Časopis pro pěstování matematiky, roč. 104 (1979), Praha

ЗАМЕЧАНИЕ К УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ

JAROSLAV BARTÁK, JIŘÍ NEUSTUPA, Praha

(Поступило в редакцию 16/VIII 1976 г.)

В настоящей работе рассматривается равномерная экспоненциальная устойчивость решения v проблемы, данной уравнением

$$u_{tt} + u_{xxxx} = F(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx}), \quad (t \geqq 0,\ x \in [0, \pi]) \tag{0.1}$$

и краевыми условиями

$$u(t, 0) = u_{xx}(t, 0) = u(t, \pi) = u_{xx}(t, \pi) = 0, \quad (t \geqq 0). \tag{0.2}$$

Иногда мы будем пользоваться обозначениями $[u, u_t, u_x, u_{xx}] = [u_0, u_1, u_2, u_3] = \boldsymbol{u}$.

В § 1 вопрос равномерной экспоненциальной устойчивости решения v этой проблемы сводится к исследованию того же самого свойства нулевого решения проблемы, данной уравнением

$$u_{tt} + u_{xxxx} = a(t, x)\, u + b(t, x)\, u_t + c(t, x)\, u_x + d(t, x)\, u_{xx} + \sum_{i,j=0}^{3} e^{ij}(t, x, \boldsymbol{u})\, u_i u_j \tag{0.3}$$

и краевыми условиями (0.2).

В § 2 использован метод функционалов Ляпунова, который дает возможность вывести достаточные условия для равномерной экспоненциальной устойчивости нулевого решения уравнения (0.3) с краевыми условиями (0.2). Показывается, что если исследовать устойчивость в подходящих нормах, то в этих условиях не встречаются коэффициенты e^{ij} $(i, j = 0, 1, 2, 3)$, т.е. равномерная экспоненциальная устойчивость нулевого решения уравнения

$$u_{tt} + u_{xxxx} = a(t, x)\, u + b(t, x)\, u_t + c(t, x)\, u_x + d(t, x)\, u_{xx} \tag{0.4}$$

влечет равномерную экспоненциальную устойчивость нулевого решения уравнения (0.3). Кроме того исследуется тоже равномерная экспоненциальная устойчивость в целом нулевого решения линейного уравнения (0.4) с краевыми условиями (0.2).

Побуждением к исследованию устойчивости решений уравнения (0.1) нам служила равота P. C. Parks [7], где автор изучал при помощи метода Ляпунова устойчивость нулевого решения линейного уравнения колебания стержня с постоянными коэффициентами.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Символом $\mathscr{C}^k(I; X)$ будем обозначать пространство всех k-раз непрерывно дифференцируемых отображений интервала $I \subseteqq [0, +\infty)$ в нормированное пространство X.

Под решением уравнения (0.1) (или его частных случаев, как например уравнений (0.3) и (0.4)) будем понимать функцию $u \in \mathscr{C}^1(D(u); W_2^5([0, \pi])) \cap \mathscr{C}^2(D(u); W_2^3([0, \pi]))$ (где $D(u)$ – интервал $\subseteqq [0, +\infty)$), удовлетворяющую данному уравнению для всех $t \in D(u)$ и $x \in [0, \pi]$. (Указанная гладкость решений нам будет позже нужна при вычислении производной функционала Ляпунова в случае исследования устойчивости в норме $\|\cdot\|_1$. При исследовании устойчивости в нормах $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_3$ можно требуемую гладкость решений существенным образом понизить.)

Пусть v – решение проблемы (0.1), (0.2) такое, что $D(v) = [0, +\infty)$.

Если u есть какая-нибудь функция переменных t, x, то символом $u(t, \cdot)$ будем обозначать функцию переменной x, которая возникнет из u, если зафиксировать t.

Пусть $N([u_0, u_1])$ – норма в пространстве пар $[u_0, u_1]$ таких, что $u_0 \in W_2^4([0, \pi])$, $u_1 \in W_2^2([0, \pi])$. Если $u \in \mathscr{C}^1(D(u); W_2^5([0, \pi])) \cap \mathscr{C}^2(D(u); W_2^3([0, \pi]))$, то $\|u(t, \cdot)\|$ будет обозначать то же самое что и $N([u(t, \cdot), u_t(t, \cdot)])$.

Определение 1.1. Скажем, что решение v уравнения (0.1) с краевыми условиями (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в норме* $\|\cdot\|$, если существуют постоянные $\delta > 0$, $K_1 > 0$ и $K_2 > 0$ такие, что для каждого решения u уравнения (0.1), удовлетворяющего краевым условиям (0.2) и для всех $\tau \in D(u)$ имеет место

$$\|u(\tau, \cdot) - v(\tau, \cdot)\| \leqq \delta \Rightarrow \|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\| \leqq K_1 \|u(\tau, \cdot) - v(\tau, \cdot)\| \, e^{-K_2(t-\tau)}$$

для всех $t \in [\tau, +\infty) \cap D(u)$. Если $\delta = +\infty$, то говорим о равномерной экспоненциальной устойчивости в целом.

В этой статье $\|\cdot\|$ будет принимать три разные значения:

$$\|u(t, \cdot)\|_1 = \left\{ \int_0^\pi [u^2(t, x) + u_t^2(t, x) + u_x^2(t, x) + u_{xx}^2(t, x) + u_{tx}^2(t, x) + \right.$$
$$\left. + u_{xxx}^2(t, x) + u_{txx}^2(t, x) + u_{xxxx}^2(t, x)] \, \mathrm{d}x \right\}^{1/2},$$

$$\|u(t,\cdot)\|_2 = \left\{\int_0^\pi u^2(t,x) + u_t^2(t,x) + u_x^2(t,x) + u_{xx}^2(t,x) + u_{tx}^2(t,x) + \right.$$

$$\left. + u_{xxx}^2(t,x)\right] \mathrm{d}x\Big\}^{1/2},$$

$$\|u(t,\cdot)\|_3 = \left\{\int_0^\pi [u^2(t,x) + u_t^2(t,x) + u_x^2(t,x) + u_{xx}^2(t,x)]\,\mathrm{d}x\right\}^{1/2}.$$

Если мы будем где-то писать только $\|\cdot\|$, то это будет обозначать, что соответствующее рассуждение или утверждение верно для любой из норм $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_3$.

