

Werk

Label: Article

Jahr: 1979

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0104|log34

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

HOMOMORPHISMEN UND PSEUDOHOMOMORPHISMEN DER TERNÄRRINGE UND HOMOMORPHISMEN SCHWACHER PSEUDOEbenen

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingegangen am 2. November 1976)

M. HALL bewies in [2], daß jede projektive Ebene durch einen Ternärkörper algebraisch beschreibbar ist. In den Arbeiten [4], [7] werden solche Inzidenzstrukturen studiert, die mittels allgemeineren Ternärstrukturen koordinisierbar sind. In vorliegender Arbeit versteht man unter schwacher Pseudoebene (kurz SP-Ebene) eine solche Inzidenzstruktur, die sich durch einen Ternärring (Definition 1) koordinatisieren läßt.

L. A. SKORNJAKOV beschrieb in [6] alle Homomorphismen einer projektiven Ebene durch T-Homomorphismen des zugehörigen Ternärkörpers und in [5] werden einige Ergebnisse über Homomorphismen der sog. Pseudoebenen angeführt. In vorliegender Arbeit werden die Ergebnisse aus [6] auf SP-Ebenen verallgemeinert. Dabei werden die Homomorphismen der Ternärringe, Ideale in den Ternärringen und Restklassen-Ternärringe angewendet, die in [3] eingeführt sind.

Im Paragraphen 1 werden Pseudohomomorphismen eines Ternärringes definiert und es wird gezeigt, daß für einen Ternärkörper die Definitionen des Pseudohomomorphismus und T-Homomorphismus äquivalent sind.

Im Paragraphen 2 werden SP-Ebenen durch Anwendung der Ergebnisse aus [4] und [7] erklärt. Auf Grund des klassischen Verfahrens wird zu jeder SP-Ebene $\mathcal{M}$ ein Ternärring $T_{\mathcal{M}}$ und zu jedem Ternärring T eine SP-Ebene $\mathcal{M}_T$ konstruiert.

Im Paragraphen 3 werden v-Homomorphismen einer SP-Ebene $\mathcal{M}$ auf eine SP-Ebene $\mathcal{M}'$ untersucht. Es wird gezeigt, daß jeder v-Homomorphismus von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}'$ mittels des Homomorphismus des Ternärringes $T_{\mathcal{M}}$ auf $T_{\mathcal{M}'}$ beschreibbar ist. Für eine SP-Ebene $\mathcal{M}$ werden mit Hilfe der Restklassen-Ternärringe von $T_{\mathcal{M}}$ alle ihre v-Homomorphismen (bis auf einen Isomorphismus) beschrieben.

Im Paragraphen 4 untersucht man Homomorphismen einer SP-Ebene, die keine v-Homomorphismen sind. Es wird gezeigt, daß jeder Homomorphismus einer SP-Ebene $\mathcal{M}$ auf eine SP-Ebene $\mathcal{M}'$ mittels eines Pseudohomomorphismus von $T_{\mathcal{M}}$

beschreibbar ist. Mit Hilfe jedes Pseudohomomorphismus eines Ternärringes T auf einen Ternärring T' läßt sich umgekehrt ein Homomorphismus der SP-Ebene $\mathcal{M}_T$ auf die SP-Ebene $\mathcal{M}_{T'}$ bestimmen.

§ 1. Homomorphismen und Pseudohomomorphismen der Ternärringe

Definition 1. Ein Ternärring T ist ein Paar (R, t) , wo R eine Menge, t eine Ternär-operation über R sind, wobei gilt:

(K1) Es existieren zwei verschiedene Elemente $0, 1 \in R$ mit $t(0, a, b) = t(a, 0, b) = b$, $t(1, a, 0) = t(a, 1, 0) = a$ für alle $a, b \in R$.

(K2) Zu je drei Elementen $a, b, c \in R$ existiert genau ein $x \in R$ mit $c = t(a, b, x)$.

Bemerkung 1. In jedem Ternärring $T = (R, t)$ gibt es nach Satz 1, [3] genau ein Paar $(0, 1)$, welches (K1) erfüllt. Die Elemente $0, 1 \in R$ aus (K1) werden ausgezeichnete Elemente von T genannt.

Definition 2. Es seien $T = (R, t)$ und $T' = (R', t')$ Ternärringe. Eine Abbildung φ der Menge R auf die Menge R' heißt *Homomorphismus* des Ternärringes T auf den Ternärring T' , falls $[t(a, b, c)]^\varphi = t'(a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi)$ für alle $a, b, c \in R$ gilt. Der Homomorphismus von T auf T' heißt *Isomorphismus*, falls φ eine bijektive Abbildung von R auf R' ist. Gibt es einen Isomorphismus von T auf T' , dann heißen T und T' isomorph.

Satz 1. Sind $T = (R, t)$ und $T' = (R', t')$ Ternärringe mit ausgezeichneten Elementen $0, 1$ und $0', 1'$ und ist φ ein Homomorphismus von T auf T' , dann $0^\varphi = 0'$ und $1^\varphi = 1'$.

Beweis. Es seien a', b' zwei Elemente aus R' . Dann gibt es zwei Elemente a, b aus R mit $a^\varphi = a', b^\varphi = b'$. Es gilt $[t(0, a, b)]^\varphi = [t(a, 0, b)]^\varphi = b^\varphi = t'(0^\varphi, a^\varphi, b^\varphi) = t'(a^\varphi, 0^\varphi, b^\varphi) = t'(0^\varphi, a', b') = t'(a', 0^\varphi, b') = b'$ und zugleich $[t(1, a, 0)]^\varphi = [t(a, 1, 0)]^\varphi = a^\varphi = t'(1^\varphi, a', 0^\varphi) = t'(a', 1^\varphi, 0^\varphi) = a'$. Nach Bemerkung 1 ist also $0^\varphi = 0'$ und $1^\varphi = 1'$.

Definition 3. Ein Ternärring $T = (R, t)$ heißt *Ternärkörper*, wenn gilt:

(K3) Zu je vier Elementen $a, b, c, d \in R$ mit $a \neq c$ gibt es genau ein $x \in R$ mit $t(x, a, b) = t(x, c, d)$.

(K4) Zu je vier Elementen $a, b, c, d \in R$ mit $a \neq c$ gibt es genau ein Paar $(x, y) \in R \times R$ mit $b = t(a, x, y)$ und $d = t(c, x, y)$.

Definition 4. Ein Ternärring $T = (R, t)$ heißt *Pseudoternärkörper*, wenn gilt:

(K'3) Zu je drei Elementen $a, b, c \in R$ mit $a \neq 0$ gibt es genau ein $x \in R$ mit $c = t(x, a, b)$.

(K'4) Zu je drei Elementen $a, b, c \in R$ mit $a \neq 0$ gibt es genau ein $x \in R$ mit $c = t(a, x, b)$.

Definition 5. Ein Ternärring $T = (R, t)$ heißt *Semiterternärkörper*, wenn gilt: Zu jedem Element $x \in R$ mit $x \neq 0$ gibt es genau ein $m \in R$ mit $1 = t(x, m, 0)$.

Bemerkung 2. Jeder Ternärkörper stellt einen Pseudoternärkörper dar und jeder Pseudoternärkörper ist zugleich ein Semiterternärkörper.

Definition 6. Es sei $T = (R, t)$ ein Ternärring und R_0 eine Teilmenge aus R . Wir setzen $a \oplus r = t(1, a, r) \forall a \in R \forall r \in R_0$. R_0 heißt *Ideal* des Ternärringes T , wenn folgendes gilt:

- (i) $0 \in R_0$, $R_0 \neq R$.
- (ii) Gilt $b = a \oplus r$ für $a, b \in R$, $r \in R_0$, so existiert ein $r' \in R_0$ mit $a = b \oplus r'$.
- (iii) Für alle $a, b, c \in R$ und $r_1, r_2, r_3 \in R_0$ existiert ein $r' \in R_0$ mit $t(a \oplus r_1, b \oplus r_2, c \oplus r_3) = t(a, b, c) \oplus r'$.
- (iv) Gilt $t(a, b, x') = t(a, b, x) \oplus r$ für $a, b, x, x' \in R$, $r \in R_0$, so existiert ein $r' \in R_0$ mit $x' = x \oplus r$.

Bemerkung 3. In jedem Ternärring ist $\{0\}$ ein Ideal ([3], Satz 2).

Satz 2. In jedem Semiterternärkörper ist genau ein Ideal $\{0\}$ enthalten.

