Časopis pro pěstování matematiky, roč. 104 (1979), Praha

DÉFINITION AXIOMATIQUE DE LA MESURE DE HAUSDORFF

MILOSLAV JŮZA, Praha

(Reçu le 22 Octobre 1976)

1. INTRODUCTION

Par la mesure μ on comprend une fonction d'ensemble, σ-aditive et non-négative telle que $\mu(\emptyset) = 0$. La mesure est appelée *invariante* si la mesure des ensembles ne change pas par un mouvement euclidien. La notion de mesure invariante est une généralisation des notions de longueur, d'aire et de volume de la géométrie élémentaire.

H. LEBESGUE a défini (voir [1]), pour une large classe des ensembles de l'espace E_m, la mesure invariante qui, pour les figures géométriques élémentaires, est égale au volume dans le cas de $m = 3$, à l'aire dans le cas de $m = 2$ et à la longueur dans le cas de $m = 1$. On peut prouver qu'une telle mesure ne peut pas être définie pour tous les sous-ensembles de l'espace E_m (voir [7], chap. III, §7, théorème 1). Mais on peut, pour tous les sous-ensembles de l'espace E_m, définir une *mesure extérieure* qui n'est pas généralement σ-aditive, mais seulement σ-subaditive.

Dans la géométrie différentielle, on définit la longueur d'une courbe $x_i = x_i(t)$ dans E_2 ou dans E_3 comme l'intégrale de la fonction $(\sum_i (\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t)^2)^{1/2}$ (voir [10], chap. 2, §9, théorème 9.1) et l'aire de la surface dans E_3 comme l'intégrale du discriminant de la première forme fondamentale (voir [10], chap. 3, §36, définition 36.1). Des formules analogues sont valables également pour les courbes, surfaces et variétés de dimensions plus élevées dans l'espace E_m. Dans la géométrie différentielle, ces formules servent en règle générale comme les définitions de la mesure k-dimensionnelle. On motive de telles définitions par des considérations heuristiques et par le fait que, pour les figures élémentaires, la définition conduit à la définition élémentaire de la longueur, de l'aire et du volume. Mais il n'est pas évident du tout si la mesure k-dimensionnelle ne pourrait pas être définie d'une autre façon, plus convenable.

C. CARATHÉODORY et F. HAUSDORFF ont montré comment on peut définir la mesure (extérieure) k-dimensionnelle pour chaque sous-ensemble de l'espace E_m

(voir [2], [3]). Il y a beaucoup de telles définitions. F. Hausdorff a indiqué la démonstration du fait (voir [3], §7) que, pour une de ces définitions, on obtient pour les ensembles assez simples les valeurs de la longueur et de l'aire introduites dans la géométrie différentielle et que dans le cas de la mesure m-dimensionnelle dans E_m on obtient la mesure extérieure de Lebesgue. Mais même ici il n'est pas clair si l'on ne pourrait pas introduire une définition plus convenable de la mesure qui donnerait la longueur, l'aire et le volume habituels dans le cas des ensembles étudiés dans la géométrie différentielle.

Dans ce travail, nous allons définir la mesure k-dimensionnelle dans E_m axiomatiquement, c'est-à-dire nous allons exiger seulement quelques propriétés simples. Nous allons prouver que la mesure est définie par ces propriétés de façon unique sur une large classe d'ensembles et qu'elle est exprimée par les formules employées dans la géométrie différentielle dans le cas des variétés lisses et qu'elle est dans le cas de $k = m$ égale à la mesure de Lebesgue pour tous les ensembles mesurables au sens de Lebesgue.

2. LES AXIOMES ET QUELQUES SIMPLES CONSÉQUENCES

L'ensemble des nombres réels sera désigné par R, l'ensemble R élargi des éléments $+\infty$ et $-\infty$ sera désigné par R^*.

Soit E_m l'espace euclidien m-dimensionnel; le système de tous ses sous-ensembles sera désigné par $\mathscr{E}_m$. Si $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E_m$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in E_m$, alors la distance des points x, y est égale à

$$\varrho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}.$$

Si $\emptyset \neq A \subset E_m$, $\emptyset \neq B \subset E_m$, nous définissons

$$\varrho(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \varrho(x, y).$$

Soit k un nombre entier, $0 \leqq k \leqq m$. La fonction

$$\mu : \mathscr{E}_m \to R^*$$

sera appelée mesure métrique invariante k-dimensionnelle dans E_m, si les axiomes suivants sont satisfaits:

Axiome I. $\mu(\emptyset) = 0$.

Axiome II. $(A \in \mathscr{E}_m,\ B \in \mathscr{E}_m,\ A \subset B) \Rightarrow \mu(A) \leqq \mu(B)$.

Axiome III. $A_i \in \mathscr{E}_m$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots \Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Axiome IV. $(\emptyset \neq A \subset E_m, \emptyset \neq B \subset E_m, \varrho(A, B) > 0) \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Axiome V. *Si $A \subset E_m$, $B \subset E_m$ et s'il existe une application f de l'ensemble A sur l'ensemble B telle que pour chaque $x \in A$, $y \in A$ on a*

$$\varrho(f(x), f(y)) \leqq \varrho(x, y), \tag{2.1}$$

alors

$$\mu(B) \leqq \mu(A).$$

Axiome VI. *Si nous désignons*

$$J_k = \{(x_1, \ldots, x_m) \in E_m : 0 \leqq x_i \leqq 1 \quad pour \quad 1 \leqq i \leqq k; \\ x_i = 0 \quad pour \quad k < i \leqq m\}, \tag{2.2}$$

alors

$$0 < \mu(J_k) < \infty.$$

Le mesure μ sera appelée normée, si à la place de l'axiome VI a lieu le plus fort

Axiome VI'. $\mu(J_k) = 1$.

On dit que l'ensemble $M \subset E_m$ est μ-mesurable, si pour chaque ensemble $A \subset E_m$ a lieu

$$\mu(A) = \mu(A \cap M) + \mu(A - M).$$

Des axiomes I–IV on déduit

Théorème 2.1. *Soit μ la mesure métrique invariante k-dimensionnelle dans E_m, $0 \leqq k \leqq m$. Alors:*

(a) $\mu(A) \geqq 0$ *pour chaque ensemble* $A \subset E_m$.

(b) *Chaque ensemble borelien est μ-mesurable.*

(c) *Si $N \subset E_m$, $\mu(N) = 0$, alors N est μ-mesurable.*

(d) *Si $A \subset E_m$, $N \subset E_m$, $\mu(N) = 0$, alors $\mu(A \cup N) = \mu(A)$.*

(e) *Si $\{A_\iota\}_{\iota \in \mathfrak{M}}$ est un système dénombrable[1]) des ensembles μ-mesurables de l'espace E_m et si $A_\iota \cap A_\nu = \emptyset$ pour tous $\iota \subset \mathfrak{M}$, $\nu \subset \mathfrak{M}$, $\iota \neq \nu$, alors*

$$\mu(\bigcup_{\iota \in \mathfrak{M}} A_\iota) = \sum_{\iota \in \mathfrak{M}} \mu(A_\iota).$$

(f) *L'union et l'intersection d'un système dénombrable d'ensembles μ-mesurables sont des ensembles μ-mesurables. La différence de deux ensembles μ-mesurables est un ensemble μ-mesurable.*

---

[1]) Des ensembles finis sont considérés aussi comme dénombrables.

Démonstration.

(a) peut être déduit aisément des axiomes I et II.

(b) Voir [4], chap. 1, §4, théorème 19.

(c) Voir [4], chap. 1, §2, théorème 2(a).

(d) On a $A \subset A \cup N$, alors $\mu(A) \leqq \mu(A \cup N)$ d'après l'axiome II. Par contre, de l'axiome III on déduit (si on pose $A_i = \emptyset$ pour $i > 2$):

$$\mu(A \cup N) \leqq \mu(A) + \mu(N) = \mu(A)\,.$$

(e) Voir [4], chap. 1, §2, théorème 2(d).

(f) Voir [4], chap. 1, §2, théorème 2(b), (c).

Comme une conséquence de l'axiome V on obtient

Théorème 2.2. *Étant donné μ, une mesure métrique invariante k-dimensionnelle dans E_m $(0 \leqq k \leqq m)$, et $A \subset E_m$, $B \subset E_m$ étant deux ensembles isométriques (c'est-à-dire qu'il existe une application f de l'ensemble A sur l'ensemble B telle que $\varrho(f(x), f(y)) = \varrho(x, y)$ pour chaque couple de points $x \in A$, $y \in B$), alors $\mu(A) = = \mu(B)$.*

On prouve aussi aisément

Théorème 2.3. *Si $\bar{\mu}$ est une mesure métrique invariante k-dimensionnelle dans E_m $(0 \leqq k \leqq m)$ et si nous posons $\mu(A) = \bar{\mu}(A)/\bar{\mu}(J_k)$ pour chaque ensemble $A \subset E_m$, alors μ est une mesure métrique invariante k-dimensionnelle normée dans E_m.*

La mesure 0-dimensionnelle dans E_m est très simple. Cependant, on a le

Théorème 2.4. *Soit μ une mesure métrique invariante 0-dimensionnelle normée dans E_m. Soit $A \subset E_m$. Alors*

(a) *Si $A = \emptyset$, alors $\mu(A) = 0$.*

(b) *Si A contient un nombre fini de points, alors $\mu(A)$ est égale au nombre des points de l'ensemble A.*

(c) *Si A contient un nombre infini de points, alors $\mu(A) = \infty$.*

Démonstration.

(a) découle de l'axiome I.

(b) J_0 est l'ensemble contenant un seul point $(0, 0, \ldots, 0)$, alors d'après l'axiome VI' et d'après le théorème 2.2, la mesure de chaque ensemble contenant un seul point égale 1. Si A est un ensemble contenant précisément p points $(p > 1)$, alors on peut écrire $A = B \cup C$, ou B contient $p - 1$ points et C contient un seul point. On a $\varrho(B, C) > 0$, alors d'après l'axiome IV $\mu(A) = \mu(B) + \mu(C) = \mu(B) + 1$. Par induction on obtient d'ici que la mesure de l'ensemble contenant p points est p.

(c) A étant un ensemble infini, il contient un ensemble de p points pour chaque p naturel, alors d'après l'axiome II on a $\mu(A) = \infty$.

3. RÉALISABILITÉ DU SYSTÈME DES AXIOMES

Théorème 3.1. *Soit $0 \leqq k \leqq m$. Alors il existe dans E_m une mesure métrique invariante k-dimensionnelle normée μ.*

Démonstration.

I. Si $k = 0$, il suffit de prendre pour $\mu(A)$ le nombre de points de l'ensemble A.

II. Soit $k > 0$. Pour $A \subset E_m$ définissons

$$d(A) = \sup_{\substack{x \in A \\ y \in A}} \varrho(x, y) \quad \text{pour} \quad A \neq \emptyset\,, \quad d(\emptyset) = 0\,.$$

Ensuite définissons pour $\varepsilon > 0$:

$$\nu_\varepsilon(A) = \inf \sum_\iota (d(K_\iota))^k\,,$$

où l'on prend l'infimum par tous les systèmes dénombrables $\{K_\iota\}$ tels que $\bigcup_\iota K_\iota \supset A$, $d(K_\iota) \leqq \varepsilon$. Enfin définissons

$$\nu(A) = \sup_{\varepsilon > 0} \nu_\varepsilon(A)\,.$$

La fonction ν satisfait aux axiomes I–IV (voir [4], chap. II, §1, théorèmes 27 et 28). Nous allons prouver qu'elle satisfait aussi à l'axiome V. Cependant, ayons des ensembles $A \subset E_m$, $B \subset E_m$ et une application f de l'ensemble A sur l'ensemble B telle que (2.1) a lieu. L'ensemble A soit couvert par le système d'ensembles $\{K_\iota\}$. Définissons $K'_\iota = K_\iota \cap A$, $K''_\iota = f(K'_\iota)$. Alors le système $\{K''_\iota\}$ couvre l'ensemble B. Ensuite, compte tenu de (2.1) on a $\mathrm{d}(K''_\iota) \leqq \mathrm{d}(K'_\iota) \leqq \mathrm{d}(K_\iota)$. Donc si $\mathrm{d}(K_\iota) \leqq \varepsilon$, on a aussi $d(K''_\iota) \leqq \varepsilon$; ensuite $\sum_\iota (d(K''_\iota))^k \leqq \sum_\iota (d(K_\iota))^k$, d'où $\nu_\varepsilon(B) \leqq \nu_\varepsilon(A)$ pour chaque $\varepsilon > 0$, donc aussi $\nu(B) \leqq \nu(A)$.

Il reste à prouver que ν satisfait à l'axiome VI.

III. Tout d'abord nous allons prouver (pour l'ensemble J_k défini dans (2.2)) que $\nu(J_k) < \infty$. Soit donné un nombre $\varepsilon > 0$. Choisissons un nombre naturel n tel que $n > k^{1/2}\varepsilon^{-1}$. Définissons

$$K_{j_1, j_2, \ldots, j_k} = \Big\{(x_1, \ldots, x_m) \in E_m : \frac{j_i - 1}{n} \leqq x_i \leqq \frac{j_i}{n} \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq k\,;$$
$$x_i = 0 \quad \text{pour} \quad k < i \leqq m\Big\}\,.$$

Nous avons

$$J_k \subset \bigcup_{j_1=1}^{n} \dots \bigcup_{j_k=1}^{n} K_{j_1,\dots,j_k}.$$

Si $x = (x_1, \dots, x_m) \in K_{j_1,\dots,j_k}$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in K_{j_1,\dots,j_k}$, alors $|x_i - y_i| \leqq n^{-1} < \varepsilon k^{-1/2}$ pour $1 \leqq i \leqq k$, $|x_i - y_i| = 0$ pour $k < i \leqq m$, alors

$$\varrho(x, y) = (\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2)^{1/2} \leqq (kn^{-2})^{1/2} = k^{1/2}n^{-1} < \varepsilon ,$$

d'où $d(K_{j_1,\dots,j_k}) \leqq k^{1/2}n^{-1} < \varepsilon$. Ensuite

$$\sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_k=1}^{n} (d(K_{j_1,\dots,j_k}))^k \leqq n^k(k^{1/2}n^{-1})^k = k^{k/2} ,$$

alors pour chaque $\varepsilon > 0$ on a $\nu_\varepsilon(J_k) \leqq k^{k/2}$, d'où $\nu(J_k) = \sup_{\varepsilon>0} \nu_\varepsilon(J_k) \leqq k^{k/2} < \infty$.

