\alpha)' (\Phi_{+1})^{p-1} - (\Phi_\alpha)^{p-1} (|\Phi'_{+1}|^{p-2} \Phi'_{+1})'](t),$$
$$F_2(t) = [(|\Phi'_\alpha|^{p-2} \Phi'_\alpha)(\Phi_{+1}^{p-1})' - (\Phi_\alpha^{p-1})' (|\Phi'_{+1}|^{p-2} \Phi'_{+1})](t) =$$
$$= (p-1)\, \Phi'_\alpha \Phi'_{+1} [|\Phi'_\alpha|^{p-2} \Phi_{+1}^{p-2} - \Phi_\alpha^{p-2} |\Phi'_{+1}|^{p-2}](t).$$

The condition (ii) implies $(|\Phi'_\alpha|^{p-2} \Phi_{+1}^{p-2} - \Phi_\alpha^{p-2} |\Phi'_{+1}|^{p-2})(t) > 0$ for all $t \in \mathscr{A}$, So we have

$$(4.11) \qquad F_2(t) > 0, \quad t \in \mathscr{A}.$$

From the relations (4.10), (4.11) we conclude

$$(4.12) \qquad F_1(t) < 0, \quad t \in \mathscr{A}.$$

On the other hand, the equation (4.6) implies

$$F_1(t) = -f(t) \cdot (\Phi_{+1})^{p-1}(t) > 0, \quad t \in \mathscr{T},$$

where $\mathscr{T} \subset \mathscr{A}$, *meas* $\mathscr{T} > 0$. This fact contradicts (4.12). For $\alpha = 0$ we have $\Phi_0(t) = 0$ for all $t \in \langle 0, t_0 \rangle$. Denoting

$$t_1 = \inf \{t \in (t_0, \pi);\ \Phi_0(t) = 0\},$$

we obtain the existence of $z_0 \in (t_0, t_1)$ such that $\Phi_0'(z_0) = 0$. Suppose that z_0 is chosen as follows:

$$z_0 = \sup\{z \in (t_0, t_1);\ \Phi_0'(z) = 0\}\,.$$

There exists a point $\tau_1 \in (z_0, t_1)$ such that the conditions (i)–(iii) are fulfilled but we write Φ_0 instead of Φ_α, $\alpha > 0$. The rest of the proof is similar to that for $\alpha > 0$. For $\alpha < 0$ it is

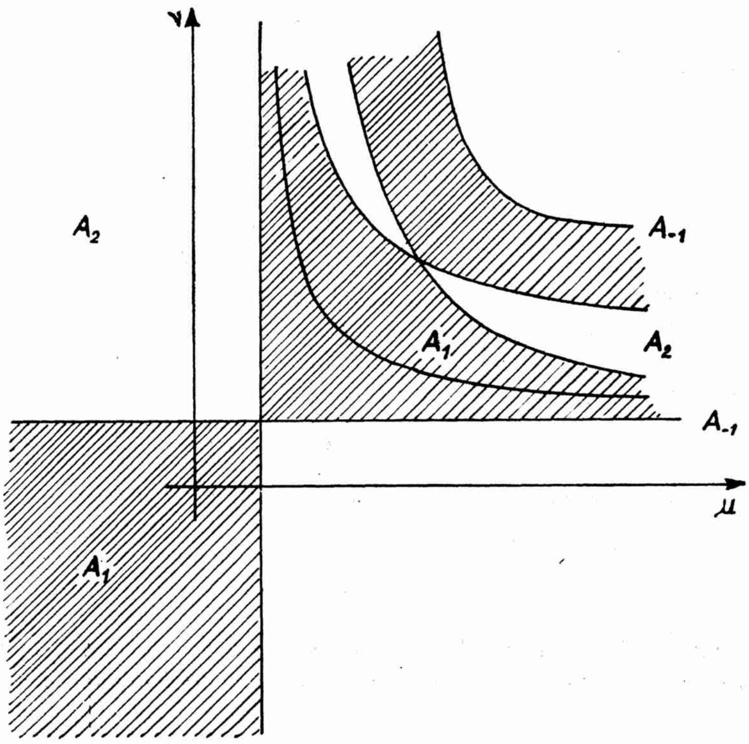
$$\Phi_\alpha(t) = |\alpha|\, \Phi_{-1}(t)\,, \quad t \in \langle 0, t_0 \rangle$$

and the proof is quite analogous to that for $\alpha > 0$. It means that for the right hand side f defined above there exists no weak solution of the boundary value problem (4.5).

The other cases can be proved by modifying the proof of Lemma 4.8. Thus we obtain the following theorem.

4.9. Theorem. *If the condition* (4.7) *is fulfilled then there exists a right hand side* $f \in L_1(0, \pi)$ *such that the boundary value problem* (4.5) *has no weak solution.*

4.10. Remark. Theorems 4.5, 4.6 and 4.9 give us the classification of parameters $[\mu, \nu]$ in the sense of Section 2.



4.11. Remark. The proofs of the previous assertions imply the existence of a right hand side $f \in L_\infty(0, \pi)$ (i.e. the space of almost everywhere bounded functions) such that the boundary value problem (4.5) has no weak solution. The abstract part of this paper implies the existence of a function $f \in C^\infty(\langle 0, \pi \rangle)$ the support of which is situated "near the point π", with the same property.

It is possible to state some sufficient conditions on the right hand side f in order that the boundary value problem (4.5) may have a weak solution. Consider the initial value problem

$$\begin{gathered} -(|u'|^{p-2} u')' - \mu|u^+|^{p-2} u^+ + \nu|u^-|^{p-2} u^- = \varepsilon f \\ u(0) = 0 , \quad u'(0) = 1 , \end{gathered} \tag{4.13}$$

where $f \in L_1(\mathbf{R}^1)$. Let u_ε be a solution of this initial value problem. For $\mu > 0$, $\nu > 0$, the function u is determined uniquely.

4.12. Theorem. *Let ε_0 be a real number. Then*

$$\lim_{\varepsilon \to \varepsilon_0} \|u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}\|_{C(\langle 0,\pi \rangle)} = 0 . \tag{4.14}$$

Proof. Fix $\delta > 0$ so that $0 \notin P_\delta(\varepsilon_0)$ and consider $\varepsilon \in P_\delta(\varepsilon_0)$ only. Denote

$$Q(z, t, \varepsilon) = -\mu|z^+|^{p-2} z^+ + \nu|z^-|^{p-2} z^- - \varepsilon f(t) , \quad z, t \in \mathbf{R}^1 ;$$
$$q(\tau) = |\tau|^{p-2} \tau , \quad \tau \in \mathbf{R}^1 .$$

It is possible to rewrite (4.13) into an equivalent form

$$\begin{gathered} [u'(t), v'(t)] = [q^{-1}(v(t)), Q(u(t), t, \varepsilon)] \\ [u(0), v(0)] = [0, 1] . \end{gathered} \tag{4.13$'$}$$

It is possible to show that the vector function $[q^{-1}(z_2), Q(z_1, t, \varepsilon)]$ satisfies the assumptions stated in [2], Theorem 4.2, Chapter 2. This fact implies (4.14).

The idea of the sufficient conditions upon the right hand sides f is based on the following theorem.

4.13. Theorem. *Let $[\mu, \nu] \in A_2$, i.e.*

$$\Phi_{+1}(\pi) > 0 , \quad \Phi_{-1}(\pi) > 0 \quad \text{or} \quad \Phi_{+1}(\pi) < 0 , \quad \Phi_{-1}(\pi) < 0 .$$

If there exists a solution u_α of the initial value problem

$$\begin{gathered} -(|u'|^{p-2} u')' - \mu|u^+|^{p-2} u^+ + \nu|u^-|^{p-2} u^- = f , \\ u(0) = 0 , \quad u'(0) = \alpha \end{gathered}$$

such that $u_\alpha(\pi) \leqq 0$ or $u_\alpha(\pi) \geqq 0$, respectively, then for the right hand side $f \in L_1(0, \pi)$ in question there exists a weak solution of the boundary value problem (4.5).

Proof of this theorem is based on Theorem 4.12.

Let us mention for the illustration that if $\Phi_{+1}(\pi) < 0$ and $\Phi_{-1}(\pi) < 0$ and if the function $f \in L_1(\mathbf{R}^1)$ is such that $f(t) = 0$ for $t \in (-\infty, t_0\rangle$, $f(t) < 0$ for $t \in (t_0, \pi)$ and $f(t) = 0$ for $t \in \langle\pi, +\infty)$, where t_0 is an arbitrary point of the interval $(\pi - \frac{1}{2}\pi(\lambda_1/\mu)^{1/p}, \pi)$, then there exists a weak solution of the boundary value problem (4.5). To prove this assertion it is sufficient to apply Theorem 4.13 and a slightly modified proof of Lemma 4.8.

4.14. Remark. It is interesting to see that if

$$\Phi_{+1}^{(\mu;\nu)}(\pi) \,.\, \Phi_{-1}^{(\mu;\nu)}(\pi) < 0$$

then applying Theorem 4.12 we can prove that there exists a weak solution of the boundary value problem (4.5) for any admissible right hand side. However, the same result was proved using the abstract part of this paper in Theorem 4.6, based on the Leray-Schauder degree.

References

[1] *F. E. Browder:* Problèmes nonlineaires, Les presses de l'Université de Montreal, 1966.

[2] *E. A. Coddington, N. Levinson:* Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, New York—Toronto—London 1955. Russian translation, Moscow, 1958.

[3] *E. N. Dancer:* Boundary value problems for weakly nonlinear ordinary differential equations (to appear).

[4] *E. N. Dancer:* On the Dirichlet problem for weakly nonlinear elliptic partial differential equations (to appear).

[5] *S. Fučík:* Boundary value problems with jumping nonlinearities, Čas. pěst. mat., Prague, 1976.

[6] *S. Fučík:* Solvability and nonsolvability of weakly nonlinear equations (to appear).

[7] *S. Fučík, J. Nečas, J. Souček, V. Souček:* Spectral analysis of nonlinear operators, JČSMF, Prague, 1973.

[8] *A. Kufner, O. John, S. Fučík:* Function spaces, Academia, Prague, 1977.

[9] *J. Nečas:* Les métodes directes en théorie des équations elliptiques, Academia, Prague, 1967.

[10] *A. E. Taylor:* Introduction to functional analysis, 6th Ed., J. Wiley and Sons, New York, 1967.

Authors' address: 306 14 Plzeň, Nejedlého sady 14 (VŠSE).

HEAT SOURCES AND HEAT POTENTIALS

JOSEF KRÁL and STANISLAV MRZENA, Praha

(Received October 31, 1977)

We shall deal with potentials in R^{m+1} corresponding to the well-known kernel

$$(1) \qquad \mathscr{E}(x,t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-m/2} \exp\left(-\dfrac{|x|^2}{4t}\right), & x \in R^m, \quad t > 0, \\ 0, \quad x \in R^m, & t \leqq 0, \end{cases}$$

which represents a fundamental solution of the heat conduction operator

$$\frown = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

(cf. [1]). The term measure will always mean a finite positive Borel measure with a compact support in a Euclidean space. Let ν be a measure in R^m (describing a space distribution of heat sources) and let ϱ be a measure in R^1. Then the heat potential of $\mu = \nu \otimes \varrho$ defined by

$$(2) \qquad \mathscr{E}\mu(x,t) = \int_{R^{m+1}} \mathscr{E}(x-\xi, t-\tau)\, \mathrm{d}\mu(\xi,\tau)$$

may be interpreted as the temperature resulting at the time t and the point $x \in R^m$ under the action of time-variable heat sources which are so distributed that the quantity of heat emanating from a Borel set $M \subset R^m$ during the time interval $I \subset R^1$ is given by $\mu(M \times I) = \nu(M)\,\varrho(I)$. We shall adopt the following

Definition. Let $\alpha \geqq 0$ be a real number and suppose that ν is a measure in R^m. We shall say that ν is *α-admissible* if there is a non-trivial measure ϱ in R^1 such that the heat potential $u = \mathscr{E}\mu$ corresponding to $\mu = \nu \otimes \varrho$ satisfies the condition

$$(3) \quad u(x,t) - u(y,v) = o(|x-y|^\alpha + |t-v|^{\alpha/2}) \quad \text{as} \quad |x-y| + |t-v| \to 0+ .$$

Any ϱ with the above properties will be called an *α-admissible factor of ν.*

Let

$$\Omega(r, x) = \{\xi \in R^m;\ |\xi - x| < r\}$$

denote the open ball with center x and radius r. We are going to prove the following result characterizing all α-admissible measures in R^m for $\alpha \in \langle 0, 1)$.

Theorem. *If $\alpha \in \langle 0, 1)$, then a measure ν in R^m is α-admissible if and only if*

$$\sup_{x \in R^m} \int_0^\delta r^{1-m} \nu(\Omega(r, x))\,\mathrm{d}r = o(\delta^\alpha) \quad \text{as} \quad \delta \to 0+\,; \tag{4}$$

for $\alpha \in (0, 1)$ the condition (4) may be replaced equivalently by (14).

Remark 1. Let ν be a non-trivial measure in R^m and denote by ε_{t_0} the Dirac measure (= unit point-mass) concentrated at a point t_0 in R^1. It is known that ε_{t_0} is never a 0-admissible factor of $\nu \not\equiv 0$ (compare [2]).

Remark 2. If $M \subset R^1$ and $\tau \in R^1$ we put

$$M - \tau = \{t - \tau;\ t \in M\}\,.$$

Given a measure ϱ in R^1 we may define the translated measure ϱ_τ by

$$\varrho_\tau(M) = \varrho(M - \tau)$$

on Borel sets $M \subset R^1$. Further we put for any $h > 0$

$$\varrho^h(\cdot) = \frac{1}{h}\int_{-h}^0 \varrho_\tau(\cdot)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

The measure ϱ^h is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure λ in R^1 and the corresponding Radon-Nikodym derivative is given by the function

$$t \to \lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^{-1} \varrho^h(\langle t - \varepsilon, t\rangle)$$

which is everywhere defined and finite. Besides that, $\varrho^h(R^1) = \varrho(R^1)$. If ϱ is an α-admissible factor of ν, $\mu = \nu \otimes \varrho$ and $u = \mathscr{E}\mu$ is defined by (2), then Fubini's theorem yields

$$\mathscr{E}(\nu \otimes \varrho^h)(x, t) = \frac{1}{h}\int_0^h u(x, t + \tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Hence it follows that (3) is again satisfied with u replaced by $u^h = \mathscr{E}(\nu \otimes \varrho^h)$. In other words, ϱ^h is also an α-admissible factor of ν.

