

Werk

Label: Article

Jahr: 1979

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0104|log18

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

JEŠTĚ O KOSTRÁCH SOUVISLÝCH GRAFŮ

Jiří SEDLÁČEK, Praha

(Došlo 10. srpna 1977)

Nechť G je konečný neorientovaný graf bez smyček a násobných hran a nechť $k(G)$ je počet jeho koster.¹⁾ Nechť je dáno přirozené číslo n . V práci [12] jsme definovali A_n jako množinu všech přirozených čísel m takových, že existuje souvislý graf G na n uzlech mající $k(G) = m$. Ukázali jsme, že

$$|A_1| = |A_2| = 1, \quad |A_3| = 2, \quad |A_4| = 5, \quad |A_5| = 16$$

a v dalším příspěvku [13] jsme našli odhad

$$|A_n| \geq \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4).$$

L. NEBESKÝ později sestrojil množinu A_6 (nepublikováno) a jak uvádí J. W. MOON v knížce [11], studoval odhady čísla $|A_n|$ také G. BARON na grafové konferenci v Oberwolfachu (1969).

V práci [13] jsme dále zavedli (při daných přirozených číslech n, t) množinu $B_n^{(t)}$ takto: je to množina všech přirozených čísel y takových, že existuje souvislý pravidelný graf G stupně t na n uzlech splňující vztah $k(G) = y$. V článku [13] jsme se zabývali případem $t = 3$ a ukázali jsme, že $|B_{2a}^{(3)}|$ roste nade všechny meze spolu s číslem a , což se dá intuitivně tušit. Příspěvek [15] se vrací k této problematice a řeší případ obecného t .

Vyšetřování kubických grafů (tj. pravidelných grafů 3. stupně) je technicky náročná záležitost. Označme $N(n)$ počet (neizomorfních) souvislých kubických grafů na n uzlech. Jak se najde ve [3], platí

$$N(4) = 1, \quad N(6) = 2, \quad N(8) = 5, \quad N(10) = 19,$$

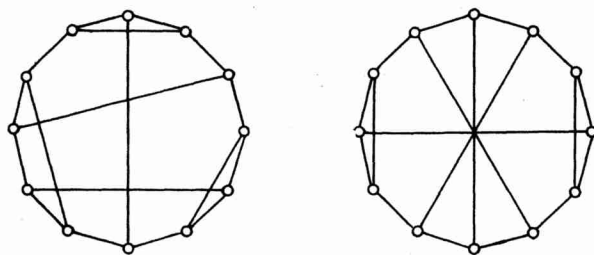
$$N(12) = 85, \quad N(14) = 509.$$

Je vidět, že je

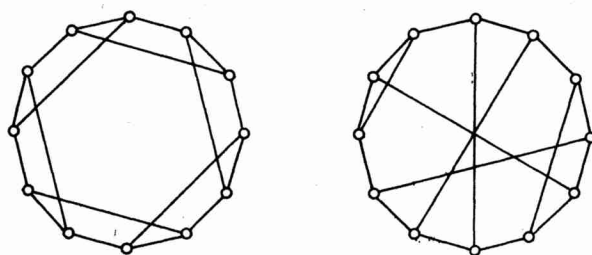
$$(1) \quad |B_{2a}^{(3)}| \leq N(2a),$$

¹⁾ Pojmy, jež v tomto příspěvku nejsou definovány, se najdou např. v knížce [18].

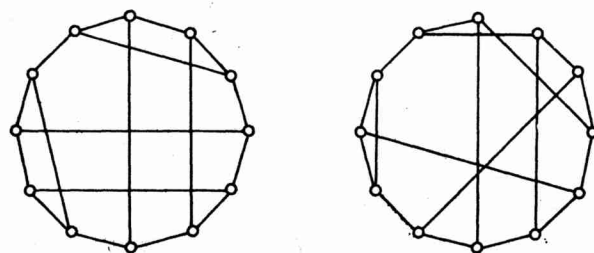
přičemž se můžeme přesvědčit, že pro $a = 2, 3, 4, 5$ platí v (1) rovnost. Lze zde využít výsledků z práce [3], kde se mj. najde tabulka všech souvislých kubických grafů s nejvýše-12 uzly. Pro 12 uzlů je možno najít dvojici neizomorfních souvislých kubických grafů, jež mají stejný počet koster. Na obr. 1 je jedna taková dvojice



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

(každý z grafů má 7280 koster), na obr. 2 dvojice druhá (8100 koster) a konečně na obr. 3 třetí (8640 koster). Další dvojice v této oblasti nejsou, takže $|B_{12}^{(3)}| = 82$. Pro ilustraci zde uvádíme všechny prvky množiny $B_{12}^{(3)}$. Jsou to