IV. Un peu plus difficile sera la démonstration que $\nu(J_k) > 0$. Tout d'abord nous allons introduire ces notations: Ayons des nombres $a_1 \leqq b_1$, $a_2 \leqq b_2, \dots, a_k \leqq b_k$, alors l'ensemble

$$K = \{(x_1, \dots, x_m) \in E_m : a_i \leqq x_i \leqq b_i \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq k ;$$
$$x_i = 0 \quad \text{pour} \quad k < i \leqq m\} ,$$

sera appelé parallélépipède k-dimensionnel. Nous allons designer

$$\lambda(K) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_k - a_k) . \tag{3.1}$$

Si $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ sont deux systèmes de parallélépipèdes k-dimensionnels, nous dirons que le système $\mathfrak{M}'$ s'est produit du système $\mathfrak{M}$ par la division par le hyperplan $x_i = c_i$ $(1 \leqq i \leqq k)$, si les parallélépipèdes $K \in \mathfrak{M}$, pour lesquels $a_i < c_i < b_i$, ont été remplacés par le couple de parallélépipèdes

$$K' = \{(x_1, \dots, x_m) \in E_m : a_i \leqq x_i \leqq c_i;$$
$$a_j \leqq x_j \leqq b_j \quad \text{pour} \quad 1 \leqq j \leqq k, j \neq i; \; x_j = 0 \quad \text{pour} \quad k < j \leqq m\} ,$$
$$K'' = \{(x_1, \dots, x_m) \in E_m : c_i \leqq x_i \leqq b_i;$$
$$a_j \leqq x_j \leqq b_j \quad \text{pour} \quad 1 \leqq j \leqq k, j \neq i; \; x_j = 0 \quad \text{pour} \quad k < j \leqq m .$$

On prouve aisément

Lemme 3.1. *Si $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ sont deux systèmes dénombrables de parallélépipèdes k-dimensionnels et si le système $\mathfrak{M}'$ s'est produit de $\mathfrak{M}$ par les divisions successives par des hyperplans, alors*

$$\sum_{K\in\mathfrak{M}'} \lambda(K) \leqq \sum_{K\in\mathfrak{M}} \lambda(K) .$$

Si le système $\mathfrak{M}$ est formé par un seul parallélépipède, on a le signe d'égalité. (Dans le cas général, on peut y avoir le signe de l'inégalité, même si quelques parallélépipèdes se répètent à la division, mais on ne les compte dans $\mathfrak{M}'$ qu'une fois.)

Maintenant nous allons prouver

Lemme 3.2. *Soit $\mathfrak{M}$ un système dénombrable de parallélépipèdes k-dimensionnels $K_1, K_2, \ldots$ tel que $\bigcup_{K_\iota \in \mathfrak{M}} K_\iota \supset J_k$. Alors $\sum_{K_\iota \in \mathfrak{M}} \lambda(K_\iota) \geqq 1$.*

Démonstration du lemme 3.2. Supposons que $\sum_{K_\iota \in \mathfrak{M}} \lambda(K_\iota) < 1$. Posons $\varepsilon = 1 - \sum_{K_\iota \in \mathfrak{M}} \lambda(K_\iota)$. A chaque parallélépipède

$$K_\iota = \{(x_1, \ldots, x_m) \in E_m : a_{i,\iota} \leqq x_i \leqq b_{i,\iota} \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq k\,; \\ x_i = 0 \quad \text{pour} \quad k < i \leqq m\}$$

il existe un parallélépipède

$$\tilde{K}_\iota = \{(x_1, \ldots, x_m) \in E_m : \tilde{a}_{i,\iota} \leqq x_i \leqq \tilde{b}_{i,\iota} \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq k\,; \\ x_i = 0 \quad \text{pour} \quad k < i \leqq m\}$$

tel que

$$\tilde{a}_{i,\iota} < a_{i,\iota}\,, \quad \tilde{b}_{i,\iota} > b_{i,\iota}\,, \quad \lambda(\tilde{K}_\iota) < \lambda(K_\iota) + \varepsilon 2^{-\iota}\,.$$

Alors

$$\sum_{K_\iota \in \mathfrak{M}} \lambda(\tilde{K}_\iota) < \sum_{K_\iota \in \mathfrak{M}} (\lambda(K_\iota) + \varepsilon 2^{-\iota}) = \sum_{K_\iota \in \mathfrak{M}} \lambda(K_\iota) + \varepsilon = 1$$

et l'ensemble J_k est couvert par les ensembles

$$\tilde{K}_\iota^0 = \{(x_1, \ldots, x_m) \in E_m : \tilde{a}_{i,\iota} < x_i < \tilde{b}_{i,\iota} \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq k\,; \\ x_i = 0 \quad \text{pour} \quad k < i \leqq m\}\,.$$

D'après le théorème de Borel, l'ensemble J_k est couvert déjà par un nombre fini d'ensembles $\tilde{K}_\iota^0$, par ex. par les ensembles $\tilde{K}_1^0, \tilde{K}_2^0, \ldots, \tilde{K}_n^0$, donc aussi par les ensembles $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \ldots, \tilde{K}_n$. Il reste naturellement

$$\sum_{\iota=1}^{n} \lambda(\tilde{K}_\iota) < 1\,.$$

Si nous divisons le système des parallélépipèdes $\tilde{K}_1, \ldots, \tilde{K}_n$ par les hyperplans $x_i = \tilde{a}_{i,\iota}$, $x_i = \tilde{b}_{i,\iota}$, $x_i = 0$, $x_i = 1$ $(i = 1, \ldots, k;\ \iota = 1, \ldots, n)$ et si nous prenons seulement une fois les parallélépipèdes qui se répètent, nous obtenons le système $\mathfrak{M}'$. D'après le lemme 3.1 nous avons

$$\sum_{K_\iota' \in \mathfrak{M}'} \lambda(K_\iota') \leqq \sum_{\iota=1} \lambda(\tilde{K}_\iota) < 1\,.$$

Soit $\mathfrak{M}''$ le système de parallélépipèdes du système $\mathfrak{M}'$, formé par les parallélépipèdes K'_ι, pour lesquels on a $K'_\iota \subset J_k$. On a de même

$$\sum_{K_\iota' \in \mathfrak{M}''} \lambda(K'_\iota) < 1 .$$

Mais le système $\mathfrak{M}''$ peut être obtenu aussi par la division d'un seul parallélépipède J_k, alors d'après le lemme 3.1 on a

$$\sum_{K_\iota' \in \mathfrak{M}''} \lambda(K'_\iota) = \lambda(J_k) = 1 ,$$

ce qui est une contradiction. Le lemme 3.2 est alors prouvé.

Lemme 3.3. *Soit $\mathfrak{M}$ un système dénombrable d'ensembles $\{M_\iota\}$ tel que $\bigcup_{M_\iota \in \mathfrak{M}} M_\iota \supset J_k$. Alors $\sum_{M_\iota \in \mathfrak{M}} (d(M_\iota))^k \geqq 1$.*

Démonstration du lemme 3.3. Posons $L_\iota = M_\iota \cap J_k$. Soit C l'ensemble des ι, pour lesquels $L_\iota \neq 0$. Alors

$$\bigcup_{\iota \in C} L_\iota \supset J_k , \quad \sum_{M_\iota \in \mathfrak{M}} (d(M_\iota))^k \geqq \sum_{\iota \in C} (d(M_\iota))^k \geqq \sum_{\iota \in C} (d(L_\iota))^k ; \tag{3.2}$$

pour $(x_1, \ldots, x_m) \in L_\iota$ on a $x_i = 0$ pour $i > k$. Nous allons définir $a_{\iota,i}$ $(i = 1, \ldots, k)$ comme la borne inférieure, $b_{\iota,i}$ comme la borne supérieure des nombres x_i tels qu'il existe un point $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \in L_\iota$. Si $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, 0, \ldots, 0) \in$ $\in L_\iota$, $y = (y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0) \in L_\iota$, alors pour $i = 1, \ldots, k$ nous avons

$$x_i - y_i \leqq |x_i - y_i| \leqq \sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2 = \varrho(x, y) \leqq d(L_\iota) ,$$

donc aussi

$$b_{\iota,i} - a_{\iota,i} = \sup_{x \in L_\iota} x_i - \inf_{y \in L_\iota} y_i \leqq d(L_\iota) ,$$

alors

$$(d(L_\iota))^k \geqq \prod_{i=1}^{k} (b_{\iota i} - a_{\iota i}) . \tag{3.3}$$

Si nous définissons K_ι comme le parallélépipède

$$K_\iota = \{(x_1, \ldots, x_m) \in E_m : a_{\iota i} \leqq x_i \leqq b_{\iota i} \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq k ;$$
$$x_i = 0 \quad \text{pour} \quad k < i \leqq m\} ,$$

nous avons $K_\iota \supset L_\iota$, alors d'après (3.2) a $\bigcup_{\iota \in C} K_\iota \supset J_k$. Selon le lemme 3.2 on a donc

$$\sum_{\iota \in C} \lambda(K_\iota) \geqq 1 ,$$

d'où il découle, compte tenu de (3.2), (3.3) et (3.1), le lemme 3.3.

Du lemme 3.3 il découle que pour chaque $\varepsilon > 0$ on a $\nu_\varepsilon(J_k) \geqq 1$, donc aussi $\nu(J_k) \geqq 1$.

V. Selon II–IV, ν est une mesure métrique invariante k-dimensionnelle, alors d'après le théorème 2.3 la fonction

$$\mu : A \mapsto \frac{\nu(A)}{\nu(J_k)}$$

est une mesure métrique invariante k-dimensionnelle normée.

Nous appelerons la mesure μ construite dans la démonstration du théorème 3.1 *mesure de Hausdorff k-dimensionnelle standarde.*

4. CAS $0 < k = m$

Si $a \leqq b$ sont deux nombres réels, alors l'ensemble $\boldsymbol{i}$ des nombres x, pour lesquels $a \leqq x \leqq b$ resp. $a < x < b$ resp. $a \leqq x < b$ resp. $a < x \leqq b$, sera appelé *intervalle borné* 1-*dimensionnel* avec les extrémités a, b. Le nombre $l(\boldsymbol{i}) = b - a$ sera appelé se *longueur*. L'intervalle sera appelé *dégéneré*, si $a = b$. L'ensemble

$$I = \boldsymbol{i}_1 \times \boldsymbol{i}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{i}_k \subset E_k\,, \tag{4.1}$$

où $\boldsymbol{i}_j$ sont des intervalles bornés 1-dimensionnels, sera appelé *intervalle borné* dans E_k. L'intervalle $\boldsymbol{I}$ sera appelé dégéneré, si un au moins des intervalles $\boldsymbol{i}_j$ est dégéneré.

Théorème 4.1. *Soit $k > 0$ et μ soit une mesure métrique invariante k-dimensionnelle dans E_k. Ayons des nombres $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2, \ldots, a_k < b_k$ et définissons l'ensemble $\boldsymbol{I}$ à l'aide de* (4.1), *où*

$$\boldsymbol{i}_j = \{x : a_j \leqq r \leqq b_j\}\,. \tag{4.2}$$

Alors

$$\mu(I) = \mu(J_k) \prod_{j=1}^{k} (b_j - a_j)\,, \tag{4.3}$$

l'ensemble J_k étant donné par la formule (2.2) *avec $k = m$.*

Démonstration. I. $\boldsymbol{I}$ étant défini à l'aide de (4.1) et (4.2). $\boldsymbol{I}'$ à l'aide de

$$I' = \boldsymbol{i}'_1 \times \boldsymbol{i}'_2 \times \ldots \times \boldsymbol{i}'_k \subset E_k\,; \quad \boldsymbol{i}'_j = \{x : a'_j \leqq x \leqq b'_j\}\,; \tag{4.4}$$

et $b'_j - a'_j = b_j - a_j$ ayant lieu pour $j = 1, \ldots, k$, alors $\mu(\boldsymbol{I}') = \mu(\boldsymbol{I})$. Cela découle du théorème 2.2.

II. Soit I défini à l'aide de (4.1) et (4.2), I' à l'aide de (4.4) et soit $b'_j - a'_j = n_j(b_j - a_j)$ pour $j = 1, \ldots, k$, où n_j sont des nombres naturels. Alors

$$\mu(I') \leqq \mu(I) \prod_{j=1}^{k} n_j . \tag{4.5}$$

Cependant, définissons pour $1 \leqq \gamma_j \leqq n_j$ les ensembles

$$I_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k} =$$
$$= \{(x_1, \ldots, x_k) \in E_k : a'_j + (\gamma_j - 1)(b_j - a_j) \leqq x_j \leqq a'_j + \gamma_j(b_j - a_j)\} .$$

D'après I nous avons $\mu(I_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k}) = \mu(I)$; puis

$$I' = \bigcup_{\gamma_1=1}^{n_1} \bigcup_{\gamma_2=1}^{n_2} \ldots \bigcup_{\gamma_k=1}^{n_k} I_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k} ,$$

d'où on obtient (4.5) d'après l'axiome III.