Proof of the theorem. Suppose first that ν is an α-admissible measure in R^m. Let ϱ be an α-admissible factor of ν. According to Remark 2 we may suppose that ϱ

is absolutely continuous (λ) and $\lim \varepsilon^{-1}\varrho(\langle t - \varepsilon, t\rangle)$ $(\varepsilon \to 0+)$ is everywhere defined and finite in R^1. Let us fix a $\tau \in R^1$ such that

$$\lim_{h \to 0+} \frac{\varrho(\langle \tau - h, \tau\rangle)}{h} = q > 0 .$$

We have then for suitable $\delta > 0$ the implication

$$0 < h \leqq \delta \Rightarrow \tfrac{1}{2}qh \leqq \varrho(\langle \tau - h, \tau\rangle) \leqq 2qh . \tag{5}$$

Let $c > 0$ and consider the set

$$A(x, \tau, c) = \{[\xi, u] \in R^{m+1};\ \mathscr{E}(x - \xi, \tau - u) > c\} =$$
$$= \left\{[\xi, u] \in R^{m+1};\ u \in \left(\tau - \frac{1}{4\pi} c^{-2/m}, \tau\right),\ |x - \xi|^2 < r(u)\right\},$$

where

$$r(u) = 4(\tau - u) \log\left[c(4\pi(\tau - u))^{m/2}\right]^{-1} .$$

If $\xi \in R^m$ is fixed in such a way that

$$|x - \xi| = p \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi e}\right)}\, c^{-1/m} \tag{6}$$

with $p \in \langle 0, 1)$, then

$$\{\xi\} \times \left\langle \tau - \frac{1}{4\pi e} c^{-2/m}, \tau - \frac{p}{4\pi e} c^{-2/m} \right\rangle \subset A(x, \tau, c) . \tag{7}$$

This may be verified by a simple calculation; note that $A(x, \tau, c)$ is convex and

$$\frac{m}{2\pi e} c^{-2/m} = \max\left\{r(u);\ u \in \left(\tau - \frac{1}{4\pi} c^{-2/m}, \tau\right)\right\} = r\left(\tau - \frac{1}{4\pi e} c^{-2/m}\right).$$

According to (5) we obtain for c, p submitted to

$$\frac{1}{4\pi e} c^{-2/m} \leqq \delta, \quad p \in \langle 0, \tfrac{1}{8}\rangle \tag{8}$$

the estimate

$$\varrho\left(\left\langle \tau - \frac{1}{4\pi e} c^{-2/m}, \tau - \frac{p}{4\pi e} c^{-2/m} \right\rangle\right) =$$
$$= \varrho\left(\left\langle \tau - \frac{1}{4\pi e} c^{-2/m}, \tau \right\rangle\right) - \varrho\left(\left\langle \tau - \frac{p}{4\pi e} c^{-2/m}, \tau \right\rangle\right) \geqq$$
$$\geqq \tfrac{1}{2} q \frac{1}{4\pi e} c^{-2/m} - 2q \frac{p}{4\pi e} c^{-2/m} = \frac{q}{4\pi e} (\tfrac{1}{2} - 2p)\, c^{-2/m} \geqq$$
$$\geqq \frac{q}{16\pi e} c^{-2/m} .$$

In view of (7), (6) we have the inclusion

$$\left\{[\xi, u];\ |\xi - x| \leqq \frac{1}{8}\sqrt{\left(\frac{m}{2\pi e}\right)}\, c^{-1/m},\ \tau - \frac{1}{4\pi e} c^{-2/m} \leqq u \leqq \right.$$

$$\left. \leqq \tau - \tfrac{1}{2}|x - \xi|\, c^{-1/m} \frac{1}{\sqrt{(2\pi e m)}}\right\} \subset A(x, \tau, c)$$

whence we get

$$(9) \qquad (\nu \otimes \varrho)\,(A(x, \tau, c)) \geqq \frac{q}{16\pi e} c^{-2/m}\, \nu\left(\Omega\left(\frac{1}{8}\sqrt{\left(\frac{m}{2\pi e}\right)}\, c^{-1/m}, x\right)\right).$$

Consider first the case $\alpha = 0$. If $\mu = \nu \otimes \varrho$ and

$$(10) \qquad \mathscr{E}\mu(x, t)\left(= \int_0^\infty \mu(A(x, t, c))\, \mathrm{d}c\right)$$

is a continuous function of the variables x, t, then

$$(11) \qquad \lim_{a\to\infty} \sup_{x,t} \int_a^\infty \mu(A(x, t, c))\, \mathrm{d}c = 0$$

(compare Proposition below). Employing (9) we obtain for

$$\frac{1}{4\pi e} a^{-2/m} \leqq \delta\,, \quad s = \frac{q}{16\pi e}\,, \quad z = \frac{1}{8}\sqrt{\left(\frac{m}{2\pi e}\right)}$$

the inequality

$$\int_a^\infty \mu(A(x, \tau, c))\, \mathrm{d}c \geqq s \int_a^\infty c^{-2/m}\nu(\Omega(zc^{-1/m}, x))\, \mathrm{d}c =$$

$$= smz^{m-2} \int_0^{za^{-1/m}} r^{1-m}\nu(\Omega(r, x))\, \mathrm{d}r$$

which combined with (11) yields (4) for $\alpha = 0$.

Conversely, suppose that (4) holds with $\alpha = 0$. Fix an arbitrary measure ϱ in R^1 satisfying for a suitable $K > 0$ the estimate

$$(12) \qquad \varrho(\langle \tau - \delta, \tau \rangle) \leqq K\delta \quad (\tau \in R^1,\ \delta > 0)$$

and put $\mu = \nu \otimes \varrho$. The inclusion

$$A(x, \tau, c) \subset \Omega\left(\sqrt{\left(\frac{m}{2\pi e}\right)}\, c^{-1/m}, x\right) \times \left(\tau - \frac{1}{4\pi} c^{-2/m}, \tau\right)$$

together with (12) gives

$$\mu(A(x, \tau, c)) \leqq \frac{K}{4\pi} c^{-2/m} \nu\left(\Omega\left(\sqrt{\left(\frac{m}{2\pi e}\right)}\, c^{-1/m}, x\right)\right),$$

whence (putting $\zeta = \sqrt{(m/2\pi e)}$)

$$\int_a^\infty \mu(A(x, \tau, c))\,dc \leqq \frac{K}{4\pi}\, m\zeta^{m-2} \int_0^{\zeta a^{-1/m}} r^{1-m}\nu(\Omega(r, x))\,dr\,.$$

Using (4) with $\alpha = 0$ we arrive at

$$\limsup_{a\to\infty}\ \sup_{x,t} \int_a^\infty \mu(A(x, \tau, c))\,dc = 0$$

which quarantees that the potential (10) is a uniformly continuous function of the variable $[x, t] \in R^{m+1}$ (compare Proposition below). Thus the theorem is proved for $\alpha = 0$.

Now consider the case $\alpha \in (0, 1)$. Let μ be a measure in R^{m+1} and denote by $u = \mathscr{E}\mu$ its heat potential. Then the equation

$$\frown u = \mu$$

holds in R^{m+1} in the sense of the distribution theory. Suppose now that for all $[x, t]$, $[y, t']$ in

$$\overline{\Omega(2r, \xi)} \times \langle \tau - (2r)^2, \tau + (2r)^2 \rangle$$

the estimate

$$|u(x, t) - u(y, t')| \leqq Q(r)\,(|x - y|^\alpha + |t - t'|^{\alpha/2})$$

holds.

There is an infinitely differentiable function $\varphi(x, t)$ vanishing outside

$$\overline{\Omega(2r, \xi)} \times \langle \tau - (2r)^2, \tau + (2r)^2 \rangle$$

such that $\varphi = 1$ on $\overline{\Omega(r, \xi)} \times \langle \tau - r^2, \tau \rangle$, $0 \leqq \varphi \leqq 1$ and

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right| + \sum_{i=1}^m \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}\right| \leqq 2(m + 1)\, r^{-2}\,.$$

Then

$$\mu(\overline{\Omega(r, \xi)} \times \langle \tau - r^2, \tau \rangle) \leqq \int_{R^{m+1}} \varphi\,d\mu =$$

$$= -\int_{R^{m+1}} \left(\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2\varphi(x, t)}{\partial x_i^2}\right)[u(x, t) - u(\xi, \tau)]\,dx\,dt\,.$$

Hence we conclude that

(13) $$\mu(\overline{\Omega(r, \xi)} \times \langle \tau - r^2, \tau \rangle) \leqq k\,Q(r)\,r^{m+\alpha}$$

with an absolute constant k (independent of r, μ). Assuming $\mu = \nu \otimes \varrho$ with ϱ

absolutely continuous (λ) and having an everywhere defined finite density $\lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^{-1} \varrho(\langle t - \varepsilon, t \rangle)$, we may again choose $\tau \in R^1$ and $q, \delta > 0$ such that (5) holds. Combining (13) and (5) we get for $r^2 \leqq \delta$

$$\nu(\Omega(r, \xi)) \leqq 2k\, Q(r)\, q^{-1} r^{m-2+\alpha} .$$

If (3) holds, then $\lim_{r \to 0+} Q(r) = 0$ and we obtain

$$\sup_x \nu(\Omega(r, x)) = o(r^{m-2+\alpha}) \quad \text{as} \quad r \to 0+ . \tag{14}$$

Conversely, assume (14) and fix an arbitrary measure ϱ in R^1 satisfying (12). Then $\mu = \nu \otimes \varrho$ satisfies

$$\sup_{x,\tau} \mu(\Omega(r, x) \times \langle \tau - r^2, \tau \rangle) = o(r^{m+\alpha}) \quad \text{as} \quad r \to 0+ ,$$

which implies that $u = \mathscr{E}\mu$ fulfils (3) (compare Remark 5 and Lemma 4 in [3] and note that the derivatives of u have zero limits at infinity). To make the proof complete it remains to observe that (4) and (14) are equivalent for $\alpha \in (0, 1)$.

Remark 3. The assertion of the theorem (but not that of Remark 1) remains valid if o is replaced by O simultaneously in (4) and in the relation (3) occurring in the definition of α-admissibility (compare also [4]), provided $\alpha > 0$.

We shall now complete the detailed proof of the condition for continuity of the heat potential that has been useful in the course of the proof of the theorem.

Proposition. *The heat potential $\mathscr{E}\mu$ corresponding to a measure μ in R^{m+1} is finite and continuous on R^{m+1} if and only if*

$$\lim_{a \to \infty} \sup_{x,t} \int_a^\infty \mu(A(x, t, c))\, dc = 0 . \tag{15}$$

Proof. Put for $a \geqq 0$

$$\mathscr{E}_a = \min(a, \mathscr{E}) , \quad \mathscr{E}_a\mu(x, t) = \int_{R^{m+1}} \mathscr{E}_a(x - \xi, t - \tau)\, d\mu(\xi, \tau) .$$

For any $x_0 \in R^m$ and $t > t_0$ the estimate

$$\mathscr{E}\mu(x_0, t) \geqq [4\pi(t - t_0)]^{-1/m} \mu(\{[x_0, t_0]\}) \tag{16}$$

shows that $\mu(\{[x_0, t_0]\}) = 0$ whenever $\mathscr{E}\mu$ is locally bounded. Suppose now that $\mathscr{E}\mu$ is finite and continuous. Then $\mathscr{E}_a(x - \xi, t - \tau) \to \mathscr{E}_a(x_0 - \xi, t_0 - \tau)$ for μ-almost every $[\xi, \tau] \in R^{m+1}$ (i.e. for every $[\xi, \tau] \neq [x_0, t_0]$) as $[x, t] \to [x_0, t_0]$, so that $\mathscr{E}_a\mu$ is continuous on R^{m+1}. Since $\mathscr{E}_a\mu \nearrow \mathscr{E}\mu$ as $a \nearrow \infty$ we conclude from Dini's theorem (which may be applied to the Aleksandrov compactification of R^{m+1}, because all the functions in question tend to zero at infinity) that

(17) $$\lim_{a\to\infty} \sup_{x,t} [\mathscr{E}\mu(x, t) - \mathscr{E}_a\mu(x, t)] = 0 .$$

Noting that, for fixed $[x, t] \in R^{m+1}$, $\mathscr{E}(x - \xi, t - \tau) - \mathscr{E}_a(x - \xi, t - \tau)$ vanishes outside $A(x, t, a)$ and equals $\mathscr{E}(x - \xi, t - \tau) - a$ for $[\xi, \tau] \in A(x, t, a)$ we get

$$\mathscr{E}\chi(x, t) - \mathscr{E}_a\mu(x, t) = \int_{A(x,t,a)} [\mathscr{E}(x - \xi, t - \tau) - a] \,\mathrm{d}\mu(\xi, \tau) =$$

$$= \int_0^\infty \mu(\{[\xi, \tau] \in A(x, t, a); \mathscr{E}(x - \xi, t - \tau) > a + c\}) \,\mathrm{d}c = \int_a^\infty \mu(A(x, t, c)) \,\mathrm{d}c .$$

The equality

(18) $$\mathscr{E}\mu(x, t) - \mathscr{E}_a\mu(x, t) = \int_a^\infty \mu(A(x, t, c)) \,\mathrm{d}c$$

together with (17) yields (15). Conversely, assume (15). In view of (18), $\mathscr{E}_a\mu \nearrow \mathscr{E}\mu$ uniformly as $a \nearrow \infty$. Since the functions $\mathscr{E}_a\mu$ are bounded, the same holds of $\mathscr{E}\mu$ and (16) shows that μ does not charge points. As we have seen above, this implies the uniform continuity of $\mathscr{E}_a\mu$ and, consequently, of $\mathscr{E}\mu$ as well.

Remark 4. If ν is a measure in R^m and $m \geqq 2$, then we denote by

$$U\,\nu(x) = \int_{R^m} p(x - \xi) \,\mathrm{d}\nu(\xi)$$

its Newtonian (in the case $m > 2$) or logarithmic (in the case $m = 2$) potential corresponding to the kernel

$$p(x) = \begin{cases} |x|^{2-m} & \text{if } m > 2 , \\ \log \dfrac{1}{|x|} & \text{if } m = 2 . \end{cases}$$

If $\alpha \in \langle 0, 1)$, then ν satisfies (4) if and only if

(19) $$U\,\nu(x) - U\,\nu(y) = o(|x - y|^\alpha) \quad \text{as} \quad |x - y| \to 0+ .$$

This assertion remains valid for $\alpha > 0$ if o is replaced by O in (19) and (4) simultaneously (compare [5]–[9]).

References

[1] *V. S. Vladimirov:* Equations of mathematical physics, M. Dekker ed., New York 1971 (translated from Russian).

