Časopis pro pěstování matematiky, roč. 105 (1980), Praha

POZNÁMKA O LINEÁRNÍ MÍŘE VITUŠKINOVÝCH MNOŽIN

MIROSLAV DONT, Praha

(Received May 23, 1977)

Buď $M \subset \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \subset R^2$ uzavřená množina taková, že její projekce (ortogonální projekce) na osy x a y jsou celé úsečky $\langle 0, 1\rangle \times \{0\}$ a $\{0\} \times \langle 0, 1\rangle$. Na první pohled by se zdálo zřejmé, že potom lineární míra této množiny je rovna alespoň délce úhlopříčky čtverce $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ (tj. $\sqrt{2}$), neboť by se zdálo, že úhlopříčka tohoto čtverce je "nejmenší" množina s tou vlastností, že její projekce na osy x a y jsou celé úsečky $\langle 0, 1\rangle \times \{0\}$, $\{0\} \times \langle 0, 1\rangle$. Ukážeme však, že tomu tak není a že množina s danou vlastností může mít lineární míru menší než $\sqrt{2}$. V této poznámce však nebudeme pracovat přímo s podmnožinami čtverce $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$, které mají uvedenou vlastnost, ale z technických důvodů budeme pracovat s podmnožinami čtverce $C = \{[x, y] \in R^2; |x - \frac{1}{2}| + |y| \leqq \frac{1}{2}\}$ takovými, že jejich projekce na přímky $y = x$, $y = -x$ jsou celé hrany tohoto čtverce (o délce $\frac{1}{2}\sqrt{2}$), tj. úsečky $p_1 = \{[x, y] \in R^2; y = x, x \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle\}$, $p_2 = \{[x, y] \in R^2; y = -x, x \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle\}$. Ukážeme, že v C existuje uzavřená množina s danou vlastností, jejíž lineární míra je menší než 1. Nejprve však připomeňme definici lineární (Hausdorffovy) míry a definici topologické limity posloupnosti množin, kterou budeme potřebovat. Dále zopakujme definici množin (které zde nazýváme Vituškinovými), o kterých A. G. VITUŠKIN v citované práci [1] dokázal, že mají kladnou lineární míru, ale nulovou analytickou kapacitu (uvidíme, že právě tyto množiny mají – mimo vlastnost, o které mluví A. G. Vituškin – naši uvedenou vlastnost).

Nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nějaká posloupnost množin $A_n \subset R^2$. Definujme množiny $\limsup A_n$, $\liminf A_n$ takto: Pro $z \in R^2$ píšeme

$$z \in \limsup_{n \to \infty} A_n$$

právě když pro každé otevřené okolí U bodu z platí $U \cap A_n \neq \emptyset$ pro nekonečně mnoho n; píšeme

$$z \in \liminf_{n \to \infty} A_n$$

právě když pro každé otevřené okolí U bodu z je $U \cap A_n = \emptyset$ pouze pro konečně mnoho n. Ekvivalentně: $z \in \liminf A_n$ právě když existuje posloupnost $\{a_n\}$, $a_n \in A_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = z$; $z \in \limsup A_n$ právě když existují $n_1 < n_2 < \ldots$, $a_{n_i} \in A_{n_i}$ tak, že $\lim_{n\to\infty} a_{n_i} = z$. V případě

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

řekneme, že existuje $\lim_{n\to\infty} A_n$ (topologická limita posloupnosti množin A_n) a píšeme

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n \quad \left(= \liminf_{n\to\infty} A_n\right).$$

Poznamenejme, že $\lim A_n$ je vždy uzavřená množina.

Buď $A \subset R^2$. Výrazem $h(A)$ budeme značit lineární míru množiny A, tj. Hausdorffovu jednodimenzionální míru definovanou následujícím způsobem. Pro $\varepsilon > 0$ položíme

$$h_\varepsilon(A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{diam}(B_n),$$

kde infimum bereme přes všechny spočetné systémy $\{B_n\}$, které pokrývají A (tj. $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$), takové, že $\operatorname{diam}(B_n) \leqq \varepsilon$ pro každé n. Dále položíme