Мы будем предполагать, что

(1.1) функция F для любых фиксированных $t \in [0, +\infty)$ и $x \in [0, \pi]$ имеет на R^4 непрерывные вторые производные по переменным u, u_t, u_x, u_{xx}.

Тогда

$$F(t, x, \mathbf{v} + \mathbf{u}) = F(t, x, \mathbf{v}) + a(t,x)\,u + b(t,x)\,u_t + c(t,x)\,u_x +$$

$$+ d(t,x)\,u_{xx} + \sum_{i,j=0}^{3} e^{ij}(t, x, \mathbf{u})\,u_i u_j\,,$$

где $\mathbf{v} = [v, v_t, v_x, v_{xx}]$ и

$$a(t,x) = \frac{\partial F}{\partial u}(t, x, \mathbf{v}(t,x))\,, \quad b(t,x) = \frac{\partial F}{\partial u_t}(t, x, \mathbf{v}(t,x))\,,$$

$$c(t,x) = \frac{\partial F}{\partial u_x}(t, x, \mathbf{v}(t,x))\,, \quad d(t,x) = \frac{\partial F}{\partial u_{xx}}(t, x, \mathbf{v}(t,x))\,,$$

$$e^{ij}(t, x, \mathbf{r}) = \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 F}{\partial u_i\,\partial u_j}(t, x, \mathbf{v}(t,x) + \alpha\beta\mathbf{r})\,\beta\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,,$$

где $\mathbf{r} \in R^4$.

Очевидно следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Решение v проблемы* (0.1), (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в норме $\|\cdot\|$ тогда и только тогда, когда нулевое решение проблемы* (0.3), (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в норме $\|\cdot\|$. То же самое утверждение справедливо тоже для равномерной экспоненциальной устойчивости в целом.*

Для исследования устойчивости нулевого решения уравнения (0.3) (или (0.4)) мы будем пользоваться так называемым вторым методом Ляпунова, который основан на следующей основной теореме, часто встречающейся в литературе (смотри например [6], [7]) в различных вариантах.

Теорема 1.2. *Пусть для всех $t \geqq 0$ определен функционал $\mathscr{V}(t)$ на пространстве пар $[u_0, u_1]$ таких, что $u_0 \in W_2^4([0, \pi])$, $u_1 \in W_2^2([0, \pi])$. (Для $u \in \mathscr{C}^1(D(u);$ $W_2^5([0, \pi])) \cap \mathscr{C}^2(D(u); W_2^3([0, \pi]))$ будем значить $\mathscr{V}(t, u) = \mathscr{V}(t)([u(t, \cdot), u_t(t, \cdot)])$.) Пусть существуют постоянные $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ и $\varrho > 0$ такие, что*

$$\alpha \|u(t, \cdot)\|^2 \leqq \mathscr{V}(t, u) \leqq \beta \|u(t, \cdot)\|^2 ,$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{V}(t, u)}{\mathrm{d}t} \leqq -\gamma \|u(t, \cdot)\|^2$$

для всех решений и проблемы (0.3), (0.2) *и $t \in D(u)$ таких, что $\|u(t, \cdot)\| \leqq \varrho$.*

Тогда нулевое решение проблемы (0.3), (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в норме $\|\cdot\|$. Если кроме того $\varrho = +\infty$, то нулевое решение проблемы* (0.3), (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в целом в норме $\|\cdot\|$.*

В дальнейшем нам понадобятся следующие сведения о матрицах.

Определение 1.2. Квадратная матрица $A(z) = (a_{ij}(z))_{i,j=1\ldots n}$ элементы которой являются функциями, определенными для z из некоторого множества Z, называется *равномерно положительно* (*отрицательно*) *определенной для* $z \in$ Z, если существует положительная постоянная k так, что для всех $\zeta = [\zeta_1, \ldots, \zeta_n] \in$ $\in R^n$ и $z \in$ Z справедливо неравенство $\zeta \,.\, A(z) \,.\, \zeta' \geqq k \,.\, \zeta \,.\, \zeta'$, $(\zeta \,.\, A(z) \,.\, \zeta' \leqq$ $\leqq -k \,.\, \zeta \,.\, \zeta')$.

Теорема 1.3. *Пусть $A(t, x) = (a_{ij}(t, x))_{i,j=1,\ldots,n}$ — симетричная квадратная матрица, где $a_{ij} : [t_0, +\infty) \times [0, \pi] \to R_1$ и $\sup\limits_{\substack{t \in [t_0, +\infty) \\ x \in [0, \pi]}} |a_{ij}(t, x)| < +\infty$ для $i, j = 1, \ldots, n$.*

Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) *существует положительное число $\varkappa$ так, что $D_i = \det(a_{kj})_{k,j=1,\ldots,i} \geqq \varkappa$ (соответственно $(-1)^i D_i \geqq \varkappa$) для $i = 1, \ldots, n$, $t \in [t_0, +\infty)$, $x \in [0, \pi]$,*

(ii) *матрица $A(t, x)$ является равномерно положительно (соответственно отрицательно) определенной матрицей для $t \in [t_0, +\infty)$, $x \in [0, \pi]$.*

Доказательство. По формуле Якоби (смотри [3] стр, 272)

$$\zeta \,.\, A(t, x) \,.\, \zeta' = \sum_{k=1}^{n} Y_k^2 D_{k-1}^{-1} D_k^{-1} , \quad \text{где} \quad D_0 = 1 \quad \text{и} \tag{1.2}$$

$$Y_k = c_{kk}\zeta_k + \ldots + c_{kn}\zeta_n , \quad c_{kq} = \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1,k-1}, a_{1q} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}, \ldots, a_{k,k-1}, a_{kq} \end{vmatrix} .$$

Пусть выполнено условие (i). Из (1.2) мы получаем

$$\zeta_i = (\prod_{j=i}^{n} c_{jj})^{-1} \sum_{j=i}^{n} P(c_{11}, \ldots, c_{nn}) \, Y_j , \tag{1.3}$$