[2] *G. Anger:* Funktionalanalytische Betrachtungen bei Differentialgleichungen unter Verwendung von Methoden der Potentialtheorie I, Akademie-Verlag, Berlin 1967.

[3] *J. Král:* Removable singularities of solutions of semielliptic equations, Rendiconti di Matematika (4), vol. *6* (973), Ser. VI, 1—21.

[4] *J. Král:* Hölder — continuous heat potentials, Accad. Nazionale dei Lincei, Rendiconti Cl. Sc. fis., mat. e nat. Ser. VIII, vol. *LI* (1971), 17—19.

[5] *M. G. Arsove:* Continuous potentials and linear mass distributions, SIAM Review vol. *2* (1960), 177—184.

[6] *L. Carleson:* Selected problems on exceptional sets, Van Nostrand Co., New Jersey 1967.

[7] *I. Netuka:* An operator connected with the third boundary value problem in potential theory, Czechoslovak Math. J., *22* (1972), 462—489.

[8] *H. Wallin:* Existence and properties of Riesz potentials satisfying Lipschitz conditions, Math. Scand. *19* (1966), 151—160.

[9] *J. Král, I. Netuka, J. Veselý:* Theory of Potential III, Stát. ped. nakl., Praha 1976 (Czech).

Authors addresses: J. Král, 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV), S. Mrzena, 500 00 Hradec Králové, Smetanovo nábř. 1182.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

GENERALIZED CONTINUITY AND GENERALIZED CLOSED GRAPHS

ROBERT A. HERRMANN, Annapolis

(Received November 17, 1977)

1. Introduction. In [13], some sufficient conditions for a weakly-continuous function to be continuous are investigated. In particular, Corollary 2 [13] states that if Y is a Hausdorff space such that every closed subset is N-closed, then a weakly-continuous map $f : X \to Y$ is continuous. As we show below, a Hausdorff space such that every closed subset is N-closed is compact. Consequently, this corollary is not a particularly significant result.

The major purpose for this present investigation is to use tH-monad theory and to discuss, for an arbitrary map $f : X \to Y$, some relations between (tH, sK)-continuity, (tH, sK)-closed graphs and, if X, Y are topological spaces, topological continuity. In the process, we are able to improve upon most of the results in [13]. For example, applying our results to topological spaces X and Y, it is shown that if $A \subset X$ is compact [resp. N-closed, αA-compact, completely-compact, SA-compact] and the graph, $G(f)$, of $f : X \to Y$ is closed [resp. has property (P), is strongly closed, is (I_X, w)-closed, is (I_X, S)-closed], then $f^{-1}[A]$ is closed in X. If Y is Hausdorff [resp. completely-Hausdorff] and each closed subset is θ-compact [resp. w-compact] and $f : X \to Y$ is almost-continuous [resp. a c-map], then f is continuous. If (Y, T) is rim-θ [resp. α]-compact, $f : (X, \tau) \to (Y, T)$ is weakly-continuous and $G(f)$ is strongly closed [resp. has property (P)], then f is continuous. Finally, we show that every rim-θ-compact, Urysohn [resp. rim-α-compact, Hausdorff; rim-S-compact, weakly-Hausdorff, extremally disconnected] space is regular.

2. Preliminaries. In the interest of brevity, we shall rely heavily upon the definitions and results which appear in the references [6], [7], [8], [9], [12]. Recall that $f : X \to Y$ is (tH, sK)-continuous at $p \in X$ if $^*f[\mu_t H(p)] \subset \mu_s K(f(p))$, where $\mu_t H(p)$ and $\mu_s K(q)$ are the tH and sK-monads on X and Y, respectively [8]. For the monad of ROBINSON [16] $\mu(p)$ [resp. α-monad $\mu_\alpha(p)$, θ-monad $\mu_\theta(p)$, w-monad $\mu_w(p)$], we have that a map $f : (X, \tau) \to (Y, T)$ is almost-continuous [19] [resp. θ-continuous

[2], weakly-continuous [13], a c-map [3]] at $p \in X$ iff it is (I_X, α) [resp. (θ, θ), (I_X, θ), (I_X, w)]-continuous at $p \in X$. We note that a weakly-continuous map is also known as a weakly-θ-continuous map. ${}^*\mathcal{M}$ is a highly saturated enlargement.

Definition 2.1. A map $f: X \to Y$ has a *(tH, sK)-closed graph* $G(f)$ if for each $(p, q) \notin G(f)$, $\mu_\pi((p, q)) \cap {}^*(G(f)) = \emptyset$, where π is generated by the tH and sK-monads (denoted by $\pi = tH \times sK$).

Let (X, τ) and (Y, T) denote topological spaces.

Example 2.1. (i) For $f: (X, \tau) \to (Y, T)$, the graph $G(f)$ is (I_X, I_Y)-closed iff $\mu((p, q)) \cap {}^*(G(f)) = \emptyset$ for each $(p, q) \notin G(f)$ iff $G(f)$ is closed in $X \times Y$.

(ii) For $f: (X, \tau) \to (Y, T)$, $G(f)$ is (I_X, θ)-closed iff it is *strongly closed* in the sense of Herrington and Long [5].

(iii) For $f: (X, \tau) \to (Y, T)$, $G(f)$ is (I_X, α)-closed iff it has *property* (P) discussed in [11] and [13].

(iv) A map $f: X \to Y$ has a (tH, sK)-closed graph iff $X - G(f)$ is π-open, where $\pi = tH \times sK$. In general, if $t \in PTH(X)$, $s \in PSK(Y)$, then if $G(f)$ is (tH, sK)-closed, then it is π-closed.

Finally, we point out that many of the results in this paper also hold for the q-monad of Puritz [15]. However, since we are particularly interested in topological spaces and certain closedness properties it appears more useful to concentrate upon the tH-monad approach due to certain special filter base properties which often appear unavoidable and which are exhibited by such nonstandard objects.

3. Major results. As stated in [6] for (X, τ), a set $A \subset X$ is N-closed iff it is αA-compact iff ${}^*A \subset \bigcup\{\mu_\alpha(x) \mid x \in A\}$.

Theorem 3.1. *Let (X, τ) be Hausdorff and assume that each closed set $A \subset X$ is N-closed. Then X is compact.*

Proof. Since X is N-closed (i.e. nearly-compact [18]) then X is almost-regular [17] and Urysohn (i.e. Urysohn = distinct points are separated by closed neighborhoods). Thus every closed subset of X is θ-compact, since for each $p \in X$, $\mu_\alpha(p) = \mu_\theta(p)$. Consequently, (X, τ) is C-compact in the sense of Viglino [22]. Thus X is semiregular by application of Theorem A in [22]. Therefore, X is regular and this completes the proof.

We now give an important characterization for (tH, sK)-closed graphs. For $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, the power set of X, we let $\operatorname{Nuc} \mathcal{F} = \bigcap\{{}^*F \mid F \in \mathcal{F}\}$ and if $f: X \to Y$, then $f[\mathcal{F}] = \{f[F] \mid F \in \mathcal{F}\}$.

Theorem 3.2. *A map $f: X \to Y$ has a (tH, sK)-closed graph, $G(f)$, iff whenever $\emptyset \neq \operatorname{Nuc} \mathcal{F} \subset \mu_t H(p)$, $p \in X$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, and $\operatorname{Nuc} f[\mathcal{F}] \subset \mu_s K(q)$ for some $q \in Y$, then $f(p) = q$.*

Proof. Let $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$, $\emptyset \neq \operatorname{Nuc}\mathscr{F} \subset \mu_t H(p)$, $p \in X$, and $\operatorname{Nuc} f[\mathscr{F}] \subset \mu_s K(q)$ for some $q \in Y$. Assume that $x \in \operatorname{Nuc}\mathscr{F}$ and $y \in \operatorname{Nuc} f[\mathscr{F}]$. Hence $*(x, y) \in \mu_\pi((p, q))$, $\pi = tH \times sK$. Consequently, $*(F \times f[F]) \cap \mu_\pi((p, q)) \neq \emptyset$ for each $F \in \mathscr{F}$. Since $*(F \times f[F]) \subset *(G(f))$, we have that $\mu_\pi((p, q)) \cap *(G(f)) \neq \emptyset$. Assuming that $G(f)$ is a (tH, sK)-closed graph this yields that $f(p) = q$.

Conversely, assume that whenever $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$, $\emptyset \neq \operatorname{Nuc}\mathscr{F} \subset \mu_t H(p)$ and $\operatorname{Nuc} f[\mathscr{F}] \subset \mu_s K(q)$, $q \in Y$, then $f(p) = q$. Let $(p, q) \in (X \times Y) - G(f)$. Thus there does not exist a $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ such that $\emptyset \neq \operatorname{Nuc}\mathscr{T} \subset \mu_t H(p)$ and $\operatorname{Nuc} f[\mathscr{T}] \subset \mu_s K(q)$. Suppose that $\mu_\pi((p, q)) \cap *(G(f)) \neq \emptyset$. Then there exists some $x \in \mu_t H(p)$ and $y \in \mu_s K(q)$ such that $*(x, y) \in *(G(f))$. Now the ultramonad $\operatorname{Nuc} \operatorname{Fil}\{x\} = \operatorname{NF}\{x\} \subset \mu_t H(p)$ and $*f[\operatorname{NF}\{x\}] = \operatorname{NF}\{*f(x)\} = \operatorname{NF}\{y\} \subset \mu_s K(q)$. This contradiction implies that $\mu_\pi((p, q)) \cap *(G(f)) = \emptyset$ and the proof is complete.

Recall that a space (X, τ) is compact [resp. nearly-compact [18], quasi-H-closed [14], completely-closed [10], S-closed [21]] iff $*X = \bigcup\{\mu(x) \mid x \in X\}$ [resp. $*X = \bigcup\{\mu_\alpha(x) \mid x \in X\}$, $*X = \bigcup\{\mu_\theta(x) \mid x \in X\}$, $*X = \bigcup\{\mu_w(x) \mid x \in X\}$, $*X = \bigcup\{\mu\, S(x) \mid x \in X\}$ [6, 7, 8, 9, 10]]. The w-monad at $p \in X$ is $\mu_w(p) = \bigcap\{*f^{-1}[\mu(f(p))] \mid f \in C(X)\}$ and the S-monad is $\mu\, S(p) = \bigcap\{*(\mathrm{cl}_X A) \mid p \in A \in \mathrm{SO}(X)\}$, where $\mathrm{SO}(X)$ is a set of all semiopen subsets of X [1]. Also, $W \subset *Y$ is sKA-compact iff $W \subset \bigcup\{\mu_s K(x) \mid x \in A\}$.

Theorem 3.3. *If $f : X \to Y$ has a (tH, sK)-closed graph and Y is sKY-compact (i.e. sK-compact), then f is (tH, sK)-continuous.*

Proof. Assume that $f : X \to Y$ has a (tH, sK)-closed graph and consider $*f[\mu_t H(p)]$. By sKY-compactness, $*f[\mu_t H(p)] \subset \bigcup\{\mu_s K(y) \mid y \in Y\}$. Assume that $*f[\mu_t H(p)] \cap \mu_s K(q) \neq \emptyset$. Then there exists $x \in \mu_t H(p)$ such that $*f(x) \in \mu_s K(q)$. However, $\operatorname{NF}\{x\} \subset \mu_t H(p)$ and $*f[\operatorname{NF}\{x\}] = \operatorname{NF}\{*f(x)\}$ imply that $*f[\operatorname{NF}\{x\}] \subset \mu_s K(q)$. Theorem 3.2 yields $f(p) = q$. Consequently, $*f[\mu_t H(p)] \subset \mu_s K(f(p))$ and the proof is completed.

Corollary 3.3. *If $f : (X, \tau) \to (Y, T)$ has a (I_X, I_Y)- [resp. (I_X, α), (θ, I_Y), (θ, θ), (I_X, w), (I_X, S), (I_X, θ)]-closed graph, and Y is compact [resp. nearly-compact, compact, quasi-H-closed, completely-closed, S-closed, quasi-H-closed], then f is continuous [resp. almost-continuous [19], strongly-θ-continuous [8], θ-continuous [4], a c-map [3], (I_X, S)-continuous, weakly-continuous [13]].*

We now present a proposition which gives a strong converse to Theorem 3.3 and has numerous corollaries which improve upon Theorem 1 in [13]. A set Y is (sK, uV)-*separated* if for distinct $p, q \in Y$, $\mu_s K(p) \cap \mu_u V(q) = \emptyset$.

Theorem 3.4. *Let $f : X \to Y$ be (tH, sK)-continuous and Y be (sK, uV)-separated. Then f has a (tH, uV)-closed graph.*

Proof. Assume that $\emptyset \neq \operatorname{Nuc}\mathscr{F} \subset \mu_t H(p)$, $p \in X$, $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$, and $\operatorname{Nuc} f[\mathscr{F}] \subset \mu_u V(q)$, $q \in Y$. Then (tH, sK)-continuity implies that $\operatorname{Nuc} f[\mathscr{F}] \subset \mu_s K(f(p))$.

Since $\operatorname{Nuc} f[\mathscr{F}] \neq \emptyset$, then (sK, uV)-separation implies that $f(p) = q$. Hence f has a (tH, uV)-closed graph.

Corollary 3.4.1. *If $f:(X, \tau) \to (Y, T)$ is continuous [resp. almost-continuous, strongly-θ-continuous, θ-continuous, weakly-continuous] and Y is Hausdroff, then f has a closed [resp. (I_X, θ)-closed, (θ, θ)-closed, (θ, α)-closed, (I_X, α)-closed] graph.*

Corollary 3.4.2. *If $f:(X, \tau) \to (Y, T)$ is weakly-continuous [resp. a c-map, (I_X, S)-continuous] Y is Urysohn [resp. completely-Hausdorff, weakly-Hausdorff], then f has a (I_X, θ) [resp. (I_X, w), (I_X, α)]-closed graph.*

Proof. The above results follow from Theorem 1.4 and 1.5 [6] and the result that if a space Y is completely-Hausdorff [resp. weakly-Hausdorff [20]], then for distinct $p, q \in Y$, $\mu_w(p) \cap \mu_w(q) = \emptyset$ [resp. $\mu_\alpha(p) \cap \mu\, S(q) = \emptyset$].

Remark 3.1. If $f: X \to Y$ has a (tH, sK)-closed graph and we have an rJ-monad system on X and a uV-monad system on Y such that for each $p \in X$ and $q \in Y$, $\mu_r\, J(p) \subset \mu_t\, H(p)$ and $\mu_u\, V(q) \subset \mu_s\, K(q)$, then f has an (rJ, uV)-closed graph. Hence each of the (tH, sK)-continuous maps in the hypothesis of Corollaries 3.4.1 and 3.4.2 has a closed graph.