Beweis. R_0 sei ein Ideal in einem Semiterternärkörper $T = (R, t)$ mit $R_0 \neq \{0\}$. Ist $r \in R_0$ ein von Null verschiedenes Element, dann existiert nach Definition 5 ein $m \in R$ mit $1 = t(r, m, 0)$. Es gilt $1 = t(r, m, 0) = t(0 \oplus r, m \oplus 0, 0 \oplus 0)$ und nach (iii) gibt es ein $r' \in R_0$ mit $t(0 \oplus r, m \oplus 0, 0 \oplus 0) = t(0, m, 0) \oplus r' = 0 \oplus r' = r'$, was $1 \in R_0$ bedeutet. Für ein beliebiges Element $d \in R$ gilt gemäß (K1) $d = t(1, d, 0)$ und wegen $0, 1 \in R_0$ erhält man nach (iii) $d \in R_0$. Daraus folgt $R_0 = R$ und nach Definition 6 ist R_0 kein Ideal in T .

Satz 3. R_0 sei ein Ideal des Ternärringes $T = (R, t)$. Setzen wir $\bar{a} = \{a \oplus r \mid r \in R_0\}$ für jedes $a \in R$ und $R/R_0 = \{\bar{a} \mid a \in R\}$, dann ist R/R_0 eine Zerlegung der Menge R . Setzen wir weiter $\bar{t}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \overline{t(a, b, c)}$ für alle $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ aus R/R_0 , dann ist $\bar{t}$ eine Ternäroperation über R/R_0 und das Paar $\bar{T} = (R/R_0, \bar{t})$ stellt einen Ternärring dar.

Zum Beweis siehe die Beweise der Sätze 4 und 5, [3].

Definition 7. Es sei R_0 ein Ideal des Ternärringes $T = (R, t)$. Der im Satz 3 beschriebene Ternärring $\bar{T} = (R/R_0, \bar{t})$ heißt durch das Ideal R_0 bestimmter *Restklassen-Ternärring* von T .

Bemerkung 4. Ist $\bar{T}$ der durch das Ideal $\{0\}$ bestimmte Restklassen-Ternärring von T , dann $\bar{T} = T$.

Satz 4. Es sei $\bar{T} = (R/R_0, \bar{t})$ ein durch ein Ideal R_0 des Ternärtringes $T = (R, t)$ bestimmter Restklassen-Ternärtring von T . Dann ist die Abbildung $\varphi : a \rightarrow \bar{a}$ $\forall a \in R$ ein Homomorphismus des Ternärtringes T auf den Ternärtring $\bar{T}$.

2. Es sei φ ein Homomorphismus des Ternärtringes $T = (R, t)$ auf den Ternärtring $T' = (R', t')$. Dann ist $R_0 = \{a \in R \mid a^\varphi = 0^\varphi\}$ ein Ideal in T und die Ternärtringe $\bar{T} = (R/R_0, \bar{t})$, T' sind isomorph.

Zum Beweis siehe den Beweis von Satz 6, [3].

Definition 8. $T = (R, t)$, $T' = (R', t')$ seien Ternärtringe mit ausgezeichneten Elementen $0, 1$ bzw. $0', 1'$ und u' sei ein in der Menge R' nicht enthaltenes Element. Eine Abbildung φ der Menge R auf die Menge $Q' = R' \cup \{u'\}$ heißt *Pseudohomomorphismus* des Ternärtringes T auf den Ternärtring T' , wenn gilt:

- (P0) $0^\varphi \in R'$.
- (P1) Aus $a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi \in R'$ folgt $[t(a, b, c)]^\varphi = t'(a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi)$.
- (P2) Aus $a^\varphi = u', c^\varphi \in R'$ und $[t(a, b, c)]^\varphi \in R'$ folgt $b^\varphi = 0'$.
- (P3) Aus $b^\varphi = u', c^\varphi \in R'$ und $[t(a, b, c)]^\varphi \in R'$ folgt $a^\varphi = 0'$.
- (P4) Gilt $[t(a, b, c)]^\varphi \in R'$ und $c^\varphi = u'$, so ist entweder $a^\varphi = u'$ oder $b^\varphi = u'$.
- (P5) Gilt $d = t(a, b_1, c_1) = t(a, b_2, c_2)$ mit $a^\varphi = d^\varphi = u'$ und $c_1^\varphi, c_2^\varphi \in R'$, so ist $b_1^\varphi = b_2^\varphi$.
- (P6) Gilt $d_1 = t(a_1, b, c)$, $d_2 = t(a_2, b, c)$ mit $b^\varphi = c^\varphi = u'$ und $d_1^\varphi, d_2^\varphi \in R'$, so ist $a_1^\varphi = a_2^\varphi$.
- (P7) Es sei $d = t(a, b, c)$ für $a^\varphi, d^\varphi \in R'$, $b^\varphi = c^\varphi = u'$ und $y = t(x, b, c)$ für $x^\varphi = y^\varphi = u'$. Aus $y = t(x, m, k)$ folgt entweder $m^\varphi = u'$ oder $k^\varphi = u'$.

Bemerkung 5. In der Arbeit [6] wird folgende Definition angeführt: Sind $T = (R, t)$, $T' = (R', t')$ Ternärkörper und $u' \notin R'$, dann heißt eine Abbildung φ der Menge R auf die Menge $Q' = R' \cup \{u'\}$ ein *T-Homomorphismus*, wenn die Forderungen (P1)–(P4) und folgende (5)–(7) erfüllt sind:

- (5) Aus $d = t(a, b_1, c_1) = t(a, b_2, 0)$ und $a^\varphi = d^\varphi = u'$, $c_1^\varphi \in R'$ folgt $b_1^\varphi = b_2^\varphi$.
- (6) Aus $d_1 = t(a_1, b, c)$, $0 = t(a_2, b, c)$ und $b^\varphi = c^\varphi = u'$, $d_1^\varphi \in R'$ folgt $a_1^\varphi = a_2^\varphi$.
- (7) Es sei $y = t(x, b, c) = t(x, m, 0)$ und $0 = t(a, b, c)$ mit $b^\varphi = c^\varphi = x^\varphi = y^\varphi = u'$. Dann gilt entweder $m^\varphi = u'$ oder $a^\varphi = u'$.

Satz 5. Es seien $T = (R, t)$, $T' = (R', t')$ Ternärkörper. Eine Abbildung ist ein *Pseudohomomorphismus* von T auf T' genau dann, wenn sie ein *T-Homomorphismus* ist.

Beweis. 1. φ sei ein Pseudohomomorphismus von T . Wir beweisen, daß φ den Forderungen (5)–(7) genügt.

Ad (5) Nach (P0) ist $0^\varphi \in R'$. Setzt man in (P5) $c_2 = 0$, dann erhält man $b_1^\varphi = b_2^\varphi$, also die Behauptung (5).

Ad (6) Setzt man in (P6) $d_2 = 0$, so gilt $a_1^\varphi = a_2^\varphi$.

Ad (7) Es sei $t(x, b, c) = t(x, m, 0) = y$, $0 = t(a, b, c)$, wo $x^\varphi = y^\varphi = b^\varphi = u'$. Aus $a^\varphi \in R'$ folgt wegen $0^\varphi \in R'$ nach (P7) $m^\varphi = u'$. Es gilt daher entweder $m^\varphi = u'$ oder $a^\varphi = u'$.

2. φ sei ein T-Homomorphismus. Nach [6] gilt $0^\varphi = 0'$. Wir beweisen, daß (P5)–(P7) aus Definition 8 gelten.

Ad (P5) Es sei $d = t(a, b_1, c_1) = t(a, b_2, c_2)$ mit $a^\varphi = d^\varphi = u'$ und $c_1^\varphi, c_2^\varphi \in R'$. Wegen $0^\varphi = 0'$ und $a^\varphi = u'$ gilt $a \neq 0$. Nach (K'4) gibt es ein einziges Element $n \in R$ mit $d = t(a, n, 0)$ und aus den Gleichheiten $d = t(a, b_1, c_1) = t(a, n, 0) = t(a, b_2, c_2)$ folgt gemäß (5) $b_1^\varphi = n^\varphi = b_2^\varphi$.