$$h(A) = \lim_{\varepsilon\to 0+} h_\varepsilon(A).$$

Nyní zopakujme definici Vituškinových množin z [1]. Nechť $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ je nějaká posloupnost přirozených čísel, $n_0 = 1$, $n_k > 1$ pro $k = 1, 2, \ldots$. Indukcí definujme množiny $r_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, kde $k = 1, 2, \ldots$, $i_j = 1, 2, \ldots, n_{j-1}$. Položíme $r_{i_1} = r_1 = \langle 0, 1\rangle \times \{0\}$. Předpokládejme, že již máme sestrojenou úsečku $r_{i_2 i_2 \ldots i_{k-1}}$. Tuto úsečku rozdělíme na n_{k-1} stejných částí (úseček) a každou tuto část v rovině R^2 otočíme o úhel $\frac{1}{2}\Pi$ kolem jejího středu. Tyto úsečky přitom uvažujme uzavřené. Tak dostaneme n_{k-1} úseček, které označíme

$$r_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}, \quad i_k = 1, 2, \ldots, n_{k-1}.$$

Dále pro $k = 2, 3, \ldots$ položíme

$$R_k = \bigcup_{i_2=1}^{n_1} \bigcup_{i_3=1}^{n_2} \ldots \bigcup_{i_k=1}^{n_{k-1}} r_{i_1 i_2 \ldots i_k};$$

$R_1 = r_1$. Pro pevné k tedy R_k tvoří všechny úsečky tvaru $r_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, které jsou buď všechny rovnoběžné s osou x nebo všechny rovnoběžné s osou y. Počet těchto úseček je $n_1 n_2 \ldots n_{k-1}$. Z konstrukce je dále vidět, že délka těchto úseček je $(n_1 n_2 \ldots n_{k-1})^{-1}$ (tyto úsečky vzniknou dělením úsečky o délce 1 na stejné díly). Nejprve si všimneme, že posloupnost množin R_k má topologickou limitu. Je jasné, že

$$\liminf_{k\to\infty} R_k \subset \limsup_{k\to\infty} R_k.$$

Ukažme, že platí i obrácená inkluze. Buď $z = [x_0, y_0] \in \limsup R_k$. Pro $\varepsilon > 0$ označíme

$$U_\varepsilon = \{[x, y]; |x - x_0| + |y - y_0| < \varepsilon\}.$$

Nyní stačí dokázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje m tak, že pro všechna $k > m$ je $R_k \cap U_\varepsilon \neq \emptyset$. Buď tedy $\varepsilon > 0$. Jelikož $z \in \limsup R_k$, je $R_k \cap U_{\varepsilon/2} \neq \emptyset$ pro nekonečně mnoho k. Zvolme m tak, že $R_m \cap U_{\varepsilon/2} \neq \emptyset$ a zároveň $(n_1 n_2 \dots n_{m-1})^{-1} < \frac{1}{2}\varepsilon$ (pro $k \geqq 1$ je $n_k \geqq 2$ a tedy takové m jistě existuje). Potom ale existují indexy $i_1, i_2, \dots, i_m$ tak, že $\boldsymbol{r}_{i_1 i_2 \dots i_m} \cap U_{\varepsilon/2} \neq \emptyset$. Jelikož délka této úsečky je menší než $\frac{1}{2}\varepsilon$ (a jelikož je rovnoběžná buď s osou x nebo y), platí tedy jistě $\boldsymbol{r}_{i_1 i_2 \dots i_m} \subset U_\varepsilon$. Z tvaru U_ε a z konstrukce daných úseček je ale vidět, že pro tyto (pevné) indexy $i_1, i_2, \dots, i_m$ je $\boldsymbol{r}_{i_1 i_2 \dots i_m i_{m+1} \dots i_k} \subset U_\varepsilon$ pro libovolné indexy $i_{m+1}, \dots, i_k$ ($k > m$, $1 \leqq i_p \leqq n_{p-1}$ pro $p = m + 1, \dots, k$). Odtud $R_k \cap U_\varepsilon \neq \emptyset$ pro každé $k > m$, tj. $z \in \liminf R_k$, takže skutečně