Recall that for $W \subset {}^*X$, $St_t\, H(W) = \{x \mid [x \in X] \wedge [\mu_t\, H(p) \cap W \neq \emptyset]\}$.

Theorem 3.5. *Let $W \subset {}^*Y$ be sKA-compact. If $f: X \to Y$ has a (tH, sK)-closed graph, then*

$$St_t H({}^*f^{-1}[W]) \subset f^{-1}[A].$$

Proof. We know that $W \subset \bigcup\{\mu_s\, K(x) \mid x \in A\}$. Thus ${}^*f^{-1}[W] \subset \bigcup\{{}^*f^{-1}[\mu_s\, K(x)] \mid x \in A\}$. Let $p \in St_t H({}^*f^{-1}[W])$. Then $\mu_t\, H(p) \cap {}^*f^{-1}[W] \neq \emptyset$. Hence ${}^*f[\mu_t\, H(p)] \cap W \neq \emptyset$. Consequently, there exists $x \in A$ such that ${}^*f[\mu_t\, H(p)] \cap \mu_s\, K(x) \neq \emptyset$. Thus there exists $r \in \mu_t\, H(p)$ such that $\mathrm{NF}\{r\} \subset \mu_t\, H(p)$ and ${}^*f(r) \in \mu_s\, K(x)$. Therefore, $\mathrm{NF}\{{}^*f(r)\} \subset \mu_s\, K(p)$. Now (tH, sK)-closed graph implies by Theorem 3.2 that $f(p) = x$. (i.e. $p \in f^{-1}(x)$). Hence,

$$St_t H({}^*f^{-1}[W]) \subset f^{-1}[A].$$

Corollary 3.5.1. *Let $A \subset Y$ be sKA-compact and for each $p \in X$, let $t \in PTH(p)$. If $f: X \to Y$ has a (tH, sK)-closed graph, then $f^{-1}[A]$ is tH-closed.*

Corollary 3.5.2. *Let $A \subset Y$ be compact [resp. N-closed, SA-compact, completely-closed, SA-compact]. If $f:(X, \tau) \to (Y, T)$ has a (I_X, I_Y) [resp. (I_X, α), (I_X, θ), (I_X, w), (I_X, S)]-closed graph, then $f^{-1}[A]$ is closed in X.*

Corollary 3.5.3. *Let $A \subset Y$ be compact. If $f:(X, \tau) \to (Y, T)$ has a (θ, I_Y)-closed graph, then $f^{-1}[A]$ is closed in X.*

Example 2 in Viglino's paper [22] is that of a Hausdorff, non-Urysohn, non-compact space in which each closed set is θ-compact. He calls such a space *C-compact* and notes that a C-compact Urysohn space is compact. SOUNDARARAJAN [20] gives an example of a compact weakly-Hausdorff space which is not Hausdorff. The next result improves somewhat upon Corollary 2 in [13].

Theorem 3.6. *Let Y be Hausdorff [resp. completely-Hausdorff] and each closed subset of Y is θ-compact [resp. w-compact]. If $f:(X,\tau)\to(Y,T)$ is almost-continuous [resp. a c-map], then f is continuous.*

Remark 3.2. In Theorem 3.6, we have not included weakly-Hausdorff spaces in which every closed subset is S-closed. The reason for this is that a weakly-Hausdorff space which is S-closed is H-closed Urysohn and extremally disconnected. Such a space is thus N-closed and if a subset is S-closed, then it is N-closed. Consequently, Theorem 3.1 would imply that a weakly-Hausdorff space in which every closed subset if S-closed is a compact Hausdorff space.

As far as rim-compact spaces are concerned, we are able to extend or improve upon Theorems 3 and 4 in [13]. A space (X,τ) is *rim-tH-compact* if for each $p\in X$ and each neighborhood $V\in\tau$ of p there exists some neighborhood $G_p\in\tau$ of p such that $\mathrm{Fr}(G_p)=\mathrm{cl}_X G-G$ is $tH(\mathrm{Fr}(G_p))$-compact and $G_p\subset V$. GROSS and VIGLINO [4] show than any C-compact Hausdorff space is rim-θ-compact. Viglino's example [22] is a C-compact Hausdorff, nonregular; hence, non-rim-compact but rim-θ-compact space.

We now modify the proof of Theorem 3 in [13] in order to obtain the following proposition.

Theorem 3.7. *If $(Y.T)$ is rim-sK-compact and $f:(X,\tau)\to(Y,T)$ is weakly-continuous with a (I_X, sK)-closed graph, then f is continuous.*

Proof. Let $p\in X$ and $f(p)\in V\in T$. Then there exists some $W\in T$ such that $f(p)\in$ $\in W\subset V$ and $\mathrm{Fr}(W)$ is $sK(\mathrm{Fr}(W))$-compact. Clearly $f(p)\notin\mathrm{Fr}(W)$. Thus for each $y\in\mathrm{Fr}(W)$, $(p,y)\notin G(f)$. Since $G(f)$ is (I_X,sK)-closed, then ${}^*f[\mu(p)]\cap\mu_s K(y)=\emptyset$ for each $y\in\mathrm{Fr}(W)$. Consequently, ${}^*f[\mu(p)]\cap(\bigcup\{\mu_s K(y)\mid y\in\mathrm{Fr}(W)\})=\emptyset$. Hence, ${}^*f[\mu(p)]\cap{}^*(\mathrm{Fr}(W))=\emptyset$. Weak-continuity implies that ${}^*f[\mu(p)]\subset\mu_\theta(f(p))\subset$ $\subset{}^*(\mathrm{cl}_Y W)$. Therefore,

$$ {}^*f[\mu(p)]\cap{}^*(Y-W)={}^*f[\mu(p)]\cap{}^*(\mathrm{Fr}(W))=\emptyset\,. $$

Hence, ${}^*f[\mu(p)]\subset{}^*W\subset{}^*V$. Since V is an arbitrary open neighborhood of $f(p)$, then ${}^*f[\mu(p)]\subset\mu(f(p))$ and the proof is complete.

Corollary 3.7.1. *If (Y,T) is rim-θ-compact [resp. rim-α-compact] and $f:(X,\tau)\to$ $\to(Y,T)$ is weakly-continuous where $G(f)$ is stronlgy closed [resp. has property* **(P)**], *then f is continuous.*

Theorem 3.8. *Let X be (tH, rJ)-separated and $\mu_t H(p) \subset \mu_\theta(p)$ for each $p \in X$. If (X, τ) is rim-rJ-compact then for each $p \in X$, $\mu_t H(p) \subset \mu(p)$.*

Proof. Let $p \in V \in \tau$. Then there exists some $W \in \tau$ such that $p \in W \subset V$ and $\mathrm{Fr}(W)$ is $rJ((\mathrm{Fr}(W))$-compact. Now $p \notin \mathrm{Fr}(W)$ and (tH, rJ)-separation imply that for each $y \in \mathrm{Fr}(W)$, $\mu_t H(p) \cap \mu_r J(y) = \emptyset$. Thus $\mu_t H(p) \cap {}^*(\mathrm{Fr}(W)) = \emptyset$. Now $\mu_t H(p) \subset \mu_\theta(p) \subset {}^*(\mathrm{cl}_Y W)$ implies that $\mu_t H(p) \cap {}^*(Y - W) = \mu_t H(p) \cap$ $\cap\, {}^*(\mathrm{Fr}(W)) = \emptyset$. Hence $\mu_t H(p) \subset {}^*V$ implies that $\mu_t H(p) \subset \mu(p)$.

Corollary 3.8.1. *Every rim-θ-compact Urysohn [resp. rim-α-compact Hausdorff, rim-S-compact weakly-Hausdorff extremally disconnected] space is regular. Every rim-S-compact weakly-Hausdorff space is semiregular.*

Proof. A space is regular iff for each $p \in X$, $\mu(p) = \mu_\theta(p)$. A space is Urysohn iff it is (θ, θ)-separated. If X is weakly-Hausdorff, then it is (α, S)-separated. Also, in general, a weakly-Hausdorff extremally disconnect space is a Urysohn space such that for each $p \in X$, $\mu_\theta(p) = \mu\, S(p)$.

References

[1] *S. Crossley* and *S. Hildebrand:* Semi-topological properties, Fund. Math. *74* (1972), 233 to 254.

[2] *S. Fomin:* Extensions of topological spaces, Ann. Math. *44* (1943), 471—480.

[3] *A. J. D'Aristotle:* On the extension of mappings in Stone Weierstrass spaces, Trans. Amer. Math. Soc. *208* (1975), 91—101.

[4] *G. Gross* and *G. Viglino:* C-compact and functionally compact spaces, Pacific J. Mat. *37* (1971), 677—681.

[5] *L. Herrington* and *P. Long:* Characterizations of H-closed spaces, Proc. Amer. Math. Soc. *48* (1975), 469—475.

[6] *R. A. Herrmann:* A note on weakly-θ-continuous extensions, Glasnik Mat. *10* (1975), 329 to 336.

[7] *R. A. Herrmann:* The Q-topology, Whyburn type filters and the cluster set map, Proc. Amer. Math. Soc. *59* (1976), 161—166.

[8] *R. A. Herrmann:* A nonstandard generalization for perfect maps, Z. Math. Logik Grundlagen Math. *23* (3) (1977), 223—236.

[9] *R. A. Herrmann:* The productivity of generalized perfect maps, J. Indian Math. Soc. *41* (1977), 315—386.

[10] *R. A. Herrmann:* Point monads and P-closed spaces, Notre Dame J. Logic, *20* (1979), 395—400.

[11] *P. Kostyrko:* A note on the functions with closed graphs, Časopis Pěst. Mat. *94* (1969), 202—205.

[12] *M. Machover* and *J. Hirschfeld:* Lectures on non-standard analysis, Lecture Notes in Math., Vol. 94, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[13] *T. Noiri:* Weak-continuity and closed graphs, Časopis Pěst. Mat. *101* (1976), 379—382.

[14] *J. Porter* and *J. Thomas:* On H-closed and minimal Hausdorff spaces, Trans. Amer. Math. Soc. *138* (1969), 159—170.

[15] *C. Puritz:* Quasimonad spaces: a nonstandard approach to convergence, Proc. London Math. Soc. *32* (1976), 230—250.

[16] *A. Robinson:* Non-Standard Analysis, North-Holland, Amsterdam, 1966.
[17] *M. K. Singal* and *S. P. Arya:* On almost-regular spaces, Glasnik Mat. *4* (1969), 89—99.
[18] *M. K. Singal* and *A. Mathur:* On nearly-compact spaces, Boll. Un. Mat. Ita. (4) *2* (1969), 702—710.
[19] *M. K. Singal* and *A. R. Singal:* On almost-continuous mappings, Yokohama Math. J. *16* (1968), 63—73.
[20] *T. Soundararajan:* Weakly Hausdorff spaces and the cardinality of topological spaces, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra III (Proc. Conf. Kanpur, 1968) Academia, Prague, 1971.
[21] *T. Thompson:* *S*-closed spaces, Proc. Amer. Math. Soc. *60* (1976), 335—338.
[22] *G. Viglino:* *C*-compact spaces, Duke Math. J. *36* (1969), 761—764.

Author's address: Mathematics Department, U.S. Naval Academy, Annapolis, Maryland 21402, U.S.A.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

THE HEAT AND ADJOINT HEAT POTENTIALS

MIROSLAV DONT, Praha

(Received November 17, 1977)

Let G stand for the fundamental solution of the heat equation in R^{n+1}, i.e.

$$G(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(- \frac{|x|^2}{4t} \right) \quad \text{for} \quad x \in R^n\,, \quad t > 0\,,$$

$$G(x, t) = 0 \quad \text{for} \quad x \in R^n\,, \quad t \leqq 0\,.$$

By the term measure we mean a finite Borel measure with compact support in R^m. If μ is a measure in R^{n+1}, the heat potential G is defined by the equality

$$G_\mu(x, t) = \int_{R^{n+1}} G(x - \xi, t - \tau) \, d\mu(\xi, \tau)\,.$$

Similarly one can define the adjoint heat potential G_μ^* by

$$G_\mu^*(x, t) = \int_{R^{n+1}} G^*(x - \xi, t - \tau) \, d\mu(\xi, \tau)\,,$$

where G^* is the fundamental solution of the adjoint heat equation; $G^*(x, t) = G(x, -t)$.

Let μ be a measure in R^{n+1}. It is known (see [1], [3], [4]) that for $\alpha \in (0, 1)$ the condition

$$(1) \qquad \sup \{ |G_\mu(x_1, t_1) - G_\mu(x_2, t_2)|\,; \; x_1, x_2 \in R^n, |x_1 - x_2| \leqq \varepsilon, |t_1 - t_2| \leqq \varepsilon^2 \} \leqq K\varepsilon^\alpha$$

(i.e. G_μ is a Hölder-continuous function with the coefficient α in the variable x and the coefficient $\frac{1}{2}\alpha$ in the variable t) is fulfilled if and only if the condition

$$(2) \quad \sup \{ \mu(\{(x, t) \in R^{n+1};\ |x - \xi| \leqq \varepsilon,\ |\tau - t| \leqq \varepsilon^2\});\ (\xi, \tau) \in R^{n+1} \} \leqq M\varepsilon^{n+\alpha}$$

holds. As the condition (2) is "symmetric in the variable t", an analogous condition to (1) is fulfilled for the adjoint heat potential G_μ^* if and only if (2) holds. It is seen from this that the potential G_μ^* is a Hölder-continuous function with the coefficient α in the variable x and with the coefficient $\frac{1}{2}\alpha$ in the variable t if and only if the potential G_μ possesses the same property. We will show that the assumption $\alpha > 0$ is essential. It holds (see [3], [4]) that the potential G_μ is uniformly continuous on R^{n+1} if and only if the condition

$$(3) \qquad \lim_{a\to\infty}\left(\sup\left\{\int_a^\infty \mu(A(x,t,c))\,\mathrm{d}c;\ (x,t)\in R^{n+1}\right\}\right) = 0$$

is fulfilled, where

$$A(x,t,c) = \{(\xi,\tau)\in R^{n+1};\ G(x-\xi,\ t-\tau) > c\} \quad (c>0)\,.$$

For the uniform continuity of the adjoint heat potential G_μ^* we have an analogous condition under which G_μ^* is uniformly continuous:

$$(4) \qquad \lim_{a\to\infty}\left(\sup\left\{\int_a^\infty \mu(A^*(x,t,c))\,\mathrm{d}c;\ (x,t)\in R^{n+1}\right\}\right) = 0\,,$$

where

$$A^*(x,t,c) = \{(\xi,\tau)\,R^{n+1};\ G^*(x-\xi,\ t-\tau) > c\} \quad (c>0)\,.$$

However, the conditions (3), (4) are not "symmetric in the variable t" which raises the following question: are the conditions (3), (4) equivalent to each other, or in other words, is it right that the potential G_μ^* is uniformly continuous if and only if the potential G_μ is? The following example shows that the answer to that question is negative.