где P — некоторые многочлены от c_{kq}. Напомним, что $c_{jj} = D_j$. Непосредственно из (1.2), (1.3) и предположения $D_i \geqq \varkappa > 0$ вытекает $\sum_{i=1}^{n} \zeta_i^2 \leqq K_1 \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \leqq$ $\leqq K_2 \zeta \,.\, A(t, x) \,.\, \zeta'$, где K_1, K_2 — некоторые постоянные. Это доказывает (ii). Чтобы доказать обратное утверждение, что из (ii) следует (i), мы воспользуемся методом математической индукции. Для $\zeta = [1, 0, \ldots, 0]$, (1.2) и равномерной положительной определенности матрицы $A(t, x)$ следует, что для всех $t \in [t_0, +\infty)$, $x \in [0, \pi]$ имеют место неравенство $Y_1^2(t, x)/D_1(t, x) \geqq K > 0$ и равенство $Y_1 = c_{11} = D_1$. Но отсюда очевидно вытекает, что $D_1(t, x) \geqq K > 0$. Тепер предположим что для всех $t \in [t_0, +\infty)$, $x \in [0, \pi]$

$$D_1(t, x) \geqq \varkappa, \ldots, D_{i-1}(t, x) \geqq \varkappa \quad (i \leqq n - 1)\,, \tag{1.4}$$

где $\varkappa$ — некоторая положительная постоянная. Пусть $t_1 \in [t_0, +\infty)$, $x_1 \in [0, \pi]$ и пусть $[\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}]$ — решение системы

$$\begin{aligned}
c_{11}(t_1, x_1)\,\alpha_1 + c_{12}(t_1, x_1)\,\alpha_2 + \ldots + c_{1,i-1}(t_1, x_1)\,\alpha_{i-1} + c_{1i}(t_1, x_1) &= 0\,,\\
c_{22}(t_1, x_1)\,\alpha_2 + \ldots + c_{2,i-1}(t_1, x_1)\,\alpha_{i-1} + c_{2i}(t_1, x_1) &= 0\,,\\
&\vdots\\
c_{i-1,i-1}(t_1, x_1)\,\alpha_{i-1} + c_{i-1,i}(t_1, x_1) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Так как согласно (1.2), (1.4) $c_{jj}(t_1, x_1) = D_j(t_1, x_1) \geqq \varkappa > 0$, то эта система очевидно имеет единственное решение.) Положим $\zeta = [\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0]$. Из (1.2) следует, что

$$\frac{D_i^2(t_1, x_1)}{D_i(t_1, x_1)\,.\,D_{i-1}(t_1, x_1)} \geqq K(\alpha_1^2(t_1, x_1) + \ldots + \alpha_{i-1}^2(t_1, x_1) + 1) \geqq K\,,$$

$$D_i(t_1, x_1) \geqq K\,.\,D_{i-1}(t_1, x_1) \geqq K\varkappa\,,$$

где постоянная K независить от выбора t_1, x_1.

Утверждение теоремы о равномерной отрицательной определености можно получить заменой A на $-A$.

2. ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

Выбирая в качестве функционала Ляпунова интеграл некоторой „квадратичной формы“, мы используем теоремы 1.1 и 1.2, чтобы вывести условия устойчивости решения v. В следующем мы будем работать с определенными ниже матрицами V_1, V_2, V_3, W_1, W_2, W_3 (значение постоянных A, B, C, D, P, Q, R, S, δ_0, ϑ_0, δ, ϑ будет обяснено позже):

$$V_1 = \left\| \begin{matrix} -Ab - Ba + (B + D)\vartheta_0, & C, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ C, & B + D, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & Dd + (B + D)\delta_0, & Pc, & \frac{1}{2}Q, & 0, & 0, & -Sc \\ 0, & 0, & Pc, & (B + D)(1 - \delta_0 - \vartheta_0), & 0, & 0, & \frac{1}{2}R, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{2}Q, & 0, & P, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & P, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2}R, & 0, & 0, & S, & 0 \\ 0, & 0, & -Sc, & 0, & 0, & 0, & 0, & S \end{matrix} \right\|,$$

$$V_2 = \left\| \begin{matrix} -Ab - Ba + (B + D)\vartheta_0, & C, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ C, & B + D, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & Dd + (B + D)\delta_0, & Pc, & \frac{1}{2}Q, & 0 \\ 0, & 0, & Pc, & (B + D)(1 - \delta_0 - \vartheta_0), & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{2}Q, & 0, & P, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & P \end{matrix} \right\|,$$

$$V_3 = \left\| \begin{matrix} -Ab - Ba + (B + D)\vartheta_0, & C, & 0, & 0 \\ C, & B + D, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & Dd + (B + D)\delta_0, & Pc \\ 0, & 0, & Pc, & (B + D)(1 - \delta_0 - \vartheta_0) \end{matrix} \right\|,$$

$$
W_1 = \begin{Vmatrix}
-Ab_t - Ba_t + 2Ca - Cc_x + Cd_{xx} - 2C\vartheta, & -Ab + Da + Cb, & 0, & -\tfrac{1}{2}Qa, & Pa_x, & 0, & Sa_{xx}, & \tfrac{1}{2}Ra \\
-Ab + Da + Cb, & 2C + 2(B + D)\,b, & (B + D)\,c - Dd_x, & Bd - \tfrac{1}{2}Qb, & Pb_x, & 0, & Sb_{xx}, & \tfrac{1}{2}Rb \\
0, & (B + D)\,c - Dd_x, & Dd_t - 2Cd - 2C\delta, & Pc_t - \tfrac{1}{2}Qc, & Pa, & 0, & 2Sa_x, & -Sc_t + \tfrac{1}{2}Rc \\
-\tfrac{1}{2}Qa, & Bd - \tfrac{1}{2}Qb, & Pc_t - \tfrac{1}{2}Qc, & -Qd - 2C(1 - \delta - \vartheta), & Pc + Pd_x, & 0, & Sa + Sd_{xx}, & \tfrac{1}{2}Rd \\
Pa_x, & Pb_x, & Pa, & Pc + Pd_x, & 2Pb + Q, & Pd, & 2Sb_x, & -Sc \\
0, & 0, & 0, & 0, & Pd, & -Q, & 2Sd_x, & 0 \\
Sa_{xx}, & Sb_{xx}, & 2Sa_x, & Sa + Sd_{xx}, & 2Sb_x, & 2Sd_x, & R + 2Sb, & Sd \\
\tfrac{1}{2}Ra, & \tfrac{1}{2}Rb, & -Sc_t + \tfrac{1}{2}Rc, & \tfrac{1}{2}Rd, & -Sc, & 0, & Sd, & -R
\end{Vmatrix},
$$

