Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1979

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0104|log66

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 104 * PRAHA 19. 11. 1979 * ČÍSLO 4

QUASI-ORDERS OF ALGEBRAS

JIŘÍ RACHŮNEK, Olomouc

(Received June 25, 1976)

In this paper the set $\mathscr{Q}(\mathfrak{A})$ of all quasi-orders of an arbitrary partial algebra $\mathfrak{A} = (A, F)$ is studied, in particular, properties of this set provided $\mathfrak{A}$ is a group are shown.

In the first section it is proved that $\mathscr{Q}(\mathfrak{A})$ ordered by inclusion is an algebraic lattice and its compact elements are described. The methods and the results of Schmidt's book [2] are essentially used here. In the second section the lattice $\mathscr{Q}(\mathfrak{G})$ for an arbitrary group $\mathfrak{G} = (G, +)$ is characterized by means of the set $\mathscr{P}(\mathfrak{G})$ of all invariant subsemigroups with 0 of G. $\mathscr{P}(\mathfrak{G})$ ordered by inclusion is a lattice isomorphic to $\mathscr{Q}(\mathfrak{G})$. Constructions of the lattice operations in both of these lattices are shown and it is proved that, in general, this lattices are not modular.

BASIC CONCEPTS AND NOTATIONS

Let $A \neq \emptyset$ be a set, n a positive integer, R an n-ary relation on A. A mapping $f : R \to A$ is called an *n-ary partial operation on A*. In this case let us write also $R = D(f, A)$. The arity of f is denoted by n_f. If $D(f, A) = A^n$, then we call f an *n-ary operation on A*.

A partial algebra $\mathfrak{A}$ is an ordered pair (A, F), where $A \neq \emptyset$ is a set and F is a family of finitary partial operations on A. If each $f \in F$ is an operation on A, then $\mathfrak{A}$ is called an *algebra*.

If $\mathfrak{A} = (A, F)$ is a partial algebra, then the elements of F are called *fundamental operations on* $\mathfrak{A}$. Let i, n be positive integers, $i \leqq n$. Then $e^{i,n}$ denotes the i-th n-ary projection on A, i.e. the operation on A such that for each $a_1, \ldots, a_n \in A$ it is $a_1 \ldots \ldots a_n e^{i,n} = a_i$. Let $F^* = F \cup \{e^{i,n};\ i, n \in N,\ i \leqq n\}$. Let $X \neq \emptyset$ be a set and let $w = w(x_1, \ldots, x_m)$ be a word generated by F^* on X. Let $a_1, \ldots, a_k$ $(k \leqq m)$ be elements of A, $1 \leqq i_1, \ldots, i_k \leqq m$, and let us substitute the elements $a_1, \ldots, a_k$ for $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$. Then we obtain an $(n - k)$-ary partial operation on A that we denote by $w(\ldots, a_1, \ldots, a_k, \ldots)$. This partial operation is called an *algebraic function on* $\mathfrak{A}$ *induced by* w. If $w \in F^*$, then each unary algebraic function induced by w will be called an *elementary translation on* $\mathfrak{A}$. Each product of elementary translations on $\mathfrak{A}$ is called a *translation on* $\mathfrak{A}$.

1. THE LATTICE OF ALL QUASI-ORDERS OF A PARTIAL ALGEBRA

Let $A \neq \emptyset$ be a set and let Q be a binary relation on A. Q is a quasi-order of A if it is reflexive and transitive. An antisymmetric quasi-order of A is called *an order of A*. A quasi-ordered set (qo-set) is a pair (A, Q), where $A \neq \emptyset$ is a set and Q is a quasi-order of A. Similarly an ordered set (po-set).

For any binary relation R, aRb will denote $(a, b) \in R$. Let $\mathfrak{A} = (A, F)$ be a partial algebra and let Q be a quasi-order of the set A. Then Q is called a *quasi-order of the partial algebra* $\mathfrak{A}$ if it satisfies the property (C):

(C) If $f \in F$, both $a_1 \dots a_{n_f} f$ and $b_1 \dots b_{n_f} f$ are defined and $a_i Q b_i$ $(a_i, b_i \in A$, $i = 1, \dots, n_f)$, then $a_1 \dots a_{n_f} f Q b_1 \dots b_{n_f} f$. A quasi-order Q of $\mathfrak{A}$ is called *strong* if, whenever $a_i Q b_i$ $(a_i, b_i \in A$, $i = 1, \dots, n_f)$ and $a_1 \dots a_{n_f} f(b_1 \dots b_{n_f} f)$ exists, then also $b_1 \dots b_{n_f} f(a_1 \dots a_{n_f} f)$ exists and $a_1 \dots a_{n_f} f Q b_1 \dots b_{n_f} f$.

For a partial algebra $\mathfrak{A} = (A, F)$, let us introduce the following notation:

$\mathcal{Q}_0(A)$ denotes the set of all quasi-orders of the set A,

$\mathcal{Q}(\mathfrak{A})$ denotes the set of all quasi-orders of $\mathfrak{A}$,

$\mathcal{Q}_s(\mathfrak{A})$ denotes the set of all strong quasi-orders of $\mathfrak{A}$.

We consider the sets $\mathcal{Q}_0(A)$, $\mathcal{Q}(\mathfrak{A})$ and $\mathcal{Q}_s(\mathfrak{A})$ ordered by inclusion. It is clear that $\mathcal{Q}_0(A)$ is a complete lattice in which the infimum of each system of elements is formed by its intersection and the supremum by its transitive hull. $A \times A$ is the greatest element, $\Delta_A = \{(a, a); a \in A\}$ is the smallest element in $\mathcal{Q}_0(A)$. In the paper $\cup$ and $\cap$ denote the set-theoretical intersection and union, respectively, $\vee$ and $\wedge$ denote the lattice operations sup and inf, respectively.

Lemma 1.1. *Let* $\mathfrak{A} = (A, F)$ *be a partial algebra,* $Q_\alpha \in \mathcal{Q}(\mathfrak{A})$ $(\alpha \in I)$. *Then* $\bigcap_{\alpha \in I} Q_\alpha \in \mathcal{Q}(\mathfrak{A})$.

Proof. It is $\bigcap_{\alpha \in I} Q_\alpha \in \mathcal{Q}_0(A)$. Let $f \in F$ and let $a_i (\bigcap_{\alpha \in I} Q_\alpha)\, b_i$ $(i = 1, \dots, n_f)$. Then $a_i Q_\alpha b_i$ for all $\alpha \in I$ and thus if $a_1 \dots a_{n_f} f$, $b_1 \dots b_{n_f} f$ are defined it follows that $a_1 \dots a_{n_f} f Q_\alpha b_1 \dots b_{n_f} f$ for all $\alpha \in I$. This means $a_1 \dots a_{n_f} f (\bigcap_{\alpha \in I} Q_\alpha)\, b_1 \dots b_{n_f} f$.

Corollary 1.1.1. *For a partial algebra* $\mathfrak{A} = (A, F)$, $\mathcal{Q}(\mathfrak{A})$ *is a complete lattice that is a closed* $\wedge$*-subsemilattice of the lattice* $\mathcal{Q}_0(A)$. *The lattices* $\mathcal{Q}(\mathfrak{A})$ *and* $\mathcal{Q}_0(A)$ *have the same greatest and smallest elements.*

Lemma 1.2. *If* Q_α $(\alpha \in I)$ *are strong quasi-orders of a partial algebra* $\mathfrak{A} = (A, F)$, *then the transitive hull of the system* $\{Q_\alpha; \alpha \in I\}$ *is also a strong quasi-order of* $\mathfrak{A}$.

Proof. Let us denote the transitive hull of $\{Q_\alpha; \alpha \in I\}$ by Q. It is $Q \in \mathcal{Q}_0(A)$. Let $f \in F$, $a_i Q b_i$ $(a_i, b_i \in A$, $i = 1, \dots, n_f)$ and let $a_1 \dots a_{n_f} f$ be defined. Then there exists a sequence

$$a_i = z_1^i, z_2^i, \dots, z_{k_i}^i = b_i$$

of elements of A such that

$$z^i_{j-1} Q^i_{\alpha_j} z^i_j\,, \quad j = 2, \ldots, k_i\,, \quad Q^i_{\alpha_j} \in \{Q_\alpha;\, \alpha \in I\}\,.$$

From the reflexivity of quasi-orders it follows that we can suppose

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_{n_f} \quad \text{and} \quad Q^1_{\alpha_j} = Q^2_{\alpha_j} = \ldots = Q^{n_f}_{\alpha_j} = Q_{\alpha_j}\,.$$

Then

$$a_1 Q_{\alpha_1} z^1_2, \ldots, a_{n_f} Q_{\alpha_1} z^{n_f}_2\,.$$

If $a_1 \ldots a_{n_f} f$ exists, then there also exists $z^1_2 \ldots z^{n_f}_2 f$ and it is $a_1 \ldots a_{n_f} f Q_{\alpha_1} z^1_2 \ldots z^{n_f}_2 f$. Similarly we obtain $z^1_2 \ldots z^{n_f}_2 f Q_{\alpha_2} z^1_3 \ldots z^{n_f}_3 f$, etc. Therefore $a_1 \ldots a_{n_f} f Q b_1 \ldots b_{n_f} f$. Analogously for the case that $b_1 \ldots b_{n_f}$ exists.

Corollary 1.2.1. *If $\mathfrak{A} = (A, F)$ is a partial algebra, then $\mathcal{Q}_s(\mathfrak{A})$ is a principal ideal in $\mathcal{Q}(\mathfrak{A})$ that is a closed complete sublattice of $\mathcal{Q}_0(A)$.*

Corollary 1.2.2. *If $\mathfrak{A} = (A, F)$ is an algebra, then $\mathcal{Q}(\mathfrak{A})$ is a closed complete sublattice of $\mathcal{Q}_0(A)$.*

Lemma 1.3. *Let ϱ be a reflexive binary relation on a set $A \neq \emptyset$. Then $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varrho^n$ is the smallest quasi-order of A that contains ϱ.*

Let $(A, \leqq)$ be a po-set. A family S of elements of A is called *directed* if each finite subset $\subseteq S$ has an upper bound in S.

Lemma 1.4. *Let $\{Q_\alpha;\, \alpha \in I\}$ be a directed family of quasi-orders of a partial algebra $\mathfrak{A} = (A, F)$. Then $\bigcup_{\alpha \in I} Q_\alpha = \bigvee_{\alpha \in I} Q_\alpha$ in $\mathcal{Q}_0(A)$ and $\bigcup_{\alpha \in I} Q_\alpha \in \mathcal{Q}(\mathfrak{A})$.*

Proof. It is $\bigcup_{\alpha \in I} Q_\alpha \subseteq \bigvee_{\alpha \in I} {}_{\mathcal{Q}_0(A)} Q_\alpha\,.$

Let $a(\bigvee_{\alpha \in I} {}_{\mathcal{Q}_0(A)} Q_\alpha)\, b$. Then there exists a sequence

$$a = z_0\,, \quad z_1, \ldots, z_n = b$$

of elements of A such that

$$z_{i-1} Q_{\alpha_i} z_i \; (i = 1, \ldots, n)\,, \quad Q_{\alpha_i} \in \{Q_\alpha;\, \alpha \in I\}\,.$$

Since $\{Q_\alpha;\, \alpha \in I\}$ is a directed family, there exists an element Q of this family such that $Q_{\alpha_i} \subseteq Q$ $(i = 1, \ldots, n)$. Therefore $z_{i-1} Q z_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, and so aQb. This means that $a(\bigcup_{\alpha \in I} Q_\alpha)\, b$ and $\bigvee_{\alpha \in I} {}_{\mathcal{Q}_0(A)} Q_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} Q_\alpha$.

Let us show that $\bigvee_{\alpha \in I} {}_{\mathcal{Q}_0(A)} Q_\alpha \in \mathcal{Q}(\mathfrak{A})$. Let $f \in F$, $a_i(\bigvee_{\alpha \in I} {}_{\mathcal{Q}_0(A)} Q_\alpha)\, b_i$ $(a_i, b_i \in A,\ i = 1, \ldots, n_f)$, and let $a_1 \ldots a_{n_f} f$ and $b_1 \ldots b_{n_f} f$ exist. Then for each $i = 1, \ldots, n_f$ there exists a sequence

$$a_i = z^i_0,\ z^i_1, \ldots, z^i_{k_i} = b_i$$

of elements of A such that $z_j^i Q_{i_j} z_{j+1}^i$, $Q_{i_j} \in \{Q_\alpha; \alpha \in I\}$. Since the family $\{Q_\alpha; \alpha \in I\}$ is directed, there exists $Q \in \{Q_\alpha; \alpha \in I\}$ for which $Q_{i_j} \subseteq Q$ $(i = 1, \ldots, n_f,\ j = 1, \ldots, k_i)$. Then $z_j^i Q z_{j+1}^i$, and so $a_i Q b_i$. By condition (C) we obtain $a_1 \ldots a_{n_f} f Q b_1 \ldots b_{n_f} f$, therefore also $a_1 \ldots a_{n_f} f(\bigvee_{\alpha \in I} {}_{\mathcal{Q}_0(A)} Q_\alpha)\, b_1 \ldots b_{n_f} f$.

A complete lattice L is called *algebraic* if each element of L is the supremum of a set of compact elements.

Lemma 1.5. *Let $A \neq \emptyset$ be a set. Then the lattice $\mathcal{Q}_0(A)$ is algebraic.*

Proof. It is known that the lattice $\mathcal{R}_0(A)$ of all reflexive relations on the set $A \neq \emptyset$ is algebraic. The infimum (the supremum) in $\mathcal{R}_0(A)$ is formed by the intersection (by the union). The smallest element in $\mathcal{R}_0(A)$ is Δ_A, the greatest element is $A \times A$. It is clear that $\mathcal{Q}_0(A)$ is a closed $\wedge$-subsemilattice of $\mathcal{R}_0(A)$. By the proof of Lemma 1.4, every directed family $\{R_\alpha; \alpha \in I\}$ of elements of $\mathcal{Q}_0(A)$ fulfils $\bigvee_{\alpha \in I} {}_{\mathcal{Q}_0(A)} R_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} R_\alpha$, thus $\bigvee_{\alpha \in I} {}_{\mathcal{R}_0(A)} R_\alpha \in \mathcal{Q}_0(A)$. Δ_A, $A \times A \in \mathcal{Q}_0(A)$, therefore by [2, Folgerung 4.7] $\mathcal{Q}_0(A)$ is an algebraic lattice.

Let $(A, \leqq)$ be a po-set. A closure operator in A is a function $\lambda : A \to A$ such that for each $a, b \in A$

(i) $a \leqq a\lambda$;

(ii) $a \leqq b$ implies $a\lambda \leqq b\lambda$;

(iii) $(a\lambda)\,\lambda = a\lambda$;

(iv) if A contains the smallest element 0, then $0\lambda = 0$.

Let L be an algebraic lattice. A closure operator in L is called *algebraic* if it holds for each compact element $a \in L$: If $a \leqq x\lambda$, then there exists a compact element $x' \leqq x$ such that $a \leqq x'\lambda$.

Let $\mathfrak{A} = (A, F)$ be a partial algebra and let $R \subseteq A \times A$. Since $A \times A \in \mathcal{Q}(\mathfrak{A})$, then by Lemma 1.1 there exists a smallest quasi-order Q_R of $\mathfrak{A}$ that contains R. It is clear that a function $\lambda : \mathcal{Q}_0(A) \to \mathcal{Q}_0(A)$ such that $R\lambda = Q_R$ for each $R \in \mathcal{Q}_0(A)$ is a closure operator in $\mathcal{Q}_0(A)$.

Theorem 1.6. *λ is an algebraic operator.*

Proof. By Lemma 1.5, $\mathcal{Q}_0(A)$ is an algebraic lattice. Then from Lemma 1.4 and [2, Lemma 4.7] it follows that λ is algebraic.

Corollary 1.6.1. *$\mathcal{Q}(\mathfrak{A})$ is an algebraic lattice.*

Proof. The lattice $\mathcal{Q}_0(A)$ and the operator λ are algebraic, thus the assertion follows from [2, Lemma 4.2].

Corollary 1.6.2. *The lattice $\mathcal{Q}_s(\mathfrak{A})$ is algebraic.*

Proof follows from the fact that $\mathcal{Q}_s(\mathfrak{A})$ is a principal ideal in $\mathcal{Q}(\mathfrak{A})$.

Lemma 1.7. *Let $\mathfrak{A} = (A, F)$ be a partial algebra and let R, R_α $(\alpha \in I)$ be binary relations on A such that $R = \bigcup_{\alpha \in I} R_\alpha$. Then $Q_R = \bigvee_{\alpha \in I} {}_{\mathcal{Q}(\mathfrak{A})} Q_{R_\alpha}$.*

Proof. It is $R_\alpha \subseteq R$, thus $\bigvee_{\alpha \in I} Q_{R_\alpha} \subseteq Q_R$. If $Q \in \mathcal{Q}(\mathfrak{A})$, $Q \supseteq \bigvee_{\alpha \in I} Q_{R_\alpha}$, then $Q \supseteq R_\alpha$ for each $\alpha \in I$ and then also $Q \supseteq \bigcup_{\alpha \in I} R_\alpha$. This implies $Q = Q_Q \supseteq Q_R$. Therefore $\bigvee_{\alpha \in I} Q_{R_\alpha} \supseteq Q_R$, i.e. $Q_R = \bigvee_{\alpha \in I} Q_{R_\alpha}$.

For $a, b \in A$ we denote $Q_{\{(a,b)\}}$ by $Q_{a,b}$.

Corollary 1.7.1. *If $R \subseteq A \times A$, then $Q_R = \bigvee_{(a,b) \in R} Q_{a,b}$.*

Let now $\mathfrak{A} = (A, F)$ be a partial algebra and let R be a binary relation on A. Then

R^T denotes the transitive hull of R, i.e. $R^T = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$;

R^F denotes the set of all $(u, v) \in A \times A$ such that for an appropriate algebraic function $x_1 \dots x_n p$ there exist $(a_i, b_i) \in R$ $(i = 1, \dots, n)$ such that $u = a_1 \dots a_n p$, $v = b_1 \dots b_n p$;

R^U denotes the set of all $(u, v) \in A \times A$ such that for an appropriate unary algebraic function p there exists $(a, b) \in R$ such that $u = ap$, $v = bp$;

$R^{U'}$ denotes the set of all $(u, v) \in A \times A$ such that for an appropriate translation p there exists $(a, b) \in R$ such that $u = ap$, $v = bp$.

It is clear that T, F, U, U' are closure operators in the complete lattice $\exp(A \times A)$.

Let us denote

$$R_0 = R,\ R_1 = R_0^F,\ R_2 = R_1^T,\ R_3 = R_2^F, \dots, R_{2i} = R_{2i-1}^T,\ R_{2i+1} = R_{2i}^F, \dots .$$

It holds $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots$. Let us denote $\bar{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ for $R \neq \emptyset$ and $\bar{\emptyset} = \Delta_A$. It is clear that $\bar{R}^T = \bar{R}^F = \bar{R}$.

Theorem 1.8. *Let $\mathfrak{A} = (A, F)$ be a partial algebra and let $R \subseteq A \times A$. Then $Q_R = \bar{R}$.*

Proof. It holds $R \subseteq \bar{R} \subseteq Q_R$. Let us show that $\bar{R} \in \mathcal{Q}(\mathfrak{A})$. Let $c \in A$, $(x_1, x_2) \in R$ and let us consider the algebraic function $xp = cxe^{1,2}$. Then $(c, c) \in R^F$ and therefore $(c, c) \in \bar{R}$. This means $\bar{R}$ is reflexive. Further $R_{2i-1}R_{2i-1} \subseteq R_{2i}$, thus $\bar{R}\bar{R} \subseteq \bar{R}$. Hence $\bar{R}$ is transitive.

Let now $f \in F$, $a_1 \bar{R} b_1, \dots, a_{n_f} \bar{R} b_{n_f}$ and let us assume that $a_1 \dots a_{n_f} f$, $b_1 \dots b_{n_f} f$ exist. Then there exists i such that $(a_j, b_j) \in R_{2i}$ $(j = 1, \dots, n_f)$ and so $a_1 \dots$ $\dots a_{n_f} f R_{2i+1} b_1 \dots b_{n_f} f$. Therefore $\bar{R}$ satisfies the condition (C).

Theorem 1.9. *Let $\mathfrak{A} = (A, F)$ be an algebra, $R \subseteq A \times A$. Then $(R^U)^T = (R^F)^T$, $(R^U)^T = ((R^U)^T)^U$.*

Proof. Since $R^U \subseteq R^F$, then $(R^U)^T \subseteq (R^F)^T$. Let $(c, d) \in (R^F)^T$. Then there exists a sequence

$$c = z_0\,, \quad z_1, \ldots, z_n = d$$

of elements of A such that $(z_{i-1}, z_i) \in R^F$ $(i = 1, \ldots, n)$. This means that for an appropriate algebraic function $x_1 \ldots x_k p$ it holds $z_{i-1} = a_1 \ldots a_k p$, $z_i = b_1 \ldots b_k p$, where $(a_j, b_j) \in R$ $(j = 1, \ldots, k)$.

Let us introduce the following unary functions:

$$xP_1 = xa_2a_3 \ldots a_k p,\ xP_2 = b_1 x a_3 \ldots a_k p, \ldots, xP_k = b_1 b_2 \ldots b_{k-1} x p\,.$$

It is $a_1 P_1 = z_{i-1}$, $b_j P_j = a_{j+1} P_{j+1}$, $b_k P_k = z_i$ $(j = 1, \ldots, k - 1)$, i.e. $(z_{i-1}, z_i) \in (R^U)^T$. Thus $(R^U)^T = (R^F)^T$.

Let $(c, d) \in ((R^U)^T)^U$. Thus there exist $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in R$ such that for appropriate unary algebraic functions $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ it holds

$$c' = a_1 p_1,\ b_1 p_1 = a_2 p_2,\ b_2 p_2 = a_3 p_3, \ldots, b_n p_n = d'$$

and

$$c = c'q\,, \quad d = d'q\,.$$

Let $P_i = p_i q$. Then

$$a_1 P_1 = c,\ b_j P_j = a_{j+1} P_{j+1},\ b_n P_n = d \quad (j = 1, \ldots, n - 1)\,.$$

Therefore $(c, d) \in (R^U)^T$, and so $(R^U)^T = ((R^U)^T)^U$.

Theorem 1.10. *Let $\mathfrak{A} = (A, F)$ be an algebra and let R be a binary relation on A. Then $Q_R = (R^U)^T$ (i.e. for $c, d \in A$ it holds $cQ_R d$ if and only if there exist $c = z_0, \ldots, z_n = d \in A$, $(a_i, b_i) \in R$ $(i = 1, \ldots, n)$, and unary algebraic functions $p_1, \ldots, p_n$ such that $a_i p_i = z_{i-1}$, $b_i p_i = z_i$ for $i = 1, \ldots, n$).*

Proof. The assertion follows immediately from Theorems 1.8 and 1.9.

Corollary 1.10.1. *Let $\mathfrak{A} = (A, F)$ be an algebra, $a, b, x, y \in A$. Then $xQ_{a,b}y$ if and only if there exist a sequence $x = z_0, z_1, \ldots, z_n = y$ of elements of A and a sequence of unary algebraic functions $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ on F such that $z_i = ap_i$, $z_{i+1} = bp_i$ $(i = 1, \ldots, n - 1)$.*

Theorem 1.11. *Let $\mathfrak{A} = (A, F)$ be an algebra, $a, b, x, y \in A$. Then $xQ_{a,b}y$ if and only if there exist elements $x = z_0, z_1, \ldots, z_n = y$ of A and translations $p_0, \ldots, p_{n-1}$ such that $z_i = ap_i$, $z_{i+1} = bp_i$ $(i = 1, \ldots, n - 1)$.*

Proof. Let us show that $(R^{U'})^T = (R^U)^T$. If $(u, v) \in R^U$, then there exist $(a, b) \in R$ and an appropriate unary algebraic function p such that $u = ap$, $v = bp$. Therefore, translations $t_1, \ldots, t_n$ and a word w of A such that $w(t_1, \ldots, t_n) = p$ must exist. Thus

$$xF_i = w(bt_1, \ldots, bt_{i-1}, xt_i, at_{i+1}, \ldots, at_n)$$

is a translation such that

$$bF_i = aF_{i+1} \ (i = 1, \ldots, n-1), \quad aF_1 = ap = u, \quad bF_n = bp = v,$$

i.e. $(u, v) \in (R^{U'})^T$. Therefore $R^U \subseteq (R^{U'})^T$ and so $(R^U)^T \subseteq (R^{U'})^T$. Finally, since $R^{U'} \subseteq R^U$, it holds $(R^U)^T = (R^{U'})^T$.

Now we shall describe the set $\mathcal{Q}(\mathfrak{A})^*$ of all compact elements in the lattice $\mathcal{Q}(\mathfrak{A})$ of a partial algebra $\mathfrak{A} = (A, F)$.

Theorem 1.12. *Let Q be a quasi-order of a partial algebra $\mathfrak{A} = (A, F)$. Then $Q \in \mathcal{Q}(\mathfrak{A})^*$ if and only if there exists a finite binary relation R on A such that $Q = Q_R$.*

Proof. Let $Q \in \mathcal{Q}(\mathfrak{A})$. Then $\Delta_A \subseteq Q$. For $R \subseteq A \times A$ it is $R \subseteq Q_R$ and thus $R \cup \Delta_A \subseteq Q_R$. Therefore $Q_{R \cup \Delta_A} \subseteq Q_R$, and so $Q_{R \cup \Delta_A} = Q_R$.

By Lemma 1.6, the closure operator $R\lambda = Q_R$ on the lattice $\mathcal{R}_0(A)$ of all reflexive relations on A is algebraic. Thus, by [2, Lemma 4.3], $R' \in \mathcal{Q}(\mathfrak{A})$ is compact in $\mathcal{Q}(\mathfrak{A})$ if and only if $R'' = R' \cup \Delta_A$ is a compact element in $\mathcal{R}_0(A)$. But this is satisfied (by [2, p. 33]) if and only if there exists a finite relation $R \subseteq A \times A$ such that $R' \cup \Delta_A = R \cup \Delta_A$.

Theorem 1.13. *Let $\mathfrak{A} = (A, F)$ be a partial algebra. Then the lattice of all ideals in $\mathcal{Q}(\mathfrak{A})^*$ is isomorphic to $\mathcal{Q}(\mathfrak{A})$.*

Proof follows from [2, proof of Lemma 3.9].

2. THE LATTICE OF ALL QUASI-ORDERS OF A GROUP

Let $\mathfrak{G} = (G, +)$ be a group, $R \in \mathcal{Q}(\mathfrak{G})$. Then the pair $\mathfrak{G}, R$ is called a *quasi-ordered group* (qo-group). This qo-group will be denoted by $\mathfrak{G} = (G, +, R) = (G, R)$. Let us denote $P_R = \{x \in G; 0Rx\}$, where 0 is the zero-element of the group $(G, +)$. P_R is called the *positive cone of the qo-group* (G, R).

For a system $R_\alpha \in \mathcal{Q}(\mathfrak{G})$ $(\alpha \in A)$, we shall often denote the corresponding positive cones by P_α instead of P_{R_α} $(\alpha \in A)$.

Lemma 2.1. *Let $\mathfrak{G} = (G, R)$ be a qo-group. Then P_R is an invariant subsemigroup with 0 of $\mathfrak{G}$.*

Lemma 2.2. *Let S be an invariant subsemigroup with* 0 *of a group* $\mathfrak{G} = (G, +)$. *The the binary relation R defined by*

$$aRb \quad \text{iff} \quad -a + b \in S \quad (\text{iff } b - a \in S) \quad \text{for all} \quad a, b \in G$$

is a quasi-order of the group $\mathfrak{G}$.

Supplement. $S = P_R$.

Proof. If aRb, $x \in G$, then $-x - a + b + x \in S$, $-a - x + x + b \in S$, therefore $-(a + x) + (b + x) \in S$, $-(x + a) + (x + b) \in S$, and so $(a + x) R(b + x)$, $(x + a) R(x + b)$.

Proof of Supplement. 1. If $x \in S$, then $-0 + x \in S$. Thus $0Rx$, i.e. $x \in P_R$. 2. Let $y \in P_R$, i.e. $0Ry$. Therefore $-0 + y = y \in S$.

Let us denote by $\mathscr{P}(\mathfrak{G})$ the set of all invariant subsemigroups with 0 of G. It is clear that the correspondence $R \mapsto P_R$ (for each $R \in \mathscr{Q}(\mathfrak{G})$) is a one-to-one mapping between $\mathscr{Q}(\mathfrak{G})$ and $\mathscr{P}(\mathfrak{G})$.

Further, for $R_1, R_2 \in \mathscr{Q}(\mathfrak{G})$ it is $R_1 \subseteq R_2$ iff $P_{R_1} \subseteq P_{R_2}$. Therefore the ordered sets $(\mathscr{Q}(\mathfrak{G}), \subseteq)$ and $(\mathscr{P}(\mathfrak{G}), \subseteq)$ are isomorphic.

Theorem 2.3. $\mathscr{P}(\mathfrak{G})$ *ordered by inclusion is an algebraic lattice.*

Supplement. *Let* $P_\alpha \in \mathscr{P}(\mathfrak{G})$, $\alpha \in A$. *Then*

a) $\bigwedge_{\alpha \in A} P_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$;

b) $\bigvee_{\alpha \in A} P_\alpha = \sum_{\alpha \in A} P_\alpha$;

in particular,

c) $P_{\alpha_1} \vee P_{\alpha_2} = P_{\alpha_1} + P_{\alpha_2} = P_{\alpha_2} + P_{\alpha_1}$.

Proof. Since $\mathscr{P}(\mathfrak{G})$ is isomorphic to $\mathscr{Q}(\mathfrak{G})$, $\mathscr{P}(\mathfrak{G})$ is (by Corollary 1.6.1) an algebraic lattice.

a) Let $P_\alpha \in \mathscr{P}(\mathfrak{G})$ $(\alpha \in A)$, $P = \bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$. It is evident that $P \in \mathscr{P}(\mathfrak{G})$.

b) It is clear that $\bar{P} = \sum_{\alpha \in A} P_\alpha$ is the smallest subsemigroup with 0 containing P_α $(\alpha \in A)$. Let us show that $\bar{P}$ is invariant. If $x = a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + \ldots + a_{\alpha_n} \in \bar{P}$ $(a_{\alpha_i} \in P_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n)$, $z \in G$, then

$$-z + x + z = (-z + a_{\alpha_1} + z) + (-z + a_{\alpha_2} + z) + \ldots + (-z + a_{\alpha_n} + z) \in \bar{P}.$$

c) If A is an invariant subsemigroup of $\mathfrak{G}$, then for each $z \in G$ it holds $-z + A + z \subseteq A$, thus $A + z \subseteq z + A$. Therefore also $A + (-z) \subseteq (-z) + A$, i.e. $z + A + (-z) \subseteq A$, then $z + A \subseteq A + z$, and so $A + z = z + A$. If now

$$x = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_n + b_n$$
$$(a_i \in P_1,\ b_i \in P_2,\ i = 1, 2, \ldots, n),$$

then

$$x = (a_1 + a_2) + (b'_1 + b_2) + a_3 + b_3 + \ldots + a_n + b_n =$$
$$= a'_1 + b'_2 + a_3 + b_3 + \ldots + a_n + b_n = \ldots = a + b\,,$$

where $a \in P_1$, $b \in P_2$.

Corollary 2.3.1. *For the infimum and the supremum in the algebraic lattice $\mathcal{Q}(\mathfrak{G})$ it holds: Let $R_\alpha \in \mathcal{Q}(\mathfrak{G})$ $(\alpha \in A)$. Then*

a) $\bigwedge_{\alpha \in A} R_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} R_\alpha$;

b) *if* $a(\bigvee_{\alpha \in A} R_\alpha)\, b$, *then for each* $i \in A$ *there exist* $x, x' \in \bigvee_{\alpha \in A} P_\alpha$ *such that* $(a + x)\,.$ $.\, R_i(b - x')$;

c) *if there exist* $x, x' \in \bigvee_{\alpha \in A} P_\alpha$ *and* $i \in A$ *such that* $(a + x)\, R_i(b - x')$, *then* $a(\bigvee_{\alpha \in A} R_\alpha)\, b$.

Proof. a) The assertion a) follows from Lemma 1.1.

b) Let us denote $R = \bigvee_{\alpha \in A} {}_{\mathcal{Q}(\mathfrak{G})} R_\alpha$, $P = \bigvee_{\alpha \in A} {}_{\mathcal{P}(\mathfrak{G})} P_\alpha$. Further, let aRb. Then $-a + b \in \in P$, thus $-a + b = x_{i_1} + \ldots + x_{i_r} + x_i + x_{j_s} + \ldots + x_{j_1}$, where $x_{i_m} \in P_{i_m}$, $x_{j_n} \in P_{j_n}$, $x_i \in P_i$, $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s$, $i \in A$. (If in the partition there is no element of P_i, we can add $x_i = 0$.) Let us denote $x_{i_1} + \ldots + x_{i_r} = x$, $(-x_{j_1}) + \ldots + (-x_{j_s}) = -x'$. Then $-(a + x) + (b - x') \in P_i$, therefore $(a + x)\, R_i(b - x')$.

c) Let now $x, x' \in P$, $i \in A$, $(a + x)\, R_i(b - x')$. Then $-(a + x) + (b - x') = x_i$, $x_i \in P_i$, and so $-a + b = x + x_i + x'$. If $x = x_{i_1} + \ldots + x_{i_k}$, $x' = x_{j_1} + \ldots + x_{j_l}$, then $-a + b = x_{i_1} + \ldots + x_{i_k} + x_i + x_{j_1} + \ldots + x_{j_l}$. This means $-a + b \in P$, and thus aRb.

Theorem 2.4. *The set $\mathcal{P}_1(\mathfrak{G})$ of all invariant subsemigroups P with 0 of a group G such that $P \cap -P = \{0\}$ is a closed $\wedge$-subsemilattice of the lattice $\mathcal{P}(\mathfrak{G})$.*

Proof. In $\mathcal{P}_1(\mathfrak{G})$ it holds

$$\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha \cap - \bigcap_{\beta \in A} P_\beta = \bigcap_{\alpha, \beta \in A} (P_\alpha \cap -P_\beta) = \{0\}\,,$$

thus $\bigwedge_{\alpha \in A} {}_{\mathcal{P}(\mathfrak{G})} P_\alpha \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{G})$.

Corollary 2.4.1. *The set $\mathcal{Q}_1(\mathfrak{G})$ of all orders of a group $\mathfrak{G}$ is a closed $\wedge$-subsemilattice of the lattice $\mathcal{Q}(\mathfrak{G})$.*

Theorem 2.5. *Let $\mathcal{Q}_d(\mathfrak{G})$ be the set of all directed orders of a group $\mathfrak{G}$ and let $\mathcal{Q}_d(\mathfrak{G}) \neq \emptyset$. Then the following conditions are equivalent:*

(a) $\mathfrak{G} = \{0\}$.

(b) $\mathcal{Q}_d(\mathfrak{G})$ *is a sublattice of the lattice* $\mathcal{Q}(\mathfrak{G})$.

(c) $\mathcal{Q}_d(\mathfrak{G})$ *is an* $\wedge$*-subsemilattice of the lattice* $\mathcal{Q}(\mathfrak{G})$.

(d) $\mathcal{Q}_d(\mathfrak{G})$ *is a* $\vee$*-subsemilattice of the lattice* $\mathcal{Q}(\mathfrak{G})$.

Proof. (c) $\Rightarrow$ (a): Let $R \in \mathcal{Q}_d(\mathfrak{G})$ and let P be the positive cone of R. Then $-P$ is the positive cone of the dual order of the group $\mathfrak{G}$ and $P \cap -P = \{0\}$. Thus $\{0\}$ is the positive cone of a directed order of $\mathfrak{G}$, and so $\mathfrak{G} = \{0\}$.

(d) $\Rightarrow$ (a): If P is the positive cone of a directed order of $\mathfrak{G}$, then

$$P \vee -P = P + (-P) = P - P = G \quad \text{and} \quad G \cap -G = G\,.$$

Therefore $\mathfrak{G} = \{0\}$.

(a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) and (a) $\Rightarrow$ (d) are evident.

Similarly, we have

Theorem 2.6. *Let* $\mathcal{Q}_1(\mathfrak{G})$ *be the set of all lattice orders of a group* $\mathfrak{G}$ *and let* $\mathcal{Q}_1(\mathfrak{G}) \neq \emptyset$. *Then the following conditions are equivalent:*

(a) $\mathfrak{G} = \{0\}$.

(b) $\mathcal{Q}_l(\mathfrak{G})$ *is a sublattice of the lattice* $\mathcal{Q}(\mathfrak{G})$.

(c) $\mathcal{Q}_l(\mathfrak{G})$ *is an* $\wedge$*-subsemilattice of the lattice* $\mathcal{Q}(\mathfrak{G})$.

(d) $\mathcal{Q}_l(\mathfrak{G})$ *is a* $\vee$*-subsemilattice of the lattice* $\mathcal{Q}(\mathfrak{G})$.

Theorem 2.7. a) *If R is a directed order of a group* $\mathfrak{G}$, *then R has complements in the lattices* $\mathcal{Q}(\mathfrak{G})$ *and* $\mathcal{Q}_0(G)$.

b) *If R is an order of a group* $\mathfrak{G}$, *then its dual order is complement of R in* $\mathcal{Q}(\mathfrak{G})$ (*in* $\mathcal{Q}_0(G)$) *if and only if R is directed.*

Proof. Part a) is a consequence of part b).

b) Let us denote the positive cone of R by P. Then

$$P \cap -P = \{0\}\,, \quad P \bigvee\nolimits_{\mathcal{P}(\mathfrak{G})} -P = P + (-P) = P - P\,,$$

and $P - P = G$ if and only if R is directed. Thus, in this case, the dual order is a complement of R in $\mathcal{Q}(\mathfrak{G})$ and, by Corollary 1.2.2, in $\mathcal{Q}_0(G)$ as well.

Note. If $\mathfrak{G} \neq \{0\}$ is a group and if $R \in \mathcal{Q}_1(\mathfrak{G})$ has a complement in $\mathcal{Q}(\mathfrak{G})$, then there need not exist an element of $\mathcal{Q}_1(\mathfrak{G})$ among complements of R. Namely, if we can order $\mathfrak{G}$ only trivially, then $\{0\} \cap G = \{0\}$, $\{0\} + G = G$, thus G is a complement of $\{0\}$ in $\mathcal{P}(\mathfrak{G})$ and there exists no complement of $\{0\}$ that belongs to $\mathcal{P}_1(\mathfrak{G})$.

Theorem 2.8. *In general, the lattice* $\mathcal{Q}(\mathfrak{G})$ *is not modular.*

Proof. Let $R, R' \in \mathcal{Q}_d(\mathfrak{G})$, $R \subset R'$. Then the corresponding positive cones P, P' satisfy

$$P \cap -P = \{0\}, \quad P - P = G,$$

$$P' \cap -P' = \{0\}, \quad P' - P' = G,$$

$$P \subset P', \quad -P \subset -P',$$

and thus

$$P \cap -P' \subseteq P' \cap -P' = \{0\},$$

$$P + (-P') \supseteq P + (-P) = G.$$

Therefore $-P$ and $-P'$ are $\mathcal{P}(\mathfrak{G})$-complements of P and $-P' \supset -P$. This means that $\mathcal{P}(\mathfrak{G})$ is not modular, and so $\mathcal{Q}(\mathfrak{G})$ is not, either.

A group $\mathfrak{G}$ will be called an 0_d^*-group if each its directed order admits an extension to a linear one. For example, each 0^*-group (see [1]) is an 0_d^*-group.

Corollary 2.8.1. *Let $\mathfrak{G}$ be an 0_d^*-group and let the lattice $\mathcal{Q}(\mathfrak{G})$ be modular. Then each directed order of $\mathfrak{G}$ is linear.*

Proof. If there exist $R, R' \in \mathcal{Q}_d(\mathfrak{G})$, $R \subset R'$, then by proof of Theorem 2.8, $\mathcal{Q}(\mathfrak{G})$ is not modular. Therefore each $R \in \mathcal{Q}_d(\mathfrak{G})$ is a maximal order of G. And since each $R \in \mathcal{Q}_d(\mathfrak{G})$ admits an extension to a linear one, R is linear.

References

[1] *Fuchs, L.:* Частично упорядоченные алгебраические системы, Moskva 1965.

[2] *Schmidt, E. T.:* Kongruenzrelationen algebraischer Strukturen, Berlin 1969.

[3] *Szász, G.:* Théorie des treillis, Budapest 1971.

Author's address: 771 46 Olomouc, Leninova 26 (Přírodovědecká fakulta UP).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 104 (1979), Praha

ЗАМЕЧАНИЕ К УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ

JAROSLAV BARTÁK, JIŘÍ NEUSTUPA, Praha

(Поступило в редакцию 16/VIII 1976 г.)

В настоящей работе рассматривается равномерная экспоненциальная устойчивость решения v проблемы, данной уравнением

$$u_{tt} + u_{xxxx} = F(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx}), \quad (t \geqq 0, \; x \in [0, \pi]) \tag{0.1}$$

и краевыми условиями

$$u(t, 0) = u_{xx}(t, 0) = u(t, \pi) = u_{xx}(t, \pi) = 0, \quad (t \geqq 0). \tag{0.2}$$

Иногда мы будем пользоваться обозначениями $[u, u_t, u_x, u_{xx}] = [u_0, u_1, u_2, u_3] = \boldsymbol{u}$.

В § 1 вопрос равномерной экспоненциальной устойчивости решения v этой проблемы сводится к исследованию того же самого свойства нулевого решения проблемы, данной уравнением

$$u_{tt} + u_{xxxx} = a(t, x)\, u + b(t, x)\, u_t + c(t, x)\, u_x + d(t, x)\, u_{xx} + \sum_{i,j=0}^{3} e^{ij}(t, x, \boldsymbol{u})\, u_i u_j \tag{0.3}$$

и краевыми условиями (0.2).