If a measure μ in R^{n+1} is of the form $\mu = \delta_{x_0}\otimes\lambda$, where $x_0\in R^n$ (δ_{x_0} is a Dirac measure in R^n), λ is a measure on R^1, then the conditions (3), (4) are reduced to the conditions

$$(3') \qquad \lim_{a\to\infty}\left(\sup\left\{\int_a^\infty \lambda\left(\left\langle t-\frac{1}{4\pi}c^{-2/n},\ t\right\rangle\right)\mathrm{d}c;\ t\in R^1\right\}\right) = 0\,,$$

$$(4') \qquad \lim_{a\to\infty}\left(\sup\left\{\int_a^\infty \lambda\left(\left\langle t,\ t+\frac{1}{4\pi}c^{-2/n}\right\rangle\right)\mathrm{d}c;\ t\in R^1\right\}\right) = 0$$

(cf. [4]).

Let us now consider the case $n = 1$. Let λ be a measure on R^1 with its support $\operatorname{supp}\lambda = \langle 0, \mathrm{e}^{-1}\rangle$, which is defined by the density h (with respect to the Lebesgue measure):

$$h(t) = \frac{-1}{\sqrt{(t)}\ln t}\,, \qquad t\in(0,\mathrm{e}^{-1})\,,$$

$h(t) = 0$ for $t\in R^1 - (0,\mathrm{e}^{-1})$. First let us show that for each $a > 0$

$$\int_a^\infty \lambda\left(\left\langle 0,\frac{1}{4\pi}c^{-2}\right\rangle\right)\mathrm{d}c = +\infty\,,$$

i.e. the condition (4′) (for $n = 1$) is not fulfilled. Let $a > \frac{1}{2}\sqrt{(e/\pi)}$. Then

$$\int_a^\infty \lambda\left(\left\langle 0, \frac{1}{4\pi} c^{-2}\right\rangle\right) \mathrm{d}c = -\int_0^{(1/4\pi)c^{-2}} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t)} \ln t}\right) \mathrm{d}c =$$

$$= -\int_0^{(1/4\pi)a^{-2}} \mathrm{d}t \int_a^{(1/2)(\pi t)^{-1/2}} \frac{\mathrm{d}c}{\sqrt{(t)} \ln t} = \int_0^{(1/4\pi)a^{-2}} \left(\frac{a}{\sqrt{(t)} \ln t} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\sqrt{(\pi)}\, t \ln t}\right) \mathrm{d}t = +\infty$$

since

$$\left|\int_0^{(1/4\pi)a^{-2}} \frac{a}{\sqrt{(t)} \ln t} \mathrm{d}t\right| < +\infty\,, \quad -\int_0^{(1/4\pi)a^{-2}} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{(\pi)}\, t \ln t} = +\infty\,.$$

Note that if μ is a measure in R^2 which is, for instance, of the form $\mu = \delta_0 \otimes \lambda$ (δ_0 is the Dirac measure in R^1 supported by the point 0), then one can even calculate the value

$$G_\mu^*(0,0) = \int_{R^2} G^*(-\xi, -\tau)\, \mathrm{d}\mu(\xi, \tau) = \int_0^{e^{-1}} G^*(0, -\tau)\, h(\tau)\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= -\int_0^{e^{-1}} \frac{1}{2\sqrt{(\pi\tau)}} \frac{1}{\sqrt{(\tau)} \ln \tau} \mathrm{d}\tau = +\infty\,.$$

Now let us prove that the condition (3′) (for $n = 1$) is fulfilled, i.e. for $\mu = \delta_0 \otimes \lambda$ the potential G_μ is uniformly continuous on R^2. It is obvious that it suffices to show that

$$\text{(3″)} \qquad \lim_{a \to \infty} \left(\sup\left\{\int_a^\infty \lambda\left(\left\langle t - \frac{1}{4\pi} c^{-2}, t\right\rangle\right) \mathrm{d}c;\ t \in \langle 0, e^{-1}\rangle\right\}\right) = 0$$

as (for any $c > 0$)

$$\lambda\left(\left\langle t - \frac{1}{4\pi} c^{-2}, t\right\rangle\right) = 0 \quad \text{for} \quad t \leqq 0\,,$$

$$\lambda\left(\left\langle t - \frac{1}{4\pi} c^{-2}, t\right\rangle\right) \leqq \lambda\left(\left\langle e^{-1} - \frac{1}{4\pi} c^{-2}, e^{-1}\right\rangle\right) \quad \text{for} \quad t \geqq e^{-1}\,.$$

Let $t \in (0, e^{-1}\rangle$. In order to calculate the value $\lambda(\langle t - (1/4\pi)\, c^{-2}, t\rangle)$ let us distinguish the following two cases:

$$\text{a)} \quad t - \frac{1}{4\pi} c^{-2} < 0 \quad (\text{i.e. } c < \tfrac{1}{2}(\pi t)^{-1/2})\,,$$

$$\text{b)} \quad t - \frac{1}{4\pi} c^{-2} \geqq 0 \quad (\text{i.e. } c \geqq \tfrac{1}{2}(\pi t)^{-1/2})\,.$$

In the case a) we have

$$\lambda\left(\left\langle t - \frac{1}{4\pi} c^{-2}, t\right\rangle\right) = -\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau)} \ln \tau}$$

and in the case b)

$$\lambda\left(\left\langle t - \frac{1}{4\pi} c^{-2}, t\right\rangle\right) = -\int_{t-(1/4\pi)c^{-2}}^t \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau)} \ln \tau}.$$

Thus

$$(5) \qquad \int_a^\infty \lambda\left(\left\langle t - \frac{1}{4\pi} c^{-2}, t\right\rangle\right) dc = -\int_a^{(1/2)(\pi t)^{-1/2}} dc \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau)} \ln \tau} -$$

$$-\int_{(1/2)(\pi t)^{-1/2}}^\infty dc \int_{t-(1/4\pi)c^{-2}}^t \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau)} \ln \tau} = I_1 + I_2$$

for $a < \frac{1}{2}(\pi t)^{-1/2}$. In the case $a \geqq \frac{1}{2}(\pi t)^{-1/2}$ we have

$$(6) \qquad \int_a^\infty \lambda\left(\left\langle t - \frac{1}{4\pi} c^{-2}, t\right\rangle\right) dc = -\int_a^\infty dc \int_{t-(1/4\pi)c^{-2}}^t \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau)} \ln \tau} = I_3 .$$

The integral I_1 is evidently finite. The integrals I_2, I_3 are also finite, since

$$(7) \qquad \left|\int_{t-(1/4\pi)c^{-2}}^t \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau)} \ln \tau}\right| \leqq \frac{1}{|\ln t|} \int_{t-(1/4\pi)c^{-2}}^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} =$$

$$= \frac{2}{|\ln t|}\left(\sqrt{t} - \sqrt{\left(t - \frac{1}{4\pi} c^{-2}\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi c^2} \frac{1}{|\ln t|\left(\sqrt{(t)} + \sqrt{\left(t - \frac{1}{4\pi} c^{-2}\right)}\right)} \leqq \frac{1}{c^2} \frac{1}{2\pi |\ln t| \sqrt{t}} .$$

It is easily seen that for a fixed $a > 0$ the function

$$f_a(t) = \int_a^\infty \lambda\left(\left\langle t - \frac{1}{4\pi} c^{-2}, t\right\rangle\right) dc$$

is continuous on the interval $(0, e^{-1}\rangle$. Since the integral I_3 is finite, it holds for each $t \in (0, e^{-1}\rangle$ that

$$(8) \qquad f_a(t) \to 0 \quad \text{for} \quad a \to +\infty$$

monotonically. Let us show that for each $a > 0$

$$(9) \qquad \lim_{t \to 0+} f_a(t) = 0 .$$

It holds

$$\left|\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau)}\ln\tau}\right| \leqq \frac{1}{|ln\ t|}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = 2\,\frac{\sqrt{t}}{|ln\ t|}$$

and hence

$$(10)\qquad |I_1| = \left|\int_a^{(1/2)(\pi t)^{-1/2}} dc \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau)}\ln\tau}\right| \leqq \int_a^{(1/2)(\pi t)^{-1/2}} \frac{2\sqrt{t}}{|ln\ t|}\, dc =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\pi)}\,|\ln t|} - \frac{2a\sqrt{t}}{|\ln t|} \to 0 \quad \text{for} \quad t \to 0+\,.$$

We obtain from (7) that

$$(11)\qquad |I_2| \leqq \frac{1}{2\pi|\ln t|\sqrt{t}}\int_{1/2(\pi t)^{-1/2}}^{\infty} \frac{dc}{c^2} = \frac{1}{2\pi|\ln t|\sqrt{t}}\,2\sqrt{(\pi t)} \to 0$$

for $t \to 0+$. (9) follows from (10) and (11). Since $f_a(t) \to 0$ monotonically for $a \to +\infty$ and since the functions f_a are continuous, it is seen from Dini's theorem that $f_a(t) \to 0$ for $a \to +\infty$ uniformly on the interval $\langle 0, e^{-1} \rangle$. Thus we see that the condition (3″) is fulfilled and the potential G_μ (where $\mu = \delta_0 \otimes \lambda$) is uniformly continuous on R^2.

References

[1] *J. Král:* Hölder-continuous heat potentials, Accad. Nazionale dei Lincei, Rend. Cl. di Sc. fis., mat. e nat., Ser. VIII, vol. *LI* (1971), 17–19.

[2] *J. Král:* Removable singularities of solutions of semielliptic equations, Rendiconti di Mat. (4) vol. *6* (1973), Ser. VI, 1–21.

[3] *S. Mrzena:* Spojitost tepelných potenciálů (Continuity of heat potentials), Thesis 1974.

[4] *S. Mrzena:* Continuity of heat potentials (to appear).

Author's address: 166 27 Praha 6 - Dejvice, Suchbátarova 2 (katedra matematiky FEL ČVUT).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

ON THE EXISTENCE OF A 3-FACTOR IN THE FOURTH POWER OF A GRAPH

LADISLAV NEBESKÝ, Praha

(Received December 9, 1977)

Let G be a graph in the sense of [1] or [2]. We denote by $V(G)$ and $E(G)$ its vertex set and edge set, respectively. The cardinality $|V(G)|$ of $V(G)$ is referred to as the order of G. If W is a nonempty subset of $V(G)$, then we denote by $\langle W \rangle_G$ the subgraph of G induced by W. A regular graph of degree m which is a spanning subgraph of G is called an m-factor of G. It is well-known if G has an m-factor for some odd m, then the order of G is even. If n is a positive integer, then by the n-th power G^n of G we mean the graph G' with the properties that $V(G') = V(G)$ and

$$E(G') = \{uv;\, u, v \in V(G) \text{ such that } 1 \leqq d(u, v) \leqq n\}\,,$$

where $d(w_1, w_2)$ denotes the distance of vertices w_1 and w_2 in G.

CHARTRAND, POLIMENI and STEWART [2], and SUMNER [5] proved that if G is a connected graph of even order, then G^2 has a 1-factor.

The second power of none of the connected graphs in Fig. 1 has a 2-factor. But if G is a connected graph of an order $p \geqq 3$, then G^3 has a 2-factor; this follows from a theorem due to SEKANINA [4], which asserts that the third power of any connected graph is hamiltonian connected.

The third power of none of the connected graphs of even order which are given in Fig. 2 has a 3-factor. But for the fourth power the situation is different:

Theorem. *Let G be a connected graph of an even order $p \geqq 4$. Then G^4 has a 3-factor, each component of which is either K_4 or $K_2 \times K_3$.*

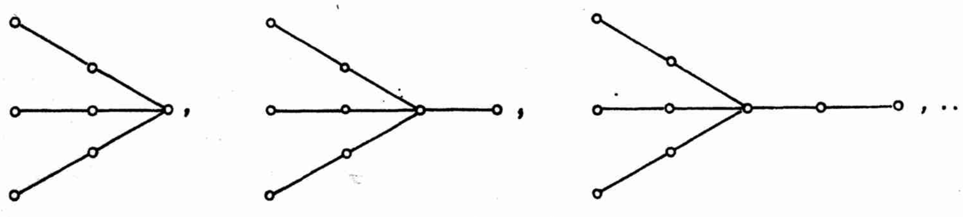


Fig. 1.

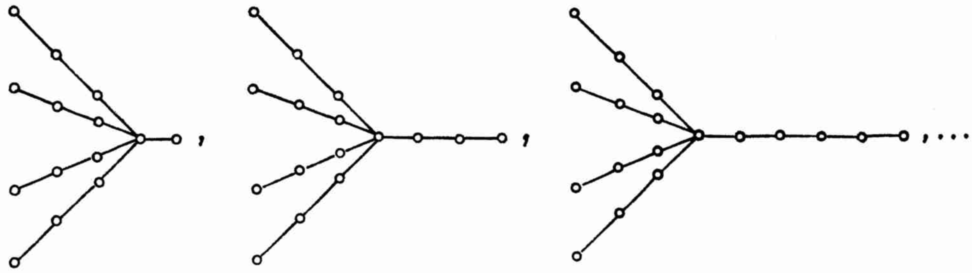


Fig. 2.

Note that K_n denotes the complete graph of order n, and $K_2 \times K_3$ denotes the product of K_2 and K_3 (see Fig. 3).

Before proving the theorem we establish one lemma. Let T be a nontrivial tree. Consider adjacent vertices u and v. Obviously, $T - uv$ has exactly two components, say T_1 and T_2. Without loss of generality we assume that $u \in V(T_1)$ and $v \in V(T_2)$. Denote $V(T, u, v) = V(T_1)$ and $V(T, v, u) = V(T_2)$.

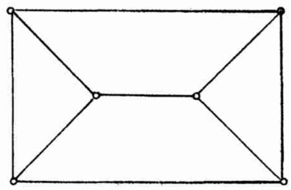


Fig. 3.