2112, 2520, 2640, 2808, 3072, 3584, 3840, 4080, 4096, 4360, 4480, 4500, 4608, 4720, 4875, 4992, 5016, 5104, 5130, 5184, 5250, 5368, 5535, 5544, 5632, 5712, 5824, 5832, 6000, 6235, 6240, 6320, 6435, 6555, 6580, 6720, 6765, 6771, 6875, 6885, 6912, 7003, 7050, 7140, 7280, 7300, 7344, 7350, 7392, 7424, 7467, 7485, 7520, 7560, 7569, 7797, 7840, 7938, 8100, 8103, 8112, 8131, 8165, 8256, 8284, 8323, 8580, 8640, 8736, 8820, 8901, 8950, 8960, 9000, 9170, 9216, 9240, 9291, 9464, 9568, 9747, 9800.

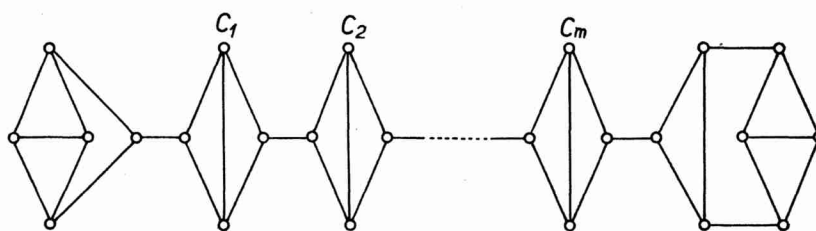
Tento výsledek dostaneme, užijeme-li práce [3]. Tam se totiž najdou též charakteristické mnohočleny $P(\lambda)$ uvažovaných grafů a také vždy příslušné spektrum

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n.$$

Jak známo, pro pravidelný graf G stupně r -tého na n uzlech platí

$$(2) \quad k(G) = \frac{1}{n} \prod_{i=2}^n (r - \lambda_i) = \frac{1}{n} P'(r),$$

což umožňuje určit počet koster. Ze vzorce (2) je vidět, že (při daném počtu uzlů) dostaneme dvojici souvislých kubických grafů se stejným počtem koster také tak,



Obr. 4

vezmeme-li dva grafy kospektrální. Přitom – jak známo – dva neizomorfní grafy se nazývají *kospektrální*, mají-li totéž spektrum. V práci [3] autoři našli tři páry kospektrálních kubických grafů na 14 uzlech a to je tedy pro nás další ilustrace.

Dá se očekávat, že u souvislých kubických grafů s větším počtem uzlů lze najít nejen dvojice se stejným počtem koster, ale i trojice, čtveřice atd. Označme $p(y, 2a)$ počet všech kubických grafů G na $2a$ uzlech, pro něž $k(G) = y$. Nechť

$$p(2a) = \max_{y \in B_{2a}^{(3)}} p(y, 2a).$$

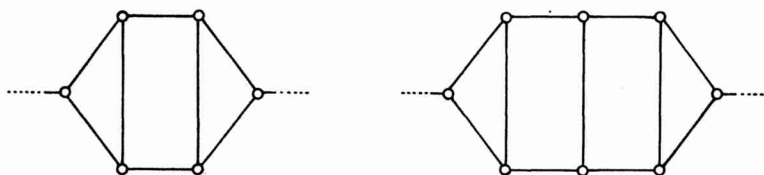
Je vidět, že $p(6) = p(8) = p(10) = 1$, $p(12) = 2$. Další věta se dá intuitivně tušit.

Věta 1. $\lim_{a \rightarrow \infty} p(2a) = \infty$.

Důkaz. Nechť a je přirozené číslo ≥ 9 ; položme

$$m = \left\lceil \frac{a-7}{2} \right\rceil$$

a sestrojme graf G_m na $4m + 12$ uzlech, jak ukazuje obr. 4. Konstruujme nyní $G_m^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) takto: Při a lichém (resp. sudém) nahraďme v G_m podgraf označený



Obr. 5

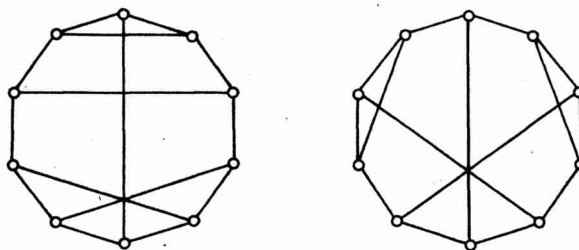
C_i podgrafem, jenž je v obr. 5 znázorněn vlevo (resp. vpravo). Pak $G_m^{(i)}$ je souvislý kubický graf na $2a$ uzlech, o němž platí²⁾

$$(3) \quad k(G_m^{(i)}) = 2112 \cdot 30^\tau \cdot 112^{1-\tau} \cdot 8^{m-1},$$

$$\tau = a - 2 \left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil.$$

Vztah (3) platí pro m hodnot parametru i , takže $p(2a) \geq m$. Odtud už plyne tvrzení.