$$
W_2 = \begin{Vmatrix}
-Ab_t - Ba_t + 2Ca - Cc_x + Cd_{xx} - 2C\vartheta, & -Ab + Da + Cb, & 0, & -\tfrac{1}{2}Qa, & Pa_x, & 0 \\
-Ab + Da + Cb, & 2C + 2(B + D)\,b, & (B + D)\,c - Dd_x, & Bd - \tfrac{1}{2}Qb, & Pb_x, & 0 \\
0, & (B + D)\,c - Dd_x, & Dd_t - 2Cd - 2C\delta, & Pc_t - \tfrac{1}{2}Qc, & Pa, & 0 \\
-\tfrac{1}{2}Qa, & Bd - \tfrac{1}{2}Qb, & Pc_t - \tfrac{1}{2}Qc, & -Qd - 2C(1 - \delta - \vartheta), & Pc + Pd_x, & 0 \\
Pa_x, & Pb_x, & Pa, & Pc + Pd_x, & 2Pb + Q, & Pd \\
0, & 0, & 0, & 0, & Pd, & -Q
\end{Vmatrix},
$$

$$
W_3 = \begin{Vmatrix}
-Ab_t - Ba_t + 2Ca - Cc_x + Cd_{xx} - 2C\vartheta, & -Ab + Da + Cb, & 0, & 0 \\
-Ab + Da + Cb, & 2C + 2(B + D)\,b, & (B + D)\,c - Dd_x, & Bd \\
0, & (B + D)\,c - Dd_x, & Dd_t - 2Cd - 2C\delta, & 0 \\
0, & Bd, & 0, & -2C(1 - \delta - \vartheta)
\end{Vmatrix}.
$$

Напомним, что о решении v предпологается, что $D(v) = [0, +\infty)$; положим

$$\sigma^* = \max\Big(\sup_{\substack{t\in[0,+\infty)\\ x\in[0,\pi]}} |v(t,x)|, \sup_{\substack{t\in[0,+\infty)\\ x\in[0,\pi]}} |v_t(t,x)|, \sup_{\substack{t\in[0,+\infty)\\ x\in[0,\pi]}} |v_x(t,x)|, \sup_{\substack{t\in[0,+\infty)\\ x\in[0,\pi]}} |v_{xx}(t,x)|\Big).$$

Замечание 2.1. Используя теорему вложения Соболева, нетрудно показать, что если $\sup_{t\geqq 0} \|v(t,\cdot)\|_i < +\infty$ ($i = 1$ или $i = 2$), то $\sigma^* < +\infty$.

Теорема 2.1. *Пусть*

(i) $\sup_{t\geqq 0} \|v(t,\cdot)\|_1 < +\infty$,

(ii) *функция F удовлетворяет условию* (1.1),

(iii) *функции a, b, c, d ограничены вместе со своими производными $a_t, b_t, c_t, d_t, a_{xx}, b_{xx}, c_x, d_{xx}$ на множестве $[0, +\infty) \times [0, \pi]$ (функции a, b, c, d определены в* § 1),

(iv) *функции e^{ij} вместе со своими производными $e^{ij}_x, e^{ij}_{u_k}, e^{ij}_{xx}, e^{ij}_{u_k x}, e^{ij}_{u_k u_l}, e^{22}_t$ $(i, j, k, l = 0, \ldots, 3)$ существуют непрерывны и ограничены на множестве $D(u) \times [0, \pi] \times K_\sigma$, где $K_\sigma = \{y \in R^4 \mid \|y\|_{R^4} \leqq \sigma\}$* и $\sigma > 0$ (*функции e^{ij} определены в* § 1),

(v) *существуют постоянные $A, B, C, D, P, Q, R, S, \delta_i, \vartheta_i$ $(i = 0, 1)$ такие что $\delta_i, \vartheta_i \in (0,1)$, $\delta_i + \vartheta_i < 1$, $(i = 0,1)$, матрица V_1 равномерно положительно определена для $t \in D(v)$, $x \in [0, \pi]$ и матрица W_1 равномерно отрицательно определена для $t \in D(v)$, $x \in [0, \pi]$.*

Тогда решение v проблемы (0.1), (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в норме $\|\cdot\|_1$. Если кроме того $e^{ij} \equiv 0$, $(i, j = 0, \ldots, 3)$, то решение v равномерно экспоненциально устойчиво в целом в норме $\|\cdot\|_1$.*

Доказательство. Возьмем функционал Ляпунова в виде

$$\mathscr{V}(t,u) = \int_0^\pi \{U \,.\, V_1 \,.\, U' - (B + D)\,\delta_0 u_x^2 - (B + D)\,\vartheta_0 u^2 + (B + D)(\delta_0 + \vartheta_0)\, u_{xx}^2 - 2Se^{22}u_x^2 u_{xxxx}\}\,\mathrm{d}x\,, \tag{2.1}$$

где

$$U = [u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{tx}, u_{xxx}, u_{txx}, u_{xxxx}] \equiv [u_0, u_1, \ldots, u_7]\,.$$

Согласно неравенству Рейли (см. [7])

$$\int_0^\pi u^2(t,x)\,\mathrm{d}x \leqq \int_0^\pi u_x^2(t,x)\,\mathrm{d}x \leqq \int_0^\pi u_{xx}^2(t,x)\,\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