В § 2 использован метод функционалов Ляпунова, который дает возможность вывести достаточные условия для равномерной экспоненциальной устойчивости нулевого решения уравнения (0.3) с краевыми условиями (0.2). Показывается, что если исследовать устойчивость в подходящих нормах, то в этих условиях не встречаются коэффициенты e^{ij} $(i, j = 0, 1, 2, 3)$, т.е. равномерная экспоненциальная устойчивость нулевого решения уравнения

$$u_{tt} + u_{xxxx} = a(t, x)\, u + b(t, x)\, u_t + c(t, x)\, u_x + d(t, x)\, u_{xx} \tag{0.4}$$

влечет равномерную экспоненциальную устойчивость нулевого решения уравнения (0.3). Кроме того исследуется тоже равномерная экспоненциальная устойчивость в целом нулевого решения линейного уравнения (0.4) с краевыми условиями (0.2).

Побуждением к исследованию устойчивости решений уравнения (0.1) нам служила работа P. C. Parks [7], где автор изучал при помощи метода Ляпунова устойчивость нулевого решения линейного уравнения колебания стержня с постоянными коэффициентами.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Символом $\mathscr{C}^k(I; X)$ будем обозначать пространство всех k-раз непрерывно дифференцируемых отображений интервала $I \subseteqq [0, +\infty)$ в нормированное пространство X.

Под решением уравнения (0.1) (или его частных случаев, как например уравнений (0.3) и (0.4)) будем понимать функцию $u \in \mathscr{C}^1(D(u); W_2^5([0, \pi])) \cap \mathscr{C}^2(D(u); W_2^3([0, \pi]))$ (где $D(u)$ – интервал $\subseteqq [0, +\infty)$), удовлетворяющую данному уравнению для всех $t \in D(u)$ и $x \in [0, \pi]$. (Указанная гладкость решений нам будет позже нужна при вычислении производной функционала Ляпунова в случае исследования устойчивости в норме $\|\cdot\|_1$. При исследовании устойчивости в нормах $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_3$ можно требуемую гладкость решений существенным образом понизить.)

Пусть v – решение проблемы (0.1), (0.2) такое, что $D(v) = [0, +\infty)$.

Если u есть какая-нибудь функция переменных t, x, то символом $u(t, \cdot)$ будем обозначать функцию переменной x, которая возникнет из u, если зафиксировать t.

Пусть $N([u_0, u_1])$ – норма в пространстве пар $[u_0, u_1]$ таких, что $u_0 \in W_2^4([0, \pi])$, $u_1 \in W_2^2([0, \pi])$. Если $u \in \mathscr{C}^1(D(u); W_2^5([0, \pi])) \cap \mathscr{C}^2(D(u); W_2^3([0, \pi]))$, то $\|u(t, \cdot)\|$ будет обозначать то же самое что и $N([u(t, \cdot), u_t(t, \cdot)])$.

Определение 1.1. Скажем, что решение v уравнения (0.1) с краевыми условиями (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в норме* $\|\cdot\|$, если существуют постоянные $\delta > 0$, $K_1 > 0$ и $K_2 > 0$ такие, что для каждого решения u уравнения (0.1), удовлетворяющего краевым условиям (0.2) и для всех $\tau \in D(u)$ имеет место

$$\|u(\tau, \cdot) - v(\tau, \cdot)\| \leqq \delta \Rightarrow \|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\| \leqq K_1 \|u(\tau, \cdot) - v(\tau, \cdot)\| \, e^{-K_2(t-\tau)}$$

для всех $t \in [\tau, +\infty) \cap D(u)$. Если $\delta = +\infty$, то говорим о равномерной экспоненциальной устойчивости в целом.

В этой статье $\|\cdot\|$ будет принимать три разные значения:

$$\|u(t, \cdot)\|_1 = \left\{ \int_0^\pi [u^2(t, x) + u_t^2(t, x) + u_x^2(t, x) + u_{xx}^2(t, x) + u_{tx}^2(t, x) + \right.$$
$$\left. + u_{xxx}^2(t, x) + u_{txx}^2(t, x) + u_{xxxx}^2(t, x)] \, dx \right\}^{1/2},$$

$$\|u(t, \cdot)\|_2 = \left\{ \int_0^\pi u^2(t, x) + u_t^2(t, x) + u_x^2(t, x) + u_{xx}^2(t, x) + u_{tx}^2(t, x) + \right.$$

$$\left. + u_{xxx}^2(t, x)] \,\mathrm{d}x \right\}^{1/2},$$

$$\|u(t, \cdot)\|_3 = \left\{ \int_0^\pi [u^2(t, x) + u_t^2(t, x) + u_x^2(t, x) + u_{xx}^2(t, x)] \,\mathrm{d}x \right\}^{1/2}.$$

Если мы будем где-то писать только $\|\cdot\|$, то это будет обозначать, что соответствующее рассуждение или утверждение верно для любой из норм $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_3$.

Мы будем предполагать, что

(1.1) функция F для любых фиксированных $t \in [0, +\infty)$ и $x \in [0, \pi]$ имеет на R^4 непрерывные вторые производные по переменным u, u_t, u_x, u_{xx}.

Тогда

$$F(t, x, \mathbf{v} + \mathbf{u}) = F(t, x, \mathbf{v}) + a(t, x)\, u + b(t, x)\, u_t + c(t, x)\, u_x +$$

$$+ d(t, x)\, u_{xx} + \sum_{i,j=0}^{3} e^{ij}(t, x, \mathbf{u})\, u_i u_j\,,$$

где $\mathbf{v} = [v, v_t, v_x, v_{xx}]$ и

$$a(t, x) = \frac{\partial F}{\partial u}(t, x, \mathbf{v}(t, x))\,, \quad b(t, x) = \frac{\partial F}{\partial u_t}(t, x, \mathbf{v}(t, x))\,,$$

$$c(t, x) = \frac{\partial F}{\partial u_x}(t, x, \mathbf{v}(t, x))\,, \quad d(t, x) = \frac{\partial F}{\partial u_{xx}}(t, x, \mathbf{v}(t, x))\,,$$

$$e^{ij}(t, x, \mathbf{r}) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 F}{\partial u_i\, \partial u_j}(t, x, \mathbf{v}(t, x) + \alpha\beta\mathbf{r})\, \beta \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}\beta\,,$$

где $\mathbf{r} \in R^4$.

Очевидно следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Решение v проблемы* (0.1), (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в норме $\|\cdot\|$ тогда и только тогда, когда нулевое решение проблемы* (0.3), (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в норме $\|\cdot\|$. То же самое утверждение справедливо тоже для равномерной экспоненциальной устойчивости в целом.*

Для исследования устойчивости нулевого решения уравнения (0.3) (или (0.4)) мы будем пользоваться так называемым вторым методом Ляпунова, который основан на следующей основной теореме, часто встречающейся в литературе (смотри например [6], [7]) в различных вариантах.

Теорема 1.2. *Пусть для всех $t \geqq 0$ определен функционал $\mathscr{V}(t)$ на пространстве пар $[u_0, u_1]$ таких, что $u_0 \in W_2^4([0, \pi])$, $u_1 \in W_2^2([0, \pi])$. (Для $u \in \mathscr{C}^1(D(u); W_2^5([0, \pi])) \cap \mathscr{C}^2(D(u); W_2^3([0, \pi]))$ будем значить $\mathscr{V}(t, u) = \mathscr{V}(t)([u(t, \cdot), u_t(t, \cdot)])$.) Пусть существуют постоянные $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ и $\varrho > 0$ такие, что*

$$\alpha \|u(t, \cdot)\|^2 \leqq \mathscr{V}(t, u) \leqq \beta \|u(t, \cdot)\|^2 ,$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{V}(t, u)}{\mathrm{d}t} \leqq -\gamma \|u(t, \cdot)\|^2$$

для всех решений и проблемы (0.3), (0.2) *и $t \in D(u)$ таких, что $\|u(t, \cdot)\| \leqq \varrho$.*

Тогда нулевое решение проблемы (0.3), (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в норме $\|\cdot\|$. Если кроме того $\varrho = +\infty$, то нулевое решение проблемы* (0.3), (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в целом в норме $\|\cdot\|$.*

В дальнейшем нам понадобятся следующие сведения о матрицах.

Определение 1.2. Квадратная матрица $A(z) = (a_{ij}(z))_{i,j=1\dots n}$ элементы которой являются функциями, определенными для z из некоторого множества Z, называется *равномерно положительно* (*отрицательно*) *определенной для* $z \in Z$, если существует положительная постоянная k так, что для всех $\zeta = [\zeta_1, \dots, \zeta_n] \in R^n$ и $z \in Z$ справедливо неравенство $\zeta \,.\, A(z) \,.\, \zeta' \geqq k \,.\, \zeta \,.\, \zeta'$, $(\zeta \,.\, A(z) \,.\, \zeta' \leqq -k \,.\, \zeta \,.\, \zeta')$.

Теорема 1.3. *Пусть $A(t, x) = (a_{ij}(t, x))_{i,j=1,\dots,n}$ — симетричная квадратная матрица, где $a_{ij} : [t_0, +\infty) \times [0, \pi] \to R_1$ и $\sup\limits_{\substack{t \in [t_0, +\infty) \\ x \in [0, \pi]}} |a_{ij}(t, x)| < +\infty$ для $i, j = 1, \dots, n$.*

Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) *существует положительное число $\varkappa$ так, что $D_i = \det(a_{kj})_{k,j=1,\dots,i} \geqq \varkappa$ (соответственно $(-1)^i D_i \geqq \varkappa$) для $i = 1, \dots, n$, $t \in [t_0, +\infty)$, $x \in [0, \pi]$,*

(ii) *матрица $A(t, x)$ является равномерно положительно (соответственно отрицательно) определенной матрицей для $t \in [t_0, +\infty)$, $x \in [0, \pi]$.*

Доказательство. По формуле Якоби (смотри [3] стр, 272)

$$\zeta \,.\, A(t, x) \,.\, \zeta' = \sum_{k=1}^{n} Y_k^2 D_{k-1}^{-1} D_k^{-1} , \quad \text{где} \quad D_0 = 1 \quad \text{и} \tag{1.2}$$

$$Y_k = c_{kk}\zeta_k + \dots + c_{kn}\zeta_n , \quad c_{kq} = \begin{vmatrix} a_{11}, \dots, a_{1,k-1}, a_{1q} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}, \dots, a_{k,k-1}, a_{kq} \end{vmatrix} .$$

Пусть выполнено условие (i). Из (1.2) мы получаем

$$\zeta_i = \left(\prod_{j=i}^{n} c_{jj}\right)^{-1} \sum_{j=i}^{n} P(c_{11}, \dots, c_{nn})\, Y_j , \tag{1.3}$$

где P — некоторые многочлены от c_{kq}. Напомним, что $c_{jj} = D_j$. Непосредственно из (1.2), (1.3) и предположения $D_i \geqq \varkappa > 0$ вытекает $\sum_{i=1}^{n} \zeta_i^2 \leqq K_1 \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \leqq$ $\leqq K_2 \zeta \,.\, A(t, x) \,.\, \zeta'$, где K_1, K_2 — некоторые постоянные. Это доказывает (ii). Чтобы доказать обратное утверждение, что из (ii) следует (i), мы воспользуемся методом математической индукции. Для $\zeta = [1, 0, \ldots, 0]$, (1.2) и равномерной положительной определенности матрицы $A(t, x)$ следует, что для всех $t \in$ $\in [t_0, +\infty)$, $x \in [0, \pi]$ имеют место неравенство $Y_1^2(t, x)/D_1(t, x) \geqq K > 0$ и равенство $Y_1 = c_{11} = D_1$. Но отсюда очевидно вытекает, что $D_1(t, x) \geqq K > 0$. Тепер предположим что для всех $t \in [t_0, +\infty)$, $x \in [0, \pi]$

$$D_1(t, x) \geqq \varkappa, \ldots, D_{i-1}(t, x) \geqq \varkappa \quad (i \leqq n - 1)\,, \tag{1.4}$$

где $\varkappa$ — некоторая положительная постоянная. Пусть $t_1 \in [t_0, +\infty)$, $x_1 \in [0, \pi]$ и пусть $[\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}]$ — решение системы

$$\begin{aligned}
c_{11}(t_1, x_1)\,\alpha_1 + c_{12}(t_1, x_1)\,\alpha_2 + \ldots + c_{1,i-1}(t_1, x_1)\,\alpha_{i-1} + c_{1i}(t_1, x_1) &= 0\,,\\
c_{22}(t_1, x_1)\,\alpha_2 + \ldots + c_{2,i-1}(t_1, x_1)\,\alpha_{i-1} + c_{2i}(t_1, x_1) &= 0\,,\\
&\vdots\\
c_{i-1,i-1}(t_1, x_1)\,\alpha_{i-1} + c_{i-1,i}(t_1, x_1) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Так как согласно (1.2), (1.4) $c_{jj}(t_1, x_1) = D_j(t_1, x_1) \geqq \varkappa > 0$, то эта система очевидно имеет единственное решение.) Положим $\zeta = [\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0]$. Из (1.2) следует, что

$$\frac{D_i^2(t_1, x_1)}{D_i(t_1, x_1)\,.\,D_{i-1}(t_1, x_1)} \geqq K(\alpha_1^2(t_1, x_1) + \ldots + \alpha_{i-1}^2(t_1, x_1) + 1) \geqq K\,,$$

$$D_i(t_1, x_1) \geqq K\,.\,D_{i-1}(t_1, x_1) \geqq K\varkappa\,,$$

где постоянная K независить от выбора t_1, x_1.

Утверждение теоремы о равномерной отрицательной определености можно получить заменой A на $-A$.

2. ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

Выбирая в качестве функционала Ляпунова интеграл некоторой „квадратичной формы“, мы используем теоремы 1.1 и 1.2, чтобы вывести условия устойчивости решения v. В следующем мы будем работать с определенными ниже матрицами $V_1, V_2, V_3, W_1, W_2, W_3$ (значение постоянных $A, B, C, D, P, Q, R, S, \delta_0, \vartheta_0, \delta, \vartheta$ будет обяснено позже):

$$V_1 = \begin{Vmatrix} -Ab - Ba + (B+D)\vartheta_0, & C, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ C, & B+D, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & Dd + (B+D)\delta_0, & Pc, & \tfrac{1}{2}Q, & 0, & 0, & -Sc \\ 0, & 0, & Pc, & (B+D)(1-\delta_0-\vartheta_0), & 0, & 0, & \tfrac{1}{2}R, & 0 \\ 0, & 0, & \tfrac{1}{2}Q, & 0, & P, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & P, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \tfrac{1}{2}R, & 0, & 0, & S, & 0 \\ 0, & 0, & -Sc, & 0, & 0, & 0, & 0, & S \end{Vmatrix},$$

$$V_2 = \begin{Vmatrix} -Ab - Ba + (B+D)\vartheta_0, & C, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ C, & B+D, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & Dd + (B+D)\delta_0, & Pc, & \tfrac{1}{2}Q, & 0 \\ 0, & 0, & Pc, & (B+D)(1-\delta_0-\vartheta_0), & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \tfrac{1}{2}Q, & 0, & P, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & P \end{Vmatrix},$$

$$V_3 = \begin{Vmatrix} -Ab - Ba + (B+D)\vartheta_0, & C, & 0, & 0 \\ C, & B+D, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & Dd + (B+D)\delta_0, & Pc \\ 0, & 0, & Pc, & (B+D)(1-\delta_0-\vartheta_0) \end{Vmatrix},$$

$$
W_1 = \begin{Vmatrix}
-Ab_t - Ba_t + 2Ca - Cc_x + Cd_{xx} - 2C\vartheta, & -Ab + Da + Cb, & 0, & -\tfrac{1}{2}Qa, & Pa_x, & 0, & Sa_{xx}, & \tfrac{1}{2}Ra \\
-Ab + Da + Cb, & 2C + 2(B + D)\,b, & (B + D)\,c - Dd_x, & Bd - \tfrac{1}{2}Qb, & Pb_x, & 0, & Sb_{xx}, & \tfrac{1}{2}Rb \\
0, & (B + D)\,c - Dd_x, & Dd_t - 2Cd - 2C\delta, & Pc_t - \tfrac{1}{2}Qc, & Pa, & 0, & 2Sa_x, & -Sc_t + \tfrac{1}{2}Rc \\
-\tfrac{1}{2}Qa, & Bd - \tfrac{1}{2}Qb, & Pc_t - \tfrac{1}{2}Qc, & -Qd - 2C(1 - \delta - \vartheta), & Pc + Pd_x, & 0, & Sa + Sd_{xx}, & \tfrac{1}{2}Rd \\
Pa_x, & Pb_x, & Pa, & Pc + Pd_x, & 2Pb + Q, & Pd, & 2Sb_x, & -Sc \\
0, & 0, & 0, & 0, & Pd, & -Q, & 2Sd_x, & 0 \\
Sa_{xx}, & Sb_{xx}, & 2Sa_x, & Sa + Sd_{xx}, & 2Sb_x, & 2Sd_x, & R + 2Sb, & Sd \\
\tfrac{1}{2}Ra, & \tfrac{1}{2}Rb, & -Sc_t + \tfrac{1}{2}Rc, & \tfrac{1}{2}Rd, & -Sc, & 0, & Sd, & -R
\end{Vmatrix},
$$

$$
W_2 = \begin{Vmatrix}
-Ab_t - Ba_t + 2Ca - Cc_x + Cd_{xx} - 2C\vartheta, & -Ab + Da + Cb, & 0, & -\tfrac{1}{2}Qa, & Pa_x, & 0 \\
-Ab + Da + Cb, & 2C + 2(B + D)\,b, & (B + D)\,c - Dd_x, & Bd - \tfrac{1}{2}Qb, & Pb_x, & 0 \\
0, & (B + D)\,c - Dd_x, & Dd_t - 2Cd - 2C\delta, & Pc_t - \tfrac{1}{2}Qc, & Pa, & 0 \\
-\tfrac{1}{2}Qa, & Bd - \tfrac{1}{2}Qb, & Pc_t - \tfrac{1}{2}Qc, & -Qd - 2C(1 - \delta - \vartheta), & Pc + Pd_x, & 0 \\
Pa_x, & Pb_x, & Pa, & Pc + Pd_x, & 2Pb + Q, & Pd \\
0, & 0, & 0, & 0, & Pd, & -Q
\end{Vmatrix},
$$

$$
W_3 = \begin{Vmatrix}
-Ab_t - Ba_t + 2Ca - Cc_x + Cd_{xx} - 2C\vartheta, & -Ab + Da + Cb, & 0, & 0 \\
-Ab + Da + Cb, & 2C + 2(B + D)\,b, & (B + D)\,c - Dd_x, & Bd \\
0, & (B + D)\,c - Dd_x, & Dd_t - 2Cd - 2C\delta, & 0 \\
0, & Bd, & 0, & -2C(1 - \delta - \vartheta)
\end{Vmatrix}.
$$

Напомним, что о решении v предпологается, что $D(v) = [0, +\infty)$; положим

$$\sigma^* = \max\Big(\sup_{\substack{t\in[0,+\infty)\\ x\in[0,\pi]}} |v(t, x)|, \ \sup_{\substack{t\in[0,+\infty)\\ x\in[0,\pi]}} |v_t(t, x)|, \ \sup_{\substack{t\in[0,+\infty)\\ x\in[0,\pi]}} |v_x(t, x)|, \ \sup_{\substack{t\in[0,+\infty)\\ x\in[0,\pi]}} |v_{xx}(t, x)|\Big).$$

Замечание 2.1. Используя теорему вложения Соболева, нетрудно показать, что если $\sup_{t\geqq 0} \|v(t, \cdot)\|_i < +\infty$ ($i = 1$ или $i = 2$), то $\sigma^* < +\infty$.

Теорема 2.1. *Пусть*

(i) $\sup_{t\geqq 0} \|v(t, \cdot)\|_1 < +\infty$,

(ii) *функция F удовлетворяет условию* (1.1),

(iii) *функции a, b, c, d ограничены вместе со своими производными a_t, b_t, c_t, d_t, a_{xx}, b_{xx}, c_x, d_{xx} на множестве $[0, +\infty) \times [0, \pi]$ (функции a, b, c, d определены в* § 1),

(iv) *функции e^{ij} вместе со своими производными e^{ij}_x, $e^{ij}_{u_k}$, e^{ij}_{xx}, $e^{ij}_{u_k x}$, $e^{ij}_{u_k u_l}$, e^{22}_t $(i, j, k, l = 0, \ldots, 3)$ существуют непрерывны и ограничены на множестве $D(u) \times [0, \pi] \times K_\sigma$, где $K_\sigma = \{y \in R^4 \mid \|y\|_{R^4} \leqq \sigma\}$* и $\sigma > 0$ *(функции e^{ij} определены в* § 1),

(v) *существуют постоянные $A, B, C, D, P, Q, R, S, \delta_i, \vartheta_i$ $(i = 0, 1)$ такие что $\delta_i, \vartheta_i \in (0,1)$, $\delta_i + \vartheta_i < 1$, $(i = 0,1)$, матрица V_1 равномерно положительно определена для $t \in D(v)$, $x \in [0, \pi]$ и матрица W_1 равномерно отрицательно определена для $t \in D(v)$, $x \in [0, \pi]$.*

Тогда решение v проблемы (0.1), (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в норме $\|\cdot\|_1$. Если кроме того $e^{ij} \equiv 0$, $(i, j = 0, \ldots, 3)$, то решение v равномерно экспоненциально устойчиво в целом в норме $\|\cdot\|_1$.*

Доказательство. Возьмем функционал Ляпунова в виде

$$\mathscr{V}(t, u) = \int_0^\pi \{U \,.\, V_1 \,.\, U' - (B + D)\,\delta_0 u_x^2 - (B + D)\,\vartheta_0 u^2 + (B + D)(\delta_0 + \vartheta_0)\, u_{xx}^2 - 2Se^{22} u_x^2 u_{xxxx}\}\, \mathrm{d}x\,, \tag{2.1}$$

где

$$U = [u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{tx}, u_{xxx}, u_{txx}, u_{xxxx}] \equiv [u_0, u_1, \ldots, u_7]\,.$$

Согласно неравенству Рейли (см. [7])

$$\int_0^\pi u^2(t, x)\,\mathrm{d}x \leqq \int_0^\pi u_x^2(t, x)\,\mathrm{d}x \leqq \int_0^\pi u_{xx}^2(t, x)\,\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

и поэтому

$$\mathscr{V}(t, u) \geqq \int_0^\pi \{U \,.\, V_1 \,.\, U' - 2Se^{22} u_x^2 u_{xxxx}\}\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.3}$$

Используя метод интегрирования по частьям, уравнение (0.3) и краевые условия (0.2), мы получим после трудоемких вычислений для решений u проблемы (0.3), (0.2) отношение

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{V}(t, u) = \int_0^\pi \{U \,.\, W_1 \,.\, U' + 2C\vartheta u^2 + 2C\delta u_x^2 - 2C(\delta + \vartheta)\, u_{xx}^2 + \\ + Z(t, x, U)\}\,\mathrm{d}x\,, \tag{2.4}$$

где

$$Z(t, x, U) = (2Cu + 2(B + D)\,u_t - Qu_{xx} - 2Pu_{txx} + Ru_{xxxx}) \sum_{i,j=0}^{3} e^{ij} u_i u_j - \\ - 4Se^{22} u_x u_{tx} u_{xxxx} - 2Su_x^2 u_{xxxx}[e_t^{22} + e_u^{22} u_t + e_{u_x}^{22} u_{tx} + e_{u_{xx}}^{22} u_{txx} + \\ + e_{ut}^{22}(-u_{xxxx} + au + bu_t + cu_x + du_{xx} + \sum_{i,j=0}^{3} e^{ij} u_i u_j)] + \\ + 2Su_{txx} \sum_{\substack{i,j=0 \\ [i,j] \neq [2,2]}}^{3} \{e^{ij}(u_{ixx}u_j + 2u_{ix}u_{jx} + u_i u_{jxx}) + 2(u_{ix}u_j + u_i u_{jx}) \,. \\ . (e_x^{ij} + e_u^{ij} u_x + e_{u_t}^{ij} u_{tx} + e_{u_x}^{ij} u_{xx} + e_{u_{xx}}^{ij} u_{xxx}) + u_i u_j (e_{xx}^{ij} + e_{xu}^{ij} u_x + e_{xu_t}^{ij} u_{tx} + \\ + e_{xu_x}^{ij} u_{xx} + e_{xu_{xx}}^{ij} u_{xxx} + e_u^{ij} u_{xx} + e_{ux}^{ij} u_x + e_{uu}^{ij} u_x^2 + e_{uu_t}^{ij} u_x u_{tx} + e_{uu_x}^{ij} u_x u_{xx} + \\ + e_{uu_{xx}}^{ij} u_x u_{xxx} + e_{u_t}^{ij} u_{txx} + e_{u_t x}^{ij} u_{tx} + e_{u_t u}^{ij} u_{tx} u_x + e_{u_t u_t}^{ij} u_{tx}^2 + e_{u_t u_x}^{ij} u_{tx} u_{xx} + \\ + e_{u_t u_{xx}}^{ij} u_{tx} u_{xxx} + e_{u_x}^{ij} u_{xxx} + e_{u_x x}^{ij} u_{xx} + e_{u_x u}^{ij} u_{xx} u_x + e_{u_x u_t}^{ij} u_{xx} u_{tx} + e_{u_x u_x}^{ij} u_{xx}^2 + \\ + e_{u_x u_{xx}}^{ij} u_{xx} u_{xxx} + e_{u_{xx}}^{ij} u_{xxxx} + e_{u_{xx} x}^{ij} u_{xxx} + e_{u_{xx} u}^{ij} u_{xxx} u_x + e_{u_{xx} u_t}^{ij} u_{xxx} u_{tx} + \\ + e_{u_{xx} u_x}^{ij} u_{xxx} u_{xx} + e_{u_{xx} u_{xx}}^{ij} u_{xxx}^2)\}\,.$$

Напомним, что по теореме вложения Соболева существует постоянная C_0 так, что

$$\max\{\max_{x\in[0,\pi]} |u(t, x)|,\ \max_{x\in[0,\pi]} |u_x(t, x)|,\ \max_{[x\in 0,\pi]} |u_{xx}(t, x)|,\ \max_{x\in[0,\pi]} |u_{xxx}(t, x)|\,, \\ \max_{x\in[0,\pi]} |u_t(t, x)|,\ \max_{x\in[0,\pi]} |u_{tx}(t, x)|\} \leqq C_0 \|u(t, \cdot)\|_1 \tag{2.5}$$

для решений u и для $t \in D(u)$. Выберем теперь число $\varrho^* > 0$ так, что если $\|u(t, \cdot)\|_1 \leqq \varrho^*$, то $\max\{\max_{x\in[0,\pi]} |u(t, x)|, \max_{x\in[0,\pi]} |u_x(t, x)|, \max_{x\in[0,\pi]} |u_{xx}(t, x)|, \max_{x\in[0,\pi]} |u_t(t, x)|\} \leqq \sigma$. Используя (2.5), неравенство Гелдера и свойства функций e^{ij} и их производных, можно доказать, что существует постоянная C_1 так, что неравенство

$$\int_0^\pi Z(t, x, U)\,\mathrm{d}x \leqq C_1 \|u(t, \cdot)\|_1^3 \tag{2.6}$$

имеет место для всех решений u проблемы (0.3), (0.2) и всех $t \in D(u)$ таких, что $\|u(t, \cdot)\|_1 \leqq \varrho^*$. При помощи неравенства (2.2) из (2.4) и (2.6) следует

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathscr{V}(t, u) \leqq \int_0^\pi U \,.\, W_1 \,.\, U' \,\mathrm{d}x + C_1 \,.\, \|u(t, \cdot)\|_1^3 \,. \tag{2.7}$$

В силу (2.3) и (2.5) существует постоянная C_2 так, что

$$\mathscr{V}(t, u) \geqq \int_0^\pi U \,.\, V_1 \,.\, U' \,\mathrm{d}x - C_2 \|u(t, \cdot)\|_1^3 \,. \tag{2.8}$$

По предположению V_1 положительно и W_1 отрицательно определенная матрица (т.е., существуют положительные постоянные C_3, C_4 так, что $U \,.\, V_1 \,.\, U' \geqq$ $\geqq C_3 \sum_{i=0}^{7} u_i^2$, $U \,.\, W_1 \,.\, U' \leqq -C_4 \sum_{i=0}^{7} u_i^2$). Выберем постоянные $\alpha \in (0, C_3)$ и $\gamma \in$ $\in (0, C_4)$ и положим

$$\varrho = \min\left(\frac{C_4 - \gamma}{C_1}, \frac{C_3 - \alpha}{C_2}, \varrho^*\right).$$

Тогда из (2.7), (2.8) следует

$$\alpha \|u(t, \cdot)\|_1^2 \leqq \mathscr{V}(t, u) \,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathscr{V}(t, u) \leqq -\gamma \|u(t, \cdot)\|_1^2 \tag{2.9}$$

для всех решений u проблемы (0.3), (0.2) и всех $t \in D(u)$ таких, что $\|u(t, \cdot)\|_1 \leqq \varrho$. В силу ограниченности элементов матрицы V_1 и неравенства (2.5) очевидно, что можно выбрать положительную постоянную β так, что для решений u проблемы (0.3), (0.2) и $t \in D(u)$ таких, что $\|u(t, \cdot)\|_1 \leqq \varrho$, верно тоже неравенство

$$\mathscr{V}(t, u) \leqq \beta \|u(t, \cdot)\|_1^2 \,. \tag{2.10}$$

В случае, когда $e^{ij} \equiv 0$ $(i, j = 0, \ldots, 3)$, неравенства (2.6), (2.7), (2.8) выполнены тоже для $C_2 = C_1 = 0$ и соотношения (2.9), (2.10) справедливы для $\varrho = +\infty$.

Утверждение теоремы теперь следует из (2.9) и (2.10) и теорем 1.1 и 1.2.

Аналогично можно доказать следующие теоремы:

Теорема 2.2. *Пусть*

(i) $\sup_{t \geqq 0} \|v(t, \cdot)\|_2 < +\infty$,

(ii) *функция F удовлетворяет условию* (1.1),

(iii) *функции a, b, c, d ограничены вместе со своими производными a_t, b_t, c_t, d_t,*

a_x, b_x, c_x, d_{xx} на множестве $[0, +\infty) \times [0, \pi]$, (функции a, b, c, d определены в § 1),

(iv) *функции e^{ij} вместе со своими производными e_t^{22}, e_x^{ij}, $e_{u_k}^{ij}$ $(i, j, k = 0, \ldots, 3)$ существуют, непрерывны и ограничены на множестве $D(u) \times [0, \pi] \times K_\sigma$, где $K_\sigma = \{y \in R^4 \mid \|y\|_{R^4} \leqq \sigma\}$ и $\sigma > 0$ (функции e^{ij} определены в § 1),*

(v) *существуют постоянные A, B, C, D, P, Q, δ_i, ϑ_i $(i = 0,1)$ такие, что $\delta_i, \vartheta_i \in (0, 1)$, $\delta_i + \vartheta_i < 1$ $(i = 0, 1)$, матрица V_2 равномерно положительно определена для $t \in D(v)$, $x \in [0, \pi]$ и матрица W_2 равномерно отрицательно определена для $t \in D(v)$, $x \in [0, \pi]$.*

Тогда решение v проблемы (0.1), (0.2) равномерно экспоненциально устойчиво в норме $\|\cdot\|_2$. Если кроме того $e^{ij} \equiv 0$ $(i, j = 0, \ldots, 3)$, то решение v равномерно экспоненциально устойчиво в целом в норме $\|\cdot\|_2$.

Теорема 2.3. *Пусть*

(i) $F(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx}) = a(t, x)\, u + b(t, x)\, u_t + c(t, x)\, u_x + d(t, x)\, u_{xx}$,

(ii) *функции a, b, c, d ограничены вместе со своими производными a_t, b_t, c_t, d_t, c_x, d_{xx} на множестве $[0, +\infty) \times [0, \pi]$,*

(iii) *существуют постоянные A, B, C, D, δ_i, ϑ_i $(i = 0, 1)$ такие, что $\delta_i, \vartheta_i \in (0, 1)$, $\delta_i + \vartheta_i < 1$ $(i = 0, 1)$, матрица V_3 равномерно положительно определена для $t \in D(v)$, $x \in [0, \pi]$ и матрица W_3 равномерно отрицательно определена для $t \in D(v)$, $x \in [0, \pi]$.*

Тогда решение v проблемы (0.1), (0.2) равномерно экспоненциально устойчиво в целом в норме $\|\cdot\|_3$.

3. ПРИМЕР

В этом параграфе исследуется устойчивость нулевого решения проблемы, данной уравнением

$$u_{tt} + u_{xxxx} = \varepsilon a^*(t, x)\, u + \varepsilon b^*(t, x)\, u_t + \varepsilon c^*(t, x)\, u_x + \varepsilon d^*(t, x)\, u_{xx} \tag{3.1}$$

и краевыми условиями (0.2); $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Теорема 3.1. *Пусть*

(i) *функции a^*, b^*, c^*, d^* ограничены вместе со своими производными a_t^*, b_t^*, c_t^*, d_t^*, c_x^*, a_{xx}^*, b_{xx}^*, d_{xx}^* на множестве $[0, +\infty) \times [0, \pi]$,*

(ii) *существуют постоянные $A^* \in R^1$, $B^* > 0$, $C^* > 0$, $D^* > 0$, $\delta > 0$, $\vartheta > 0$ так, что $1 - \delta - \vartheta > 0$ и матрица*

$$M = \begin{Vmatrix} -A^*b_t^* - B^*a_t^* - 2C^*\vartheta, & -A^*b^* + D^*a^*, & 0, & 0 \\ -A^*b^* + D^*a^*, & 2C^* + 2(B^* + D^*)\,b^*, & (B^* + D^*)\,c^* - D^*d_x^*, & B^*d^* \\ 0, & (B^* + D^*)\,c^* - D^*d_x^*, & D^*d_t^* - 2C^*\delta, & 0 \\ 0, & B^*d^*, & 0, & -2C^*(1 - \delta - \vartheta) \end{Vmatrix}$$

равномерно отрицательно определена для $t \in [0, +\infty)$ и $x \in [0, \pi]$,

(iii) *существуют постоянные* $P^* > 0$, $Q^* > 0$ *так, что матрица*

$$N = \begin{Vmatrix} 2P^*b^* + Q^*, & P^*d^* \\ P^*d^*, & -Q^* \end{Vmatrix}$$

равномерно отрицательно определена для $t \in [0, +\infty)$ *и* $x \in [0, \pi]$.

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *нулевое решение проблемы* (3.1), (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в целом в норме* $\|\cdot\|_1$.

Доказательство. Мы покажем, что выполнены предположения теоремы 2.1. Так как условия (i) – (iv) этой теоремы очевидно выполнены для всех $\varepsilon > 0$, то достаточно проверить только условие (v). Подставив в матрицы V_1 и W_1 $A = A^*$, $B = B^*$, $C = \varepsilon C^*$, $D = D^*$, $P = \varepsilon P^*$, $Q = \varepsilon^2 Q^*$, $R = \varepsilon^3 Q^*$, $S = \varepsilon^2 P^*$, $\vartheta_0 = \delta_0 = \frac{1}{4}$, мы получим:

$$V_1 = \begin{Vmatrix} -\varepsilon A^*b^* - \varepsilon B^*a^* + \frac{1}{4}(B^* + D^*), & \varepsilon C^*, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \varepsilon C^*, & B^* + D^*, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{4}(B^* + D^*) + \varepsilon D^*d^*, & \varepsilon^2P^*c^*, & \frac{1}{2}\varepsilon^2Q^*, & 0, & 0, & -\varepsilon^3P^*c^* \\ 0, & 0, & \varepsilon^2P^*c^*, & \frac{1}{2}(B^* + D^*), & 0, & 0, & \frac{1}{2}\varepsilon^3Q^*, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{2}\varepsilon^2Q^*, & 0, & \varepsilon P^*, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \varepsilon P^*, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2}\varepsilon^3Q^*, & 0, & 0, & \varepsilon^2P^*, & 0 \\ 0, & 0, & -\varepsilon^3P^*c^*, & 0, & 0, & 0, & 0, & \varepsilon^2P^* \end{Vmatrix},$$

$$W_1 = \left\| \begin{array}{lll}
-A^*\varepsilon b^*_t - B^*\varepsilon a^*_t + 2\varepsilon^2 C^* a^* - \varepsilon^2 C^* c^*_x + \varepsilon^2 C^* d^*_{xx} - 2\varepsilon C^* \vartheta, & -\varepsilon A^* b^* + \varepsilon D^* a^* + \varepsilon^2 C^* b^*, & 0, \\
-\varepsilon A^* b^* + \varepsilon D^* a^* + \varepsilon^2 C^* b^*, & 2\varepsilon C^* + 2(B^* + D^*)\,\varepsilon b^*, & \varepsilon(B^* + D^*)\,c^* - \varepsilon D^* d^*_x, \\
0, & \varepsilon(B^* + D^*)\,c^* - \varepsilon D^* d^*_x, & \varepsilon D^* d^*_t - 2\varepsilon^2 C^* d^* - 2\varepsilon C^* \delta, \\
-\tfrac{1}{2}\varepsilon^3 Q^* a^*, & \varepsilon B^* d^* - \tfrac{1}{2}\varepsilon^3 Q^* b^*, & \varepsilon^2 P^* c^*_t - \tfrac{1}{2}\varepsilon^3 Q^* c^*, \\
\varepsilon^2 P^* a^*_x, & \varepsilon^2 P^* b^*_x, & \varepsilon^2 P^* a^*, \\
0, & 0, & 0, \\
\varepsilon^3 P^* a^*_{xx}, & \varepsilon^3 P^* b^*_{xx}, & 2\varepsilon^3 P^* a^*_x, \\
\tfrac{1}{2}\varepsilon^4 Q^* a^*, & \tfrac{1}{2}\varepsilon^4 Q^* b^*, & -\varepsilon^3 P^* c^*_x + \tfrac{1}{2}\varepsilon^4 Q^* c^*,
\end{array}\right.$$

$$\left. \begin{array}{lllll}
-\tfrac{1}{2}\varepsilon^3 Q^* a^*, & \varepsilon^2 P^* a^*_x, & 0, & \varepsilon^3 P^* a^*_{xx}, & \tfrac{1}{2}\varepsilon^4 Q^* a^* \\
\varepsilon B^* d^* - \tfrac{1}{2}\varepsilon^3 Q^* b^*, & \varepsilon^2 P^* b^*_x, & 0, & \varepsilon^3 P^* b^*_{xx}, & \tfrac{1}{2}\varepsilon^4 Q^* b^* \\
\varepsilon^2 P^* c^*_t - \tfrac{1}{2}\varepsilon^3 Q^* c^*, & \varepsilon^2 P^* a^*, & 0, & 2\varepsilon^3 P^* a^*_x, & -\varepsilon^3 P^* c^*_t + \tfrac{1}{2}\varepsilon^4 Q^* c^* \\
-2\varepsilon C^*(1 - \delta - \vartheta) - \varepsilon^3 Q^* d^*, & \varepsilon^2 P^* c^* + \varepsilon^2 P^* d^*_x, & 0, & \varepsilon^3 P^* a^* + \varepsilon^3 P^* d^*_{xx}, & \tfrac{1}{2}\varepsilon^4 Q^* d^* \\
\varepsilon^2 P^* c^* + \varepsilon^2 P^* d^*_x, & 2\varepsilon^2 P^* b^* + \varepsilon^2 Q^*, & \varepsilon^2 P^* d^*, & 2\varepsilon^3 P^* b^*_x, & -\varepsilon^3 P^* c^* \\
0, & \varepsilon^2 P^* d^*, & -\varepsilon^2 Q^*, & 2\varepsilon^3 P^* d^*_x, & 0 \\
\varepsilon^3 P^* a^* + \varepsilon^3 P^* d^*_{xx}, & 2\varepsilon^3 P^* b^*_x, & 2\varepsilon^3 P^* d^*_x, & \varepsilon^3 Q^* + 2\varepsilon^2 P^* b^*, & \varepsilon^3 P^* d^* \\
\tfrac{1}{2}\varepsilon^4 Q^* d^*, & -\varepsilon^3 P^* c^*, & 0, & \varepsilon^3 P^* d^*, & -\varepsilon^3 Q^*
\end{array} \right\| .$$

Очевидно, что для диагональных определителей $D_i(V_1)\,(i = 1, \ldots, 8)$ матрицы V_1 справедливы следующие формулы:

$$D_1(V_1)(t, x) = \tfrac{1}{4}(B^* + D^*) + O(\varepsilon)\,, \quad D_2(V_1)(t, x) = \tfrac{1}{4}(B^* + D^*)^2 + O(\varepsilon)\,,$$

$$D_3(V_1)(t, x) = \tfrac{1}{16}(B^* + D^*)^3 + O(\varepsilon)\,, \quad D_4(V_1)(t, x) = \tfrac{1}{32}(B^* + D^*)^4 + O(\varepsilon)\,,$$

$$D_5(V_1)(t, x) = \tfrac{1}{32}\varepsilon(B^* + D^*)^4\, P^* + O(\varepsilon^2)\,, \quad D_6(V_1)(t, x) = \tfrac{1}{32}\varepsilon^2(B^* + D^*)^4 \,.$$

$$.\, P^{*2} + O(\varepsilon^3)\,, \quad D_7(V_1)(t, x) = \tfrac{1}{32}\varepsilon^4(B^* + D^*)^4 \,.\, P^{*3} + O(\varepsilon^5)\,,$$

$$D_8(V_1)(t, x) = \tfrac{1}{32}\varepsilon^6(B^* + D^*)^4 \,.\, P^{*4} + O(\varepsilon^7)\,.$$

Отсюда мы видим, что существуют $\varepsilon_1 > 0$ и $\varkappa(\varepsilon) > 0$ так, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, $t \in [0, +\infty)$ и $x \in [0, \pi]$

$$D_i(V_1)(t, x) > \varkappa(\varepsilon)\,, \quad (i = 1, \ldots, 8)\,,$$

что в силу теоремы 1.3 доказывает равномерную положительную определенность матрицы V_1 для $t \in [0, +\infty)$, $x \in [0, \pi]$. Обозначим теперь диагональные определители матрицы M символами $D_1(M)(t, x), \ldots, D_4(M)(t, x)$ и диагональные определители матрицы N символами $D_1(N)(t, x)$, $D_2(N)(t, x)$. По (ii) и теореме 1.3 существует $\varkappa' > 0$ так, что для всех $t \in [0, +\infty)$ и $x \in [0, \pi]$ выполнены неравенства

$$(-1)^i D_i(M)(t, x) > \varkappa' \quad (i = 1, \dots, 4),$$
$$(-1)^j D_j(N)(t, x) > \varkappa' \quad (j = 1, 2).$$

Нетрудно показать, что для диагональных определителей $D_i(W_1)$ $(i = 1, \dots, 8)$ матрицы W_1 имеют место формулы

$$D_1(W_1)(t, x) = \varepsilon D_1(M)(t, x) + O(\varepsilon^2),$$
$$D_2(W_1)(t, x) = \varepsilon^2 D_2(M)(t, x) + O(\varepsilon^3),$$
$$D_3(W_1)(t, x) = \varepsilon^3 D_3(M)(t, x) + O(\varepsilon^4),$$
$$D_4(W_1)(t, x) = \varepsilon^4 D_4(M)(t, x) + O(\varepsilon^5),$$
$$D_5(W_1)(t, x) = \varepsilon^6 D_4(M)(t, x) . D_1(N)(t, x) + O(\varepsilon^7),$$
$$D_6(W_1)(t, x) = \varepsilon^8 D_4(M)(t, x) . D_2(N)(t, x) + O(\varepsilon^9),$$
$$D_7(W_1)(t, x) = \varepsilon^{11} D_4(M)(t, x) . D_2(N)(t, x) . D_1(N)(t, x) + O(\varepsilon^{12}),$$
$$D_8(W_1)(t, x) = \varepsilon^{14} D_4(M)(t, x) . D_2^2(N)(t, x) + O(\varepsilon^{15}).$$

Из этого следует, что существуют $\varepsilon_2 > 0$ и $\varkappa''(\varepsilon) > 0$ так, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$, $t \in [0, +\infty)$ и $x \in [0, \pi]$

$$(-1)^i D_i(W_1)(t, x) > \varkappa''(\varepsilon) \quad (i = 1, \dots, 8).$$

По теореме 1.3 матрица W_1 равномерно отрицательно определена для $t \in$ $\in [0, +\infty)$, $x \in [0, \pi]$. Полагая $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, мы видим, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполнено условие (v) теоремы 2.1.