$$\liminf_{k \to \infty} R_k = \limsup_{k \to \infty} R_k .$$

Dále si všimneme, že (ortogonální) projekce množiny $\lim R_k$ na přímky $y = x$, $y = -x$ jsou celé úsečky $p_1 = \{[x, y]; y = x, x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle\}$, $p_2 = \{[x, y]; y = -x, x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle\}$. Především je zřejmé, že tyto projekce nemohou být větší, neboť $R_k \subset C$ pro každé k a tedy i $\lim R_k \subset C$. Jelikož při točení daných úseček tvaru $\boldsymbol{r}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ kolem jejich středu o úhel $\frac{1}{2}\Pi$ se jejich projekce na přímky $y = x$, $y = -x$ nemění, je především zřejmé, že projekce všech množin R_k na dané přímky jsou celé úsečky p_1, p_2. Buď např. $z_0 \in p_1$. Je-li p průnik čtverce C s přímkou kolmou na p_1 procházející bodem z_0, pak p je kompaktní úsečka a pro každé k je $p \cap R_k \neq \emptyset$. Volme $z_k \in p \cap R_k$. Potom existuje vybraná konvergentní posloupnost $\{z_{k_i}\}$; nechť $\lim_{i \to \infty} z_{k_i} = z$. Potom jistě

$$z \in \limsup_{k \to \infty} R_k = \lim_{k \to \infty} R_k$$

a odtud je vidět, že z_0 leží v projekci $\lim R_k$ na přímku $y = x$, takže tato projekce je opravdu rovna p_1. Podobně pro p_2.

Dále použijeme ještě toto označení: Pro pevné indexy $i_1, i_2, \dots, i_k$, $m > k$ označme

$$R^m_{i_1 i_2 \dots i_k} = \bigcup_{i_{k+1}=1}^{n_k} \bigcup_{i_{k+2}=1}^{n_{k+1}} \dots \bigcup_{i_m=1}^{n_{m-1}} \boldsymbol{r}_{i_1 i_2 \dots i_k \dots i_m}$$

(jsou to tedy ony úsečky v R_m, které vzniknou dělením úsečky $\boldsymbol{r}_{i_1 i_2 \dots i_k}$); dále položme

$$R_{i_1 i_2 \dots i_k} = \lim_{m \to \infty} R^m_{i_1 i_2 \dots i_k}$$

(že tato limita existuje se dokáže úplně stejně jako existence $\lim R_k$).

Nyní se zabývejme případem, kdy $n_k = 2$ pro každé $k \geqq 1$ (při konstrukci $\boldsymbol{r}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ budeme tedy v tomto případě vždy „předchozí" úsečky dělit na poloviny). Ukážeme, že v tomto případě, pokud značíme $R_0 = \lim R_k$, platí

$$h(R_0) < 1\,.$$

K tomu stačí ukázat, že existuje konstanta $c < 1$ tak, že $h_\varepsilon(R_0) < c$ pro každé $\varepsilon > 0$. K tomu opět stačí ukázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existují množiny A_n tak, že $\operatorname{diam} A_n \leqq \varepsilon$, $\bigcup A_n \supset R_0$, $\sum \operatorname{diam} A_n \leqq c$.

V našem případě budeme R_0 pokrývat jistými obdélníky (mohli bychom R_0 pokrývat kruhy o stejném diametru jako tyto obdélníky – což pro Hausdorffovu míru bývá nejčastější – ale z technického hlediska bude užití obdélníků jednodušší). Sestrojíme obdélníky $A^n_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ pro $n = 1, 2, \ldots$, $i_1 = 1$, $i_j = 1, 2$ pro $j = 2, 3, \ldots$ následujícím způsobem. Položíme

$$A^1_1 = \langle \tfrac{1}{8}, \tfrac{7}{8} \rangle \times \langle -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4} \rangle\,;$$

je to minimální obdélník takový, že $R_2 \subset A^1_1$, $R_3 \subset A^1_1$. Z konstrukce R_k je vidět, že potom $R_k \subset A^1_1$ pro každé $k \geqq 2$. Vzhledem k tomu, že A^1_1 je uzavřený, je $R_0 = \lim R_k \subset A^1_1$. Přitom je

$$\operatorname{diam} A^1_1 = \sqrt{(\tfrac{9}{16} + \tfrac{1}{4})} = \tfrac{1}{4} \sqrt{(13)} < 1\,.$$