и поэтому

$$\mathscr{V}(t,u) \geqq \int_0^\pi \{U \,.\, V_1 \,.\, U' - 2Se^{22}u_x^2 u_{xxxx}\}\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.3}$$

Используя метод интегрирования по частьям, уравнение (0.3) и краевые условия (0.2), мы получим после трудоемких вычислений для решений u проблемы (0.3), (0.2) отношение

$$
\text{(2.4)} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathscr{V}(t, u) = \int_0^\pi \{U \,.\, W_1 \,.\, U' + 2C\vartheta u^2 + 2C\delta u_x^2 - 2C(\delta + \vartheta)\, u_{xx}^2 + {} + Z(t, x, U)\} \,\mathrm{d}x\,,
$$

где

$$
\begin{aligned}
Z(t, x, U) = {} & (2Cu + 2(B + D)\, u_t - Qu_{xx} - 2Pu_{txx} + Ru_{xxxx}) \sum_{i,j=0}^{3} e^{ij} u_i u_j - \\
& - 4Se^{22} u_x u_{tx} u_{xxxx} - 2Su_x^2 u_{xxxx} [e_t^{22} + e_u^{22} u_t + e_{u_x}^{22} u_{tx} + e_{u_{xx}}^{22} u_{txx} + \\
& + e_{ut}^{22}(-u_{xxxx} + au + bu_t + cu_x + du_{xx} + \sum_{i,j=0}^{3} e^{ij} u_i u_j)] + \\
& + 2Su_{txx} \sum_{\substack{i,j=0 \\ [i,j] \neq [2,2]}}^{3} \{e^{ij}(u_{ixx} u_j + 2u_{ix} u_{jx} + u_i u_{jxx}) + 2(u_{ix} u_j + u_i u_{jx}) \,. \\
& .\, (e_x^{ij} + e_u^{ij} u_x + e_{u_t}^{ij} u_{tx} + e_{u_x}^{ij} u_{xx} + e_{u_{xx}}^{ij} u_{xxx}) + u_i u_j (e_{xx}^{ij} + e_{xu}^{ij} u_x + e_{xu_t}^{ij} u_{tx} + \\
& + e_{xu_x}^{ij} u_{xx} + e_{xu_{xx}}^{ij} u_{xxx} + e_u^{ij} u_{xx} + e_{ux}^{ij} u_x + e_{uu}^{ij} u_x^2 + e_{uu_t}^{ij} u_x u_{tx} + e_{uu_x}^{ij} u_x u_{xx} + \\
& + e_{uu_{xx}}^{ij} u_x u_{xxx} + e_{u_t}^{ij} u_{txx} + e_{u_t x}^{ij} u_{tx} + e_{u_t u}^{ij} u_{tx} u_x + e_{u_t u_t}^{ij} u_{tx}^2 + e_{u_t u_x}^{ij} u_{tx} u_{xx} + \\
& + e_{u_t u_{xx}}^{ij} u_{tx} u_{xxx} + e_{u_x}^{ij} u_{xxx} + e_{u_x x}^{ij} u_{xx} + e_{u_x u}^{ij} u_{xx} u_x + e_{u_x u_t}^{ij} u_{xx} u_{tx} + e_{u_x u_x}^{ij} u_{xx}^2 + \\
& + e_{u_x u_{xx}}^{ij} u_{xx} u_{xxx} + e_{u_{xx}}^{ij} u_{xxxx} + e_{u_{xx} x}^{ij} u_{xxx} + e_{u_{xx} u}^{ij} u_{xxx} u_x + e_{u_{xx} u_t}^{ij} u_{xxx} u_{tx} + \\
& + e_{u_{xx} u_x}^{ij} u_{xxx} u_{xx} + e_{u_{xx} u_{xx}}^{ij} u_{xxx}^2)\} \,.
\end{aligned}
$$

Напомним, что по теореме вложения Соболева существует постоянная C_0 так, что

$$
\text{(2.5)} \quad \max\{\max_{x\in[0,\pi]} |u(t, x)|, \max_{x\in[0,\pi]} |u_x(t, x)|, \max_{[x\in 0,\pi]} |u_{xx}(t, x)|, \max_{x\in[0,\pi]} |u_{xxx}(t, x)|, \max_{x\in[0,\pi]} |u_t(t, x)|, \max_{x\in[0,\pi]} |u_{tx}(t, x)|\} \leqq C_0 \|u(t, \cdot)\|_1
$$

для решений u и для $t \in D(u)$. Выберем теперь число $\varrho^* > 0$ так, что если $\|u(t, \cdot)\|_1 \leqq \varrho^*$, то $\max\{\max_{x\in[0,\pi]} |u(t, x)|, \max_{x\in[0,\pi]} |u_x(t, x)|, \max_{x\in[0,\pi]} |u_{xx}(t, x)|, \max_{x\in[0,\pi]} |u_t(t, x)|\} \leqq$ $\leqq \sigma$. Используя (2.5), неравенство Гелдера и свойства функций e^{ij} и их производных, можно доказать, что существует постоянная C_1 так, что неравенство

$$
\text{(2.6)} \quad \int_0^\pi Z(t, x, U)\, \mathrm{d}x \leqq C_1 \|u(t, \cdot)\|_1^3
$$

имеет место для всех решений u проблемы (0.3), (0.2) и всех $t \in D(u)$ таких, что $\|u(t, \cdot)\|_1 \leqq \varrho^*$. При помощи неравенства (2.2) из (2.4) и (2.6) следует

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathscr{V}(t, u) \leqq \int_0^\pi U \,.\, W_1 \,.\, U' \,\mathrm{d}x + C_1 \,.\, \|u(t, \cdot)\|_1^3 \,. \tag{2.7}$$

В силу (2.3) и (2.5) существует постоянная C_2 так, что

$$\mathscr{V}(t, u) \geqq \int_0^\pi U \,.\, V_1 \,.\, U' \,\mathrm{d}x - C_2 \|u(t, \cdot)\|_1^3 \,. \tag{2.8}$$