Lemma. *Let T be a tree of an order $p \geqq 5$. Then there exist adjacent vertices u and v such that*

(i) $|V(T, u, v)| \geqq 4$ *and*

(ii) $|V(T, w, u)| \leqq 3$ *for every vertex $w \neq v$ such that $uw \in E(T)$.*

Proof of the lemma. Assume that to every pair of adjacent vertices u and v such that $|V(T, u, v)| \geqq 4$, there exists a vertex $w \neq v$ such that $uw \in E(T)$ and $|V(T, w, u)| \geqq 4$. Since $p \geqq 5$, it is possible to find an infinite sequence of vertices $v_0, v_1, v_2, \ldots$ in T such that

(a) v_0 has degree one;

(b) $v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, \ldots \in E(T)$;

(c) $v_2 \neq v_0$, $v_3 \neq v_1$, $v_4 \neq v_2, \ldots$; and

(d) $|V(T, v_1, v_0)| \geqq 4$, $|V(T, v_2, v_1)| \geqq 4$, $|V(T, v_3, v_2)| \geqq 4, \ldots$

Since T is a tree, (b) and (c) imply that the vertices $v_0, v_1, v_2, \ldots$ are mutually different, which is a contradiction. Hence the lemma follows.

Proof of the theorem. Since G is connected, it contains a spanning tree, say T.

First, let $p = 4$, 6, or 8. If $p = 4$, then $G^4 = T^4 = K_4$.

Let $p = 6$. Then T is isomorphic to one of the six trees of order six (see the list in [3], p. 233). It is easy to see that T^4 and therefore G^4 contains a 3-factor isomorphic to $K_2 \times K_3$.

Let $p = 8$. By Lemma there exist adjacent vertices u and v of T such that (i) and (ii) hold. If $|V(T, u, v)| = 4$, then T^4 (and therefore G^4) contains a 3-factor which consists of two disjoint copies of K_4. Let $|V(T, u, v)| \geqq 5$. Since $p = 8$, we have $|V(T, w, u)| \leqq 3$ for every vertex w adjacent to u, $w \neq v$. Then there exists a set R of two, three, or four vertices adjacent to u such that

$$\langle \bigcup_{r \in R} V(T, r, u) \rangle_T$$

is isomorphic to one of the graphs $F_1 - F_4$ in Fig. 4. Denote

$$V_R = \bigcup_{r \in R} V(T, r, u) .$$

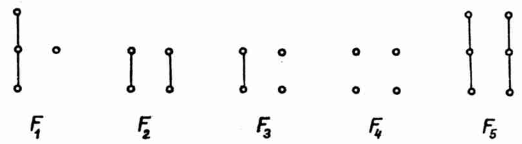


Fig .4.

It is clear that $\langle V_R \rangle_{T^4} = K_4$. Since $T - V_R$ is a tree of order four, we conclude that G^4 has a 3-factor which consists of two disjoint copies of K_4.

Next, let $p \geqq 10$. Assume that for every connected graph G' of order $p - 6$ or $p - 4$ we have proved that $(G')^4$ has a 3-factor, each component of which is either K_4 or $K_2 \times K_3$. By Lemma there exist adjacent vertices u and v of T such that (i) and (ii) hold. Let $|V(T, u, v)| = 4$ or 6; then $\langle V(T, u, v) \rangle_{T^4}$ contains a 3-factor isomorphic to either K_4 or $K_2 \times K_3$; since $G - V(T, u, v)$ is connected, by the induction assumption $(G - V(T, u, v))^4$ has a 3-factor, each component of which is either K_4 or $K_2 \times K_3$; hence G^4 has a 3-factor with the required property. Now, let either $|V(T, u, v)| = 5$ or $|V(T, u, v)| \geqq 7$. Then there exists a set S of two, three, or four vertices adjacent to u such that

$$\langle \bigcup_{s \in S} V(T, s, u) \rangle_T$$

is isomorphic to one of the graphs $F_1 - F_5$ in Fig. 4. Denote

$$V_S = \bigcup_{s \in S} V(T, s, u) .$$

Since $T - V_S$ is a tree, we conclude that $G - V_S$ is a connected graph. According to the induction assumption $(G - V_S)^4$ has a 3-factor, each component of which is either K_4 or $K_2 \times K_3$. Obviously, $|V_S| = 4$ or 6. If $|V_S| = 4$, then $\langle V_S \rangle_{T^4} = K_4$. If $|V_S| = 6$, then it is not difficult to see that $\langle V_S \rangle_{T^4}$ contains a 3-factor which is isomorphic to $K_2 \times K_3$. This implies that G^4 has a 3-factor with the required propertty, which completes the proof.

Corollary. *Let G be a connected graph of an even order $\geqq 4$. Then G^4 contains at least three edge-disjoint 1-factors.*

References

[1] *M. Behzad* and *G. Chartrand:* Introduction to the Theory of Graphs. Allyn and Bacon, Boston 1971.

[2] *G. Chartrand, A. D. Polimeni* and *M. J. Stewart:* The existence of 1-factors in line graphs, squares, and total graphs. Indagationes Math. *35* (1973), 228—232.

[3] *F. Harary:* Graph Theory. Addison-Wesley, Reading (Mass.) 1969.

[4] *M. Sekanina:* On an ordering of the set of vertices of a connected graph. Publ. Sci. Univ. Brno 412 (1960), 137—142.

[5] *D. P. Sumner:* Graphs with 1-factors. Proc. Amer. Math. Soc. *42* (1974), 8—12.

Author's address: 116 38 Praha 1, nám. Krasnoarmějců 2 (Filosofická fakulta University Karlovy).

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

MIROSLAV SOVA, Praha: *Relation between real and complex properties of the Laplace transform.* (Vztah mezi reálnými a komplexními vlastnostmi Laplaceovy transformace.)

V článku jsou udány nutné a postačující podmínky existence Laplaceových vzorů, založené na chování v komplexní polorovině; tyto podmínky neobsahují vyšší derivace.

ZDENĚK VANČURA, Praha: *Adjunktionsfähige zweidimensionale Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen Euklidischen Raum.* (Adjungovatelné dvourozměrné kulové a přímkové plochy v trojrozměrném euklidovském prostoru.)

V předloženém článku, který těsně souvisí s předcházejícími pracemi autora v diferenciální geometrii dvourozměrných kulových a přímkových ploch v trojrozměrném prostoru, je uveden pokus o účelnou definici pojmu adjungovatelných příp. neadjungovatelných dvourozměrných kulových a přímkových ploch v trojrozměrném euklidovském prostoru a jeho soustavné vyšetřování.

JIŘÍ MATYSKA, Praha: *An example of removable singularities for bounded holomorphic functions.* (Příklad odstranitelných singularit pro ohraničené holomorfní funkce.)

V článku je sestrojena funkce $f: \langle 0,1\rangle \to R$, která splňuje Hölderovu podmínku pro každé $\alpha < 1$ taková, že na grafu funkce f leží množina kladné délky a nulové analytické kapacity.

JIŘÍ HNILICA, Praha: *Der verallgemeinerte Ljapunovsche Oszillationssatz.* (Zobecnění Ljapunovovy oscilační věty.)

Článek se zabývá studiem homogenní zobecněné diferenciální rovnice s periodickými koeficienty (H) $dx = d[A_\lambda]\, x$, kde $x = (x_1, x_2)^*$ je vektorová funkce a $A_\lambda(s)$ je matice typu 2×2,

$$A_\lambda(s) = \begin{pmatrix} 0, & s \\ \lambda\, \Phi(s), & 0 \end{pmatrix}.$$

Funkce Φ je reálná funkce s lokálně konečnou variací v celém intervalu $(-\infty, +\infty)$ a λ je komplexní parametr. V článku je dokázáno, že pro rovnici (H) platí zobecnění tzv. Ljapunovovy oscilační věty, která v plné míře charakterizuje chování řešení rovnice (H) v závislosti na parametru λ.

PAVEL DRÁBEK, Plzeň: *Ranges of a-homogeneous operators and their perturbations.* (Obory hodnot a-homogenních operátorů a jejich perturbací.)

V článku se zkoumá existence řešení okrajové úlohy $-(|u'(t)|^{p-2}\, u'(t))' - \mu|u^+(t)|^{p-2} \,.\, u^+(t) + \nu|u^-(t)|^{p-2}\, u^-(t) + g(t, u(t)) = f(t)$, $u(0) = u(\pi) = 0$ na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ v závislosti na reálných parametrech μ, ν, kde $p \geqq 2$ je reálné číslo, g je reálná funkce definovaná na $\langle 0, \pi\rangle \times \mathbf{R}^1$ (symbol $\mathbf{R}^1$ značí množinu všech reálných čísel) a reálná funkce f je definovaná na $\langle 0, \pi\rangle$.

Funkce u^+ a u^- jsou definovány takto: $u^+(t) = \max\{u(t), 0\}$, $u^-(t) = \max\{-u(t), 0\}$. Ve druhé části jsou shrnuty výsledky obsažené v článku J. Garnetta. Ve třetí části jsou tyto výsledky aplikovány na okrajové problémy pro nelineární Sturmovu-Liouvilleovu rovnici druhého řádu a pro jistý typ parciálních diferenciálních rovnic. V poslední části se studuje řešitelnost okrajové úlohy pro nelineární Sturmovu-Liouvilleovu rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty na parametrech μ a ν. Užívá se zde vlastností Lerayova-Schauderova stupně zobrazení a metod klasické matematické analýzy (metoda střelby).

JOSEF KRÁL a STANISLAV MRZENA, Praha: *Heat sources and heat potentieals.* (Tepelné zdroje a tepelné potenciály.)

Nechť ν je borelovská míra s kompaktním nosičem v R^m. Vyšetřují se nutné a postačující podmínky zaručující existenci takové netriviální míry ϱ v R^1, pro niž je tepelný potenciál míry $\nu \otimes \varrho$ v R^{m+1} spojitý popř. hölderovsky spojitý.

MIROSLAV DONT, Praha: *The heat and adjoint heat potentials.* (Tepelné a adjungované tepelné potenciály.)

V této poznámce je ukázána existence konečné míry s kompaktním nosičem v R^2, která má spojitý tepelný potenciál v R^2, ale její adjungovaný tepelný potenciál je nespojitý.

LADISLAV NEBESKÝ, Praha: *On the existence of a 3-factor in the fourth power of a graph.* (O existenci pravidelného faktoru třetího stupně v čtvrté mocnině grafu.)

Dokazuje se tato věta: Je-li G souvislý graf o sudém počtu uzlů $\geqq 4$, potom G^4 obsahuje pravidelný faktor třetího stupně, jehož každá komponenta je buď K_4 nebo $K_2 \times K_3$ (kde K_n označuje úplný graf o n uzlech a $K_2 \times K_3$ značí produkt grafů K_2 a K_3). Z věty plyne tento důsledek: Je-li G souvislý graf o sudém počtu uzlů $\geqq 4$, potom G^4 obsahuje alespoň tři hranově disjunktní lineární faktory.

RECENSE

A. N. Shiryayev: OPTIMAL STOPPING RULES. 8. svazek edice Applications of Mathematics. Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin 1978, X + 217 stran, DM 54,—.

Kniha je další ze série anglických překladů prací sovětských matematiků, které vycházejí v nakladatelství Springer-Verlag. Její originál s názvem *Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки* vyšel v roce 1969 a v upravené versi v roce 1976 v nakladatelství Nauka. Recensované vydání se poněkud liší od původního. Autor využil příležitosti a přepracoval některé části knihy v tom smyslu, že je zjednodušil a zařadil nejnovější výsledky. Úpravy se týkají zejména kapitoly 3, ve které byly aplikovány nové poznatky z teorie markovských procesů a martingalů. Také v kapitole 2 jsou využity poslední výsledky a jsou tak zkráceny a zjednodušeny důkazy některých vět a lemmat.

Kniha se zabývá obecnou teorií pravidel optimálního zastavení markovského procesu, jak pro diskrétní, tak pro spojitý čas. Pomocí této teorie lze řešit následující dva problémy. Problém optimálního výběru, kdy z n prvků s nějakou společnou vlastností, které tvoří náhodnou posloupnost, máme srovnáním vybrat ten nejlepší a problém přerušení, který lze zjednodušeně popsat následovně. Nabývá-li náhodná veličina X hodnot $0, 1, \ldots$ a pozorování $Y_1, Y_2, \ldots$ jsou taková, že pro $X = n$ jsou $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ nezávislé a stejně rozložené náhodné veličiny s distribuční funkcí F_0 a $Y_n, Y_{n+1}, \ldots$ jsou také nezávislé a stejně rozložené náhodné veličiny s distribuční funkcí $F_1 \not\equiv F_0$, pak řešení problému spočívá v určení časového okamžiku změny distribuční funkce na základě pozorování $Y_1, Y_2, \ldots$

Obsah knihy je rozdělen do 4 kapitol.

První obsahuje výčet vět a definic z teorie pravděpodobnosti, které tvoří základ prezentované teorie. Od základních definic teorie pravděpodobnosti se přes markovské časy a k nim příslušné systémy σ-algeber přejde k teorii markovských procesů a martingalů.

V kapitole 2 je formulován studovaný problém a je uvedeno jeho řešení pro případ markovských posloupností. Je-li $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ markovská posloupnost, pak při jejím zastavení v čase n obdržíme výnos $g(X_n)$. Průměrný výnos odpovídající počátečnímu stavu x udává střední hodnota $\mathsf{E}_x\, g(X_n)$. Je-li τ náhodný časový okamžik, pak k němu lze přiřadit průměrný výnos $\mathsf{E}_x\, g(X_\tau)$. Vyšetřuje se funkce $s(x) = \sup_\tau \mathsf{E}_x\, g(X_\tau)$ a náhodné časy τ_ε (ε-optimální strategie ($\varepsilon \geqq 0$)), pro které platí $s(x) \leqq \mathsf{E}_x\, g(X_\tau) + \varepsilon$ pro všechna x. Hledá se zejména struktura funkce $s(x)$ a τ_ε, způsob, jak lze $s(x)$ nalézt a podmínky, za kterých splývají ε-optimální strategie ($\varepsilon > 0$) a 0-optimální strategie. Jeden paragraf této kapitoly je věnován příkladům (celkem je jich 8), které ilustrují teorii a ukazují, že některé podmínky uvedených vět nelze zeslabit.

Kapitola 3 se zabývá stejným problémem jako předchozí, ale pro markovské procesy se spojitým časem. Většina výsledků je alespoň formálně podobná odpovídajícím výsledkům pro diskrétní čas.

Poslední kapitola je věnována aplikacím výsledků kapitol 2 a 3 na problémy statistické sekvenční analýzy v případě spojitého a diskrétního času. V prvé části této závěrečné kapitoly je řešen problém sekvenčního testování dvou jednoduchých hypotéz. Zbývající část této kapitoly pak obsahuje řešení problému detekce časového okamžiku změny pravděpodobnostního charakteru sledovaného procesu.

Kniha je doplněna rejstříkem a poměrně rozsáhlým přehledem knižní literatury. Na konci každé kapitoly je odstavec věnovaný přehledu nejnovější literatury z časopisů, včetně historických a dalších poznámek, sloužících k získání obecného přehledu v dané problematice.