Od kubických grafů se stejným počtem uzlů, jež mají i stejný počet koster, můžeme přejít k takovým, jejichž hodnoty $k(G)$ se od sebe jen málo liší. Tak na obr. 6 máme dva kubické grafy, každý na deseti uzlech. Graf vlevo má 1599 koster, vpravo 1600



Obr. 6

²⁾ Platnost vztahu (3) si ověříme, když si uvědomíme, že graf z obr. 4 má $24 \cdot 8^m$ koster, kdežto podgraf vlevo resp. vpravo v obr. 5 má 30 resp. 112 koster.

koster. Při $a \geq 3$ položme

$$(4) \quad B_{2a}^{(3)} = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_s\},$$

kde

$$y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_s,$$

a všimněme si funkce

$$f(a) = \min(y_i - y_{i-1})$$

(minimum uvažováno přes $i = 2, 3, \dots, s$). Platí např. $f(3) = 6, f(4) = 8, f(5) = 1, f(6) = 3$.

Věta 2. $f(a) \leq 2a$ pro $a = 3, 4, 5, \dots$

Důkaz. Pro Möbiusův žebřík M_{2a} jsme ve [14] našli

$$k(M_{2a}) = \frac{a}{2} ((2 + \sqrt{3})^a + (2 - \sqrt{3})^a + 2),$$

kdežto N. BIGGS uvádí, že graf a -bokého hranolu H_{2a} má

$$k(H_{2a}) = \frac{a}{2} ((2 + \sqrt{3})^a + (2 - \sqrt{3})^a - 2)$$

(nepublikováno). Odtud už plyne požadovaný odhad. Konec důkazu.

Při daném celém čísle a přijmeme označení (4) a položme

$$q_{2a} = \frac{y_s}{y_1}.$$

Je vidět, že

$$q_6 = 1,08, \quad q_8 \doteq 1,5313, \quad q_{10} \doteq 3,4722, \quad q_{12} \doteq 4,6402.$$

Dá se očekávat, že při vzrůstajících hodnotách a vzrůstá nade všechny meze též q_{2a} . To plyne třeba z důkazu věty 3 v práci [13]. Z ní lze odvodit existenci konstant c_1, c_2 tak, že pro všechna dostatečně velká a je

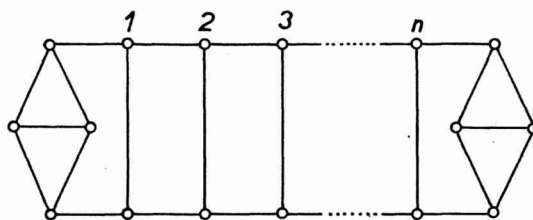
$$\lg q_{2a} \geq c_1 a + c_2, \quad c_1 > 0.$$

V další větě upozorňujeme ještě na jiný typ kubického grafu, u něhož lze počet koster vyjádřit jednoduchým vzorcem. Větu uvádíme bez důkazu.

Věta 3. Počet koster grafu z obr. 7 (kde $n = 0, 1, 2, \dots$) je

$$\frac{32}{\sqrt{3}} ((2 + \sqrt{3})^{n+2} - (2 - \sqrt{3})^{n+2}).$$

Nyní k jiné problematice. V pracích [16] a [17] jsme se zabývali otázkou, zda G je jednoznačně rekonstruovatelný ze všech svých koster. Přitom G byl konečný (nebo nekonečný) souvislý neorientovaný graf bez smyček a násobných hran. Přesná definice rekonstruovatelnosti je zcela obdobná jako u známé rekonstrukční domněnky



Obr. 7

Kellyho a Ulama (viz o ní např. přehledný článek [1]). Je-li G jednoznačně rekonstruovatelný ze všech svých koster, řekneme stručně, že je to JRK-graf.³⁾ Víme už, že příklady JRK-grafů jsou strom, kružnice, úplný graf, grafy „skoro úplné“, úplný sudý graf typu $\langle 2, m \rangle$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) a kolo W_n ($n = 3, 4, 5, \dots$). Dále jsme sestrojili příklad dvou neizomorfních grafů, každý na devíti uzlech, jež mají vzhledem k izomorfismu stejnou soustavu koster a nejsou proto JRK. Podobný příklad jsme sestrojili i pro grafy nekonečné. R. D. BOYLE [2] uvádí, že každý úplný sudý graf $\langle m, n \rangle$ je také JRK.