По предположению V_1 положительно и W_1 отрицательно определенная матрица (т.е., существуют положительные постоянные C_3, C_4 так, что $U \,.\, V_1 \,.\, U' \geqq \geqq C_3 \sum_{i=0}^{7} u_i^2$, $U \,.\, W_1 \,.\, U' \leqq -C_4 \sum_{i=0}^{7} u_i^2$). Выберем постоянные $\alpha \in (0, C_3)$ и $\gamma \in \in (0, C_4)$ и положим

$$\varrho = \min\left(\frac{C_4 - \gamma}{C_1}, \frac{C_3 - \alpha}{C_2}, \varrho^*\right).$$

Тогда из (2.7), (2.8) следует

$$\alpha \|u(t, \cdot)\|_1^2 \leqq \mathscr{V}(t, u) \,, \tag{2.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathscr{V}(t, u) \leqq -\gamma \|u(t, \cdot)\|_1^2$$

для всех решений u проблемы (0.3), (0.2) и всех $t \in D(u)$ таких, что $\|u(t, \cdot)\|_1 \leqq \varrho$. В силу ограниченности элементов матрицы V_1 и неравенства (2.5) очевидно, что можно выбрать положительную постоянную β так, что для решений u проблемы (0.3), (0.2) и $t \in D(u)$ таких, что $\|u(t, \cdot)\|_1 \leqq \varrho$, верно тоже неравенство

$$\mathscr{V}(t, u) \leqq \beta \|u(t, \cdot)\|_1^2 \,. \tag{2.10}$$

В случае, когда $e^{ij} \equiv 0$ $(i, j = 0, \ldots, 3)$, неравенства (2.6), (2.7), (2.8) выполнены тоже для $C_2 = C_1 = 0$ и соотношения (2.9), (2.10) справедливы для $\varrho = +\infty$.

Утверждение теоремы теперь следует из (2.9) и (2.10) и теорем 1.1 и 1.2.

Аналогично можно доказать следующие теоремы:

Теорема 2.2. *Пусть*

(i) $\sup_{t \geqq 0} \|v(t, \cdot)\|_2 < +\infty$,

(ii) *функция F удовлетворяет условию* (1.1),

(iii) *функции a, b, c, d ограничены вместе со своими производными a_t, b_t, c_t, d_t,*

a_x, b_x, c_x, d_{xx} *на множестве* $[0, +\infty) \times [0, \pi]$, (*функции* a, b, c, d *определены в* § 1),

(iv) *функции* e^{ij} *вместе со своими производными* e_t^{22}, e_x^{ij}, $e_{u_k}^{ij}$ $(i, j, k = 0, \ldots, 3)$ *существуют, непрерывны и ограничены на множестве* $D(u) \times [0, \pi] \times K_\sigma$, *где* $K_\sigma = \{y \in R^4 \mid \|y\|_{R^4} \leqq \sigma\}$ *и* $\sigma > 0$ (*функции* e^{ij} *определены в* § 1),

(v) *существуют постоянные* A, B, C, D, P, Q, δ_i, ϑ_i $(i = 0,1)$ *такие, что* $\delta_i, \vartheta_i \in (0, 1)$, $\delta_i + \vartheta_i < 1$ $(i = 0, 1)$, *матрица* V_2 *равномерно положительно определена для* $t \in D(v)$, $x \in [0, \pi]$ *и матрица* W_2 *равномерно отрицательно определена для* $t \in D(v)$, $x \in [0, \pi]$.

Тогда решение v *проблемы* (0.1), (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в норме* $\|\cdot\|_2$. *Если кроме того* $e^{ij} \equiv 0$ $(i, j = 0, \ldots, 3)$, *то решение* v *равномерно экспоненциально устойчиво в целом в норме* $\|\cdot\|_2$.

Теорема 2.3. *Пусть*

(i) $F(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx}) = a(t, x)\, u + b(t, x)\, u_t + c(t, x)\, u_x + d(t, x)\, u_{xx}$,

(ii) *функции* a, b, c, d *ограничены вместе со своими производными* a_t, b_t, c_t, d_t, c_x, d_{xx} *на множестве* $[0, +\infty) \times [0, \pi]$,

(iii) *существуют постоянные* A, B, C, D, δ_i, ϑ_i $(i = 0, 1)$ *такие, что* $\delta_i, \vartheta_i \in (0, 1)$, $\delta_i + \vartheta_i < 1$ $(i = 0, 1)$, *матрица* V_3 *равномерно положительно определена для* $t \in D(v)$, $x \in [0, \pi]$ *и матрица* W_3 *равномерно отрицательно определена для* $t \in D(v)$, $x \in [0, \pi]$.

Тогда решение v *проблемы* (0.1), (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в целом в норме* $\|\cdot\|_3$.

3. ПРИМЕР

В этом параграфе исследуется устойчивость нулевого решения проблемы, данной уравнением

$$u_{tt} + u_{xxxx} = \varepsilon a^*(t, x)\, u + \varepsilon b^*(t, x)\, u_t + \varepsilon c^*(t, x)\, u_x + \varepsilon d^*(t, x)\, u_{xx} \tag{3.1}$$

и краевыми условиями (0.2); $\varepsilon > 0$ **— малый параметер.**

Теорема 3.1. *Пусть*

(i) *функции* a^*, b^*, c^*, d^* *ограничены вместе со своими производными* a_t^*, b_t^*, c_t^*, d_t^*, c_x^*, a_{xx}^*, b_{xx}^*, d_{xx}^* *на множестве* $[0, +\infty) \times [0, \pi]$,

(ii) *существуют постоянные* $A^* \in R^1$, $B^* > 0$, $C^* > 0$, $D^* > 0$, $\delta > 0$, $\vartheta > 0$ *так, что* $1 - \delta - \vartheta > 0$ *и матрица*

$$M = \left\| \begin{matrix} -A^*b_t^* - B^*a_t^* - 2C^*\vartheta, & -A^*b^* + D^*a^*, & 0, & 0 \\ -A^*b^* + D^*a^*, & 2C^* + 2(B^* + D^*)\,b^*, & (B^* + D^*)\,c^* - D^*d_x^*, & B^*d^* \\ 0, & (B^* + D^*)\,c^* - D^*d_x^*, & D^*d_t^* - 2C^*\delta, & 0 \\ 0, & B^*d^*, & 0, & -2C^*(1 - \delta - \vartheta) \end{matrix} \right\|$$

равномерно отрицательно определена для $t \in [0, +\infty)$ и $x \in [0, \pi]$,

(iii) *существуют постоянные* $P^* > 0$, $Q^* > 0$ *так, что матрица*

$$N = \left\| \begin{matrix} 2P^*b^* + Q^*, & P^*d^* \\ P^*d^*, & -Q^* \end{matrix} \right\|$$

равномерно отрицательно определена для $t \in [0, +\infty)$ *и* $x \in [0, \pi]$.