Kniha je napsána srozumitelným slohem a poměrně podrobně, avšak k jejímu pochopení jsou třeba hlubší znalosti z teorie pravděpodobnosti, znalost teorie martingalů, markovských procesů a časů, i když potřebný materiál je v počáteční kapitole zhuštěně uveden. Dílo lze doporučit všem zájemcům o teorii optimálního řízení a statistických sekvenčních metod. Vzhledem k poměrně složitému označení a logické výstavbě textu je obtížné studovat pouze jednotlivé kapitoly.

Věra Lánská, Praha

Werner Greub, MULTILINEAR ALGEBRA, 2nd Edition, ve sbírce Universitext, Springer Verlag, New York—Heidelberg—Berlin, 8 + 294 stran, cena DM 43.—.

Každému vysokoškolskému učiteli, který je ve svých přednáškách postaven před úkol v krátkém čase podat základní informace o tensorových součinech prostorů a zobrazení, je známo, jaké potíže spíše pojmové povahy a technické komplikace zápisu to představuje. Velmi pěkný výklad základních pojmů a výsledků této teorie představuje předložená kniha W. Greuba, která vychází nyní v druhém vydání. Kniha navazuje na autorovu učebnici lineární algebry, do které čtenář bude musit občas nahlédnout, již k vůli označení. Výklad je hluboce promyšlen a přes svoji stručnost snadno srozumitelný. Dokonalé proniknutí do podávané látky umožňuje velká řada dobře volených cvičení. Prvních pět kapitol, které obsahují základní materiál, zůstává v novém vydání bez podstatných změn, rozšířena byla kapitola šestá a přidány nové výsledky o Cliffordových algebrách. Kniha je vzorně vytištěna a přehledně upravena.

Vlastimil Pták, Praha

Irving E. Segal, Ray A. Kunze: INTEGRALS AND OPERATORS. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 228.) Second revised and enlarged edition. Springer Verlag Berlin—Heidelberg—New York 1978, XIV + 371 stran, cena DM 74,—.

V roce 1968 vyšla tato kniha poprvé v nakladatelství McGraw-Hill. Tím, že druhé rozšířené vydání zařadilo nakladatelství Springer do své proslulé řady základních matematických děl, je dostatečně vyjádřena mimořádná úroveň knihy.

Jak napovídá název knihy, jde o výklad teorie integrálu a o funkcionální analýzu. Daniellův postup výstavby integrálu spolu s obecnými topologickými myšlenkami vede k širokému pojetí integrálu a nezatíží čtenáře technickými podrobnostmi. Tím je autorům umožněno úsporně vyložit také hlavní příklady topologických prostorů a jejich duality. Jsou-li na prostoru dány grupy transformací, je přirozená cesta k vyšetřování invariantních měr. V Hilbertově prostoru se spektrální analýza redukuje v komutativním případě na teorii integrálu; to vede k výkladu spektrální teorie z hlediska integrálu. Přitom je přirozeným způsobem uvedena teorie Banachových algeber. Je rovněž probrána teorie reprezentace lokálně kompaktních grup spolu s důsledky pro neohraničené operátory.

K tomuto obsahu prvního vydání nyní autoři dodali partie o pologrupách operátorů a teorii perturbace, W^*-algebrách, C^*-algebrách a o stopách operátorů v Hilbertově prostoru. Tolik heslovitě o obsahu.

Způsobem výkladu a bohatstvím materiálu se kniha stává velmi dobrým odrazovým můstkem ke studiu abstraktní harmonické analýzy, abstraktní teorie pravděpodobnosti, lineárních diferenciálních operátorů, algeber operátorů a teorie reprezentace grup. Zvláštní pozornost zaslouží svěží styl autorů. Je minimálně zatížen technickými detaily, klade důraz na základní myšlenky, souvislosti a motivace. V knize je velké množství instruktivních cvičení.

Zainteresovanému čtenáři bude kniha velmi užitečná.

Štefan Schwabik, Praha

Jiří Nečas: GRAFY A JEJICH POUŽITÍ. Polytechnická knižnice, řada II, svazek 90. Státní nakladatelství technické literatury Praha 1978. Stran 192, cena 18 Kčs.

Rozvoj teorie grafů a jejích aplikací v poslední době si vynucuje, aby si její základy osvojovalo stále více lidí, a to nejen z řad matematiků, ale i techniků. Proto je třeba uvítat, že vyšla další česká kniha o tomto oboru. Na rozdíl od publikace J. Sedláčka, která nedávno vyšla v druhém vydání, se tato kniha zaměřuje spíše na aplikace a je tedy určena spíše čtenářstvu nematematickému, jak už naznačuje ten fakt, že vychází v Polytechnické knižnici SNTL.

V první kapitole popisuje autor základní pojmy teorie grafů. Zdárně se mu podařilo vyhnout se suchosti tohoto tématu tím, že vychází z klasických úloh (respektive hádanek), jako je úloha o třech domech a třech studních, o převozníkovi, o sedmi mostech v Královci, o labyrintu a podobně.

Druhá kapitola se zabývá rovinnými grafy. Mluví se zde o Kuratowského větě, o Eulerově vzorci a o duálních grafech, nezapomíná se ani na konvexní mnohostěny.

Pro praktické aplikace má velký význam téma třetí kapitoly — ohodnocené grafy. Popisují se zde grafy hranově ohodnocené i uzlově ohodnocené. Je vyloženo hledání minimální kostry grafu, problém listonoše, problém obchodního cestujícího a dopravní sítě. Jsou uvedeny přesné popisy příslušných algoritmů. Téma je ilustrováno řadou příkladů; tyto příklady nejsou jen z dopravy, ale ukazují aplikace příslušného tématu i při řízení výroby.

Čtvrtá kapitola se nazývá *Různá další použití grafů.* O obsahu si čtenář udělá představu podle názvů jednotlivých paragrafů: 4.1. Matematika: Binární relace, 4.2. Matematika: Permutace, 4.3. Chemie: Izoméry uhlovodíků, 4.4. Elektrotechnika: Elektrické sítě, 4.5. Sociologie: Vztahy mezi lidmi, 4.6. Jazykověda: Stavba věty a souvětí.

Poslední kapitola se nazývá *Doplňky.* První paragraf se zabývá incidenčními maticemi grafů. (Jde o matice, které se v cizí literatuře nazývají adjacenční, tedy o matice, které pro jednotlivé dvojice uzlů určují, zda jsou spojeny hranou či nikoliv. Výrazem incidenční matice se obvykle míní jiné matice, a to takové, které pro dvojice složené z uzlu a hrany určují, zda jsou tyto prvky spolu incidentní.) V druhém paragrafu se uvádí formální definice grafu (pojem grafu se v předcházejícím textu chápal pouze intuitivně) a některé další definice. Dále následují výsledky cvičení (uvedených za jednotlivými paragrafy) a dva slovníčky. Jeden z nich je výkladový (psaný formou naučného slovníku), druhý je čtyřjazyčný, který k českým termínům teorie grafů uvádí jejich ekvivalenty v ruštině, angličtině a němčině. Na konci kapitoly jsou ještě vývojové diagramy některých algoritmů.

Kniha je psána velmi přístupnou formou. Výklad je motivován jednak klasickými hádankami, jednak potřebami praktických aplikací. Klade se důraz na analogie mezi pojmy souvisícími s neorientovanými a s orientovanými grafy (cesta — dráha); popisy dvojic analogických pojmů jsou tištěny vedle sebe a odděleny svislou čarou. Text doplňuje řada úloh ke cvičení. Výhrady by snad mohly být k symbolice; graf o množině uzlů U a množině hran H se značí UH, což je poněkud nezvyklé.

Kniha bude dobrou pomůckou pro čtenáře zejména z řad techniků, kterým nejde o hluboké teoretické zvládnutí teorie grafů, ale o získání základních znalostí, které potřebují pro aplikace. Lze ji však doporučit rovněž matematikům. Pro ty, kteří se chtějí stát odborníky v teorii grafů, poslouží jako přípravná četba před započetím studia cizojazyčné literatury (Berge, Ore, Harary, Zykov apod.) a seznámí je s českou terminologií tohoto oboru.

Bohdan Zelinka, Liberec

PROCEEDINGS OF THE FOURTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUMERICAL METHODS IN FLUID DYNAMICS. Edited by Robert D. Richtmyer. Lecture Notes in Physics sv. 35. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1975. Stran 457, cena DM 37,—.

Recenzovaná publikace je sborník Čtvrté mezinárodní konference o numerických metodách v dynamice tekutin, která se konala na University of Colorado (USA) ve dnech 24.—28. června 1974. Konference navazovala na předchozí konference konané ve zhruba dvouletých intervalech v SSSR, USA a Francii. Zúčastnili se jí specialisté ze SSSR, západní Evropy a zámoří; nejpočetněji byly již tradičně zastoupeny USA, SSSR a Francie.

Sborník obsahuje dvě hlavní přednášky a 62 sdělení, převážně vědců z USA (26 sdělení). Vzhledem k velkému počtu a různorodému charakteru příspěvků není možno je na tomto místě podrobněji charakterizovat. Poznamenejme pouze, že zájem se soustřeďuje mj. na trojrozměrné úlohy (řešení Navierových-Stokesových rovnic), nadzvukové proudění, úlohy s hraniční vrstvou a modely turbulence. Pro ilustraci uvádíme názvy obou hlavních přednášek:

H. B. KELLER: *Some Computational Problems in Boundary-Layer Flows*;

H.-O. KREISS: *Initial Boundary Value Problems for Hyperbolic Partial Differential Equations*.

Vědecká sdělení jsou asi ze dvou třetin zaměřena na stručný popis numerických experimentů s novými metodami pro řešení úloh dynamiky tekutin. Zbývající třetina je věnována aplikacím numerických metod při řešení různých úloh z praxe. Popisují se např. matematické modelování průtoku pulzující krve cévami, chování plasmatu, modely rotujících hvězd, úlohy z oblasti meteorologie, ekologie a dalších vědních oborů. Autory sdělení jsou převážně pracovníci vysokých škol a výzkumných ústavů; jen malou část sdělení přednesli techničtí odborníci z průmyslových závodů.

Kniha bude užitečným zdrojem informací pro inženýry a matematiky, kteří se zabývají řešením úloh z oblasti mechaniky tekutin.

Petr Přikryl, Praha

I. A. Ibragimov, Y. A. Rozanov: GAUSSIAN RANDOM PROCESSES. Springer-Verlag 1978, New York Inc., x + 275 stran, 2 obrázky, cena DM 49,60.

Publikace je překladem ruského originálu Gaussovskije slučajnyje processy, který byl vydán nakladatelstvím Nauka v Moskvě r. 1970. K tomu, aby mohl čtenář s porozuměním sledovat text, se předpokládá zejména znalost pokročilejších partií teorie pravděpodobnosti, teorie funkcí komplexní proměnné a funkcionální analýzy.

Autoři se soustřeďují na tři okruhy problémů. První z nich se týká podmínek, za kterých pravděpodobnostní míry odpovídající gaussovskému náhodnému procesu jsou ekvivalentní. Popisují se zde výsledky J. Hájka a J. Feldmana, kteří nezávisle na sobě v r. 1958 dokázali, že tyto míry mohou být pouze ekvivalentní nebo singulární, a udali příslušné podmínky pro každou z obou variant. Ibragimov a Rozanov dávají přednost Hájkovu postupu; Feldmanův výsledek je pak jeho snadným důsledkem. (V poznámce pod čarou na str. 80 autoři konstatují, že naproti tomu důkaz navržený Feldmanem je dosti komplikovaný.)

Druhý okruh problémů se týká vyšetřování síly závislosti mezi minulostí a budoucností procesu. Zavádí se tu řada různých ukazatelů souvisejících více či méně s tzv. „strong mixing condition".

Konečně poslední část knihy se soustřeďuje na otázky kolem odhadu střední hodnoty náhodného procesu. Zavádí se obecná třída pseudonejlepších odhadů, která v sobě zahrnuje nejlepší nestranné odhady i odhady metodou nejmenších čtverců. Přitom se podařilo dosáhnout poměrně explicitních výsledků.

V knize jsou některé drobné tiskové chyby, ale ty nemohou vést k nedorozumění. Např. vzorec (5.1) na str. 55 je třeba opravit ve smyslu inklusí (5.6) na str. 58; na 5. řádku na str. 71 schází pravá závorka.

Na rozdíl od originálu je zde doplněn symbol $\square$ značící konec důkazu. Je však překvapující, že jako symbol střední hodnoty není v anglickém textu použito písmeno *E*, ale je ponecháno *M*. Za nepříjemný nedostatek vzhledem k dnešní úrovni publikací pokládám to, že nebyl pořízen rejstřík (schází i v originálu). Přehled citací na konci knihy značně klame, protože mnohé prameny jsou uváděny jen v textu jako poznámky pod čarou. Dochází také k postupnému komolení jména Jaroslava Hájka. Zatímco v ruském textu je uveden jako J. Hajek, zde na str. 77 je již vytištěno T. Hajek.

Kniha je už od svého vydání v Moskvě velmi dobře známa a ceněna mezi specialisty a mnozí z nich se ji sami zakoupili. Graficky dobře upravený anglický překlad rozšíří okruh jejích čtenářů a uživatelů, a to zejména v západních zemích.

Jiří Anděl, Praha

Sofya Kovalevskaya: A RUSSIAN CHILDHOOD. Translated, edited and introduced by Beatrice Stillman. With an Analysis of Kovalevskaya's Mathematics by P. Y. Kochina. Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin 1978. xiii + 250 str., fotografická příloha. Cena DM 33,—.

Vzpomínky na dětství S. Kovalevské vyšly poprvé ve švédštině v roce 1889. K překladu do angličtiny bylo pro recenzovanou knihu použito ruského vydání z roku 1974 (Nauka, Moskva 1974). Kromě jedenácti kapitol vzpomínek obsahuje kniha skoro padesátistránkový úvod překladatelky a editorky díla B. Stillmanové, životopisné poznámky S. Kovalevské a dvacetistránkový přehled vědeckých výsledků S. Kovalevské z pera P. J. Polubarinové-Kochinové.

Hlavní část knihy je řadou zajímavých obrázků ze života na ruském venkově v 50. a 60. letech minulého století. Autorčiny vzpomínky se týkají prvních patnácti let jejího života a nemají v podstatě žádný vztah k oboru, jenž se stal později její životní náplní a v němž tak vynikla. Z historického hlediska jsou asi nejzávažnější kapitoly o seznámení a přátelství její starší sestry a Sofie samotné se spisovatelem F. M. Dostojevským.

O dalším životě S. Kovalevské, o překážkách, které musela na své cestě k matematice překonat, o jejích vědeckých výsledcích a o jejich významu se čtenář dozví více z ostatních částí knihy, o nichž je zmínka na začátku recenze.