Ad (P6) Es sei $d_1 = t(a_1, b, c)$, $d_2 = t(a_2, b, c)$ mit $b^\varphi = c^\varphi = u'$ und $d_1^\varphi, d_2^\varphi \in R'$. Wegen $b \neq 0$ gibt es nach (K'3) ein einziges Element $a \in R$ mit $0 = t(a, b, c)$. Aus den Beziehungen $d_1 = t(a_1, b, c)$, $0 = t(a, b, c)$ bzw. $d_2 = t(a_2, b, c)$, $0 = t(a, b, c)$ folgt dann gemäß (6) $a_1^\varphi = a^\varphi = a_2^\varphi$.

Ad (P7) Es sei $d = t(a, b, c)$, $y = t(x, b, c)$ mit $a^\varphi, d^\varphi \in R'$ und $b^\varphi = c^\varphi = x^\varphi = y^\varphi = u'$.

a) Es sei $y = t(x, m, 0)$ für ein $m \in R$. Wegen $b^\varphi = u'$ gilt $b \neq 0$ und nach (K'3) gibt es ein einziges Element $n \in R$ mit $0 = t(n, b, c)$. Aus den Beziehungen $d = t(a, b, c)$, $0 = t(n, b, c)$ mit $b^\varphi = c^\varphi = u'$ und $0^\varphi, d^\varphi \in R'$ folgt nach (6) $a^\varphi = n^\varphi$. Wegen $a^\varphi \in R'$ ergibt sich also $n^\varphi \in R'$. Aus $y = t(x, b, c) = t(x, m, 0)$, $0 = t(n, b, c)$ erhält man nach (7) entweder $m^\varphi = u'$ oder $n^\varphi = u'$. Wegen $n^\varphi \in R'$ gilt $m^\varphi = u'$.

b) Es sei nun $y = t(x, m, k)$ mit $k^\varphi \in R'$. Nach (K'4) gibt es ein einziges Element $n \in R$ mit $y = t(x, n, 0)$ und nach Fall a) gilt $n^\varphi = u'$. Da $y = t(x, m, k) = t(x, n, 0)$ und $x^\varphi = y^\varphi = u'$, $0^\varphi, k^\varphi \in R'$ ist, erhalten wir gemäß (5) $m^\varphi = n^\varphi = u'$. Aus $y = t(x, m, k)$ folgt also entweder $m^\varphi = u'$ oder $k^\varphi = u'$.

Bemerkung 6. Aus dem vorhergehenden Beweis folgt, daß der Satz 5 auch im allgemeineren Fall gilt, falls T nur ein Pseudoternärkörper und T' ein Ternärring sind.

Satz 6. Es gebe einen Pseudohomomorphismus φ des Ternärringes $T = (R, t)$ auf den Ternärring $T' = (R', t')$ und sei $M = \{x \in R \mid x^\varphi \in R'\}$, $U = \{x \in R \mid x^\varphi = u'\}$. Das Paar $\mathcal{T} = (M, t)$ ist ein Ternärring und die Einschränkung $\varphi|_M$ der Abbildung φ auf die Menge M ist ein Homomorphismus des Ternärringes $\mathcal{T}$ auf T' .

Beweis. Es sei $T = (R, t)$ ein Ternärring mit ausgezeichneten Elementen 0, 1 und sei φ ein Pseudohomomorphismus von T auf T' . Nach (P1) ist die Ternäroperation t auf der Menge M abgeschlossen und nach (P0) gilt $0 \in M$. Setzen wir $1 \in U$ voraus. Da φ eine Abbildung auf die Menge $Q' = R' \cup \{u'\}$ ist, gibt es in R ein Element b mit $b^\varphi \neq 0'$. Dann gilt $b = t(1, b, 0)$ und $[t(1, b, 0)]^\varphi = b^\varphi \neq 0'$, was ein Widerspruch zur Forderung (P2) ist. Es gilt also $1 \in M$. Da die Forderung (K1) für alle Elemente a, b aus R erfüllt ist, ist sie auch für alle a, b aus M erfüllt.

Es seien a, b, d aus M . Gemäß (K2) existiert genau ein Element $c \in R$ mit $d = t(a, b, c)$. Wird $c \in U$ angenommen, so gilt nach (P4) entweder $a^\varphi = u'$ oder

$b^\varphi = u'$, was aber ein Widerspruch ist. Somit ergibt sich $c \in M$ und $\mathcal{T}$ bildet einen Ternärtring. Nach (P1) ist $\varphi \mid M$ ein Homomorphismus des Ternärtringes $\mathcal{T}$ auf T' .

Bemerkung 7. φ sei ein Pseudohomomorphismus des Ternärtringes $T = (R, t)$ auf den Ternärtring $T' = (R', t')$. Nach Sätzen 4 und 6 ist $R_0 = \{x \in R \mid x^\varphi = 0'\}$ ein Ideal in $\mathcal{T} = (M, t)$. Ist $\overline{\mathcal{T}} = (M/R_0, \bar{t})$ der durch das Ideal R_0 bestimmte Resklassen-Ternärtring von $\mathcal{T}$, dann sind $\overline{\mathcal{T}}$ und T' isomorph.

§ 2. Schwache Pseudoebenen und Ternärtringe

Definition 9. Eine Inzidenzstruktur $\mathcal{M} = (P, L, I)$ (vgl. [1]) heißt *schwache Pseudoebene*, kürzlich *SP-Ebene*, wenn gilt:

(M1) Es existieren vier Punkte o, e, u, v aus P , von denen keine drei auf einer Geraden aus L liegen und es existiert genau eine Gerade a , die mit o, e inzidiert.

(M2) Zu jedem Punkt x mit $x \neq u$ existiert genau eine Gerade, die mit x, u inzidiert.

(M3) Zu jedem Punkt x mit $x \neq v$ existiert genau eine Gerade, die mit x, v inzidiert.

(M4) Geht eine Gerade p durch den Punkt u , so existiert genau ein Punkt, der mit p, a inzidiert.

(M5) Geht eine Gerade p durch den Punkt v und ist q eine mit p verschiedene Gerade, so existiert genau ein Punkt, der mit p, q inzidiert.

(M6) Ist q eine Gerade, die mit v, e inzidiert und gilt $m I q$, so existiert genau eine Gerade, die mit o, m inzidiert.

(M7) Ist r eine Gerade, die mit u, v inzidiert und sind m, n Punkte mit $m I r$, $n \text{ non } I r$, so existiert genau eine Gerade, die mit m, n inzidiert.

Bemerkung 8. Sei $\mathcal{M}$ eine SP-Ebene. Geht durch die Punkte x, y genau eine Gerade p , so schreibt man $p = xy$. Haben die Geraden p, q genau einen Punkt x gemeinsam, so schreibt man $x = p \sqcap q$.

Definition 10. Das Quadrupel $\mathcal{B} = (o, e, u, v)$ von Punkten aus (M1) heißt *Koordinatenviereck* der SP-Ebene $\mathcal{M}$.

Definition 11. Eine SP-Ebene $\mathcal{M}$ heißt *Semiebene*, wenn gilt:

(M8) Ist $m I eu$, so existiert genau eine Gerade om .

Bemerkung 9. Jede projektive Ebene [2] ist zugleich eine Semiebene. Je vier Punkte einer projektiven Ebene $\mathcal{M}$, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, bilden ein Koordinatenviereck von $\mathcal{M}$.

Definition 12. Es seien $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ zwei SP-Ebenen mit den Koordinatenvierecken $\mathcal{B} = (o, e, u, v)$ und $\mathcal{B}' = (o', e', u', v')$. Ein Homomorphismus κ der Inzidenzstruktur $\mathcal{M}$ auf die Inzidenzstruktur $\mathcal{M}'$ ([1]) heißt *Homomorphismus* der SP-Ebene $\mathcal{M}$ auf die SP-Ebene $\mathcal{M}'$, wenn $o\kappa = o', e\kappa = e', u\kappa = u', v\kappa = v'$ (kurz $\mathcal{B}\kappa = \mathcal{B}'$) gilt. Ist κ ein Isomorphismus der Inzidenzstruktur $\mathcal{M}$ auf die Inzidenzstruktur $\mathcal{M}'$, der zugleich ein Homomorphismus der SP-Ebene $\mathcal{M}$ auf die SP-Ebene $\mathcal{M}'$ ist, dann ist κ ein *Isomorphismus* der SP-Ebenen $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$.

Bemerkung 10. Es seien $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ die SP-Ebenen. Unter einem Homomorphismus κ von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}'$ (kurz $\kappa : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$) wird weiter stets ein Homomorphismus der SP-Ebene $\mathcal{M}$ auf die SP-Ebene $\mathcal{M}'$ verstanden.

