ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 103 * PRAHA 20. 11. 1978 * ČÍSLO 4

ON THE TOLERANCE EXTENSION PROPERTY

IVAN CHAJDA, Přerov

(Received September 19, 1975)

The Congruence Extension Property is one of the important properties of classes of algebras. Some conditions for classes of algebras to satisfy this property are studied in [1], [2], [3] and [4]. It is proved in [1] and [4] that a class of algebras closed under subalgebras satisfies the Congruence Extension Property if and only if it satisfies the so called Principal Congruence Extension Property. The aim of this paper is to give an analogous characterization for extensions of tolerances in the case of classes of commutative semigroups.

Let A be a set. By a *tolerance* (or *tolerance relation*) *on* A we mean a reflexive and symmetric binary relation on A. A tolerance T on A is said to be *compatible* (*with an algebra* $\mathfrak{A} = (A, F)$) provided $\langle f(a_1, \ldots, a_n), f(b_1, \ldots, b_n)\rangle \in T$ for each n-ary $f \in F$ $(n > 0)$ and arbitrary $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$ with $\langle a_i, b_i\rangle \in T$ for $i = 1, \ldots, n$. For the concept and properties of compatible tolerances see e.g. [5]–[15].

Denote by $LT(\mathfrak{A})$ the set of all tolerances compatible with an algebra $\mathfrak{A}$. Clearly every congruence on $\mathfrak{A}$ belongs to $LT(\mathfrak{A})$, thus $LT(\mathfrak{A}) \neq \emptyset$. As is proved in [6], $LT(\mathfrak{A})$ is an algebraic lattice (i.e., complete compactly generated lattice) with respect to the set inclusion. In the general case, $LT(\mathfrak{A})$ is not a sublattice of the congruence lattice (see [6], [9]). If $T_i \in LT(\mathfrak{A})$ for $i \in I$, denote by $\bigvee_A\{T_i;\, i \in I\}$ the supremum of $\{T_i,\, i \in I\}$ in $LT(\mathfrak{A})$. The infimum is clearly equal to the set-intersection.

Definition 1. Let $\mathfrak{A} = (A, F)$ be an algebra, $a, b \in A$. The compatible tolerance $T_A(a, b) = \bigcap\{T \in LT(\mathfrak{A});\ \langle a, b\rangle \in T\}$ is called the *principal tolerance on* $\mathfrak{A}$ *generated by* a, b.

The concept of principal tolerance is clearly an analogon of the *principal congruence* in the sense of [1], [4].

If R is a binary relation on a set M and $S \subseteq M$, denote by $R|_S$ the *restriction* of R onto S, i.e. $R|_S = R \cap (S \times S)$. Evidently, the restriction of a compatible tolerance onto a subalgebra is also a tolerance compatible with this subalgebra.

Definition 2. A class $\mathscr{C}$ of algebras is said to *satisfy the (Principal) Tolerance Extension Property* if for each $\mathfrak{A} \in \mathscr{C}$ and each subalgebra $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{A}$ every (principal) tolerance compatible with $\mathfrak{B}$ is the restriction of a tolerance compatible with $\mathfrak{A}$.

We abbreviate the Principal Tolerance Extension Property by (PTEP) and the Tolerance Extension Property by (TEP).

Lemma 1. *Let* $\mathfrak{B} = (B, F)$ *be a subalgebra of* $\mathfrak{A} = (A, F)$ *and* $T_\alpha \in LT(\mathfrak{A})$ *for* $\alpha \in I$. *Then* $\bigvee_B\{T_\alpha|_B;\ \alpha \in I\} \subseteq (\bigvee_A\{T_\alpha;\ \alpha \in I\})|_B$.

Proof. Let $\langle a, b\rangle \in \bigvee_B\{T_\alpha|_B;\ \alpha \in I\}$. Then $a, b \in B$ and, by Theorem 2 in [6], there exists a polynomial $p(x_1, \ldots, x_n)$ over F and elements $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in B$ such that $\langle a_i, b_i\rangle \in T_{\alpha_i}$ for some $\alpha_i \in I$ $(i = 1, \ldots, n)$ and $a = p(a_1, \ldots, a_n)$, $b = p(b_1, \ldots, b_n)$. Hence by the same argument $\langle a, b\rangle \in \bigvee_A\{T_\alpha;\ \alpha \in I\}$. As $a, b \in B$, the proof is complete.

Lemma 2. *Let* $\mathscr{C}$ *be a class of algebras closed under subalgebras satisfying (PTEP). Then* $T_B(a, b) = T_A(a, b)|_B$ *for each subalgebra* $\mathfrak{B} = (B, F)$ *of* $\mathfrak{A} \in \mathscr{C}$ *and every* $a, b \in B$.

Proof. If $T \in LT(\mathfrak{A})$ and $T_B(a, b) = T|_B$, then clearly $T_A(a, b) \subseteq T$, thus $T_A(a, b)|_B \subseteq T|_B$. Moreover, $\langle a, b\rangle \in T_A(a, b)|_B \in LT(\mathfrak{B})$ implies $T_B(a, b) \subseteq T_A(a, b)|_B$. Consequently,

$$T_B(a, b) \subseteq T_A(a, b)|_B \subseteq T|_B = T_B(a, b)$$

which proves the statement.

Notation. Let $(S, \circ)$ be a semigroup and $a \in S$. Put $a^1 = a$, $a^{n+1} = a \circ a^n$ for $n > 0$. Although $(S, \circ)$ need not contain the unit element, let us agree upon the following abbreviation: if $a, b \in S$ and $c = a^m \circ b$ for $m \geqq 0$, then $c = b$ is meant in the case $m = 0$. Analogously for $c = a \circ b^m$.

Lemma 3. *Let* $\mathfrak{S} = (S, \circ)$ *be a commutative semigroup and* $a, b \in S$. *Then*

$$T_S(a, b) = \{\langle x, y\rangle;\ x = a^i \circ b^n \circ z^k,\ y = a^j \circ b^m \circ z^k, \text{ where } i, j, m, n \geqq 0,$$
$$k \in \{0, 1\},\ z \in S,\ i + n + k > 0,\ i + n = j + m\}.$$

Proof. Put

$$R = \{\langle x, y\rangle;\ x = a^i \circ b^n \circ z^k,\ y = a^j \circ b^m \circ z^k, \text{ where } i, j, n, m \geqq 0,$$
$$k \in \{0, 1\},\ z \in S,\ i + n + k > 0,\ i + n = j + m\}.$$

Clearly $R \subseteq T_S(a, b)$. For $k = 0$, $i = 1$, $n = 0$, $j = 0$, $m = 1$ we have $\langle a, b\rangle \in R$, for $k = 1$, $i = j = n = m = 0$ we have $\langle z, z\rangle \in R$ for each $z \in S$; since $i + n =$

$= j + m$, R is also symmetric, thus R is a tolerance on S. We shall prove that R is a tolerance compatible with $\mathfrak{S}$. If $\langle x, y\rangle \in R$, $\langle u, v\rangle \in R$, then $x = a^i \circ b^j \circ z^k$, $y = a^j \circ b^m \circ z^k$, $u = a^{i'} \circ b^{n'} \circ t^{k'}$, $v = a^{j'} \circ b^{m'} \circ t^{k'}$ for prescribed i, j, n, m, i', j', n', m', k, k', thus $x \circ u = a^{i+i'} \circ b^{n+n'} w^{k_1}$, $y \circ v = a^{j+j'} \circ b^{m+m'} \circ w^{k_1}$, where clearly $(i + i') + (n + n') = (j + j') + (m + m')$. Put $k_1 = 1$ and $w = z^k \circ t^{k'}$ for $k + k' > 0$, $k_1 = 0$ for $k + k' = 0$. Thus $k_1 \in \{0, 1\}$ and clearly $(i + i') + (n + n') + k_1 > 0$, hence also $\langle x \circ u, y \circ v\rangle \in R$. Hence $R \in LT(\mathfrak{S})$, thus $T_S(a, b) \subseteq R$ which proves the converse inclusion.

Lemma 4. *Let $\mathfrak{M} = (M, \circ)$ be a subsemigroup of the commutative semigroup $\mathfrak{S} = (S, \circ)$ and $T \in LT(\mathfrak{M})$. If*

$$\langle x, y\rangle \in (\mathsf{V}_S\{T_S(a, b); \langle a, b\rangle \in T\})|_M ,$$

then there exist $a_0, b_0 \in M$ with $\langle a_0, b_0\rangle \in T$ and $\langle x, y\rangle \in T_S(a_0, b_0)|_M$.

Proof. Let $x, y \in M$ and $\langle x, y\rangle \in \mathsf{V}_S\{T_S(a, b); \langle a, b\rangle \in T\}$. Then, by Theorem 2 in [6], there exist $x_p, y_p \in S$ ($p = 1, \ldots, r$) and an r-ary ($r > 0$) semigroup polynomial q with $\langle x_p, y_p\rangle \in T_S(a_p, b_p)$ for some $\langle a_p, b_p\rangle \in T$ and $x = q(x_1, \ldots, x_r)$, $y = q(y_1, \ldots, y_r)$. As $T \subseteq M \times M$, clearly $a_p, b_p \in M$. Since S is a commutative semigroup, $q(x_1, \ldots, x_r) = x_1^{s_1} \circ \ldots \circ x_r^{s_r}$, $q(y_1, \ldots, y_r) = y_1^{s_1} \circ \ldots \circ y_r^{s_r}$ for some $s_p \geqq 0$ (and $s_1 + \ldots + s_r > 0$). By Lemma 3, there exist $z_1, \ldots, z_r \in S$ and $i_p, n_p, j_p, m_p \geqq 0$, $k_p \in \{0, 1\}$ such that $x_p = a_p^{i_p} \circ b_p^{n_p} \circ z_p^{k_p}$, $y_p = a_p^{j_p} \circ b_p^{m_p} \circ z_p^{k_p}$, $i_p + n_p = j_p + m_p$, $i_p + n_p + k_p > 0$ for $p = 1, \ldots, r$. If $s_1(i_1 + n_1) + \ldots + s_r(i_r + n_r) \neq 0$ put $i = 1$, $j = 1$, $a_0^i = (a_1^{i_1} \circ b_1^{n_1})^{s_1} \circ \ldots \circ (a_r^{i_r} \circ b_r^{n_r})^{s_r}$, $b_0 = (a_1^{j_1} \circ b_1^{m_1})^{s_1} \circ \ldots \circ (a_r^{j_r} \circ b_r^{m_r})^{s_r}$. In the opposite case, put $i = 0$, $j = 0$. Put $k = 1$, $w^k = z_1^{k_1} \circ \ldots \circ z_r^{k_r}$ provided $k_1 + \ldots + k_r > 0$ and $k = 0$ in the opposite case. Thus $x = a_0^i \circ w^k$, $y = b_0^j \circ w^k$, $i = j$, $k \in \{0, 1\}$, i.e. $\langle x, y\rangle \in T_S(a_0, b_0)$ by Lemma 3. Hence $\langle x, y\rangle \in T_S(a_0, b_0)|_M$. Further, $\langle a_p, b_p\rangle \in T \in LT(\mathfrak{M})$ for $p = 1, \ldots, r$ imply $\langle a_0, b_0\rangle \in T$. As $a_p, b_p \in M$ and M is a subsemigroup, we have $a_0, b_0 \in M$.