III. Soit I défini à l'aide de (4.1) et (4.2), I' à l'aide de (4.4) et soit $b'_j - a'_j = n_j(b_j - a_j)$ pour $j = 1, \ldots, k$, où n_j sont des nombres naturels. Alors

$$\mu(I') = \mu(I) \prod_{j=1}^{k} n_j . \tag{4.6}$$

Vu (4.5) il suffit de prouver: si $0 < \delta < 1$, alors

$$\mu(I') \geqq \delta \, \mu(I) \prod_{j=1}^{k} n_j . \tag{4.7}$$

Pour prouver (4.7), choisissons un nombre naturel n tel que $n > (1 - \delta^{1/k})^{-1}$ et définissons les ensembles

$$I_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k} = \left\{(x_1, \ldots, x_k) \in E_k : a'_j + \left(\frac{\gamma_j}{n^2 n_j^2} + \frac{\gamma_j - 1}{n n_j}\right) . \right.$$
$$\left. . (b'_j - a'_j) \leqq x_j \leqq a'_j + \left(\frac{\gamma_j}{n^2 n_j^2} + \frac{\gamma_j}{n n_j}\right)(b'_j - a'_j) \right\}$$

pour $1 \leqq \gamma_j \leqq n n_j - 1$; $j = 1, \ldots, k$. Le parallélépipède $I_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k}$ a la longueur de la j-ème arête $(b'_j - a'_j)/n n_j = (b_j - a_j)/n$, alors d'après (4.5) on a

$$\mu(I_{\gamma_1, \ldots, \gamma_k}) \geqq n^{-k} \mu(I) . \tag{4.8}$$

La distance de chaque parallélépipède $I_{\gamma_1, \ldots, \gamma_k}$ de l'union des autres n'est pas plus petite que

$$\min_{1 \leqq j \leqq k} n^{-2} n_j^{-2} (b'_j - a'_j) > 0 ,$$

alors on déduit de l'axiome IV que

$$\mu\Big(\bigcup_{\gamma_1=1}^{nn_1-1}\bigcup_{\gamma_2=1}^{nn_2-1}\cdots\bigcup_{\gamma_k=1}^{nn_k-1} I_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_k}\Big) = \sum_{\gamma_1=1}^{nn_1-1}\sum_{\gamma_2=1}^{nn_2-1}\cdots\sum_{\gamma_k=1}^{nn_k-1}\mu(I_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_k}),$$

alors compte tenu de (4.8) on obtient

$$\mu\Big(\bigcup_{\gamma_1=1}^{nn_1-1}\cdots\bigcup_{\gamma_k=1}^{nn_k-1} I_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k}\Big) \geqq n^{-k}\mu(I)\prod_{j=1}^{k}(nn_j-1) = \mu(I)\prod_{j=1}^{k}\left(n_j-\frac{1}{n}\right).$$

Comme

$$I' \supset \bigcup_{\gamma_1=1}^{nn_1-1}\cdots\bigcup_{\gamma_k=1}^{nn_k-1} I_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k},$$

on obtient d'ici d'après l'axiome II:

$$\mu(I') \geqq \mu(I)\prod_{j=1}^{k}\left(n_j-\frac{1}{n}\right) = \mu(I)\Big(\prod_{j=1}^{k}n_j\Big)\Big(\prod_{j=1}^{k}(1-n^{-1}n_j^{-1})\Big).$$

Mais $n^{-1} < 1-\delta^{1/k}$, donc $n^{-1}n_j^{-1} \leqq n^{-1} < 1-\delta^{1/k}$, $1-n^{-1}n_j^{-1} > \delta^{1/k}$, $\prod_{j=1}^{k}(1-n^{-1}n_j^{-1}) > \delta$; parce que $\mu(I) \geqq 0$ d'après le théorème 2.1(a), on obtient d'ici (4.7).

IV. Soit I défini à l'aide de (4.1) et (4.2), I' à l'aide de (4.4) et soit $b_j'-a_j' = r_j(b_j-a_j)$ pour $j=1,\ldots,k$, où r_j sont des nombres rationnels positifs. Alors

$$\mu(I') = \mu(I)\prod_{j=1}^{k}r_j. \tag{4.9}$$

Cependant, soit $r_j = p_jq_j^{-1}$, où p_j, q_j sont des nombres naturels. Choisissons des nombres a_j'', b_j'' tels que $b_j''-a_j'' = q_j^{-1}(b_j-a_j)$; on a donc $b_j'-a_j' = p_j(b_j''-a_j'')$. Si

$$I'' = \{(x_1,\ldots,x_k)\in E_k : a_j'' \leqq x_j \leqq b_j''\},$$

alors d'après (4.6) on a

$$\mu(I') = \mu(I'')\prod_{j=1}^{k}p_j,\quad \mu(I'') = \mu(I)\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{q_j},$$

d'où l'on obtient (4.9).

V. Soit I défini à l'aide de (4.1) et (4.2), I' à l'aide de (4.4) et soit $b_j'-a_j' = \alpha_j(b_j-a_j)$ pour $j=1,\ldots,k$, où α_j sont des nombres réels positifs. Alors

$$\mu(I') = \mu(I)\prod_{j=1}^{k}\alpha_j. \tag{4.10}$$

Cependant, ε étant un nombre positif arbitraire, il existe des nombres rationnels ϱ_j, r_j tels que

$$(4.11) \qquad 0 < \varrho_j < \alpha_j < r_j\,, \quad \prod_{j=1}^{k} \alpha_j - \varepsilon < \prod_{j=1}^{k} \varrho_j\,, \quad \prod_{j=1}^{k} r_j < \prod_{j=1}^{k} \alpha_j + \varepsilon\,.$$

Définissons

$$\boldsymbol{M} = \{(x_1, \ldots, x_k) \in E_k : a'_j \leqq x_j \leqq a'_j + \varrho_j(b_j - a_j)\}\,,$$

$$\boldsymbol{N} = \{(x_1, \ldots, x_k) \in E_k : a'_j - x_j \leqq a'_j + r_j(b_j - a_j)\}\,.$$

Alors $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{I}' \subset \boldsymbol{N}$, donc d'après l'axiome II on a $\mu(\boldsymbol{M}) \leqq \mu(\boldsymbol{I}') \leqq \mu(\boldsymbol{N})$. Mais d'après (4.9) on a

$$\mu(\boldsymbol{M}) = \mu(\boldsymbol{I}) \prod_{j=1}^{k} \varrho_j\,, \quad \mu(\boldsymbol{N}) = \mu(\boldsymbol{I}) \prod_{j=1}^{k} r_j\,,$$

alors nous avons selon (4.11) (parce que $\mu(\boldsymbol{I}) \geqq 0$ d'après le théorème 2.1(a)):

$$\mu(\boldsymbol{I}) \Big(\prod_{j=1}^{k} \alpha_j - \varepsilon \Big) \leqq \mu(\boldsymbol{I}) \prod_{j=1}^{k} \varrho_j \leqq \mu(\boldsymbol{I}') \leqq \mu(\boldsymbol{I}) \prod_{j=1}^{k} r_j \leqq \mu(\boldsymbol{I}) \Big(\prod_{j=1}^{k} \alpha_j + \varepsilon \Big)\,.$$

Comme $\varepsilon > 0$ a été arbitraire, on obtient d'ici (4.10).

VI. La formule (4.3) découle de (4.10), si l'on pose $b'_j = 1$, $a'_j = 0$, $\alpha_j = (b_j - a_j)^{-1}$ pour $j = 1, \ldots, k$.

Théorème 4.2. *Soit $k > 0$ et soit μ une mesure métrique invariante k-dimensionnelle dans E_k. Ayons des nombres $a_1 \leqq b_1$, $a_2 \leqq b_2, \ldots, a_k \leqq b_k$ et définissons l'ensemble $\boldsymbol{I}$ à l'aide de (4.1), où $\boldsymbol{i}_j$ sont des intervalles bornés 1-dimensionnels avec les extrémités a_j, b_j. Alors (4.3) a lieu. Spécialement, si la mesure μ est normée, nous avons*

$$(4.12) \qquad \mu(\boldsymbol{I}) = \prod_{j=1}^{k} (b_j - a_j)\,.$$

Démonstration. I. Supposons tout d'abord que l'intervalle $\boldsymbol{I}$ n'est pas dégéneré. Alors il existe des nombres $\alpha_{j,n}$, $\beta_{j,n}$ ($j = 1, \ldots, k$; $n = 1, 2, \ldots$) tels que

$$(4.13) \qquad a_j < \alpha_{j,n} < \beta_{j,n} < b_j\,, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = a_j\,, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_{j,n} = b_j\,.$$

Désignons

$$\boldsymbol{M}_n = \{(x_1, \ldots, x_k) \in E_k : \alpha_{j,n} \leqq x_j \leqq \beta_{j,n}\}\,,$$

$$\boldsymbol{M} = \{(x_1, \ldots, x_k) \in E_k : a_j \leqq x_j \leqq b_j\}\,.$$

Nous avons $\boldsymbol{M}_n \subset \boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{M}$, alors d'après l'axiome II on a $\mu(\boldsymbol{M}_n) \leqq \mu(\boldsymbol{I}) \leqq \mu(\boldsymbol{M})$. Mais d'après le théorème 4.1 on a

$$\mu(M) = \mu(J_k)\prod_{j=1}^{k}(b_j - a_j)\,,$$

$$\mu(M_n) = \mu(J_k)\prod_{j=1}^{k}(\beta_{j,n} - \alpha_{j,n})\,;$$

étant $\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{k}(\beta_{j,n} - \alpha_{j,n}) = \prod_{j=1}^{k}(b_j - a_j)$ selon (4.13), il découle d'ici (4.3).

II. L'intervalle I soit dégéneré, p. ex. soit $a_k = b_k$. Choisissons des nombres α_j, β_j $(j = 1, \ldots, k-1)$ tels que $\alpha_j < a_j \leqq b_j < \beta_j$. Soit ε un nombre positif arbitraire et définissons l'ensemble

$$M_\varepsilon = \{(x_1, \ldots, x_k) \in E_k : \alpha_j \leqq x_j \leqq \beta_j \quad \text{pour}$$
$$j = 1, \ldots, k-1;\ a_k - \varepsilon \leqq x_k \leqq a_k + \varepsilon\}\,.$$

Alors $I \subset M_\varepsilon$ et d'après l'axiome II et le théorème 4.1 nous obtenons

$$\mu(I) \leqq \mu(M_\varepsilon) = \mu(J_k)\,2\varepsilon\prod_{j=1}^{k-1}(\beta_j - \alpha_j)\,.$$

Comme ε est un nombre positif arbitraire, il découle d'ici (vu le théorème 2.1(a)) que $\mu(I) = 0$. Mais par la substitution $a_k = b_k$ dans la formule (4.3) on obtient également le zéro.

L'intervalle I étant défini par (4.1), où i_j sont des intervalles 1-dimensionnels avec les extrémités $a_j, b_j, a_j \leqq b_j$, le nombre

$$\lambda(I) = \prod_{j=1}^{k}(b_j - a_j)$$

sera appelé volume de l'intervalle I. Si M $\subset E_k$, alors le nombre

$$\lambda_e(M) = \inf_{\substack{\mathbf{C} \\ M \subset \bigcup \mathbf{C}}} \sum_{I \in \mathbf{C}} \lambda(I)\,,$$

où l'on prend la borne inférieure pour tous les systèmes dénombrables $\mathbf{C}$ d'intervalles bornés disjoints qui couvrent l'ensemble M, sera appelé mesure extérieure de Lebesgue de l'ensemble M (voir [6], chap. I, §7, définition 5). On a le

Théorème 4.3. *Soit $k > 0$ et soit μ une mesure métrique invariante k-dimensionnelle normée dans E_k. Alors*

(a) $\mu(M) \leqq \lambda_e(M)$ *pour chaque ensemble* $M \subset E_k$;

(b) $\mu(M) = \lambda_e(M)$, *si* $M \subset E_k$ *est mesurable au sens de Lebesgue.*

Démonstration. (a) D'après le théorème 4.2, on a $\lambda(I) = \mu(I)$ pour chaque intervalle borné I. Soit maintenant $\mathbf{C} = \{I_j\}$ un système dénombrable d'intervalles bornés disjoints qui couvrent l'ensemble M. D'après les axiomes II et III, appliqués à la mesure μ, on a

$$\mu(M) \leqq \mu(\bigcup_{I_j \in \mathbf{C}} I_j) \leqq \sum_{I_j \in \mathbf{C}} \mu(I_j) = \sum_{I_j \in \mathbf{C}} \lambda(I_j)\,,$$

donc aussi

$$\mu(M) \leqq \inf_{\mathbf{C}} \sum_{I_j \in \mathbf{C}} \lambda(I_j) = \lambda_e(M)\,.$$

(b) Soit $M \subset E_k$ un ensemble borné et mesurable au sens de Lebesgue. Il existe un intervalle borné I tel que $M \subset I$. On a (voir [6], chap. I, §9, théorème 29):

$$\lambda_e(I) = \lambda_e(M) + \lambda_e(I - M)\,.$$

Si l'on avait $\mu(M) < \lambda_e(M)$ on obtiendrait donc d'après l'axiome III et d'après (a):

$$\mu(I) \leqq \mu(M) + \mu(I - M) < \lambda_e(M) + \lambda_e(I - M) = \lambda_e(I)\,,$$

ce qui est une contradiction, car d'après le théorème 4.2 on a

$$\mu(I) = \lambda(I) = \lambda_e(I)\,.$$

Soit maintenant $M \subset E_k$ un ensemble arbitraire mesurable au sens de Lebesgue. Si nous désignons

$$I_n = \{(x_1, \ldots, x_k) : -n \leqq x_j \leqq n \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, k\}\,,$$

nous avons

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M \cap I_n) \quad \text{et} \quad M \cap I_{n+1} \supset M \cap I_n$$

sont des ensembles bornés mesurables au sens de Lebesgue, donc $\mu(M \cap I_n) = \lambda_e(M \cap I_n)$. Alors $\lambda_e(M) = \lim_{n \to \infty} \lambda_e(M \cap I_n)$ a lieu (voir [6], chap. I, §9, théorème 23). Donc, à chaque nombre $N < \lambda_e(M)$ il existe n tel que $\lambda_e(M \cap I_n) = \mu(M \cap I_n) > N$, et d'après l'axiome II on a $\mu(M) \geqq \mu(M \cap I_n) > N$. Commé N était un nombre arbitraire plus petit que $\lambda_e(M)$, on a $\mu(M) \geqq \lambda_e(M)$. Compte tenu de (a), on a donc $\mu(M) = \lambda_e(M)$.