Sei $\mathcal{M} = (P, L, I)$ eine SP-Ebene mit dem Koordinatenviereck $\mathcal{B} = (o, e, u, v)$. Wir setzen $Q = \{x \in P \mid x I ou\}$, $R = Q \setminus \{u\}$ und definieren eine Abbildung $\xi : (R \times R) \cup Q \rightarrow P$ durch folgende Vorschriften (A1) und (A2):

- (A1) Für $(x, y) \in R \times R$ setzen wir $w = a \sqcap vy, s = xv \sqcap uw$ und $s = (x, y)^\xi$.
- (A2) Für $x \in Q$ setzen wir $n = xv \sqcap a, n' = nu \sqcap ve, s = on' \sqcap uv$ und $s = x^\xi$.

Mit Anwendung der Axiome (M1)–(M7) läßt sich zeigen, daß ξ eine bijektive Abbildung der Menge $(R \times R) \cup Q$ auf P ist.

Weiter definieren wir eine Abbildung $\eta : (R \times R) \cup Q \rightarrow L$ durch folgende Vorschriften (B1) und (B2):

- (B1) Für $(m, k) \in R \times R$ setzen wir $n = mv \sqcap a, n' = nu \sqcap ve, p = on' \sqcap uv, z = kv \sqcap a, q = uz \sqcap ov, r = pq$ und $r = (m, k)^\eta$.
- (B2) Für $m \in Q$ setzen wir $r = mv$ und $m^\eta = r$.

Die Abbildung η ist eine bijektive Abbildung der Menge $(R \times R) \cup Q$ auf die Menge L .

Wir setzen $(x, y)^\xi = [x, y]$ und $(x, y)^\eta = \langle x, y \rangle$ für alle Paare $(x, y) \in R \times R$ und $x^\xi = [x], x^\eta = \langle x \rangle$ für alle $x \in Q$. Aus den Konstruktionen (A1) und (B2) folgt $[x, y] I \langle x \rangle$ für alle $x, y \in R$ und aus (A2), (B1) folgt $[m] I \langle m, k \rangle$ für alle $m, k \in R$. Nach (A2), (B2) ergibt sich $[m] I \langle u \rangle$ und $[u] I \langle m \rangle$ für alle $m \in Q$. Setzt man $y = t(x, m, k) \Leftrightarrow [x, y] I \langle m, k \rangle$, so t ist eine Ternäroperation über der Menge R .

Mit den Axiomen (M1)–(M7) läßt sich unter Anwendung der Verfahren aus [2], [4], [7] beweisen, daß der folgende Satz gilt:

Satz 7. Es sei $\mathcal{M}$ eine SP-Ebene mit dem Koordinatenviereck $\mathcal{B} = (o, e, u, v)$. Ist t die oben beschriebene Ternäroperation über $R = \{x \mid x I ou, x \neq u\}$, dann ist $T_{\mathcal{M}} = (R, t)$ ein Ternärring.

Bemerkung 11. Der zu einer Semiebene $\mathcal{M}$ gehörige Ternärring $T_{\mathcal{M}}$ ist ein Semi-ternärkörper.

Sei $T = (R, t)$ ein Ternärtring und u ein Element mit $u \notin R$. Wir setzen $Q = R \cup \{u\}$. Ferner seien P, L elementfremde Mengen und ξ, η bijektive Abbildungen der Menge $(R \times R) \cup Q$ auf die Mengen P und L . Wir setzen $(x, y)^\xi = [x, y]$, $(x, y)^\eta = \langle x, y \rangle \quad \forall (x, y) \in R \times R$, $x^\xi = [x]$, $x^\eta = \langle x \rangle \quad \forall x \in Q$ und erklären eine Inzidenzrelation $I \subset P \times L$ durch

$$\begin{aligned} [x, y] I \langle m, k \rangle &\Leftrightarrow y = t(x, m, k), \\ [x, y] I \langle x \rangle &\quad \forall x, y \in R, \\ [m] I \langle m, k \rangle &\quad \forall m, k \in R, \\ [m] I \langle u \rangle &\quad \forall m \in Q, \\ [u] I \langle m \rangle &\quad \forall m \in Q. \end{aligned}$$

Satz 8. Das Tripel $\mathcal{M}_T = (P, L, I)$ aus der vorherigen Konstruktion ist eine SP-Ebene mit dem Koordinatenviereck $\mathcal{B} = ([0, 0], [1, 1], [0], [u])$.

Zum Beweis muß man die Gültigkeit der Forderungen (M1) bis (M7) nachweisen.

Bemerkung 12. Ist $T = (R, t)$ ein Semiternärkörper, dann ist $\mathcal{M}_T$ eine Semiebene.

Definition 13. Es sei $\mathcal{M}$ eine SP-Ebene. Sind $\bar{T}_\mathcal{M}$ ein Restklassen-Ternärtring von $T_\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}_{\bar{T}_\mathcal{M}}$ die zu $\bar{T}_\mathcal{M}$ gehörige SP-Ebene, dann $\mathcal{M}_{\bar{T}_\mathcal{M}}$ heißt Restklassen-SP-Ebene von $\mathcal{M}$.

§ 3. v -Homomorphismen der SP-Ebenen und Homomorphismen der Ternärtringe

Definition 14. Es seien $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ SP-Ebenen mit den Koordinatenvierecken $\mathcal{B} = (o, e, u, v)$, $\mathcal{B}' = (o', e', u', v')$. Ein Homomorphismus κ von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}'$ heißt v -Homomorphismus, wenn $x\kappa = v' \Rightarrow x = v$.

Satz 9. Es seien $\mathcal{M} = (P, L, I)$, $\mathcal{M}' = (P', L', I')$ die SP-Ebenen mit den Koordinatenvierecken $\mathcal{B} = (o, e, u, v)$, $\mathcal{B}' = (o', e', u', v')$ und κ ein Homomorphismus von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}'$. κ ist ein v -Homomorphismus genau dann, wenn gilt: Ist r eine Gerade mit $r\kappa = u'v'$, so folgt $r = uv$.

Beweis. 1. Sei κ ein v -Homomorphismus und nehmen wir an, daß eine Gerade r mit $r \neq uv$ und $r\kappa = u'v'$ existiert. Gilt v non $I r$, so gibt es nach (M5) einen Punkt $m = r \cap ov$, wo $m \neq v$. Da κ ein Homomorphismus ist und $r\kappa = u'v'$ gilt, so ergibt sich $m\kappa I' u'v'$ und gleichzeitig $m\kappa I' o'v'$. Daraus folgt aber $m\kappa = v'$, also ein Widerspruch, denn κ ist ein v -Homomorphismus. Es sei $v I r$. Dann gibt es einen Punkt $m = r \cap a$, wobei m non $I uv$. Wegen $r\kappa = u'v'$ ergibt sich dabei $m\kappa I' u'v'$. Es gibt eine Gerade $p = um$ mit $p \neq uv$ und aus $m\kappa I' u'v'$ folgt $p\kappa = u'v'$. Setzt man $n = p \cap ov$, so gilt $n \neq v$ und $n\kappa I' u'v'$. Wegen $n\kappa I' o'v'$ erhält man $n\kappa = v'$, also wieder ein Widerspruch.

2. Nehmen wir an, daß $rx = u'v' \Rightarrow r = uv$ gilt. Es sei x ein Punkt mit $x \neq v$, $xx = v'$. Dann gilt $x \neq o$ und $x \neq u$. Aus $x \text{ non } I uv$ folgt $ux \neq uv$ und wegen $xx = v'$ erhält man $(ux)x = u'v'$, also ein Widerspruch. Nehmen wir also $x I uv$ an. Wegen $x \neq v$ erhält man $ox \neq ov$ und es gibt einen Punkt $m = ox \sqcap ve$, wobei $m \neq v$. Aus $xx = v'$ folgt dann $(ox)x = o'v'$ und $mx = vx$. Somit gilt $um \neq uv$ und $(um)x = u'v'$, was wieder ein Widerspruch ist.

Satz 10. Jeder v -Homomorphismus einer SP-Ebene $\mathcal{M}$ auf eine SP-Ebene $\mathcal{M}'$ induziert einen Homomorphismus des Ternärringes $T_{\mathcal{M}}$ auf den Ternärring $T_{\mathcal{M}'}$.