Theorem 1. *Let $\mathscr{C}$ be a class of commutative semigroups closed under subsemigroups. Then the following conditions are equivalent:*

(a) *$\mathscr{C}$ satisfies (PTEP);*

(b) *$\mathscr{C}$ satisfies (TEP).*

Proof. (b) $\Rightarrow$ (a) is trivial. Conversely, let $\mathscr{C}$ satisfy (PTEP), let $\mathfrak{B} = (B, \circ)$ be a subsemigroup of $\mathfrak{A} = (A, \circ) \in \mathscr{C}$ and $T \in LT(\mathfrak{B})$. By Theorem 14 in [6], $T = \mathsf{V}_B\{T_B(a, b); \langle a, b\rangle \in T\}$. Put $T_A = \mathsf{V}_A\{T_A(a, b); \langle a, b\rangle \in T\}$. Then by Lemma 1 and Lemma 2,

$$T_A|_B = (\mathsf{V}_A\{T_A(a, b);\ \langle a, b\rangle \in T\})|_B \supseteq \mathsf{V}_B\{T_A(a, b)|_B;\ \langle a, b\rangle \in T\} =$$

$$= \mathsf{V}_B\{T_B(a, b);\ \langle a, b\rangle \in T\} = T .$$

Conversely, if $\langle x, y\rangle \in T_A|_B$, then $\langle x, y\rangle \in (\bigvee_A\{T_A(a, b);\ \langle a, b\rangle \in T)|_B$ and, by Lemma 4, there exist $a_0, b_0 \in B$ with $\langle a_0, b_0\rangle \in T$, $\langle x, y\rangle \in T_A(a_0, b_0)|_B$. According to Lemma 2, $\langle x, y\rangle \in T_B(a_0, b_0) \subseteq T$ which proves the converse inclusion.

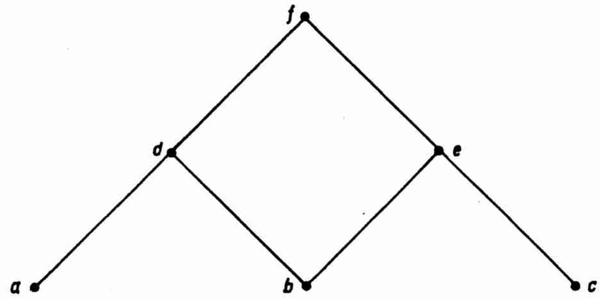


Fig. 1.

Example. *The class of all semilattices does not satisfy (TEP).* If e.g. $(S, \circ)$ is semilattice with the diagram in Fig. 1 and $(P, \circ)$ its subsemilattice for $P = \{a, d, f, e, c\}$, then $\langle d, e\rangle \notin T_P(a, c)$. However, $\langle a, c\rangle \in T_S(a, c)$, $\langle b, b\rangle \in T_S(a, c) \Rightarrow \langle d, e\rangle \in \in T_S(a, c)|_P$. According to Lemma 2, the class of all semilattices does not satisfy (TEP).

In [10], [11] compatible tolerances on semilattices with diagrams in the form of a tree are studied. Let $(S, \circ)$ be a semilattice. Call $(S, \circ)$ a *tree-semilattice,* if it satisfies

(*) $a, b, c \in S$, $a \circ b = b$, $a \circ c = c$ imply $b \circ c = b$ or $b \circ c = c$, which is equivalent to

(**) the Hasse diagram of $(S, \circ)$ (ordering induced by $b \leqq a$ iff $a \circ b = a$) is a *tree.*

Clearly, every subsemilattice of a tree-semilattice is also a tree-semilattice.

Theorem 2. *Every class of tree-semilattices closed under subsemilattices satisfies (TEP).*

Proof. Let $(P, \circ)$ be a subsemilattice of a tree-semilattice $(S, \circ)$. With respcct to the idempotency of semilattice operation, we obtain by Lemma 3:

$$T_S(a, b) = \{\langle x, y\rangle;\ x = a^i \circ b^n \circ z^k,\ y = a^j \circ b^m \circ z^k, \text{ where } z \in S \text{ and}$$
$$i, j, k, n, m \in \{0, 1\},\ i + n + k \neq 0,\ i + n = 0 \text{ iff } j + m = 0\}$$

for each $a, b \in P$. Clearly $T_S(a, b)|_P \supseteq T_P(a, b)$. Suppose $\langle c, d\rangle \in T_S(a, b)|_P$, $\langle c, d\rangle \notin \notin T_P(a, b)$. Thus $c = a^i \circ b^n \circ z^k$, $d = a^j \circ b^m \circ z^k$ for $z \in S$ and i, j, n, m determined in the above definition of $T_S(a, b)$. Since $c \circ z^k = c$, $d \circ z^k = d$, we have by (*) $c \circ d = c$ or $c \circ d = d$ or $k = 0$. If $k = 0$, then $c = a^i \circ b^n$, $d = a^j \circ b^m$, $a, b \in P$, $i + n \neq 0$, $j + m \neq 0$, thus clearly $\langle c, d\rangle \in T_P(a, b)$, which is a contradiction.

Suppose $c \circ d = c$.

1°. If $j = m = 0$, then $i = n = 0$, thus $k = 1$. Hence $c = z = d$. Moreover, $c, d \in T_S(a, b)|_P$ implies $z \in P$, i.e. $\langle c, d\rangle \in T_P(a, b)$.

2°. If $m = 1$ and $i = j = 0$, then $n = 1$. Hence $c = b \circ z^k$, $d = b \circ z^k$ and $\langle c, d\rangle \in T_P(a, b)$ analogously as in 1°.

If $m = 1$ and $i = 1$ or $j = 1$, then $d \circ b = d$ and, by $(*)$, $d \circ a = a \circ b \circ z^k = (a^i \circ b^n \circ z^k) \circ (a^j \circ b^m \circ z^k) = c \circ d = c$, hence $\langle c, d\rangle = \langle a \circ d,\ b \circ d\rangle \in T_P(a, b)$.

3°. If $j = 1$ and $n = m = 0$, then $i = 1$. Hence $c = a \circ z^k$, $d = a \circ z^k$ and $\langle c, d\rangle \in T_P(a, b)$ as in 2°.

If $j = 1$ and $n = 1$ or $m = 1$, then $d \circ a = d$ and by $(*)$, $d \circ b = a \circ b \circ z^k = (a^i \circ b^n \circ z^k) \circ (a^j \circ b^m \circ z^k) = c \circ d = c$; thus also $\langle c, d\rangle = \langle b \circ d,\ a \circ d\rangle \in T_P(a, b)$.

The contradiction is obtained in all cases for $c \circ d = c$. For $c \circ d = d$ the proof is analogous. Hence $T_S(a, b)|_P \subseteq T_P(a, b)$, thus $T_S(a, b)|_P = T_P(a, b)$ for every tree-semilattice $(S, \circ)$ and each of its subsemilattices $(P, \circ)$ and each $a, b \in P$. Consequently, the class of tree-semilattices closed under subsemilattices satisfies (PTEP), and, by Theorem 1, the statement is proved.

We can easily show that in the case of lattices the assertion analogous to Theorem 1 is not true.

Proposition. *Let $\mathscr{K}$ be a class of lattices closed under sublattices. Then the following conditions are equivalent*:

(a) *$\mathscr{K}$ satisfies (TEP)*;

(b) *$L \in \mathscr{K}$ implies L is a chain.*

Proof. The implication (b) $\Rightarrow$ (a) is clear. Conversely, let $\mathscr{K}$ satisfy (TEP), $L \in \mathscr{K}$ and let us assume that L is not a chain. Then there exist non-comparable $a, b \in L$. Consider the sublattice

$S = \{a \wedge b, a, a \vee b\}$ and the relation

$T_S = \{\langle a, a\rangle, \langle a \wedge b, a \wedge b\rangle, \langle a \vee b, a \vee b\rangle, \langle a \wedge b, a\rangle, \langle a, a \wedge b\rangle, \langle a \vee b, a\rangle, \langle a, a \vee b\rangle\}$.

Evidently, T_S is a tolerance compatible with S and $\langle a \wedge b,\ a \vee b\rangle \notin T_S$. Suppose that there exists a tolerance T compatible with L such that $T|_S = T_S$. Then $\langle a \wedge b, a\rangle \in T$, $\langle b, b\rangle \in T$, thus also $\langle b, a \vee b\rangle \in T$. As $\langle a, a \vee b\rangle \in T$, we obtain $\langle a \wedge b,\ a \vee b\rangle \in T$ which contradicts $T|_S = T_S$. Thus $\mathscr{K}$ does not satisfy (TEP) contrary to the assumption.

Remark. We can give an example of the class of algebras satisfying (PTEP) and does not satisfying (TEP). If $\mathscr{C}$ is a class of all distributive lattices, then by Proposition, $\mathscr{C}$ does not satisfy (TEP). On the other hand, $\mathscr{C}$ satisfies (PTEP) since $\mathscr{C}$ satisfies the Principal Congruence Extension Property (see [1]) and $T_L(a, b) = \Theta_L(a, b)$ for each $L \in \mathscr{C}$, $a, b \in L$ as it was shown in [16] ($\Theta_L(a, b)$ is the *principal congruence on L generated by a, b*).

References

[1] *Day A.*: A Note on the Congruence Extension Property, Alg. Univ. *1* (1971), 234—235.

[2] *Day A.*: The Congruence Extension Property and subdirectly irreducible algebras — an example, Alg. Univ. *3* (1973), 229—237.

[3] *Fried E.*: Subdirect irreducible weakly associative lattices with Congruence Extension Property, Annales Univ. Sci., Budapest, sectio Math., *17* (1974), 59—68.

[4] *Grätzer G., Lakser H.*: Two observations on the Congruence Extension Property (preprint).

[5] *Chajda I.*: A construction of tolerances on modular lattices, Časop. pěst. matem., *101* (1976), 195—198.

[6] *Chajda I., Zelinka B.*: Lattices of tolerances, Časop. pěst. mat., *102* (1977), 10—24.

[7] *Chajda I., Zelinka B.*: Tolerance relations on lattices, Časop. pěst. mat., *99* (1974), 394—399.

[8] *Chajda I., Zelinka B.*: Weakly associative lattices and tolerance relations, Czech. Math. J., *26* (1976), 259—269.

[9] *Chajda I., Niederle J., Zelinka B.*: On existence conditions for compatible tolerances, Czech. Math. J., *26* (1976), 304—311.

[10] *Nieminen J.*: Tolerance relations on join-semilattices, Glasnik Matematički, to appear.

[11] *Nieminen J.*: Tolerance relations on simple ternary algebras, Archiv. Math. (Brno), to appear.

[12] *Zelinka B.*: Tolerance in algebraic structures, Czech. Math. J., *20*, (1970), 281—292.

[13] *Zelinka B.*: Tolerance relations on semilattices, CMUC *16* (1975), 333—338.

[14] *Zelinka B.*: Tolerances and congruences on tree algebras, Czech. Math. J. *25* (1975), 634—637.

[15] *Zelinka B.*: Tolerance relations on periodic commutative semigroups, Časop. pěst. matem., to appear.

[16] *Chajda I., Zelinka B.*: Minimal compatible tolerances on lattices, Czech. Math. J. *27* (1977), 452—459.

Author's address: 750 00 Přerov, třída Lidových milicí 290.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

A THEOREM ON NON-EXISTENCE OF A CERTAIN TYPE OF NEARLY REGULAR CELL-DECOMPOSITIONS OF THE SPHERE

MIRKO HORŇÁK, Košice

(Received January 22, 1976)

1. Introduction. In GRÜNBAUM [2] and MALKEVITCH [4] (cf. HORŇÁK-JUCOVIČ [3]) the following kind of maps on the sphere is investigated: The number of edges of every face of the map is a multiple of k (the faces are *multi-k-gonal*), the valency of its every vertex is a multiple of m (the vertices are *multi-m-valent*) with the exception of at most two vertices or faces (*exceptional* cells), m, k are integers greater than 1. CROWE [1] studies such maps with two exceptional faces with a prescribed *distance* (i.e., the length of the shortest path — in the sense of the graph theory — between a vertex of one exceptional face and a vertex of the other one). Here we present a result of this kind for $m = 3$ and $k = 5$. We are dealing with classes of cell-complexes decomposing the sphere in which all vertices are multi-3-valent and all faces are multi-5-gonal with the exception of a) one face or b) two adjacent faces or c) two vertices whose distance is 3. They are denoted $M(3, 5; 0, 1; 0)$, $M(3, 5; 0, 2, 0, \bar{0})$ and $M(3, 5; 2, 0; 0, 3)$, respectively (cf. Horňák-Jucovič [3]). The aim of the present paper is to prove emptiness of the class $M(3, 5; 2, 0; 0, 3)$ on the base of emptiness of the other two classes (proved by Malkevitch [4]).