Théorème 4.4. *Soit $k > 0$ et soit μ une mesure métrique invariante k-dimensionnelle normée. Alors chaque ensemble mesurable au sens de Lebesgue est aussi μ-mesurable.*

Demonstration. Soit $M \subset E_k$ mesurable au sens de Lebesgue. Alors $M = A \cup N$, où A est un ensemble du type F_σ et $\lambda_e(N) = 0$ (voir [6], chap. I, §9, théorème 22). D'après le théorème 4.3(a) on a $\mu(N) \leqq \lambda_e(N) = 0$, alors d'après le théorème 2.1(a), (c) l'ensemble N est μ-mesurable. A est μ-mesurable d'après le théorème 2.1(b), et M est μ-mesurable d'après le théorème 2.1(f).

Théorème 4.5. *Soit $k > 0$ et soit μ la mesure de Hausdorff k-dimensionnelle standarde dans E_k* (voir chap. 3). *Alors $\mu(M) = \lambda_e(M)$ pour chaque ensemble $M \subset E_k$.*

Démonstration. I. De la définition des mesures ν, μ dans la démonstration du théorème 3.1 on déduit que la mesure de Hausdorff k-dimensionnelle standarde μ d'un ensemble $A \subset E_k$ est égale à

$$\mu(A) = \sup_{\varepsilon > 0} \mu_\varepsilon(A), \tag{4.14}$$

où

$$\mu_\varepsilon(A) = \inf_{\mathbf{C}} \sum_{K_\iota \in \mathbf{C}} (d(K_\iota))^k (\nu(J_k))^{-1}, \tag{4.15}$$

où l'on prend la borne inférieure pour tous les systèmes dénombrables $\mathbf{C}$ tels que $\bigcup_{K_\iota \in C} K_\iota \supset A$ et $d(K_\iota) \leqq \varepsilon$ pour $K_\iota \in C$.

II. G étant un ensemble ouvert, alors d'après le théorème 4.3(b) on a $\mu(G) = \lambda_e(G)$, car chaque ensemble ouvert est borelien et donc mesurable au sens de Lebesgue (voir [6], chap. 1, §8, théorème 14).

III. Pour prouver $\mu(M) = \lambda_e(M)$ pour un ensemble arbitraire $M \subset E_k$, il suffit en vertu du théorème 4.3(a) prouver:

Si $M \subset E_k$ et η est un nombre positif arbitraire, alors

$$\lambda_e(M) \leqq \mu(M) + \eta. \tag{4.16}$$

Soit donc donné un ensemble $M \subset E_k$ et un nombre $\eta > 0$. Étant encore donné un nombre $\varepsilon > 0$, alors selon (4.14) on a $\mu_{\varepsilon/2}(M) \leqq \mu(M)$ et selon (4.15) il existe un système dénombrable d'ensembles $\mathbf{C} = \{K_\iota\}_{\iota=1,2,\dots}$ tel que

$$\bigcup_{\iota=1}^{\infty} K_\iota \supset M, \quad d(K_\iota) \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon, \tag{4.17}$$

$$\sum_{K_\iota \in \mathbf{C}} (d(K_\iota))^k (\nu(J_k))^{-1} < \mu(M) + \tfrac{1}{4}\eta. \tag{4.18}$$

Définissons, pour $\iota = 1, 2, \dots$, des nombers δ_ι de la manière suivante:

$$\delta_\iota = \min\left\{\tfrac{1}{4}\varepsilon, \tfrac{1}{2}d(K_\iota)\left[\left(\frac{\mu(M) + \frac{1}{2}\eta}{\mu(M) + \frac{1}{4}\eta}\right)^{1/k} - 1\right]\right\}, \quad \text{si} \quad d(K_\iota) > 0, \tag{4.19}$$

$$\delta_\iota = \min\left(\tfrac{1}{4}\varepsilon, \eta^{1/k} 2^{(-\iota-1)/k-1} (\nu(J_k))^{1/k}\right), \quad \text{si} \quad d(K_\iota) = 0. \tag{4.20}$$

On a $\delta_\iota > 0$ pour chaque ι. A chaque ensemble K_ι nous allons associer un ensemble $\tilde{K}_\iota$ de la façon suivante: Si $K_\iota = \emptyset$, alors $\tilde{K}_\iota = \emptyset$; si $K_\iota \neq \emptyset$, alors $\tilde{K}_\iota$ sera l'ensemble des points de l'espace E_k dont la distance de K_ι est plus petite que δ_ι.

Nous avons $d(\tilde{K}_\iota) \leqq d(K_\iota) + 2\delta_\iota$, alors en vertu de (4.19) et de (4.20) on a

$$d(\tilde{K}_\iota) \leqq \varepsilon\,, \quad \iota = 1, 2, \ldots\,. \tag{4.21}$$

Posons $G = \bigcup_{\iota=1}^{\infty} \tilde{K}_\iota$. Tous les ensembles $\tilde{K}_\iota$ sont ouverts, donc G est aussi ouvert. Ensuite $\tilde{K}_\iota \supset K_\iota$ pour chaque ι, alors $G = \bigcup_{\iota=1}^{\infty} \tilde{K}_\iota \supset \bigcup_{\iota=1}^{\infty} K_\iota \supset M$, et d'après II on a

$$\lambda_e(M) \leqq \lambda_e(G) = \mu(G)\,. \tag{4.22}$$

Si $d(K_\iota) > 0$, alors d'après (4.19) nous avons

$$(d(\tilde{K}_\iota))^k \leqq (d(K_\iota) + 2\delta_\iota)^k \leqq (d(K_\iota))^k \frac{\mu(M) + \frac{1}{2}\eta}{\mu(M) + \frac{1}{4}\eta}\,;$$

si $d(K_\iota) = 0$, alors d'après (4.20) nous avons

$$(d(\tilde{K}_\iota))^k \leqq (d(K_\iota) + 2\delta_\iota)^k = (2\delta_\iota)^k \leqq \eta \,.\, 2^{-\iota-1}\, v(J_k)\,.$$

D'ici nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{\iota=1}^{\infty} (d(\tilde{K}_\iota))^k (v(J_k))^{-1} &= \sum_{d(K_\iota)>0} (d(\tilde{K}_\iota))^k (v(J_k))^{-1} + \\
&+ \sum_{d(K_\iota)=0} (d(\tilde{K}_\iota))^k (v(J_k))^{-1} \leqq \\
&\leqq \frac{\mu(M) + \frac{1}{2}\eta}{\mu(M) + \frac{1}{4}\eta} \sum_{d(K_\iota)>0} (d(K_\iota))^k (v(J_k))^{-1} + \\
&+ \sum_{d(K_\iota)=0} \eta 2^{-\iota-1} v(J_k) (v(J_k))^{-1} \leqq \\
&\leqq \frac{\mu(M) + \frac{1}{2}\eta}{\mu(M) + \frac{1}{4}\eta} \sum_{K_\iota \in C} (d(K_\iota))^k (v(J_k))^{-1} + \eta \sum_{\iota=1}^{\infty} 2^{-\iota-1}\,.
\end{aligned}$$

Selon (4.18) on obtient de cela

$$\sum_{\iota=1}^{\infty} (d(\tilde{K}_\iota))^k (v(J_k))^{-1} \leqq \mu(M) + \tfrac{1}{2}\eta + \tfrac{1}{2}\eta = \mu(M) + \eta\,.$$

Le système $\{\tilde{K}_\iota\}$ couvre l'ensemble G, alors d'après (4.21) et (4.15) on obtient d'ici

$$\mu_\varepsilon(G) \leqq \mu(M) + \eta\,.$$

Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, on en obtient d'après (4.14) $\mu(G) \leqq \mu(M) + \eta$, d'où il découle (4.16) en vertu de (4.22).

Remarque. **Il découle du théorème 4.5 que la mesure extérieure de Lebesgue dans E_m satisfait aux axiomes I–V et à l'axiome VI' avec $k = m$. Je ne sais pas s'il existe une autre mesure satisfaisant à ces axiomes.**

Ayons des nombres $0 < k \leqq m$. Soit μ une mesure métrique invariante k-dimensionnelle dans E_m. Définissons l'ensemble

$$\tilde{E}_k = \{(x_1, \ldots, x_m) \in E_m : x_j = 0 \quad \text{pour} \quad k + 1 \leqq j \leqq m\}.$$

Évidemment, l'ensemble $\tilde{E}_k$ est isomètrique avec l'espace euclidien k-dimensionnel. Si $M \subset \tilde{E}_k$, définissons $\tilde{\mu}(M) = \mu(M)$. Alors nous avons le

Théorème 5.1.

(a) *$\tilde{\mu}$ est une mesure métrique invariante dans $\tilde{E}_k$.*

(b) *$\tilde{\mu}$ est normée si et seulement si μ est normée.*

(c) *Un ensemble $M \subset \tilde{E}_k$ est $\tilde{\mu}$-mesurable si et seulement s'il est μ-mesurable.*

(d) *Si $\tilde{\lambda}_e$ est la mesure extérieure de Lebesgue dans $\tilde{E}_k$ et la mesure μ est normée, alors $\tilde{\mu}(M) \leqq \tilde{\lambda}_e(M)$ pour chaque ensemble $M \subset \tilde{E}_k$.*

(e) *Si $M \subset \tilde{E}_k$ est mesurable au sens de Lebesgue dans $\tilde{E}_k$, alors $\tilde{\mu}(M) = \tilde{\lambda}_e(M)$.*

Démonstration. (a) La validité des axiomes I–VI pour la mesure $\tilde{\mu}$ découle de la validité de ceux pour la mesure μ.

(b) Découle du fait que l'ensemble J_k de l'axiome VI′ est situé dans $\tilde{E}_k$.

(c) I. $M \subset \tilde{E}_k$ soit μ-mesurable et soit $A \subset \tilde{E}_k$. Alors l'égalité

$$\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(A \cap M) + \tilde{\mu}(A - M)$$

découle de l'égalité analogue pour la mesure μ et du fait que

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(A), \quad \tilde{\mu}(A \cap M) = \mu(A \cap M), \quad \tilde{\mu}(A - M) = \mu(A - M).$$

II. $M \subset \tilde{E}_k$ soit $\tilde{\mu}$-mesurable et soit $A \subset E_m$. Pour prouver la μ-mesurabilité de M il suffit de prouver

$$\mu(A) \geqq \mu(A \cap M) + \mu(A - M). \tag{5.1}$$

L'ensemble $\tilde{E}_k$ est borelien, donc μ-mesurable d'après le théorème 2.1(b), alors

$$\mu(A) = \mu(A \cap \tilde{E}_k) + \mu(A - \tilde{E}_k).$$

Mais

$$\mu(A \cap \tilde{E}_k) = \tilde{\mu}(A \cap \tilde{E}_k) = \tilde{\mu}((A \cap \tilde{E}_k) \cap M) + \tilde{\mu}((A \cap \tilde{E}_k) - M) = \\ = \mu(A \cap M) + \mu((A \cap \tilde{E}_k) - M),$$

alors

$$\mu(A) = \mu(A \cap M) + \mu((A \cap \tilde{E}_k) - M) + \mu(A - \tilde{E}_k). \tag{5.2}$$

Or, comme $A - M = (A - \tilde{E}_k) \cup ((A \cap \tilde{E}_k) - M)$, on a d'après l'axiome III

$$\mu(A - \tilde{E}_k) + \mu((A \cap \tilde{E}_k) - M) \geqq \mu(A - M)$$

et l'on obtient (5.1) par la subtitution dans (5.2).

(d) et (e) découlent de (b), (c) et du théorème 4.3.

Dans l'espace E_m ayons k vecteurs

$$\mathbf{v}_j = (v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jm}), \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Désignons

$$\delta_k(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_k}} D^2_{i_1, \ldots, i_k},$$

où

$$D_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = \begin{vmatrix} v_{1,i_1}, & v_{1,i_2}, & \ldots, & v_{1,i_k} \\ v_{2,i_1}, & v_{2,i_2}, & \ldots, & v_{2,i_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{k,i_1}, & v_{k,i_2}, & \ldots, & v_{k,i_k} \end{vmatrix}.$$

Évidemment $\delta_k(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \geqq 0$ et $\delta_k(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = 0$ si et seulement si les vecteurs $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sont linéairement dépendants.

Théorème 5.2. *Dans E_m ayons des vecteurs $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ et des vecteurs $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ tels que*

$$\mathbf{v}_i \,.\, \mathbf{v}_j = \mathbf{w}_i \,.\, \mathbf{w}_j \quad \textit{pour} \quad i, j = 1, \ldots, k.$$

Alors

$$\delta_k(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \delta_k(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k).$$

Démonstration découle de l'égalité

$$\delta_k(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1, & \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2, & \ldots, & \mathbf{v}_1\mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1, & \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2, & \ldots, & \mathbf{v}_2\mathbf{v}_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{v}_k\mathbf{v}_1, & \mathbf{v}_k\mathbf{v}_2, & \ldots, & \mathbf{v}_k\mathbf{v}_k \end{vmatrix}$$

(voir [11], chap. I, §12, formule (12.14)).