Obdélníky $A^n_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ sestrojíme takto: obdélníky A^1_1 dilatujeme konstantou 2^{1-n}, otočíme o úhel $(n - 1) \frac{1}{2}\Pi$ a posuneme tak, aby měl střed ve středu úsečky $r_{i_1 i_2 \ldots i_n}$. Z konstrukce tohoto obdélníku a z konstrukce úseček $r_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ je vidět, že pro pevné indexy $i_1, i_2, \ldots, i_n$ je

$$R^m_{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset A^n_{i_1 i_2 \ldots i_n}$$

pro každé $m \geqq n + 1$. Jelikož

$$R_m = \bigcup_{i_2=1}^{2} \bigcup_{i_3=1}^{2} \ldots \bigcup_{i_n=1}^{2} R^m_{i_1 i_2 \ldots i_n}\,,$$

je pro každé $m \geqq n + 1$

(1) $$R_m \subset \bigcup_{i_2=1}^{2} \bigcup_{i_3=1}^{2} \ldots \bigcup_{i_n=1}^{2} A^n_{i_1 i_2 \ldots i_n}\,.$$

Dále platí

$$\operatorname{diam} A^n_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 2^{1-n} \tfrac{1}{4} \sqrt{13}$$

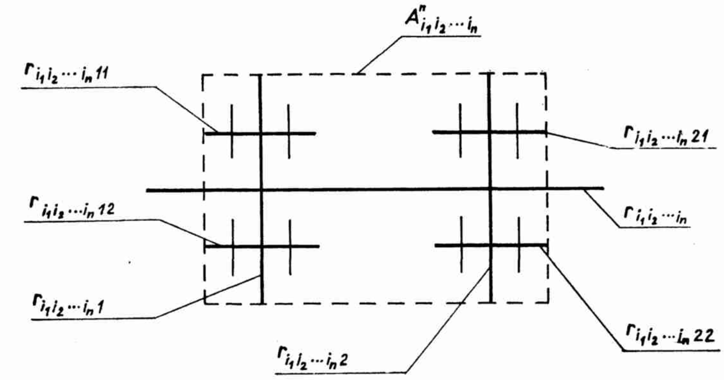
a pro pevné n je počet obdélníků tvaru $A^n_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ roven 2^{n-1}. Odtud

(2) $$\sum_{i_2=1}^{2} \sum_{i_3=1}^{2} \ldots \sum_{i_n=1}^{2} \operatorname{diam} A^n_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \tfrac{1}{4} \sqrt{13}\,.$$

Konstrukce uvedených obdélníků je názorně vidět z obr. 1. Na obr. 1 volíme n tak, že $r_{i_1 i_2 \dots i_n}$ je rovnoběžná s osou x. Jak je vidět z obrázku, hrany obdélníka $A^n_{i_1 i_2 \dots i_n}$ jsou

$$l_1 = \operatorname{diam} r_{i_1 i_2 \dots i_n 1} = 2^{-n},$$

$$l_2 = \operatorname{diam} r_{i_1 i_2 \dots i_n 1} + \operatorname{diam} r_{i_1 i_2 \dots i_n 1 1} = 3 \,.\, 2^{-n-1},$$



Obr. 1.

takže

$$\operatorname{diam} A^n_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sqrt{(l_1^2 + l_2^2)} = 2^{1-n} \tfrac{1}{4} \sqrt{13} \,.$$

Vzhledem k tomu, že uvedené obdélníky jsou uzavřené, dostáváme podle (1)

$$R_0 = \lim_{m \to \infty} R_m \subset \bigcup_{i_2=1}^{2} \bigcup_{i_3=1}^{2} \dots \bigcup_{i_n=1}^{2} A^n_{i_1 i_2 \dots i_n} \,. \tag{3}$$

Buď $\varepsilon > 0$. Potom existuje n tak, že $2^{1-n} \frac{1}{4} \sqrt{13} < \varepsilon$, takže podle (2) a (3) dostáváme

$$h_\varepsilon(R_0) \leqq \tfrac{1}{4} \sqrt{13}$$

a tedy také

$$h(R_0) \leqq \tfrac{1}{4} \sqrt{(13)} < 1 \,.$$

Dostáváme tedy příklad množiny s vlastnostmi, o kterých jsme mluvili v úvodu. Poznamenejme, že v každém případě platí $h(R_0) \geqq \frac{1}{2} \sqrt{2}$, neboť z toho, že např. na přímku $y = x$ má množina R_0 projekci rovnou úsečce o délce $\frac{1}{2} \sqrt{2}$, plyne, že každé spočetné pokrytí R_0 má součet diametrů $\geqq \frac{1}{2} \sqrt{2}$, a tedy dokonce $h_\varepsilon(R_0) \geqq \frac{1}{2} \sqrt{2}$ pro každé $\varepsilon > 0$. Pro naši uvedenou množinu tedy dostáváme odhad