2. Theorem. *The class* $M(3, 5; 2, 0; 0, 3)$ *is empty.*

Proof. Suppose that $P = (u_1, u_1w_1, w_1, w_1w_2, w_2, w_2u_2, u_2)$ is the shortest path joining the exceptional vertices u_1, u_2 of a complex $D_1 \in M(3, 5; 2, 0; 0, 3)$. For $3r$ edges with one end-vertex w_i, $i \in \{1, 2\}$, two possibilities can occur: a) $n \geqq 4$ edges lie on the same side of the path P. Then the above mentioned $3r$ edges can be denoted $e_1, e_2, \ldots, e_{3r}$ in the cyclic order around the vertex w_i so that the edges e_{n+1}, e_{3r} belong to the path P. b) At most three edges with one end-vertex w_i lie on every side of the path P. In this case the valency of w_i is either 3 or 6. In the case a) change the configuration around the vertex w_i as depicted in Fig. 1. In the new complex D_2 the valency of w_i is decreased by 3, the number of edges of the face X'_j ($j \in \{1, 2, 3\}$) is greater by 5 than that of the face X_j, new pentagons and 3-valent vertices arise, the path P has not changed and the distance between u_1 and u_2 remains 3. That is why the complex D_2 belongs to $M(3, 5; 2, 0; 0, 3)$. In this way the valency of the vertex w_i is successively decreased until the situation of the case b) is reached.

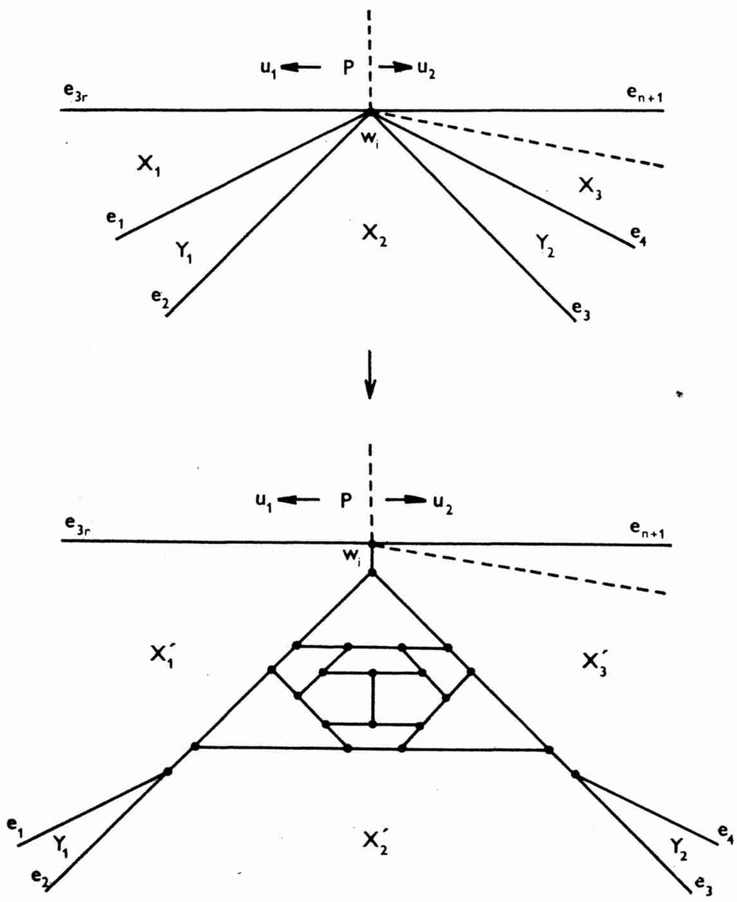


Fig. 1.

Similarly, if the valency of the exceptional vertex u_i is greater than 6, it is decreased by the above described procedure until it becomes 4 or 5; in this case the role of the edges e_1, e_2, e_3, e_4 is played by the four neighbouring edges with one end-vertex u_i which do not belong to the path P. These transformations lead to a final complex $D \in M(3, 5; 2, 0; 0, 3)$ with exceptional vertices u_1, u_2 of valencies 4 or 5 joined by the path P with inner vertices w_1, w_2 of valencies 3 or 6 (if the valency of w_i is 6, then at least one edge with one end-vertex w_i lies on both sides of P).

The complex D can be always depicted so that the upper side of the path P does not contain more edges with one end-vertex w_1 or w_2 than the lower side. As in D

the vertices w_1, w_2 are 3-valent or 6-valent, the upper side of P contains at most four edges; all possibilities are shown in Figs. 2a–2k (the dotted lines starting from the vertices w_1, w_2 indicate possible additional edges). It is suitable to distinguish three cases: a) u_1 and u_2 are 5-valent, b) the valency of u_1 differs from the valency of u_2, c) u_1 and u_2 are 4-valent.

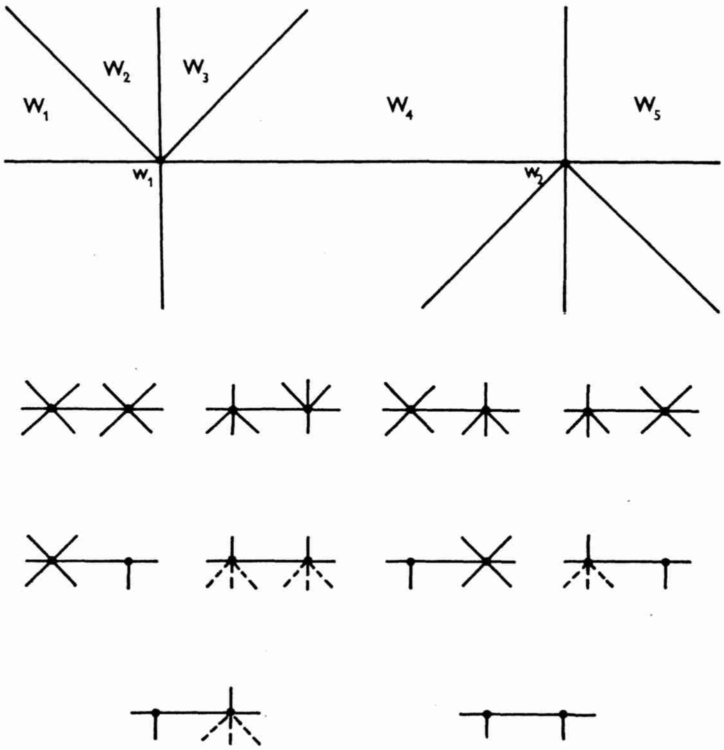


Fig. 2a—2k.

a) If u_1 and u_2 are 5-valent and the situation from Fig. 2a occurs for them, the faces W_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, can be subdivided as marked in Fig. 3. In the new complex D' the vertices u_1, u_2 are no more exceptional (they are 6-valent), the faces W'_i, $i \in \{1, 2, 4, 5\}$, are multi-5-gons, but the faces U_1, U_2 are not multi-5-gons (U_1 has the number of edges greater by 4 than the face W_3 of the complex D, U_2 is a 4-gon; in these faces the number 4 in Fig. 3 denotes their *type of exceptionality*: if X is a q-gonal exceptional face, its type of exceptionality is defined as the number $x \in \in \{1, 2, 3, 4\}$ such that $q \equiv x \pmod 5$) and they are the only exceptional cells of D'. Because of the adjacency of the faces U_1, U_2, the complex D' would be a member of the empty class $M(3, 5; 0, 2; 0, \bar{0})$ – a contradiction.

If the inner part of the path P looks like one of those in Figs. 2b, 2d, 2g or 2i, the faces of the upper side of P can be changed in accordance with Fig. 4, 5a, 6a or 7a, respectively (possible additional edges starting from w_1 or w_2, being unnecessary in the procedure of the construction, are omitted for simplicity in Figs. 6a and 7a). The resulting complex would be a member of $M(3, 5; 0, 1; 0)$ (Fig. 4) or $M(3, 5; 0, 2; 0, \bar{0})$ (Figs. 5a, 6a and 7a) in contradiction with the emptiness of these classes.

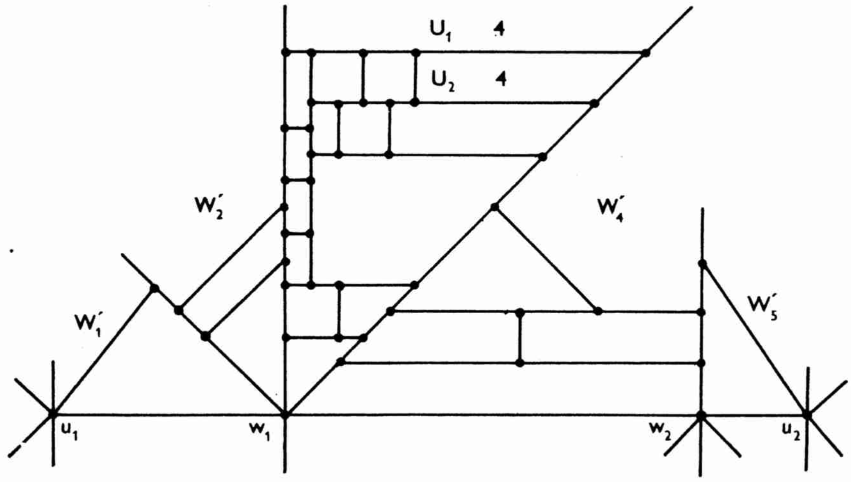


Fig. 3.

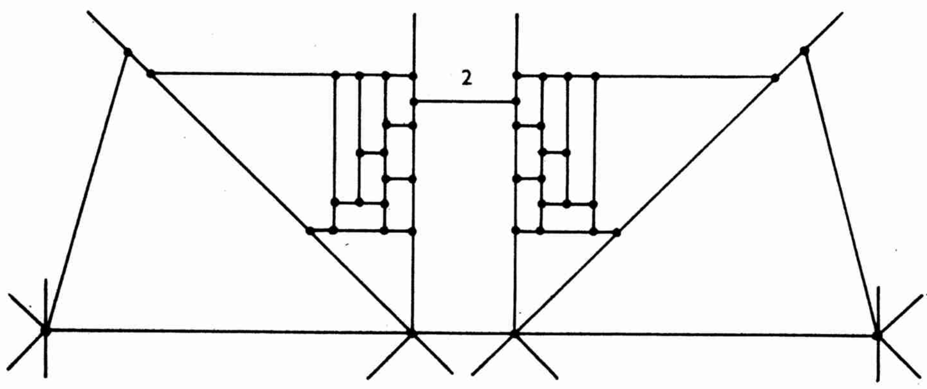


Fig. 4.

In the following part of the proof, three types of symmetry will be used – the symmetry with respect to the axis containing the centre of the edge w_1w_2 and perpendicular to w_1w_2, the symmetry with respect to the axis containing w_1w_2, and the composition of these symmetries, i.e., the symmetry with respect to the centre of w_1w_2; let us denote them *α-symmetry*, *β-symmetry* and *γ-symmetry*, respectively. (It is assumed, of course, that the edge w_1w_2 of the complex D is depicted as a line segment, in general, however, the above mentioned geometrical symmetries can be regarded only as symmetries in the combinatorial sense.)