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *нулевое решение проблемы* (3.1), (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в целом в норме* $\|\cdot\|_1$.

Доказательство. Мы покажем, что выполнены предположения теоремы 2.1. Так как условия (i) – (iv) этой теоремы очевидно выполнены для всех $\varepsilon > 0$, то достаточно проверить только условие (v). Подставив в матрицы V_1 и W_1 $A = A^*$, $B = B^*$, $C = \varepsilon C^*$, $D = D^*$, $P = \varepsilon P^*$, $Q = \varepsilon^2 Q^*$, $R = \varepsilon^3 Q^*$, $S = \varepsilon^2 P^*$, $\vartheta_0 = \delta_0 = \frac{1}{4}$, мы получим:

$$V_1 = \left\| \begin{matrix} -\varepsilon A^*b^* - \varepsilon B^*a^* + \frac{1}{4}(B^* + D^*), & \varepsilon C^*, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \varepsilon C^*, & B^* + D^*, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{4}(B^* + D^*) + \varepsilon D^*d^*, & \varepsilon^2 P^*c^*, & \frac{1}{2}\varepsilon^2 Q^*, & 0, & 0, & -\varepsilon^3 P^*c^* \\ 0, & 0, & \varepsilon^2 P^*c^*, & \frac{1}{2}(B^* + D^*), & 0, & 0, & \frac{1}{2}\varepsilon^3 Q^*, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{2}\varepsilon^2 Q^*, & 0, & \varepsilon P^*, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \varepsilon P^*, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2}\varepsilon^3 Q^*, & 0, & 0, & \varepsilon^2 P^*, & 0 \\ 0, & 0, & -\varepsilon^3 P^*c^*, & 0, & 0, & 0, & 0, & \varepsilon^2 P^* \end{matrix} \right\|,$$

$$W_1 = \left\| \begin{array}{lll}
-A^*\varepsilon b_t^* - B^*\varepsilon a_t^* + 2\varepsilon^2 C^* a^* - \varepsilon^2 C^* c_x^* + \varepsilon^2 C^* d_{xx}^* - 2\varepsilon C^*\vartheta, & -\varepsilon A^* b^* + \varepsilon D^* a^* + \varepsilon^2 C^* b^*, & 0, \\
-\varepsilon A^* b^* + \varepsilon D^* a^* + \varepsilon^2 C^* b^*, & 2\varepsilon C^* + 2(B^* + D^*)\,\varepsilon b^*, & \varepsilon(B^* + D^*)\,c^* - \varepsilon D^* d_x^*, \\
0, & \varepsilon(B^* + D^*)\,c^* - \varepsilon D^* d_x^*, & \varepsilon D^* d_t^* - 2\varepsilon^2 C^* d^* - 2\varepsilon C^*\delta, \\
-\tfrac{1}{2}\varepsilon^3 Q^* a^*, & \varepsilon B^* d^* - \tfrac{1}{2}\varepsilon^3 Q^* b^*, & \varepsilon^2 P^* c_t^* - \tfrac{1}{2}\varepsilon^3 Q^* c^*, \\
\varepsilon^2 P^* a_x^*, & \varepsilon^2 P^* b_x^*, & \varepsilon^2 P^* a^*, \\
0, & 0, & 0, \\
\varepsilon^3 P^* a_{xx}^*, & \varepsilon^3 P^* b_{xx}^*, & 2\varepsilon^3 P^* a_x^*, \\
\tfrac{1}{2}\varepsilon^4 Q^* a^*, & \tfrac{1}{2}\varepsilon^4 Q^* b^*, & -\varepsilon^3 P^* c_x^* + \tfrac{1}{2}\varepsilon^4 Q^* c^*,
\end{array}\right.$$

$$\left. \begin{array}{lllll}
-\tfrac{1}{2}\varepsilon^3 Q^* a^*, & \varepsilon^2 P^* a_x^*, & 0, & \varepsilon^3 P^* a_{xx}^*, & \tfrac{1}{2}\varepsilon^4 Q^* a^* \\
\varepsilon B^* d^* - \tfrac{1}{2}\varepsilon^3 Q^* b^*, & \varepsilon^2 P^* b_x^*, & 0, & \varepsilon^3 P^* b_{xx}^*, & \tfrac{1}{2}\varepsilon^4 Q^* b^* \\
\varepsilon^2 P^* c_t^* - \tfrac{1}{2}\varepsilon^3 Q^* c^*, & \varepsilon^2 P^* a^*, & 0, & 2\varepsilon^3 P^* a_x^*, & -\varepsilon^3 P^* c_t^* + \tfrac{1}{2}\varepsilon^4 Q^* c^* \\
-2\varepsilon C^*(1 - \delta - \vartheta) - \varepsilon^3 Q^* d^*, & \varepsilon^2 P^* c^* + \varepsilon^2 P^* d_x^*, & 0, & \varepsilon^3 P^* a^* + \varepsilon^3 P^* d_{xx}^*, & \tfrac{1}{2}\varepsilon^4 Q^* d^* \\
\varepsilon^2 P^* c^* + \varepsilon^2 P^* d_x^*, & 2\varepsilon^2 P^* b^* + \varepsilon^2 Q^*, & \varepsilon^2 P^* d^*, & 2\varepsilon^3 P^* b_x^*, & -\varepsilon^3 P^* c^* \\
0, & \varepsilon^2 P^* d^*, & -\varepsilon^2 Q^*, & 2\varepsilon^3 P^* d_x^*, & 0 \\
\varepsilon^3 P^* a^* + \varepsilon^3 P^* d_{xx}^*, & 2\varepsilon^3 P^* b_x^*, & 2\varepsilon^3 P^* d_x^*, & \varepsilon^3 Q^* + 2\varepsilon^2 P^* b^*, & \varepsilon^3 P^* d^* \\
\tfrac{1}{2}\varepsilon^4 Q^* d^*, & -\varepsilon^3 P^* c^*, & 0, & \varepsilon^3 P^* d^*, & -\varepsilon^3 Q^*
\end{array}\right\| .$$