Аналогично можно доказать следующие теоремы:

Теорема 3.2. *Пусть*

(i) *функции* a^*, b^*, c^*, d^* *ограничены вместе со своими производными* a_t^* b_t^*, c_t^*, d_t^*, a_x^*, b_x^*, c_x^*, d_{xx}^* *на множестве* $[0, +\infty) \times [0, \pi]$,

(ii) *выполнены условия* (ii), (iii) *теоремы* 3.1.

Потом существует $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *нулевое решение проблемы* (3.1), (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в целом в норме* $\|\cdot\|_2$.

Теорема 3.3. *Пусть*

(i) *функции* a^*, b^*, c^*, d^* *ограничены вместе со своими производными* a_t^*, b_t^*, c_t^*, d_t^*, c_x^*, d_{xx}^* *на множестве* $[0, +\infty) \times [0, \pi]$,

(ii) *выполнено условие* (ii) *теоремы* 3.1.

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *нулевое решение проблемы* (3.1), (0.2) *равномерно экспоненциально устойчиво в целом в норме* $\|\cdot\|_3$.

Литература

[1] *Barták J.*: Lyapunov Stability and Stability at Constantly Acting Disturbances of an Abstract Differential Equation of the Second Order, Czechoslovak Mathematical Journal, *26* (*101*) 1976, 411—437.

[2] *Barták J.*: The Lyapunov Stability of the Timoshenko Type Equation, Časopis pro pěstování matematiky, roč. *101*, 1976, 130—139.

[3] *Гантмахер Ф. Р.*: Теория матриц, Издательство Наука, Москва 1966.

[4] *Leipholz H. H. E.*: Stability of Elastic Rods via Liapunov's Second Method, Ingenieur — Archiv *44*, 1975, 21—26.

[5] *Nachlinger R. R., Faust C. D.*: On the Stability of a Linearly Viscoelastic Bar, ZAMM *52*, 1972, 179—181.

[6] *Neustupa J.*: The Uniform Exponential Stability and the Uniform Stability at Constantly Acting Disturbances of a Periodic Solution of a Wave Equation, Czechoslovak Mathematical Journal, *26* (*101*) 1976, 388—410.

[7] *Parks P. C.*: A Stability Criterion for a Panel Flutter Problem via the Second Method of Liapunov, Differential Equations and Dynamical Systems, 1967, 287—298.

[8] *Wang P. K. C.*: Stability Analysis of Elastic and Aeroelastic Systems via Lyapunovs Direct Method, Journal of the Franklin Institute, Vol *281*, No 1, 1966, 51—72.

Адрес авторов: J. Barták, 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV), J. Neustupa, 166 07 Praha 6 - Dejvice, Suchbátarova 4 (Katedra aplikované matematiky a výpočtové techniky strojní fakulty ČVUT).

Časopis pro péstování matematiky, roč. 104 (1979), Praha

EMBEDDING TREES INTO CLIQUE-BRIDGE-CLIQUE GRAPHS

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Received January 11, 1977)

The paper [2] concerns embedding trees into graphs which have exactly two blocks, each of them being a clique. Now we shall study a similar problem – embedding trees into graphs which consist of two vertex-disjoint cliques and of a bridge between them. Such a graph will be called a clique-bridge-clique graph (shortly CBC-graph).

Let n and k be two positive integers, $2 \leqq k \leqq [\frac{1}{2}n]$. By $H_n(k)$ we denote the CBC-graph in which one of the mentioned cliques has k and the other $n - k$ vertices. We shall investigate the conditions for a tree with n vertices to be embeddable into $H_n(k)$.

We shall use some concepts from [2]. A median of a tree T with n vertices is a vertex a of T at which the vertex deviation $m_1(a)$ attains its minimum. The vertex deviation is defined by

$$m_1(a) = \frac{1}{n} \sum_{x \in V} d(a, x),$$

where V is the vertex set of T and $d(a, x)$ denotes the distance between a and x in T. A tree has either exactly one median, or exactly two medians which are joined by an edge.

We recall also the definition of a branch. Let a be a vertex of a tree T. We define a binary relation E on the set of vertices of T which are distinct from a such that $(x, y) \in E$ if and only if the vertex a does not separate x from y in T (this means that the path connecting x and y in T does not contain a). The relation E is evidently an equivalence. The subtree of T induced by the union of one class of E with the one-element set $\{a\}$ is called a branch of T with the knag a.

Theorem 1. *Let n be an even positive integer, $n \geqq 4$. A tree T with n vertices can be embedded into $H_n(\frac{1}{2}n)$ if and only if it has two medians.*

Prpof. The weight of a vertex v of a tree T is defined in [1] as the maximal number of edges of a branch with the knag v. In [3] it is proved that a vertex of a tree has the minimal weight if and only if it is a median of this tree. Let T be a tree with n vertices and two medians. By Theorem 3 from [2] it can be embedded into the graph $G_n(\frac{1}{2}n)$ consisting of two blocks which are both cliques, one of them has $\frac{1}{2}n$, the other $\frac{1}{2}n + 1$ vertices. Let the former be B_1, the latter B_2. Let a be the vertex of T which is mapped onto the cut vertex of $G_n(\frac{1}{2}n)$ in this embedding. The weight of a is evidently at most $\frac{1}{2}n$, the weight of any vertex mapped onto a vertex of B_1 which is not a cut vertex is greater than $\frac{1}{2}n$, because there exists a branch with this vertex as a knag which contains all vertices which are embedded into B_2. Thus a is a median of T and the other median a' of T is mapped onto a vertex of B_2. The vertex a cannot be joined in T with other vertex embedded into B_2 than a'. If we delete from $G_n(\frac{1}{2}n)$ all edges joining a with vertices of B_2 except for the edge aa', we obtain the graph $H_n(\frac{1}{2}n)$ and T is embedded into $H_n(\frac{1}{2}n)$. On the other hand, let a tree T be embedded into $H_n(\frac{1}{2}n)$, let a and a' be the vertices of T which are mapped onto the end vertices of the bridge of $H_n(\frac{1}{2}n)$ in this embedding. Then evidently the weights of a and a' are both equal to $\frac{1}{2}n$ and the weights of all other vertices are greater. Therefore a and a' are medians of T.

Theorem 2. *Let T be a tree with $n \geqq 4$ vertices. The tree T can be embedded into $H_n([\frac{1}{2}n])$ if and only if the weight of its median is $[\frac{1}{2}(n + 1)]$.*

Proof. First we shall prove necessity of the condition. If n is even, then $[\frac{1}{2}(n + 1)] = [\frac{1}{2}n] = \frac{1}{2}n$. By Theorem 1 the tree T can be embedded into $H_n(\frac{1}{2}n)$ if and only if it has two medians. Thus let T have two medians a and a'. Let B (or B') be the branch of T with the knag a (or a') which contains a' (or a, respectively). If B has less than $w(a)$ edges (where $w(a)$ denotes the weight of a), then there exists a branch with the knag a other than B which has $w(a)$ edges. It is a proper subtree of B', therefore B' has more than $w(a)$ edges and a' is not a median, which is a contradiction. Therefore B has $w(a)$ edges and analogously B' has $w(a') = w(a)$ edges. The branches B and B' have exactly one common edge aa' and their union is the whole tree T, therefore $n - 1 = 2\,w(a) - 1$ and $w(a) = \frac{1}{2}n$. We have proved necessity of the condition for n even. Now let n be odd. Then $[\frac{1}{2}(n + 1)] = \frac{1}{2}(n + 1)$, $[\frac{1}{2}n] = \frac{1}{2}(n - 1)$. Suppose that the weight $w(a)$ of a median a of T is greater than $\frac{1}{2}(n + 1)$. Let b be the vertex adjacent to a and belonging to the branch with the knag a which has $w(a)$ edges. The branch with the knag b which contains a has $n - w(a)$ edges, the sum of numbers of edges of other branches with the knag b is $w(a) - 1$. Thus $w(b) \leqq \min(w(a) - 1, n - w(a))$. We have $w(a) - 1 > \frac{1}{2}(n + 1) - 1 = \frac{1}{2}(n - 1)$, $n - w(a) < n - \frac{1}{2}(n + 1) = \frac{1}{2}(n - 1)$, therefore $w(b) \leqq \frac{1}{2}(n - 1) < w(a)$ and this is a contradiction with the assumption that a is a median of T. Therefore $w(a) \leqq \frac{1}{2}(n + 1)$. Now let v be a vertex of T which is not a median of T; let again a be a median of T. Let B (or B') be the branch of T with the knag v (or a) which contains a (or v, respectively). If there is a branch with the knag v with $w(v)$ edges other than B, then B' contains all this branch and, moreover, the path connecting a and v, thus it has more than $w(v)$ edges and $w(a) > w(v)$, which is a contradiction. Thus B has $w(v)$ edges. Suppose that $w(v) < \frac{1}{2}(n + 1)$. The sum of numbers of edges of branches with the knag a other than B' is less than $w(v)$, therefore B' has at least $n - w(v)$ edges and $w(a) \geqq n - w(v)$, which implies $w(v) \geqq n - w(a)$. As $w(a) \leqq \frac{1}{2}(n + 1)$, we have $w(v) \geqq n - \frac{1}{2}(n + 1) = \frac{1}{2}(n - 1)$. We have proved that $w(v)$ can be less than $\frac{1}{2}(n - 1)$ only if v is a median of T. Let T be embedded into $H_n(\frac{1}{2}(n - 1))$. Let B_1 be the clique of $H_n(\frac{1}{2}(n - 1))$ with $\frac{1}{2}(n - 1)$ vertices, let u be the vertex of T which is mapped onto the end vertex of the bridge of $H_n(\frac{1}{2}(n - 1))$ belonging to B_1. The vertices of T which are mapped onto vertices of $H_n(\frac{1}{2}(n - 1))$ not belonging to B_1 together with u form a branch of T with the knag u. This branch has $\frac{1}{2}(n + 1)$ edges, thus $w(u) = \frac{1}{2}(n + 1)$ and u is a median of T.

Now we shall prove sufficiency of the condition. Let $w(a) = [\frac{1}{2}(n + 1)]$ for a median a of T. Then evidently T can be embedded into $H_n([\frac{1}{2}n])$ so that a is mapped onto the end vertex of the bridge belonging to the clique with $[\frac{1}{2}n]$ vertices and all vertices of the branch with the knag a having $w(a)$ edges except for a are mapped onto the vertices of the other clique.

Theorem 3. *Let T be a tree with $n \geqq 4$ vertices, let T contain a subtree T' which is a snake and one terminal vertex of which is a median of T. Let T' have $[\frac{1}{2}n]$ vertices. Then T can be embedded into $H_n(k)$ for all $k = 2, \ldots, [\frac{1}{2}n]$.*

Remark. A snake is a tree which consists of vertices and edges of one simple path.

Proof. Let the vertices of the snake T' be $u_0, \ldots, u_m$, where $m = [\frac{1}{2}n]$. Let u_m be the median of T. Then for each $k = 2, \ldots, [\frac{1}{2}n]$ we can embed T into $H_n(k)$ so that the end vertices of the bridge coincide with the vertices u_k and u_{k+1}.

Theorem 4. *Let $n \geqq 4$ be a positive integer, let K be a subset of the number set $\{2, \ldots, [\frac{1}{2}n]\}$. Then there exists a tree with n vertices which can be embedded into $H_n(k)$ for each $k \in K$ and cannot be embedded into $H_n(k)$ for $k \notin K$.*

Proof. We shall use the concept of caterpillar (introduced by F. HARARY). A caterpillar is a tree with the property that after deleting all terminal vertices from it a snake is obtained. This snake is called the body of the caterpillar [4]. If the vertices of the body are $u_0, \ldots, u_m$ and the edges u_iu_{i+1} for $i = 0, 1, \ldots, m - 1$, then we denote by α_i the number of terminal vertices of the caterpillar which are adjacent to u_i for $i = 0, 1, \ldots, m$. Thus we assign a vector $[\alpha_0, \ldots, \alpha_m]$ to the caterpillar. For $K \neq \emptyset$ the required tree is a caterpillar with the vector $[\alpha_0, \ldots, \alpha_m]$ which is described as follows. Let $K = \{k_1, \ldots, k_q\}$ and let $k_i < k_j$ for $i < j$. Then $m = 2q - 1$, $\alpha_0 = k_1$, $\alpha_i = k_{i+1} - k_i$ for $i = 1, \ldots, q - 1$. Further $\alpha_{m-i} = \alpha_i$ for $i = 0, 1, \ldots, q - 1$. The caterpillar C can be embedded into $H_n(k_i)$ so that onto the end vertices of the bridge of $H_n(k_i)$ the vertices u_{i-1}, u_i or the vertices u_{m-i+1}, u_{m-i} are mapped. On the other hand, the unique edges of C which can be mapped onto bridges of $H_n(k)$ for some k are the edges of the body of C and to each of them a unique k exists with this property. Thus C cannot be embedded into $H_n(k)$ for $k \notin K$. For $K = \emptyset$ the required tree is a star.

In [4], embedding rooted trees into rooted block graphs was defined. A graph is called rooted, if one of its vertices is fixed and called the root of the graph. By $H_n^*(k)$ for $k = 2, \ldots, n - 2$ we denote the graph consisting of two vertex-disjoint cliques, one with k, the other with $n - k$ vertices, with a bridge between them, which is rooted at a vertex of the clique with k vertices non-incident with the bridge.

Theorem 5. *Let T be a rooted tree with $n \geqq 4$ vertices. The tree T can be embedded into $H_n^*(k)$ for each $k = 2, \ldots, n - 2$ so that its root coincides with the root of $H_n^*(k)$ if and only if T is a snake whose root is a terminal vertex.*

Proof. Let T be a rooted snake with vertices $u_1, \ldots, u_n$ and edges $u_i u_{i+1}$ for $i = 1, \ldots, n - 1$. Let u_1 be its root. Then evidently T can be embedded into $H_n^*(k)$ for $k = 2, \ldots, n - 2$ in the required way so that the edge $u_k u_{k+1}$ is mapped onto the bridge of $H_n^*(k)$. Now suppose that T is a rooted tree whose root is not a terminal vertex. Then this root r has the degree at least 2. The tree T cannot be embedded into $H_n^*(2)$, because the root of $H_n^*(2)$ has the degree 1. Now let T be a rooted tree whose root r is its terminal vertex, but not a snake. Then T contains at least one vertex of a degree greater than 2; let u be such a vertex whose distance from r is minimal. Let $d(r, u) = h$. Then T cannot be embedded into $H_n^*(h + 1)$, because at this embedding all vertices of the path connecting r and u would have to be contained in the clique with $h + 1$ vertices and all vertices adjacent to u and not belonging to this path (they are at least two) would be embedded into the other clique and there would be at least two edges joining vertices of different cliques of $H_n(h + 1)$, which is impossible.

References

[1] *O. Ore:* Theory of Graphs. Providence 1962.
[2] *B. Zelinka:* Embedding trees into block graphs. Czech. Math. J. *26* (1976), 273—279.
[3] *B. Zelinka:* Medians and peripherians of trees. Arch. Math. Brno *4* (1968), 87—95.
[4] *B. Zelinka:* Caterpillars. Časop. pěst. mat. *102* (1977), 179—185.

Author's address: 460 01 Liberec 1, Komenského 2 (katedra matematiky VŠST).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 104 (1979), Praha

FREDHOLM-STIELTJES INTEGRAL EQUATIONS WITH LINEAR CONSTRAINTS: DUALITY THEORY AND GREEN'S FUNCTION

MILAN TVRDÝ, Praha*)

(Received February 16, 1977)

This note is devoted to the duality theory for the system of equations

$$\text{(I)} \qquad \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(0) - \int_0^1 \mathrm{d}_s[\boldsymbol{P}(t, s) - \boldsymbol{P}(0, s)]\, \boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(0) \quad \text{on} \quad [0, 1]\,,$$

$$\text{(II)} \qquad \int_0^1 \mathrm{d}[\boldsymbol{K}(s)]\, \boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{r}\,,$$

where an n-vector valued function $\boldsymbol{x}$ of bounded variation on $[0, 1]$ is sought. Results analogous to those of [4], [10], [11] and [14] are obtained under less restrictive hypotheses and in a considerably simpler way. Boundary value problems for Fredholm-Stieltjes integro-differential equations which are special cases of (I) have been treated recently in [5], [12] and [13].

1. PRELIMINARIES

Given a real $p \times q$-matrix $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,p,\\ j=1,\dots,q}}$ $\boldsymbol{A}^*$ denotes its transpose and

$$|\boldsymbol{A}| = \max_{i=1,\dots,p} \sum_{j=1}^{q} |a_{i,j}|\,.$$

R_n denotes the space of real column n-vectors ($n \times 1$-matrices), R_n^* is the space of real row n-vectors ($1 \times n$-matrices), $R_1 = R_1^* = R$. The space of real $p \times q$-matrices is denoted by $L(R_q, R_p)$, $L(R_n, R_n) = L(R_n)$. Generally, vectors are assumed to be column. Row vectors are written as transposes of column vectors. If $a, b \in R$, $a < b$, then $[a, b]$ denotes the closed interval $a \leqq t \leqq b$, (a, b) is its interior $a < t < b$ and $[a, b)$, $(a, b]$ are the corresponding half-open intervals.

*) Sponsored in part by the Italian Consiglio Nazionale delle Ricerche (G.N.A.F.A.)

BV_n stands for the Banach space of functions $\mathbf{x} : [0, 1] \to R_n$ of bounded variation on $[0, 1]$ equipped with the norm $\|\mathbf{x}\|_{BV} = |\mathbf{x}(0)| + \operatorname{var}_0^1 \mathbf{x}$. For $\mathbf{P} : [0, 1] \times \times [0, 1] \to L(R_n)$, $v(\mathbf{P})$ denotes its Vitali two-dimensional variation on $[0, 1] \times \times [0, 1]$. Recall that

$$v(\mathbf{P}) = \sup \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} |\mathbf{P}(t_i, s_j) - \mathbf{P}(t_{i-1}, s_j) - \mathbf{P}(t_i, s_{j-1}) + \mathbf{P}(t_{i-1}, s_{j-1})|$$

where the supremum is taken over all net-type subdivisions $\sigma = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots \ldots < t_p = 1, 0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_q = 1\}$ of the interval $[0, 1] \times [0, 1]$. If $v(\mathbf{P}) + \operatorname{var}_0^1 \mathbf{P}(\cdot, a) + \operatorname{var}_0^1 \mathbf{P}(b, \cdot) < \infty$ for some fixed $a, b \in [0, 1]$, then there is $M < \infty$ such that $v(\mathbf{P}) + \operatorname{var}_0^1 \mathbf{P}(t, \cdot) + \operatorname{var}_0^1 \mathbf{P}(\cdot, s) + |\mathbf{P}(t, s)| \leqq M < \infty$ for all $t, s \in [0, 1]$ and $\mathbf{P}$ is called an SBV-kernel.

All integrals used are the Perron-Stieltjes integrals or equivalently (since all the functions occurring are of bounded variation) the σ-Young-Stieltjes integrals (cf. [3] and [7]). The list of properties of the Perron-Stieltjes integral may be found e.g. in [10] or [14]. Let us recall here only (for the proof see [8]) that if $\mathbf{P}$ is an SBV-kernel on $[0, 1] \times [0, 1]$, then for every $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in BV_n$ the functions

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^1 \mathrm{d}_\tau[\mathbf{P}(t, \tau)]\, \mathbf{x}(\tau) \quad \text{and} \quad \mathbf{v}^*(s) = \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{y}^*(\tau)]\, \mathbf{P}(\tau, s)$$

are of bounded variation on $[0, 1]$. Moreover,

$$\mathbf{u}(t+) = \int_0^1 \mathrm{d}_\tau[\mathbf{P}(t+, \tau)]\, \mathbf{x}(\tau) \quad \text{and} \quad \mathbf{v}^*(s+) = \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{y}^*(\tau)]\, \mathbf{P}(\tau, s+) \quad \text{for} \quad t, s \in [0, 1)$$

and

$$\mathbf{u}(t-) = \int_0^1 \mathrm{d}_\tau[\mathbf{P}(t-, \tau)]\, \mathbf{x}(\tau) \quad \text{and} \quad \mathbf{v}^*(s-) = \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{y}^*(\tau)]\, \mathbf{P}(\tau, s-) \quad \text{for} \quad t, s \in (0, 1].$$

Let X and Y be linear spaces over R. The set of all linear operators $\mathscr{A}$ with values in Y and defined for all $\mathbf{x} \in X$ ($\mathscr{A} : X \to Y$) is denoted by $L(X, Y)$, $L(X, X) = L(X)$. The identity operator $\mathbf{x} \in X \to \mathbf{x} \in X$ is denoted by $\mathscr{I}$. For a linear operator $\mathscr{A} \in \in L(X, Y)$, $R(\mathscr{A})$ denotes the range of $\mathscr{A}$ and $N(\mathscr{A})$ is the null space of $\mathscr{A}$. $R(\mathscr{A})$ and $N(\mathscr{A})$ are linear subspaces of Y and X, respectively. Let us denote $\alpha(\mathscr{A}) = \dim N(\mathscr{A})$ and $\beta(\mathscr{A}) = \dim {}^{Y}|_{R(\mathscr{A})}$, where ${}^{Y}|_{R(\mathscr{A})}$ is the corresponding quotient space. It is known that if Y is a direct sum of $R(\mathscr{A})$ and $Z \subset Y$, then there is a one-to-one correspondence between ${}^{Y}|_{R(\mathscr{A})}$ and Z (cf. [2] III.20) and, in particular, $\beta(\mathscr{A}) = \dim Z$. If $\alpha(\mathscr{A})$, $\beta(\mathscr{A})$ are not both infinite, then we define the index $\operatorname{ind} \mathscr{A}$ of $\mathscr{A} \in L(X, Y)$ by the relation $\operatorname{ind} \mathscr{A} = \beta(\mathscr{A}) - \alpha(\mathscr{A})$.

Let X and X^+ be linear spaces over R and let

$$\mathbf{x} \in X, \quad \mathbf{x}^+ \in X^+ \to \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^+ \rangle \in R$$

be a bilinear form on $X \times X^+$. We say that X, X^+ form a dual pair (with respect to the bilinear form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ if

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^+ \rangle = 0 \quad \text{for every} \quad \mathbf{x} \in X \quad \text{implies} \quad \mathbf{x}^+ = 0 \in X^+$$

and

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^+ \rangle = 0 \quad \text{for every} \quad \mathbf{x}^+ \in X^+ \quad \text{implies} \quad \mathbf{x} = \mathbf{0} \in X .$$

In [2] VI.40 the following important statement is proved:

Theorem (Heuser). *Let X, X^+ be a dual pair of linear spaces with respect to the bilinear form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ defined on $X \times X^+$ and let the operators $\mathscr{A} \in L(X)$ and $\mathscr{A}^+ \in L(X^+)$ be such that*

$$\langle \mathscr{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}^+ \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathscr{A}^+\mathbf{x}^+ \rangle \quad \textit{for every} \quad \mathbf{x} \in X \quad \textit{and} \quad \mathbf{x}^+ \in X^+ \tag{1,1}$$

and

$$\operatorname{ind} \mathscr{A} = \operatorname{ind} \mathscr{A}^+ = 0 . \tag{1,2}$$

Then

$$\alpha(\mathscr{A}) = \alpha(\mathscr{A}^+) = \beta(\mathscr{A}) = \beta(\mathscr{A}^+) < \infty \tag{1,3}$$

and, moreover, for given $\mathbf{y} \in X$ and $\mathbf{y}^+ \in X^+$

$$\mathscr{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \textit{has a solution iff} \quad \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}^+ \rangle = 0 \quad \textit{for any} \quad \mathbf{x}^+ \in N(\mathscr{A}^+)$$

and

$$\mathscr{A}^+\mathbf{x}^+ = \mathbf{y}^+ \quad \textit{has a solution iff} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}^+ \rangle = 0 \quad \textit{for any} \quad \mathbf{x} \in N(\mathscr{A}) .$$

Let us notice that if $\mathscr{A} \in L(X)$ is compact, then $R(\mathscr{I} - \mathscr{A})$ is closed in X, $\alpha(\mathscr{I} - \mathscr{A}) = \beta(\mathscr{I} - \mathscr{A}) < \infty$, i.e. $\operatorname{ind}(\mathscr{I} - \mathscr{A}) = 0$ (cf. [6] IV.3).

If X is a Banach space and X^* its dual space, then obviously X, X^* form a dual pair. Let us give another example of a dual pair which is of importance for our purposes.

In the following BV_n^+ denotes the set of all functions $\mathbf{z}^* : [0, 1] \to R_n$ of bounded variation on $[0, 1]$, right-continuous on $(0, 1)$ and such that $\mathbf{z}^*(1) = \mathbf{0}$. For $\mathbf{x} \in BV_n$ and $\mathbf{z}^* \in BV_n^+$ let us put

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{z}^* \rangle_{BV} = \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}^*(t)]\, \mathbf{x}(t) . \tag{1,4}$$

Then BV_n, BV_n^+ is a dual pair with respect to $\langle \cdot, \cdot \rangle_{BV}$. (For the proof of an analogous assertion see [8] Lemma 5.1.) When endowed with the norm $\mathbf{z}^* \in BV_n^+ \to \|\mathbf{z}^*\|_{BV^+} = |\mathbf{z}^*(0)| + \operatorname{var}_0^1 \mathbf{z}^*$, the space BV_n^+ becomes a Banach space and (1,4) defines a continuous bilinear form on $BV_n \times BV_n^+$.

2. GENERALIZED FREDHOLM-STIELTJES INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATOR

Let $\mathbf{P} : [0, 1] \times [0, 1] \to L(R_n)$ be an SBV-kernel. Then

$$\mathscr{P} : \mathbf{x} \in BV_n \to \int_0^1 \mathrm{d}_s[\mathbf{P}(t, s)]\, \mathbf{x}(s) \tag{2,1}$$

defines a linear compact (or completely continuous) operator on BV_n (cf. [8] Theorem 3.1).

2.1. Remark. Let $\mathbf{R} : [0, 1] \times [0, 1] \to L(R_n)$ be such that $\mathbf{R}(\cdot, s)$ is measurable on $[0, 1]$ for any $s \in [0, 1]$, $\operatorname{var}_0^1 \mathbf{R}(t, \cdot) < \infty$ for a.e. $t \in [0, 1]$ and

$$\varrho : t \in [0, 1] \to |\mathbf{R}(t, 0)| + \operatorname{var}_0^1 \mathbf{R}(t, \cdot)$$

is Lebesgue integrable on $[0, 1]$. Let $\mathbf{g} : [0, 1] \to R_n$ be Lebesgue integrable on $[0, 1]$. Then integrating and making use of the Cameron-Martin formula for the change of the integration order in Stieltjes integrals ([1]) we transfer the Fredholm-Stieltjes integro-differential equation for an absolutely continuous function $\mathbf{x} : [0, 1] \to R_n$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \int_0^1 \mathrm{d}_s[\mathbf{R}(t, s)]\, \mathbf{x}(s) = \mathbf{g}(t) \quad \text{a.e. on} \quad [0, 1] \tag{2,2}$$

to the form (I), where

$$\mathbf{P}(t, s) = \int_0^t \mathbf{R}(\tau, s)\, \mathrm{d}\tau \quad \text{and} \quad \mathbf{f}(t) = \int_0^t \mathbf{g}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \quad \text{for} \quad t, s \in [0, 1]\,. \tag{2,3}$$

It is easy to check that $\mathbf{P}(t, s)$ given by (2,3) is an SBV-kernel (cf. [10]). Obviously $\mathbf{f} \in BV_n$. Thus the equation (2,2) may always be rewritten as an equation of the form (I) with an SBV-kernel $\mathbf{P}(t, s)$ and $\mathbf{f} \in BV_n$. Hence the operator $\mathscr{I} - \mathscr{Q} \in L(BV_n)$, where

$$\mathscr{Q} : \mathbf{x} \in BV_n \to \mathbf{x}(0) + \int_0^1 \mathrm{d}_s[\mathbf{P}(t, s) - \mathbf{P}(0, s)]\, \mathbf{x}(s) \in BV_n \tag{2,4}$$

may be called a *generalized Fredholm-Stieltjes integro-differential operator.*

2.2. Remark. Evidently, the operator $\mathscr{Q} \in L(BV_n)$ given by (2,4) is compact ($\mathscr{Q}\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathscr{P}\mathbf{x}$, where

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}(0) - \int_0^1 \mathrm{d}_s[\mathbf{P}(0, s)]\, \mathbf{x}(s) \in R_n)\,.$$

Moreover, if we put

$$\mathbf{Q}(t, s) = \begin{cases} \mathbf{P}(t, s) - \mathbf{P}(0, s) & \text{for} \quad t, s \in [0, 1]\,, \quad s > 0\,, \\ \mathbf{P}(t, 0) - \mathbf{P}(0, 0) - \mathbf{I} & \text{for} \quad t, s \in [0, 1]\,, \quad s = 0\,, \end{cases} \tag{2,5}$$

then $\mathbf{Q}(t, s)$ is also an SBV-kernel and

$$\mathscr{Q} : \boldsymbol{x} \in BV_n \to \int_0^1 \mathrm{d}_s[\mathbf{Q}(t, s)]\, \boldsymbol{x}(s) \in BV_n . \tag{2,6}$$

2.3. Theorem. *If $\boldsymbol{P} : [0, 1] \times [0, 1] \to L(R_n)$ is an SBV-kernel and the operator $\mathscr{Q} \in L(BV_n)$ is given by (2,4), then*

$$n \leqq \dim N(\mathscr{I} - \mathscr{Q}) < \infty , \tag{2,7}$$

while $\dim N(\mathscr{I} - \mathscr{Q}) = n$ *iff the equation* (I) *has a solution* $\boldsymbol{x} \in BV_n$ *for any* $\boldsymbol{f} \in BV_n$.

Proof. Since $\mathscr{Q}$ is compact, $\alpha(\mathscr{I} - \mathscr{Q}) = \beta(\mathscr{I} - \mathscr{Q}) < \infty$. Obviously

$$R(\mathscr{I} - \mathscr{Q}) \subset Z = \{\boldsymbol{f} \in BV_n : \boldsymbol{f}(0) = \boldsymbol{0}\} .$$

Hence

$$\alpha(\mathscr{I} - \mathscr{Q}) = \beta(\mathscr{I} - \mathscr{Q}) \geqq \dim {}^{BV_n}|_Z = n .$$

Furthermore, $\alpha(\mathscr{I} - \mathscr{Q}) = n$ iff

$$\beta(\mathscr{I} - \mathscr{Q}) = \dim {}^{BV_n}|_{R(\mathscr{I} - \mathscr{Q})} = \dim {}^{BV_n}|_Z$$

and the proof follows by means of the following lemma.

2.4. Lemma. *Given a linear space X and its linear subspaces M, N such that $M \subset N$, then* $\dim {}^X|_M = \dim {}^X|_N < \infty$ *holds iff $M = N$.*

Proof. Let $\dim {}^X|_M = \dim {}^X|_N = k < \infty$ and let $\boldsymbol{x} \in N \setminus M$. Let $\Xi_j = \xi^{(j)} + N$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ be a basis in ${}^X|_N$ and let

$$\alpha \boldsymbol{x} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \xi^{(j)} \in M$$

for some real numbers α, λ_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Since $\alpha \boldsymbol{x} \in N$, this may happen only if $\lambda_1 \xi^{(1)} + \lambda_2 \xi^{(2)} + \ldots + \lambda_k \xi^{(k)} \in N$, i.e. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$. Thus $\alpha \boldsymbol{x} \in M$ and $\alpha = 0$ since $\boldsymbol{x} \notin M$. This means that the classes $\boldsymbol{x} + M$, $\xi^{(j)} + M$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ are linearly independent in ${}^X|_M$ and $\dim {}^X|_M = k + 1 > \dim {}^X|_N$. This being contradictory to the assumption proves that $M = N$.

2.5. Remark. By 2.3 there exists an $n \times k$-matrix valued function $\boldsymbol{X}$ $(k = \dim N(\mathscr{I} - \mathscr{Q}))$ of bounded variation on $[0, 1]$ such that $\boldsymbol{x} \in BV_n$ satisfies $\boldsymbol{x} - \mathscr{Q}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ iff $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{X}(t)\, \boldsymbol{c}$ on $[0, 1]$ for some $\boldsymbol{c} \in R_k$. Unfortunately, even if $k = n$, it need not be $\det \boldsymbol{X}(t) \neq 0$ on $[0, 1]$ as shown by the integro-differential equation

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) - 4 \int_0^1 \boldsymbol{x}(s)\, \mathrm{d}s = \boldsymbol{0} ,$$

for which $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{I}(1 - 4t)$.

3. DUALITY THEORY

Throughout the section the following assumptions are kept:

3.1. Assumptions. (i) $\mathbf{P} : [0, 1] \times [0, 1] \to L(R_n)$ *is an SBV-kernel*, $\mathbf{f} \in BV_n$, $\mathbf{K} : [0, 1] \to L(R_n, R_m)$ *is of bounded variation on* $[0, 1]$ *and* $\mathbf{r} \in R_m$.

(ii) $\mathbf{P}(t, \cdot)$ *is right-continuous on* $(0, 1)$ *and* $\mathbf{P}(t, 1) = \mathbf{0}$ *for any* $t \in [0, 1]$, $\mathbf{P}(0, s) = \mathbf{0}$ *for any* $s \in [0, 1]$, $\mathbf{K}$ *is right-continuous on* $(0, 1)$ *and* $\mathbf{K}(1) = \mathbf{0}$.

3.2. Remark. For the investigation of the system (I), (II) the assumptions 3.1 (ii) do not cause any loss of generality. Any system (I), (II) fulfilling 3.1 (i) is equivalent to a system fulfilling also 3.1 (ii).

Let $\mathbf{Q} : [0, 1] \times [0, 1] \to L(R_n)$ and $\mathcal{Q} \in L(BV_n)$ be defined by (2,5) and (2,4), respectively. Furthermore, let us denote

$$\mathcal{K} : \mathbf{x} \in BV_n \to \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{K}(s)]\, \mathbf{x}(s) \in R_m\,, \tag{3,1}$$

$$\mathcal{S} : \mathbf{f} \in BV_n \to \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(0) \in BV_n$$

and

$$\mathcal{T} : \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} \in BV_n \times R_m \to \begin{pmatrix} \mathcal{Q}\mathbf{x} \\ \mathbf{d} - \mathcal{K}\mathbf{x} \end{pmatrix} \in BV_n \times R_m\,. \tag{3,2}$$

3.3. Proposition. *If* $\mathbf{x} \in BV_n$ *is a solution to* (I), (II), *then* $\xi = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}$ *is a solution to*

$$(\mathcal{I} - \mathcal{T})\, \xi = \begin{pmatrix} \mathcal{S}\mathbf{f} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \tag{3,3}$$

for any $\mathbf{d} \in R_m$. *If* $\mathbf{x} \in BV_n$ *and there exists* $\mathbf{d} \in R_m$ *such that* $\xi = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}$ *verifies* (3,3) *then* $\mathbf{x}$ *is a solution to* (I), (II).

3.4. Proposition. *Under the assumptions* 3.1(i) *the operator* $\mathcal{T} \in L(BV_n \times R_m)$ *defined by* (2,4), (3,1) *and* (3,2) *is compact.*

Proof. Obviously, $\mathcal{K} \in L(BV_n, R_m)$ is bounded. As $\dim R(\mathcal{K}) \leqq m < \infty$, this implies that $\mathcal{K}$ is even compact. Since $\mathcal{Q} \in L(BV_n)$ is also compact (cf. 2.2), it is easy to see that $\mathcal{T}$ is compact.

Our wish is to establish the duality theory for the system (I), (II). Since BV_n and BV_n^+ form a dual pair with respect to the bilinear form (1,4), $BV_n \times R_m$ and $BV_n^+ \times R_m^*$ form a dual pair with respect to the bilinear form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} \in BV_n \times R_m\,, \quad (\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in BV_n^+ \times R_m^* \to \tag{3,4}$$

$$\to \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}, (\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \right\rangle = \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}^*(t)]\, \mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\lambda}^* \mathbf{d} \in R\,.$$

(Let us recall that the elements of BV_n^+ are row n-vector valued functions of bounded variation on $[0, 1]$, right-continuous on $(0. 1)$ and vanishing at 1.)

Let us put

$$(\mathscr{Q}'\mathbf{z})(s) = \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}^*(t)]\, \mathbf{Q}(t, s) \quad \text{for} \quad \mathbf{z} \in BV_n \quad \text{and} \quad s \in [0, 1]\,.$$

By virtue of the assumptions 3.1 on $\mathbf{P}(t, s)$ and the definition (2,5) of $\mathbf{Q}(t, s)$ we can easily verify that $\mathbf{Q}$ is an SBV-kernel, $\mathbf{Q}(t, \cdot)$ is right-continuous on $(0, 1)$ and $\mathbf{Q}(t, 1) = \mathbf{0}$ for every $t \in [0, 1]$. Consequently (cf. [8] Lemma 3.1)

$$\text{(3,5)} \qquad \mathscr{Q}'\mathbf{z} \in BV_n^+ \quad \text{for any} \quad \mathbf{z} \in BV_n\,.$$

Moreover, by Lemma 2.2 of [8] we have

$$\text{(3,6)} \qquad \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}^*(t)] \int_0^1 \mathrm{d}_s[\mathbf{Q}(t, s)]\, \mathbf{x}(s) = \int_0^1 \mathrm{d}_s\left[\int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}^*(t)]\, \mathbf{Q}(t, s)\right] \mathbf{x}(s)$$

for every $\mathbf{z} \in BV_n^+$ and $\mathbf{x} \in BV_n$.

Let us put

$$\text{(3,7)} \qquad \mathscr{T}^+ : (\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in BV_n^+ \times R_m^* \to$$
$$\to \left(\int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}^*(t)]\, \mathbf{Q}(t, s) - \boldsymbol{\lambda}^*\, \mathbf{K}(s), \boldsymbol{\lambda}^*\right).$$

Since

$$\mathscr{T}^+(\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)(s) = ((\mathscr{Q}'\mathbf{z})(s) - \boldsymbol{\lambda}^*\, \mathbf{K}(s), \boldsymbol{\lambda}^*) \quad \text{on} \quad [0, 1]\,,$$

for each $\mathbf{z} \in BV_n$ and $\boldsymbol{\lambda} \in R_m$, it follows from 3.1 and (3,5) that

$$\text{(3,8)} \qquad \mathscr{T}^+(\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in BV_n^+ \quad \text{for all} \quad (\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in BV_n^+ \times R_m^*\,.$$

Besides, we have by (3,2), (3,4) and (3,6)

$$\text{(3,9)} \qquad \left\langle (\mathscr{I} - \mathscr{T})\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{d}\end{pmatrix}, (\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)\right\rangle =$$
$$= \int_0^1 \mathrm{d}_s\left[\mathbf{z}^*(s) - \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}^*(t)]\, \mathbf{Q}(t, s) + \boldsymbol{\lambda}^*\, \mathbf{K}(s)\right] \mathbf{x}(s) + (\boldsymbol{\lambda}^* - \boldsymbol{\lambda}^*)\, \mathbf{d} =$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{d}\end{pmatrix}, (\mathscr{I} - \mathscr{T}^+)(\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)\right\rangle \quad \text{for all} \quad \mathbf{x} \in BV_n,\ \ \mathbf{d} \in R_m,\ \ \mathbf{z} \in BV_n \ \text{and} \ \boldsymbol{\lambda} \in R_m$$

As mentioned above, $\mathbf{Q}(t, s)$ is an SBV-kernel and hence using Theorem 3.2 of [8] it is easy to show that $\mathscr{T}^+ \in L(BV_n^+ \times R_m^*)$ is compact. The operator $\mathscr{T}$ being compact by 3.4, we have

$$\text{(3,10)} \qquad \operatorname{ind}(\mathscr{I} - \mathscr{T}) = \operatorname{ind}(\mathscr{I} - \mathscr{T}^+) = 0$$

and we may apply Heuser's Theorem.