Beweis. Es seien $\mathcal{M} = (P, L, I)$, $\mathcal{M}' = (P', L', I')$ die SP-Ebenen mit den Koordinatenvierecken $\mathcal{B} = (o, e, u, v)$, $\mathcal{B}' = (o', e', u', v')$ und $T_{\mathcal{M}} = (R, t)$, $T_{\mathcal{M}'} = (R', t')$ die zu $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ gehörige Ternärringe. κ sei ein v -Homomorphismus von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}'$. Nach Satz 9 und nach (A1), (B1) gilt $[x, y]\kappa = [x\kappa, y\kappa]$ und $\langle x, y \rangle \kappa = \langle x\kappa, y\kappa \rangle$ für alle $x, y \in R$. Es sei $y = t(x, m, k)$, also $[x, y] I \langle m, k \rangle$. Daraus folgt $[x, y]\kappa I' \langle m\kappa, k\kappa \rangle$, $[x\kappa, y\kappa] I' \langle m\kappa, k\kappa \rangle$ und $y\kappa = t'(x\kappa, m\kappa, k\kappa)$. Die Abbildung $\varphi: R \rightarrow R'$ mit $x^\varphi = x\kappa \forall x \in R$ ist also ein Homomorphismus von $T_{\mathcal{M}}$ auf $T_{\mathcal{M}'}$.

Bemerkung 13. Sind die SP-Ebenen $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ isomorph, dann sind auch $T_{\mathcal{M}}$ und $T_{\mathcal{M}'}$ isomorph.

Satz 11. Jeder Homomorphismus des Ternärringes T auf den Ternärring T' induziert einen v -Homomorphismus von $\mathcal{M}_T$ auf $\mathcal{M}_{T'}$.

Beweis. Es sei φ ein Homomorphismus des Ternärringes $T = (R, t)$ auf den Ternärring $T' = (R', t')$ und seien $\mathcal{M}_T = (P, L, I)$, $\mathcal{M}_{T'} = (P', L', I')$ die zugehörigen SP-Ebenen, wo $P = \{[x, y] \mid (x, y) \in R \times R\} \cup \{[x] \mid x \in R\} \cup \{[u]\}$, $L = \{\langle m, k \rangle \mid (m, k) \in R \times R\} \cup \{\langle m \rangle \mid m \in R\} \cup \{\langle u \rangle\}$, $P' = \{[x', y'] \mid (x', y') \in R' \times R'\} \cup \{[x'] \mid x' \in R'\} \cup \{\langle u' \rangle\}$, $L' = \{\langle m', k' \rangle \mid (m', k') \in R' \times R'\} \cup \{\langle m' \rangle \mid m' \in R'\} \cup \{\langle u' \rangle\}$ mit $u \notin R$ und $u' \notin R'$. Wir definieren eine Abbildung κ von $P \cup L$ auf $P' \cup L'$ durch

$$\begin{aligned} [x, y]\kappa &= [x^\varphi, y^\varphi], & \langle x, y \rangle \kappa &= \langle x^\varphi, y^\varphi \rangle, \\ [m]\kappa &= [m^\varphi], & \langle m \rangle \kappa &= \langle m^\varphi \rangle, \\ [u]\kappa &= [u'], & \langle u \rangle \kappa &= \langle u' \rangle. \end{aligned}$$

Es läßt sich leicht nachprüfen, daß so definierte κ ein v -Homomorphismus von $\mathcal{M}_T$ auf $\mathcal{M}_{T'}$ ist.

Bemerkung 14. Sind die Ternärringe T, T' isomorph, so sind auch $\mathcal{M}_T, \mathcal{M}_{T'}$ isomorph.

Satz 12. Es sei κ ein v -Homomorphismus der SP-Ebene $\mathcal{M}$ auf die SP-Ebene $\mathcal{M}'$. Dann existieren eine Resklassen-SP-Ebene $\mathcal{N}$ von $\mathcal{M}$, ein v -Homomorphismus $\varrho : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ und ein Isomorphismus $\sigma : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}'$ mit $\kappa = \varrho\sigma$.

Beweis. Es seien $\mathcal{M} = (P, L, I)$, $\mathcal{M}' = (P', L', I')$ die SP-Ebenen mit den Koordinatenvierecken $\mathcal{B} = (o, e, u, v)$, $\mathcal{B}' = (o', e', u', v')$ und κ ein v -Homomorphismus von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}'$. Nach Beweis von Satz 10 ist die Abbildung φ mit $x^\varphi = x\kappa$ $\forall x \in R = \{x \in P \mid x \perp ou, x \neq u\}$ ein Homomorphismus von $T_{\mathcal{M}} = (R, i)$ auf $T_{\mathcal{M}'}$. Dabei gilt

$$\begin{aligned} [x, y] \kappa &= [x^\varphi, y^\varphi], \langle x, y \rangle \kappa = \langle x^\varphi, y^\varphi \rangle \quad \forall (x, y) \in R \times R, \\ [m] \kappa &= [m^\varphi], \langle m \rangle \kappa = \langle m^\varphi \rangle \quad \forall m \in R, \\ [u] \kappa &= [u'], \langle u \rangle \kappa = \langle u' \rangle. \end{aligned}$$

Nach Satz 4 gibt es einen Resklassen-Ternärtring $\bar{T}_{\mathcal{M}} = (\bar{R}, \bar{i})$ von $T_{\mathcal{M}}$, der zu $T_{\mathcal{M}}$ isomorph ist. Ein Isomorphismus ξ von $\bar{T}_{\mathcal{M}}$, $T_{\mathcal{M}'}$ läßt sich dann durch die Vorschrift $\xi : \bar{x} \rightarrow x^\varphi \quad \forall x \in R$ erklären. Wir wählen ein Element $\bar{u} \notin \bar{R}$ und definieren eine Abbildung ϱ mit

$$\begin{aligned} [x, y] \varrho &= [\bar{x}, \bar{y}], \langle x, y \rangle \varrho = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \quad \forall (x, y) \in R \times R, \\ [m] \varrho &= [\bar{m}], \langle m \rangle \varrho = \langle \bar{m} \rangle \quad \forall m \in R, \\ [u] \varrho &= [\bar{u}], \langle u \rangle \varrho = \langle \bar{u} \rangle. \end{aligned}$$

ϱ ist ein v -Homomorphismus von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}_{T_{\mathcal{M}'}}$. Zugleich ist die Abbildung σ :

$$\begin{aligned} [\bar{x}, \bar{y}] \sigma &= [x^\xi, y^\xi], \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \sigma = \langle x^\xi, y^\xi \rangle \quad \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{R} \times \bar{R}, \\ [\bar{m}] \sigma &= [m^\xi], \langle \bar{m} \rangle \sigma = \langle m^\xi \rangle \quad \forall \bar{m} \in \bar{R}, \\ [\bar{u}] \sigma &= [u'], \langle \bar{u} \rangle \sigma = \langle u' \rangle \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von $\mathcal{M}_{T_{\mathcal{M}'}}$ auf $\mathcal{M}'$.

Nach den Definitionen von ϱ und σ ergibt sich $[x, y] \varrho\sigma = [\bar{x}, \bar{y}] \sigma = [x^\xi, y^\xi] = [x^\varphi, y^\varphi] = [x, y] \kappa \quad \forall (x, y) \in R \times R$ usw., also $\kappa = \varrho\sigma$.

Bemerkung 15. Jede SP-Ebene $\mathcal{M}$ ist zu $\mathcal{M}_{T_{\mathcal{M}}}$ isomorph.

Satz 13. Jeder v -Homomorphismus einer Semiebene auf eine SP-Ebene ist ein Isomorphismus.

Beweis. Sei κ ein v -Homomorphismus einer Semiebene $\mathcal{M}$ auf eine SP-Ebene $\mathcal{M}'$ und seien $T_{\mathcal{M}} = (R, i)$, $T_{\mathcal{M}'} = (R', i')$ die zu $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ gehörigen Ternärtringe. Die Abbildung $\varphi : R \rightarrow R'$ mit $x^\varphi = x\kappa \quad \forall x \in R$ ist ein Homomorphismus des Ternärtringes $T_{\mathcal{M}}$ auf $T_{\mathcal{M}'}$ und $R_0 = \{x \in R \mid x^\varphi = o'\}$ ist ein Ideal in $T_{\mathcal{M}}$. Nach Bemerkung 11 ist $T_{\mathcal{M}}$ ein Semiterenärkörper und nach Satz 2 gilt $R_0 = \{o\}$. Die

Ternärreine $T_{\mathcal{M}}, \bar{T}_{\mathcal{M}} = (R/R_0, \bar{i})$ sind also isomorph und die im Satz 12 beschriebenen Abbildungen $\varrho: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{T_{\mathcal{M}}}, \sigma: \mathcal{M}_{T_{\mathcal{M}}} \rightarrow \mathcal{M}'$ sind Isomorphismen und mithin ist auch $\kappa = \varrho\sigma$ ein Isomorphismus.