Очевидно, что для диагональных определителей $D_i(V_1)\,(i = 1, \ldots, 8)$ матрицы V_1 справедливы следующие формулы:

$$D_1(V_1)(t, x) = \tfrac{1}{4}(B^* + D^*) + O(\varepsilon)\,, \quad D_2(V_1)(t, x) = \tfrac{1}{4}(B^* + D^*)^2 + O(\varepsilon)\,,$$

$$D_3(V_1)(t, x) = \tfrac{1}{16}(B^* + D^*)^3 + O(\varepsilon)\,, \quad D_4(V_1)(t, x) = \tfrac{1}{32}(B^* + D^*)^4 + O(\varepsilon)\,,$$

$$D_5(V_1)(t, x) = \tfrac{1}{32}\varepsilon(B^* + D^*)^4\, P^* + O(\varepsilon^2)\,, \quad D_6(V_1)(t, x) = \tfrac{1}{32}\varepsilon^2(B^* + D^*)^4\,.$$

$$.\, P^{*2} + O(\varepsilon^3)\,, \quad D_7(V_1)(t, x) = \tfrac{1}{32}\varepsilon^4(B^* + D^*)^4\,.\,P^{*3} + O(\varepsilon^5)\,,$$

$$D_8(V_1)(t, x) = \tfrac{1}{32}\varepsilon^6(B^* + D^*)^4\,.\,P^{*4} + O(\varepsilon^7)\,.$$

Отсюда мы видим, что существуют $\varepsilon_1 > 0$ и $\varkappa(\varepsilon) > 0$ так, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, $t \in [0, +\infty)$ и $x \in [0, \pi]$

$$D_i(V_1)(t, x) > \varkappa(\varepsilon)\,, \quad (i = 1, \ldots, 8)\,,$$

что в силу теоремы 1.3 доказывает равномерную положительную определенность матрицы V_1 для $t \in [0, +\infty)$, $x \in [0, \pi]$. Обозначим теперь диагональные определители матрицы M символами $D_1(M)(t, x), \ldots, D_4(M)(t, x)$ и диагональные определители матрицы N символами $D_1(N)(t, x)$, $D_2(N)(t, x)$. По (ii) и теореме 1.3 существует $\varkappa' > 0$ так, что для всех $t \in [0, +\infty)$ и $x \in [0, \pi]$ выполнены неравенства

$$(-1)^i D_i(M)(t, x) > \varkappa' \quad (i = 1, \ldots, 4),$$
$$(-1)^j D_j(N)(t, x) > \varkappa' \quad (j = 1, 2).$$

Нетрудно показать, что для диагональных определителей $D_i(W_1)$ $(i = 1, \ldots, 8)$ матрицы W_1 имеют место формулы

$$D_1(W_1)(t, x) = \varepsilon D_1(M)(t, x) + O(\varepsilon^2),$$
$$D_2(W_1)(t, x) = \varepsilon^2 D_2(M)(t, x) + O(\varepsilon^3),$$
$$D_3(W_1)(t, x) = \varepsilon^3 D_3(M)(t, x) + O(\varepsilon^4),$$
$$D_4(W_1)(t, x) = \varepsilon^4 D_4(M)(t, x) + O(\varepsilon^5),$$
$$D_5(W_1)(t, x) = \varepsilon^6 D_4(M)(t, x) . D_1(N)(t, x) + O(\varepsilon^7),$$
$$D_6(W_1)(t, x) = \varepsilon^8 D_4(M)(t, x) . D_2(N)(t, x) + O(\varepsilon^9),$$
$$D_7(W_1)(t, x) = \varepsilon^{11} D_4(M)(t, x) . D_2(N)(t, x) . D_1(N)(t, x) + O(\varepsilon^{12}),$$
$$D_8(W_1)(t, x) = \varepsilon^{14} D_4(M)(t, x) . D_2^2(N)(t, x) + O(\varepsilon^{15}).$$

Из этого следует, что существуют $\varepsilon_2 > 0$ и $\varkappa''(\varepsilon) > 0$ так, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$, $t \in [0, +\infty)$ и $x \in [0, \pi]$

$$(-1)^i D_i(W_1)(t, x) > \varkappa''(\varepsilon) \quad (i = 1, \ldots, 8).$$

По теореме 1.3 матрица W_1 равномерно отрицательно определена для $t \in [0, +\infty)$, $x \in [0, \pi]$. Полагая $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, мы видим, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполнено условие (v) теоремы 2.1.

Аналогично можно доказать следующие теоремы:

Теорема 3.2. *Пусть*

(i) *функции* a^*, b^*, c^*, d^* *ограничены вместе со своими производными* a_t^*, b_t^*, c_t^*, d_t^*, a_x^*, b_x^*, c_x^*, d_{xx}^* *на множестве* $[0, +\infty) \times [0, \pi]$,

(ii) *выполнены условия* (ii), (iii) *теоремы* 3.1.

Потом существует $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *нулевое решение проблемы* (3.1), (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в целом в норме* $\|\cdot\|_2$.

Теорема 3.3. *Пусть*

(i) *функции* a^*, b^*, c^*, d^* *ограничены вместе со своими производными* a_t^*, b_t^*, c_t^*, d_t^*, c_x^*, d_{xx}^* *на множестве* $[0, +\infty) \times [0, \pi]$,

(ii) *выполнено условие* (ii) *теоремы* 3.1.

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *нулевое решение проблемы* (3.1), (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в целом в норме* $\|\cdot\|_3$.