It is clear that if a configuration C leads by a certain construction to a contradiction with the emptiness of the class $M(3, 5; 0, 1; 0)$ or $M(3, 5; 0, 2; 0, \bar{0})$, then the configuration σ-symmetrical ($\sigma \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$) to C leads to the same type of contradiction

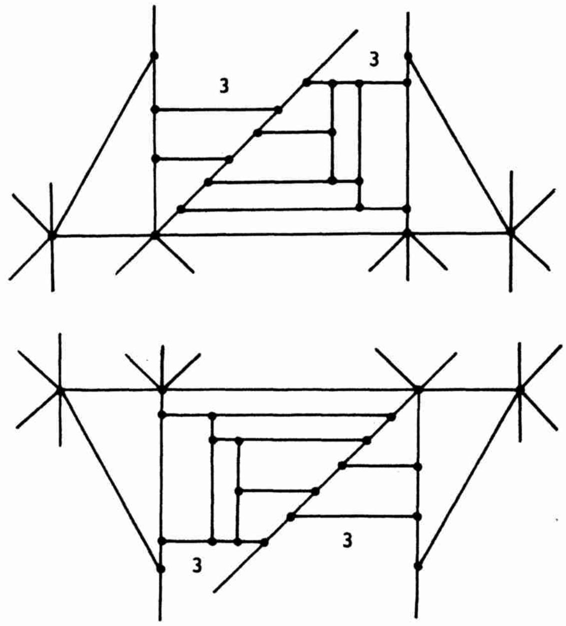


Fig. 5a, b.

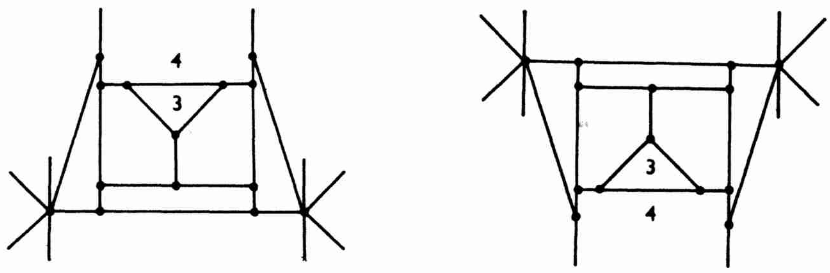


Fig. 6a, b.

by the construction which is σ-symmetrical to the one mentioned above. This fact is illustrated by the following examples: 2i and 2j are mutually α-symmetrical (as u_1 and u_2 are 5-valent, we may consider the whole path P without the loss of the α-symmetry) as well as Figs. 7a and 7b, the upper side of the configuration of Fig. 2g (2d) is β (γ)-symmetrical to the lower side of the configuration of Fig. 2k (2h), the same being true for Fig. 6a (5a) and Fig. 6b (5b).

As Fig. 2c (2e) is the image of Fig. 2a (2d) in the α-symmetry and the lower side of Fig. 2f is the image of the upper side of Fig. 2d in the β-symmetry, every possible shape of the path P with 5-valent exceptional vertices u_1, u_2 leads to a contradiction.

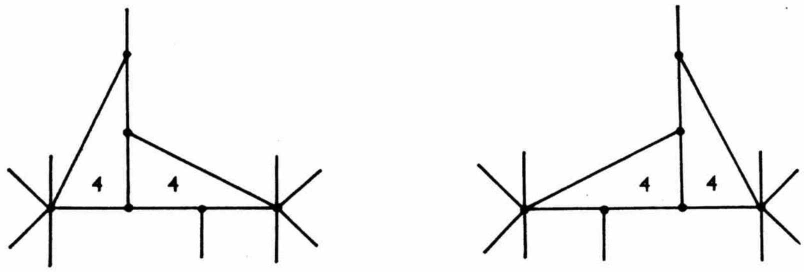


Fig. 7a, b.

b) and c) If at least one exceptional vertex is 4-valent, a contradiction with the emptiness of $M(3, 5; 0, 1; 0)$ or $M(3, 5; 0, 2; 0, \overline{0})$ can be reached quite analogously as in the preceding case by subdividing suitably the faces lying on one side of the path P. That is why the corresponding figures are omitted in this paper.

So if a complex with multi-3-valent vertices and multi-5-gonal faces has two exceptional vertices u_1, u_2 and no more exceptional cells, no path of length 3 joining u_1 and u_2 can exist; our Theorem is proved.

3. Remark. The assertion of Theorem does not hold only for cell-complexes, but for a much wider class of decompositions of the sphere, namely for maps whose countries are open discs.

References

[1] *D. W. Crowe:* Nearly regular polyhedra with two exceptional faces, Lecture Notes in Mathematics, *110* (1969), 63—76.

[2] *B. Grünbaum:* Convex Polytopes, Interscience 1967.

[3] *M. Horňák* and *E. Jucovič*: Nearly regular cell-decompositions of orientable 2-manifolds with at most two exceptional cells, Math. Slov. *27* (1977), 73—89.

[4] *J. Malkevitch:* Properties of planar graphs with uniform vertex and face structure, Mem. Amer. Math. Soc. *99* (1970).

Author's address: 041 54 Košice, Komenského 14 (Katedra geometrie a algebry Prírodovedeckej fakulty UPJŠ).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

SEVERAL THEOREMS CONCERNING EXTENSIONS OF MEROMORPHIC AND CONFORMAL MAPPINGS

ILJA ČERNÝ, Praha

(Received October 11, 1976)

The main goal of the present paper is the proof of certain theorems concerning extensions of meromorphic and conformal mappings which are stronger than the well known ones (cf. [1], [2], [3], [5], [6], [7]). We prove the existence of extensions across more general parts V of the boundary of the definition domain of the corresponding mapping, instead of holomorphic functions we consider the meromorphic ones. While, as a rule, the results concern only local conformness of the extension at points of the corresponding part V of the boundary, we establish, among others, sufficient conditions for conformness on a region containing the whole V.

As for definitions, conventions, and notation we refer the reader to [8]. In addition we shall use the following definitions and notation:

$\mathbf{E}_1$ will stand for *the set of all finite real numbers*. Further, we put $^*\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1 \cup \cup \{\infty\}$. By a *real number* we understand any number $z \in {}^*\mathbf{E}_1$. *The open upper (lower) half-plane* will be denoted by $\mathbf{E}^+(\mathbf{E}^-)$.

1. Definition 1. Let Ω be a region and let $V \subset \partial\Omega$. We say that V is a *free part* of $\partial\Omega$, iff there is a one-one continuous mapping λ of an interval (α, β) (where $-\infty \leqq \leqq \alpha < \beta \leqq +\infty$) onto V such that for each $t \in (\alpha, \beta)$ there are points $t' \in (\alpha, t)$, $t'' \in (t, \beta)$ and a Jordan region G such that

(1) $\lambda \mid \langle t', t'' \rangle$ is a cut in G;

(2) one component of $G - \lambda((t', t''))$ is contained in Ω, the other one in $\mathbf{S} - \bar{\Omega}$.

Remark 1. If V is a free part of $\partial\Omega$, then each one-one continuous mapping λ of (α, β) onto V satisfies the above mentioned conditions.

Notation. For each continuous mapping $\lambda : (\alpha, \beta) \to \mathbf{S}$ denote

(3_1) $(\lambda) = \lambda((\alpha, \beta))$,
(3_2) $\mathscr{P}(\lambda) = \{z \in \mathbf{S};$ there are $t_n \in (\alpha, \beta)$ with $t_n \to \alpha$, $\lambda(t_n) \to z\}$,
(3_3) $\mathscr{K}(\lambda) = \{z \in \mathbf{S};$ there are $t_n \in (\alpha, \beta)$ with $t_n \to \beta$, $\lambda(t_n) \to z\}$.

Remark 2. Obviously, we have

$$(4) \qquad \mathscr{P}(\lambda) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda((\alpha, \alpha_n))} = \text{ls } \lambda((\alpha, \alpha_n))$$

for any decreasing sequence of points $\alpha_n \in (\alpha, \beta)$, $\alpha_n \to \alpha$.

This implies $\mathscr{P}(\lambda)$ is a non-empty continuum. The equality $\mathscr{P}(\lambda) = \{a\}$ (where $a \in \mathbf{S}$) holds iff the limit $\lambda(\alpha+)$ exists and equals a.

Similarly for $\mathscr{K}(\lambda)$.

Lemma 1. *Let Ω be a region, V a free part of $\partial\Omega$. Then the following two assertions hold*:

(5) *For each $z \in V$ and for each sequence of points $z_n \in \Omega$ with $z_n \to z$ there is a curve φ from the point z into Ω such that $z_n \in \langle\varphi\rangle$ for all n.*

(6) *For each $z \in V$ there is one and only one bundle $\mathscr{S}_z \in \mathfrak{S}(\Omega)$ with $o(\mathscr{S}_z) = z$.*

Proof. Let λ be the same as in Definition 1. If $z \in V$, then there is a $t \in (\alpha, \beta)$ such that $\lambda(t) = z$. Let G be a Jordan region satisfying (1) and (2).

If $z_n \in \Omega$, $z_n \to z$, then there is an n_0 such that $z_n \in G$ for all $n > n_0$. Obviously, for the unit circle $\boldsymbol{U}$ the following assertion holds:

(7) If $w_n \in \boldsymbol{U}$, $w_n \to w \in \partial\boldsymbol{U}$, then there is a curve ψ from the point w into $\boldsymbol{U}$ such that $w_n \in \langle\psi\rangle$ for all n.

By a well known theorem (see [4]), a homeomorphism of $\overline{\boldsymbol{G}}$ onto $\overline{\boldsymbol{U}}$ exists. This, obviously, implies that an assertion similar to (7) holds for the region G. Hence there is a curve $\varphi^* : \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbf{S}$ from z into G such that $z_n \in \langle\varphi^*\rangle$ for each $n > n_0$. As Ω is a region, there is an extension $\varphi : \langle\alpha, \gamma\rangle \to \mathbf{S}$ of φ^* with $(\varphi\rangle \subset \Omega$ and $z_n \in \langle\varphi\rangle$ for all n. This proves (5).

Obviously,

(8) if $w \in \partial\boldsymbol{U}$, then there is one and only one bundle $\mathscr{S} \in \mathfrak{S}(\boldsymbol{U})$ with $o(\mathscr{S}) = w$.

Consequently, an analogous assertion holds for each Jordan region. Since for each curve $\varphi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbf{S}$ from z into Ω there is a $\gamma \in (\alpha, \beta)$ such that $\varphi \mid \langle\alpha, \gamma\rangle$ is a curve from z into G, all curves from z into Ω belong to the same bundle of $\mathfrak{S}(\Omega)$. This proves (6).

Lemma 2. *Suppose that Ω is a region, $\lambda : (\alpha, \beta) \to \partial\Omega$ a one-one continuous mapping, (λ) a free part of $\partial\Omega$. Then for each $t \in (\alpha, \beta)$ and for each $\delta > 0$ there are numbers $t', t'' \in (\alpha, \beta)$ and a Jordan region G satisfying conditions* (1) *and* (2) *such that*

$$(9) \qquad t - \delta < t' < t < t'' < t + \delta\,,$$

$$(10) \qquad \text{diam}^*\, G < \delta\,,$$

(11) $\partial G = \langle\varphi_1\rangle \cup \langle\varphi_2\rangle$, *where φ_j $(j = 1, 2)$ are simple curves with i.p. $\varphi_j = \lambda(t')$, e.p. $\varphi_j = \lambda(t'')$, $(\varphi_1) \subset \Omega$, $(\varphi_2) \subset \mathbf{S} - \overline{\Omega}$.*

Proof. Let $t \in (\alpha, \beta)$ and $\delta > 0$ be fixed. Then there are numbers $T' \in (\alpha, t)$, $T'' \in (t, \beta)$ and a Jordan region G_0 such that

(12) $\lambda \mid \langle T', T'' \rangle$ is a cut in G_0, $G_0 - \lambda((T', T'')) = G_1 \cup G_2$, where $G_1 \subset \Omega$ and $G_2 \subset \mathbf{S} - \bar{\Omega}$ are components of $G_0 - \lambda((T', T''))$.