Bemerkung 16. Sei κ ein Homomorphismus einer projektiven Ebene $\mathcal{M}$ auf eine SP-Ebene. Gilt $y\kappa = x\kappa \Rightarrow y = x$ für einen Punkt x aus $\mathcal{M}$, so ist κ nach Bemerkung 9 und nach Satz 13 ein Isomorphismus.

§ 4. Homomorphismen der SP-Ebenen und Pseudohomomorphismen der Ternärreine

In diesem Paragraphen werden solche Homomorphismen der SP-Ebenen untersucht, die keine v -Homomorphismen sind.

Es seien $\mathcal{M} = (P, L, I), \mathcal{M}' = (P', L', I')$ SP-Ebenen mit den Koordinatenvierecken $\mathcal{B} = (o, e, u, v), \mathcal{B}' = (o', e', u', v')$. Setzen wir $Q = \{x \in P \mid x I ou\}, R = Q \setminus \{u\}, Q' = \{x' \in P' \mid x' I' o'u'\}, R' = Q' \setminus \{u'\}$.

Satz 14. Es sei κ ein Homomorphismus der SP-Ebene $\mathcal{M}$ auf die SP-Ebene $\mathcal{M}'$ und sei $U = \{x \in R \mid x\kappa = u'\}, M = R \setminus U = \{x \in R \mid x\kappa \in R'\}$ gesetzt.

1. Für einen Punkt $s = [x, y] \in P$ gilt

- a) $x, y \in M \Leftrightarrow s\kappa \text{ non } I' u'v',$
- b) $x \in U, s\kappa \neq u' \Rightarrow y \in U,$
- c) $s\kappa = v' \Rightarrow y \in U.$

2. Es sei $r = \langle m, k \rangle$ eine Gerade aus L . Setzt man nach (B1) $r = pq$, dann gilt

- a) $p\kappa = v' \Leftrightarrow m \in U,$
- b) $q\kappa = v' \Leftrightarrow k \in U,$
- c) $v' I' r\kappa \Rightarrow m \in U \vee k \in U.$

Beweis. Nach (A1) gilt $s = [x, y] \text{ non } I uv$. Wir setzen $w = yv \sqcap a = su \sqcap a$.

a) Es sei $x, y \in M$, d. h. $x\kappa \neq u', y\kappa \neq u'$. Daraus folgt $(yv)\kappa \neq u'v'$ und $w\kappa \text{ non } I' \text{ non } I' u'v', (uw)\kappa \neq u'v'$. Nach (A1) ist $s = xv \sqcap uw$ und wegen $(uw)\kappa \neq u'v'$ erhält man $s\kappa \text{ non } I' u'v'$. Durch umgekehrtes Verfahren läßt sich $s\kappa \text{ non } I' u'v' \Rightarrow x, y \in M$ beweisen.

b) Es sei $x \in U$ und $s\kappa \neq u'$. Wegen $x\kappa = u'$ gilt $(xv)\kappa = u'v'$, woraus sich nach (A1) $s\kappa I' u'v'$ ergibt. Wegen $s\kappa \neq u'$ ist $(su)\kappa = s\kappa u\kappa = u'v'$. Aus $w I su$ folgt $w\kappa I' u'v'$ und $(vw)\kappa = u'v'$. Nach (A1) gilt dann $y = vw \sqcap ou$, also $y \in U$.

c) Gilt $s\kappa = v'$, so $(su)\kappa = u'v'$ und $w\kappa I' u'v', (vw)\kappa = u'v'$. Wegen $y = ou \sqcap vw$ ergibt sich $y\kappa = u'$, also $y \in U$.

2. Gemäß (B1) gilt $r = \langle m, k \rangle \Rightarrow v \text{ non } I r$.

a) Es sei $px = v'$. Setzt man $n' = op \sqcap ve$, $n = n'u \sqcap a$, so $n'x = v'$ und $nx I' u'v'$. Da nach (B1) $m = vn \sqcap ou$ gilt, ergibt sich daraus $m\kappa = u'$, also $m \in U$. Gilt $m \in U$, so läßt sich durch umgekehrtes Verfahren $px = v'$ beweisen.

b) Es sei $qx = v'$. Dann gilt $(qu)\kappa = u'v'$, $zx I' u'v'$, $(vz)\kappa = u'v'$, wo $z = uq \sqcap a$. Nach (B1) ist $k = vz \sqcap ou$ und mithin $k \in U$. Durch umgekehrtes Verfahren beweisen wir, daß $k \in U \Rightarrow qx = v'$ gilt.

c) Nehmen wir an, daß $v' I' r\kappa$ und gleichzeitig $m, k \in M$ gilt. Nach a) und b) ist $px \neq v'$ und $qx \neq v'$, woraus $v' \text{ non } I' r\kappa$, also ein Widerspruch, folgt.

Satz 15. Es sei κ ein Homomorphismus der SP-Ebene $\mathcal{M} = (P, L, I)$ auf die SP-Ebene $\mathcal{M}' = (P', L', I')$. Die Abbildung $\varphi: R \rightarrow Q'$ mit $x^\varphi = x\kappa \ \forall x \in R$ ist ein Pseudohomomorphismus des Ternärringes $T_{\mathcal{M}}$ auf den Ternärring $T_{\mathcal{M}'}$.

Beweis. Es sei wieder $U = \{x \in R \mid x\kappa = u'\}$, $M = R \setminus U$. Da κ kein v-Homomorphismus ist, gilt $U \neq \emptyset$; da κ ein Homomorphismus auf $\mathcal{M}'$ ist, ist φ eine Abbildung auf die Menge Q' . Wir wollen beweisen, daß φ den Forderungen (P0)–(P7) der Definition 8 genügt.

Ad (P0) Wegen $\mathcal{B}\kappa = \mathcal{B}'$ gilt $o\kappa = o'$ und daher $o^\varphi = u'$, also $o^\varphi \in R'$.

Ad (P1) Es seien $x, m, k \in M$ und sei $y = t(x, m, k)$. Setzt man $s = [x, y]$ und $r = \langle m, k \rangle$, so gilt $s I r$. Da κ ein Homomorphismus ist, ergibt sich daraus $s\kappa I' r\kappa$ und aus (A1) und (B1) folgt dann $s\kappa = [x\kappa, y\kappa] = [x^\varphi, y^\varphi]$, $r\kappa = \langle m\kappa, k\kappa \rangle = \langle m^\varphi, k^\varphi \rangle$. Wegen $x^\varphi, m^\varphi, k^\varphi \in R'$ erhält man $y^\varphi = [t(x, m, k)]^\varphi = t'(x^\varphi, m^\varphi, k^\varphi)$.

Ad (P2) Nehmen wir an, daß $x \in U$, $k \in M$ und $y = t(x, m, k) \in M$ gilt. Setzt man $s = [x, y]$ und $r = \langle m, k \rangle = pq$, so $s I r$ und nach Satz 14 gilt $s\kappa = u'$. Wegen $p I uv$ und $s\kappa I' r\kappa$ erhält man daraus $p\kappa = u'$. Gemäß (B1) gilt dann $m\kappa = o'$ und mithin $m^\varphi = o'$.

Ad (P3) Es sei $m \in U$, $k \in M$ und $y = t(x, m, k) \in M$. Setzt man $s = [x, y]$, $r = \langle m, k \rangle = pq$, so $s I r$. Aus unseren Voraussetzungen ergibt sich nach Satz 14 $s\kappa \neq v'$, $p\kappa = v'$, $q\kappa \neq v'$. Gemäß (B1) gilt dann $r\kappa = o'v'$. Wegen $s\kappa I' r\kappa$ ist $(vs)\kappa = o'v'$. Nach (A1) ergibt sich daraus $x^\varphi = o'$.