B. ZELINKA [21] popsal ty grafy, jejichž všechny kostry jsou navzájem izomorfní a ke stejnému výsledku nezávisle dospívají [5] a [6] (viz též [19], str. 50). B. L. HARTNELL [9] pak charakterizoval grafy, jejichž kostry se rozpadají vzhledem k izomorfismu do dvou tříd. Poznámku, že lze studovat grafy, jež mají právě g typů koster, nacházíme v závěru práce L. FRIESSE [6] a věnuje se jí B. L. HARTNELL [8]. Ten spolu s E. R. MEYEREM [10] popsal rovněž grafy s jednou kružnicí mající právě tři typy koster.

Z [21] přejímáme několik označení. Nechť k je liché přirozené číslo ($k \geq 3$), nechť T je strom a a jeho uzel. Grafem $G(k, T, a)$ rozumíme graf sestrojený takto: Nechť K je kružnice délky k , jejíž uzly jsou $u_1, u_2, \dots, u_k$. Nechť $T_1, T_2, \dots, T_k$ jsou stromy vesměs izomorfní s T a nechť a_i je uzel stromu T_i , jenž v izomorfismu odpovídá uzlu a stromu T . Ztotožněním a_i, u_i pro každé i dostáváme $G(k, T, a)$. Třidu všech možných $G(k, T, a)$ označíme $\mathfrak{G}_1$.

Dále nechť k je sudé přirozené číslo ($k \geq 4$), nechť T', T'' jsou stromy, nechť a' (resp. a'') je uzel stromu T' (resp. T''). Nechť kružnice K délky k má uzly $u_1, u_2, \dots, u_k$. Pro každé liché i ($1 \leq i \leq k$) budiž T_i strom⁴⁾, $T_i \cong T'$, pro každé sudé i budiž T_i

³⁾ V předcházejících pracích jsme užili anglické zkratky URST-graph (Uniquely Reconstructable from all its Spanning Trees).

⁴⁾ Píšeme $G_1 \cong G_2$, jsou-li G_1, G_2 izomorfní.

také strom, $T_i \cong T''$. Pro liché (resp. sudé) i nechť a_i je uzel stromu T_i odpovídající v izomorfismu uzlu a' (resp. a'') stromu T' (resp. T''). Ztotožněním a_i, u_i pro každé i dostaneme graf, jež označíme $G(k, T', a', T'', a'')$. Třída všech možných $G(k, T', a', T'', a'')$ budiž $\mathfrak{G}_2$.

V [5], [6] a [21] je ukázáno, že nutnou a postačující podmínkou, aby G měl všechny kostry spolu izomorfní, je, aby G byl buď strom nebo $G \in \mathfrak{G}_1$ nebo $G \in \mathfrak{G}_2$. V lemmatu 7 práce [21] je implicitně obsaženo, že všechny grafy z $\mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2$ jsou JRK. V příštím příkladě popíšeme, jak od koster nějakého $G \in (\mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2)$ dospět ke grafu G .

Příklad 1. Rekonstrukce grafu $G \in (\mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2)$.

Postup. Nechť S je kostra grafu G a nechť P je její průměrová cesta (tj. nejdelší cesta, jež se dá v S sestrojít). Graf G sestrojíme takto:

a) Je-li k liché, $k = 2m + 1$, pak $G \in \mathfrak{G}_1$. Označme a^* prostřední uzel cesty P a postupme od a^* po P na každou stranu o m hran. Dosažené uzly $^1a, ^2a$ spojíme (jsou určeny jednoznačně) a tím dostáváme G .

b) Je-li k sudé, $k = 2m$, pak $G \in \mathfrak{G}_2$. Je-li délka cesty P liché číslo, vyhledáme na P prostřední hranu a od ní na P odměříme jedním i druhým směrem vždy $m - 1$ hran. Dosažené uzly spojíme (jednoznačnost); tím je G sestrojen. Má-li P sudou délku, vyhledáme na P prostřední uzel a postupíme po P na každou stranu o $m - 1$ hran. Získáme tak uzly a_1, a_{k-1} , přičemž⁵⁾

$$1 + \text{st}(a_1, S) = \text{st}(a_{k-1}, S)$$

až na volbu označení uzlů a_i . Nechť a_1 (a tedy též a_{k-1}) odpovídá uzlu a' . Sestrojíme T_1 a postupně konstruujeme hrany stromu T_{k-1} ($T_{k-1} \cong T_1 \cong T'$). Tato konstrukce nemusí být jednoznačná. Sestrojíme-li celý strom T_{k-1} , zbývá jediná hrana $a_{k-1}a_k$ nepatřící ani do T_{k-1} , ani do P . Spojením a_k, a_1 vznikne G . Uzel a_k není na S určen jednoznačně, ale G vzhledem k izomorfismu je jednoznačný. Rekonstrukce je hotova.