Let h_j $(j = 1, 2)$ be a homeomorphic mapping of $\bar{G}_j$ onto $\mathbf{U}$ which maps G_j conformally onto $\mathbf{U}$ [1]). Obviously, there exist linear curves ψ_j such that

$$(13_1) \qquad i.p.\ \psi_j,\ e.p.\ \psi_j \in \partial\mathbf{U}\,, \quad (\psi_j) \subset \mathbf{U}\,,$$

$$(13_2) \qquad i.p.\ \psi_j \neq h_j(\lambda(t)) \neq e.p.\ \psi_j\,,$$

$$(13_3) \qquad t - \delta < (h_1)_{-1}\,(i.p.\ \psi_1) = (h_2)_{-1}\,(i.p.\ \psi_2) < t < (h_1)_{-1}\,(e.p.\ \psi_1) = = (h_2)_{-1}\,(e.p.\ \psi_2) < t + \delta\,,$$

(13_4) if M_j $(j = 1, 2)$ is the component of $\mathbf{U} - (\psi_j)$ containing $h_j(\lambda(t))$ on its boundary, then diam* $(h_j)_{-1}\,(M_j) < \frac{1}{2}\delta$.

Take $\varphi_j = (h_j)_{-1} \circ \psi_j$, $t' = (h_j)_{-1}\,(i.p.\ \psi_j)$, $t'' = (h_j)_{-1}\,(e.p.\ \psi_j)$, and let G be the component of $\mathbf{S} - (\langle \varphi_1 \rangle \cup \langle \varphi_2 \rangle)$ containing $\lambda(t)$. Then all conditions required above are fulfilled.

Theorem 1,1. *Let F be a conformal mapping of Ω onto $\mathbf{U}$ and let $V \subset \partial\Omega$ be a free part of the boundary of a region $\Omega_1 \subset \Omega$.*

Then there is a mapping F^* of $\Omega_1 \cup V$ such that the following conditions hold:

(14) *$F^* = F$ on Ω_1;*

(15) *F^* is continuous and one-one on $\Omega_1 \cup V$;*

(16) *$C_1 = F^*(V)$ is either an open arc of the circumference $\mathbf{C} = \partial\mathbf{U}$ or a set of the form $\mathbf{C} - \{a\}$ where $a \in \mathbf{C}$;*

(17) *the function*

$$\Phi^* = \begin{cases} F_{-1} & on \quad \mathbf{U}\,, \\ (F^*)_{-1} & on \quad C_1 \end{cases}$$

is continuous and one-one on $\mathbf{U} \cup C_1$.

Proof. Let λ be a continuous and one-one mapping of (α, β) onto V. By Lemma 1 and by our assumptions, for each point $z \in V$ there is one and only one bundle $\mathscr{S}^1_z \in \mathfrak{S}(\Omega_1)$ with $o(\mathscr{S}^1_z) = z$. Let $\mathscr{S}_z \in \mathfrak{S}(\Omega)$ be the bundle containing $\mathscr{S}^1_z$. Take

$$(18) \qquad F^*(z) = \begin{cases} F(z) & \text{for} \quad z \in \Omega_1\,, \\ W_F(\mathscr{S}_z) & \text{for} \quad z \in V\,. \end{cases}$$

Then (14) holds and F^* is continuous on Ω_1. Let $z \in V$, $z_n \in \Omega_1$, $z_n \to z$. By Lemma 1 there is a curve $\varphi \in \langle 0, 1 \rangle \to \mathbf{S}$ from z into Ω_1 with $z_n \in \langle \varphi \rangle$ for all n. Then $\varphi \in \mathscr{S}_z$ and, obviously,

$$\lim F(z_n) = (F \circ \varphi)\,(0+) = W_F(\mathscr{S}_z) = F^*(z)\,.$$

---

[1]) The existence of such a mapping is proved e.g. in [9], p. 538.

This proves that for each $z \in V$, the function F^* is continuous at z with respect to $\Omega_1 \cup \{z\}$. By a well known theorem (cf. [9], p. 516), this implies the continuity of F^* on $\Omega_1 \cup V$.

Now, $F^* \mid \Omega_1 = F \mid \Omega_1$ is one-one, W_F is one-one on $\mathfrak{S}(\Omega)$ [2]) (which implies that $F^* \mid V$ is one-one), and the sets $F^*(\Omega_1) \subset \boldsymbol{U}$, $F^*(V) \subset \partial \boldsymbol{U}$ are disjoint. Thus F^* is one-one.

Since, by (15), $F^* \circ \lambda$ is one-one and continuous, the assertion (16) holds.

It remains to prove (17). The continuity of Φ^* on $\boldsymbol{U}$ is obvious, as the inverse of a conformal mapping is conformal. By proving that

$$w_n \in \boldsymbol{U}, \quad w_n \to w \Rightarrow F_{-1}(w_n) \to (F^*)_{-1}(w) \tag{19}$$

for each $w \in C_1$ the proof of continuity of Φ^* on $\boldsymbol{U} \cup C_1$ will be completed.

Thus let $w_n \in \boldsymbol{U}$, $w_n \to w \in C_1$. Let $t \in (\alpha, \beta)$ be the point with $F^*(\lambda(t)) = w$. By Lemma 2, there are points $t' \in (\alpha, t)$, $t'' \in (t, \beta)$ and a Jordan region G satisfying (1) and (2) such that

(20) $\partial G = \langle \varphi_1 \rangle \cup \langle \varphi_2 \rangle$, where φ_j $(j = 1, 2)$ are simple curves with *i.p.* $\varphi_j =$ $= \lambda(t')$, *e.p.* $\varphi_j = \lambda(t'')$, $(\varphi_1) \subset \Omega_1$, $(\varphi_2) \subset \boldsymbol{S} - \bar{\Omega}_1$.

Then

$$G - \lambda((t', t'')) = G_1 \cup G_2 , \tag{21}$$

where G_j $(j = 1, 2)$ are Jordan regions such that

$$\partial G_j = \lambda(\langle t', t'' \rangle) \cup (\varphi_j) , \tag{22}$$

$$G_1 \cup (\varphi_1) \subset \Omega_1 , \quad G_2 \cup (\varphi_2) \subset \boldsymbol{S} - \bar{\Omega}_1 . \tag{23}$$

Denote by ψ_1 the F-image of φ_1. Then

$$\boldsymbol{U} - (\psi_1) = U_1 \cup U_2 , \tag{24}$$

where U_1, U_2 are disjoint Jordan regions. As φ_1 is a cut in Ω, G_1 is obviously a component of $\Omega - (\varphi_1)$. Choose the notation so that

$$U_1 = F(G_1) . \tag{25}$$

Then, obviously, $w \in \partial U_1 - \bar{U}_2$, and the conditions $w_n \in \boldsymbol{U}$, $w_n \to w$ imply $w_n \in U_1$ for all n sufficiently large. Further, it follows that $z_n = F_{-1}(w_n) \in G_1$ for such n. Suppose $z_n \to (F^*)_{-1}(w)$ is not true. Then there is a subsequence $\{z_{n_k}\}$ with $z_{n_k} \to$ $\to z' \neq (F^*)_{-1}(w)$. As obviously $z' \in \lambda(\langle t', t'' \rangle)$, we have by (15) $w_{n_k} = F(z_{n_k}) \to$ $\to F^*(z') \neq w$. This contradiction proves our assertion.

---

[2]) See [9], p. 535.

Obviously, Φ^* is one-one. This completes the proof of Theorem 1,1.

2. Definition 2. Let $\lambda : (\alpha, \beta) \to \mathbf{S}$ (where $-\infty \leqq \alpha < \beta \leqq +\infty$). Suppose there exists a function Λ meromorphic on a region X containing (α, β) and conformal at each point[3]) $z \in (\alpha, \beta)$ such that $\Lambda \mid (\alpha, \beta) = \lambda$. Then we say the mapping λ is *analytic*. We say the mapping $\lambda : (\alpha, \beta) \to \mathbf{S}$ is *strictly analytic* iff there is a conformal extension Λ of λ to a region X containing (α, β).

Remark 1. Obviously, any strictly analytic mapping is analytic and one-one. As the following example shows, the converse assertion is false.

Take

$$\lambda(t) = e^{2it} - ie^{it} - 1 \quad \text{for} \quad t \in \left(0, \frac{5\pi}{6}\right).$$

Then λ is analytic: The meromorphic extension

$$\Lambda(z) = e^{2iz} - ie^{iz} - 1 \quad (z \in \mathbf{E})$$

is conformal at each point $z \in \mathbf{E}$ with $\Lambda'(z) = 2ie^{2iz} + e^{iz} \neq 0$, i.e. at each point $z \in \mathbf{E}$ with $e^{iz} \neq \frac{1}{2}i$; none of the points z with $e^{iz} = \frac{1}{2}i$, however, lies in $(0, \frac{5}{6}\pi)$.

λ is one-one: If $F(z) = z^2 - iz - 1$ and $F(z_1) = F(z_2)$, $z_1 \neq z_2$, then $z_1 + z_2 = i$. If $t_1, t_2 \in (0, \frac{5}{6}\pi)$, $t_1 \neq t_2$, then, as we easily see, $e^{it_1} + e^{it_2} \neq i$. This implies that $\Lambda(t_1) \neq \Lambda(t_2)$ for each two distinct numbers $t_1, t_2 \in (0, \frac{5}{6}\pi)$.

λ is not strictly analytic: Since $\Lambda(\frac{1}{6}\pi) = \Lambda(\frac{5}{6}\pi)$, we have $\Lambda(U(\frac{5}{6}\pi)) \cap \Lambda(X^*) \neq \emptyset$ for any $U(\frac{5}{6}\pi)$ and for any region X^* containing $(\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi)$. Hence it follows easily that the mapping Λ is not one-one in any region X containing $(0, \frac{5}{6}\pi)$.

Theorem 2,1. *Let $\lambda : (\alpha, \beta) \to \mathbf{S}$ be a one-one analytic mapping. Then the following conditions are equivalent to each other*:

I. *λ is strictly analytic.*

II. $(\mathscr{P}(\lambda) \cup \mathscr{K}(\lambda)) \cap (\lambda) = \emptyset$.

III. *For each $t \in (\alpha, \beta)$ and for each $\delta > 0$ there are points $t', t'' \in (\alpha, \beta)$ and an open set G such that $t - \delta < t' < t < t'' < t + \delta$ and $G \cap (\lambda) = \lambda((t', t''))$.*

Proof. First we prove the implication I $\Rightarrow$ II. If condition I holds, there is a conformal mapping Λ of a region X containing (α, β) such that $\Lambda \mid (\alpha, \beta) = \lambda$. We may suppose that $X \cap {}^*\mathbf{E}_1 = (\alpha, \beta)$. Then $\alpha, \beta \in \partial X$ and for each sequence of points $t_n \in (\alpha, \beta)$ with either $t_n \to \alpha$ or $t_n \to \beta$ we have ls $\Lambda(t_n) \subset \partial\Lambda(X)$ (see [8], (3)). This pioves the inclusion $\mathscr{P}(\lambda) \cup \mathscr{K}(\lambda) \subset \partial\Lambda(X)$. As $(\lambda) = \Lambda((\alpha, \beta)) \subset \Lambda(X) \subset \mathbf{S} - \partial\Lambda(X)$, condition II holds.

---

[3]) We say a meromorphic function is *conformal at a point z* iff it is locally one-one at z.

Now we prove the implication III $\Rightarrow$ I. It is easy to see that the following general assertion holds:

(26) If F is meromorphic on an open set Ω, one-one on a compact subset $K \subset \Omega$, and conformal at each point $z \in K$, then there is a $\delta > 0$ such that F is conformal on $U(K, \delta)$ [4].

Suppose now that condition III holds and let Λ be a meromorphic extension of λ to a region X containing (α, β). We have to prove that there is a region X^* such that $(\alpha, \beta) \subset X^* \subset X$ and $\Lambda \mid X^*$ is one-one.

First we prove

(27) for each interval $\langle \alpha', \beta' \rangle \subset (\alpha, \beta)$ there is a $\delta > 0$ such that Λ is one-one on the rectangle $M = \{z \in \mathbf{E};\ \mathrm{Re}\, z \in \langle \alpha', \beta' \rangle,\ |\mathrm{Im}\, z| \leqq \delta\}$ and $\Lambda(M) \cap \lambda((\alpha, \alpha') \cup \cup (\beta', \beta)) = \emptyset$.