Théorème 5.3. *Ayons des nombres $0 < k \leqq m$. Soit μ une mesure métrique invariante k-dimensionnelle normée dans E_m, λ_e soit la mesure extérieure de Lebesgue dans E_k. Soient $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ des vecteurs linéairement indépendants dans E_m. Soit $A \in E_m$ et φ soit une application $E_k \to E_m$ définie par la relation*

$$(5.3) \qquad (x_1, \ldots, x_k) \mapsto A + \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{v}_i.$$

Soit $M \subset E_k$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue. Alors

$$\mu(\varphi(M)) = (\delta_k(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k))^{1/2}\, \lambda_e(M)\,. \tag{5.4}$$

Démonstration. Les vecteurs $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ engendrent un espace vectoriel $\boldsymbol{V}$. Dans cet espace, il existe une base orthonormale $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ (voir [12], chap. II, §15, théorème 15.2); il existe des nombres v_{ij} tels que

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{k} v_{ij}\mathbf{e}_j\,. \tag{5.5}$$

Pour $i = 1, 2, \ldots, k$ soit $\tilde{\mathbf{e}}_i$ le vecteur dans l'espace $\tilde{E}_k$ qui a toutes ses coordonnées égales à 0, à l'exception de la i-ème qui est égale à 1. Définissons des vecteurs $\tilde{\mathbf{v}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{v}}_k$ par les relations

$$\tilde{\mathbf{v}}_i = \sum_{j=1}^{k} v_{ij}\tilde{\mathbf{e}}_j\,. \tag{5.6}$$

Soit ψ une application $E_k \to \tilde{E}_k$ qui au point $(x_1, \ldots, x_k) \in E_k$ associe le point $(y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0) \in \tilde{E}_k$, où

$$y_j = \sum_{i=1}^{k} v_{ij}x_i\,, \tag{5.7}$$

de sorte que selon (5.6) on a

$$\psi(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{j=1}^{k}\Big(\sum_{i=1}^{k} v_{ij}x_i\Big)\,\tilde{\mathbf{e}}_j = \sum_{i=1}^{k} x_i\tilde{\mathbf{v}}_i\,. \tag{5.8}$$

Désignons $\tilde{M} = \psi(M)$. L'ensemble $\tilde{M}$ est mesurable dans $\tilde{E}_k$ au sens de Lebesgue (voir [6], chap. VI, §2, théorème 102) et d'après le théorème 5.1(e) on a $\mu(\tilde{M}) = \tilde{\lambda}_e(\tilde{M})$, où $\tilde{\lambda}_e$ est la mesure extérieure de Lebesgue dans $\tilde{E}_k$, en outre (voir de nouveau [6], chap. VI, §2, théorème 102)

$$\tilde{\lambda}_e(\tilde{M}) = \int_{\psi^{-1}(\tilde{M})} |D(x_1, \ldots, x_k)|\, \mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_k = $$

$$= \int_M |D(x_1, \ldots, x_k)|\, \mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_k\,,$$

où $D(x_1, \ldots, x_k)$ est le jacobien des fonctions (5.7) et l'intégrale est prise au sens de Lebesgue. Ce jacobien étant constant, on obtient d'ici

$$\mu(\tilde{M}) = \lambda_e(\tilde{M}) = |D(x_1, \ldots, x_k)|\, \lambda_e(M)\,.$$

De plus, il découle de (5.7) et (5.6) que $|D(x_1, \ldots, x_k)| = (\delta_k(\tilde{\mathbf{v}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{v}}_k))^{1/2}$, de sorte qu'on obtient

$$\mu(\tilde{M}) = (\delta_k(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k))^{1/2}\, \lambda_e(M)\,. \tag{5.9}$$

L'application

$$f : \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{v}_i \mapsto A + \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{v}_i$$

est isométrique et l'image de l'ensemble $\tilde{M}$ est l'ensemble $\varphi(M)$. Alors d'après le théorème 2.2 on a $\mu(\varphi(M)) = \mu(\tilde{M})$. Ensuite, on a $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j = \tilde{\mathbf{v}}_i\tilde{\mathbf{v}}_j$ pour $i, j = 1, \ldots, k$, de sorte que, d'après le théorème 5.2 on a $\delta_k(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \delta_k(\tilde{\mathbf{v}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{v}}_k)$. D'ici et de (5.9) on obtient (5.4).

Soit $0 < k \leqq m$ et ayons un ensemble ouvert $\Omega \subset E_k$ et une application $f : \Omega \to E_m$. Si l'application f est donnée pour $u = (u_1, \ldots, u_k) \in \Omega$ par la formule $f(u) = (f_1(u), \ldots, f_m(u))$, nous écrirons $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Si les fonctions $f_1, \ldots, f_m$ possèdent des dérivées partielles au point $a \in \Omega$, nous désignerons[2]) par le symbole $\partial_j f(a)$ le vecteur

$$(\partial_j f_1(a), \ldots, \partial_j f_m(a)) .$$

Ensuite nous désignerons dans ce cas

$$D_f(a) = (\delta_k(\partial_1 f(a),\ \partial_2 f(a), \ldots, \partial_k f(a)))^{1/2} . \tag{5.10}$$

Maintenant nous pouvons formuler le théorème suivant:

Théorème 5.4. *Soit $0 < k \leqq m$ et ayons un ensemble ouvert $\Omega \subset E_k$ et une application $f = (f_1, \ldots, f_m) : \Omega \to E_m$. Supposons que les fonctions f_i possèdent la différentielle totale dans tout l'ensemble Ω et les dérivées partielles continues dans un point $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \Omega$. Soit $D_f(a) \neq 0$. Pour chaque nombre $\sigma > 0$ définissons l'application $g_{\sigma,a} : E_k \to E_m$ par la formule*

$$g_{\sigma,a}(u) = f(a) + \sum_{j=1}^{k} \sigma(u_j - a_j)\, \partial_j f(a) \quad \textit{pour} \quad u = (u_1 \ldots u_k) \in E_k . \tag{5.11}$$

Ayons des nombres λ, Λ tels que $0 < \lambda < 1 < \Lambda$. Alors, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que si

$$\max_{j=1,\ldots,k} (|u_j - a_j|) < \delta , \quad \max_{j=1,\ldots,k} (|v_j - a_j|) < \delta , \tag{5.12}$$

nous avons

$$u = (u_1, \ldots, u_k) \in \Omega , \quad v = (v_1, \ldots, v_k) \in \Omega , \tag{5.13}$$

$$\varrho(g_{\lambda,a}(u),\ g_{\lambda,a}(v)) \leqq \varrho(f(u), f(v)) \leqq \varrho(g_{\Lambda,a}(u),\ g_{\Lambda,a}(v)) . \tag{5.14}$$

---

[2]) f_i étant une fonction de k variables, on désigne par $\partial_j f_i$ sa dérivée par rapport à la j-ème variable.

Démonstration. Désignons $q_{ij} = \partial_j f_i(a)$. Ensuite, soit $g_{\sigma,a} = (g_{\sigma,a,1}, \ldots, g_{\sigma,a,m})$, de soite que pour chaque $\sigma > 0$ selon (5.11) on aura

$$g_{\sigma,a,i}(u) = f_i(a) + \sum_{j=1}^{k} \sigma(u_j - a_j)\, \partial_j f_i(a) \quad \text{pour} \quad u \in E_k \,,$$

$$(g_{\sigma,a,i}(u) - g_{\sigma,a,i}(v))^2 = \sigma^2 \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} q_{ij} q_{il} (u_j - v_j)(u_l - v_l)$$

$$\text{pour} \quad u \in E_k,\ v \in E_k \,,$$

alors pour chaque $u \in E_k$, $v \in E_k$ on a

$$\varrho(g_{\sigma,a}(u),\ g_{\sigma,a}(v)) = \sigma\Big(\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} \gamma_{jl}(u_j - v_j)(u_l - v_l)\Big)^{1/2} \,, \tag{5.15}$$

où

$$\gamma_{jl} = \sum_{i=1}^{m} q_{ij} q_{il} \,. \tag{5.16}$$

Comme $D_f(a) \neq 0$ d'après la supposition, les vecteurs $\partial_1 f(a), \ldots, \partial_k f(a)$ sont linéairement indépendants. Il découle d'ici que l'application $g_{\sigma,a}$ est biunivoque pour chaque $\sigma > 0$. Cela signifie que la distance $\varrho(g_{\sigma,a}(u), g_{\sigma,a}(v))$ donnée par l'expression (5.15) peut être égale à zero seulement pour $u = v$, autrement étant toujours positive. Alors la fonction $\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} \gamma_{jl} u_j u_l$ prend sur l'ensemble compact $\sum_{j=1}^{k} u_j^2 = 1$ sa plus petite valeur N et on a $N > 0$. Nous avons

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} \gamma_{jl}(u_j - v_j)(u_l - v_l) = \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} \gamma_{jl} \frac{u_j - v_j}{\big(\sum_{h=1}^{k} (u_h - v_h)^2\big)^{1/2}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{u_l - v_l}{\big(\sum_{h=1}^{k} (u_h - v_h)^2\big)^{1/2}} \right) \Big(\sum_{h=1}^{k} (u_h - v_h)^2\Big) \geqq N \sum_{h=1}^{k} (u_h - v_h)^2 \,,$$

alors

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} \gamma_{jl}(u_j - v_j)(u_l - v_l) \geqq N \sum_{h=1}^{k} (u_h - v_h)^2 \,. \tag{5.17}$$

Ayant un point $a \in E_k$ et un nombre $\delta > 0$, définissons

$$\Omega(a, \delta) = \{u = (u_1, \ldots, u_k) \in E_k : \max_{j=1,\ldots,k} (|u_j - a_j|) < \delta\} \,.$$

L'ensemble Ω étant ouvert, il existe un nombre $\delta_0 > 0$ tel que $\Omega(a, \delta_0) \subset \Omega$. A toute paire de points $u \in \Omega(a, \delta_0)$, $v \in \Omega(a, \delta_0)$, il existe des points $\xi_1, \ldots, \xi_m$, $\xi_i =$

$= (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{ik})$, situés sur le segment joignant les points u, v tels que

$$f_i(u) - f_i(v) = \sum_{j=1}^{k} \partial_j f_i(\xi_i)(u_j - v_j)$$

(voir [5], chap. VII, §11, théorème 203). D'ici on obtient

$$f_i(u) - f_i(v) = \sum_{j=1}^{k} \{q_{ij} + (\partial_j f_i(\xi_i) - q_{ij})\}(u_j - v_j),$$

$$(f_i(u) - f_i(v))^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} \{q_{ij}q_{il} + 2q_{ij}(\partial_l f_i(\xi_i) - q_{il}) +$$

$$+ (\partial_j f_i(\xi_i) - q_{ij})(\partial_l f_i(\xi_i) - q_{il})\}(u_j - v_j)(u_l - v_l),$$

alors en vertu de (5.16) on obtient

$$\varrho(f(u), f(v)) = \{\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} \gamma_{jl}(u_j - v_j)(u_l - v_l)\}^{1/2} . \{1 + A_1 + A_2\}^{1/2}, \tag{5.18}$$

où

$$A_1 = \frac{2\sum_{i=j}^{m} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} q_{ij}(\partial_l f_i(\xi_i) - q_{il})(u_j - v_j)(u_l - v_l)}{\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} \gamma_{jl}(u_j - v_j)(u_l - v_l)},$$

$$A_2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} (\partial_j f_i(\xi_i) - q_{ij})(\partial_l f_i(\xi_i) - q_{il})(u_j - v_j)(u_l - v_l)}{\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} \gamma_{jl}(u_j - v_j)(u_l - v_l)}.$$

Désignons

$$Q = \max_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq k}} (|q_{ij}|), \tag{5.19}$$

$$\varepsilon = \min\left(1, \frac{N(1 - \lambda^2)}{mk^2(2Q + 1)}, \frac{N(\Lambda^2 - 1)}{mk^2(2Q + 1)}\right). \tag{5.20}$$

Comme les $\partial_j f_i$ sont selon la supposition continues au point a, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que $\delta \leqq \delta_0$ et que

$$|\partial_l f_i(u) - q_{il}| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad l = 1, \ldots, k; \; i = 1, \ldots, m \tag{5.21}$$

$$\text{si} \quad u = (u_1, \ldots, u_k) \in \Omega(a, \delta).$$

Si nous nous bornons aux points u, v tels que (5.12) est valable, alors en vertu de $\delta \leqq \delta_0$ on a (5.13); on a aussi $\xi_i \in \Omega(a, \delta)$ pour $i = 1, \ldots, m$ (car $\Omega(a, \delta)$ est convexe) et selon (5.17), (5.19) et (5.21) nous obtenons

$$|A_1| \leqq \frac{2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}|q_{ij}|\,|\partial_l f_i(\xi_i) - q_{il}|\,|u_j - v_j|\,|u_l - v_l|}{N \cdot \sum_{h=1}^{k}(u_h - v_h)^2} < \frac{2mk^2 Q\varepsilon}{N},$$

$$|A_2| \leqq \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}|\partial_j f_i(\xi_i) - q_{ij}|\,|\partial_l f_i(\xi_i) - q_{il}|\,|u_j - v_j|\,|u_l - v_l|}{N \cdot \sum_{h=1}^{k}(u_h - v_h)^2} < \frac{mk^2\varepsilon^2}{N},$$

alors d'après (5.20) nous obtenons

$$1 + A_1 + A_2 \leqq 1 + |A_1| + |A_2| < 1 + \frac{2mk^2 Q\varepsilon}{N} + \frac{mk^2\varepsilon^2}{N} \leqq 1 +$$

$$+ \frac{mk^2}{N}\varepsilon(2Q + 1) \leqq 1 + \frac{mk^2}{N}(2Q + 1)\frac{N(\Lambda^2 - 1)}{mk^2(2Q + 1)} = \Lambda^2,$$

$$1 + A_1 + A_2 \geqq 1 - |A_1| - |A_2| > 1 - \frac{2mk^2 Q\varepsilon}{N} - \frac{mk^2\varepsilon^2}{N} \geqq 1 -$$

$$- \frac{mk^2}{N}\varepsilon(2Q + 1) \geqq 1 - \frac{mk^2}{N}(2Q + 1)\frac{N(1 - \lambda^2)}{mk^2(2Q + 1)} = \lambda^2,$$

d'où il découle (5.14) selon (5.18) et (5.15).