3.5. Theorem. *If the assumptions* 3.1 *are satisfied, then the system* (I), (II) *has a solution* $\mathbf{x} \in BV_n$ *iff*

$$(3,11) \qquad \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}^*(s)]\, \mathbf{f}(s) + \boldsymbol{\lambda}^* \mathbf{r} = 0$$

for any $\mathbf{z}^* \in BV_n^+$ *and* $\boldsymbol{\lambda}^* \in R_m^*$ *fulfilling*

$$(3,12) \quad \mathbf{z}^*(s) - \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}^*(t)]\, \mathbf{P}(t, s) + \boldsymbol{\lambda}^* \mathbf{K}(s) = \mathbf{0} \quad on \quad [0, 1], \quad \mathbf{z}^*(0) = \mathbf{0}.$$

Proof. By (3,8)–(3,10) the operators $\mathscr{I} - \mathscr{T}$ and $\mathscr{I} - \mathscr{T}^+$ fulfil the assumptions of Heuser's Theorem. Consequently the system (I), (II) has a solution in BV_n iff

$$\int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}^*(s)]\, (\mathbf{f}(s) - \mathbf{f}(0)) + \boldsymbol{\lambda}^* \mathbf{r} = 0$$

holds for any $\mathbf{z}^* \in BV_n^+$ and $\boldsymbol{\lambda}^* \in R_m^*$ fulfilling the equation

$$(3,13) \qquad \mathbf{z}^*(s) - \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}^*(t)]\, \mathbf{Q}(t, s) + \boldsymbol{\lambda}^* \mathbf{K}(s) = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad [0, 1],$$

i.e. $(\mathscr{I} - \mathscr{T}^+)(\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0}$. Given $\mathbf{z}^* \in BV_n^+$, it is

$$(3,14) \quad \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}^*(t)]\, \mathbf{Q}(t, s) = \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}^*(t)]\, \mathbf{P}(t, s) - \begin{Bmatrix} \mathbf{z}^*(1) - \mathbf{z}^*(0) & \text{if} \quad s = 0 \\ \mathbf{0} & \text{if} \quad s > 0 \end{Bmatrix}.$$

Setting (3,14) into (3,13) we obtain

$$(3,15) \qquad \mathbf{z}^*(s) - \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}^*(t)]\, \mathbf{P}(t, s) + \boldsymbol{\lambda}^* \mathbf{K}(s) = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad (0, 1],$$

$$- \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}^*(t)]\, \mathbf{P}(t, 0) + \boldsymbol{\lambda}^* \mathbf{K}(0) = \mathbf{0}.$$

Since we assume $\mathbf{P}(0, s) = \mathbf{0}$ on $[0, 1]$, the value of each of the integrals

$$\int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}^*(t)]\, \mathbf{P}(t, s), \quad s \in [0, 1],$$

does not depend on the value $\mathbf{z}^*(0)$. The same holds obviously also for the integral

$$\int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}^*(t)]\, (\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(0)).$$

Consequently $(\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in BV_n^+ \times R_m^*$ is a solution to (3,12) iff $(\mathbf{z}_0^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ with $\mathbf{z}_0^*(s) = \mathbf{z}^*(s)$ on $(0, 1]$ and $\mathbf{z}_0^*(0) = \mathbf{0}$ is also its solution. Since

$$\int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}_0^*(t)]\, \mathbf{f}(0) = 0$$

for all such $\mathbf{z}_0^*$ and all $\mathbf{f} \in BV_n$, the proof is complete.

3.6. Remark. $\boldsymbol{P}(t, \cdot)$ and $\boldsymbol{K}$ being by 3.1 (ii) right-continuous on $(0, 1)$ for any $t \in [0, 1]$, $\boldsymbol{z}$ is also right-continuous on $(0, 1)$ for any couple $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) \in BV_n \times R_m$ fulfilling (3,12).

The following assertion is also a consequence of (3,8)–(3,10) and of Heuser's Theorem.

3.7. Proposition. *Let* 3.1 *hold and let* $\boldsymbol{h}^* \in BV_n^+$. *Then there exist* $\boldsymbol{z}^* \in BV_n^+$ *and* $\boldsymbol{\lambda}^* \in R_m^*$ *such that*

$$\boldsymbol{z}^*(s) - \int_0^1 \mathrm{d}[\boldsymbol{z}^*(t)]\, \boldsymbol{Q}(t, s) + \boldsymbol{\lambda}^* \boldsymbol{K}(s) = \boldsymbol{h}^*(s) \quad \text{on} \quad [0, 1] \tag{3,16}$$

$((\mathcal{I} - \mathcal{T}^+)(\boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = (\boldsymbol{h}^*, \boldsymbol{0}))$ iff

$$\int_0^1 \mathrm{d}[\boldsymbol{h}^*(t)]\, \boldsymbol{x}(t) = 0$$

for every $\boldsymbol{x} \in N(\mathcal{L})$ where

$$\mathcal{L} : \boldsymbol{x} \in BV_n \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} - \mathcal{Q}\boldsymbol{x} \\ \mathcal{K}\boldsymbol{x} \end{pmatrix} \in BV_n \times R_m \tag{3,17}$$

(cf. (2,4) and (3,1)).

3.8. Theorem. *Assume* 3.1. *Then* $k = \dim N(\mathcal{L}) < \infty$ *for the operator* $\mathcal{L} \in L(BV_n, BV_n \times R_m)$ *given by* (3,17). *Furthermore, the system* (3,12) *has exactly* $k^+ = k + m - n$ *linearly independent solutions in* $BV_n^+ \times R_m$.

Proof. By 2.3 we have $k = \dim N(\mathcal{L}) < \infty$. Obviously $\dim N(\mathcal{I} - \mathcal{T}) = k + m$. Since (3,10), it is by Heuser's Theorem $\dim N(\mathcal{I} - \mathcal{T}^+) = \dim N(\mathcal{I} - \mathcal{T}) = k + m$. The set N^+ of all solutions to (3,12) consists of all $(\boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in N(\mathcal{I} - \mathcal{T}^+)$ for which $\boldsymbol{z}^*(0) = \boldsymbol{0}$. Hence $k^+ = \dim N^+ = \dim N(\mathcal{I} - \mathcal{T}^+) - n = k + m - n$. Recall that for $(\boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in N(\mathcal{I} - \mathcal{T}^+)$ the value $\boldsymbol{z}^*(0)$ may be arbitrary.

4. GREEN'S FUNCTION

We continue the investigation of the system (I), (II). In addition to 3.1 we shall suppose that it possesses a unique solution in BV_n for every $\boldsymbol{f} \in BV_n$ and $\boldsymbol{r} \in R_m$. Obviously, this is possible only if the corresponding homogeneous equation

$$\mathcal{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \in BV_n \times R_m$$

(cf. (3,17)) possesses only the trivial solution, i.e. $\dim N(\mathcal{L}) = 0$. On the other hand, by 3.5 the system (I), (II) has a solution in BV_n for any couple $\begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix} \in BV_n \times R_m$ iff the system (3,12) possesses in $BV_n^+ \times R_m$ only the trivial solution. The following assertion is now a direct consequence of 3.8.

4.1. Proposition. *Provided* 3.1 *holds, the system* (I), (II) *has a unique solution in* BV_n *for every* $\boldsymbol{f} \in BV_n$ *and* $\boldsymbol{r} \in R_m$ *iff*

$$m = n \quad \textit{and} \quad \dim N(\mathscr{L}) = 0 . \tag{4,1}$$

Let us suppose that (4,1) holds and let us try to express the solutions $\boldsymbol{x} \in BV_n$ of the systems (I), (II) in the form

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{H}(t)\,\boldsymbol{r} + \int_0^1 \mathrm{d}_s[\boldsymbol{G}(t, s)]\,(\boldsymbol{f}(s) - \boldsymbol{f}(0)), \quad t \in [0, 1], \tag{4,2}$$

where $\boldsymbol{H} : [0, 1] \to L(R_n)$ and $\boldsymbol{G} : [0, 1] \times [0, 1] \to L(R_n)$ are such that

(4,3) for every $t \in [0, 1]$, the functions $\boldsymbol{G}(t, \cdot)$ and $\boldsymbol{H}$ are of bounded variation on $[0, 1]$, right-continuous on $(0, 1)$ and $\boldsymbol{G}(t, 1) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{H}(1) = \boldsymbol{0}$.

Clearly, the function (4,2) is for any $\boldsymbol{f} \in BV_n$ and $\boldsymbol{r} \in R_m$ a solution of (I), (II) iff

$$\varphi(t) = \boldsymbol{H}(t) \int_0^1 \mathrm{d}[\boldsymbol{K}(s)]\,\varphi(s) + \int_0^1 \mathrm{d}_s[\boldsymbol{G}(t, s)] \left(\varphi(s) - \int_0^1 \mathrm{d}_\sigma[\boldsymbol{Q}(s, \sigma)]\,\varphi(\sigma)\right)$$

for every $\varphi \in BV_n$ and $t \in [0, 1]$, i.e. iff

$$\int_0^1 \mathrm{d}_s\left[\boldsymbol{G}(t, s) - \int_0^1 \mathrm{d}_\sigma[\boldsymbol{G}(t, \sigma)]\,\boldsymbol{Q}(\sigma, s) + \boldsymbol{H}(t)\,\boldsymbol{K}(s) - \boldsymbol{\Delta}(t, s)\right] \varphi(s) = \boldsymbol{0} \tag{4,4}$$

$$\text{for each} \quad \varphi \in BV_n \quad \text{and} \quad t \in [0, 1],$$

where

$$\boldsymbol{\Delta}(t, s) = \begin{cases} -\boldsymbol{I} & \text{for} \quad 0 < t < 1 \quad \text{and} \quad 0 < s < t, \\ \boldsymbol{0} & \text{for} \quad 0 < t < 1 \quad \text{and} \quad t \leqq s \leqq 1, \\ -\boldsymbol{I} & \text{for} \quad 0 = t \quad \text{and} \quad 0 = s \\ \boldsymbol{0} & \text{for} \quad 0 = t \quad \text{and} \quad 0 < s \leqq 1, \\ -\boldsymbol{I} & \text{for} \quad t = 1 \quad \text{and} \quad 0 \leqq s < 1, \\ \boldsymbol{0} & \text{for} \quad t = 1 \quad \text{and} \quad s = 1. \end{cases} \tag{4,5}$$

Provided (4,3) holds, (4,4) holds iff

$$\boldsymbol{G}(t, s) - \int_0^1 \mathrm{d}_\sigma[\boldsymbol{G}(t, \sigma)]\,\boldsymbol{Q}(\sigma, s) + \boldsymbol{H}(t)\,\boldsymbol{K}(s) = \boldsymbol{\Delta}(t, s) \quad \text{on} \quad [0, 1] \times [0, 1]. \tag{4,6}$$

Our wish now is to find functions $\boldsymbol{G}(t, s)$ and $\boldsymbol{H}(t)$ fulfilling (4,3) and (4,6).

Let us put

$$\mathscr{L}^+ : (\boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in BV_n^+ \times R_n^* \to \left(\boldsymbol{z}^*(s) - \int_0^1 \mathrm{d}[\boldsymbol{z}^*(t)]\,\boldsymbol{Q}(t, s) + \boldsymbol{\lambda}^*\,\boldsymbol{K}(s), \boldsymbol{z}^*(0)\right) \in BV_n^+ \times R_n^* . \tag{4,7}$$

Since $\dim N(\mathscr{L}) = 0$, 3.7 implies that the equation (3.16) has a solution in $BV_n^+ \times R_n^*$ for any $\boldsymbol{h}^* \in BV_n^+$. Under our assumptions the expressions

$$\mathbf{z}^*(s) - \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}^*(t)]\, \mathbf{Q}(t, s) + \boldsymbol{\lambda}^* \mathbf{K}(s)\ (\mathbf{z}^* \in BV_n^+,\ \boldsymbol{\lambda}^* \in R_n^*)$$

do not depend on the values $\mathbf{z}^*(0)$ (cf. the proof of 3.5). This means that the system

$$\mathbf{z}^*(s) - \int_0^1 \mathrm{d}[\mathbf{z}^*(t)]\, \mathbf{Q}(t, s) + \boldsymbol{\lambda}^* \mathbf{K}(s) = \boldsymbol{h}^*(s), \quad s \in [0, 1],$$
$$\mathbf{z}^*(0) = \boldsymbol{\delta}^*$$

has a solution $(\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in BV_n^+ \times R_n^*$ for every $(\boldsymbol{h}^*, \boldsymbol{\delta}^*) \in BV_n^+ \times R_n^*$, i.e.

$$R(\mathscr{L}^+) = BV_n^+ \times R_n^* . \tag{4,8}$$

Moreover, since the equations $\mathscr{L}^+(\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \boldsymbol{0} \in BV_n^+ \times R_n^*$ and (3,12) coincide, we have

$$\dim N(\mathscr{L}^+) = 0 . \tag{4,9}$$

Taking into account (4,8) and (4,9) we conclude from the Bounded Inverse Theorem ([6] III.4.1) that the operator $\mathscr{L}^+$ possesses a bounded inverse $(\mathscr{L}^+)^{-1} \in L(BV_n^+ \times R_n^*)$. In particular, given a column $\boldsymbol{\Delta}_i^*(t, \cdot) \in BV_n^+$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ of $\boldsymbol{\Delta}(t, \cdot)$, there exists a unique couple $(\boldsymbol{g}_i^*(t, \cdot), \boldsymbol{h}_i^*(t)) \in BV_n^+ \times R_n^*$ such that

$$\boldsymbol{g}_i^*(t, s) - \int_0^1 \mathrm{d}_\sigma[\boldsymbol{g}_i^*(t, \sigma)]\, \mathbf{Q}(\sigma, s) + \boldsymbol{h}_i^*(t)\, \mathbf{K}(s) = \boldsymbol{\Delta}_i^*(t, s) \quad \text{on} \quad [0, 1] \times [0, 1],$$
$$\boldsymbol{g}_i^*(t, 0) = \boldsymbol{0} \quad \text{on} \quad [0, 1], \qquad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Moreover, there is $M < \infty$ such that

$$\|\boldsymbol{g}_i^*(t, \cdot)\|_{BV} + |\boldsymbol{h}_i^*(t)| \leqq M \|\boldsymbol{\Delta}_i^*(t, \cdot)\|_{BV} \leqq M \quad \text{for any} \quad t \in [0, 1] \quad \text{and} \quad i = 1, 2, \ldots, n . \tag{4,10}$$

This completes the proof of the following

4.2. Theorem. *If* 3.1 *and* (4,1) *hold, then there exist functions*

$$\mathbf{G} : [0, 1] \times [0, 1] \to L(R_n), \quad \mathbf{H} : [0, 1] \to L(R_n)$$

and a constant $\varkappa < \infty$ *such that*

$$\|\mathbf{G}(t, \cdot)\|_{BV} + |\mathbf{H}(t)| \leqq \varkappa \quad \text{on} \quad [0, 1],$$

$\mathbf{G}(t, \cdot)$ *is for any* $t \in [0, 1]$ *right-continuous on* $(0, 1)$, $\mathbf{G}(t, 0) = \mathbf{G}(t, 1) = \boldsymbol{0}$ *on* $[0, 1]$ *and* (4,6) *is satisfied.*

4.3. Theorem. *Assume* 3.1 *and* (4,1). *Given* $\boldsymbol{f} \in BV_n$ *and* $\boldsymbol{r} \in R_n$, *the unique solution* $\boldsymbol{x}$ *of the system* (I), (II) *in* BV_n *is given by* (4,2) *where* $\boldsymbol{G}(t, s)$ *and* $\boldsymbol{H}(t)$ *are defined by* 4.2.

5. GENERALIZED LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Of a special interest is the case

$$\boldsymbol{P}(t, s) = \begin{cases} \boldsymbol{A}(0) \quad - \boldsymbol{A}(t) & \text{for} \quad 0 = s < t \leqq 1\,, \\ \boldsymbol{A}(s+) - \boldsymbol{A}(t) & \text{for} \quad 0 < s < t \leqq 1\,, \\ \qquad \boldsymbol{0} & \text{for} \quad 0 \leqq t \leqq s \leqq 1\,, \end{cases} \tag{5,1}$$

where $\boldsymbol{A} : [0, 1] \to L(R_n)$ is of bounded variation on $[0, 1]$. The integral equation (I) then reduces to the generalized linear differential equation

$$\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(0) - \int_0^t \mathrm{d}[\boldsymbol{A}(s)]\, \boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(0)\,, \quad t \in [0, 1]\,. \tag{5,2}$$

It is easy to verify that for any $\boldsymbol{A} : [0, 1] \to L(R_n)$ of bounded variation on $[0, 1]$, the function $\boldsymbol{P} : [0, 1] \times [0, 1] \to L(R_n)$ defined by (5,1) fulfils all the corresponding assumptions from 3.1. Moreover, for any $\boldsymbol{z}^* \in BV_n^+$ with $\boldsymbol{z}^*(0) = \boldsymbol{z}^*(1) = \boldsymbol{0}$ we have

$$\int_0^1 \mathrm{d}[\boldsymbol{z}^*(t)]\, \boldsymbol{P}(t, s) = \begin{cases} -\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}[\boldsymbol{z}^*(t)]\, \boldsymbol{A}(t) & , \quad \text{if} \quad s = 0\,, \\ -\displaystyle\int_s^1 \mathrm{d}[\boldsymbol{z}^*(t)]\, \boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{z}^*(s)\, \boldsymbol{A}(s+)\,, & \quad \text{if} \quad 0 < s < 1\,, \\ \qquad \boldsymbol{0} & , \quad \text{if} \quad s = 1\,. \end{cases}$$

Thus the adjoint system (3.12) to (I), (II) reduces in the case (5,1) to the system for $(\boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in BV_n^+ \times R_m^*$

$$\boldsymbol{z}^*(s) + \int_s^1 \mathrm{d}[\boldsymbol{z}^*(t)]\, \boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{z}^*(s)\, \boldsymbol{A}(s+) + \boldsymbol{\lambda}^*\, \boldsymbol{K}(s) = \boldsymbol{0} \quad \text{on} \quad [0, 1]\,, \tag{5,3}$$
$$\boldsymbol{z}^*(0) = \boldsymbol{z}^*(1) = \boldsymbol{0}\,.$$

Furthermore, in the previous section we have proved the existence of Green's function for the boundary value problem (5,2), (II) if $m = n$ and $\dim N(\mathscr{L}) = 0$ for the corresponding operator $\mathscr{L} : BV_n \to BV_n \times R_n$.

The equation (5,3) resembles the generalized linear differential equation (5,2). However, in general its basic theory is not available directly from the basic theory of equations of the form (5,2). In [9] the problems (5,2), (II) are dealt with in detail. As a proper adjoint the system of equations for $(\boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in BV_n^+ \times R_m^*$

$$\boldsymbol{z}^*(s) + \int_s^1 \mathrm{d}[\boldsymbol{z}^*(t)]\, \boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{z}^*(s)\, \boldsymbol{A}(s) + \boldsymbol{\lambda}^*\, \boldsymbol{K}(s) = \boldsymbol{0} \quad \text{on} \quad [0, 1]\,, \tag{5,4}$$
$$\boldsymbol{z}^*(0) = \boldsymbol{z}^*(1) = \boldsymbol{0}$$

is derived provided $\det(\mathbf{I} - \Delta^{-}\mathbf{A}(t)) \neq 0$ for $t \in (0, 1]$ and $\det(\mathbf{I} + \Delta^{+}\mathbf{A}(t)) \neq 0$ for $t \in [0, 1)$. Under these assumptions also usual basic results for the equation (5,4) (as the existence and uniqueness of a solution, fundamental matrix, variation-of-constants formula) have been derived. In the same paper it was shown that the systems (5,3) and (5,4) are equivalent in a certain sense.

References

[1] *Cameron R. H., Martin W. T.:* An unsymmetrical Fubini theorem, Bull. Amer. Math. Soc. *47* (1941), 121—126.

[2] *Heuser H.:* Funktionalanalysis, B. G. Teubner, Stuttgart, 1975.

[3] *Hildebrandt T. H.:* Introduction to the Theory of Integration, Academic Press, New York, London, 1963.

[4] *Krall A. M.:* Stieltjes differential-boundary operators, Proc. Amer. Math. Soc. *41* (1973), 80—86.

[5] *Maksimov V. P.:* The property of being Noetherian of the general boundary value problem for a linear functional differential equation (in Russian), Differencial'nye Uravnenija *10* (1974), 2288—2291.

[6] *Schechter M.:* Principles of functional analysis, Academic Press, New York, London, 1973.

[7] *Schwabik Š.:* On the relation between Young's and Kurzweil's concept of Stieltjes integral, Časopis pěst. mat. *98* (1973), 237—251.

[8] *Schwabik Š.:* On an integral operator in the space of functions of bounded variation, Časopis pěst. mat. *97* (1972), 297—330.

[9] *Schwabik Š., Tvrdý M.:* Boundary value problems for linear generalized differential equa, tions, Czech. Math. Journal *29* (*104*) (1979), 451—477.

[10] *Tvrdý M.:* Boundary value problems for generalized linear integro-differential equations and their adjoints, Czechoslovak Math. J. *23* (*98*) (1973), 183—217.

[11] *Tvrdý M.:* Boundary value problems for generalized linear integro-differential equations with left-continuous solutions, Časopis pěst. mat. *99* (1974), 147—157.

[12] *Tvrdý M.:* Linear functional-differential operators: normal solvability and adjoints, Topics in Differential Equations, Colloquia Math. Soc. J. Bolyai 15, Keszthely (Hungary), 1975-379—389.

[13] *Tvrdý M., Vejvoda O.:* General boundary value problem for an integro-differential system and its adjoint, Časopis pěst. mat. *97* (1972), 399—419.

[14] *Vejvoda O., Tvrdý M.:* Existence of solutions to a linear integro-boundary-differential equation with additional conditions. Ann. Mat. Pura Appl. *89* (1971), 169—216.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 104 (1979), Praha

LAPLACE TRANSFORM OF EXPONENTIALLY LIPSCHITZIAN VECTOR-VALUED FUNCTIONS

MIROSLAV SOVA, Praha

(Received February 28, 1977)

The purpose of this note is to give the theory – in the form as definitive as possible – of the Laplace transform of exponentially Lipschitzian vector-valued functions whose most important part was proved and applied in [1] (see especially Section 4).

We shall use the following notation: (1) R – the real number field, (2) R^+ – the set of all positive real numbers, (3) (ω, ∞) – the set of all real numbers greater than ω if $\omega \in R$, (4) E – an arbitrary Banach space over R, (5) $M_1 \to M_2$ – the set of all mappings of the whole set M_1 into the set M_2.

1. Lemma. *For every $\alpha \geqq 0$, $\chi > 1$ and $r \in \{0, 1, \ldots\}$ such that $r > \chi\alpha$, the following inequality holds:*

$$\left(\frac{r}{r-\alpha}\right)^r \leqq e^{(\chi/(\chi-1))\alpha}.$$

Proof. We have under our assumptions

$$\frac{r}{r-\alpha} = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{r}} \leqq \frac{1}{1-\frac{1}{\chi}} = \frac{\chi}{\chi-1}$$

which implies

$$\left(\frac{r}{r-\alpha}\right)^r = \left(1+\frac{\alpha}{r-\alpha}\right)^r = \left(e^{\alpha/(r-\alpha)}\right)^r = e^{(r/(r-\alpha))\alpha} \leqq e^{(\chi/(\chi-1))\alpha}.$$

2. Lemma. *For every $\alpha \geqq 0$ and $r \in \{2, 3, \ldots\}$ such that $r > \alpha^2$, we have*

$$\left(\frac{r}{r-\alpha}\right)^r \leqq e^{(\sqrt{r}/(\sqrt{r}-1))\alpha}.$$

Proof. We have $\sqrt{r} > \alpha$, i.e. $r > \alpha\sqrt{(r)}$. Hence we can choose $\chi = \sqrt{r}$ in Lemma 1 and the desired inequality follows.

3. Lemma. *For every* $\omega \geqq 0$, $0 < t_1 < t_2$ *and* $p \in \{0, 1, \ldots\}$ *such that* $p > (\omega t_2 + 1)^2$ *we have*

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\omega\tau}{p+1}\right)^{p+2}} \, d\tau \leqq \frac{1}{1 - \dfrac{\omega t_2}{p+1}} \int_{t_1}^{t_2} e^{(\sqrt{(p+1)}/(\sqrt{(p+1)}-1))\omega\tau} \, d\tau .$$

Proof. It follows by means of Lemma 2 with $\alpha = \omega\tau$ and $r = p + 1$ that

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\omega\tau}{p+1}\right)^{p+2}} \, d\tau \leqq \frac{1}{1 - \dfrac{\omega t_2}{p+1}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\omega\tau}{p+1}\right)^{p+1}} \, d\tau \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{1 - \dfrac{\omega t_2}{p+1}} \int_{t_1}^{t_2} e^{(\sqrt{(p+1)}/(\sqrt{(p+1)}-1))\omega\tau} \, d\tau .$$

4. Theorem. *Let* ω *be a nonnegative constant,* $F \in (\omega, \infty) \to E$ *and let* M_0, M_1 *be two nonnegative constants. Then*

(A_1) *the function* F *is infinitely differentiable on* (ω, ∞),

(A_2) $\left\| \dfrac{d^p}{d\lambda^p} F(\lambda) \right\| \leqq \dfrac{M_0 p!}{(\lambda - \omega)^{p+1}}$ *for every* $\lambda > \omega$ *and* $p \in \{0, 1, \ldots\}$,

(A_3) $\left\| \dfrac{d^p}{d\lambda^p} \lambda F(\lambda) \right\| \leqq \dfrac{M_1 p!}{(\lambda - \omega)^{p+1}}$ *for every* $\lambda > \omega$ *and* $p \in \{1, 2, \ldots,\}$,

if and only if there exists a function $f \in R^+ \to E$ *such that*

(B_1) $\|f(t)\| \leqq M_0 e^{\omega t}$ *for any* $t \in R^+$,

(B_2) $\|f(t_1) - f(t_2)\| \leqq M_1 \int_{t_1}^{t_2} e^{\omega\tau} \, d\tau$ *for any* $t_1, t_2 \in R^+$, $t_1 < t_2$,

(B_3) $F(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} f(\tau) \, d\tau$ *for any* $\lambda > \omega$.

Proof. "Only if" part. Let us first denote

(1) $G(\mu) = F(\mu + \omega)$ for any $\mu > 0$.

It follows from $(A_1)-(A_3)$ that

(2) the function G is infinitely differentiable on R^+,

(3) $$\left\| \frac{d^p}{d\mu^p} G(\mu) \right\| \leqq \frac{M_0 p!}{\mu^{p+1}} \quad \text{for any} \quad \mu > 0 \quad \text{and} \quad p \in \{0, 1, \ldots\},$$

(4) $$\left\| \frac{d^p}{d\mu^p} (\mu\, G(\mu)) \right\| = \left\| \frac{d^p}{d\mu^p} (\mu\, F(\mu + \omega)) \right\| =$$

$$= \left\| \frac{d^p}{d\mu^p} [(\mu + \omega)\, F(\mu + \omega) - \omega\, F(\mu + \omega)] \right\| \leqq \frac{(M_1 + \omega M_0)\, p!}{\mu^{p+1}}$$

for any $\mu > 0$ and $p \in \{1, 2, \ldots\}$.

Let us now denote

(5) $$g_q(t) = \frac{(-1)^q}{q!} \left(\frac{q+1}{t}\right)^{q+1} G^{(q)}\left(\frac{q+1}{t}\right) \quad \text{for} \quad t \in R^+ \quad \text{and} \quad q \in \{0,1,\ldots\}.$$

By (2) and (3) we obtain

(6) the function g_q is differentiable on R^+ for every $q \in \{0, 1, \ldots\}$,

(7) $\|g_q(t)\| \leqq M_0$ for every $t \in R^+$ and $q \in \{0, 1, \ldots\}$,

(8) $$g_q'(t) = \frac{(-1)^{q+1}}{q!} (q+1) \frac{q+1}{t^2} \left(\frac{q+1}{t}\right)^q G^{(q)}\left(\frac{q+1}{t}\right) +$$

$$+ \frac{(-1)^{q+1}}{q!} \left(\frac{q+1}{t}\right)^{q+1} \frac{q+1}{t^2} G^{(q+1)}\left(\frac{q+1}{t}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{q+1}}{(q+1)!} \left(\frac{q+1}{t}\right)^{q+2} \left[(q+1)\, G^{(q)}\left(\frac{q+1}{t}\right) + \frac{q+1}{t} G^{(q+1)}\left(\frac{q+1}{t}\right)\right]$$

for every $t \in R^+$ and $q \in \{0, 1, \ldots\}$.

Now we need to estimate the growth of g_q'. To this aim, let us denote

(9) $H(\mu) = \mu\, G(\mu)$ for $\mu > 0$.

It is clear that

(10) $H^{(q+1)}(\mu) = (q+1)\, G^{(q)}(\mu) + \mu\, G^{(q+1)}(\mu)$ for any $\mu > 0$ and $q \in \{0, 1, \ldots\}$.

Now (9) and (10) permit us to rewrite (8) in the form

(11) $$g_q'(t) = \frac{(-1)^{q+1}}{(q+1)!} \left(\frac{q+1}{t}\right)^{q+2} H^{(q+1)}\left(\frac{q+1}{t}\right).$$

On the other hand, we have by (4) and (9) that

(12) $$\|H^{(q+1)}(\mu)\| \leqq \frac{(M_1 + \omega M_0)(q+1)!}{\mu^{q+2}} \quad \text{for any} \quad \mu > 0 \quad \text{and}$$
$$q \in \{0, 1, \ldots\}.$$

We see from (11) and (12) that $\|g_q'(t)\| \leqq M_1 + \omega M_0$ for every $t \in R^+$ and $q \in \in \{0, 1, \ldots\}$ which implies

(13) $$\|g_q(t_1) - g_q(t_2)\| \leqq (M_1 + \omega M_0)|t_1 - t_2| \quad \text{for every} \quad t_1, t_2 \in R^+ \quad \text{and}$$
$$q \in \{0, 1, \ldots\}.$$

In view of (6) and (7) we can define

(14) $$G_q(\mu) = \int_0^\infty e^{-\mu\tau} g_q(\tau)\, d\tau \quad \text{for every} \quad \mu > 0 \quad \text{and} \quad q \in \{0, 1, \ldots\}.$$

It follows easily that

(15) the functions G_q are infinitely differentiable on R^+ for all $q \in \{0, 1, \ldots\}$.

Now we proceed to the decisive step of the proof.

According to (A_1) and (A_2), the hypotheses of Lemma [1] 4.15 are fulfilled for the function G and consequently, (5), (14) and (15) imply

(16) $$G_q^{(p)}(\mu) \xrightarrow[q \to \infty]{} G^{(p)}(\mu) \quad \text{for any} \quad \mu > 0 \quad \text{and} \quad p \in \{0, 1, \ldots\}.$$

This result enables us to construct a function g whose Laplace transform is G. Indeed, by A.3 from the Appendix we obtain from (6), (7), (13) and (14) that

$$\left\| \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1} G_q^{(p)}\left(\frac{p+1}{t}\right) - g_q(t) \right\| \leqq \frac{(M_1 + \omega M_0)t}{\sqrt[4]{(p+1)}} + \frac{2M_0}{\sqrt{(p+1)}}$$

for every $t \in R^+$ and $p, q \in \{0, 1, \ldots\}$ which implies

(17) $$\left\| \frac{(-1)^{p_1}}{p_1!} \left(\frac{p_1+1}{t}\right)^{p_1+1} G_q^{(p_1)}\left(\frac{p_1+1}{t}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{(-1)^{p_2}}{p_2!} \left(\frac{p_2+1}{t}\right)^{p_2+1} G_q^{(p_2)}\left(\frac{p_2+1}{t}\right) \right\| \leqq$$
$$\leqq (M_1 + \omega M_0)\, t \left(\frac{1}{\sqrt[4]{(p_1+1)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(p_2+1)}}\right) + 2M_0 \left(\frac{1}{\sqrt{(p_1+1)}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{(p_2+1)}}\right) \quad \text{for every} \quad t \in R^+ \quad \text{and} \quad p_1, p_2, q \in 0, 1, \ldots.$$

It follows from (16) and (17) ($q \to \infty$) that

$$(18)\quad \left\| \frac{(-1)^{p_1}}{p_1!} \left(\frac{p_1+1}{t}\right)^{p_1+1} G^{(p_1)}\left(\frac{p_1+1}{t}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{(-1)^{p_2}}{p_2!} \left(\frac{p_2+1}{t}\right)^{p_2+1} G^{(p_2)}\left(\frac{p_2+1}{t}\right) \right\| \leqq$$

$$\leqq (M_1 + \omega M_0)\, t \left(\frac{1}{\sqrt{(p_1+1)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(p_2+1)}}\right) + 2M_0 \left(\frac{1}{\sqrt{(p_1+1)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{(p_2+1)}}\right) \quad \text{for every} \quad t \in R^+ \quad \text{and} \quad p_1, p_2 \in \{0, 1, \ldots\}\,.$$

In view of (5), we can write (18) in the form

$$(19)\quad \|g_{p_1}(t) - g_{p_2}(t)\| \leqq (M_1 + \omega M_0)\, t \left(\frac{1}{\sqrt[4]{(p_1+1)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(p_2+1)}}\right) +$$

$$+ 2M_0 \left(\frac{1}{\sqrt{(p_1+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(p_2+1)}}\right) \quad \text{for every} \quad t \in R^+ \quad \text{and}$$

$$p_1, p_2 \in \{0, 1, \ldots\}\,.$$

By (19) we can write

$$(20)\quad g(t) = \lim_{p \to \infty} g_p(t) \quad \text{for} \quad t \in R^+\,.$$

It follows from (7) and (20) that

$$(21)\quad \|g(t)\| \leqq M_0 \quad \text{for every} \quad t \in R^+\,.$$

Further, (19) and (20) give

$$(22)\quad \|g_p(t) - g(t)\| \leqq \frac{(M_1 + \omega M_0)\, t}{\sqrt[4]{(p+1)}} + \frac{2M_0}{\sqrt{(p+1)}} \quad \text{for every}$$

$$t \in R^+ \quad \text{and} \quad p \in \{0, 1, \ldots\}\,.$$

It follows from (6) and (22) that

(23) the function g is continuous on R^+.

Finally by (6), (7), (22) and (23) we conclude that

$$(24)\quad \int_0^\infty e^{-\mu\tau} g_p(\tau)\, d\tau \to_{p \to \infty} \int_0^\infty e^{-\mu\tau} g(\tau)\, d\tau \quad \text{for every} \quad \mu > 0\,.$$

On the other hand, (14) and (16) give

$$(25)\quad \int_0^\infty e^{\mu\tau} g_p(\tau)\, d\tau \to_{p \to \infty} G(\mu) \quad \text{for every} \quad \mu > 0\,.$$

Thus, it follows from (24) and (25) that

$$(26) \quad G(\mu) = \int_0^\infty e^{-\mu\tau} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{for every} \quad \mu > 0\,.$$

The desired function f will be now defined by

$$(27) \quad f(t) = e^{\omega t} g(t) \quad \text{for any} \quad t \in R^+\,.$$

Our final task in this part of the proof is to verify the properties (B_1), (B_2), (B_3) for the function f defined by (27).

First by (21) and (23)

$$(28) \quad \|f(t)\| \leqq M_0 e^{\omega t} \quad \text{for every} \quad t \in R^+\,,$$

(29) the function f is continuous on R^+.

Further by (1) and (26)

$$(30) \quad \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = F(\lambda) \quad \text{for every} \quad \lambda > \omega\,.$$

Now we shall prove

$$(31) \quad \|f(t_1) - f(t_2)\| \leqq M_1 \int_{t_1}^{t_2} e^{\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \quad \text{for every} \quad t_1, t_2 \in R^+\,, \quad t_1 < t_2\,.$$

To this aim, let us define

$$(32) \quad f_p(t) = \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1} F^{(p)}\left(\frac{p+1}{t}\right) \quad \text{for every} \quad p \in \{0, 1, \ldots\} \quad \text{and}$$
$$0 < t < (p+1)/(\omega+1)\,.$$

Using 4.4 and 4.10 from [1] we obtain by (28)–(30) and (32) that

$$(33) \quad f_p(t) \to_{p\to\infty} f(t) \quad \text{for every} \quad t \in R^+\,.$$

On the other hand, by (A_1),

(34) the functions f_p are differentiable on $(0, (p+1)/(\omega+1))$ for every $p \in \{0, 1, \ldots\}$,

$$(35) \quad f_p'(t) = \frac{(-1)^{p+1}}{p!}(p+1)\frac{p+1}{t^2}\left(\frac{p+1}{t}\right)^p F^{(p)}\left(\frac{p+1}{t}\right) +$$
$$+ \frac{(-1)^{p+1}}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1} \frac{p+1}{t^2} F^{(p+1)}\left(\frac{p+1}{t}\right) =$$
$$= \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+2}\left[(p+1)\,F^{(p)}\left(\frac{p+1}{t}\right) + \frac{p+1}{t}\,F^{(p+1)}\left(\frac{p+1}{t}\right)\right]$$
for every $p \in \{0, 1, \ldots\}$ and $0 < t < (p+1)/(\omega+1)$.

For the sake of brevity, we denote

(36) $J(\lambda) = \lambda F(\lambda)$ for $\lambda > \omega$.

It is clear that

(37) $J^{(p+1)}(\lambda) = (p+1) F^{(p)}(\lambda) + \lambda F^{(p+1)}(\lambda)$ for every $\lambda > \omega$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$.

Now by (35)–(37) we have

(38) $$f_p'(t) = \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+2} J^{(p+1)}\left(\frac{p+1}{t}\right) \quad \text{for every} \quad p \in \{0, 1, \ldots\}$$

and $0 < t < (p+1)/(\omega+1)$.

On the other hand, by (A_3) and (36)

(39) $$\|J^{(p+1)}(\lambda)\| \leqq \frac{M_1 (p+1)!}{(\lambda - \omega)^{p+2}} \quad \text{for every} \quad \lambda > \omega \quad \text{and} \quad p \in \{0, 1, \ldots\}.$$

It follows from (38) and (39) that

$$\|f_p'(t)\| \leqq M_1 \left(\frac{1}{1 - \dfrac{\omega t}{p+1}}\right)^{p+2}$$

for every $p \in \{0, 1, \ldots\}$ and $0 < t < (p+1)/(\omega+1)$ which implies

(40) $$\|f_p(t_1) - f_p(t_2)\| \leqq M_1 \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\omega \tau}{p+1}\right)^{p+2}} \, d\tau \quad \text{for every} \quad p \in \{0, 1, \ldots\}$$

and $0 < t_1 < t_2 < (p+1)/(\omega+1)$.

Using Lemma 3 we get from (40) that

(41) $$\|f_p(t_1) - f_p(t_2)\| \leqq M_1 \frac{1}{1 - \dfrac{\omega t_2}{p+1}} \int_{t_1}^{2t} e^{(\sqrt{(p+1)}/(\sqrt{(p+1)}-1))\omega\tau} \, d\tau \quad \text{for every}$$

$p \in \{0, 1, \ldots\}$ and $0 < t_1 < t_2 < (p+1)/(\omega+1)$.

Letting $p \to \infty$ in (41) and using (33), we obtain at once (31).

Since the properties (B_1), (B_2), (B_3) of the function f are contained in (28), (30) and (31), the proof of the "only if" part is complete.

"If" part. Let f be a fixed function with the properties (B_1), (B_2), (B_3).

It follows from (B_2) that

(1) the function f is continuous on R^+.

Now we obtain easily from (1) and from (B_1) and (B_3) that

(2) the properties (A_1), (A_2) hold.

To prove (A_3) let us first denote $f_h(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(\tau)\,d\tau$ for any $h > 0$ and $t > 0$.

It follows from (B_1) that

$$(3) \quad \|f_h(t)\| \leqq M_0 \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{\omega\tau}\,d\tau = M_0 e^{\omega t}\frac{1}{h}\int_0^h e^{\omega\tau}\,d\tau \quad \text{for any} \quad h > 0 \quad \text{and} \quad t > 0.$$

Further we see easily from (1) that

(4) the function f_h is continuous for any $h > 0$,

(5) $f_h(t) \to f(t)$ $(h \to 0_+)$ for any $t \in R^+$.

On the other hand, by (B_2) we have

$$(6) \quad \left\|\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t))\right\| \leqq M_1 \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{\omega\tau}\,d\tau = M_1 e^{\omega t}\frac{1}{h}\int_0^h e^{\omega\tau}\,d\tau$$

for any $h > 0$ and $t > 0$.