Jiří Jarník, Praha

Klaus Jänich: LINEARE ALGEBRA, Ein Skriptum für das erste Semester, Hochschultext. Springer-Verlag Berlin—Heidelberg—New York 1979, stran 236, 78 obr., cena neuvedena.

Co nového nebo podstatně jiného může obsahovat skriptum z lineární algebry pro první semestr vysokoškolského studia na rozdíl od mnoha předcházejících? Musí samozřejmě obsahovat základní definice z teorie vektorových prostorů, základní poznatky o lineárních zobrazeních, s tím související úvod do teorie matic a determinantů a konečně soustavy lineárních rovnic. V recenzovaném skriptu je kromě vyjmenovaných kapitol ještě obsažena stať o afinním prostoru a afinních zobrazeních, dále kapitoly o euklidovských vektorových prostorech (tj. vektorových prostorech se skalárním součinem) a o klasifikaci a vlastních hodnotách matic.

A přece se toto skriptum liší od běžných učebnic lineární algebry. V první řadě tím, že obsažená cvičení a i některé odstavce jsou speciálně určeny pro studenty matematiky, jiná pro studenty fyziky. Za každým paragrafem je test, na kterém si může čtenář ověřit, zda správně porozuměl definicím a větám, výsledky testu jsou uvedeny na konci knihy. Pěkné obrázky nakreslil sám autor a velmi poučné jsou historické poznámky k jednotlivým paragrafům, ze kterých se čtenář například dozví, že Steinitzova věta o výměně nepochází vůbec od Steinitze. Také odkazy na literaturu stojí za povšimnutí, neboť autor přímo nabádá ke studiu dalších prací a doporučuje i pořadí, v jakém je možné knihy, resp. jejich jednotlivé kapitoly probírat. Text je uveden vtipnou předmluvou, v níž prof. Jänich vyjadřuje přání, aby každému čtenáři přineslo skriptium něco užitečného: poučení, zábavu nebo útěchu.

Skriptum je vskutku čtivé, jeho studium nenudí. Není psáno systémem „definice — věta — důkaz", je proloženo mnoha poznámkami, vysvětlivkami, motivacemi. I v tomto směru je recenzovaná publikace užitečná — jako vzor autorům dalších skript a učebnic.

Leo Boček, Praha

Wilhelm Klingenberg: A COURSE IN DIFFERENTIAL GEOMETRY, Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin 1978. Stran XII + 178, 45 obr., cena DM 32,20.

Jedná se o doplněný překlad do angličtiny německého originálu, který vyšel v roce 1973 pod názvem *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie* a jehož recenze byla uveřejněna v tomto časopise v č. *100* (1975), 418.

Leo Boček, Praha

Shiing-shen Chern, SELECTED PAPERS, Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin, 1978, XXXI + 476 stran, cena DM 52,—.

S. S. Chern je jedním z nejvýznamějších geometrů naší doby a vydání jeho vybraných spisů je velmi záslužné. Chern vybral asi třetinu z celkového počtu 117-ti svých časopiseckých článků, přičemž přednost dostaly práce kratší a obtížněji dostupné. První úvodní stať napsal neformálně André Weil, který komentuje zejména léta čtyřicátá. Je příznačné, že právě Chernova osobnost inspiruje Weila k pronikavému zamyšlení nad úlohou geometrické intuice, jejíž psychologickou podstatu považuje za velmi nesnadno objasnitelnou. Od původní schopnosti jasně si představovat objekty v trojrozměrném prostoru přechází při dnešním studiu vícerozměrných prostorů v cosi částečného nebo symbolického, přesto ji však Weil pokládá za podstatný zdroj obrovského pokroku, kterého matematika dosáhla v dílech É. Cartana, H. Hopfa, S. S. Cherna a dalších. Ucelenějším rozborem dalších Chernových prací se zabývá P. A. Griffiths. Pak sám Chern podává stručnou rekapitulaci svého vědeckého života a díla, které rozděluje takto: 1. Projektivní diferenciální geometrie. 2. Euklidovská diferenciální geometrie. 3. Geometrické struktury a jimi určené konexe. 4. Integrální geometrie. 5. Charakteristické třídy. 6. Holomorfní zobrazení. 7. Minimální podvariety. 8. Tkáně. — Kniha končí seznamem PhD disertací, které byly pod Chernovým vedením vypracovány.

Ivan Kolář, Brno

ZPRÁVY

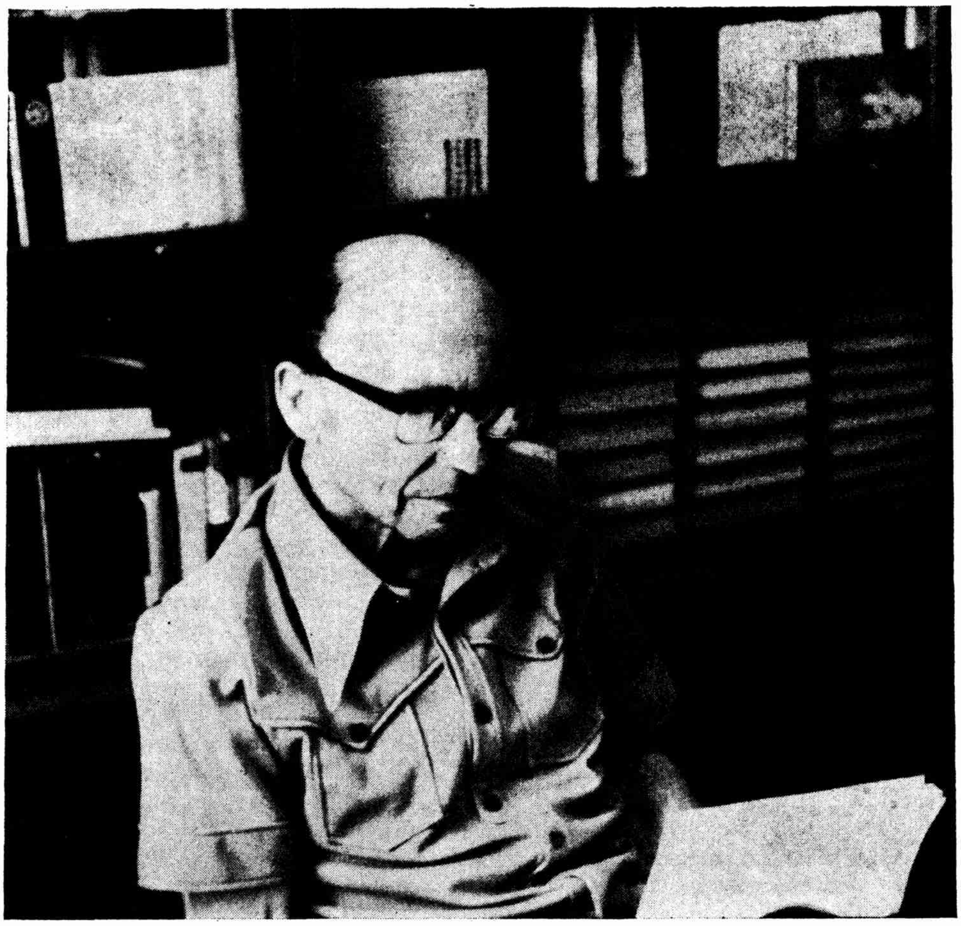
K ŽIVOTNÍMU JUBILEU PROF. RNDR. ZDEŇKA PÍRKA, DRSC.

KAREL DRÁBEK, Praha

Dne 12. prosince 1979 se dožil sedmdesáti let RNDr. ZDENĚK PÍRKO, doktor matematicko-fyzikálních věd a řádný profesor matematiky na elektrotechnické fakultě ČVUT v Praze. Narodil se v Pacově (okr. Pelhřimov), ale od roku 1910 žije téměř stále v Praze. Po čtyřech letech obecné školy (1915–1919) studoval na II. reálném gymnásiu v Praze - Vinohradech (1919–1927) a po maturitě od zimního semestru škol. roku 1927/28 na přírodovědecké fakultě University Karlovy v Praze. V roce 1932 získal aprobaci pro vyučování matematice a fyzice na středních školách a ještě v tomto roce předložil disertační práci *Teorie pseudoúpatnic* (posuzovatelé prof. B. Bydžovský a V. Hlavatý). Rigorosní zkoušky složil v roce 1934 (až po vojenské presenční službě, kterou konal mimo Prahu) a byl promován na doktora přírodních věd. Nejdříve (pro nedostatek volných učitelských míst na středních školách) byl zaměstnán ve Vojenském technickém a leteckém ústavu v Praze, ve škol. roce 1936/37 působil jako profesor na reformním reálném gymnáziu v Tišnově a odtud byl přeložen na karlínskou reálku v Praze. Od škol. roku 1945/46 působí trvale na vysoké škole (v prvním roce jako uvolněný středoškolský učitel, pak asistent, od roku 1947 docent a od 1. 9. 1950 řádný profesor matematiky). Od roku 1952 byl vedoucím katedry matematiky při elektrotechnické fakultě až do začátku roku 1970, kdy se funkce vzdal po dosažení 60. let. Jako profesor matematiky působí i nyní na této fakultě (od 1. 10. 1977 však již jen na poloviční úvazek).

Vedle své učitelské činnosti a všech funkcí s tím spojených byl také prvním děkanem elektrotechnické fakulty (1950/51 až 1951/52), podruhé byl děkanem v období 1956/57 až 1959/60. Velmi mnoho práce a ze svého času věnoval náročným funkcím tajemníka Státního výboru pro vysoké školy, dále byl vědeckým sekretářem Státní komise pro vědecké hodnosti, dva roky působil na ministerstvu školství jako náměstek ministra a byl též předsedou komise pro obhajoby kandidátských prací z oboru geometrie a topologie při ČVUT aj.

V době, kdy působil na střední škole byl společně s prof. Fr. Vyčichlem redaktorem (fyzikální části) časopisu Rozhledy matematicko-fyzikální, po 2. světové válce



postupně redigoval časopisy Fyzika v technice, Sovětská věda — Matematika, fyzika a astronomie, první ročníky členského časopisu Jednoty československých matematiků a fyziků (členem JČSMF je od roku 1927) Pokroky matematiky, fyziky a astronomie a konečně teoretické řady Práce ČVUT.

Až dosud napsal více než 300 prací z matematiky a fyziky, včetně mnoha článků, které popularizovaly zejména nejnovější výsledky v současné fyzice. V posledních asi 10 letech s ním úzce spolupracují členové semináře z kinematické geometrie, který založil v roce 1957 a dosud stále úspěšně vede. Práci tohoto semináře spojil s vědecko-výzkumným úkolem „Metody kinematické analýzy a syntézy", jehož byl až do roku 1978 odpovědným řešitelem. Tento výzkumný úkol byl vždy úspěšně oponován, o práci jednotlivých řešitelů bylo referováno na konferencích v ČSSR i v zahraničí, příp. i na zahraničních studijních pobytech. Tak bylo možno si také ověřit, že dosažené výsledky pod jeho vedením jsou srovnatelné s prací zahraničních pracovníků v tomto oboru.

Vědecká a odborná činnost prof. Pírka byla oceněna udělením doktorátu věd (DrSc. 1957), vyznamenáním Za zásluhy o výstavbu (1959), Medailí Jana Ámose Komenského, Felberovou medailí, Medailí ČVUT I. stupně a dalšími uznáními.

Nelze zapomenout také na jeho práci, kterou vykonal a ještě příležitostně koná jako školitel vědeckých kádrů a posuzovatel předkládaných kandidátských a habilitačních prací. Z této jeho činnosti pochází většina kandidatur a docentur učitelů katedry matematiky na elektrotechnické fakultě ale také na jiných fakultách ČVUT.

Prof. Pírko však i nadále úspěšně pracuje a seznamuje se s nově publikovanými pracemi v jím sledovaných oblastech matematiky. Proto je přáním všech jeho spolupracovníků, přátel a známých, aby se svým příslovečným životním elánem a pílí spojenou s hlubokými znalostmi ještě dlouho působil a pracoval ve svých zvolených životních oborech.

DVANÁCTÉ EVROPSKÉ SETKÁNÍ STATISTIKŮ

Ve dnech 3.—7. září 1979 se konalo ve Varně 12. evropské setkání statistiků. Organizátorem byla Bulharská akademie věd a její Centrum matematiky a mechaniky pod záštitou Bernoulliho společnosti pro pravděpodobnost a matematickou statistiku. Patronem byl president Bulharské akademie věd akademik A. Balevski.

Konference se zúčastnilo přes 500 vědců ze 30 zemí čtyř kontinentů. Z mimoevropských států byla zastoupena Kanada, USA, Austrálie, Saudská Arábie a Izrael. Z Československa bylo vysláno 15 pracovníků ČSAV, SAV, MFF UK, VŠE Praha a rezortních výzkumných ústavů. ČSSR měla zastoupení také v orgánech konference, neboť dr. Z. Šidák byl členem programového výboru.

Na konferenci bylo projednáno velmi široké spektrum otázek teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Z názvů sekcí jmenujme alespoň: Statistické problémy v grafech, Stochastické procesy, Testování hypotéz, Základy teorie pravděpodobnosti, Stochastické diferenciální rovnice, Statistické problémy v lékařství, Robustnost, Bayesovské metody, Hromadná obsluha, Lineární modely, Difusní procesy, Odhady hustot, Nové přístupy v neparametrické statistice, Větvící se procesy, Shluková analýza, Statistika ve kvantové fyzice, Statistická teorie informace, Navrhování experimentu, Mnohorozměrná analýza, Časové řady, Metody Monte Carlo. Každé z těchto oblastí byly věnovány přibližně dvě hodiny na pozvané přednášky a tři až pět hodin na příspěvková sdělení.

Jak vyplývá již z množství vyjmenovaných témat, všechny čtyři přednáškové místnosti byly po celých pět dní plně vytíženy od rána až do večera. Výjimkami byla středa odpoledne, kdy organizátoři připravili výlet na Balčik, a dále pak osm hodin plenárních zasedání. Jejich program byl: úvodní přednáška prof. U. Grenandera: Struktury ve statistice, dvě lekce prof. D. G. Kendalla: Statistika tvaru a závěrečná přednáška prof. B. V. Gnědenka: Některé problémy ve statistice.

Na závěr je nutno poznamenat, že konference byla velmi dobře organizačně připravena a každý účastník měl možnost si vybrat ze široké a kvalitní programové nabídky a navázat řadu užitečných osobních kontaktů. K celkové spokojenosti navíc přispělo také velmi příjemné počasí.

Antonín Lešanovský, Alena Šonská, Praha