Ad (P4) Es sei $k \in U$ und $y = t(x, m, k) \in M$. Setzt man wieder $s = [x, y]$, $r = \langle m, k \rangle = pq$, so gilt $s I r$ und nach Satz 14 ist $q\kappa = v'$. Wir setzen $x, m \in M$ voraus. Nach Satz 14 gilt dann $s\kappa \text{ non } I' u'v'$ und $p\kappa \neq v'$. Wegen $q\kappa = v'$, $s\kappa \text{ non } I' \text{ non } I' u'v'$ und $s\kappa I' r\kappa$ folgt $v' I' r\kappa$, $r\kappa \neq u'v'$, was $p\kappa = v'$ bedeutet. Nach Satz 14 gilt dann $m \in U$ im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Es gilt also entweder $x \in U$ oder $m \in U$.

Ad (P5) Es sei $y = t(x, m_1, k_1) = t(x, m_2, k_2)$, wo $x, y \in U$, $k_1, k_2 \in M$. Setzt man $s = [x, y]$, $r_1 = \langle m_1, k_1 \rangle = p_1q_1$, $r_2 = \langle m_2, k_2 \rangle = p_2q_2$, dann gilt nach Satz 14 $s\kappa I' u'v'$, $q_1\kappa \neq v'$, $q_2\kappa \neq v'$. Daraus folgt $r_1\kappa \neq u'v'$ und $r_2\kappa \neq u'v'$. Wegen

$s \mid r_1, s \mid r_2$ ergibt sich $s\kappa \mid r_1\kappa, s\kappa \mid r_2\kappa$ und wegen $s\kappa \mid u'v', r_1\kappa \neq u'v', r_2\kappa \neq u'v'$ gilt $p_1\kappa = p_2\kappa = s\kappa$. Nach (B1) ergibt sich dann $m_1\kappa = m_2\kappa$, also $m_1^\circ = m_2^\circ$.

Ad (P6) Es sei $\bar{y}_1 = t(x_1, m, k), y_2 = t(x_2, m, k)$, wo $m, k \in U$ und $y_1, y_2 \in M$. Setzt man $s_1 = [x_1, y_1], s_2 = [x_2, y_2], r = \langle m, k \rangle = pq$, dann gilt $s_1, s_2 \mid r$. Nach Satz 14 erhält man $v' \mid r\kappa, s_1\kappa \neq v', s_2\kappa \neq v'$ und daraus folgt $(vs_1)\kappa = (vs_2)\kappa = r\kappa$. Gemäß (A1) gilt $x_1\kappa = x_2\kappa$, also $x_1^\circ = x_2^\circ$.

Ad (P7) Es sei $d = t(a, b, c)$ mit $a, d \in M, b, c \in U$ und $y = t(x, b, c)$ mit $x, y \in U$ und $y = t(x, m, k)$. Setzt man $w = [a, d]$ und $r = \langle b, c \rangle$, so $w \mid r$. Nach Satz 14 gilt dabei $w\kappa \text{ non } \mid u'v' \text{ und } v' \mid r\kappa$. Wegen $w\kappa \mid r\kappa$ ergibt sich $r\kappa \neq u'v'$. Wird $s = [x, y]$ gesetzt, dann auch $s \mid r$. Wegen $x, y \in U$ gilt $s\kappa \mid u'v'$ und wegen $s\kappa \mid r\kappa, r\kappa \neq u'v', v' \mid r\kappa$ ist $s\kappa = v'$. Setzt man $r_1 = \langle m, k \rangle$, dann unserer Voraussetzung $y = t(x, m, k)$ nach, gilt $s \mid r_1$. Wegen $s\kappa \mid r_1\kappa$ ist $v' \mid r_1\kappa$ und nach Satz 14 gilt entweder $m \in U$ oder $k \in U$.

Bemerkung 17. Nach Satz 6 ist $\mathcal{T} = (M, t)$ ein Ternärring und die Einschränkung $\varphi \mid M$ ist ein Homomorphismus des Ternärringes $\mathcal{T}$ auf $T_{\mathcal{M}}$. Dann ist $R_0 = \{x \in R \mid x^\circ = o'\}$ ein Ideal im Ternärring $\mathcal{T}$ und nach Satz 4 sind die Ternärringe $\bar{\mathcal{T}} = (M/R_0, \bar{t}), T_{\mathcal{M}}$ isomorph. Nach Bemerkung 14 sind die SP-Ebenen $\mathcal{M}_{\bar{\mathcal{T}}}, \mathcal{M}_{T_{\mathcal{M}}}$ isomorph. Nach Bemerkung 15 sind auch die SP-Ebenen $\mathcal{M}', \mathcal{M}_{T_{\mathcal{M}}}$ isomorph, woraus folgt, daß die SP-Ebenen $\mathcal{M}_{\bar{\mathcal{T}}}, \mathcal{M}'$ isomorph sind.

Es seien $T = (R, t), T' = (R', t')$ Ternärringe mit den ausgezeichneten Elementen 0, 1 bzw. $0', 1'$ und u' sei ein Element mit $u' \notin R'$. Wir setzen $Q' = R' \cup \{u'\}$. φ sei ein Pseudohomomorphismus des Ternärringes T auf den Ternärring T' . Ferner wählen wir ein Element u mit $u \notin R$, bezeichnen wir $Q = R \cup \{u\}$ und setzen wir formell $u^\circ = u'$. Es sei $U = \{x \in R \mid x^\circ = u'\}$, $M = R \setminus U$. Nach Satz 8 erklären wir die SP-Ebenen $\mathcal{M}_T = (P, L, I), \mathcal{M}_{T'} = (P', L', I')$. Durch φ definieren wir eine Abbildung $\kappa: P \cup L \rightarrow P' \cup L'$ und weiter beweisen wir, daß κ ein Homomorphismus von $\mathcal{M}_T$ auf $\mathcal{M}_{T'}$ ist:

$$[x, y]\kappa = [x^\circ, y^\circ] \quad \forall (x, y) \in M \times M,$$

$$[x]\kappa = [x^\circ] \quad \forall x \in Q,$$

$$[x, y]\kappa = [0'] \quad \forall x \in U \quad \forall y \in M,$$

$$[x, y]\kappa = [u'] \quad \forall x \in M \quad \forall y \in U,$$

$$[x, y]\kappa = [m^\circ], \text{ wenn } x, y \in U \text{ und wenn es } k \in M, m \in R \text{ derart gibt, daß } y = t(x, m, k),$$

$$[x, y]\kappa = [u'], \text{ wenn } x, y \in U \text{ und wenn für ein beliebiges } m \in R \text{ aus } y = t(x, m, k) \text{ stets } k \in U \text{ folgt.}$$

$$\langle m, k \rangle \kappa = \langle m^\circ, k^\circ \rangle \quad \forall (m, k) \in M \times M,$$

$$\langle m \rangle \kappa = \langle m^\circ \rangle \quad \forall m \in Q,$$

$$\langle m, k \rangle \kappa = \langle 0' \rangle \quad \forall m \in U \quad \forall k \in M,$$

$\langle m, k \rangle \kappa = \langle u' \rangle \quad \forall m \in M \quad \forall k \in U,$
 $\langle m, k \rangle \kappa = \langle x^\circ \rangle$, wenn $m, k \in U$ und wenn es $x \in R, b \in M$ derart gibt, daß $b = t(x, m, k)$.
 $\langle m, k \rangle \kappa = \langle u' \rangle$, wenn $m, k \in U$ und wenn für ein beliebiges $x \in R$ aus $b = t(x, m, k)$ stets $b \in U$ folgt.

Satz 16. Die oben beschriebene Abbildung κ ist ein Homomorphismus der SP-Ebene $\mathcal{M}_T$ auf die SP-Ebene $\mathcal{M}_T$.

Beweis. I. Zunächst zeigen wir, daß κ wohl definiert ist.

- a) Die Einschränkung $\kappa|_P$ ist eine Abbildung: Es genügt nur den Fall $[x, y]$ für $x, y \in U$ nachzuprüfen. Gilt $y = t(x, m, k) \Rightarrow k \in U$ für alle $m \in R$, so $[x, y] \kappa = [u']$. Nehmen wir an, daß es ein $k \in M$ derart gibt, daß $y = t(x, m, k)$ für ein $m \in R$ gilt. Dann $[x, y] \kappa = [m^\circ]$. Gilt $y = t(x, m_1, k_1)$ für $k_1 \in M, m_1 \in R$, dann ist nach unserer Vorschrift $[x, y] \kappa = [m_1^\circ]$. Gemäß (P5) ergibt sich aber $m_1^\circ = m^\circ$.
- b) Die Einschränkung $\kappa|_L$ ist eine Abbildung: Es genügt nur den Fall $\langle m, k \rangle$ für $m, k \in U$ nachzuprüfen. Gilt $b = t(x, m, k) \Rightarrow b \in U$ für alle $x \in R$, dann $\langle m, k \rangle \kappa = \langle u' \rangle$. Nehmen wir an, daß es ein $b \in M$ derart gibt, daß $b = t(x, m, k)$ für ein $x \in R$ gilt. Dann $\langle m, k \rangle \kappa = \langle x^\circ \rangle$. Gilt zugleich $b_1 = t(x_1, m, k)$ für $b_1 \in M, x_1 \in R$, dann ist $\langle m, k \rangle \kappa = \langle x_1^\circ \rangle$. Gemäß (P6) ergibt sich aber $x^\circ = x_1^\circ$.