Moreover, a simple calculation shows

$$(7) \quad f_h(t) = \frac{1}{h}\int_0^t (f(\tau + h) - f(\tau))\,d\tau + \frac{1}{h}\int_0^h f(\tau)\,d\tau \quad \text{for any} \quad h > 0 \quad \text{and} \quad t > 0.$$

Let us now write $F_h(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} f_h(\tau)\,d\tau$ for $h > 0$ and $\lambda > \omega$, which is admissible thanks to (3) and (4).

We get easily from (3)–(5) that

(8) $F_h^{(p)}(\lambda) \to F^{(p)}(\lambda)$ $(h \to 0_+)$ for any $\lambda > \omega$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$.

On the other hand, if follows from (7) that

$$F_h(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\left[\frac{1}{h}(f(\tau + h) - f(\tau))\right]d\tau + \frac{1}{\lambda}\frac{1}{h}\int_0^h f(\tau)\,d\tau,$$

i.e.

$$(9) \quad \lambda F_h(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\left[\frac{1}{h}(f(\tau + h) - f(\tau))\right]d\tau + \frac{1}{h}\int_0^h f(\tau)\,d\tau$$

for every $h > 0$ and $\lambda > \omega$.

It follows from (6) and (9) that

$$(10)\quad \left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \lambda F_h(\lambda) \right\| \leqq M_1 \frac{p!}{(\lambda - \omega)^{p+1}} \frac{1}{h} \int_0^h e^{\omega\tau} \, d\tau \quad \text{for every} \quad h > 0, \quad \lambda > \omega$$

and $\quad p \in \{1, 2, \ldots\}$.

Using (8) and (10) we see immediately that

(11) the property (A_3) holds.

By (2) and (11), the proof of the "if" part is complete.

5. Remark. We have here the opportunity to correct a mistake in Proposition 4.9 of [1] which is true for $\omega = 0$, but generally ω must be replaced by 2ω. The same is true in Proposition 1.4 in [1] which was used in the proof of 4.9. In the Appendix to this note we shall give a modified and improved version of the above mentioned Proposition 4.9 from [1].

APPENDIX

The aim of this Appendix is to examine the so called inversion problem for the Laplace transform of exponentially bounded functions.

A.1. Lemma. *For every $t \in R^+$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$, we have*

$$\frac{1}{p!} \left(\frac{p+1}{t} \right)^{p+1} \int_0^\infty e^{-((p+1)/t)\tau} \tau^p \, d\tau = 1 .$$

Proof. Cf. [1], Proposition 4.6.

A.2. Lemma. *For every $t \in R^+$, $\chi \in R$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$ such that $p + 1 > 2\chi t$, the following inequality holds:*

$$\frac{1}{p!} \left(\frac{p+1}{t} \right)^{p+1} \left[\int_0^{t - t/\sqrt[4]{(p+1)}} e^{-((p+1)/t - \chi)\tau} \tau^p \, d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t + t/\sqrt[4]{(p+1)}}^\infty e^{-((p+1)/t - \chi)\tau} \tau^p \, d\tau \right] \leqq \frac{1}{\sqrt{(p+1)}} e^{7\chi t} .$$

Proof. Let $t \in R^+$, $\chi \in R$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$ be fixed so that $p + 1 > 2\chi t$. Let us recall that clearly

$$(1)\quad \frac{\chi t}{p+1} < \frac{1}{2},$$

$$(2)\quad \frac{\sqrt{(p+1)}}{t^2} (\tau - t)^2 \geqq 1 \quad \text{for every} \quad \tau \in R \quad \text{such that} \quad |\tau - t| > t/\sqrt[4]{(p+1)} .$$

Using (1) and (2) we get

$$\frac{1}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1}\left[\int_0^{t-t/\sqrt[4]{(p+1)}} e^{-((p+1)/t-\chi)\tau}\tau^p \,\mathrm{d}\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t+t/\sqrt[4]{(p+1)}}^{\infty} e^{-((p+1)/t-\chi)\tau}\tau^p \,\mathrm{d}\tau\right] \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1}\frac{\sqrt{(p+1)}}{t^2}\left[\int_0^{t-t/\sqrt[4]{(p+1)}} e^{-((p+1)/t-\chi)\tau}\tau^p(\tau-t)^2 \,\mathrm{d}\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t+t/\sqrt[4]{(p+1)}}^{\infty} e^{-((p+1))/t-\chi)\tau}\tau^p(\tau-t)^2 \,\mathrm{d}\tau\right] \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1}\frac{\sqrt{(p+1)}}{t^2}\int_0^{\infty} e^{-((p+1)/t-\chi)\tau}\tau^p(\tau-t)^2 \,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{1}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1}\frac{\sqrt{(p+1)}}{t^2}\left[\int_0^{\infty} e^{-((p+1)t-\chi)\tau}\tau^{p+2} \,\mathrm{d}\tau - \right.$$

$$\left. - 2t\int_0^{\infty} e^{-((p+1)/t-\chi)\tau}\tau^{p+1} \,\mathrm{d}\tau + t^2\int_0^{\infty} e^{-((p+1)/t-\chi)\tau}\tau^{p} \,\mathrm{d}\tau\right] =$$

$$= \frac{1}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1}\frac{\sqrt{(p+1)}}{t^2}\left[(p+2)!\left(\frac{t}{p+1-\chi t}\right)^{p+3} - \right.$$

$$\left. - 2t(p+1)!\left(\frac{t}{p+1-\chi t}\right)^{p+2} + t^2 p!\left(\frac{t}{p+1-\chi t}\right)^{p+1}\right] =$$

$$= \frac{(p+1)^{p+1}\sqrt{(p+1)}}{p!}\left[\frac{(p+2)!}{(p+1-\chi t)^{p+3}} - \frac{2(p+1)!}{(p+1-\chi t)^{p+2}} + \frac{p!}{(p+1-\chi t)^{p+1}}\right]$$

$$\sqrt{(p+1)}\left(\frac{p+1}{p+1-\chi t}\right)^{p+1}\left[\frac{(p+1)(p+2)}{(p+1-\chi t)^2} - \frac{2(p+1)}{p+1-\chi t} + 1\right] =$$

$$= \sqrt{(p+1)}\left(\frac{p+1}{p+1-\chi t}\right)^{p+1} \times$$

$$\times \frac{(p+1)(p+2) - 2(p+1)(p+1-\chi t) + (p+1-\chi t)^2}{(p+1-\chi t)^2} \times$$

$$\times \sqrt{(p+1)}\left(\frac{p+1}{p+1-\chi t}\right)^{p+1}\frac{p+1+(\chi t)^2}{(p+1-\chi t)^2} =$$

$$= \sqrt{(p+1)}\frac{1}{(p+1)^2}\left(\frac{p+1}{p+1-\chi t}\right)^{p+3}(p+1+(\chi t)^2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(p+1)}}\left(\frac{p+1}{p+1-\chi t}\right)^{p+3}\left(1+\frac{(\chi t)^2}{p+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(p+1)}}\left(\frac{1}{1-\dfrac{\chi t}{p+1}}\right)^{p+3}(1+\chi t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(p+1)}}\left(1+\frac{\dfrac{\chi t}{p+1}}{1-\dfrac{\chi t}{p+1}}\right)^{p+3} e^{\chi t} = \frac{1}{\sqrt{(p+1)}}\left(1+2\,\frac{\chi t}{p+1}\right)^{p+3} e^{\chi t} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(p+1)}}\left(e^{(2\chi t/(p+1))}\right)^{p+3} e^{\chi t} \leqq \frac{1}{\sqrt{(p+1)}}\, e^{7\chi t}\,.$$

A.3. Proposition. *Let $f \in R^+ \to E$ and let ω be a nonnegative constant. If*

(α) *the function f is continuous on R^+,*

(β) *the function $e^{-\omega t} f(t)$ is bounded on R^+,*

then for every $t \in R^+$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$ such that $p + 1 > 2\omega t$, the following inequality holds:

$$\left\| \frac{1}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1} \int_0^\infty e^{-((p+1)/t)\tau} \tau^p f(\tau)\, \mathrm{d}\tau - f(t) \right\| \leqq$$

$$\leqq \sup_{|\tau - t| < t/\sqrt[4]{(p+1)}} (\|f(\tau) - f(t)\|) + \frac{1}{\sqrt{(p+1)}}\left[\|f(t)\| + e^{7\omega t} \sup_{t \in R^+} (e^{-\omega t}\|f(t)\|)\right].$$

Proof. Let us denote for the sake of simplicity

(1) $M = \sup_{t \in R^+} (e^{-\omega t}\|f(t)\|)$,

(2) $Z_{t,p} = \left(t - \dfrac{t}{\sqrt[4]{(p+1)}},\; t + \dfrac{t}{\sqrt[4]{(p+1)}}\right)$ for every $t \in R^+$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$.

By use of the preceding Lemma A.1 and Lemma A.2 with $\chi = 0$ and $\chi = \omega$ we get, with regard to (1) and (2),

(3) $$\left\| \frac{1}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1} \int_0^\infty e^{-((p+1)/t)\tau} \tau^p f(\tau)\, \mathrm{d}\tau - f(t) \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1} \int_0^\infty e^{-((p+1)/t)\tau} \tau^p (f(\tau) - f(t))\, \mathrm{d}\tau \right\| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1} \int_0^\infty e^{-((p+1)/t)\tau} \tau^p \|f(\tau) - f(t)\| \, d\tau =$$

$$= \frac{1}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1} \int_{Z_{t,p}} e^{-((p+1)/t)\tau} \tau^p \|f(\tau) - f(t)\| \, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1} \int_{R \setminus Z_{t,p}} e^{-((p+1)/t)\tau} \tau^p \|f(\tau) - f(t)\| \, d\tau \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1} \int_{Z_{t,p}} e^{-((p+1)/t)\tau} \tau^p \, d\tau \sup_{\tau \in Z_{t,p}} (\|f(\tau) - f(t)\| +$$

$$+ \frac{1}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1} \int_{R \setminus Z_{t,p}} e^{-((p+1)/t)\tau} \tau^p \, d\tau \|f(t)\| +$$

$$+ \frac{1}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1} \int_{R \setminus Z_{t,p}} e^{-((p+1)/t)\tau} \tau^p \|f(\tau)\| \, d\tau \leqq$$

$$= \frac{1}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1} \int_0^\infty e^{-((p+1)/t)\tau} \tau^p \, d\tau \sup_{\tau \in Z_{t,p}} (\|f(\tau) - f(t)\|) +$$

$$+ \frac{1}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1} \int_{R \setminus Z_{t,p}} e^{-((p+1)/t)\tau} \tau^p \, d\tau \, \|f(t)\| +$$

$$+ M \frac{1}{p!}\left(\frac{p+1}{t}\right)^{p+1} \int_{R \setminus Z_{t,p}} e^{-((p+1)/t - \omega)\tau} \tau^p \, d\tau =$$

$$= \sup_{\tau \in Z_{t,p}} (\|f(\tau) - f(t)\|) + \frac{1}{\sqrt{(p+1)}} \|f(t)\| + M \frac{1}{\sqrt{(p+1)}} e^{7\omega t}$$

for every $t \in R^+$ and $p \in \{0, 1, \ldots\}$ such that $p + 1 > 2\omega t$.

It is clear that (1), (2) and (3) give the desired result.

A.4. Remark. The proof of Proposition A. 3 was inspired by a fascinating idea of W. Feller who used a probabilistic approach based on Chebyshev's inequality — see Chap. VII of [2].

Reference

[1] *Sova, M.:* Linear differential equations in Banach spaces, Rozpravy Československé akademie věd, Řada mat. a přír. věd, *85* (1975), No 6.

[2] *Feller, W.:* An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. II, 1966.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 104 (1979), Praha

NOTE ON OPERATORS PRODUCED BY SESQUILINEAR FORMS

MIROSLAV SOVA, Praha

(Received February 28, 1977)

The purpose of this note is to show some "interior" properties characterizing the operators produced by certain sesquilinear forms which are frequently studied in the theory of elliptic operators.

We shall denote by H an arbitrary complex Hilbert space with a norm $\|\cdot\|$ and scalar product $\langle.,.\rangle$. Further, let $L^+(H)$ be the set of all linear operators from H into itself. The complex number field will be denoted by C.

Let $A \in L^+(H)$. The operator A is called *nondissipative* if $\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \geqq 0$ for any $x \in D(A)$.

Let $A \in L^+(H)$. The operator A will be called *special* if

(A_1) for every $x, y \in H$ for which there exists a sequence $x_k \in D(A)$, $k \in \{1, 2, \ldots\}$ such that $x_k \to x$, the sequence $\operatorname{Re}\langle Ax_k, x_k\rangle$ is bounded and $\langle Ax_k, z\rangle \to \langle y, z\rangle$ for any $z \in D(A)$, we have $x \in D(A)$ and $Ax = y$,

(B_1) $|\operatorname{Im}\langle Ax, x\rangle| \leqq d[|\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle| + \|x\|^2]$ for any $x \in D(A)$ with a fixed constant $d \geqq 0$.

Let V be a linear space and S a mapping of the set $V \times V$ into C. The mapping S is called a *sesquilinear form on the space* V if

$$S(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 S(x, y) + \alpha_2 S(x_2, y),$$

$$S(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \bar{\alpha}_1 S(x, y_1) + \bar{\alpha}_2 S(x, y_2)$$

for any $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$ and $\alpha_1, \alpha_2 \in C$.

Let $A \in L^+(H)$. The operator A will be called sesquilinearizable (or produced by a sesquilinear form) if there exist a Hilbert space V and a sesquilinear form S on V such that

(A_2) V is a dense subset of H,

(B_2) there exists a positive constant $q > 0$ such that $\|x\|_V \geqq q\|x\|$ for any $x \in V$,

(C_2) there exists a nonnegative constant $M \geqq 0$ such that $|S(x, x)| \leqq M\|x\|_V^2$ for every $x \in V$,

(D_2) there exists a positive constant $m > 0$ such that $|\mathrm{Re}\, S(x, x)| \geqq m\|x\|_V^2$ for every $x \in V$,

(E_2) $D(A) \subseteq V$,

(F_2) $\langle Ax, z\rangle + \langle x, z\rangle = S(x, z)$ for every $x \in D(A)$ and $z \in V$,

(G_2) if $x \in V$ and there exists $y \in H$ such that $S(x, z) = (y, z)$ for any $z \in V$, then $x \in D(A)$.

Remark. A very closely related notion is that of "regularly accretive" operators used in [2]. More precisely, an operator $A \in L^+(H)$ is regularly accretive if and only if there is a constant $\omega \in R$ such that $A + \omega I$ is nondissipative and sesquilinearizable.

Lemma 1. *Let V be a pre-Hilbert space and S a sesquilinear form on V. If $|S(x, x)| \leqq K\|x\|^2$ for any $x \in V$, then $|S(x, y)| \leqq 2K\|x\| \,.\, \|y\|$ for any $x, y \in V$.*

Proof. See [1], Chap. 12, Cor. 3.2.

Lemma 2. *Let V be a Hilbert space and S a sesquilinear form on V. If there exist constants $0 < m \leqq M$ such that $m\|x\|^2 \leqq S(x, x) \leqq M\|x\|^2$ for any $x \in V$, then for every $\Phi \in V^*$,*

(a) there exists a unique $x \in V$ such that $\Phi(z) = S(z, x)$ for any $z \in V$,

(b) there exists a unique $x \in V$ such that $\overline{\Phi(z)} = S(x, z)$ for any $z \in V$.

Proof. An easy consequence of the Riesz theorem on the representation of continuous linear functionals on Hilbert spaces.

Theorem 1. *Let $A \in L^+(H)$. If the operator A is nondissipative and special, then it is sesquilinearizable.*

Proof. The symbols (A_1), (B_1) and (A_2)–(F_2) refer to the defining properties of special and sesquilinearizable operators, respectively.

Let us now define

(1) $|x| = [|\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle| + \|x\|^2]^{1/2}$ for $x \in D(A)$,

(2) $(x, y) = \frac{1}{2}[\langle Ax, y\rangle + \langle x, Ay\rangle]$ for $x, y \in D(A)$.

It is easy to see from (1) and (2) with respect to the nondissipativity of A that for every $x, x_1, x_2, y \in D(A)$ and $\alpha_1, \alpha_2 \in C$ it is

(3) $|x| \geqq \|x\|$,

(4) $|x|^2 = (x, x)$,

(5) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1(x, y) + \alpha_2(x_2, y)$,

(6) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

The statements (3)–(6) show that

(7) $D(A)$ is a pre-Hilbert space with the norm $|\cdot|$ and the scalar product $(\cdot,\cdot)$.

Let us now choose a fixed constant d for which (B_1) holds, i.e.

(8) $|\mathrm{Im}\,\langle Ax, x\rangle| \leqq d[\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle + \|x\|^2]$ for any $x \in D(A)$.

We obtain easily from (1) and (8) that

(9) $$|\langle Ax, x\rangle| = [(\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle)^2 + (\mathrm{Im}\,\langle Ax, x\rangle)^2]^{1/2} \leqq$$
$$\leqq 2[|Re\,\langle Ax, x\rangle| + |\mathrm{Im}\,\langle Ax, x\rangle|] \leqq$$
$$\leqq 2[|\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle| + d|\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle| + d\|x\|^2] \leqq$$
$$\leqq 2(1 + d)\,[|\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle| + \|x\|^2] = 2(1 + d)\,|x|^2 \quad \text{for every} \quad x \in D(A).$$

Further, let us take

(10) $K = 2(1 + d)$.

It is clear from (7), (9) and (10) that $D(A)$, $\langle A.,.\rangle$ and K fulfil the assumptions of Lemma 1 and consequently

(11) $|\langle Ax, y\rangle| \leqq 2(1 + d)\,|x|\,|y|$ for every $x, y \in D(A)$.

Let us now define V as the completion of the pre-Hilbert space $D(A)$ defined by (7). Then

(12) V is a Hilbert space (with the norm $\|\cdot\|_V$ and the scalar product $\langle .,. \rangle_V$),

(13) $D(A)$ is dense in the space V.

Moreover, (3) implies that we can immerse the space V into H in a natural way so that

(14) $\|x\|_V \geqq \|x\|$ for any $x \in V$.

It follows easily from (A_1) that

(15) $D(A)$ is dense in the space H.

Now we conclude from (13) and (15) that

(16) V is a dense subset of H.

We obtain easily from (1), (3), (9), (12) and (13) that there exists a unique sesquilinear form S on V such that

(17) S satisfies the assumptions of Lemma 2 with $M = 2(1 + d)$ and $m = 1$,

(18) $S(x, z) = \langle Ax, z\rangle + \langle x, z\rangle$ for any $x \in D(A)$ and $z \in V$.

Now we shall prove that

(19) for any $y \in H$, there exists $x \in D(A)$ so that $Ax + x = y$.

Let $y \in H$ and let $l(z) = \overline{\langle y, z \rangle}$ for any $z \in H$. Moreover, let Φ be the restriction of l to V. It follows from (14) that $\Phi \in V^*$. By (17), we can apply Lemma 2 and hence there exists $x \in V$ so that

(20) $S(x, z) = \overline{\Phi(z)} = \langle y, z \rangle$ for any $z \in V$.

By (16), there exists a sequence x_k, $k \in \{1, 2, \ldots\}$, such that

(21) $x_k \in D(A)$ for any $k \in \{1, 2, \ldots\}$ and $x_k \to x$ in the space V.

By (18), (20) and (21) we obtain

(22) $\langle x_k, z \rangle + \langle Ax_k, z \rangle \to \langle y, z \rangle$ for every $z \in V$.

Further, we see from (14) and (21) that

(23) $x_k \to x$ in H.

Moreover, (11) and (21) imply that

(24) $\langle Ax_k, x_k \rangle$ is a bounded sequence.

Now we see easily from (13), (16) and (21)–(24) that (A_1) applies to A which proves (19).

Summing up (12), (13), (15)–(19) we see that the operator A is sesquilinearizable, which proves Theorem 1.

Theorem 2. *Let $A \in L^+(H)$. If the operator A is sesquilinearizable, then it is special.*

Proof. The symbols (A_1), (B_1), (C_1) and (A_2)–(F_2) refer to the defining properties of special and sesquilinear operators, respectively.

We shall first prove

(1) $R(I + A) = H$.

Indeed, let $y \in H$ and let us define $\Phi(z) = \overline{\langle y, z \rangle}$. Then ($B_2$) implies $\Phi \in V^*$. By (C_2) and (D_2) we can apply Lemma 2 and hence there exists $x \in V$ such that

(2) $S(x, z) = \overline{\Phi(z)} = \langle y, z)$ for any $z \in V$.

We see from (E_2)–(G_2) that (2) implies $x \in D(A)$ and $x + Ax = y$ which verifies (1).

Further, we need to prove that

(3) $D(A)$ is dense in V.

Let this be not true. Then there exists $v \in V$ such that

(4) $\quad v \neq 0 \quad$ and $\quad \langle v, x\rangle_V = 0 \quad$ for any $\quad x \in D(A)$.

By Lemma 2, there exists $w \in V$ such that

(5) $\quad \langle v, z\rangle_V = S(w, z) \quad$ for any $\quad z \in V$.

It follows from (4) and (5) that

(6) $\quad S(x, w) = 0 \quad$ for any $\quad x \in D(A)$.

Hence by (F_2) we see from (6) that $\langle x + Ax, w\rangle = 0$ for any $x \in D(A)$ and consequently, by (1), $w = 0$. This implies by (5) that $v = 0$ which contradicts (4). Hence (3) is true.

We shall now prove that

(7) $$|\mathrm{Im}\,\langle Ax, x\rangle| \leqq \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{m}\left(M + \frac{1}{q}\right)\right)(|\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle| + \|x\|^2)$$

for any $\quad x \in D(A)$.

Indeed, we have by (C_2) and (F_2) that for any $x \in D(A)$

$$|\langle Ax, x\rangle + \|x\|^2| \leqq M\|x\|_V^2 .$$

Hence for $x \in D(A)$

$$|\langle Ax, x\rangle| - \|x\|^2 \leqq M\|x\|_V^2$$

which implies according to (B_2)

(8) $$|\langle Ax, x\rangle| \leqq M\|x\|_V^2 + \|x\|^2 \leqq M\|x\|_V^2 + \frac{1}{q}\|x\|_V^2 = \left(M + \frac{1}{q}\right)\|x\|_V^2$$

for any $\quad x \in D(A)$.

On the other hand,

(9) $$|\langle Ax, x\rangle| = [(\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle)^2 + (\mathrm{Im}\,\langle Ax, x\rangle)^2]^{1/2} \geqq$$
$$\geqq \frac{1}{\sqrt{2}}[|\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle| + |\mathrm{Im}\,\langle Ax, x\rangle|] \geqq$$
$$\geqq -\frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle| + \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{Im}\,\langle Ax, x\rangle| \quad \text{for any} \quad x \in D(A).$$

Consequently, (8) and (9) yield

(10) $$|\mathrm{Im}\,\langle Ax, x\rangle| \leqq \sqrt{2}\,|\langle Ax, x\rangle| + |\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle| \leqq$$
$$\leqq |\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle| + \sqrt{2}\left(M + \frac{1}{q}\right)\|x\|_V^2 \quad \text{for any} \quad x \in D(A).$$

Using now (D_2) and (F_2) we obtain from (10) that

$$|\mathrm{Im}\,\langle Ax, x\rangle| \leqq |\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle| + \frac{\sqrt{2}}{m}\left(M + \frac{1}{q}\right)(|\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle| + \|x\|^2) \leqq$$
$$\leqq \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{m}\left(M + \frac{1}{q}\right)\right](|\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle| + \|x\|^2)$$

which verifies (7).

Suppose that

(11) $x, y \in H$, $x_k \in D(A)$, $x_k \to x$, $\mathrm{Re}\,\langle Ax_k, x_k\rangle$ is a bounded sequence and $\langle Ax_k, z\rangle \to \langle y, z\rangle$ for any $z \in D(A)$.

Since by the assumption (11) the sequences $\mathrm{Re}\,\langle Ax_k, x_k\rangle$ and $\|x_k\|$ are bounded we conclude from (D_2) and (F_2) that

(12) the sequence x_k is bounded in V.

The assumption $\langle Ax_k, z\rangle \to \langle y, z\rangle$ for any $z \in D(A)$ and $x_k \to x$ (from (11)) may be rewritten by (F_2) in the form

(13) $S(x_k, z) \to \langle y, z\rangle + \langle x, z\rangle$ for any $z \in D(A)$.

On the other hand, by (12) and (C_2) we have

(14) $|S(x_k, z)| \leqq K(\sup_k \|x_k\|_V)\,\|z\|_V$ for any $k \in \{1, 2, \ldots\}$ and $y \in V$.

Applying the Banach-Steinhaus theorem, we obtain from (3), (13) and (14) that

(15) $S(x_k, z) \to \langle y, z\rangle$ for every $z \in V$.

Next we shall prove that

(16) the sequence x_k is weakly fundamental in the space V.

Indeed, let $\Phi \in V^*$. By (C_2), (D_2) and Lemma 2 there exists $z \in V$ such that $\Phi(x) = S(x, z)$ for every $x \in V$. Hence (15) implies $\Phi(x_k) \to \langle y, z\rangle$ which proves (16).

On the other hand, since V is assumed to be a Hilbert space, it follows from (16) that

(17) the sequence x_k is weakly convergent in V, i.e. there exists $x_0 \in V$ such that $x_k \to x_0$ weakly in V.

Using (A_2), (B_2), we deduce easily from (18) that

(18) $x_k \to x_0$ weakly in H.

But due to (11) and (18), it is necessarily

(19) $x_0 = x$.

It follows easily from (17) and (19) that

(20) $S(x_k, z) \to S(x, z)$ for any $z \in V$.

The preceding results (13) and (20) imply

(21) $S(x, z) = \langle y, z \rangle + \langle x, z \rangle$ for every $z \in V$.

Using (G_2), we see fiom (21) that $x \in D(A)$ and using (A_2) and (F_2) we conclude that, moreover, $Ax + x = y + x$. This result enables us to state that

(22) under the assumption (11), $x \in D(A)$ and $Ax = y$.

The proof is complete since the properties (A_1) and (B_1) are verified in (22) and (7).

Proposition. *Every selfadjoint operator is special.*

Proof. First we shall verify (A_1).

Let $x, z \in H$, $x_k \in D(A)$, $x_k \to x$ and $\langle Ax_k, y \rangle \to \langle z, y \rangle$ for every $y \in D(A)$.

Then $\langle Ax_k, y \rangle = \langle x_k, Ay \rangle$ and hence $\langle x, Ay \rangle = \langle z, y \rangle$ for every $y \in D(A)$. This implies that $x \in D(A^*)$ and $A^*x = z$. But this is in fact $x \in D(A)$ and $Ax = z$.

The condition (B_1) is trivial since $\operatorname{Im} \langle Ax, x \rangle = 0$ for any $x \in D(A)$.

References

[1] *Schechter, M.:* Principles of functional analysis, 1971.
[2] *Schechter, M.:* Spectra of partial differential equations, 1971.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 104 (1979), Praha

A NEW METHOD FOR OBTAINING EIGENVALUES OF VARIATIONAL INEQUALITIES BASED ON BIFURCATION THEORY

MILAN KUČERA, Praha

(Received April 8, 1977)

0. INTRODUCTION

Let H be a real Hilbert space with inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and with the corresponding norm $\|\cdot\|$. Let K be a closed convex cone in H with its vertex at the origin. We shall suppose that $A : H \to H$ is a linear symmetric completely continuous operator. We shall consider the following problem:

$$u \in K, \tag{I}$$

$$\langle \lambda u - Au, v - u \rangle \geqq 0 \quad \text{for all} \quad v \in K, \tag{II}$$

where λ is a real parameter. A real number λ is said to be an eigenvalue of the variational inequality (I), (II) if there exists a nontrivial u satisfying (I), (II). In this case the element u is said to be the corresponding (to λ) eigenvector of the variational inequality (I), (II). The aim of this paper is to study the existence of eigenvalues and eigenvectors of the variational inequality which are not eigenvalues and eigenvectors of the operator A. The basic idea is the following. We shall introduce a penalty operator β (for the properties of β see Section 2) and consider an eigenvalue $\lambda^{(0)}$ of A corresponding to an eigenvector $u^{(0)} \notin K$ of A. Starting with $\lambda_0 = \lambda^{(0)}$, $u_0 = u^{(0)}$, we want to prove the existence of branches λ_ε, u_ε ($\varepsilon \in \langle 0, +\infty)$) satisfying the equation with the penalty

$$\lambda_\varepsilon u_\varepsilon - Au_\varepsilon + \varepsilon \beta u_\varepsilon = 0$$

and converging to an eigenvalue λ_∞ and an eigenvector u_∞ of (I), (II). The original idea was to prove the existence of such functions λ_ε, u_ε on the basis of the abstract implicit function theorem. A result of this type was announced in [8] (without proof) and a complete version of this part of the theory is given in [9]. However, this approach requires very strong assumptions (it is supposed that the linear operator

$A - \varepsilon\,\beta'(u)$ for an arbitrary fixed $u \in H$ and $\varepsilon \geqq 0$ has only simple eigenvalues) and only very simple examples covered by the theory are known to the author. In the course of investigation, it turned out that it is possible to use the known global results of the bifurcation theory to prove the existence of branches of eigenvalues and eigenvectors of the equation with the penalty. This approach seems to be substantially more effective. Under certain assumptions it is possible to start with the eigenvalue $\lambda^{(0)}$ of A of an arbitrary multiplicity and with the corresponding eigenvector $u^{(0)} \notin K$ and to prove the existence of a closed connected (in a certain sense) and unbounded in ε set S_0 of triplets $[\lambda, u, \varepsilon] \in \mathbb{R} \times H \times \mathbb{R}$ satisfying the conditions $[\lambda^{(0)}, u^{(0)}, 0] \in S_0$,

$$\|u\| = 1\,, \quad \lambda_* \leqq \lambda \leqq \lambda^*\,, \quad u \notin K\,,$$

$$\lambda u - Au + \varepsilon \beta u = 0\,,$$

where λ_*, λ^* are some suitable eigenvalues of A. Such a set S_0 contains at least one sequence $[\lambda_n, u_n, \varepsilon_n]$ such that $\lambda_n \to \lambda_\infty$, $u_n \to u_\infty$, where λ_∞ and u_∞ is an eigenvalue and an eigenvector of (I), (II), respectively. Moreover, $u_\infty \in \partial K$ and it is a "new eigenvector of (I), (II)", i.e. u_∞ is not an eigenvector of A. In certain cases, this method yields an infinite sequence of eigenvalues and "new" eigenvectors of (I), (II). In special cases the set S_0 can be described by smooth functions λ_ε, u_ε (see [9]).

In this paper we shall study the case of a simple initial eigenvalue $\lambda^{(0)}$. It is easier than the case of a multiple eigenvalue $\lambda^{(0)}$ which will be treated in the paper [10]. The proof of existence of an unbounded branch S_0 for a simple eigenvalue $\lambda^{(0)}$ is based on a global bifurcation result of E. N. Dancer [3] (see Section 3).

A classification of eigenvalues of (I), (II) and of A is given and their basic properties are explained in Section 1 of this paper. The main result is formulated in Section 2 (Theorems 2.1, 2.2, 2.3). Further, general properties of the branches S_0 of the above mentioned type with the exception of the fact that S_0 is unbounded are proved. This represents the first part of the proof of the main results. Section 3 contains an explanation of the above mentioned result of E. N. Dancer [3] (which is a strengthening of Rabinowitz's result [14]). Further, on the basis of this result it is proved that under certain assumptions the branch S_0 is unbounded. This is the second part of the proof of the main theorems. Applications to the case of variational inequalities describing a beam which is supported by fixed obstacles are given in Section 4.

A very special situation occurs if K is a halfspace. This corresponds to the case of "one point obstacle" (i.e. $n = 1$ in the notation of Example 1.1 and Section 4). In this case, the method from the papers [8], [9] can be used and λ_ε is a decreasing function. Moreover, the eigenvalues of (I), (II) can be calculated in concrete examples on the basis of a method given by S. Fučík, J. Milota [7] and therefore our theory has no practical significance for this special case.

The eigenvalue problem for variational inequalities in a more general setting is studied in [11], where we use a modification of the Ljusternik-Schnirelamann theory for the corresponding penalty problem. We obtain formally infinitely many eigenvalues (or critical levels in a more general situation) but it is not clear if they all are mutually different. A better situation occurs again in the case of a halfspace. Using a certain special trick, we prove the existence of an infinite set of mutually different eigenvectors lying on ∂K with the corresponding critical levels (or eigenvalues) converging to zero.

Let us remark that E. MIERSEMANN investigated a more general variational inequality than (I), (II) (with nonlinear operators) on a cone. He proved the existence of n bifurcation points, where n is determined by the parameters of the problem (see [12]). The proof is based on a Krasnoselskij's sup-min principle.

Speaking about the eigenvalue problem for variational inequalities, we should mention also other papers about this topic (for example [1], [2], [4], [5], [6], [13], [15]). However, the approach to the problem in these papers is completely different from that explained above and the existence results are of the other type than in the present paper.

1. TERMINOLOGY AND GENERAL REMARKS

Denote by ∂K and K^0 the boundary and the interior of K, respectively. The sets of all eigenvalues of the operator A and of the variational inequality (I), (II) will be denoted by Λ_A and Λ_V, respectively. Analogously, we shall denote by E_A and E_V the sets of all eigenvectors of the operator A and of the variational inequality (I), (II), respectively. The strong convergence and the weak convergence will be denoted by $\rightarrow$ and $\rightharpoonup$, respectively.

Remark 1.1. It is easy to see that $E_A \cap K \subset E_V$, $E_V \cap K^0 = E_A \cap K^0$. The second assertion follows from the fact that if $u \in K^0$ then there exists $\delta > 0$ such that $v = w + u \in K$ for all $w \in H$, $\|w\| \leqq \delta$ and therefore (II) implies

$$\langle \lambda u - Au, w \rangle \geqq 0 \quad \text{for all} \quad w \in H\,, \quad \|w\| \leqq \delta\,.$$

The last inequality holds also for all $w \in H$ which means $\lambda u - Au = 0$.

Definition 1.1. We shall say that

(1) $\lambda \in \Lambda_V$ is a *boundary eigenvalue of* (I), (II) if there exists a corresponding eigenvector $u \in \partial K \cap E_V$ and there is no $u \in K^0 \cap E_V$ corresponding to λ;

(2) $\lambda \in \Lambda_V$ is an *interior eigenvalue of* (I), (II) if λ is not a boundary eigenvalue of (I), (II) and there exists a corresponding eigenvector $u \in K^0 \cap E_V$;

(3) $\lambda \in \Lambda_A$ is a *boundary* (with respect to K) *eigenvalue of* A if there exists a corresponding eigenvector $u \in \partial K \cap E_A$ and there is no $u \in K^0 \cap E_A$ corresponding to λ;

(4) $\lambda \in \Lambda_A$ is an *interior* (with respect to K) *eigenvalue of A* if there exists a corresponding eigenvector $u \in K^0 \cap E_A$;

(5) $\lambda \in \Lambda_A$ is an *external* (with respect to K) *eigenvalue of A* if $u \notin K$ for all the corresponding eigenvectors $u \in E_A$.

The set of all interior eigenvalues of (I), (II) (or A*)) will be denoted by Λ_i. Further, we shall denote by $\Lambda_{V,b}$, Λ_b and Λ_e the set of all boundary eigenvalues of (I), (II), the set of all boundary eigenvalues of A and the set of all external eigenvalues of A, respectively.

Remark 1.2. It is clear that $\Lambda_V = \Lambda_i \cup \Lambda_{V,b}$, $\Lambda_i \cap \Lambda_{V,b} = \emptyset$. Analogously, $\Lambda_A = \Lambda_i \cup \Lambda_b \cup \Lambda_e$, $\Lambda_i \cap \Lambda_b = \emptyset$, $\Lambda_b \cap \Lambda_e = \emptyset$, $\Lambda_i \cap \Lambda_e = \emptyset$. Further, $\Lambda_b \subset \Lambda_{V,b}$. On the other hand, if $\lambda \in \Lambda_{V,b}$, then there are three possibilities (the concrete illustration will be given in Example 1.1):

(α) $\lambda \in \Lambda_b$, i.e. λ is simultaneously a boundary eigenvalue of A; in this case there is a common eigenvector $u \in \partial K \cap E_A \cap E_V$ of A and of (I), (II) corresponding to λ;

(β) $\lambda \in \Lambda_e$, i.e. λ is simultaneously an eigenvalue of A but the corresponding eigenvectors of A are not in K, i.e. they are different from the corresponding eigenvectors of (I), (II);

(γ) $\lambda \notin \Lambda_A$.

Remark 1.3. In general, the set of eigenvectors of (I), (II) corresponding to a given eigenvalue $\lambda \in \Lambda_{V,b}$ need not to be convex. (See Example 1.1.) A certain information about the structure of the set of eigenvalues of (I), (II) corresponding to a given eigenvalue $\lambda \in \Lambda_V \cap \Lambda_A$ is given by Lemma 1.1 below.

Lemma 1.1. *Suppose that $\lambda \in \Lambda_A$ and there is a corresponding eigenvector $u_0 \in E_A \cap K$. If $u_1 \in E_V$ is an arbitrary eigenvector of (I), (II) corresponding to λ, then for arbitrary $t_0 \geqq 0$, $t_1 \geqq 0$ the point $u = t_0 u_0 + t_1 u_1$ is an eigenvector of (I), (II) corresponding to λ, too. Moreover, if $u_0 \in E_A \cap K^0$, then $E_A(\lambda) \cap K = E_V(\lambda)$, where $E_A(\lambda)$ and $E_V(\lambda)$ denote the sets of all eigenvectors of A and of (I), (II), respectively, corresponding to λ.*

Proof. It is easy to see that the conditions (I), (II) are equivalent to the condition (I) and

$$\langle \lambda u - Au, v \rangle \geqq 0 \quad \text{for all} \quad v \in K\,; \tag{1.1}$$

$$\langle \lambda u - Au, u \rangle = 0\,. \tag{1.2}$$

*) A number λ is an interior eigenvalue of A if and only if it is an interior eigenvalue of (I) (II). The corresponding eigenvectors of (I), (II) lying in K^0 are those of A. This follows from Remark 1.1.

Clearly, (I) and (1.1) are true for $u = t_0 u_0 + t_1 u_1$ ($t_0 \geqq 0$, $t_1 \geqq 0$). Using (1.2) for u_0, u_1, we obtain

$$\langle \lambda(t_0 u_0 + t_1 u_1) - A(t_0 u_0 + t_1 u_1), t_0 u_0 + t_1 u_1 \rangle =$$
$$= 2 t_0 t_1 \langle \lambda u_0 - A u_0, u_1 \rangle = 0$$

because u_0 is an eigenvector of A. Thus (1.2) is proved and that means $u \in E_V$. Further, let $u_0 \in K^0$. It is clear that $E_A(\lambda) \cap K \subset E_V(\lambda)$. On the other hand, if $u_1 \in E_V(\lambda)$, then we have proved that $t u_0 + (1 - t) u_1 \in E_V(\lambda)$ for all $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Moreover, it is clear that $t u_0 + (1 - t) u_1 \in K^0$ for $t \in (0, 1)$ and therefore $t u_0 + (1 - t) u_1 \in E_A(\lambda)$ for all $t \in (0, 1)$ (cf. Remark 1.1). The set $E_A(\lambda)$ is closed and therefore $u_1 \in E_A(\lambda)$.

Remark 1.4. It is possible that there are eigenvalues in $\Lambda_{V,b}$ which are not simple*) even in the case that the operator A has only simple eigenvalues (see Example 1.1 and [6, Section 1]). Nonetheless, it follows from Lemma 1.1 that $\lambda \in \Lambda_i$ is a simple eigenvalue of (I), (II) if and only if λ is a simple eigenvalue of A.

The definitions and assertions mentioned in this section can be best illustrated by the following Example 1.1, in which the set of eigenvalues and eigenvectors of (I), (II) can be completely described in an elementary way (see [6, Section 1]).

Example 1.1. Denote by $H = \mathring{W}_2^1(0, 1)$ the well-known Sobolev space of all absolutely continuous functions on $\langle 0, 1 \rangle$ vanishing at 0 and 1 whose derivatives are square integrable over $\langle 0, 1 \rangle$. Introduce the inner product on H by

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u'v' \,\mathrm{d}x \quad \text{for all} \quad u, v \in H$$

(instead of the usual equivalent inner product $(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv) \,\mathrm{d}x$). Set $K = \{u \in H;\ u(x_i) \geqq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$, where $x_i \in (0, 1)$ ($i = 1, \ldots, n$) are given numbers (n is positive integer). Let us define the operator A by

$$(Au, v) = \int_0^1 uv \,\mathrm{d}x \quad \text{for all} \quad u, v \in H\,.$$

It is easy to see that $\lambda \in \Lambda_A$ and a nontrivial u is a corresponding eigenvector from E_A if and only if u has a continuous second derivative on $\langle 0, 1 \rangle$ and

$$\lambda u'' + u = 0 \quad \text{on} \quad (0, 1)\,, \tag{1.3}$$

$$u(0) = u(1) = 0\,. \tag{1.4}$$

*) By a simple eigenvalue of (I), (II) we mean a number $\lambda \in \Lambda_V$ such that there exists only one corresponding eigenvector $u \in E_V$ with $\|u\| = 1$.

Further, denote $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$, $u'(x_i \pm) = \lim_{x \to x_i \pm} u'(x_i)$. It is easy to show that $\lambda \in \Lambda_V$ and u is a corresponding eigenvector from E_V if and only if u is a nontrivial continuous function on $\langle 0, 1 \rangle$ with a continuous second derivative on (x_i, x_{i+1}) $(i = 0, \ldots, n)$ satisfying

$$\lambda u'' + u = 0 \quad \text{on} \quad (x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, \ldots, n, \tag{1.5}$$

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{1.6}$$

$$u(x_i) \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.7}$$

$$u'(x_i-) - u'(x_i+) \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.8}$$

$$u(x_i)\,[u'(x_i-) - u'(x_i+)] = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.9}$$

Moreover, $\lambda \in \Lambda_{V,b}$ if and only if each corresponding eigenvector u satisfies

$$u(x_i) = 0 \quad \text{at least for one } i.$$

Analogously, $\lambda \in \Lambda_i$ if and only if the corresponding eigenvector satisfies the condition

$$u(x_i) > 0 \quad \text{for all} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Let us show that all the situations described in Remark 1.2 are possible.