Choose points $\alpha^* \in (\alpha, \alpha')$, $\beta^* \in (\beta', \beta)$; by (26) there is a $\delta^* > 0$ such that Λ is one-one on the rectangle $M^* = \{z;\ \mathrm{Re}\, z \in \langle \alpha^*, \beta^* \rangle,\ |\mathrm{Im}\, z| \leqq \delta^*\}$. Let us show that

$$\text{(28)} \qquad \mathrm{dist}^* (\lambda(\langle \alpha', \beta' \rangle),\ \lambda((\alpha, \alpha^*\rangle \cup \langle \beta^*, \beta))) > 0\,.$$ [5]

Suppose (28) does not hold. Then there are points $t_n \in \langle \alpha', \beta' \rangle$, $t_n^* \in (\alpha, \alpha^*\rangle \cup \langle \beta^*, \beta)$ with $\varrho^*(\lambda(t_n), \lambda(t_n^*)) \to 0$. Since $\langle \alpha', \beta' \rangle$ is compact, we may suppose $\lim t_n = t$ exists. Then $t \in \langle \alpha', \beta' \rangle$ and, as λ is continuous, $\lambda(t_n) \to \lambda(t)$, $\lambda(t_n^*) \to \lambda(t)$. By III, there are points t', t'' with $\alpha^* < t' < t < t'' < \beta^*$ and an open set G with $\lambda(t) \in G$ $G \cap \lambda((\alpha, t'\rangle \cup \langle t'', \beta)) = \emptyset$. This, however, is impossible, since $\lambda(t_n^*) \in G$ for all n sufficiently large.

This completes the proof of (28). By (28), and since $\langle \alpha', \beta' \rangle$ is compact and Λ continuous, there is a $\delta \in (0, \delta^*)$ with

$$\text{(29)} \qquad \Lambda(M) \cap \lambda((\alpha, \alpha^*\rangle \cup \langle \beta^*, \beta)) = \emptyset$$

(where M is the same as in (27)). M and $(\alpha^*, \alpha') \cup (\beta', \beta^*)$ are disjoint subsets of M^*, Λ is one-one on M^*. This implies

$$\text{(30)} \qquad \Lambda(M) \cap \lambda((\alpha^*, \alpha') \cup (\beta', \beta^*)) = \emptyset\,.$$

By (29) and (30), we have

$$\Lambda(M) \cap \lambda((\alpha, \alpha') \cup (\beta', \beta)) = \emptyset\,.$$

This completes the proof of (27).

Choose numbers α_n (where n is an integer) such that $\alpha_m < \alpha_n$ for each pair $m < n$, and $\lim_{n\to\infty} \alpha_{-n} = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \beta$. For each pair of integers $m < n$ and for each $\delta > 0$ we set

$$\text{(31)} \qquad A(m, n; \delta) = \{z;\ \mathrm{Re}\, z \in \langle \alpha_m, \alpha_n \rangle,\ |\mathrm{Im}\, z| \leqq \delta\}\,, \quad L_{m,n} = \lambda(\langle \alpha_m, \alpha_n \rangle)\,.$$

---

[4]) By definition, $U(K, \delta) = \bigcup_{z \in K} U(z, \delta)$.

[5]) By dist* we denote the distance measured with the aid of the metric ϱ^*.

We shall say *a set M has the property* $W(m, n)$ (where $m < n$ are integers) iff the following four conditions hold:

1. M is a compact subset of X;
2. $A \mid M$ is one-one;
3. $M \cap (\alpha, \beta) = \langle \alpha_m, \alpha_n \rangle$;
4. $A(M) \cap (\lambda) = L_{m,n}$.

It is easy to see that the following two assertions hold:

(32) If M has the property $W(m, n)$, if $m \leqq m_1 < n_1 \leqq n$, and if N is a compact subset of M with $N \cap (\alpha, \beta) = \langle \alpha_{m_1}, \alpha_{n_1} \rangle$, then N has the property $W(m_1, n_1)$.

(33) If M has the property $W(m, n)$ and if either $p < q < m$ or $n < p < q$, then there is a $\delta > 0$ such that $A(M) \cap A(A(p, q; \delta)) = \emptyset$.

By (27) it also follows that

(34) for any two integers $m < n$ there is a $\delta > 0$ such that the rectangle $A(m, n; \delta)$ has the property $W(m, n)$.

Now we shall construct (by induction) rectangles $A_0, A_1, A_{-1}, \ldots, A_n, A_{-n}, \ldots$ such that

(35) $$X^* = \operatorname{int}\left(\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \right) \text{ is a subregion of } X \,,$$

(36) $$(\alpha, \beta) \subset X^* \,,$$

(37) $$A \Big| \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \text{ is one-one} \,.$$

Rectangles A_n^* which occur in the construction have auxiliary significance only.

By (34), there is a $\delta_0 > 0$ such that the rectangle $A_0^* = A(-1, 2; \delta_0)$ has the property $W(-1, 2)$; set $A_0 = A(0, 1; \delta_0)$. By (32), the rectangle A_0 has the property $W(0, 1)$, whence, by (33), there is a $\delta_1 > 0$ such that

(38) $$A(A_0) \cap A(A(2, 3; \delta_1)) = \emptyset \,.$$

By (34) and (32), we may obviously suppose that $\delta_1 \in (0, \delta)$ and that

(39) the rectangle $A_1^* = A(1, 3; \delta_1)$ has the property $W(1, 3)$.

Let us prove that

(40) the set $A_0 \cup A_1^*$ has the property $W(0, 3)$.

If $z_1, z_2 \in A_0 \cup A_1^*$, then either $z_1, z_2 \in A_0^*$ or $z_1, z_2 \in A_1^*$, or one of the points z_1, z_2 lies in A_0, the other one in $A(2, 3; \delta_1)$. The mapping A is one-one on A_0^*, one-one on A_1^*, and (38) holds. This implies A is one-one on $A_0 \cup A_1^*$. All the other conditions which together yield (40) are obvious.

Set $A_1 = A(1, 2; \delta_1)$. By (32)–(34), there is a $\delta_{-1} \in (0, \delta_0)$ such that

$$(41) \qquad A(A_0 \cup A_1^*) \cap A(A(-2, -1; \delta_{-1})) = \emptyset$$

and that

(42) the rectangle $A_{-1}^* = A(-2, 0; \delta_{-1})$ has the property $W(-2, 0)$.

Again, it is easy to see that

(43) the set $A_{-1}^* \cup A_0 \cup A_1^*$ has the property $W(-2, 3)$:

If $z_1, z_2 \in A_{-1}^* \cup A_0 \cup A_1^*$, then either $z_1, z_2 \in A_0^*$ or $z_1, z_2 \in A_0 \cup A_1^*$ or $z_1, z_2 \in A_{-1}^*$, or one of the points z_1, z_2 belongs to $A_0 \cup A_1^*$, the other one to $A(-2, -1; \delta_{-1})$. A is one-one on A_0^*, $A_0 \cup A_1^*$, A_{-1}^*, and (41) holds.

Set $A_{-1} = A(-1, 0; \delta_{-1})$. Suppose that for a certain $n \in \mathbf{N}$, positive numbers $\delta_n < \delta_{n-1} < \ldots < \delta_1 < \delta_0$, $\delta_{-n} < \delta_{-n+1} < \ldots < \delta_{-1} < \delta_0$ and rectangles $A_n^* = A(n, n + 2; \delta_n)$, $A_{-n}^* = A(-n - 1, -n + 1; \delta_{-n})$, $A_k = A(k, k + 1; \delta_k)$, where $-n \leqq k \leqq n$ are already constructed, and that

(44) the set $A_{-n}^* \cup \bigcup_{|k|<n} A_k \cup A_n^*$ has the property $W(-n - 1, n + 2)$.

Then the rectangles $A_{n+1}^*, A_{n+1}, A_{-n-1}^*, A_{-n-1}$ will be constructed as follows:

By (44) and (32), the set $A_{-n}^* \cup \bigcup_{|k|<n} A_k$ has the property $W(-n - 1, n + 1)$. Hence by (32)–(34), there is a $\delta_{n+1} \in (0, \delta_n)$ such that

$$(45) \qquad A(A_{-n}^* \cup \bigcup_{k=-n+1}^{n} A_k) \cap A(A(n + 2, n + 3; \delta_{n+1})) = \emptyset$$

and

(46) the rectangle $A_{n+1}^* = A(n + 1, n + 3; \delta_{n+1})$ has the property $W(n + 1, n + 3)$.

As above, it is easy to prove that

(47) the set $A_{-n}^* \cup \bigcup_{k=-n+1}^{n} A_k \cup A_{n+1}^*$ has the property $W(-n - 1, n + 3)$.

Denote $A_{n+1} = A(n + 1, n + 2; \delta_{n+1})$. By (47) and (32), the set $\bigcup_{k=-n}^{n} A_k \cup A_{n+1}^*$ has the property $W(-n, n + 3)$. Hence by (32)–(34), there is a number $\delta_{-n-1} \in (0, \delta_{-n})$ such that

$$(48) \qquad A(\bigcup_{k=-n}^{n} A_k \cup A_{n+1}^*) \cap A(A(-n - 2, -n - 1; \delta_{-n-1})) = \emptyset$$

and

(49) the rectangle $A_{-n-1}^* = A(-n - 2, -n, \delta_{-n-1})$ has the property $W(-n - 2, -n)$.

Again, it follows easily that

(50) the set $A^*_{-n-1} \cup \bigcup_{|k|<n+1} A_k \cup A^*_{n+1}$ has the property $W(-n-2, n+3)$.

Putting $A_{-n-1} = A(-n-1, -n; \delta_{-n-1})$ we complete the induction step.

Now, for each integer n we have sets A^*_n, A_n satisfying (44). By (44) and (32),

(51) the set $\bigcup_{k=-n}^{n} A_k$ has the property $W(-n, n+1)$

(for each natural number n). This implies the function Λ is one-one on $\bigcup_{k=-n}^{n} A_k$ for any natural number n; as a consequence, it is one-one on $\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} A_k$. Obviously, conditions (35), (36) hold as well. This completes the proof of the implication III $\Rightarrow$ I.

It remains to prove the implication II $\Rightarrow$ III. Let Λ be a meromorphic extension of λ to a region X containing (α, β). Choose α_n as in the proof of III $\Rightarrow$ I and use the same notation. By (26), for each $n \in \mathbf{N}$ there is a number $\Delta_n > 0$ such that Λ is one-one on $A(-n, n; \Delta_n)$. By II and since λ is one-one, the compact set $\mathscr{P}(\lambda) \cup \cup \lambda(\langle\alpha, \alpha_{-n-1}\rangle \cup \langle\alpha_{n+1}, \beta)) \cup \mathscr{K}(\lambda)$ is disjoint with $\lambda(\langle\alpha_{-n}, \alpha_n\rangle)$. Thus we may suppose that Δ_n also satisfies the condition

$$(52) \qquad \Lambda(A(-n, n; \Delta_n)) \cap (\mathscr{P}(\lambda) \cup \lambda((\alpha, \alpha_{-n-1}\rangle \cup \langle\alpha_{n+1}, \beta)) \cup \mathscr{K}(\lambda)) = \emptyset\,.$$

Let $t \in (\alpha, \beta)$ and $\delta > 0$ be fixed numbers. Then there is a number $n \in \mathbf{N}$ with $t \in (\alpha_{-n}, \alpha_n)$. Further, there is a $\delta' \in (0, \delta)$ such that

$$(53) \qquad U(t, \delta') \subset A(-n, n; \Delta_n) \cap A(-n-1, n+1; \Delta_{n+1})\,.$$

Set $t' = t - \delta'$, $t'' = t + \delta'$, $G = \Lambda(U(t, \delta'))$. Since Λ is one-one on $A(-n-1, n+1; \Delta_{n+1})$ and $U(t, \delta') \cap (\langle\alpha_{-n-1}, t'\rangle \cup \langle t'', \alpha_{n+1}\rangle) = \emptyset$ we have

$$(54) \qquad G \cap \lambda(\langle\alpha_{-n-1}, t'\rangle \cup \langle t'', \alpha_{n+1}\rangle) = \emptyset\,.$$

Conditions (52), (53) imply that

$$(55) \qquad G \cap (\mathscr{P}(\lambda) \cup \lambda((\alpha, \alpha_{-n-1}\rangle \cup \langle\alpha_{n+1}, \beta)) \cup \mathscr{K}(\lambda)) = \emptyset\,.$$

From (54), (55) and from the inclusion $(t', t'') \subset U(t, \delta')$ (which implies $\lambda((t', t'')) \subset G$) it follows that $G \cap (\lambda) = \lambda((t', t''))$. This completes the proof of Theorem 2,1.