$$\tfrac{1}{2} \sqrt{2} \leqq h(R_0) \leqq \tfrac{1}{4} \sqrt{13} \,.$$

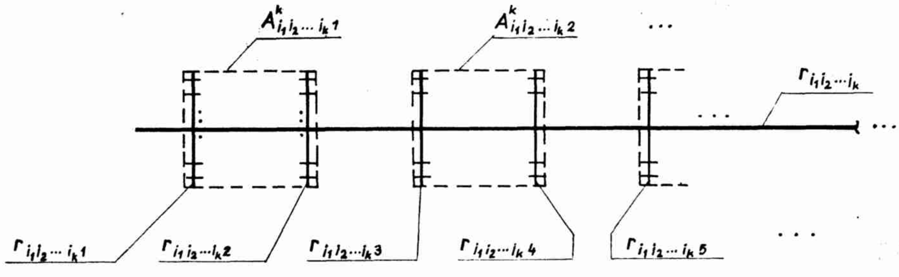
Autoru není známo, jakou má množina R_0 skutečně lineární míru (zřejmé však je, že horní odhad by bylo možné zlepšit).

Nakonec budeme ještě uvažovat případ, kdy položíme $n_k = 2k$ pro $k \geqq 1$ $(n_0 = 1)$. Množinu R_0 budeme v tomto, podobně jako v předchozím případě, pokrývat jistými obdélníky. Pro k přirozené zkonstruujeme obdélníky $A^k_{i_1 i_2 \dots i_k j}$, kde $i_1 = 1$, $i_p =$

$= 1, 2, \ldots, n_{p-1} = 2(p - 1), j = 1, 2, \ldots, k$ následujícím způsobem. Buď A_k uzavřený obdélník o hranách

$$l_1 = (2^k k!)^{-1}, \quad l_2 = (2^k k!)^{-1}\left(1 + \frac{1}{2(k + 1)}\right),$$

přičemž hrana o délce l_1 je kolmá na $r_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ (druhá hrana je s $r_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ rovnoběžná). Úsečky $r_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}$ vzniknou rozdělením úsečky $r_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ na $2k$ stejných dílů (a otočením těchto dílů o $\frac{1}{2}\Pi$). Pro pevné indexy $i_1, i_2, \ldots, i_k$ je tedy těchto úseček $2k$. Těchto $2k$ úseček sestavíme do k dvojic „sousedních" úseček a tyto dvojice pokryjeme obdélníky $A^k_{i_1 i_2 \ldots i_k j}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, které dostaneme tak, že obdélník A_k posuneme,



Obr. 2.

aby jeho střed ležel na úsečce $r_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ uprostřed příslušné dvojice „sousedních" úseček tvaru $r_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}$ – viz obr. 2. Na obr. 2 volíme k tak, že $r_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ je rovnoběžná s osou x. Přitom je vidět, že obdélníky $A^k_{i_1 i_2 \ldots i_k 1}, A^k_{i_1 i_2 \ldots i_k 2}, \ldots$ musí mít hrany o délce

$$l_1 = \operatorname{diam} r_{i_1 i_2 \ldots i_k 1} = (n_1 n_2 \ldots n_k)^{-1} = (2^k k!)^{-1},$$

$$l_2 = \operatorname{diam} r_{i_1 i_2 \ldots i_k 1} + \operatorname{diam} r_{i_1 i_2 \ldots i_k 1 1} = (2^k k!)^{-1} + (2^{k+1}(k + 1)!)^{-1} =$$

$$= (2^k k!)^{-1}\left(1 + \frac{1}{2(k + 1)}\right).$$

Odtud

$$\operatorname{diam} A^k_{i_1 i_2 \ldots i_k j} = \frac{1}{2^k k!}\sqrt{\left[1 + \left(1 + \frac{1}{2(k + 1)}\right)^2\right]} = \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2^k k!}\sqrt{\left[2 + \frac{1}{k + 1} + \frac{1}{4(k + 1)^2}\right]}.$$

Dále je snadno vidět, že pro $m \geqq k + 1$ je

$$R^m_{i_1 i_2 \ldots i_k} \subset \bigcup_{j=1}^{k} A^k_{i_1 i_2 \ldots i_k j},$$