Remarque. Le théorème 5.4 ne vaut pas si l'on omet la supposition que les fonctions f_i possèdent des dérivées partielles continues au point a, comme le montre l'exemple suivant:

Soit $k = 1$, $m = 2$, $\Omega = E_1$, $f = (f_1, f_2)$, où

$$f_1(u) = u,$$

$$f_2(u) = 16u^2 \sin\frac{1}{u} \quad \text{pour} \quad u \neq 0, \quad f_2(0) = 0.$$

Alors $\partial_1 f_1(0) = 1$, $\partial_1 f_2(0) = 0$ de sorte que (5.11) prend (pour $a = 0$, $\sigma = 2$) la forme

$$g_{2,0,1}(u) = 2u, \quad g_{2,0,2}(u) = 0.$$

D'ici on obtient que pour $u \in E_1$, $v \in E_1$ a lieu l'égalité

$$\varrho(g_{2,0}(u),\; g_{2,0}(v)) = 2|u - v|.$$

Soit maintenant δ un nombre positif arbitraire. Choisissons un nombre naturel n de sorte que $n > (2\pi\delta)^{-1}$ ait lieu et posons

$$u = \frac{1}{2\pi n}, \quad v = \frac{1}{2\pi(n + \frac{1}{4})}.$$

Alors nous avons (5.12), mais nous allons prouver que (5.14) n'est pas vrai pour $\Lambda = 2$. En effet

$$\varrho(g_{2,0}(u), \ g_{2,0}(v)) = 2\left|\frac{1}{2\pi n} - \frac{1}{2\pi(n + \frac{1}{4})}\right| = 2\frac{\frac{1}{4}}{2\pi n(n + \frac{1}{4})} < \frac{1}{4\pi n^2};$$

par contre

$$f_2(u) = 0, \quad f_2(v) = \frac{16}{(2\pi(n + \frac{1}{4}))^2},$$

de sorte que

$$\varrho(f(u), f(v)) = ((f_1(u) - f_1(v))^2 + (f_2(u) - f_2(v))^2)^{1/2} \geqq$$

$$\geqq |f_2(u) - f_2(v)| = \frac{16}{4\pi^2(n + \frac{1}{4})^2} > \frac{4}{\pi^2(2n)^2} > \frac{1}{4\pi n^2} > \varrho(g_{2,0}(u), g_{2,0}(v)).$$

Alors, on ne peut pas choisir $\delta > 0$ de sorte que de (5.12) découle (5.14) pour $\Lambda = 2$.

De cet exemple on voit aussi qu'il ne suffit pas de remplacer la supposition de la continuité des dérivées partielles des fonctions f_i au point a par la condition que ces dérivées soient bornées dans un voisinage du point a.

Théorème 5.5. *Ayons des nombres $0 < k \leqq m$. Soit Ω_0 un ensemble ouvert de l'espace E_k et $f = (f_1, \ldots, f_m)$ soit une application biunivoque de Ω_0 dans E_m. Les fonctions f_i aient des dérivées partielles continues dans tout l'ensemble Ω_0 et soit $D_f(u) > 0$ pour chaque $u \in \Omega_0$. Soit μ une mesure métrique invariante k-dimensionnelle normée dans E_m. Alors pour chaque sous-ensemble Ω de l'ensemble Ω_0 mesurable dans le sens de Lebesgue a lieu l'égalité*

$$\mu(f(\Omega)) = \int_\Omega D_f. \tag{5.22}$$

D é m o n s t r a t i o n. I. Supposons tout d'abord que $\lambda_e(\Omega_0) < \infty$ (λ_e étant de nouveau la mesure extérieure de Lebesgue dans E_k) et que Ω soit ouvert. Soit ε un nombre arbitraire tel que $0 < \varepsilon < 1$. La fonction D_f étant continue dans Ω_0, il existe pour chaque point $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \Omega_0$ un nombre $\delta'_a > 0$ tel que

$$|D_f(u) - D_f(a)| < \varepsilon \tag{5.23}$$

$$\text{lorsque} \quad u = (u_1, \ldots, u_k) \in \Omega_0, \ \max_{j=1,\ldots,k} (|u_j - a_j|) < \delta'_a.$$

Définissons pour chaque $\sigma > 0$ l'application $g_{\sigma,a} : E_k \to E_m$ à l'aide de (5.11). D'après le théorème 5.4, il existe pour chaque point $a \in \Omega$ un nombre $\delta''_a > 0$ tel que si

$$\max_{j=1,\dots,k} (|u_j - a_j|) < \delta''_a \,, \quad \max_{j=1,\dots,k} (|v_j - a_j|) < \delta''_a \,,$$

alors

$$u = (u_1, \dots, u_k) \in \Omega \,, \quad v = (v_1, \dots, v_k) \in \Omega$$

et

$$\varrho(g_{1-\varepsilon,a}(u), g_{1-\varepsilon,a}(v)) \leqq \varrho(f(u), f(v)) \leqq \varrho(g_{1+\varepsilon,a}(u), g_{1+\varepsilon,a}(v)) \,. \tag{5.24}$$

Posons $\delta_a = \min(\delta'_a, \frac{1}{2}\delta''_a)$ pour chaque $a \in \Omega$ et désignons

$$K_a = \{(u_1, \dots, u_k) \in E_k : a_j - \delta_a < u_j < a_j + \delta_a \quad \text{pour} \quad 1 \leqq j \leqq k\} \,.$$

Alors[3]) $\bar{K}_a \subset \Omega$ et (5.24) a lieu lorsque $a \in \Omega$, $u \in K_a$, $v \in K_a$. Les ensembles ouverts K_a couvrent l'ensemble Ω, donc on peut choisir parmi eux (voir [5], chap. VI, §15, théorème 154 et chap. VI, §15, remarque 2) un nombre dénombrable $K_{a_1}, K_{a_2}, \dots$ qui aussi recouvrent Ω. Définissons pour $n = 1, 2, \dots$ des ensembles

$$L_n = K_{a_n} - \bigcup_{i=1}^{n-1} K_{a_i} \,. \tag{5.25}$$

Les ensembles L_n sont boreliens, donc mesurables au sens de Lebesgue, tous deux d'entre eux sont disjoints, ils recouvrent l'ensemble Ω et $\bar{L}_n \subset \Omega$. Si $u \in L_n$, alors d'après (5.23) il y a

$$D_f(u) - \varepsilon < D_f(a_n) < D_f(u) + \varepsilon \,. \tag{5.26}$$

Si $u \in L_n$, $v \in L_n$, alors d'après (5.24) a lieu

$$\varrho(g_{1-\varepsilon,a_n}(u), g_{1-\varepsilon,a_n}(v)) \leqq \varrho(f(u), f(v)) \leqq \varrho(g_{1+\varepsilon,a_n}(u), g_{1+\varepsilon,a_n}(v)) \,. \tag{5.27}$$

D'après (5.11), le théorème 5.3 et le théorème 2.2, on obtient pour chaque $\sigma > 0$ et chaque n naturel

$$\mu(g_{\sigma,a_n}(L_n)) = (\delta_k(\mathbf{w}_{1,\sigma,a}, \dots, \mathbf{w}_{k,\sigma,a}))^{1/2} \lambda_e(L_n) \,, \tag{5.28}$$

où $\mathbf{w}_{j,\sigma,a} = \sigma\, \partial_j f(a)$, de sorte que selon (5.10) a lieu

$$(\delta_k(\mathbf{w}_{1,\sigma,a}, \dots, \mathbf{w}_{k,\sigma,a}))^{1/2} = (\sigma^{2k} \delta_k(\partial_1 f(a), \dots, \partial_k f(a)))^{1/2} = \sigma^k D_f(a) \,.$$

Pour cette raison, de (5.28) on obtient

$$\mu(g_{1-\varepsilon,a_n}(L_n)) = (1 - \varepsilon)^k D_f(a_n) \lambda_e(L_n) \,, \tag{5.29}$$

$$\mu(g_{1+\varepsilon,a_n}(L_n)) = (1 + \varepsilon)^k D_f(a_n) \lambda_e(L_n) \,. \tag{5.30}$$

[3]) Dans la démonstration du théorème 5.5 on désignera toujours par $\bar{X}$ la fermeture, et par $\dot{X}$ la frontière de l'ensemble X.

Mais d'après (5.27) et d'après l'axiome V on obtient

$$\mu(g_{1-\varepsilon,a_n}(L_n)) \leqq \mu(f(L_n)) \leqq \mu(g_{1+\varepsilon,a_n}(L_n)) \tag{5.31}$$

et de (5.26) il découle par l'intégration

$$\int_{L_n} D_f - \varepsilon\,\lambda_e(L_n) \leqq D_f(a_n)\,\lambda_e(L_n) \leqq \int_{L_n} D_f + \varepsilon\,\lambda_e(L_n)\,. \tag{5.32}$$

La comparaison de (5.31), (5.29), (5.30) et (5.32) donne

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)^k \int_{L_n} D_f - \varepsilon(1-\varepsilon)^k\,\lambda_e(L_n) &\leqq \mu(f(L_n)) \leqq \\ &\leqq (1+\varepsilon)^k \int_{L_n} D_f + \varepsilon(1+\varepsilon)^k\,\lambda_e(L_n)\,.\end{aligned} \tag{5.33}$$

Les ensembles L_n sont mesurables au sens de Lebesgue, disjoint et $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$. C'est pourquoi

$$\lambda_e(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_e(L_n)\,, \quad \int_{\Omega} D_f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{L_n} D_f\,. \tag{5.34}$$

Ensuite, pour chaque $a \in \Omega$, K_a étant ouvert, on a $K_a = \overline{K}_a - \dot{K}_a$. Les ensembles $\overline{K}_a$, $\dot{K}_a$ sont compacts. Alors on a $\dot{K}_a \subset \overline{K}_a \subset \Omega \subset \Omega_0$, les ensembles $f(\overline{K}_a), f(\dot{K}_a)$ sont définis et, en vertu de la continuité de f, ils sont aussi compacts, donc boreliens. Comme f est biunivoque, on a $f(K_a) = f(\overline{K}_a) - f(\dot{K}_a)$. Alors, l'ensemble $f(K_a)$ est borelien pour chaque $a \in \Omega$. En vertu de (5.25) on a

$$f(L_n) = f(K_{a_n}) - \bigcup_{i=1}^{\infty} f(K_{a_i})\,.$$

Il découle d'ici que chacun des ensembles $f(L_n)$ est borelien, donc μ-mesurable d'après le théorème 2.1(b). Comme tous deux d'entre les ensembles $f(L_n)$ sont disjoints et comme $f(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(L_n)$ d'après le théorème 2.1(e), il en découle

$$\mu(f(\Omega)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f(L_n))\,. \tag{5.35}$$

Par l'addition des relations (5.33) et par l'application de (5.34) et (5.35) on obtient

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)^k \int_{\Omega} D_f - \varepsilon(1-\varepsilon)^k\,\lambda_e(\Omega) &\leqq \mu(f(\Omega)) \leqq \\ &\leqq (1+\varepsilon)^k \int_{\Omega} D_f + \varepsilon(1+\varepsilon)^k\,\lambda_e(\Omega)\,.\end{aligned}$$

Comme ε a été un nombre arbitraire entre 0 et 1 et que $0 \leqq \lambda_e(\Omega) < \infty$, il découle d'ici (5.22) (pour Ω ouvert).

II. Soit $\lambda_e(\Omega_0) < \infty$ et $\Omega \subset \Omega_0$, Ω étant mesurable au sens de Lebesgue. Nous allons tout d'abord démontrer que

$$\mu(f(\Omega)) \leqq \int_\Omega D_f . \tag{5.36}$$

Il suffit de démontrer que pour chaque $\varepsilon > 0$ on a

$$\mu(f(\Omega)) < \int_\Omega D_f + \varepsilon . \tag{5.37}$$

Alors, ayons un nombre $\varepsilon > 0$. Pour $n = 1, 2, \ldots$ définissons

$$Y_n = \{u \in \Omega : n - 1 \leqq D_f(u) < n\} , \tag{5.38}$$

de sorte que

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \tag{5.39}$$

car $D_f(u) > 0$ pour chaque $u \in \Omega_0$. Pour chaque n naturel définissons

$$G_n = \{u \in \Omega_0 : D_f(u) < n\} . \tag{5.40}$$

La fonction D_f étant continue, les ensembles G_n sont ouverts.