Remark 2. As we can see at the end of the proof just completed, we have even $G \cap \overline{(\lambda)} = G \cap (\mathscr{P}(\lambda) \cup (\lambda) \cup \mathscr{K}(\lambda)) = \lambda((t', t''))$.

This implies, obviously, that (under the assumptions of Theorem 2,1) conditions I–III of Theorem 2,1 are equivalent to the following assertion:

III′. For each $t \in (\alpha, \beta)$ and each $\delta > 0$ there are points $t', t'' \in (\alpha, \beta)$ and a Jordan region G such that $t - \delta < t' < t < t'' < t + \delta$ and $G \cap \overline{(\lambda)} = \lambda((t', t''))$.

(As Λ is one-one on $\Lambda(-n, n; \Delta_n) \subset X$ and $\overline{U(t, \delta')} \subset \Lambda(-n, n; \Delta_n)$, the set $G = \Lambda(U(t, \delta'))$ is a Jordan region. The equality $\overline{(\lambda)} = \mathscr{P}(\lambda) \cup (\lambda) \cup \mathscr{K}(\lambda)$ is obvious.)

Remark 3. As in Theorem 2,1, let $\lambda : (\alpha, \beta) \to \boldsymbol{S}$ be one-one and analytic. It follows immediately that conditions I–III of Theorem 2,1 are equivalent to the following assertion:

IV. If Λ is a meromorphic extension of λ to a region X containing (α, β), then there is a subregion X^* of X containing (α, β) such that Λ is conformal on X^*.

3. Definition 3. We say that a free part V of the boundary of a region Ω is *analytic* iff there is a one-one analytic mapping λ of an interval (α, β) onto V.

Theorem 2,1 and Lemma 2 immediately imply the following assertion:

Theorem 3,1. *Let Ω be a region, $\lambda : (\alpha, \beta) \to \partial\Omega$ a one-one analytic mapping such that (λ) is a free part of $\partial\Omega$. Then λ is strictly analytic.*

The following theorem is one of the fundamental theorems concerning the extension of a meromorphic function across a free part of the boundary:

Theorem 3,2. 1. *Let V be an analytic free part of the boundary of a region Ω, $\mu : (\gamma, \delta) \to \boldsymbol{S}$ a one-one analytic mapping. Suppose F is meromorphic on Ω, continuous on $\Omega \cup V$, and $F(V) \subset (\mu)$. Then there is a region Ω^* containing $\Omega \cup V$ and a function F^* meromorphic on Ω^* such that $F^* = F$ on $\Omega \cup V$.*

2. *Suppose, moreover, that F is one-one on $\Omega \cup V$. If F^* is a meromorphic extension of F to a region Ω^* containing $\Omega \cup V$, then F^* is conformal at each point $z \in V$. More generally: For each compact subset K of V there is a $\Delta > 0$ such that $F^* \mid U(K, \Delta)$ is conformal.*

Proof. 1. Let the assumptions of the first part of the theorem be fulfilled. By Theorem 3,1 (and Remark 3, Section 2), there is an interval (α, β), a region $X \supset (\alpha, \beta)$, and a conformal mapping $\Lambda : X \to \boldsymbol{S}$ such that $\lambda = \Lambda \mid (\alpha, \beta)$ maps (α, β) onto V. Besides, there is a region $Y \supset (\gamma, \delta)$ and a function M meromorphic on Y, conformal at each point of (γ, δ) with $M \mid (\gamma, \delta) = \mu$.

If F is constant, the assertion of the first part of Theorem 3,2 is obvious. Thus, let us suppose F is not constant.

If $z \in V$, then $F(z) \in (\mu)$ and $\mu_{-1}(F(z)) \in (\gamma, \delta)$. Since M is conformal at $\mu_{-1}(F(z))$, there is an $\eta_z > 0$ such that

(56) the points γ, δ do not lie in the set $A_z = U(\mu_{-1}(F(z)), \eta_z)$

and

(57) the mapping $M^z = M \mid A_z$ is one-one.

The domain $M(A_z)$ of M^z_{-1} [6]) is a region containing $F(z)$. Since F is continuous at z with respect to $\Omega \cup V$, there is, by Lemma 2, a Jordan region G_z such that

(58) $$z \in G_z\,,$$

(59) $G_z - (\lambda) = G_z^1 \cup G_z^2$, where $G_z^1 \subset \Omega$, $G_z^2 \subset \mathbf{S} - \bar{\Omega}$ are Jordan regions with $z \in \partial G_z^1 \cap \partial G_z^2$,

(60) $$F(G_z \cap (\Omega \cup V)) \subset M(A_z)\,.$$

As $z \in V = (\lambda)$, we have $\lambda_{-1}(z) \in (\alpha, \beta)$. Since Λ is continuous, there is a $\Delta_z > 0$ such that

(61) $B_z = U(\lambda_{-1}(z), \Delta_z)$ is a subset of X and does not contain any one of the points α, β,

(62) $$\Lambda(B_z) \subset G_z\,.$$

Then obviously

(63) $$B_z - (\alpha, \beta) = B_z^1 \cup B_z^2\,,$$

where B_z^1, B_z^2 are disjoint open half-circles. Since Λ is one-one on X, the regions $\Lambda(B_z^j)$ $(j = 1, 2)$ are disjoint with the set (λ). Hence by (62), (59), each of the regions $\Lambda(B_z^j)$ is a subset either of Ω of or $\mathbf{S} - \bar{\Omega}$. Since the region $\Lambda(B_z)$ (containing the point $z \in \bar{\Omega} \cap \overline{(\mathbf{S} - \bar{\Omega})}$) intersects both Ω and $\mathbf{S} - \bar{\Omega}$, one of the regions $\Lambda(B_z^j)$ must be a subset of Ω, the other one a subset of $\mathbf{S} - \bar{\Omega}$. Hence one of the regions $\Lambda(B_z^j)$ is contained in G_z^1, the other one in G_z^2. Choose the notation so that

(64) $$\Lambda(B_z^1) \subset G_z^1\,(\subset \Omega)\,, \quad \Lambda(B_z^2) \subset G_z^2\,(\subset \mathbf{S} - \bar{\Omega})\,.$$

The function $M^z_{-1} \circ F \circ \Lambda$ is holomorphic on B_z^1, continuous on $B_z^1 \cup (B_z \cap \mathbf{E}_1)$, and maps the interval $B_z \cap \mathbf{E}_1$ into the interval (γ, δ). According to the Schwarz reflection principle there is a function g_z holomorphic on B_z such that

(65) $$g_z = M^z_{-1} \circ F \circ \Lambda \quad \text{on} \quad B_z^1 \cup (B_z \cap \mathbf{E}_1)\,.$$

Take

(66) $$F_z = M \circ g_z \circ \Lambda_{-1} \quad \text{on} \quad \Lambda(B_z)\,;$$

then F_z is obviously meromorphic on its definition domain and

(67) $$F_z = F \quad \text{on} \quad \Lambda(B_z) \cap (\Omega \cup V) = \Lambda(B_z^1 \cup (B_z \cap \mathbf{E}_1))\,.$$

Suppose $z, \zeta \in V$ are two points with

(68) $$\Lambda(B_z) \cap \Lambda(B_\zeta) \neq \emptyset\,.$$

---

[6]) We write M^z_{-1} instead of the more correct $(M^z)_{-1}$.

As Λ is one-one, it follows that $B_z \cap B_\zeta \neq \emptyset$. As B_z, B_ζ are circles with centres in $\mathbf{E}_1$, we have $B_z \cap B_\zeta \cap \mathbf{E}_1 \neq \emptyset$. As the set $B_z \cap B_\zeta \cap \mathbf{E}_1$ has accumulation points in $B_z \cap B_\zeta$, the set $\Lambda(B_z \cap B_\zeta \cap \mathbf{E}_1)$ has accumulation points in the set $\Lambda(B_z) \cap \Lambda(B_\zeta) = \Lambda(B_z \cap B_\zeta)$, which is (as a conformal image of the region $B_z \cap B_\zeta$) a region. By (67) and by an analogous condition for B_ζ we have $F_z = F_\zeta = F$ on $\Lambda(B_z \cap B_\zeta \cap \mathbf{E}_1)$. By a well known „unicity theorem" this implies

$$F_z = F_\zeta \quad \text{on} \quad \Lambda(B_z) \cap \Lambda(B_\zeta)\,. \tag{69}$$

As F is continuous on $\Omega \cup V$, we have

$$F_z = F_\zeta = F \quad \text{on} \quad \Lambda(B_z) \cap \Lambda(B_\zeta) \cap (\Omega \cup V)\,. \tag{70}$$

This implies that on the set

$$\Omega^* = \Omega \cup \bigcup_{z \in V} \Lambda(B_z)\,, \tag{71}$$

it is consistent to define a function F^* as follows:

$$F^* = \begin{cases} F & \text{on} \quad \Omega \cup V\,, \\ F_z & \text{on} \quad \Lambda(B_z) \quad \text{where} \quad z \in V\,. \end{cases} \tag{72}$$

It is evident that Ω^* is a region containing $\Omega \cup V$ and that F^* is a meromorphic extension of F to Ω^*.

This completes the proof of the first part of the theorem.

2. In the proof of the second part we shall use the following assertion (which is important by itself):

Lemma 3. *Let F be meromorphic on a region Z symmetric with respect to the real axis $^*\mathbf{E}_1$ and let $F(Z \cap {}^*\mathbf{E}_1) \subset {}^*\mathbf{E}_1$. Then:*

1. *F is one-one on Z iff it is one-one on $Z \cap \overline{\mathbf{E}^+}$ and $F(Z \cap \mathbf{E}^+) \cap {}^*\mathbf{E}_1 = \emptyset$.*
2. *If F is one-one on $Z \cap \overline{\mathbf{E}^+}$, then it is conformal at each point $z \in Z \cap {}^*\mathbf{E}_1$.*

First we prove the second part of Theorem 3,2 by means of Lemma 3: If F is one-one on $\Omega \cup V$, then for each $z \in V$ the function g_z is one-one on $B_z^1 \cup (B_z \cap \mathbf{E}_1)$. Lemma 3 implies g_z is conformal at $\lambda_{-1}(z)$. Further, it follows that F_z is conformal at z. The same is true for any extension F^*.

The rest of the second part of Theorem 3,2 is a consequence of what has just been proved, and of (26).

P r o o f o f L e m m a 3. Suppose the conditions for F and Z from Lemma 3 are satisfied.

1. Suppose first $F(Z \cap \mathbf{E}^+) \cap {}^*\mathbf{E}_1 \neq \emptyset$; this means that F assumes a real value at a certain point $z \in Z \cap \mathbf{E}^+$. According to the Schwarz reflexion principle, this implies $F(\bar{z}) = \overline{F(z)} = F(z)$; we have, of course, $\bar{z} \in Z$, $\bar{z} \neq z$. Hence F is not one-one on Z.