II. Nach Satz 8 ist $\mathcal{B} = ([0, 0], [1, 1], [0], [u])$ bzw. $\mathcal{B}' = ([0', 0'], [1', 1'], [0'], [u'])$ die Koordinatenvierecke von $\mathcal{M}_T$ bzw. $\mathcal{M}_T$. Nach Sätzen 6 und 1 gilt $0^\circ = 0'$ und $1^\circ = 1'$. Daraus erhält man $[0, 0] \kappa = [0^\circ, 0^\circ] = [0', 0'], [1, 1] \kappa = [1^\circ, 1^\circ] = [1', 1'], [0] \kappa = [0'], [u] \kappa = [u']$.

III. Wir beweisen, daß $s I r \Rightarrow s \kappa I' r \kappa \quad \forall s \in P \quad \forall r \in L$ gilt. Es sei also $s I r$. Zuerst nehmen wir $s = [x, y], r = \langle m, k \rangle$, also $y = t(x, m, k)$, an.

1. Es sei $(x, y) \in M \times M$. Dann gilt $[x, y] \kappa = [x^\circ, y^\circ]$.
 - a) Es seien $m, k \in M$. Nach (P1) ergibt sich $y = t(x, m, k) \Rightarrow y^\circ = t'(x^\circ, m^\circ, k^\circ)$, woraus $[x^\circ, y^\circ] I' \langle m^\circ, k^\circ \rangle$ und $[x, y] \kappa I' \langle m, k \rangle \kappa$ folgt.
 - b) Es seien $m \in M, k \in U$. Dann folgt aus (P4) entweder $x \in U$ oder $m \in U$, was ein Widerspruch ist. Dieser Fall kann also nicht eintreten.
 - c) Es seien $m \in U, k \in M$. Dann gilt $\langle m, k \rangle \kappa = \langle 0' \rangle$ und aus $y = t(x, m, k)$ folgt nach (P3) $x^\circ = 0'$. Wegen $[0', y^\circ] I' \langle 0' \rangle$ ergibt sich $[x, y] \kappa I' \langle m, k \rangle \kappa$.
 - d) Es seien $m, k \in U$. Da $y = t(x, m, k)$ mit $y \in M$ gilt, ergibt sich $\langle m, k \rangle \kappa = \langle x^\circ \rangle$ und $[x^\circ, y^\circ] I' \langle x^\circ \rangle$, was $[x, y] \kappa I' \langle m, k \rangle \kappa$ bedeutet.

2. Es sei $x \in M, y \in U$. Dann gilt $[x, y] \kappa = [u']$.

- a) Es seien $m, k \in M$. Nach (P1) gilt $t(x, m, k) \in M$, was ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung $y \in U$ ist. Dieser Fall kann also nicht eintreten.

- b) Es seien $m \in M, k \in U$. Dann erhält man $\langle m, k \rangle \kappa = \langle u' \rangle$. Wegen $[u'] I' \langle u' \rangle$ gilt $[x, y] \kappa I' \langle m, k \rangle \kappa$.
- c) Es seien $m \in U, k \in M$. Dann erhält man $\langle m, k \rangle \kappa = \langle 0' \rangle$. Wegen $[u'] I' \langle 0' \rangle$ gilt $[x, y] \kappa I' \langle m, k \rangle \kappa$.
- d) Es seien $m, k \in U$. Dann gilt $\langle m, k \rangle \kappa = \langle x' \rangle$ mit $x' \in Q'$ und wegen $[u'] I' \langle x' \rangle$ ergibt sich $[x, y] \kappa I' \langle m, k \rangle \kappa$.

3. Es sei $x \in U, y \in M$. Dann gilt $[x, y] \kappa = [0']$.

- a) Es seien $m, k \in M$. Nach (P2) folgt $m^\circ = 0'$ und wegen $[0'] I' \langle 0', k^\circ \rangle$ ergibt sich $[x, y] \kappa I' \langle m, k \rangle \kappa$.
- b) Es seien $m \in M, k \in U$. Dann gilt $\langle m, k \rangle \kappa = \langle u' \rangle$ und wegen $[0'] I' \langle u' \rangle$ ergibt sich $[x, y] \kappa I' \langle m, k \rangle \kappa$.
- c) Es seien $m \in U, k \in M$. Nach (P2) folgt aus der Gleichheit $y = t(x, m, k)$, daß $m^\circ = 0'$. Dies ist aber ein Widerspruch, denn $m \in U$.
- d) Es seien $m, k \in U$. Wegen $y = t(x, m, k)$ mit $y \in M$ gilt $\langle m, k \rangle \kappa = \langle x^\circ \rangle = \langle u' \rangle$. Aus $[0'] I' \langle u' \rangle$ folgt dann $[x, y] \kappa I' \langle m, k \rangle \kappa$.

4. Es sei $x, y \in U$.

- a) Es seien $m, k \in M$. Aus $y = t(x, m, k)$ mit $k \in M$ folgt $[x, y] \kappa = [m^\circ]$. Wegen $[m^\circ] I' \langle m^\circ, k^\circ \rangle$ ergibt sich $[x, y] \kappa I' \langle m, k \rangle \kappa$.
- b) Es seien $m \in M, k \in U$. Dann ist $\langle m, k \rangle \kappa = \langle u' \rangle$. Wegen $x, y \in U$ gilt $[x, y] \kappa = [n^\circ]$, wo $n \in Q$. Aus $[n^\circ] I' \langle u' \rangle$ folgt $[x, y] \kappa I' \langle m, k \rangle \kappa$.
- c) Es seien $m \in U, k \in M$. Dann ist $\langle m, k \rangle \kappa = \langle 0' \rangle$. Wegen $y = t(x, m, k)$ mit $k \in M$ ergibt sich $[x, y] \kappa = [m^\circ] = [u']$. Aus $[u'] I' \langle 0' \rangle$ folgt dann $[x, y] \kappa I' \langle m, k \rangle \kappa$.
- d) Es seien $m, k \in U$.
- α) Nehmen wir an, daß Elemente $a, b \in M$ mit $b = t(a, m, k)$ existieren. Dann gilt $\langle m, k \rangle \kappa = \langle a^\circ \rangle$. Gilt zugleich $y = t(x, m_1, k_1) \Rightarrow k_1 \in U$ für alle $m_1 \in R$, so ist $[x, y] \kappa = [u']$. Gibt es ein $k_1 \in M$ mit $y = t(x, m_1, k_1)$, dann gilt $[x, y] \kappa = [m_1^\circ]$. Aus $b = t(a, m, k)$, $y = t(x, m, k)$ und $y = t(x, m_1, k_1)$ folgt nach (P7) $m_1 \in U$, was wieder $[x, y] \kappa = [u']$ bedeutet. Wegen $[u'] I' \langle a^\circ \rangle$ ergibt sich also $[x, y] \kappa = \langle m, k \rangle \kappa$.
- β) Nehmen wir an, daß aus $b = t(a, m, k)$ entweder $a \in U$ oder $b \in U$ folgt. Dann gilt $\langle m, k \rangle \kappa = \langle u' \rangle$. Wegen $x, y \in U$ ist $[x, y] \kappa = [n^\circ]$ mit $n \in Q$. Aus $[n^\circ] I' \langle u' \rangle$ folgt dann $[x, y] \kappa I' \langle m, k \rangle \kappa$.

Es sei nun $s = [x, y], r = \langle x \rangle$. Dann gilt $\langle x \rangle \kappa = \langle x^\circ \rangle$.

- a) Aus $x, y \in M$ folgt $[x, y] \kappa = [x^\circ, y^\circ]$ und wegen $[x^\circ, y^\circ] I' \langle x^\circ \rangle$ ergibt sich $[x, y] \kappa I' \langle x \rangle \kappa$.