If we take $n = 1$, $x_1 = \frac{1}{4}$, then $\lambda = (\frac{3}{4})^2 (1/\pi^2) \in \Lambda_{V,b}$ is the second eigenvalue of (I), (II) corresponding to the eigenvector $u_V \in E_V$,

$$u_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{on} \quad \langle 0, x_1 \rangle, \\ -\sin \frac{4}{3}\pi(x - \frac{1}{4}) & \text{on} \quad \langle x_1, 1 \rangle, \end{cases}$$

but it is not an eigenvalue of A (see Fig. 1.1).

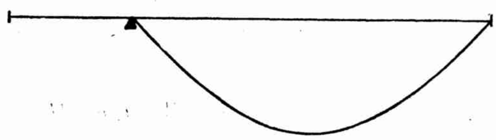


Fig. 1.1

If we choose $n = 2$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, then $\lambda = (\frac{1}{2})^2 (1/\pi^2) \in \Lambda_{V,b} \cap \Lambda_e$ is the second eigenvalue of (I), (II) and simultaneously the second eigenvalue of A. However, we have $u_A \notin K$, $-u_A \notin K$, $u_A \neq u_V \neq -u_A$, where

$$u_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{on} \quad \langle 0, x_1 \rangle \cup \langle x_2, 1 \rangle, \\ -\sin 2\pi(x - \frac{1}{4}) & \text{on} \quad \langle x_1, x_2 \rangle, \end{cases}$$

$$u_A(x) = \sin 2\pi x \quad \text{on} \quad \langle 0, 1 \rangle,$$

$u_A \in E_A$ is a corresponding eigenvector of A and $u_V \in E_V$ is a corresponding eigenvector of (I), (II) (see Fig. 1.2).

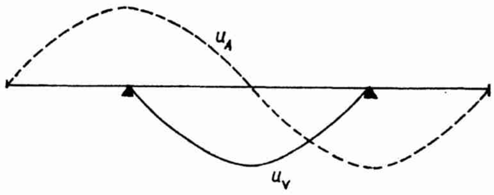


Fig. 1.2

By the same choice of x_1, x_2, the value $\lambda = (\frac{1}{4})^2 (1/\pi^2) \in \Lambda_b$ (i.e. also $\lambda \in \Lambda_{V\,b}$) is the fourth eigenvalue of A and simultaneously the third eigenvalue of (I), (II), corresponding to a common eigenvector $u \in E_A \cap E_V$, $u(x) = \sin 4\pi x$.

Fig. 1.3

If we set $K = \{u \in \mathring{W}_2^1(0, 1);\ u(\frac{1}{4}) \geqq 0,\ u(\frac{3}{4}) \leqq 0\}$, then the functions u_1, u_2,

$$u_1(x) = \begin{cases} \sin \frac{4}{3}\pi x & \text{on } \langle 0, \frac{3}{4}), \\ 0 & \text{on } \langle \frac{3}{4}, 1\rangle, \end{cases}$$

$$u_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{on } \langle 0, \frac{1}{4}), \\ -\sin \frac{4}{3}(x - \frac{1}{4}) & \text{on } \langle \frac{1}{4}, 1\rangle \end{cases}$$

are eigenvectors of (I), (II) corresponding to the eigenvalue $\lambda = (\frac{3}{4})^2 (1/\pi^2) \in \Lambda_V$ (Fig. 1.4), but for arbitrary $t \in (0, 1)$ the point $tu_1 + (1 - t)\, u_2$ is not an eigenvector. That means that λ is not simple (although A has only simple eigenvalues) and the set of the corresponding eigenvectors is not convex.

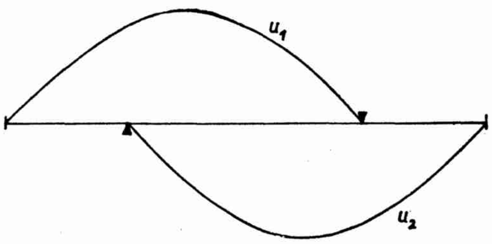


Fig. 1.4

2. BRANCHES OF EIGENVALUES FOR THE EQUATION WITH PENALTY

In the sequel, we shall consider a nonlinear continuous operator $\beta : H \to H$ satisfying the following assumptions:

(P) $\beta u = 0$ if and only if $u \in K$, $\langle \beta u, u \rangle > 0$ for all $u \notin K$ (i.e. β is the penalty operator corresponding to K);

(H) $\beta(tu) = t\beta u$ for all $t \geqq 0$, $u \in H$ (i.e. β is positive homogeneous);

(CC) β is completely continuous; moreover, if $\varepsilon_n > 0$, $u_n \in H$ $(n = 1, 2, \ldots)$ are such that the sequence $\{\varepsilon_n \beta u_n\}$ is bounded then $\{\varepsilon_n \beta u_n\}$ contains a strongly convergent subsequence;

(M) $\langle \beta u - \beta v, u - v \rangle \geqq 0$ for all $u, v \in H$ (i.e. β is monotone);

(β, K^0) if $u \in K^0$, $v \notin K$, then $\langle \beta v, u \rangle \neq 0$.

The points $u \in H$ satisfying the following "symmetry condition" will be useful for our further considerations:

(SC) there exists a neighborhood U of u such that

$$\langle \beta u, v \rangle = \langle \beta v, u \rangle \quad \text{for all} \quad v \in U .$$

The eigenvalues $\lambda \in \Lambda_A$ with the following property will play a special role:

(SC′) if u is an arbitrary eigenvector of A corresponding to λ and $u \notin K$, then u satisfies the condition (SC).

Remark 2.1. If H and K are the space and the cone from Example 1.1, then we can define the operator β by the formula

$$\langle \beta u, v \rangle = - \sum_{i=1}^{n} u^-(x_i)\, v(x_i) ,$$

where u^- denotes the negative part of u. It is easy to see that the assumptions (P), (H), (CC), (M), (β, K^0) are fulfilled and that (SC) holds for each $u \in H$. In particular, all eigenvalues of A satisfy the assumption (SC′), where A can be an arbitrary linear completely continuous operator in H.

Now, let us consider the situation from Example 1.1 but with the cone

$$K_1 = \{u \in H;\ u(x) \geqq 0 \text{ on } \langle \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5} \rangle\}$$

instead of K. We can define the operator β by

$$\langle \beta u, v \rangle = - \int_{2/5}^{3/5} u^-(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{for all} \quad u, v \in H .$$

It is easy to see that the function $u \in H$ satisfies the condition (SC) if and only if $|u(x)| > 0$ for all $x \in \langle \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5} \rangle$. All the other assumptions mentioned above are obviously fulfilled. Hence, if $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots$ is the sequence of all eigenvalues of the operator A from Example 1.1, then only the eigenvalues λ_1, λ_3 satisfy the condition (SC′). (The eigenvector u_n corresponding to λ_n is given by $u_n(x) = \sin n\pi x$.)

The main results formulated in Theorems 2.2, 2.3 are somewhat formally complicated and therefore we shall first formulate Existence Theorem 2.1. In fact, Theorem 2.1 is a part of the assertion of Theorems 2.2 and 2.3. Theorems 2.2, 2.3 explain how the eigenvalues and eigenvectors from Theorem 2.1 can be obtained by a limiting process from the branches of eigenvalues and eigenvectors of the equation with penalty.

Theorem 2.1. *Let $\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)} \in \Lambda_i$, $0 < \lambda^{(1)} < \lambda^{(0)}$, $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)}) \cap (\Lambda_b \cup \Lambda_i) = \emptyset$. Suppose that $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}$ are simple and $u^{(0)}$ is an eigenvector corresponding to $\lambda^{(0)}$, $u^{(0)} \notin K$, $-u^{(0)} \in K^0$. Assume that there exists an operator β satisfying the conditions* (P), (H), (CC), (M), (β, K^0) *and such that $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}$ satisfy the condition* (SC′). *Then there exists $\lambda_\infty \in \Lambda_{V,b} \cap (\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)})$ with a corresponding eigenvector $u_\infty \in \partial K \cap (E_V \setminus E_A)$.*

Definition 2.1. We shall denote by S the set of all triplets $[\lambda, u, \varepsilon] \in \mathbb{R} \times H \times \mathbb{R}$ satisfying the conditions

$$\|u\| = 1\,, \quad \varepsilon \geqq 0 \tag{a}$$

$$\lambda u - Au + \varepsilon\beta u = 0\,. \tag{b}$$

Now we are able to formulate the main results. An additional explanation to Theorems 2.2, 2.3 will be given in Remark 2.2 below.

Theorem 2.2. *Let all the assumptions of Theorem 2.1 be fulfilled and let $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)}) \cap \Lambda_A = \emptyset$. Denote by S_0 the component of S containing the point $[\lambda^{(0)}, u^{(0)}, 0]$. Then for each $\varepsilon > 0$ there exists at least one couple $[\lambda, u] \in R \times H$ such that $[\lambda, u, \varepsilon] \in S_0$. For all $[\lambda, u, \varepsilon] \in S_0$, the following conditions are satisfied:*

$$u \notin K\,, \tag{c}$$

$$\text{if} \quad [\lambda, u, \varepsilon] \neq [\lambda^{(0)}, u^{(0)}, 0]\,, \quad \text{then} \quad \lambda \in (\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)})\,. \tag{d}$$

If $[\lambda_n, u_n, \varepsilon_n] \in S_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ is an arbitrary sequence such that $\varepsilon_n \to +\infty$, then there exists a subsequence of indices r_n $(n = 1, 2, \ldots)$ such that $r_n \to +\infty$, $\lambda_{r_n} \to \lambda_\infty$, $u_{r_n} \to u_\infty$, where $\lambda_\infty \in (\Lambda_{V,b} \setminus \Lambda_A) \cap (\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)})$ and $u_\infty \in (E_V \setminus E_A) \cap \partial K$ is a corresponding eigenvector of (I), (II).

Theorem 2.3. *Let all the assumptions of Theorem 2.1 be fulfilled. Then there exists a set $S_0 \subset S$ having all the properties of S_0 from the assertion of Theorem 2.2 with $\lambda_\infty \in \Lambda_{V,b}$ instead of $\lambda_\infty \in \Lambda_{V,b} \setminus \Lambda_A$. S_0 is either closed and connected or $S_0 = \bigcup_{i=1}^{\varkappa} S_i$ ($\varkappa > 1$ integer), where S_i are closed connected sets with the following* *property*: *there exist* $\lambda_i \in (\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)})$, $u_i \notin K$, $\tilde{u}_i \notin K$ $(i = 1, \ldots, \varkappa - 1)$ *such that each* S_i *contains the points* $[\lambda_{i-1}, u_{i-1}, 0]$, $[\lambda_i, \tilde{u}_i, 0]$ *for* $i = 1, \ldots, \varkappa - 1$, *where* $\lambda_0 = \lambda^{(0)}$, $u_0 = u^{(0)}$, *and* $S_\varkappa$ *contains* $[\lambda_{\varkappa-1}, u_{\varkappa-1}, 0]$ *and is unbounded.*

Remark 2.2. Theorems 2.2, 2.3 guarantee the existence of an unbounded in ε and (in a certain sense) connected branch $S_0 \subset S$ joining the given eigenvalue $\lambda^{(0)}$ and the eigenvector $u^{(0)}$ with an eigenvalue λ_∞ and eigenvector u_∞ of (I), (II). If $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)}) \cap \Lambda_A = \emptyset$, then $[\lambda^{(0)}, u^{(0)}, 0]$ is the only point of the type $[\lambda, u, 0]$ lying on S_0 and the branch S_0 is connected in this case (Theorem 2.2). In the general case, we admit the existence of some external eigenvalues of A in $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)})$ (Theorem 2.3). In this case the branch S_0 can contain points of the type $[\lambda, u, 0]$, $\lambda \in (\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)}) \cap \Lambda_e$, u is the corresponding eigenvector, and the connectedness in the variable u can be violated at these points. In other words, S_0 consists of the (connected) components S_i joining points of the type $[\lambda_{i-1}, u_{i-1}, 0]$, $[\lambda_i, \tilde{u}_i, 0]$, where $\lambda_0 = \lambda^{(0)}$, $u_0 = u^{(0)}$, $\lambda_i \in \Lambda_e \cap (\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)})$ and u_i, $\tilde{u}_i$ are the corresponding eigenvectors. The branch S_0 will be obtained in Section 3 by a transformation from a bifurcation branch C_0 for a suitable bifurcation equation (B″) which is an extension of the penalty eqúation (b). The branch C_0 will be connected in every case and the points $[\lambda, u, \varepsilon] \in S_0$ at which the connectedness of S_0 can be lost will be obtained from the points $[1/\lambda, 0, 0]$.

Remark 2.3. The proof of Theorems 2.2, 2.3 consists of three parts. As we mentioned in Remark 2.2, the existence of S_0 will be proved in Section 3 on the basis of Dancer's global bifurcation result (the last part of the proof). However, for the use of the known bifurcation results, the validity of the basic conditions (c), (d) is essential and therefore we shall prove that the conditions (c), (d) are a priori satisfied on S_0 (if it exists). An investigation of the properties of S_0 is the subject of the next part of this Section. Roughly speaking, the proof of the conditions (c), (d) is based on the following assertions:

(α) S_0 starts at $\lambda^{(0)} > \lambda^{(1)}$, $u^{(0)} \notin K$ (by the assumptions);

(β) the values λ are locally decreasing along S_0 near $\lambda = \lambda^{(0)}$, $\varepsilon = 0$ (Lemma 2.2);

(γ) S_0 cannot intersect the lines $\lambda = \lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$ (with the exception of the point $[\lambda^{(0)}, u^{(0)}, 0]$) and it cannot intersect ∂K (Lemmas 2.1, 2.3).

On the whole, the conditions (c), (d) follow from (α − γ) if the branch S_0 under consideration is connected. In the case of Theorem 2.3, (c), (d) will be preserved because the set S_0 will be "connected in λ" and "connected in u except for the points $[\lambda_i, u_i, 0]$, $[\lambda_i, \tilde{u}_i, 0]$" (cf. Remark 2.2) and u_i, $\tilde{u}_i \notin K$ because $\lambda_i \in \Lambda_e$ by the assumptions. The fact that the branch S_0 gives the eigenvalues and the eigenvectors of (I), (II) (for $\varepsilon \to +\infty$) can be proved by a modified penalty method technique (see Lemma 2.4).

Lemma 2.1. *If* $\lambda^{(0)} \in \Lambda_i$ *and the condition* (β, K^0) *is fulfilled, then*

$$\lambda^{(0)} u - Au + \varepsilon \beta u \neq 0 \quad \text{for all} \quad u \notin K\,, \quad \varepsilon > 0\,. \tag{2.1}$$

Proof. There exists an eigenvector $u^{(0)} \in K^0 \cap E_A$ corresponding to $\lambda^{(0)}$. If (2.1) is true, then we have

$$\lambda^{(0)}u - Au + \varepsilon\beta u = 0\,,$$
$$\lambda^{(0)}u^{(0)} - Au^{(0)} = 0$$

for some $u \notin K$, $\varepsilon > 0$. This implies

$$\lambda^{(0)}\langle u, u^{(0)}\rangle - \langle Au, u^{(0)}\rangle + \varepsilon\langle \beta u, u^{(0)}\rangle = 0\,,$$
$$\lambda^{(0)}\langle u^{(0)}, u\rangle - \langle Au^{(0)}, u\rangle = 0\,,$$

and therefore in virtue of the symmetry of A we obtain $\langle \beta u, u^{(0)}\rangle = 0$. But this contradicts the assumption (β, K^0).

Remark 2.4. It is clear from the condition (P) that if $[\lambda, u, \varepsilon] \in S$ and $\varepsilon = 0$ or $u \in K$, then $\lambda \in \Lambda_A$ and u is a corresponding eigenvector. In particular, if $\lambda_0 \in \Lambda_A$, then there exists $\delta > 0$ such that if $[\lambda, u, \varepsilon] \in S$, $0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$, then $\varepsilon > 0$, $u \notin K$. (We use the fact that the eigenvalues of A are isolated.)

Lemma 2.2. *Let* $[\lambda_0, u_0, \varepsilon_0] \in S$, $[\lambda_n, u_n, \varepsilon_n] \in S$, $\varepsilon_n \neq \varepsilon_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $[\lambda_n, u_n, \varepsilon_n] \to [\lambda_0, u_0, \varepsilon_0]$ *in* $\mathbb{R} \times H \times \mathbb{R}$, *let* u_0 *satisfy the condition* (SC) *and let* (M) *be fulfilled. Then*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_0}{\varepsilon_n - \varepsilon_0} = -\langle \beta u_0, u_0\rangle \leqq 0\,. \tag{2.2}$$

If $u_0 \notin K$ *and* (P) *is fulfilled, then the last expression is even negative.*

Proof. If $[\lambda, u, \varepsilon] \in S$, then the conditions (a), (b) from Definition 2.1 imply

$$\lambda = \lambda\langle u, u\rangle = \langle Au, u\rangle - \varepsilon\langle \beta u, u\rangle\,.$$

Hence using the symmetry of A, we obtain

$$\begin{aligned}\lambda_n - \lambda_0 &= \langle Au_n, u_n - u_0\rangle - \varepsilon_n\langle \beta u_n, u_n - u_0\rangle + \langle Au_0, u_n - u_0\rangle - \\ &\quad - \varepsilon_0\langle \beta u_0, u_n - u_0\rangle + (\varepsilon_0 - \varepsilon_n)\langle \beta u_0, u_n - u_0\rangle + \\ &\quad + \varepsilon_n(\langle \beta u_0, u_n\rangle - \langle \beta u_n, u_0\rangle) + (\varepsilon_0 - \varepsilon_n)\langle \beta u_0, u_0\rangle = \\ &= \lambda_n\langle u_n, u_n - u_0\rangle + \lambda_0\langle u_0, u_n - u_0\rangle + (\varepsilon_0 - \varepsilon_n)\langle \beta u_0, u_n - u_0\rangle + \\ &\quad + \varepsilon_n(\langle \beta u_0, u_n\rangle - \langle \beta u_n, u_0\rangle) + (\varepsilon_0 - \varepsilon_n)\langle \beta u_0, u_0\rangle = \\ &= \lambda_n - \lambda_0 + (\lambda_0 - \lambda_n)\langle u_n, u_0\rangle + (\varepsilon_0 - \varepsilon_n)\langle \beta u_0, u_n - u_0\rangle + \\ &\quad + \varepsilon_n(\langle \beta u_0, u_n\rangle - \langle \beta u_n, u_0\rangle) + (\varepsilon_0 - \varepsilon_n)\langle \beta u_0, u_0\rangle\,.\end{aligned}$$

Dividing this equation by $(\varepsilon_n - \varepsilon_0)$ and using the assumption (SC), we obtain (for $n \geqq n_0$, n_0 sufficiently large)

$$\frac{\lambda_n - \lambda_0}{\varepsilon_n - \varepsilon_0}\langle u_n, u_0\rangle = -\langle \beta u_0, u_n - u_0\rangle - \langle \beta u_0, u_0\rangle\,.$$

This implies (2.2) because of $u_n \to u_0$ and (M). The last assertion of Lemma 2.2 is a consequence of the assumption (P).

Lemma 2.3. *Let the assumptions of Theorem* 2.1 *be fulfilled. Let S_c be a connected subset of S containing a point $[\bar{\lambda}, \bar{u}, 0]$, where $\bar{\lambda} \in (\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)}\rangle$, $\bar{u} \notin K$. Then for all $[\lambda, u, \varepsilon] \in S_c$ the conditions* (c), (d) *are fulfilled.*

Proof. Denote by S_1 the component of the set

$$\{[\lambda, u, \varepsilon] \in S_c\,; \quad \lambda \in \langle\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)}\rangle\}$$

containing $[\bar{\lambda}, \bar{u}, 0]$. First, we shall prove that (c), (d) are true for all points from S_1. We have $\bar{u} \notin K$, $[\bar{\lambda}, \bar{u}, 0] \in S_1$ and S_1 is connected. Thus, if (c) is not true on S_1, then there exists $[\tilde{\lambda}, \tilde{u}, \tilde{\varepsilon}] \in S_1$ such that $\tilde{u} \in \partial K$. We have $\beta\tilde{u} = 0$ by (P) and (b) implies $\tilde{\lambda} \in \Lambda_b \cap \langle\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)}\rangle$, This is a contradiction with the assumptions and hence (c) is proved for the points from S_1. Now, let us suppose that (d) is not true on S_1. Then there exists $[\lambda, u, \varepsilon] \in S_1$ such that either

$$\lambda = \lambda^{(0)}\,, \quad [u, \varepsilon] \neq [u^{(0)}, 0] \tag{2.3}$$

or

$$\lambda = \lambda^{(1)}\,. \tag{2.4}$$

If $\lambda = \lambda^{(0)}$, then $\varepsilon = 0$ with respect to Lemma 2.1 and (c). On the other hand, the only normed eigenvector of A corresponding to $\lambda^{(0)}$ and satisfying (c) is $u^{(0)}$. Thus (2.3) is not possible. If $\lambda = \lambda^{(1)}$, then $\varepsilon = 0$ with respect to Lemma 2.1 again. The set S_1 is connected and therefore there exists a sequence $[\lambda_n, u_n, \varepsilon_n] \in S_1$ such that $\lambda_n > \lambda^{(1)}$, $\varepsilon_n \geqq 0$, $\lambda_n \to \lambda^{(1)}$, $\varepsilon_n \to 0$, $u_n \to u$. In virtue of Remark 2.4 we have $\varepsilon_n > 0$ and $u \in E_A$. But this is not possible due to Lemma 2.2 and (P) because $\lambda^{(1)}$ satisfies the condition (SC′) and $u \notin K$ since (c) holds for the points from S_1. Hence, neither (2.3) nor (2.4) can occur which proves (d) for the points from S_1.

Now we shall show that $S_c = S_1$ and the proof of Lemma 2.3 will be complete. Let us suppose that $S_c \neq S_1$. Then there exists $[\lambda, u, \varepsilon] \in S_c$ such that $\lambda \notin \langle\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)}\rangle$. Simultaneously, the set $\{[\lambda, u, \varepsilon] \in S_c; \lambda \in \langle\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)}\rangle, [\lambda, u, \varepsilon] \notin S_1\}$ is either empty or separated from the set S_1. This together with the connectedness of S_c implies that there exist $[\lambda_n, u_n, \varepsilon_n] \in S_c$ such that $\lambda_n \notin \langle\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)}\rangle$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\lambda_n \to \lambda$, $u_n \to u$, $\varepsilon_n \to \varepsilon$, where $[\lambda, u, \varepsilon] \in S_1$. We have $\lambda \in \langle\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)}\rangle$ from the definition of S_1, i.e. we obtain $\lambda = \lambda^{(1)}$ or $\lambda = \lambda^{(0)}$. Moreover, (d) holds for the points from S_1 which implies $\lambda = \lambda^{(0)}$, $u = u^{(0)}$, $\varepsilon = 0$. That means $\lambda_n > \lambda^{(0)}$, $\lambda_n \to \lambda^{(0)}$, $\varepsilon_n > 0$ *), $\varepsilon_n \to 0$ and this contradicts Lemma 2.2 because $\lambda^{(0)}$ satisfies the assumptions (SC′) and $u^{(0)} \notin K$. Hence we have $S_1 = S_c$ and Lemma 2.3 is proved.

Lemma 2.4. *Let $\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)} \in \Lambda_I$ be simple, $0 < \lambda^{(1)} < \lambda^{(0)}$ and let the assumptions* (P), (CC) *and* (M) *be fulfilled. Suppose that there exist $\varepsilon_n, u_n, \lambda_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sat-*

*) We use Remark 2.4 again.

isfying the conditions

(a′) $$\|u_n\| = 1\,, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \varepsilon_n \to +\infty\,,$$

(b′) $$\lambda_n u_n - Au_n + \varepsilon_n \beta u_n = 0\,, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

(c′) $$u_n \notin K^0\,, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

(d′) $$\lambda_n \in (\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)})\,, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

If $\{r_n\}$ *is an arbitrary sequence of indices such that* $r_n \to \infty$, $\lambda_{r_n} \to \lambda_\infty$, $u_{r_n} \rightharpoonup u_\infty$ *for some* λ_∞, u_∞, *then* $\lambda_\infty \in \Lambda_{V,b} \cap (\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)})$, $u_{r_n} \to u_\infty$ *and* $u_\infty \in E_V \cap \partial K$ *is a corresponding eigenvector of* (I), (II).

Remark 2.5. It follows from the boundedness of $\langle \lambda^{(1)}, \lambda^{(0)} \rangle$ and the weak compactness of the unit sphere in H that there exists at least one sequence r_n mentioned in the assumptions of Lemma 2.4. That means that Lemma 2.4 guarantees the existence of at least one couple λ_∞, u_∞.

Proof of Lemma 2.4. The sequences $\{\lambda_n u_n\}$, $\{Au_n\}$ are bounded and therefore $\{\varepsilon_n \beta u_n\}$ is bounded by (b′). The assumption (CC) implies that there exists a strongly convergent subsequence of the sequence $\{\varepsilon_{r_n} \beta u_{r_n}\}$. This together with (b′), (d′) and the fact that A is completely continuous implies that there exists a strongly convergent subsequence of $\{u_{r_n}\}$. But we have $u_{r_n} \rightharpoonup u_\infty$ and therefore $u_{r_n} \to u_\infty$. (If this were not the case, we could obtain another subsequence of $\{u_{r_n}\}$ strongly convergent to the point $\tilde{u}_\infty \neq u_\infty$, which is not possible.) Using the assumptions (b′), (P), (M) we obtain for an arbitrary $v \in K$ that

$$\langle \lambda_\infty u_\infty - Au_\infty, v - u_\infty \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \lambda_{r_n} u_{r_n} - Au_{r_n}, v - u_{r_n} \rangle =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \varepsilon_{r_n} \langle \beta v - \beta u_{r_n}, v - u_{r_n} \rangle \geqq 0\,.$$

Further, $\beta u_{r_n} \to 0$ because $\{\varepsilon_n \beta u_n\}$ is a bounded sequence and $\varepsilon_n \to \infty$. Hence we have by (M)

$$\langle \beta v, v - u_\infty \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \beta v - \beta u_{r_n}, v - u_{r_n} \rangle \geqq 0$$

for an arbitrary $v \in H$. Setting $v = u_\infty + tw$ for an arbitrary $t > 0$, $w \in H$, we obtain

$$\langle \beta(u_\infty + tw), w \rangle \geqq 0\,.$$

Passing to the limit for $t \to 0+$, we obtain the last inequality for $t = 0$ and for each $w \in H$. This is equivalent to $\beta(u_\infty) = 0$, i.e. $u_\infty \in K$ by (P). We have proved that λ_∞, u_∞ satisfy (I), (II). Moreover, $u_n \notin K^0$, $\|u_n\| = 1$, $u_{r_n} \to u_\infty$ and therefore $u_\infty \in \partial K$, $\|u_\infty\| = 1$. This together with the assumption $\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)} \in \Lambda_i$ implies that neither the case $\lambda_\infty = \lambda^{(1)}$ nor $\lambda_\infty = \lambda^{(0)}$ is possible. (We use also the assumption that $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(0)}$ are simple and Lemma 1.1.) Hence we obtain $\lambda_\infty \in (\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)})$ and the proof is complete.

3. USING A GLOBAL BIFURCATION RESULT.

First we shall explain a result of E. N. Dancer [3] which is a strengthening of Rabinowitz's result [14]. Let X be a real Hilbert space*) with an inner product $(\cdot, \cdot)$ and with the corresponding norm $|||\cdot|||$, $L: X \to X$ a linear completely continuous selfadjoint*) operator in X. Further, let G be a nonlinear completely continuous mapping of $\mathbb{R} \times X$ into X such that

$$\text{(3.1)} \qquad \lim_{|||x \to 0|||} \frac{G(\mu, x)}{|||x|||} = 0 \quad \text{uniformly on bounded subsets of } \mathbb{R} \, .$$

We shall consider the bifurcation problem for the equation

$$\text{(B)} \qquad x - \mu \, L(x) + G(\mu, x) = 0 \, ,$$

where μ is a real parameter. A point $[\mu_0, 0]$ is said to be a bifurcation point of (B) (with respect to the line $\{[\mu, 0]; \mu \in \mathbb{R}\}$ of trivial solutions) if for each neighbourhood $U(\mu_0, 0)$ of $[\mu_0, 0]$ in $\mathbb{R} \times X$ there exists $[\mu, x] \in U(\mu_0, 0)$ satisfying (B) and $|||x||| \neq 0$. Denote by $r(L)$ the set of all characteristic values of L, i.e. the set of the reciprocals of the non zero eigenvalues of L:

$$r(L) = \{\mu \in \mathbb{R};\ x - \mu \, L(x) = 0 \text{ for some } x \in X,\ |||x||| \neq 0\} \, .$$

Remark 3.1. It is well-known that if $[\mu, 0]$ is a bifurcation point of (B) then $\mu \in r(L)$. Indeed, there exist μ_n, x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ such that $|||x_n||| > 0$, $\mu_n \to \mu$, $|||x_n||| \to 0$ and

$$\text{(B')} \qquad x_n - \mu_n \, L(x_n) + G(\mu_n, x_n) = 0 \, .$$

We can suppose that $y_n = x_n / |||x_n||| \rightharpoonup y$ for some $y \in X$. (In the opposite case we can pass to suitable subsequences.) Dividing (B') by $|||x_n|||$, passing to the limit with $n \to \infty$, using (3.1) and the complete continuity of L we obtain that $y_n \to y$, $y - \mu \, L(y) = 0$, $|||y||| = 1$. That means $\mu \in r(L)$.

Now denote by C the closure of the set of all nontrivial solutions of (B), i.e.

$$C = \overline{\{[\mu, x] \in \mathbb{R} \times X;\ |||x||| \neq 0 \, , \text{(B) is fulfilled}\}} \, .$$

Remark 3.2. A point $[\mu, 0]$ is a bifurcation point of (B) if and only if $[\mu, 0] \in C$. It follows directly from the previous definitions.

Further, let μ_0 be a given simple characteristic value of L with a corresponding eigenvector x_0, $|||x_0||| = 1$. Then $[\mu_0, 0]$ is a bifurcation point of (B) (see [14]). Denote by C_0 the component of C containing the point $[\mu_0, 0]$. Thus, C_0 is non-empty.

*) In the papers [3], [14], a general Banach space and a non-selfadjoint operator L are considered. We are formulating the results for symmetric operators in a Hilbert space because it is simpler and fully sufficient for our purposes.

Moreover, roughly speaking, C_0 "consists of two branches C_0^+ and C_0^- starting in the direction x_0 and $-x_0$, respectively". This situation will be useful for our purposes and we shall describe it precisely.

Let us choose $\eta \in (0, 1)$ and define

$$\begin{aligned} K_\eta &= \{[\mu, x] \in \mathbb{R} \times X;\ |(x, x_0)| > \eta |||x|||\}\,, \\ K_\eta^+ &= \{[\mu, x] \in K_\eta;\ (x, x_0) > 0\}\,, \\ K_\eta^- &= K_\eta \setminus K_\eta^+\,. \end{aligned}$$

There exists $R > 0$ such that

$$(C \setminus \{[\mu_0, 0]\}) \cap B_R(\mu_0, 0) \subset K_\eta\,,$$

where $B_R(\mu_0, 0) = \{[\mu, x] \in \mathbb{R} \times X;\ |\mu - \mu_0| + |||x||| \leqq R\}$ (for the proof see [14, Lemma 1.24]). For each $r \in (0, R\rangle$ denote by D_r^+ and D_r^-, respectively, the components of the sets $\{[\mu_0, 0]\} \cup (C \cap B_r(\mu_0, 0) \cap K_\eta^+)$ and $\{[\mu_0, 0]\} \cup (C \cap \cap B_r(\mu_0, 0) \cap K_\eta^-)$ containing $[\mu_0, 0]$. Further, denote by $C_{0,r}^+$ and $C_{0,r}^-$ respectively, the components of $\overline{C_0 \setminus D_r^-}$ and $\overline{C_0 \setminus D_r^+}$ containing $[\mu_0, 0]$. Set

$$C_0^+ = \overline{\bigcup_{0<r\leqq R} C_{0,r}^+}\,, \quad C_0^- = \overline{\bigcup_{0<r\leqq R} C_{0,r}^-}\,.$$

This definition of C_0^+, C_0^- is independent of the choice of $\eta \in (0, 1)$ (see [14, Lemma 1.24]), the sets C_0^+, C_0^- are connected and

$$C_0 = C_0^+ \cup C_0^-$$

(for the proof see [14]; cf. [3]). Further, the following implications are true (they follow directly from [14, Lemma 1.24] and from the definition of C_0^+, C_0^-):

(3.2) $$\text{if } [\mu_n, x_n] \in C_0^+ \setminus K_\eta^- \cap B_\delta(\mu_0, 0) \text{ for some } \delta > 0\,,$$
$$\mu_n \to \mu_0\,, \quad \|x_n\| \to 0\,, \quad \text{then } \frac{x_n}{\|x_n\|} \to x_0\,;$$

(3.3) $$\text{if } [\mu_n, x_n] \in C_0^- \setminus K_\eta^+ \cap B_\delta(\mu_0, 0) \text{ for some } \delta > 0\,,$$
$$\mu_n \to \mu_0\,, \quad \|x_n\| \to 0\,, \quad \text{then } \frac{x_n}{\|x_n\|} \to -x_0\,.$$

Theorem 3.1. (E. N. Dancer [3, Theorem 2]). *Either C_0^+ and C_0^- are both unbounded or $C_0^+ \cap C_0^- \neq \{[\mu_0, 0]\}$.*

Remark 3.3. Let us consider the situation from Theorems 2.2, 2.3. Let us define $X = H \times \mathbb{R}$ and introduce the operators L, G from X into X by

$$\begin{aligned} L(x) &= L([v, \varepsilon]) = [Av, 0] \quad \text{for all} \quad x = [v, \varepsilon] \in X\,, \\ G(\mu, x) &= G([\mu, v, \varepsilon]) = [\mu\varepsilon\beta v, -\|v\|^2] \quad \text{for all} \quad x = [v, \varepsilon] \in X\,. \end{aligned}$$

We shall study the situation from the beginning of this Section with these special operators and with $\mu_0 = 1/\lambda^{(0)}$. It is easy to see that L, G satisfy all the assumptions mentioned above. The equation (B) can be written as

$$\text{(B}'') \qquad [v, \varepsilon] - \mu[Av, 0] + [\mu\varepsilon\beta v, -\|v\|^2] = 0$$

or in the form

$$\text{(a}'') \qquad \|v\|^2 = \varepsilon,$$

$$\text{(b}'') \qquad v - \mu Av + \mu\varepsilon\beta v = 0.$$

In particular, we have

$$C = \overline{\{[\mu, v, \varepsilon] \in \mathbb{R} \times H \times \mathbb{R};\ \varepsilon > 0,\ (\text{a}''), (\text{b}'') \text{ are fulfilled}\}}.$$

Remark 3.4. It is clear that μ is a characteristic value of L with a corresponding eigenvector $[u, \varepsilon]$ if and only if $\varepsilon = 0$ and μ is a characteristic value of A with a corresponding eigenvector u. In this case, the multiplicities of μ as a charactetistic value of L and A are equal. Especially, $\mu_0 = 1/\lambda^{(0)}$ is a simple characteristic value of L with a corresponding eigenvector $[u^{(0)}, 0]$ under the assumptions of Theorem 2.1.

Remark 3.5. If we write $\lambda = 1/\mu$, $u = v/\sqrt{\varepsilon}$, then the conditions (a″), (b″) together with $\mu \neq 0$, $\|v\| > 0$ (or $\varepsilon > 0$) are equivalent to the conditions (a), (b) from Definition 2.1 and $\lambda \neq 0$, $\varepsilon > 0$. This together with Remarks 3.2, 3.4 yiedls

$$\{[\lambda, u, \varepsilon] \in S;\ \lambda \neq 0\} = \left\{\left[\frac{1}{\mu}, \frac{v}{\|v\|}, \varepsilon\right];\ [\mu, v, \varepsilon] \in C,\ \mu \neq 0,\ \varepsilon > 0\right\} \cup$$

$$\cup \{[\lambda, u, 0];\ \lambda \neq 0,\ \lambda \in \Lambda_A,\ u \text{ corresp. eigenvector},\ \|u\| = 1\}.$$

Remark 3.6. The implications (3.2), (3.3) are equivalent to the following ones in the situation of Remark 3.3:

$$(3.2') \qquad \text{if } [\mu_n, v_n, \varepsilon_n] \in C_0^+ \setminus K_\eta^- \cap B_\delta(\mu_0, 0) \text{ for some } \delta > 0,$$

$$\mu_n \to \mu_0, \quad \|v_n\| \to 0, \quad \text{then } \frac{\varepsilon_n}{\|v_n\|} \to 0, \quad \frac{v_n}{\|v_n\|} \to u^{(0)};$$

$$(3.3') \qquad \text{if } [\mu_n, v_n, \varepsilon_n] \in C_0^- \setminus K_\eta^+ \cap B_\delta(\mu_0, 0) \text{ for some } \delta > 0,$$

$$\mu_n \to \mu_0, \quad \|v_n\| \to 0, \quad \text{then } \frac{\varepsilon_n}{\|v_n\|} \to 0, \quad \frac{v_n}{\|v_n\|} \to -u^{(0)}.$$

Remark 3.7. If $[\mu, v, \varepsilon] \in C$ and $\varepsilon = 0$ or $v \in K$, then μ is a characteristic value of A and either $\|v\| = 0$ or v is an eigenvector of A corresponding to μ. This follows from Remarks 3.1, 3.2, 3.4, from the equations (a″), (b″) (see Remark 3.3) and the assumption (P). In particular, if $\mu \in r(A)$, then there exists $\delta > 0$ such that if $[\mu, v, \varepsilon] \in C$, $0 < |\mu - \mu_0| < \delta$, then $\varepsilon > 0$, $v \notin K$. (We use the fact that the characteristic values of A are isolated; cf. also Remark 2.4.)

Proof of Theorem 2.3. Let X, L and G be the space and the operators introduced in Remark 3.3, $\mu_0 = 1/\lambda^{(0)}$, $\mu_1 = 1/\lambda^{(1)}$. We shall show on the basis of Theorem 3.1 that the set C_0^+ is unbounded. The set S_0 will be obtained by a transformation from C_0^+ and the conditions (c), (d) for S_0 will be proved. Hence it will follow that S_0 is unbounded in ε and this will be the essential part of the proof.

First, we shall show that

$$C_0^- = \{[\mu, v, \varepsilon] \in \mathbb{R} \times H \times \mathbb{R};\ \mu = \mu_0,\ \varepsilon \geqq 0,\ v = -\sqrt{(\varepsilon)}\, u^{(0)}\}\,. \tag{3.4}$$

It is easy to see that the set on the right-hand side of (3.4) is a subset of C_0^-. (It is sufficient to use the fact that $tu^{(0)} \in K$ for all $t \leqq 0$, i.e. $\beta(tu^{(0)}) = 0$ by (P), and that μ_0 is a characteristic value of A with a corresponding eigenvector $u^{(0)}$.) On the other hand, if C_0^- contains some elements of the other type, then in virtue of the connectedness of C_0^- there exists a sequence $\{[\mu_n, v_n, \varepsilon_n]\} \subset C_0^- \setminus K_\eta^+$ such that

$$\|v_n\| > 0\,, \quad |\mu_n - \mu_0| + \left\|\frac{v_n}{\|v_n\|} + u^{(0)}\right\| > 0\,, \quad \mu_n \to \mu_0\,, \tag{3.5}$$

$$v_n \to tu^{(0)} \quad \text{for some} \quad t \leqq 0\,. \tag{3.6}$$

It follows from (3.6) that

$$\frac{v_n}{\|v_n\|} \to -u^{(0)}\,. \tag{3.7}$$

Indeed, this is clear in the case $t < 0$ while in the case $t = 0$ this follows from (3.3′) (see Remark 3.6). But we have $-u^{(0)} \in K^0$ by the assumptions, therefore $v_n/\|v_n\| \in K$ for n sufficiently large by (3.7). The conditions (P), (3.5), (3.7) and (b″) imply that $\mu_n \neq \mu_0$ because μ_0 is simple. This is not possible due to Remark 3.7. Hence (3.4) is proved. Now, it is easy to show by an analogous argument using the definition of C_0^+ that

$$C_0^+ \cap C_0^- = [\mu_0, 0, 0]\,. \tag{3.8}$$

Theorem 3.1 implies that the set C_0^+ is unbounded.