Il découle de (5.38) que les ensembles Y_n sont mesurables au sens de Lebesgue. Alors, il existe (voir [6], chap. I, §9, théorème 19) pour $n = 1, 2, \ldots$ des ensembles ouverts H_n tels que

$$Y_n \subset H_n,\ \lambda_e(H_n - Y_n) < \frac{\varepsilon}{n2^n} . \tag{5.41}$$

Pour $n = 1, 2, \ldots$ définissons encore

$$Z_n = H_n \cap G_n .$$

Les ensembles Z_n sont ouverts et d'après (5.41) nous avons

$$Y_n \subset Z_n ,\quad \lambda_e(Z_n - Y_n) < \frac{\varepsilon}{n2^n} . \tag{5.42}$$

Les ensembles Z_n étant ouverts, on peut d'après I employer la formule (5.22), en posant ici Z_n à la place de Ω; on obtient ainsi

$$\mu(f(Z_n)) = \int_{Z_n} D_f .$$

Il découle de là, de (5.40), (5.42) et de l'axiome II:

$$\mu(f(Y_n)) \leqq \mu(f(Z_n)) = \int_{Z_n} D_f = \int_{Y_n} D_f + \int_{Z_n - Y_n} D_f < \int_{Y_n} D_f + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Les ensembles Y_n étant mesurables au sens de Lebesgue et disjoints, on a (voir [6], chap. III, §2, théorème 48) d'après (5.39):

$$\int_{\Omega} D_f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{Y_n} D_f$$

et l'on obtient de (5.39) et de l'axiome III:

$$\mu(f(\Omega)) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f(Y_n)) < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{Y_n} D_f + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \int_{\Omega} D_f + \varepsilon,$$

alors (5.37) est vrai pour chaque $\varepsilon > 0$, donc aussi (5.36).

Considérons maintenant de nouveau des ensembles ouverts $Z_n = H_n \cap G_n$, où G_n sont définis par (5.40) et H_n satisfont à (5.41) pour un $\varepsilon > 0$, Y_n étant définis par (5.38). Selon (5.42) et (5.40), on a

$$0 \leqq \int_{Z_n - Y_n} D_f < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Posons $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. D'après (5.39) et (5.42) nous avons

$$Z - \Omega \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (Z_n - Y_n),$$

alors

$$0 \leqq \int_{Z - \Omega} D_f \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{Z_n - Y_n} D_f < \varepsilon;$$

on a donc

(5.43) $$\left| \int_{Z - \Omega} D_f \right| < \infty.$$

L'ensemble Z étant ouvert, on a

(5.44) $$\mu(f(Z)) = \int_{Z} D_f$$

d'après I. Si l'on avait

$$\mu(f(\Omega)) < \int_{\Omega} D_f,$$

d'après (5.36) (où l'on écrit $Z - \Omega$ à la place de Ω), d'après (5.44) et d'après l'axiome III on aurait

$$\mu(f(Z)) \leqq \mu(f(\Omega)) + \mu(f(Z - \Omega)) < \int_\Omega D_f + \int_{Z-\Omega} D_f = \int_Z D_f ,$$

ce qui est en contradiction avec (5.44).

III. Soit $\lambda_e(\Omega_0) = \infty$. Définissons les ensembles

$$\tilde{\Omega}_0 = \{(v_1, \ldots, v_k) \in E_k : v_j = \operatorname{arctg} u_j, (u_1, \ldots, u_k) \subset \Omega_0\} ,$$
$$\tilde{\Omega} = \{(v_1, \ldots, v_k) \in E_k : v_j = \operatorname{arctg} u_j, (u_1, \ldots, u_k) \subset \Omega\}$$

et l'application

$$g = (g_1, \ldots, g_n) : \tilde{\Omega}_0 \to E_m , \; g_i(v_1, \ldots, v_k) = f_i(\operatorname{tg} v_1, \ldots, \operatorname{tg} v_k) .$$

L'ensemble $\tilde{\Omega}_0$ est ouvert et $\tilde{\Omega} \subset \tilde{\Omega}_0$. Ensuite, l'ensemble $\tilde{\Omega}_0$ est borné, donc $\lambda_e(\tilde{\Omega}_0) < < \infty$. Les applications g_i possèdent des dérivées partielles continues dans tout l'ensemble $\tilde{\Omega}_0$ et l'on a pour chaque point $(v_1, \ldots, v_k) \in E_k$ (car $-\frac{1}{2}\pi < v_j < \frac{1}{2}\pi$):

$$D_g(v_1, \ldots, v_k) = D_f(\operatorname{tg} v_1, \ldots, \operatorname{tg} v_k) \prod_{j=1}^{k} \cos^{-2} v_j > 0 .$$

Alors d'après II on a

$$\mu(g(\tilde{\Omega})) = \int_{\tilde{\Omega}} D_g = \int_{\tilde{\Omega}} D_f(\operatorname{tg} v_1, \ldots, \operatorname{tg} v_k) \prod_{j=1}^{k} \cos^{-2} v_j \, dv_1, \ldots, dv_k .$$

Mais $g(\tilde{\Omega}) = f(\Omega)$ et d'après le théorème de substitution (voir [6], chap. VI, §2, théorème 103) nous avons

$$\int_{\tilde{\Omega}} D_f(\operatorname{tg} v_1, \ldots, \operatorname{tg} v_k) \prod_{j=1}^{k} \cos^{-2} v_j \, dv_1, \ldots, dv_k =$$
$$= \int_\Omega D_f(u_1, \ldots, u_k) \, du_1, \ldots, du_k ,$$

d'où il découle (5.22).

6. VARIÉTÉS AVEC DES POINTS SINGULIERS

Dans le théorème 5.5 on a supposé que $D_f(u) > 0$ à chaque point $u \in \Omega_0$. Maintenant nous allons montrer que cette supposition n'est pas essentielle.

Théorème 6.1. *Soit $0 \leqq h < k \leqq m$. Ayons un ensemble ouvert $\Omega \subset E_k$ et une application $f = (f_1, \ldots, f_m) : \Omega \to E_m$. Supposons que les fonctions f_i possèdent une différentielle totale dans tout l'ensemble Ω et des dérivées partielles continues au point $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \Omega$. Soit $\{j_1, \ldots, j_h, l_1, \ldots, l_{k-h}\}$ une permutation des nombres $\{1, \ldots, k\}$. Supposons que parmi les vecteurs $\partial_1 f(a), \ldots, \partial_k f(a)$ il y en a précisément h linéairement indépendants et que ce sont des vecteurs $\partial_{j_1} f(a), \ldots, \ldots, \partial_{j_h} f(a)$. Dans E_m ayons des vecteurs $\mathbf{s}_{l_1}, \ldots, \mathbf{s}_{l_{k-h}}$ tels que*[4])

$$(6.1)\qquad s_{l_\iota} \cdot \partial_{j_\varkappa} f(a) = 0\,, \quad s_{l_\iota} \cdot s_{l_\nu} = \delta_{\iota,\nu} \quad (\iota, \nu = 1, \ldots, k - h;\ \varkappa = 1, \ldots, h)\,.$$

Ayons deux nombres $\eta > 0$, $\Lambda > 1$ et définissons l'application $g_{\Lambda,\eta} : E_k \to E_m$ par la formule

$$(6.2)\qquad g_{\Lambda,\eta}(u) = f(a) + \Lambda\Big(\sum_{\iota=1}^{k} (u_\iota - a_\iota)\, \partial_\iota f(a) + \sum_{\iota=1}^{k-h} \eta(u_{l_\iota} - a_{l_\iota})\, s_{l_\iota}\Big)\,.$$

Alors il existe un nombre $\delta > 0$ tel que si

$$(6.3)\qquad \max_{\iota=1,\ldots,k} (|u_\iota - a_\iota|) < \delta\,, \quad \max_{\iota=1,\ldots,k} (|v_\iota - a_\iota|) < \delta\,,$$

on a

$$(6.4)\qquad u = (u_1, \ldots, u_k) \in \Omega\,, \quad v = (v_1, \ldots, v_k) \in \Omega\,,$$

$$(6.5)\qquad \varrho(f(u), f(v)) \leqq \varrho(g_{\Lambda,\eta}(u), g_{\Lambda,\eta}(v))\,.$$

Démonstration. Désignons $q_{ij} = \partial_j f_i(a)$. Définissons des vecteurs $\mathbf{w}_{\Lambda,\eta,1}, \ldots, \mathbf{w}_{\Lambda,\eta,k}$ de la façon suivante:

$$\mathbf{w}_{\Lambda,\eta,\iota} = \Lambda\, \partial_\iota f(a) \quad \text{pour} \quad \iota = j_1, \ldots, j_h\,,$$

$$\mathbf{w}_{\Lambda,\eta,\iota} = \Lambda(\partial_\iota f(a) + \eta s_\iota) \quad \text{pour} \quad \iota = l_1, \ldots, l_{k-h}\,,$$

de sorte que

$$g_{\Lambda,\eta}(u) = f(a) + \sum_{\iota=1}^{k} (u_\iota - a_\iota)\, \mathbf{w}_{\Lambda,\eta,\iota}\,.$$

Les vecteurs $\mathbf{w}_{\Lambda,\eta,1}, \ldots, \mathbf{w}_{\Lambda,\eta,k}$ sont en vertu de (6.1) pour chaque $\eta > 0$, $\Lambda > 1$ linéairement indépendants, donc l'application g est biunivoque. Si $s_{l_\iota} = (s_{l_\iota,1}, \ldots, s_{l_\iota,m})$, $g_{\Lambda,\eta} = (g_{\Lambda,\eta,1}, \ldots, g_{\Lambda,\eta,m})$, alors selon (6.2) pour chaque $u = (u_1, \ldots, u_k) \in E_k$, $v = (v_1, \ldots, v_k) \in E_k$ on obtient

$$g_{\Lambda,\eta,i}(u) - g_{\Lambda,\eta,i}(v) = \Lambda\Big(\sum_{\iota=1}^{k} (u_\iota - v_\iota)\, q_{i,\iota} + \sum_{\iota=1}^{k-h} \eta(u_{l_\iota} - v_{l_\iota})\, s_{l_\iota,i}\Big)\,.$$

---

[4]) $\delta_{\iota,\nu} = \begin{cases} 0 & \text{pour } \iota \neq \nu \\ 1 & \text{pour } \iota = \nu \end{cases}$

En vertu de (6.1) on a

$$(6.6)\qquad \varrho(g_{A,\eta}(u), g_{A,\eta}(v)) = \Big(\sum_{i=1}^{m} (g_{A,\eta,i}(u) - g_{A,\eta,i}(v))^2\Big)^{1/2} =$$

$$= \Big(\sum_{\iota=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} \gamma_{\iota,\nu}(u_\iota - v_\iota)(u_\nu - v_\nu) + \eta^2 \sum_{\iota=1}^{k-h} (u_{l_\iota} - v_{l_\iota})^2\Big)^{1/2},$$

où

$$(6.7)\qquad \gamma_{\iota,\nu} = \sum_{i=1}^{m} q_{i\iota} q_{i\nu}.$$

L'application $g_{A,\eta}$ étant biunivoque, l'expression (6.6) ne peut être égale à zéro que pour $u = v$, autrement elle est toujours positive. La fonction

$$\sum_{\iota=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} \gamma_{\iota\nu} u_\iota u_\nu + \eta^2 \sum_{\iota=1}^{k-h} u_{l_\iota}^2$$

est continue, donc elle prend sur l'ensemble compact $\sum_{\iota=1}^{k} u_\iota^2 = 1$ sa plus petite valeur N et l'on a $N > 0$. Alors

$$\sum_{\iota=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} \gamma_{\iota\nu}(u_\iota - v_\iota)(u_\nu - v_\nu) + \eta^2 \sum_{\iota=1}^{k-h} (u_{l_\iota} - v_{l_\iota})^2 =$$

$$= \left[\sum_{\iota=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} \gamma_{\iota\nu} \frac{u_\iota - v_\iota}{\big(\sum_{\varkappa=1}^{k} (u_\varkappa - v_\varkappa)^2\big)^{1/2}} \cdot \frac{u_\nu - v_\nu}{\big(\sum_{\varkappa=1}^{k} (u_\varkappa - v_\varkappa)^2\big)^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \eta^2 \sum_{\iota=1}^{k-h} \left(\frac{u_{l_\iota} - v_{l_\iota}}{\big(\sum_{\varkappa=1}^{k} (u_\varkappa - v_\varkappa)^2\big)^{1/2}} \right)^2 \right] \cdot \sum_{\varkappa=1}^{k} (u_\varkappa - v_\varkappa)^2 \geqq N \sum_{\varkappa=1}^{k} (u_\varkappa - v_\varkappa)^2,$$

donc

$$(6.8)\qquad \sum_{\iota=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} \gamma_{\iota\nu}(u_\iota - v_\iota)(u_\nu - v_\nu) + \eta^2 \sum_{\iota=1}^{k-h} (u_{l_\iota} - v_{l_\iota})^2 \geqq N \sum_{\varkappa=1}^{k} (u_\varkappa - v_\varkappa)^2.$$

L'ensemble Ω étant ouvert, il existe un nombre δ_0 tel que $\Omega(a, \delta_0) \subset \Omega$. A tous deux points $u \in \Omega(a, \delta_0)$, $v \in \Omega(a, \delta_0)$, il existe des points $\xi_1, \ldots, \xi_m$, $\xi_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{ik})$, situés sur le segment joignant les points u, v tels que

$$f_i(u) - f_i(v) = \sum_{\iota=1}^{k} \partial_\iota f_i(\xi_i)(u_\iota - v_\iota),$$