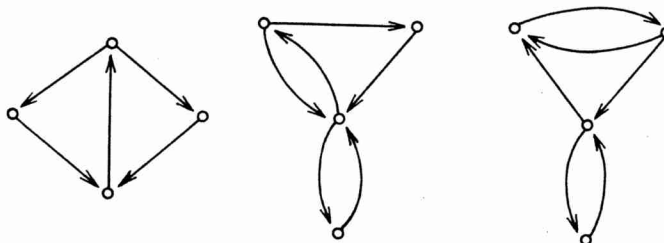
Nyní se pokusme převést problematiku JRK-grafů na grafy orientované. Místo souvislých grafů je přirozené uvažovat grafy silně souvislé bez smyček. Kterým pojmem máme nahradit kostru souvislého grafu? Vzpomeňme na to, co jsme v [4] nazvali W -stromem a též na to, čemu jsme ve vztahu k danému orientovanému grafu říkali W -báze. W -strom je orientovaný graf s jediným pramenem, který se „při zanedbání“ orientace stane stromem.⁶⁾ W -bází grafu $\vec{G}$ rozumíme graf $\vec{H}$, jenž je podgrafem v $\vec{G}$, obsahuje všechny uzly grafu $\vec{G}$ a každá jeho komponenta je W -strom. Pro účely tohoto článku budeme souvislou W -bázi nazývat W -kosta.

Snadno sestrojíme různé třídy silně souvislých grafů bez smyček, jež jsou jednoznačně rekonstruovatelné ze všech svých W -koster. Stačí vyjít z (neorientovaného)

⁵⁾ $\text{st}(x, G)$ značí stupeň uzlu x v grafu G .

⁶⁾ F. HARARY [7] užívá názvu *out-tree*.

JRK-grafu a každou jeho hranu uv nahradit dvěma hranami $\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{vu}$. Náš příklad popsáný v [16] ukazuje též, že existují silně souvislé grafy, jež nelze jednoznačně rekonstruovat z jejich W-koster. Jiný příklad tohoto typu ukazuje obr. 8. Tu vidíme tři silně souvislé grafy, každý na čtyřech uzlech. Snadno se můžeme přesvědčit, že všechny tři mají (vzhledem k izomorfismu) stejnou soustavu W-koster.



Obr. 8

Případ silně souvislých grafů na nejvýše dvou uzlech je triviální. Na třech uzlech existuje pět silně souvislých grafů bez smyček⁷⁾ a snadno se dá ukázat, že všechny jsou jednoznačně rekonstruovatelné ze svých W-koster. Jak je to s grafy o větším počtu uzlů?

Věta 4. *Ke každému přirozenému číslu $n \geq 4$ existuje silně souvislý graf na n uzlech, bez smyček a takový, že není jednoznačně rekonstruovatelný ze všech svých W-koster.*

Důkaz. Sestrojíme dva silně souvislé grafy

$$\vec{G}_i = [U, \Gamma_i], \quad i = 1, 2,$$

každý na n uzlech a mající vzhledem k izomorfismu stejnou soustavu W-koster. Stačí položit

$$U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$$

a zobrazení Γ_i definovat takto:

$$\Gamma_1(u_j) = \{u_{j+1}\}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n-2,$$

$$\Gamma_1(u_{n-1}) = \{u_1, u_n\},$$

⁷⁾ Upozorňuji na rozpor ve třech literárních pramenech. Podle tabulky uvedené na str. 162 v knížce [20] existuje na čtyřech uzlech celkem 90 silně souvislých grafů bez smyček. V knize [22] se na str. 256 uvádí, že jich je 83. Probíráme-li konečně tabulku všech orientovaných grafů bez smyček na čtyřech uzlech, jež je uvedena v dodatku ke knize [7], zjistíme, že jen 81 z nich je silně souvislých. Posledně zmíněná tabulka má však závalu i v tom, že grafy 18 a 22 s osmi hranami jsou zřejmě izomorfní.