Now let us consider the set

$$\{[\mu, v, \varepsilon] \in C_0^+;\ \mu \neq 0,\ \|v\| > 0\}\,.$$

This set consists of a system of components C_α ($\alpha \in I$, I is a suitable set of indices). Let us define

$$S_\alpha = \overline{\left\{[\lambda, u, \varepsilon];\ \lambda = \frac{1}{\mu},\ u = \frac{v}{\|v\|},\ [\mu, v, \varepsilon] \in C_\alpha\right\}}\,,$$

$$S_0 = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha\,.$$

It is $S_\alpha \subset S$ and S_α is closed and connected for each $\alpha \in I$. We have $[\mu_0, 0, 0] \in \bar{C}_{\alpha_0}$ at least for one $\alpha_0 \in I$ and therefore there exist $[\mu_n, v_n, \varepsilon_n] \in C_{\alpha_0}$ such that $[\mu_n, v_n, \varepsilon_n] \to \to [\mu_0, 0, 0]$. It is $C_\alpha \subset C_0^+$ which together with (3.8) implies that $[\mu_n, v_n, \varepsilon_n] \notin \notin K_\eta^- \cap B_\delta(\mu_0, 0)$ for some δ sufficiently small. Now we obtain $v_n/\|v_n\| \to u^{(0)}$ by (3.2′) and that means $[\lambda^{(0)}, u^{(0)}, 0] \in S_{\alpha_0}$. Thus Lemma 2.3 implies that (c), (d) are fulfilled for all $[\lambda, u, \varepsilon] \in S_{\alpha_0}$. We shall show that this is true for all S_α, $\alpha \in I$. Let us suppose the contrary. We have $C_0^+ = \bigcup_{\alpha \in I} \bar{C}_\alpha$ and this set is connected. Therefore there exist $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ such that $\bar{C}_{\alpha_1} \cap \bar{C}_{\alpha_2} \neq \emptyset$, (c), (d) are fulfilled for all $[\lambda, u, \varepsilon] \in S_{\alpha_1}$ but not for all $[\lambda, u, \varepsilon] \in S_{\alpha_2}$. Let $[\tilde{\mu}, \tilde{v}, \tilde{\varepsilon}] \in \bar{C}_{\alpha_1} \cap \bar{C}_{\alpha_2}$. It follows from the definition of $C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}$ that either $\tilde{\mu} = 0$ or $\|\tilde{v}\| = \tilde{\varepsilon} = 0$. We have $\tilde{\mu} \in \langle \mu_0, \mu_1)$ as (d) holds for the points from S_{α_1} and therefore $\tilde{\mu} \neq 0$, $\|\tilde{v}\| = \tilde{\varepsilon} = 0$. Remarks 3.1, 3.2 imply $\tilde{\mu} \in r(L)$. If $\tilde{\mu} = \mu_0$, then we obtain $[\lambda^{(0)}, u^{(0)}, 0] \in S_{\alpha_1} \cap S_{\alpha_2}$ as above for S_{α_0}. If $\tilde{\mu} \in (\mu_0, \mu_1)$, then there exist $[\mu_n^{(i)}, v_n^{(i)}, \varepsilon_n^{(i)}] \in C_{\alpha_i}$ such that $[\mu_n^{(i)}, v_n^{(i)}, \varepsilon_n^{(i)}] \to [\tilde{\mu}, 0, 0]$ $(i = 1, 2)$ and we obtain $v_n^{(i)}/\|v_n^{(i)}\| \to u_i$, where u_i $(i = 1, 2)$ are eigenvectors of A corresponding to $\tilde{\lambda} = 1/\tilde{\mu} \in \Lambda_A$ (see Remarks 3.1, 3.4). Hence it follows that $[\tilde{\lambda}, u_1, 0] \in S_{\alpha_1}$, $[\tilde{\lambda}, u_2, 0] \in S_{\alpha_2}$. We have $u_1 \notin K$, $u_2 \notin K$ be cause we assume $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)}) \cap (\Lambda_b \cup \Lambda_i) = \emptyset$. Consequently, in each case S_{α_2} contains an element $[\tilde{\lambda}, \tilde{u}, 0]$ with $\tilde{\lambda} \in (\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)}\rangle$, $\tilde{u} \notin K$ and Lemma 2.3 implies that (c), (d) are fulfilled for all $[\lambda, u, \varepsilon] \in S_{\alpha_2}$, which is a contradiction. Hence (c), (d) hold for all $[\lambda, u, \varepsilon] \in S_0 = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$.

We have proved that C_0^+ is unbounded. It follows from here and (a), (d) that S_0 is unbounded in ε. Using the connectedness of C_0^+ and the previous considerations, it is easy to see that we can choose a finite subsystem $S_1, \ldots, S_\varkappa$ of the system S_α with the properties mentioned in Theorem 2.3. The last part of the assertion of Theorem 2.3 follows from Lemma 2.4.

Remark 3.8. It is easy to see from the proof of Theorem 2.3 that Theorem 2.2 can be proved in the analogous way, only some steps of the proof will be easier.

4. APPLICATION TO THE SUPPORTED BEAM

Let us denote $H = \{u \in W_2^2(\langle 0, 1\rangle);\ u(0) = u(1) = 0\}$. It is a Hilbert space with the inner product

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u''(x)\, v''(x)\, dx\,.$$

Let A be an operator in H defined by

$$\langle Au, v\rangle = \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx \quad \text{for all} \quad u, v \in H\,.$$

A real λ is an eigenvalue and $u \in H$ is a corresponding eigenvector of A if and only if the function u has a continuous derivative of the fourth order on $\langle 0, 1\rangle$ and

$$\lambda u^{(4)} + u'' = 0 \quad \text{on} \quad \langle 0, 1\rangle\,, \tag{4.1}$$

$$u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0\,. \tag{4.2}$$

The problem describes the behaviour of a beam which is simply fixed on its ends and compressed by a force P (see Fig. 4.1). It is $\lambda = IE/P$, where E is the Young modulus of elasticity and I is the moment of inertia. The beam can bend if and only if the force P is such that λ is an eigenvalue of A (i.e. of (4.1), (4.2)) and the bending is described by a corresponding eigenvector.

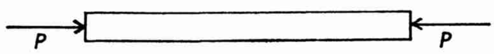


Fig. 4.1

Now let us consider the eigenvalue problem for the variational inequality (I), (II) with the convex closed cone

$$K = \{u \in H;\ u(x_i) \geqq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}\,,$$

where $x_i \in (0, 1)$ $(i = 1, \ldots, n,\ n$ positive integer) are given numbers.
It is easy to show that λ is an eigenvalue and u is a corresponding eigenvector of (I), (II) if and only if u has a continuous second derivative on $\langle 0, 1\rangle$, a continuous fourth derivative on (x_i, x_{i+1}) for all $i = 0, 1, \ldots, n$ (where we set $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$) and

$$\lambda u^{(4)} + u'' = 0 \quad \text{on} \quad (x_i, x_{i+1})\,, \qquad i = 0, 1, \ldots, n\,, \tag{4.3}$$

$$u(x_i) \geqq 0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,, \tag{4.4}$$

$$\lim_{x \to x_i -} u'''(x) - \lim_{x \to x_i +} u'''(x) \geqq 0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,, \tag{4.5}$$

$$\left[\lim_{x \to x_i -} u'''(x) - \lim_{x \to x_i +} u'''(x)\right] u(x_i) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{4.6}$$

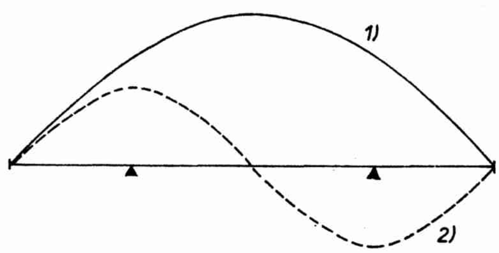


Fig. 4.2. 1) Possible bending 2) Impossible bending

The problem corresponds to a beam which is simply fixed on its ends, compressed by a force P and, moreover, supported by fixed obstacles from below at the points x_i (see Fig. 4.2). The parameter λ has the same meaning as above. The beam can bend if and only if λ is an eigenvalue of the variational inequality (I), (II) (i.e. of (4.3)–(4.6)) and the bending is given by a corresponding eigenvector u of (I), (II).

Let us introduce the penalty operator β by the formula

$$(4.7) \qquad \langle \beta u, v \rangle = - \sum_{i=1}^{n} u^-(x_i)\, v(x_i) \quad \text{for all} \quad u, v \in H\,,$$

where u^- denotes the negative part of u. It is easy to see that the operators A, β satisfy all the assumptions of Theorems 2.1 and 2.3. The assumption (S) is fulfilled for each $u \in H$ (see also Remark 2.1). The eigenvalues of A (i.e. of (4.1), (4.2)) are the numbers

$$(4.8) \qquad \lambda_k = \frac{1}{k^2 \pi^2}$$

and the corresponding eigenvectors are the functions

$$(4.9) \qquad u_k(x) = \sin k\pi x$$

($k = 1, 2, \ldots$). All eigenvalues of the operator A are simple.

Example 4.1. Let us consider the case $n = 2$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{3}{4}$. Then we have

$$\lambda_{4k} \in \Lambda_b\,, \quad \lambda_{4k-3} \in \Lambda_i\,, \quad \lambda_{4k-1} \in \Lambda_i\,, \quad \lambda_{4k-2} \in \Lambda_e\,, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

because

$$\sin 4k\pi x_i = 0\,, \quad i = 1, 2\,, \quad k = 1, 2, \ldots,$$
$$\sin (4k - 1)\, x_1 = \sin (4k - 1)\, x_2 \neq 0\,, \quad \sin (4k - 1)\, x_1 = \sin (4k - 1)\, x_2 \neq 0\,,$$
$$\sin (4k - 2)\, x_1 = - \sin (4k - 2)\, x_2 \neq 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Thus Theorems 2.1 and 2.3 can be used for each couple

$$\lambda^{(1)} = \lambda_{4k-1}\,, \quad \lambda^{(0)} = \lambda_{4k-3}\,.$$

For each $k = 1, 2, \ldots$, we obtain an eigenvalue $\lambda_{k,\infty} \in \Lambda_{V,b} \cap (\lambda_{4k-1}, \lambda_{4k-3})$ with a corresponding eigenvector $u_{k,\infty} \in (E_V \setminus E_A) \cap \partial K$. That means $u_{k,\infty}$ is a "new" eigenvector of the variational inequality (i.e. it is not simultaneously an eigenvector of A) and $u(x_i) \geqq 0$, $i = 1, 2$, $u(x_1)\, u(x_2) = 0$. In particular, there exists an infinite sequence of eigenvalues of (I), (II) such that there exist corresponding eigenvectors which are not eigenvectors of A.

Example 4.2. Let $n \geqq 3$ be arbitrary and let x_i $(i = 1, \ldots, n)$ be such that

$$x_i \in (0, \varepsilon\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right\rangle \cup \langle 1 - \varepsilon, 1)$$

and each of the intervals $(0, \varepsilon\rangle$, $\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon\rangle$, $\langle 1 - \varepsilon, 1)$ contains at least one x_i, where $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$. We shall consider the eigenvalues λ_k with $k < 1/\varepsilon$ only. We have

$$\lambda_{4k} \in \Lambda_e\,, \quad \lambda_{4k-1} \in \Lambda_e\,, \quad \lambda_{4k-2} \in \Lambda_e\,, \quad \lambda_{4k-3} \in \Lambda_i \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{1}{4\varepsilon}\right]$$

(where $[1/4\varepsilon]$ is the entire part of $1/4\varepsilon$), because

$$\sin 4k\pi x > 0 \quad \text{on} \quad \langle 0, \varepsilon\rangle\,, \qquad \sin 4k\pi x < 0 \quad \text{on} \quad \langle 1 - \varepsilon, 1\rangle\,,$$

$$\sin (4k - 1)\,\pi x > 0 \quad \text{on} \quad \langle 0, \varepsilon\rangle \cup \langle 1 - \varepsilon, 1\rangle\,,$$

$$\sin (4k - 1)\,\pi x < 0 \quad \langle \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\varepsilon, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\varepsilon\rangle\,,$$

$$\sin (4k - 2)\pi x > 0 \quad \text{on} \quad \langle 0, \varepsilon\rangle\,, \qquad \sin (4k - 2)\,\pi x < 0 \quad \text{on} \quad \langle 1 - \varepsilon, 1\rangle\,,$$

$$\sin (4k - 3)\,\pi x > 0 \quad \text{on} \quad \langle 0, \varepsilon\rangle \cup \langle \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\varepsilon, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\varepsilon\rangle \cup (1 - \varepsilon, 1\rangle\,,$$

$k = 1, 2, \ldots, [1/4\varepsilon]$. Theorems 2.1, 2.3 can be applied for each couple $\lambda^{(0)} = \lambda_{4k-3}$, $\lambda^{(1)} = \lambda_{4k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, [1/4\varepsilon] - 1$. Thus there exists $\lambda_{k,\infty} \in \Lambda_{V,b} \cap (\lambda_{4(k+1)-3}, \lambda_{4k-3})$ with a corresponding eigenvector $u_{k,\infty} \in (E_V \setminus E_A) \cap \partial K$ for $k = 1, 2, \ldots, \ldots, [1/4\varepsilon] - 1$. That means that $u_{k,\infty}$ is a "new" eigenvector of (I), (II) (i.e. it is not simultaneously an eigenvector of A) and $u_{k,\infty}(x_i) \geqq 0$, $i = 1, \ldots, n$, $u(x_1) \cdot \ldots \cdot u(x_n) = 0$.

Analogously, we can consider a beam supported not only in a finite number of points but, for example, on some intervals. This situation corresponds to the variational inequality (I), (II) with the cone

$$K = \{u \in H;\ u(x) \geqq 0 \text{ for } x \in \langle x_i, y_i\rangle,\ i = 1, \ldots, n\}\,,$$

where x_i, y_i are given numbers, $0 < x_1 < y_1 < \ldots < x_n < y_n < 1$. In this case, we can use the penalty operator defined by

$$\langle \beta u, v\rangle = -\sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{y_i} u^-(x)\, v(x)\, dx \quad \text{for all} \quad u, v \in H\,.$$

The assumptions of Theorems 2.1, 2.2 are fulfilled again. A point u fulfils the assumption (SC) if and only if $|u(x)| > 0$ on $\langle x_i, y_i\rangle$, $i = 1, \ldots, n$ (cf. Remark 2.1). In particular, an arbitrary interior eigenvalue of A satisfies (SC').

Example 4.3. Set

$$K = \{u \in H;\ u(x) \geqq 0 \text{ for } x \in \langle \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\delta, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\delta\rangle\}\,,$$

where $\delta \in (0, \frac{1}{3})$ is given. Then we have

$$\lambda_{2k} \in \Lambda_e\,, \quad \lambda_{2k-1} \in \Lambda_i\,, \quad k = 1, \ldots, [1/2\delta]\,,$$
$$\lambda_k \in \Lambda_e\,, \quad k > [1/\delta]$$

because $\sin 2k\pi x$ for $k = 1, \ldots, [1/2\delta]$ and $\sin k\pi x$ for $k > [1/\delta]$ change their signs on $\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta \rangle$, $\sin(2k - 1)\pi x$ does not change its sign on $\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta \rangle$ for $k = 1, \ldots, [1/2\delta]$. Thus Theorems 2.1 and 2.3 can be used for the couples $\lambda^{(0)} = \lambda_{2k-1}$, $\lambda^{(1)} = \lambda_{2k+1}$, $k = 1, \ldots, [1/2\delta] - 1$. For each $k = 1, \ldots, [1/2\delta] - 1$, we obtain an eigenvalue $\lambda_{k,\infty} \in \Lambda_{V,b} \cap (\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k+1})$ with a corresponding eigenvector $u_{k,\infty} \in (E_V \setminus E_A) \cap \partial K$. Hence $u_{k,\infty}$ is a "new" eigenvector of (I), (II) and $u(x) \geqq 0$ on $\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta \rangle$, $u(x) = 0$ at least for one $x \in \langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta \rangle$.

Example 4.4. Set

$$K = \{u \in H;\ u(x) \geqq 0 \text{ for } x \in \langle \tfrac{1}{2}\delta, \delta \rangle \cup \langle \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\delta, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\delta \rangle \cup \langle 1 - \delta, 1 - \tfrac{1}{2}\delta \rangle\,.$$

Similarly as in Example 4.2, we obtain

$$\lambda_{4k} \in \Lambda_e\,, \quad \lambda_{4k-1} \in \Lambda_e\,, \quad \lambda_{4k-2} \in \Lambda_e\,, \quad \lambda_{4k-3} \in \Lambda_i\,,$$
$$k = 1, \ldots, [1/4\delta]\,, \quad \lambda_k \in \Lambda_e\,, \quad k > [1/4\delta]\,.$$

Hence we obtain $\lambda_{k,\infty} \in \Lambda_{V,b} \cap (\lambda_{4k+1}, \lambda_{4k-3})$, $u_{k,\infty} \in (E_V \setminus E_A) \cap \partial K$, $k = 1, \ldots, [1/4\delta] - 1$.

Example 4.5. Let

$$K = \{u \in H;\ u(x) \geqq 0 \text{ for } x \in \langle 0, \delta \rangle\}\,,$$

where $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ is given. Then $\lambda_k \in \Lambda_i$ for all $k = 1, 2, \ldots, [1/\delta]$. Theorem 2.2 can be used for each couple $\lambda^{(1)} = \lambda_k$, $\lambda^{(0)} = \lambda_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, [1/\delta]$ and we obtain $\lambda_{k,\infty} \in (\Lambda_{V,b} \setminus \Lambda_A) \cap (\lambda_k, \lambda_{k-1})$.

References

[1] *A.-F. Abeasis, J.-P. Dias,* and *A. Lopes-Pinto:* Sur les valeurs propres du sous-differential d'une fonction convexe avec un noyau non borné. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A *278* (1974), 1197—1199.

[2] *V. Benci, A. M. Micheletti:* Su un problema dia utovalori per disequazioni variazionali. Annali di Matematica pura ed applicata, Vol. *CVII* (1976), 359—371.

[3] *E. N. Dancer:* On the structure of solutions of non-linear eigenvalue problems. Indiana Univ. Math. Journ., Vol. *23,* No. 11 (1974), 1069—1076.

[4] *J.-P. Dias:* Variational inequalities and eigenvalue problems for nonlinear maximal monotone operators in a Hilbert space. American Journal of Math., Vol. *97,* No. 4 (1976), 905 to 914.

[5] *J.-P. Dias, J. Hernández*: A Sturm-Liouville theorem for some odd multivalued maps. Proc. Amer. Math. Soc., Vol. *53*, No. 1 (1975), 72—74.

[6] *C. Do:* The buckling of a thin elastic plate subjected to unilateral conditions. In „Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics", Lecture Notes in Mathematics, No. *503*, 307—316, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1976.

[7] *S. Fučík, J. Milota:* Linear and nonlinear variational inequalities on halfspaces. Comment. Math. Univ. Carol. *16*, 4 (1975), 663—682.

[8] *M. Kučera:* A new method for obtaining eigenvalues of variational inequalities of the special type. Preliminary communication. Comment. Math. Univ. Carol. *18*, 1 (1977), 205—210.

[9] *M. Kučera:* A new method for obtaining eigenvalues of variational inequalities. Branches of eigenvalues of the equation with the penalty in a special case. Časopis pro pěstování matematiky, *104* (1979), 295—310.

[10] *M. Kučera:* A new method for obtaining eigenvalues of variatonal inequalities. Operators with multiple eigenvalues. To appear.

[11] *M. Kučera, J. Nečas, J. Souček:* The eigenvalue problem for variational inequalities and a new version of the Ljusternik-Schnirelmann theory. In "Nonlinear Analysis", Academic Press, New York—San Francisco—London 1978.

[12] *E. Miersemann:* Über höhere Verzweigungspunkte nichtlinearer Variationsungleichungen. Math. Nachr. *85* (1978), 195—213.

[13] *J. Naumann, H. U. Wenk:* On eigenvalue problems for variational inequalities. Rendiconti di Matematica 3, Vol. *9*, Ser. VI (1976), 439—463.

[14] *P. H. Rabinowitz:* Some global results for nonlinear eigenvalue problems. Journ. Funct. Anal. *7* (1971), 487—513.

[15] *R. C. Riddell:* Eigenvalue problems for nonlinear elliptic variational inequalities on a cone. Journ. Funct. Anal., Vol. *26*, No. 4 (1977), 333—355.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

JIŘÍ RACHŮNEK, Olomouc: *Quasi-orders of algebras.* (Kvaziuspořádání algeber.)

V článku je studována množina všech kvaziuspořádání na parciální algebře. Je ukázáno, že tato množina je vzhledem k uspořádání inkluzí algebraický svaz a jsou popsány kompaktní prvky. Speciálně je uvažován případ svazu všech kvaziuspořádání na grupě, která jsou monotonní s grupovým sčítáním, a jsou v tomto svazu popsány konstrukce svazových operací.

JAROSLAV BARTÁK, JIŘÍ NEUSTUPA, Praha: *Замечание к устойчивости решений уравнения колебания стержня.* (Poznámka k stabilitě řešení rovnice tyče.)

Užitím metody ljapunovských funkcionálů jsou dokázány věty o linearizaci pro vyšetřování exponenciální stability řešení rovnice tyče. Jako příklad jsou nalezeny postačující podmínky stability v případě slabě nelineární rovnice tyče.

BOHDAN ZELINKA, Liberec: *Embedding trees into clique-bridge-clique graphs.* (Vnoření stromů do grafů typu klika-most-klika.)

Článek se zabývá studiem vnoření stromu s n vrcholy do grafu s n vrcholy, který sestává ze dvou klik s disjunktními vrcholy a z mostu mezi nimi.

MILAN TVRDÝ, Praha: ***Fredholm-Stieltjes integral equations with linear constraints: duality theory and Green's function.*** (Fredholmovy-Stieltjesovy integrální rovnice s lineárními okrajovými podmínkami: teorie duality a Greenova funkce.)

V práci se vyšetřuje systém rovnic $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0) - \int_0^1 d_s[\mathbf{P}(t, s) - \mathbf{P}(0, s)]\, \mathbf{x}(s) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(0)$, $\int_0^1 d[\mathbf{K}(s)]\, \mathbf{x}(s) = \mathbf{r}$ pro vektorovou funkci $\mathbf{x} : [0, 1] \rightarrow R_n$ s konečnou variací na $[0, 1]$ ($\mathbf{x} \in BV_n$). Za předpokladů méně omezujících než tomu bylo v předchozích článcích autora je odvozen adjungovaný systém a dokázány příslušné fredholmovské věty. V případě, že daný systém má jediné řešení $\mathbf{x} \in BV_n$ pro každé $\mathbf{f} \in BV_n$ a $\mathbf{r} \in R_n$ je dokázána existence Greenovy funkce.

MIROSLAV SOVA, Praha: *Laplace transform of exponentially Lipschitzian vector-valued functions.* (Laplaceova transformace exponenciálně lipschitzovských vektorových funkcí.)

V článku jsou ukázány charakteristické vlastnosti reálného typu pro Laplaceovu transformaci exponenciálně lipschitzových vektorových funkcí.

MIROSLAV SOVA, Praha: *Note on operators produced by sesquilinear forms.* (Poznámka o operátorech produkovaných seskvilineárními formami.)

Jsou ukázány „vnitřní" vlastnosti charakterizující operátory produkované seskvilineárními formami.

MILAN KUČERA, Praha: *A new method for obtaining eigenvalues of variational inequalities based on bifurcation theory*. (Nová metoda pro nalezení vlastních čísel variačních nerovností založená na teorii bifurkací.)

Nechť A je lineární totálně spojitý symetrický operátor v Hilbertově prostoru H. Uvažujme kužel K v prostoru H a příslušný operátor penalizace β. Označme S množinu všech trojic $[\lambda, u, \varepsilon] \in R \times H \times R$ splňujících podmínky $\|u\| = 1$, $\varepsilon \geqq 0$, $\lambda u - Au + \varepsilon\beta u = 0$. Je-li S_0 komponenta množiny S obsahující bod $[\lambda^{(0)}, u^{(0)}, 0]$, kde $\lambda^{(0)}$ je dané vlastní číslo operátoru A a $u^{(0)} \notin K$ je příslušný vlastní vektor, pak existuje posloupnost $\{[\lambda_n, u_n, \varepsilon_n]\} \subset S_0$ taková, že $\varepsilon_n \to \infty$, $\lambda_n \to \lambda_\infty$, $u_n \to u_\infty$, kde λ_∞ je vlastní číslo a u_∞ je příslušný vlastní vektor variační nerovnosti $u \in K$, $(\lambda u - Au, v - u) \geqq 0$ pro všechna $v \in K$. V některých případech se dostává existence nekonečně mnoha vlastních čísel variační nerovnosti, konvergujících k nule.

RECENSE

Béla Andrásfai: INTRODUCTORY GRAPH THEORY, Akadémiai Kiadó, Budapest 1977, stran 268, obr. 264, cena neuvedena.

Věděli jsme, že B. Andrásfai napsal před časem maďarskou knížku o grafech. Nyní z podnětu P. Erdöse vychází dílo v anglickém překladu a stává se tak přístupným rozsáhlé zahraniční veřejnosti. Je dobře známo, že maďarský matematik D. König byl první, kdo zpracoval teorii grafů knižně (1936) a že po druhé světové válce se Maďarsko stalo opravdovou velmocí v tomto vědeckém oboru.

Podívejme se trochu na obsah nového svazku. Dílo je rozvrženo do sedmi kapitol. První z nich má úvodní charakter a zavádějí se v ní základní pojmy. Definuje se (neorientovaný) graf zcela názorně jako útvar složený z uzlů a hran, připouštějí se i násobné hrany a smyčky a zavádí se izomorfismus mezi grafy. Stupeň uzlu, souvislý graf, komponenta, cesta, kružnice — to je několik dalších pojmů na začátku spisu. Druhá kapitola se věnuje stromům a lesům. Autor si všímá vztahu mezi počtem uzlů a hran daného stromu, zavádí podgraf, jemuž v češtině říkáme kostra (souvislého) grafu G i analogický podgraf, když G není souvislý. Ke slovu se dostávají i aplikace (strukturní vzorce v chemii, tzv. ekonomická kostra ohodnoceného grafu*), Kirchhoffovy zákony). Kapitola třetí začíná Eulerovou úlohou o sedmi mostech města Královce, jež vede k pojmu eulerovský graf. Pak následuje propedeutická definice orientovaného grafu, aby se i v této oblasti mohla řešit eulerovská úloha. Seznámíme se s grafy silně souvislými, s rovnovážně orientovanými, s problémem bludiště a přijdou na řadu i grafy náhodně eulerovské (O. Ore). Čtvrtá kapitola vychází z Hamiltonovy hry na pravidelném dvanáctistěnu, jež vede k zavedení hamiltonovské kružnice (resp. cesty) v grafu. Autor popisuje postačující podmínky pro existenci hamiltonovské kružnice (G. A. Dirac, O. Ore, L. Pósa) a obrací se i ke grafům orientovaným. Další, pátá kapitola se zabývá studiem faktorů daného grafu a příbuznými otázkami (matching problems). Z nejznámějších výsledků zde uváděných je věta, že každý úplný graf na $2k$ uzlech je možno vyjádřit jako součin lineárních faktorů. Následuje nejobsáhlejší část — kapitola šestá, kde se B. Andrásfai věnuje extrémním grafům zkoumaným pod různými zornými úhly. Nejprve je tu však několik stránek z elementární kombinatoriky (permutace, faktoriály, kombinační čísla aj.). Ramseyova čísla, Turánova věta o grafu neobsahujícím úplný podgraf s daným počtem uzlů a příbuzné otázky zaplňují další stránky. Knížka má ještě kapitolu sedmou. V té se řeší cvičení a problémy, jichž čtenář nalezl dostatečný počet při studiu předcházejících šesti kapitol. Pak je tu seznam použitých pramenů a další literatury a spis končí věcným rejstříkem.

Dílo je psáno velmi přístupně, dokazují se téměř všechny věty — snadné i těžší — a výsledky se předkládají in statu nascendi. Do svazku se nedostaly některé zajímavé oblasti, jež patří do této části matematiky (např. vztahy mezi grafy a plochami, maticemi a teorií pravděpodobnosti, problémy barvení map aj.). V předmluvě se praví, že jim autor věnuje druhý svazek. Knížku do angličtiny přeložil A. Recski.

Jiří Sedláček, Praha

*) Průkopnická práce O. Borůvky (1926) zde není zmíněna, ale odkazuje se na známý článek J. B. Kruskala (1956).

R. C. Gunning: RIEMANN SURFACES AND GENERALIZED THETA FUNCTIONS. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 91. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1976. Stran XII + 165, cena DM 48,—.

Lineární prostor tříd ekvivalence positivních divisorů řádu $g - 1$ na kompaktní souvislé Riemannově ploše M rodu g se podle klasických „receptů" realizuje ireducibilní nadplochou W_{g-1} asociovaného g-dimensionálního komplexního toru $J(M)$, tzv. Jacobiho variety. Nadplochu W_{g-1} je pak možno popsat jako množinu nul jisté speciální theta funkce. Původní Riemannova plocha $W_1 \subset J(M)$ je pak téměř popsána nadplochou W_{g-1}, avšak ve velmi nepřímé a komplikované formě. Předmětem této knihy je podat přímější cestu. Plocha W_1 a podvariety speciálních positivních divisorů se popisují jistými zobecněnými theta funkcemi. První kapitola obsahuje přehled teorie komplexních variet a vektorových bandlů, specielně jsou studovány komplexní tory. Ve druhé kapitole se probírají základní vlastnosti kompaktních Riemannových ploch. Další dvě kapitoly jsou jádrem knihy a pojednávají o zobecněných theta funkcích a jejich vztahu k Prymovým diferenciálům.

Alois Švec, Olomouc

N. Jacobson: LECTURES IN ABSTRACT ALGEBRA; I, Basic Concepts. Graduate Texts in Mathematics, 30. Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin, 1975. Stran XII + 217, cena DM 26,40.

Kniha je úvodem trojsvazkového díla (další dva svazky jsem recenzoval dříve). První vydání vyšlo v r. 1951 u Van Nostranda, New York. Kniha je vynikající (jak je již tradičně obvyklé u Jacobsonových děl), je psána velmi elementárně (i když obsah zdaleka není triviální), obsahuje řadu cvičení a, obecně řečeno, je vzorem, jak psát učebnice. Obsah je ovšem standardní a je patrný z názvů kapitol: Úvod (pojmy z teorie množin, systém přirozených čísel), Semigrupy a grupy, Okruhy, obory integrity a tělesa, Rozšíření okruhů a těles, Elementární teorie faktorizace, Grupy s operátory, Moduly a ideály, Svazy.

Alois Švec, Olomouc

Herman H. Goldstine: A HISTORY OF NUMERICAL ANALYSIS FROM THE 16TH THROUGH THE 19TH CENTURY. Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 2. Springer-Verlag, New York—Berlin—Heidelberg, 1977. 348 stran. Cena DM 54,—.

Recenzovaná kniha tvoří druhý svazek nové springerovské serie (prvním svazkem je třídílná publikace O. Neugebauer: A History of Ancient Mathematical Astronomy, třetí svazek tvoří soubor prací redigovaný B. Randellem: The Origins of Digital Computers).

Celkový dojem z knihy je možno vyjádřit velice prostě: příjemné počtení. Při četbě jsem se mnoho poučil o matematice v 16.—19. století (název knihy trochu mate, kniha má mnohem širší záběr než jenom to, co se dnes obvykle nazývá numerickou analýzou). Málokdy má totiž matematik možnost seznámit se s definicemi dnes všeobecně známých pojmů (např. takových, které dnes spadají do středoškolské matematiky: logaritmus, aj.) tak, je je formulovali praotcové matematiky v minulých stoletích. Pěkný zážitek ze čtení je umocněn ukázkami ze starých tisků.

Rozepisovat se o jednotlivých kapitolách nemá smysl; doporučuji každému knihu na víkendové čtení. Závěrem doplňuji subjektivní dojem alespoň názvy jednotlivých kapitol: 1. The Sixteenth and Early Seventeenth Centuries, 2. The Age of Newton, 3. Euler and Lagrange, 4. Laplace, Legendre and Gauss, 5. Other Nineteenth Century Figures.

Svatopluk Fučík, Praha

STATISTICS AT THE SCHOOL LEVEL (Statistika na středoškolské úrovni). Ed. L. Råde. Vyšlo v nakladatelství Almqvist & Wiksell, Stockholm 1975; 245 stran, cena neuvedena.

Pod redakcí švédského odborníka L. Rådeho z göteborské university vyšel tento svazek statí předložených na třetí konferenci o vyučování statistice, která se konala ve Vídni ve dnech 30. 8. až 4. 9. 1973. Tyto konference pořádá Mezinárodní statistický ústav (ISI) v rámci svého vzdělávacího programu (ISEP) s podporou UNESCA. Československo se na této akci nepodílí.

Hlavním tématem konference byla *interpretace oficiálních statistik* — šlo tedy o to, jak na úrovni střední školy učit chápat a rozumět statistickým údajům z úředních pramenů. Některé referáty konference byly však pojaty šíře a týkaly se obecných otázek vyučování statistice.

Úroveň statí sborníku je různá; objevují se tu jak obecné úvahy tak i zcela konkrétní postupy a návody, přehledné statě o současném stavu výuky v té které zemi i návrhy programů pro budoucnost. U většiny statí je ve sborníku připojen též záznam diskuse.

Na závěr konference byla přijata doporučení, jež jsou uvedena v úvodní části sborníku (str. 9—21). Úroveň statistického vzdělání je ovšem v různých zemích různá, a tak je třeba obecná doporučení přizpůsobovat místním podmínkám, leckterá by však stála za zamyšlení i z našeho hlediska. Snad by se i u nás našlo vhodné forum (např. v JČSMF?) pro diskusi o středoškolské problematice stochastických disciplín.

K doplnění informace uveďme ještě alespoň seznam statí a jejich autorů; je bezpochyby signifikantní:

F. Mosteller (Harvard): Úvodní slovo předsedy
B. Benjamin (Londýn): Výuka oficiální statistiky
S. A. Goldberg (New York): Myšlenky k výuce oficiální statistiky
N. Keyfita (Harvard): Populační a produkční oficiální statistiky
W. Eberl (Vídeň): Stochastika a moderní všeobecná výchova
A. Engel (Frankfurt n. M.): Výpočty a pravděpodobnost
C. Radhakrishnan Rao (Kalkata): Výuka statistiky na středoškolské úrovni — interdisciplinární přístup
R. A. S. Whitfieldová (Huntington): Mobilní mini-komputer pro školní výpočty
L. Råde (Göteborg): Výuka pravděpodobnosti a statistiky na středoškolské úrovni — mezinárodní přehled
M. Halmosová (Budapešť): První kroky ve výuce pravděpodobnosti
P. L. Hennequin (Clermont-Ferrand): Tendence ve výuce statistiky na francouzských středních školách
W. Kruskal (Chicago): K příštím akcím JCCSP*)
T Postelnicu (Bukurešť): Výuka statistiky na středoškolské úrovni
I. P. Ruckerová (Richmond): Úvod do statistiky na střední škole
J. O. Oyelese (Ibadan): Přehled o výuce statistiky na středních školách v západních a lagosských státech Nigérie
H. Lang (Vídeň): Výuka pravděpodobnosti a statistiky na středních školách v Rakousku

František Zítek, Praha

Pál Turán ed.: SELECTED PAPERS OF ALFRÉD RÉNYI. Akadémiai Kiadó, Budapešť 1976, 3 svazky o 628, 646 a 667 stranách, cena neuvedena.

Předložené třísvazkové vydání životního díla význačného maďarského matematika, řádného člena Maďarské akademie věd, profesora Alfréda Rényiho (1921—1970) je chronologickým

*) Joint Committee on the Curriculum in Statistics and Probability, společný orgán Americké statistické asociace (ASA) a Národní rady učitelů matematiky (NCTM).

souborem všech jeho význačnějších prací. Tvoří monument, který vzbuzuje úctu. Ohromuje svým rozsahem, šíří témat, bohatostí myšlenek. Je jen málo oblastí matematiky, které by Rényi podstatným způsobem neobohatil. V zorném poli jeho zájmu byly základy teorie pravděpodobnosti, analytický aparát, teorie informace, teorie grafů, neparametrická statistika, geometrie, náhodné procházky, teorie řad, souvislosti teorie pravděpodobnosti s jinými oblastmi, např. s teorií čísel a fyzikou. Značnou část své životní energie věnoval Rényi aplikacím. V souboru nacházíme reprodukce prací, ve kterých je matematika aplikována v biologii, ekonomice a dalších oblastech. Přitom značná část díla prof. Rényiho se na více než 1900 stran předloženého souboru nevešla. Jde o práce, které kolektiv Rényiho spolupracovníků, jenž pod vedením akademika PÁLA TURÁNA soubor sestavil, nepovažoval za originální výzkumné práce. Že nejde o dílka bezvýznamná, o tom se naši čtenáři mohou přesvědčit např. ze slovenského překladu Rényiho Dialogů o aplikacích matematiky. Filosofická hloubka autorových idejí je těžko překonatelná a jistě i jeho další knížky Dialogů o matematice a Dopisů o pravděpodobnosti by zasluhovaly překlad do některého z našich národních jazyků.

Z celkového počtu 355 prací akademika Rényiho bylo do souboru pojato 156 článků. Většina z nich je psána v angličtině, několik málo v němčině a francouzštině. Prvý svazek obsahuje 52 článků z období 1948—1956, druhý svazek 48 článků z období 1956—1961, a třetí 56 článků z období od roku 1962 až do autorovy smrti roku 1970. Každý článek je opatřen plnou citací i bibliografií a mnohý je doplněn poznámkami člena redakčního kolektivu o jeho ohlase. Obsahují zasvěcené informace o nových výsledcích v dané problematice a zhodnocení autorova přínosu v dané oblasti matematiky.

V krátké recenzi nelze rozebírat konkrétní obsah jednotlivých článků souboru. Naše čtenáře by jistě upoutal především článek zobecňující známou Kolmogorovovou nerovnost. Je společnou prací A. Rényiho s předním naším odborníkem v pravděpodobnosti a matematické statistice, předčasně zesnulým prof. Jaroslavem Hájkem. Zobecněná nerovnost se dnes nazývá nerovností Hájkovou-Rényiho, vyvolala ve světě značnou odezvu, jako ostatně většina Rényiho výsledků, a řada autorů na ni navázala své výzkumy. Recenzenta též okamžitě zaujala Rényiho práce, ve které navrhuje novou axiomatizaci teorie pravděpodobnosti opírající se o pojem podmíněné pravděpodobnosti. Naši čtenáři ji znají z českého překladu Rényiho monografie o pravděpodobnosti. Připomeňme, že kromě Rényiho axiomatiky jsou dnes ve světě rozšířeny dvě. Klasickou je Kolmogorovova axiomatika z třicátých let tohoto století, která zavádí pravděpodobnost jako speciální případ normované míry. Třetí je moderní axiomatika kvalitativní nebo subjektivní pravděpodobnosti.

Obsáhlé dílo A. Rényiho budí radost z toho, čeho je lidský důmysl schopen dosáhnout. Současně však vzbuzuje smutek plynoucí z pochybností, zda podmínky současného pragmatického světa jsou dostatečně příznivé pro dobývání dalších tajemství přírody.

Petr Kratochvíl, Praha

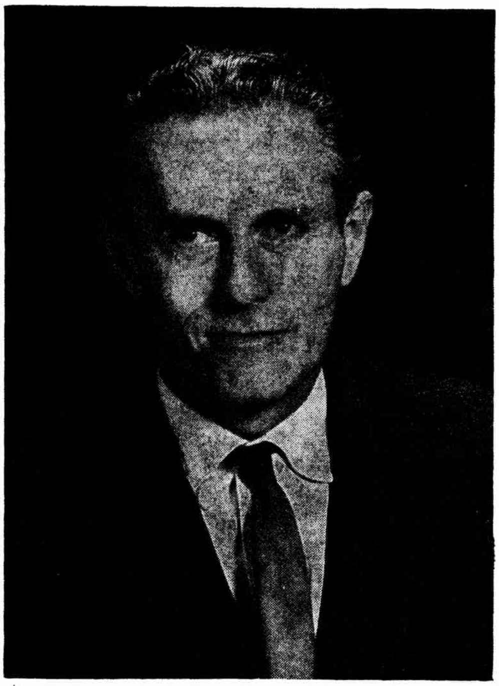
Časopis pro pěstování matematiky, roč. 104 (1979), Praha

ZPRÁVY

ZEMŘEL DOC. JOSEF SCHMIDTMAYER, CSc.

ZDENĚK JANKOVSKÝ, Praha

Dne 23. dubna 1979 zemřel v Praze náhle ve věku necelých šedesátipěti let vynikající vysokoškolský učitel doc. JOSEF SCHMIDTMAYER, CSc., docent elektrotechnické fakulty Českého vysokého učení technického. Připomínáme-li si v těchto řádcích



jeho život a práci, nechce se nám věřit, že jeho místo v kolektivu vysokoškolských učitelů a výzkumných pracovníků, místo výborného učitele a milého a dobrého člověka, zůstane v budoucnosti prázdné.

Josef Schmidtmayer se narodil 26. září 1914 v dělnické rodině v Českých Budějovicích. Svá středoškolská studia absolvoval na reformním reálném gymnáziu v Českých Budějovicích a ukončil je maturitou s vyznamenáním v roce 1933. Poté byl jako nadaný a nemajetný student přijat do Hlávkovy studentské koleje, aby mohl pokračovat ve studiu svých oblíbených předmětů, matematiky a deskriptivní geometrie, na přírodovědecké fakultě University Karlovy. Studium matematiky a deskriptivní geometrie úspěšně zakončil druhou státní zkouškou v roce 1938. V poslední třetině studia si navíc zapsal přednášky z pojistné matematiky a statistiky. Uzavření českých vysokých škol v roce 1939 mu toto další specializované studium znemožnilo dokončit. Jeden rok se pak živil kondicemi, než se mu podařilo opatřit místo výpomocného učitele na dívčím reálném gymnáziu v Praze VII. Od roku 1941 pracoval v továrně Letov v Letňanech jako technický úředník v oddělení aerodynamiky. Tam získal zkušenosti s aplikacemi matematiky v mechanice. Po osvobození pracoval od roku 1945 do roku 1951 v ústavu aerodynamiky nástavbového Učebního běhu pro letectví na tehdejší fakultě strojního a elektrotechnického inženýrství ČVUT. Po reorganizaci v roce 1951 přešel na katedru matematiky a deskriptivní geometrie ČVUT vedenou prof. F. Vyčichlem a po další reorganizaci fakult ČVUT se stal v roce 1953 členem katedry matematiky na elektrotechnické fakultě ČVUT, kde působil do svého úmrtí. V roce 1957 byl jmenován zástupcem docenta a po habilitaci v roce 1959 byl v roce 1960 jmenován docentem matematiky. V roce 1969 získal titul kandidáta fyzikálně-matematických věd na Universitě Karlově.