(voir [5], chap. VII, §11, théorème 203). D'ici on obtient

$$f_i(u) - f_i(v) = \sum_{\iota=1}^{k} \{q_{i\iota} + (\partial_\iota f_i(\xi_i) - q_{i\iota})\}(u_\iota - v_\iota),$$

alors en vertu de (6.7) on obtient

$$\sum_{i=1}^{m} (f_i(u) - f_i(v))^2 =$$

$$= \sum_{\iota=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} \{\gamma_{\iota\nu} + 2\sum_{i=1}^{m} q_{i\iota}(\partial_\nu f_i(\xi_i) - q_{i\nu}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (\partial_\iota f_i(\xi_i) - q_{i\iota})(\partial_\nu f_i(\xi_i) - q_{i\nu})\} \,.$$

$$. (u_\iota - v_\iota)(u_\nu - v_\nu) \leqq \sum_{\iota=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} \gamma_{\iota\nu}(u_\iota - v_\iota)(u_\nu - v_\nu) +$$

$$+ \eta^2 \sum_{\iota=1}^{k-h} (u_{l_\iota} - v_{l_\iota})^2 +$$

$$+ \sum_{\iota=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} \{ \sum_{i=1}^{m} 2q_{i\iota}(\partial_\nu f_i(\xi_i) - q_{i\nu}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (\partial_\iota f_i(\xi_i) - q_{i\iota})(\partial_\nu f_i(\xi_i) - q_{i\nu})\} (u_\iota - v_\iota)(u_\nu - v_\nu) \,,$$

de sorte que

$$\varrho(f(u), f(v)) \leqq \{ \sum_{\iota=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} \gamma_{\iota\nu}(u_\iota - v_\iota)(u_\nu - v_\nu) + \eta^2 \sum_{\iota=1}^{k-h} (u_{l_\iota} - v_{l_\iota})^2\}^{1/2} \{1 + A_1 + A_2\}^{1/2} \,, \tag{6.9}$$

où

$$A_1 = \frac{2\sum_{\iota=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} q_{i\iota}(\partial_\nu f_i(\xi_i) - q_{i\nu})(u_\iota - v_\iota)(u_\nu - v_\nu)}{\sum_{\iota=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} \gamma_{\iota\nu}(u_\iota - v_\iota)(u_\nu - v_\nu) + \eta^2 \sum_{\iota=1}^{k-h} (u_{l_\iota} - v_{l_\iota})^2} \,,$$

$$A_2 = \frac{\sum_{\iota=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} (\partial_\iota f_i(\xi_i) - q_{i\iota})(\partial_\nu f_i(\xi_i) - q_{i\nu})(u_\iota - v_\iota)(u_\nu - v_\nu)}{\sum_{\iota=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} \gamma_{\iota\nu}(u_\iota - v_\iota)(u_\nu - v_\nu) + \eta^2 \sum_{\iota=1}^{k-h} (u_{l_\iota} - v_{l_\iota})^2} \,.$$

Désignons

$$Q = \max_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq \iota \leqq k}} (|q_{i\iota}|) \,, \tag{6.10}$$

$$\varepsilon = \min\left(1, \frac{N(\Lambda^2 - 1)}{mk^2(2Q + 1)}\right) . \tag{6.11}$$

Comme $\partial_\iota f_i$ sont par supposition continues au point a, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que $\delta \leqq \delta_0$ et que si $u = (u_1, \ldots, u_k) \in \Omega(a, \delta)$, alors

$$(6.12) \qquad \left|\partial_\iota f_i(u) - q_{i\iota}\right| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad \iota = 1, \ldots, k; \ i = 1, \ldots, m\,.$$

Si nous bornons aux points u, v tels que (6.3) est vrai, alors en vertu de $\delta \leqq \delta_0$ nous avons (6.4); on a aussi $\xi_i \in \Omega(a, \delta)$ pour $i = 1, \ldots, m$ (car $\Omega(a, \delta)$ est convexe) et d'après (6.8), (6.10) et (6.12) nous obtenons

$$|A_1| \leqq \frac{2\sum\limits_{\iota=1}^{k}\sum\limits_{\nu=1}^{k}\sum\limits_{i=1}^{m}|q_{i\iota}|\,|\partial_\nu f_i(\xi_i) - q_{i\nu}|\,|u_\iota - v_\iota|\,|u_\nu - v_\nu|}{N\sum\limits_{\varkappa=1}^{k}(u_\varkappa - v_\varkappa)^2} < \frac{2mk^2Q\varepsilon}{N},$$

$$|A_2| \leqq \frac{\sum\limits_{\iota=1}^{k}\sum\limits_{\nu=1}^{k}\sum\limits_{i=1}^{m}|\partial_\iota f_i(\xi_i) - q_{i\iota}|\,|\partial_\nu f_i(\xi_i) - q_{i\nu}|\,|u_\iota - v_\iota|\,|u_\nu - v_\nu|}{N\sum\limits_{\varkappa=1}^{k}(u_\varkappa - v_\varkappa)^2} < \frac{mk^2\varepsilon^2}{N},$$

alors d'après (6.11) nous obtenons

$$1 + A_1 + A_2 \leqq 1 + |A_1| + |A_2| < 1 + \frac{2mk^2Q\varepsilon}{N} + \frac{mk^2\varepsilon^2}{N} \leqq$$

$$\leqq 1 + \frac{mk^2}{N}\varepsilon(2Q + 1) \leqq 1 + \frac{mk^2}{N}(2Q + 1)\frac{N(\Lambda^2 - 1)}{mk^2(2Q + 1)} = \Lambda^2,$$

d'où il découle (6.5) selon (6.9) et (6.6).

Théorème 6.2. *Soit $0 < k \leqq m$. Ayons un ensemble ouvert $\Omega \subset E_k$ et une application $f = (f_1, \ldots, f_m) : \Omega \to E_m$. Supposons que les fonctions f_i possèdent une différentielle totale dans tout l'ensemble Ω et des dérivées partielles continues au point $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \Omega$. Soit $D_f(a) = 0$. Soit μ une mesure métrique invariante k-dimensionnelle normée dans E_m, λ_e la mesure extérieure de Lebesgue dans E_k. Alors à chaque nombre $\zeta > 0$ il existe un ensemble ouvert $G \subset \Omega$ possédant les propriétés suivantes:*

(a) *$a \in G$;*

(b) *pour chaque ensemble $M \subset G$ mesurable au sens de Lebesgue on a*

$$(6.13) \qquad \mu(f(M)) \leqq \zeta\, \lambda_e(M)\,.$$

Démonstration. Comme $D_f(a) = 0$, les vecteurs $\partial_1 f(a), \ldots, \partial_k f(a)$ sont linéairement dépendants. Supposons qu'il y a précisément h vecteurs linéairement indépendants parmi eux ($0 \leqq h < k$) et que ce sont les vecteurs $\partial_{j_1} f(a)$, $\partial_{j_2} f(a), \ldots$

..., $\partial_{j_h}f(a)$. Soit $\{j_1, \ldots, j_h, l_1, \ldots, l_{k-h}\}$ une permutation des nombres $\{1, \ldots, k\}$. Dans E_m, on peut choisir $k - h$ vecteurs $\mathbf{s}_{l_1}, \mathbf{s}_{l_2}, \ldots, \mathbf{s}_{l_{k-h}}$ tels que (6.1) a lieu. Posons

$$\text{(6.14)} \qquad \eta = \min\left(1, \zeta 2^{-k}(\delta_k(\partial_{j_1}f(a), \ldots, \partial_{j_h}f(a)\,,\ \mathbf{s}_{l_1}, \ldots, \mathbf{s}_{l_{k-h}}))^{-1/2}\right)$$

et considérons l'application $g_{2,\eta} : E_k \to E_m$ définie par (6.2) (pour $\Lambda = 2$). D'après le théorème 6.1 il existe un nombre $\delta > 0$ tel que (6.3) implique (6.4) et (6.5). Posons $G = \Omega(a, \delta)$. Alors $a \in G$ et selon (6.4) on a $G \subset \Omega$. Ensuite, G est ouvert. Si $M \subset G$ est un ensemble mesurable dans le sens de Lebesgue, alors d'après le théorème 5.3 on a

$$\mu(g_{2,\eta}(M)) \leqq (\delta_k(2\partial_{j_1}f(a), \ldots, 2\partial_{j_h}f(a)\,,\ 2(\partial_{l_1}f(a) + \eta\mathbf{s}_{l_1}), \ldots,$$
$$2(\partial_{l_{k-h}}f(a) + \eta\mathbf{s}_{l_{k-h}})))^{1/2}\,\lambda_e(M)\,,$$

car les vecteurs $\partial_{j_1}f(a), \ldots, \partial_{j_h}f(a), \mathbf{s}_{l_1}, \ldots, \mathbf{s}_{l_{k-h}}$ sont en vertu de (6.1) linéairement indépendants et les vecteurs $\partial_{l_1}f(a), \ldots, \partial_{l_{k-h}}f(a)$ sont par supposition des combinaisons linéaires des vecteurs $\partial_{j_1}f(a), \ldots, \partial_{j_h}f(a)$. Ensuite, on a

$$\partial_k(2\partial_{j_1}f(a), \ldots, 2\partial_{j_h}f(a), 2(\partial_{l_1}f(a) + \eta\mathbf{s}_{l_1}), \ldots, 2(\partial_{l_{k-h}}f(a) + \eta\mathbf{s}_{l_{k-h}})) =$$
$$= 2^{2k}\eta^{2(k-h)}\delta_k(\partial_{j_1}f(a), \ldots, \partial_{j_h}f(a), \mathbf{s}_{l_1}, \ldots, \mathbf{s}_{l_{k-h}}\,,$$

alors en vertu de (6.14) on obtient

$$\mu(g_{2,\eta}(M)) \leqq 2^k\eta^{k-h}(\delta_k(\partial_{j_1}f(a), \ldots, \partial_{j_h}f(a)\,,\ \mathbf{s}_{l_1}, \ldots, \mathbf{s}_{l_{k-h}}))^{1/2}\,\lambda_e(M) \leqq$$
$$\leqq 2^k\eta(\delta_k(\partial_{j_1}f(a), \ldots, \partial_{j_h}f(a), \mathbf{s}_{l_1}, \ldots, \mathbf{s}_{l_{k-h}}))^{1/2}\,\lambda_e(M) \leqq \zeta\,\lambda_e(M)\,.$$

Mais d'après (6.5) et d'après l'axiome V on a $\mu(f(M)) \leqq \mu(g_{2,\eta}(M))$, alors on obtient (6.13).

Théorème 6.3. *Soit $0 < k \leqq m$. Ayons un ensemble ouvert $\Omega \subset E_k$ et une application $f = (f_1, \ldots, f_m) : \Omega \to E_m$. Supposons que les fonctions f_i possèdent dans l'ensemble Ω des dérivées partielles continues. Soit*

$$N = \{a \in \Omega : D_f(a) = 0\}\,.$$

Soit μ une mesure métrique invariante k-dimensionnelle normée. Alors

$$\mu(f(N)) = 0\,.$$

Démonstration. I. Soit tout d'abord Ω un ensemble borné, donc $\lambda_e(\Omega) < \infty$. A chaque point $a \in \Omega$ avec $D_f(a) = 0$ et à chaque nombre $\zeta > 0$ il existe d'après le théorème 6.2 un ensemble ouvert $G_{a,\zeta} \subset \Omega$ tel que $a \in G_{a,\zeta}$ et que (6.13) pour chaque ensemble $M \subset G_{a,\zeta}$ mesurable au sens de Lebesgue. Les ensembles $G_{a,\zeta}$ couvrent (pour ζ fixe) l'ensemble N. Alors nous pouvons choisir parmi eux un nombre dénombrable $G_1, G_2, \ldots$ recouvrant également l'ensemble N (voir [5], chap. VI, §15, théorème 154 et chap. VI, §15, remarque 2). Posons

$$M_i = G_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} G_j\,, \quad i = 1, 2, \dots\,.$$

Les ensembles M_i sont boreliens, donc mesurables au sens de Lebesgue; de plus on a $M_i \subset G_i$, alors d'après le théorème 6.2

$$\mu(f(M_i)) \leqq \zeta\, \lambda_e(M_i)\,. \tag{6.15}$$

Ensuite, les ensembles M_i sont disjoints et $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$, alors $N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ et $f(N) \subset f(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(M_i)$. Donc, d'après les axiomes II et III, (6.15), le théorème 2.1(e) et d'après la remarque à la fin du § 4 nous obtenons

$$\mu(f(N)) \leqq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} f(M_i)) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(f(M_i)) < \sum_{i=1}^{\infty} \zeta\, \lambda_e(M_i) =$$

$$= \zeta\, \lambda_e(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i) \leqq \zeta\, \lambda_e(\Omega)\,.$$

Comme $\lambda_e(\Omega) < \infty$ et ζ est un nombre positif arbitraire, il découle de là que $\mu(f(N)) = 0$.

II. Si Ω n'est pas borné, nous pouvons écrire $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, où Ω_i sont des ensembles ouverts bornés. Ensuite on a $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} (N \cap \Omega_i)$, donc $f(N) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(N \cap \Omega_i)$. D'après I, on a $\mu(f(N \cap \Omega_i)) = 0$ pour chaque i, alors d'après l'axiome III nous obtenons

$$\mu(f(N)) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(f(N \cap \Omega_i)) = 0\,.$$

Remarque. Le théorème 6.3 a été prouvé pour le cas de $k = m$ (pour le cas de la mesure de Lebesgue) par A. SARD dans [9]; voir aussi [8], chap. I, §3, théorème 3.

Théorème 6.4. *Soit $0 < k \leqq m$. Ayons un ensemble ouvert $\Omega_0 \subset E_k$ et une application biunivoque $f = (f_1, \dots, f_m) : \Omega_0 \to E_m$. Supposons que les fonctions f_i possèdent dans l'ensemble Ω_0 des dérivées partielles continues. Soit μ une mesure métrique invariante k-dimensionnelle normée dans E_m. Alors pour chaque sous-ensemble Ω de l'ensemble Ω_0 mesurable au sens de Lebesgue on a*

$$\mu(f(\Omega)) = \int_{\Omega} D_f\,. \tag{6.16}$$