Významná je odborná a vědecká činnost doc. Schmidtmayera. Od roku 1940 publikoval přes 30 odborných a vědeckých článků. Je autorem, případně spoluautorem, 7 knih, z nichž nejznámější *Maticový počet a jeho použití v technice* je velmi vyhledávanou a oblíbenou publikací mezi našimi inženýrskými kádry. Za svého dlouhodobého pedagogického působení na ČVUT napsal 14 titulů skript. Odborná práce doc. Schmidtmayera zahrnuje též řadu překladů knih, externí redakce a odborné úpravy. Z jeho soustavného sledování matematické literatury vyplynulo téměř 40 otištěných recenzí a referátů o knihách v odborných časopisech.

V posledním desetiletí se intenzivně zabýval teorií i praxí vyučování matematiky na vysokých školách technických, zvláště na elektrotechnických fakultách. Byl pověřen vedením řady výzkumných úkolů, v poslední pětiletce vedením dílčího úkolu v hlavním úkolu č. 17 rezortního plánu MŠ ČSR a vedením tématického úkolu v hlavním úkolu RŠ-16/2 rezortního plánu MŠ SSR. Za svého působení v této oblasti sestavil řadu úspěšně oponovaných výzkumných zpráv.

Více než třicetileté působení doc. Schmidtmayera jako vysokoškolského učitele se vyznačuje vysokou odbornou úrovní a pedagogickým mistrovstvím. Soudruh Schmidtmayer byl zaníceným učitelem a své pedagogické působení zaměřoval nejen na odbornou, nýbrž i na výchovnou stránku, kde dosahoval při dlouholetém působení ve funkci vedoucího učitele ročníku významných úspěchů.

Z další jeho odborné a pedagogické činnosti nelze opomenout jeho práci ve stálé zkušební komisi pro sdělovací elektrotechniku na FEL ČVUT, členství v řadě komisí pro kandidátské zkoušky, přednášky v postgraduálním studiu „Automatizované systémy řízení" a další. Byl členem redakční rady časopisu Aplikace matematiky.

Vedle vysokoškolské pedagogiky se doc. Schmidtmayer zajímal i o pedagogickou činnost na školách nižších stupňů. Spolupracoval s Výzkumným ústavem odborného školství, s Výzkumným pedagogickým ústavem v Praze a s Výzkumným ústavem inženýrského studia při ČVUT. Podílel se na přípravě učebních pomůcek pro nově koncipovanou výuku na odborných školách a v rámci odborné komise na tvorbě učebních osnov matematiky pro gymnázia.

Soudruh doc. Schmidtmayer měl rovněž velice bohatou a záslužnou účast na veřejné a společenské činnosti. Vždy se výrazně angažoval ve směru společenského pokroku. Za jeho práci se mu dostalo několika čestných uznání a medailí.

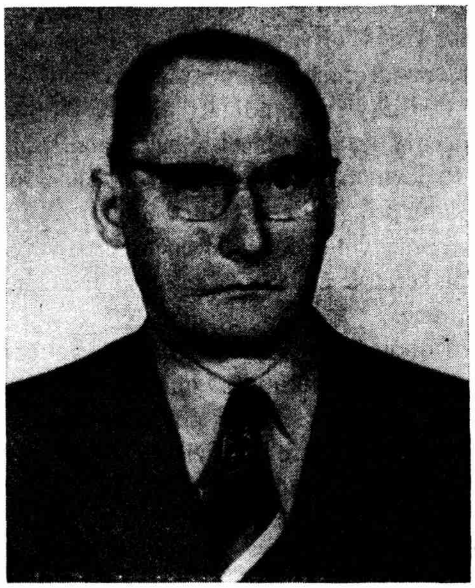
Doc. Schmidtmayer byl na svém pracovišti i mimo ně vysoce vážen pro svou pracovitost, pečlivost, přesnost i odbornou a pedagogickou zdatnost. Mezi kolegy i studenty byl oblíben pro své přímé, otevřené, ale přitom taktní jednání.

Československé školství, zvláště pak matematika na vysokých školách technických, utrpělo odchodem doc. Schmidtmayera těžko nahraditelnou ztrátu. Kolektiv jeho spolupracovníků a studentů bude dlouho postrádat obětavého přítele a rádce, pilného pracovníka, vynikajícího učitele a především charakterního člověka Josefa Schmidtmayera.

DOCENT FRANTIŠEK MARTAN ŠEDESÁTILETÝ

BEDŘICH PONDĚLÍČEK, Praha

Čas neúprosně letí, takže pro jeho nedostatek nemáme většinou možnost ohlédnout se zpátky. Letos v listopadu bude šedesát let doc. FRANTIŠKU MARTANOVI CSc., vedoucímu dislokované katedry matematiky elektrotechnické fakulty Českého vysokého učení technického, pracoviště v Poděbradech.



František Martan se narodil 3. listopadu 1919 v dělnické rodině v Masákově Lhotě, okr. Prachatice. Vystudoval státní reálku v Praze v Karlíně a po maturitě s vyznamenáním v roce 1937 se dal zapsat na tehdejší vysokou školu speciálních nauk ČVUT v Praze, učitelský obor pro střední školy — matematika a deskriptivní geometrie. V tomto studiu pak v následujícím školním roce pokračoval na přírodovědecké fakultě University Karlovy. V říjnu roku 1939 složil první státní zkoušku z obou předmětů.

Násilným uzavřením českých vysokých škol německými okupanty v listopadu 1939 skončila studentská léta docenta Martana. Poté pracoval jako pomocný dělník a později jako technický úředník. Studia dokončil až po osvobození v roce 1946 složením druhé státní zkoušky z matematiky a deskriptivní geometrie. Avšak již od poloviny října 1945 byl zaměstnán jako výpomocný smluvní asistent v ústavech matematiky tehdejší vysoké školy strojního a elektrotechnického inženýrství ČVUT v Praze. Odborným asistentem byl ustanoven v roce 1950 a rok poté přešel na nově utvořenou elektrotechnickou fakultu ČVUT v Praze.

V roce 1957 byl přijat na externí aspiranturu, kterou ukončil dosažením vědecké hodnosti kandidáta technických věd v roce 1962. Po obhajobě habilitační práce byl v roce 1963 jmenován a ustanoven docentem matematiky na elektrotechnické fakultě ČVUT, pracoviště v Poděbradech, kde od té doby je vedoucím dislokované katedry matematiky.

Mimořádně aktivní politická, společenská, organizátorská a pedagogická práce je pro Františka Martana příznačná. Připomeňme jen jeho stranické a odborářské funkce v Praze a v Poděbradech, lektorskou činnost v Nymburce. Již řadu let pracuje na výzkumném úkolu o zvyšování efektivnosti výuky matematiky na elektrotechnických fakultách, kde využívá svých bohatých pedagogických zkušeností. Je autorem skript a překladatelem učebnic různých matematických disciplin potřebných pro elektroinženýry. Výsledky své kandidátské práce (Numerické a grafoanalytické metody zpětné Laplaceovy transformace) a habilitační práce (Aproximace signálu s nekonečně širokým spektrem) sice nepublikoval, ale použil při řešení některých dílčích výzkumných úkolů pro Výzkumný ústav silnoproudé elektrotechniky v Běchovicích. Jeho politické a pracovní úsilí bylo oceněno čestným uznáním rektora ČVUT, čestným uznáním a plaketou k 25. výročí založení elektrotechnické fakulty ČVUT a medailí ČVUT 2. stupně.

Jménem pracovníků obou kateder matematiky – poděbradské a pražské – na elektrotechnické fakultě ČVUT a věřím, že i jménem dalších spolupracovníků a žáků, přejeme docentu Martanovi k jeho šedesátinám hlavně dobré zdraví, mnoho úspěchů v další práci, dobrou pohodu v osobním životě a ještě mnoho krásných výhledů do polabského kraje z oken poděbradského zámku.

VÝROČÍ STÝCH NAROZENIN PROF. PHDR. JANA VOJTĚCHA

KAREL DRÁBEK, Praha

V letošním roce bylo tomu již sto let, co se narodil význačný pracovník v oboru geometrie a vynikající pedagog, řádný profesor matematiky na Vysoké škole inženýrského stavitelství (dnešní stavební fakultě při ČVUT), PhDr. JAN VOJTĚCH.

Jan Vojtěch, narozený 5. srpna 1879 v Kyjově na Moravě, po maturitě na českém klasickém gymnasiu v Uherském Hradišti studoval na filosofické fakultě pražské university. Již po čtyřech letech studií předložil disertační práci z analýzy a po příslušných zkouškách byl 13. prosince 1902 prohlášen doktorem filosofie.

Po aprobaci 15. prosince 1902 působil v letech 1902/03 až 1914/15 hlavně na středních školách na Moravě, naposled na II. české reálce v Brně jako středoškolský profesor matematiky a fyziky. Po habilitaci na české vysoké škole technické v Brně z geometrie (30. srpna 1909) konal docentské přednášky, ale již od 27. prosince 1912 byl honorovaným docentem. Zde byl také jmenován 24. října 1915 titulárním mimořádným, 25. února 1918 mimořádným a 12. ledna 1920 řádným profesorem. Po smrti prof. Matěje Norberta Vaněčka byl jmenován řádným profesorem matematiky na Vysoké škole inženýrského stavitelství ČVUT v Praze, kde s výjimkou let v okupaci vyučoval až do svého odchodu do výslužby 30. září 1949. Nebyl již však v této době úplně zdráv, takže krátce poté zemřel 19. ledna 1953 v Praze.

Prof. Vojtěch v první řadě napsal soustavu nových učebnic z geometrie pro vyšší třídy středních škol, zpracované vzhledem k elementárním geometrickým transformacím a jejich grupám. Po svém jmenování v Brně sepsal pro potřeby posluchačů techniky dvoudílnou učebnici *Základy matematiky*, ve které, podle jejího určení, zachoval přiměřenost mezi úplnou matematickou přesností a srozumitelností výkladu pro začátečníky. Velký klad učebnice je ve velkém počtu příkladů pro další procvičování přednesené a prostudované látky.

Také ve vědecké a odborné práci je patrna jeho postupná dvojí učitelská profese. Na střední škole se zabýval studiem elementární matematiky a její výuky, na vysoké škole teorií transformací a jejich grup, teorií křivek a projektivní geometrií. Hlavním jeho dílem je monografie *Geometrie projektivní*, obsahující včetně bibliografických odkazů vše, co do doby vydání bylo z tohoto oboru známo.

Za dobu svého působení na vysoké škole v Brně i v Praze přispěl prof. Vojtěch k dobré výchově v matematice pro mnoho našich inženýrů. Zásadovost v práci považoval za nejlepší cestu za dalším vzděláním, které si nedovedl představit bez samostatného a pilného studia. Jeho osobní profil člověka a vědce si stále připomínáme při pohledu na jeho celoživotní dílo.*)

*) O jeho životě a díle viz více v mém článku: Sto let od narození prof. PhDr. Jana Vojtěcha, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, XXIV (1979), str. 223—225.

AKADEMIK JÁN JAKUBÍK LAUREÁTOM ŠTÁTNEJ CENY KLEMENTA GOTTWALDA

Medzi laureátmi štátnej ceny Klementa Gottwalda v roku 1979 vyskytuje sa jeden matematik. Tohto vyznamenania sa dostalo akademikovi Jánovi Jakubíkovi za objavné výsledky v teórii usporiadaných algebraických štruktúr.

Vedecké dielo J. Jakubíka sústreďuje sa — s výnimkou niekoľkých prác — na oblasť algebry. V začiatkoch svojej badateľskej činnosti sa venoval teórii zväzov a (čiastočne) usporiadaných množín, niektorým otázkam univerzálnej algebry a neskoršie sa začal intenzívne zaoberať teóriou (čiastočne) usporiadaných grúp.

V teórii zväzov a usporiadaných množín preskúmal celý rad otázok súvisiacich so základnými pojmami ako sú kongruencie, reťazce, rozličné typy súčinov a pod. Pre kongruencie na zväzoch preskúmal napríklad otázku zameniteľnosti a charakterizáciu pomocou slabej projektívnosti intervalov. Vo viacerých prácach študoval platnosť Jordanovej-Dedekindovej podmienky pre nekonečné reťazce. Rad výsledkov sa týka otázky: do akej miery je (diskrétny) zväz určený svojím (neorientovaným) grafom? Podrobne skúmal vlastnosti centra zväzu, najmä tie, o ktorých ukázal, že súvisia s priamymi rozkladmi. Napríklad našiel podmienky pre uzavrenosť centra úplného zväzu, v ktorých sú podmienky, nájdené viacerými autormi, zahrnuté ako špeciálne prípady.

Veľkú pozornosť venoval štúdiu rozličných typov súčinov usporiadaných množín, zväzov a usporiadaných grúp. Vyšetril napríklad otázku existencie spoločného zjemnenia dvoch priamych rozkladov, podmienky, kedy se dá daný objekt rozložiť na priamy alebo slabý súčin priamo nerozložiteľných faktorov (pre úplné zväzy to ide práve vtedy, keď ich centrum je úplne distributívnym úplným zväzom). Výsledky J. Jakubíka o zmiešaných súčinoch usporiadaných grúp tvoria podstatné zovšeobecnenie a rozšírenie dovtedy známych výsledkov o lexikografických súčinoch.

Zaujímavé výsledky získal J. Jakubík v nasledujúcej otázke: ktoré vlastnosti usporiadaných grúp sú determinované štruktúrou usporiadania samotnou? Tak napríklad, ak u usmernenej usporiadanej grupy dá sa príslušná usporiadaná množina rozložiť na priamy súčin, indukuje tento rozklad aj priamy rozklad tej grupy. Alebo o tom, či l-grupa je rozložiteľná na priamy súčin lineárne usporiadaných grúp, rozhodujú len jej zväzové vlastnosti. Naproti tomu pomocou zväzových vlastností samotných nemožno rozhodnúť o rozložiteľnosti l-grupy na (netriviálny) polopriamy súčin.

V celom rade prác demonštroval J. Jakubík dôležitosť pojmu dizjunktnosti prvkov v l-grupe. Sústavne preskúmal tiež súvis pojmu ortogonálna množina v l-grupe s vlastnosťami l-grupy a vyjasnil viaceré otázky o ortogonálnych rozšíreniach l-grúp. V otázkach intervalovej topologie v l-grupách dosiahol rad výsledkov, z ktorých niektoré majú definitívny charakter. Zaujímavé výsledky získal o radikáloch l-grúp a radikálových triedach l-grúp (tento pojem predstavuje rozšírenie pojmu torznej triedy študovanej J. Martinezom).

Mnohé práce J. Jakubíka boli podnietené problémami zo známej monografie G. Birkhoffa alebo z prác iných autorov. Riešenie týchto problémov bolo mu často východiskom k výsledkom, ktoré ďaleko presahujú rámec pôvodného problému. Aj obrátene, rozliční autori vychádzajú vo svojich prácach z výsledkov J. Jakubíka a vo viacerých prípadoch sú tieto vzťahy symetrické.

Nezanedbateľnou stránkou činnosti J. Jakubíka je jeho príspevok k výchove vedeckého dorastu, jeho bohatá pedagogická činnosť a angažovanosť v organizovaní nášho vedeckého života.

K blahoželaniu akademikovi Jakubíkovi k významnej pocte pripájajú československí matematici želanie ďalších úspechov v tvorivej práci.

Milan Kolibiar, Bratislava

PROFESOR KAREL REKTORYS LAUREÁTEM NÁRODNÍ CENY

Dne 3. května byla udělena Národní cena RNDr. KARLU REKTORYSOVI, DrSc., profesoru stavební fakulty ČVUT v Praze, za dílo *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*.

Karel Rektorys studoval matematiku na přírodovědecké fakultě v Praze. Po jejím absolvování nastoupil do teoretického výzkumu Škodových závodů. Tam vznikla — mimo řadu výzkumných zpráv — roku 1951 jeho první obsáhlá práce *Problém jednoznačnosti řešení parciálních diferenciálních rovnic pro vedení tepla při nespojitých počátečních a okrajových podmínkách* jako disertace k RNDr. Vznikla z problematiky chladnutí velkých ocelových ingotů; po matematické stránce velmi upoutala prof. Čecha, neboť to byla první práce z parabolických diferenciálních rovnic, která se zabývala jiným pojmem řešení než klasickým.

Ze Škodových závodů byl K. Rektorys povolán do Ústředního ústavu matematického (pozdějšího Matematického ústavu ČSAV) do oddělení prof. F. Vyčichla. Zde se řešil velký výzkumný úkol pro Orlickou přehradu — problém hydratačního tepla, spočívající zhruba v následujícím: Beton obsahuje cement, po položení bloku nastává chemická reakce, která ohřívá beton až na 50°; vznikají tepelná napětí, často větší než napětí způsobená vlastní vahou přehrady a tlakem vody. Úkolem K. Rektoryse bylo určit teplotu v přehradě během její výstavby (tepelná napětí pak na základě toho počítal Dr. I. Babuška). Úkol byl obtížný, byla známa jen data: harmonogram výstavby, tepelné vlastnosti betonu, teplota podloží a okolního vzduchu, z čehož bylo třeba určit teplotu v libovolném místě přehrady v libovolném čase. V literatuře nebylo o takovém problému nic známo, vše bylo nutno vymyslet od základu. Problém zpracoval K. Rektorys teoreticky i numericky ke spokojenosti zadavatele, matematickou studii podal v práci *Výpočet teploty v přehradě při působení vnitřních zdrojů tepla,* Rozpravy ČSAV *66* (1956), řada mat. a přír. věd, sešit 14, str. 1—74. Pro zajímavost uveďme, že důkaz hlavní konvergenční věty má 30 stránek. Článek byl podán jako kandidátská disertační práce. Na tuto tématiku pak navázaly některé práce v oddělení numerických metod řešení diferenciálních rovnic MÚ ČSAV.

Stejnou tematiku zpracovává i Rektorysova disertační práce k DrSc. *Nelineární vedení tepla v betonových masívech*. Zde se mu jako prvnímu podařilo dokázat metodou sítí existenci řešení smíšeného problému pro nelineární rovnici pro vedení tepla na libovolném časovém intervalu. (V dosvadních pracích jiných autorů byla dokázána metodou sítí existence jen na dostatečně malém intervalu.)

Z problematiky Orlické přehrady se zrodila řada prací, na nichž Rektorys pracoval jako spoluautor, zejména však kniha I. Babuška - K. Rektorys - F. Vyčichlo: *Matematická teorie rovinné pružnosti* (Praha, NČSAV 1955, 522 stran), která je zároveň učebnicí i monografií. Její překlad *Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme,* Berlin, Akademieverlag 1960, je v zahraničí známý mnohem více než český originál u nás.

Značnou popularitu si získal K. Rektorys nejen mezi inženýry a fyziky, nýbrž i mezi matematiky knihou *Přehled užité matematiky* (Praha, SNTL 1963, spis České matice technické, 1137 stran), jejíž koncepci řídil jako vedoucí autor, jako spoluautor napsal více než polovinu textu. Kniha vyšla již ve třech vydáních a v anglickém překladu (*Survey of Applicable Mathematics.* London, Iliffe 1969) se stala oficiální studijní příručkou na nejznámějším světovém technickém učilišti Massachusetts Institut of Technology.

Národní cenou byl K. Rektorys poctěn za dílo *Variační metody v inženýrských problémech a problémech matematické fyziky,* Praha, SNTL 1974, 601 stran. Kniha vyšla rovněž v anglickém překladu, k tomu účelu poněkud rozšířeném, jako *Variational Methods in Mathematics,* Science and Engineering, Reidel Publ. Co Dortrecht (Holland) — Boston (USA) 1977.

Dílo je obsáhlá monografie, jejíž první polovina (část I, II a III) je psána pro „konzumenty matematiky", především pro inženýry. V části I autor připravuje (a to velmi srozumitelnou formou) potřebný aparát z teorie operátorů v Hilbertově prostoru, v druhé části seznamuje čtenáře s větou o minimu funkcionálu energie a s běžnými variačními metodami, v třetí části ukazuje aplikace na řešení celé řady úloh (z teorie pružnosti apod.) včetně kompletního numerického zpracování. Druhá polovina knihy má monografický charakter. Výklad je založen na Laxově-Milgramově větě a na pojmu slabého řešení; přestože tato část knihy je psána především pro matematiky, je zpracována tak, aby text byl dobře srozumitelný i pro čtenáře-nematematika. Část IV představuje zobecnění předchozích výsledků (zejména na nesymetrické problémy a na případ nehomogenních okrajových podmínek), část V je věnována problému vlastních čísel a část VI některým speciálním metodám. Zejména druhá polovina knihy obsahuje některé nové metody rozvinuté autorem a řadu jeho původních výsledků, zčásti publikovaných jen v této práci. Jde především o podstatné zobecnění Collatzovy metody pro dvojstranné odhady vlastních čísel diferenciálních rovnic typu $Au - \lambda Bu = 0$. Zatímco Collatzova metoda byla koncipována pro obyčejné diferenciální rovnice, je zde zobecněna pro případ dostatečně obecných eliptických operátorů A, B (viz část V, kap. 40). Na tuto problematiku, publikovanou jen v této knize, navazují další Rektorysovy práce a práce jeho spolupracovníků.

Další metoda, uvedená poprvé v této knize, je metoda k řešení biharmonického problému s dostatečně obecnými okrajovými podmínkami (na nějž vedou problémy výpočtu nosných stěn). Tento požadavek dostatečné obecnosti si vyžádal práci s pojmem tzv. velmi slabého řešení. Metoda pak byla publikována (včetně numerických aspektů) v obsáhlém článku ve spoluautorství s Ing. V. Zahradníkem v Aplikacích matematiky *19* (1974), č. 2, str. 101—131. Pro případ vícenásobně souvislých oblastí (nosné stěny s otvory) byla zobecněna v téměř osmdesátistránkové práci K. Rektorys - J. Danešová - J. Matyska - Č. Vitner *Solution of the First Problem of Plane Elasticity for Multiply Connected Regions by the Method of Least Squares on the Boundary* (Aplikace matematiky *22*, 1977, Part I č. 5, str. 349—394, Part II č. 6, str. 425—454).

V knize „Variační metody" je rovněž uvedena autorova metoda časové diskretizace pro řešení parabolických problémů (zobecnění klasické Rotheho metody), publikované předtím v článku *On Application of Direct Variational Methods to the Solution of Parabolic Boundary Value Problems of Arbitrary Order in the Space Variables* (Czech. Math. J. *21* (*96*), 1971, str. 318—339). Na tento článek navázalo mnoho autorů (u nás např. J. Nečas, J. Kačur). Metoda se ukázala jako velmi vhodná a dostatečně univerzální i k řešení evolučních rovnic jiných typů včetně integrodiferenciálních.

Kniha neobsahuje jen nové metody, nýbrž i jiné autorovy původní výsledky — viz zejména kap. 39, dále podstatné zjemnění běžných nerovností Friedrichsova typu v kap. 18 aj. Připomeňme rovněž netradiční zpracování kapitoly 35 o okrajových podmínkách Neumannova typu pro eliptické rovnice vyšších řádů, zpracování kapitol 19, 34, 44 atd.

Knihu vysoce ocenili naši přední matematikové. Na mezinárodní konferenci v Plzni 1978 se jí dostalo ocenění z úst světoznámého odborníka v numerických metodách prof. Collatze. Mimořádný zájem však vzbudila rovněž mezi výzkumnými pracovníky a inženýry-teoretiky, neboť svým zpracováním jim poskytla možnost seznámit se přístupnou formou s účinnými metodami matematiky a použít je k řešení obtížných teoretických problémů. V tom spočívá její velký aplikační význam.

Prof. Rektorysovi, který svou vědeckou práci rozvíjí uprostřed bohaté pedagogické činnosti na stavební fakultě ČVUT, upřímně gratulujeme a přejeme stálé zdraví k další práci a novým úspěchům.

Marie Valešová, Praha

OSLAVY OSMDESÁTIN AKADEMIKA VLADIMÍRA KOŘÍNKA

Pražská matematická obec vzpomněla osmdesátin akademika Vladimíra Kořínka několika besedami, na nichž si jeho přátelé a žáci znovu připomněli rozsáhlost a závažnost jeho životního díla.

V předvečer jeho narozenin, 17. dubna t.r., byl akademik Kořínek s chotí slavnostě přijat děkanem matematicko-fyzikální fakulty Karlovy University v Praze, profesorem RNDr. Karlem Vackem, DrSc. Schůzky se zúčastnili, kromě dalších hostí a čelných představitelů fakulty, též akademik Josef Novák za Presidium ČSAV a RNDr. Miroslav Rozsíval, předseda ÚV JČSMF, kteří jménem institucí, jež zastupovali, blahopřáli oslavenci k vzácnému jubileu.

Týž večer se pak konala večeře na počest oslavence. Uspořádali ji členové katedry základní a aplikované algebry. Přátelské besedy se zúčastnilo mnoho jubilantových žáků a bývalých spolupracovníků.

Další besedu s akademikem Kořínkem uspořádal 22. května t.r. ÚV JČSMF v klubu SNTL v Praze. Na neformální schůzce, které se zúčastnili čelní představitelé Jednoty a další hosté, bylo vzpomenuto dlouhodobé aktivní činnosti profesora Kořínka v této instituci. Vzpomínky na dávná kritická léta v historii Jednoty tvořily velmi zajímavý předmět besedy, která zaujala všechny účastníky svou neopakovatelnou atmosférou. kd

SEMINÁR O MATEMATIKE

Súľov 3.—5. máj 1979

Osmdesiat rokov života akademika Otakara Borůvku si uctili matematici — prevážne jeho žiaci — na starostlivo pripravenom seminári o matematike, ktorý sa uskutočnil v dňoch 3.—5. mája 1979 v Súľove pri Bytči (okres Žilina). Seminár pripravila pobočka JSMF Žilina v spolupráci s Katedrou matematiky fakulty SET VŠD Žilina a Katedrou matematickej analýzy PF UK v Bratislave.

Program seminára o matematike bol zvolený tak, aby poukázal na bohatosť podnetov pre rozvoj matematickej vedy a vysokú úroveň ich rozpracovania akademikom Borůvkom a jeho žiakmi.

Po prívete predsedu žilinskej pobočky JSMF RNDr. Ladislava Bergera zhodnotil prof. RNDr. Michal Greguš, DrSc. neoceniteľné zásluhy akademika Otakara Borůvku na výchove mladých vedeckých pracovníkov v období po oslobodení našej vlasti od fašizmu, kedy jeho nezištná a veľmi potrebná pomoc v uvedenom smere, prejavila sa v prednáškach a seminároch pre mladých záujemcov o matematiku na Univerzite Komenského v Bratislave. Poukázal na nezvyčajne bohatú publikačnú činnosť a na mimoriadne výsledky pôsobenia akademika Borůvku na Slovensku (viac ako 10 rokov dochádzal do Bratislavy) a to či už ide o celý rad ním vychovaných vysokoškolských učiteľov, kandidátov vied, či doktorov vied. Tým položil na Slovensku základy matematickej školy z diferenciálnych rovníc a veľkou mierou prispel aj k budovaniu vedeckých škôl z algebry a geometrie. Vyzdvihol aj medzinárodný význam osobnosti akademika Borůvku, jeho veľký podiel na zjednocovaní matematickej generácie bratských národov Čechov a Slovákov a na jeho prínos k rozvoju matematickej vedy, ktorý podrobnejšie zhodnotia vybrané prednášky v ďalšom programe seminára.

O najnovších výsledkoch z algebraickej teórie disperzií hovoril vo svojej prednáške akademik Borůvka. Ako vždy aj táto jeho prednáška bola pútavá. Popisovala globálne vlastnosti oscilatorických lineárných diferenciálnych rovníc 2. rádu v súvislosti s algebraickou problematikou. Ukázal, že vhodnými transformátormi možno jednu diferenciálnu lineárnu rovnicu Q previesť na druhú P tak, že tieto uvažované rovnice sú globálne ekvivalentné. Pri tom transformátory rovnice Q na seba sa nazývajú disperzie tejto rovnice a tvoria trojparametrickú spojitú grupu — tzv. grupu disperzií uvažovanej rovnice.

V ďalšej časti svojej prednášky uviedol kodisperzie uvažovanej rovnice Q. Sú nimi grupy, ktoré transformujú rovnicu Q na rovnice koncentrické s Q, pričom k rovnici Q sú invariantne priradené tzv. adjungované grupy rovnice Q. Spomenul centrum grupy rastúcich disperzií rovnice Q, normalizátor tohoto centra v grupe fáz, ako aj platnosť tzv vety o inklúziách, ktoré popisujú vzťahy medzi adjungovanými grupami rovníc Q a P. Vysvetlil pojem prostej jednoparametrickej spojitej grupy funkcií a uviedol vety, ktoré zaručujú, že k takejto grupe existuje tzv konjugátor grupy i podmienky, za ktorých uvažovaná diferenciálna rovnica je oscilatorická.

V prednáške *Kongruencia priamok v simplektickom priestore* uvažoval prof. RNDr. Karel Svoboda, CSc. o neparabolickej kongruencii priamok, ktoré neležia v absolútnom komplexe K simplektického priestoru Sp_{2n-1} dimenzie $2n - 1$, pričom má pozdĺž každej tvoriacej priamky $(2n - 1)$-rozmerný oskulačný priestor m-tého rádu. Ku každej z týchto priamok možno pomocou nulovej korelácie určenej komplexom K priradiť postupnosť priamok, ktoré nepatria do tohto komplexu, pričom sú po dvoch združené vzhľadom na komplex K.

K priamke p združená priamka p^* vytvára novú priamkovú kongruenciu, ktorá je rovnakého typu ako pôvodná kongruencia priamok (tzv dualizácia kongruencie L). Uviedol aj postupnosti priamkových kongruencií charakteru 5 — tzv. asociované kongruencie k L. Spomínaná postupnosť priamok umožňuje jednoduchú geometrickú konštrukciu polokanonického repéru ako aj určenie základných relatívnych invariantov a absolutne invariantných foriem kongruencie L.

Uviedol rozvinuteľnú korešpondenciu C medzi dvoma kongruenciami, ktorá indukuje prirodzeným spôsobom korešpondenciu C_k medzi asociovanými kongruenciami. Ak ku každej dvojici odpovedajúcich si priamok p_k a p_k' z asociovaných kongruencií L_k resp. L_k' existuje taká simplektická kolineácia H, že kongruencie L_k a HL_k majú pozdĺž priamky p_k' analytický styk 2. rádu, potom táto korešpondencia (C_k) nazýva sa simplektickou deformáciou druhého rádu. Nutné a postačujúce podmienky pre takúto simplektickú deformáciu sú vyjádrené reláciami medzi relatívnymi invariantami kongruencií L a L' a dajú sa vhodným geometrickým spôsobom interpretovať.

Spomenul tiež totálnu simplektickú deformáciu druhého rádu (ak všetky korešpondencie $C_k : L_k \to L_k'$ sú simplektickými deformáciami 2. rádu realizovanými tou istou simplektickou kolineáciou). Uviedol vlastnosť kongruencie: Krivky, ktoré ležia na fokálnych plochách kongruencie L a sú obsiahnuté v absolútnom komplexe K sú kvaziasymptotické. Poukázal na kvaziasymptotické krivky typu $(n - 1, n)$, ktoré si odpovedajú v bodovej korešpondencii indukovanej kongruenciou L medzi fokálnymi plochami a sú vnorené do pevných $(n - 1)$-rozmerných podpriestorov priestoru Sp_{2n-1}.

Cieľom prednášky prof. RNDr. Marka Švеca, DrSc. *Neoscilatorické riešenia istých typov nelineárnych diferenciálnych rovníc* bolo podať triedenie neoscilatorických riešení a popísať ich asymptotické vlastnosti. Uviedol, čo rozumieme neoscilatorickým riešením pri vyšetrovaní vlastností neoscilatorických riešení diferenciálnych rovníc tvaru (E) $L_n y + h(t, y, y', \ldots, y(n - 1)) = 0$. Ide o také riešenie, ktoré existuje na nejakom nekonečnom intervale $[Ty, \infty)$ a ktoré spĺňa podmienku $\sup \{|y(t)| : t_0 < t < \infty\} > 0$ pre každé $t_0 \in [Ty, \infty)$. Neoscilatorickým riešením sa rozumie také riešenie $y(t)$, že existuje preň $t_1 \geqq Ty$, že $y(t) \neq 0$ pre $t \geqq t_1$.

Hovoril o kvaziderivációach funkcie y a s ich pomocou ukázal niektoré asymptotické vlastnosti neoscilatorických riešení.

V prednáške *O niektorých problémoch všeobecnej algebry* podal prof. RNDr. Milan Kolibiar, DrSc. prehľad niektorých výsledkov, ktoré sa dosiahli na pracoviskách v Bratislave, Košiciach a buď vznikli z podnetu akademika Borůvku, alebo súvisia s jeho prácami z algebry.

Prvá séria výsledkov sa týka zväzov L, L', medzi ktorými existuje určitá väzba, ktorá sa dá charakterizovať napríklad tak, že L, L' majú izomorfné (neorientované) grafy, alebo že L, L' sú „slabo izomorfné".

Druhá séria vychádza z pojmu doplňkových rozkladov množiny (v terminológii ekvivalencií — zameniteľné ekvivalencie). Tento pojem sa zovšeobecnil na ľubovoľný počet rozkladov a aplikoval sa v rozličných situáciách, ako napríklad priame a polopriame rozklady, nezávislosť ekvacionálnych tried, aritmetické triedy a pod.

Ďalšia séria sa týka reprezentácie zväzov pomocou rozkladov množiny a pomocou usporiadaní vhodnej množiny.

Prof. RNDr. Miroslav Novotný, DrSc. v prednáške *O jednom probléme O. Borůvku* poukázal na to, že akademik Borůvka má zvláštny zmysel pre všeobecné matematické otázky, riešenie ktorých sa uplatňuje v rôznych matematických disciplínach. Uviedol, že akademik Borůvka začiatkom 50. rokov, keď sa zapodieval lineárnou algebrou, pri štúdiu otázky ako najjednoduchšie popísať všetky lineárne zobrazenia zameniteľné s daným lineárnym zobrazením uviedol, že by bolo výhodné abstrahovať z linearity týchto zobrazení a riešiť všeobecnejší problém. Prednášateľ ukázal zovšeobecnenie problému, ktorý akademik Borůvka vyriešil v r. 1952 a na ktorom je ľahko poznať, že ho stačí riešiť pre súvislé algebry — všeobecný prípad sa už potom dá previesť na špeciálny prípad. Popísal konštrukciu, ktorá určuje homomorfizmus súvislej, monounárnej algebry do prípustnej algebry.

V prednáške *Globálna transformácia lineárnych diferenciálnych rovníc n-tého rádu* doc. RNDr. František Neuman, CSc. po stručnom úvode ukázal, ako akademik Borůvka v päťdesiatych rokoch začína systematicky tvoriť svoju originálnu teóriu globálnych transformácií lineárnych diferenciálnych rovníc 2. rádu. Túto svoju teóriu počas viac než 20 rokov hlboko prepracoval a základné výsledky publikoval v monografii o Lineárnych diferenciálnych transformáciach 2. rádu, ktorá vyšla nemecky a anglicky. Svoje hlboké znalosti z algebry a diferenciálnej geometrie uplatňuje akademik Borůvka k popisu globálnej štruktúry lineárnych diferenciálnych rovníc 2. rádu a vyvodzuje závažné výsledky.

V prednáške doc. Neuman v náväznosti na výsledky akademika Borůvku popísal globálnu štruktúru lineárnych diferenciálnych rovníc vyšších rádov. Upozornil na postupy, ktoré možno z teórie rovníc 2. rádu rozšíriť pre rovnice vyšších rádov a poukázal na modifikáciu týchto postupov ako aj na javy, ktoré sú vlastné rovniciam vyšších rádov.

Niektoré výsledky umožňujú riešiť otvorené problémy často bez zdĺhavých výpočtov, niektoré metódy dávajú dostatočne zreteľný popis globálneho chovania riešenia, z ktorého je zrejmé, aký tvar výsledkov možno očakávať.

V záverečnej prednáške seminára *Podiel práce akademika O. Borůvku na rozvoji matematiky na VŠD v Žiline* RNDr. Jaroslav Krbiľa, CSc.,zhodnotil podiel akad. O. Borůvku na rozvoji matematiky na VŠD v Žilině. Zdôraznil, že seminár z diferenciálnych rovníc na Katedre matematiky fakulty SET VŠD, ktorý vedie doc. RNDr. Jozef Moravčík, CSc. začal svoju prácu v roku 1965 štúdiom výsledkov prác akademika Borůvku.

V rámci spomínaného seminára riešila sa na VŠD v Žiline v rokoch 1966—1975 vedecko-výskumná úloha I-4-1/6 b: „Diferenciálne rovnice obyčajné v reálnom komplexnom obore", ktorej priebežná a záverečná oponentúra boli uskutočnené v r. 1973 resp. v r. 1975.

Vedecko-výskumná práca pokračuje v rámci čiastkovej úlohy I-5-1/4b: „Obyčajné a funkcionálne diferenciálne rovnice", ktorej priebežná oponentúra (za roky 1976—1978) bola v r. 1978.

RNDr. Krbiľa, CSc. poznamenal, že vplyv akademika Borůvku na spomínané vedecko-výskumné práce sa prejavoval jednak jeho osobnými prednáškami, ktoré ochotne konal na letných školách poriadaných JSMF alebo na VŠD, ako aj bezprostredne cez členov riešiteľského kolektívu, ktorí navštevovali jeho seminár z diferenciálnych rovníc na PF UJEP v Brne, jednak prednáškami a účasťou jeho žiakov z PF UJEP v Brne, PF UK v Bratislave a PF UP v Oloumouci na letných alebo zimných školách a iných podujatiach žilinskej pobočky JSMF.

Prednášateľ podrobne oboznámil účastníkov seminára s aplikáciou teórie transformácie akademika Borůvku v prácach dnes už početnej skupiny diferenciálnych rovničiarov. S menovitým uvedením previedol stručný prierez výsledkami prác:

— Vybudovanie teórie hyperbolických, resp. parabolických fáz dif. rovnice $(q): y'' = q(t)\, y$, ktorá bola použitá na štúdium rýdze, resp. špeciálne disjungovaných diferenciálnych rovníc prvého a druhéo druhu.
— Transformácia nelineárnych diferenciálnych rovníc prvých a druhých amplitúd, Riccatiho diferenciálne rovnice a diferenciálnych rovnic nelineárnych špeciálnych tvarov.
— Transformácia lineárnych diferenciálnych rovníc vyšších rádov ako druhého a štúdium ich oscilatorických a asymptotických vlastností.
— Zovšeobecnenie Floquetovej teórie pre lineárne diferenciálne rovnice n-tého rádu s neperiodickými koeficientami.
— Nutné a postačujúce podmienky transformovateľnosti lineárnych diferenciálnych rovnic vyšších rádov na rovnice s konštantnými koeficientami a štúdium niektorých vlastností transformovateľných rovníc.
— Vyšetrovanie kvadratických funkcionálov.
— Skúmanie monotonných vlastností vyššieho rádu riešení lineárnych diferenciálnych rovníc.
— Niektoré vlastnosti diferenciálnej rovnice (q), ktorej koeficienty sú komplexné funkcie reálnej premennej.

Škoda, že pre chorobu nemohol uskutočniť plánovanú prednášku prof. RNDr. JAROSLAV KURZWEIL, DrSc. *Jacobiho rovnice, jej transformácia a teória distribúcie* — iste by bola vhodne zapadla do programu seminára.

Príhovory a prednášky vyznievali ako vďak a úcta k osemdesiatym narodeninám akademika Otakara Borůvku. V tomto znamení venovala aj skupina Ľudového súboru STAVBÁR pri n. p. Pozemné stavby Žilina, nositeľ vyznamenia „Za vynikajúcu prácu" a „Ceny Antonína Zápotockého" ľudové piesne, hudbu a tance milému jubilantovi.

Na znak vďaky, uznania a úcty boli akademikovi Borůvkovi odovzdané diplomy a pamätné medaily ÚV JSMF, VŠD Žilina, VŠT v Košiciach, list dekana PFUK v Bratislave a ostatných zástupcov vedeckých pracovísk a vysokých škôl.

V záverečnom prejave akademik Borůvka s uznaním zdôraznil hodnotné výsledky, ktoré odzneli v prednesených prednáškach, poďakoval sa za organizovanie seminára o matematike, ktorého program vyznačoval sa vysokou úrovňou.

Ladislav Berger, Žilina

KONKURS NA ÚLOHY PRO MATEMATICKOU OLYMPIÁDU

Připomínáme čtenářům, že konkurs vyhlášený JČSMF a JSMF stále probíhá. Je zájem o původní úlohy s jakoukoliv tématikou vhodné pro soutěž. Zvláště vítány jsou vtipné technicky nenáročné úlohy pro nižší kategorie, úlohy s praktickými náměty a úlohy z modernizované matematiky. Chcete-li se zúčastnit, zašlete dva exempláře úlohy na formátu A4 na adresu Ústřední výbor matematické olympiády, Žitná 25, 115 67 Praha 1. Za přijatou úlohu se vyplácí odměna 50,— Kčs, za zvlášť kvalitní úlohy i více. Ústřední výbor MO tak získá právo úlohu upravit a použít pro soutěž. Nepřijaté úlohy se vracejí. Autoři na sebe berou závazek, že až do použití (nebo vrácení) úlohy ji utají.

Ústřední výbor matematické olympiády