Suppose now F is not one-one on Z; we have to show that the following implication holds: If $F \mid Z \cap \overline{\mathbf{E}^+}$ is one-one, then $F(Z \cap \mathbf{E}^+) \cap {}^*\mathbf{E}_1 \neq \emptyset$. If F is one-one on $Z \cap \overline{\mathbf{E}^+}$, then by the Schwarz reflexion principle, it is one-one on $Z \cap \overline{\mathbf{E}^-}$ as well. Since F is not one-one on Z, there are points $z_1 \in Z \cap \mathbf{E}^+$, $z_2 \in Z \cap \mathbf{E}^-$ with $F(z_1) = F(z_2)$. Taking $z_1^* = \bar{z}_2$ we have $z_1^* \in Z \cap \mathbf{E}^+$, and by the Schwarz principle, $F(z_1^*) = \overline{F(z_1)}$. If $F(z_1) \in {}^*\mathbf{E}_1$, there is nothing more to prove. If $F(z_1) \notin {}^*\mathbf{E}_1$, then one of the numbers $F(z_1)$, $F(z_1^*)$ lies in $\mathbf{E}^+$, the other one in $\mathbf{E}^-$. Hence the set $F(Z \cap \mathbf{E}^+)$ intersects both $\mathbf{E}^+$ and $\mathbf{E}^-$. As we prove easily, the set $Z \cap \mathbf{E}^+$ is a region[7]). This implies that $F(Z \cap \mathbf{E}^+)$ is a region as well. Hence $F(Z \cap \mathbf{E}^+) \cap {}^*\mathbf{E}_1 \neq \emptyset$, which completes the proof.

2. Let F be one-one on $Z \cap \overline{\mathbf{E}^+}$. First, suppose $z_0 \in Z \cap \mathbf{E}_1$, $F(z_0) \in \mathbf{E}_1$. Choose $\delta > 0$ so that $U(z_0, \delta) \subset Z$ and that F is holomorphic on $U(z_0, \delta)$. Then the function $F \mid (z_0 - \delta, z_0 + \delta)$ is real, finite, one-one, and continuous. Thus it is strictly monotone, and $F((z_0 - \delta, z_0 + \delta))$ is a certain interval (α, β) (where $-\infty \leqq \alpha < \beta \leqq +\infty$). Let $\eta > 0$ be such that $(F(z_0) - \eta, F(z_0) + \eta) \subset (\alpha, \beta)$. Since F is continuous, there is a $\Delta \in (0, \delta)$ such that $F(U(z_0, \Delta)) \subset U(F(z_0), \eta)$. As F is one-one on $Z \cap \overline{\mathbf{E}^+}$, we have

$$F(U(z_0, \Delta) \cap \mathbf{E}^+) \cap F(U(z_0, \delta) \cap \mathbf{E}_1) = \emptyset . \tag{73}$$

Obviously, $F(U(z_0, \Delta) \cap \mathbf{E}^+) \cap {}^*\mathbf{E}_1 \subset U(F(z_0), \eta) \cap {}^*\mathbf{E}_1 = (F(z_0) - \eta, F(z_0) + \eta) \subset (\alpha, \beta)$ and $F(U(z_0, \delta) \cap \mathbf{E}_1) = F((z_0 - \delta, z_0 + \delta)) = (\alpha, \beta)$; this implies that

$$F(U(z_0, \Delta) \cap \mathbf{E}^+) \cap {}^*\mathbf{E}_1 = \emptyset .$$

By the first part of the present Lemma, $F \mid U(z_0, \Delta)$ is one-one. This completes the proof in the case $z_0 \in Z \cap \mathbf{E}_1$, $F(z_0) \in \mathbf{E}_1$. If $z_0 = \infty$, we investigate $F \circ Id^{-1}$ instead of F; if $F(z_0) = \infty$, we investigate $1/F$, and use what we have proved already.

Remark 1. The assumptions of the second part of Theorem 3,2 do not ensure that the extension F^* of F is one-one on a certain region $\Omega^{**} \subset \Omega^*$ containing $\Omega \cup V$. This will be obvious, if we take e.g.

$$\Omega = \{z; |\mathrm{Re}\, z| < 1,\ 0 < \mathrm{Im}\, z < 2\pi\}, \quad F = \exp, \quad V = (-1, 1), \quad \mu = Id \text{ on } \mathbf{E}_1 .$$

Indeed, any region Ω^{**} containing the set $\Omega \cup V$ contains pairs of points z, $z + 2\pi i$ at which the exponential function assumes the same value.

Nonetheless, in this case there exists a region Ω_1 containing V such that the extension is one-one on Ω_1. However, take

$$\mu(t) = e^{2it} - ie^{it} - 1 \quad \text{for} \quad t \in \langle 0, \tfrac{5}{6}\pi \rangle .$$

[7]) This is a consequence of the symmetry of the region Z with respect to the real axis.

Then $\mathbf{S} - \langle\mu\rangle$[8]) has precisely two components; one of them is bounded, the other one unbounded. For the unbounded component G of $\mathbf{S} - \langle\mu\rangle$ we have $\partial G = \langle\mu\rangle$ so that G is a simply connected region. It may be proved that for any conformal mapping F of $\mathbf{U}$ onto G there is an open arc C_1 of the circumference $\mathbf{C} = \partial\mathbf{U}$ such that F may be extended to a homeomorphic mapping of the set $\mathbf{U} \cup C_1$ so that $F(C_1) = (\mu)$ (denoting the extension by the same letter F).

Take $\lambda = F_{-1} \circ \mu$ on $(0, \frac{5}{6}\pi)$. Then $(\lambda) = C_1$ is an analytic free part of the boundary of $\mathbf{U}$, $\mu \mid (0, \frac{5}{6}\pi)$ is a one-one analytic mapping, $F((\lambda)) = (\mu)$ and F is one-one and continuous on $\mathbf{U} \cup (\lambda)$. By Theorem 3,1, F may be extended to a meromorphic function on a region U^* containing $\mathbf{U} \cup (\lambda)$. It is not too difficult to prove that the extension is not one-one on any region $U_1 \subset U^*$ containing (λ). (Cf. the example in Remark 1, Section 2.)

As the following theorem shows, the essential point in the example above is that the mapping μ is not strictly analytic.

Theorem 3,3. *Let V be an analytic free part of the boundary of a region Ω, λ a one-one analytic mapping of (α, β) onto V, $\mu : (\gamma, \delta) \to \mathbf{S}$ a strictly analytic mapping. Suppose F is meromorphic on Ω, continuous and one-one on $\Omega \cup V$, $F(V) \subset (\mu)$.*

Then there is a region Ω_1 containing V and a conformal mapping F_1 of Ω_1 such that $F_1 = F$ on $\Omega_1 \cap (\Omega \cup V)$; moreover, $F \circ \lambda$ is a strictly analytic mapping.

Remark 2. If the assumptions of Theorem 3,3 are satisfied, then by Theorem 3,2 there is a meromorphic extension F^* of F to a certain region Ω^* containing $\Omega \cup V$. For each extension F^* there exists by Theorem 3,3 a region $\Omega_1 \subset \Omega^*$ such that $V \subset \Omega_1$ and that the mapping $F^* \mid \Omega_1$ is conformal.

Proof of Theorem 3,3. By Theorem 3,2 there is an extension F^* of F to a region Ω^* containing $\Omega \cup V$. Then the mapping $\varphi = F \circ \lambda = F^* \circ \lambda$ is one-one and analytic. The function $\psi = \mu_{-1} \circ \varphi$ is a one-one continuous mapping of the interval (α, β) into the interval (γ, δ), hence a real strictly monotone continuous function.

Suppose ψ is increasing; the proof for a decreasing ψ is analogous. $\psi((\alpha, \beta))$ is a subinterval (γ', δ') of (γ, δ). As it is easy to see, the following assertions hold: If $\gamma' = \gamma$, then $\mathscr{P}(\varphi) = \mathscr{P}(\mu)$; if $\gamma' > \gamma$, then $\mathscr{P}(\varphi) = \{\mu(\gamma')\}$; if $\delta' = \delta$, then $\mathscr{K}(\varphi) = \mathscr{K}(\mu)$; if $\delta' < \delta$, then $\mathscr{K}(\varphi) = \{\mu(\delta')\}$.

By Theorem 2,1 we have

$$(\mathscr{P}(\mu) \cup \mathscr{K}(\mu)) \cap (\mu) = \emptyset\,; \tag{74}$$

hence, according to what we have just said,

$$(\mathscr{P}(\varphi) \cup \mathscr{K}(\varphi)) \cap (\varphi) = \emptyset\,. \tag{75}$$

---

[8]) $\langle\mu\rangle$ is a part of a cardioid similar to the figure 9.

Thus by Theorem 2,1, the mapping $\varphi = F \circ \lambda$ is strictly analytic.

By Theorem 3,1 the mapping λ is strictly analytic as well. Hence there is a region $X \supset (\alpha, \beta)$ and a conformal mapping $\Lambda : X \to \mathbf{S}$ such that $\Lambda \mid (\alpha, \beta) = \lambda$. Evidently we may assume that $\Lambda(X) \subset \Omega^*$. Hence by Remark 3, Section 2, the mapping $F^* \circ \Lambda$ (which is a meromorphic extension of the strictly analytic mapping $\varphi = F \circ \lambda$) is conformal on a certain region $X_1 \subset X$ containing (α, β). This implies that $F^* = (F^* \circ \Lambda) \circ \Lambda_{-1}$ is conformal on the region $\Omega_1 = \Lambda(X_1)$ containing V. Thus by putting $F_1 = F^* \mid \Omega_1$ we complete the proof.

4. Definition 4. We say that a topological circumference[9]) T is *analytic* iff there is a conformal mapping f of a region X containing $\mathbf{C}$ such that $f(\mathbf{C}) = T$.

Theorem 4,1. *Suppose Ω is a Jordan region the boundary of which is an analytic topological circumference. Let F be meromorphic on Ω, continuous on $\bar{\Omega}$. Then the following two assertions hold:*

1. *Suppose that either there is a one-one analytic mapping $\mu : (\gamma, \delta) \to \mathbf{S}$ with $F(\partial\Omega) \subset (\mu)$, or $F(\partial\Omega)$ is an analytic topological circumference. Then there is a region Ω^* containing $\bar{\Omega}$ and a function F^* meromorphic on Ω^* such that $F^* = F$ on $\bar{\Omega}$.*

2. *Suppose that F is one-one on $\bar{\Omega}$ and that the topological circumference $F(\partial\Omega)$ is analytic. Then for each meromorphic extension F^* of F to a region Ω^* containing $\bar{\Omega}$ there is a $\Delta > 0$ such that F^* is one-one on $U(\partial\Omega, \Delta)$.*

Proof. Since $\partial\Omega$ is an analytic topological circumference, there is a conformal mapping f of a region $X \supset \mathbf{C}$ with $f(\mathbf{C}) = \partial\Omega$. By the compactness of the set $\mathbf{C}$ there is an $\eta \in (0, \pi)$ such that $G = \{z; e^{-\eta} < |z| < e^{\eta}\}$ is a subset of X. Of course, we may suppose that

$$X = \{z; e^{-\eta} < |z| < e^{\eta}\}. \tag{76}$$

For each $z \in \partial\Omega$ we have $f_{-1}(z) \in \mathbf{C}$. Hence there is an $\alpha_z \in \mathbf{E}_1$ such that $f_{-1}(z) = e^{i\alpha_z}$. If $\Delta_z \in (0, \eta)$, then $\exp \circ iId$ is a conformal mapping of the open rectangle

$$I_z = \{z; |\mathrm{Re}\, \zeta - \alpha_z| < \Delta_z, |\mathrm{Im}\, \zeta| < \Delta_z\}$$

into X. Hence for each $z \in \partial\Omega$ the function

$$\lambda_z(t) = f(e^{it}), \quad t \in (\alpha_z - \Delta_z, \alpha_z + \Delta_z), \tag{77}$$

is a one-one analytic mapping. Besides, the set (λ_z) contains the point z and, obviously, it is an analytic free part of $\partial\Omega$.

In the first part of the assertion of Theorem 4,1 we suppose that either there is a one-one analytic mapping $\mu : (\gamma, \delta) \to \mathbf{S}$ with $F(\partial\Omega) \subset (\mu)$ or $F(\partial\Omega)$ is an analytic

[9]) i.e. a homeomorphic image of $\mathbf{C}$.

topological circumference. In the former case put $\mu_z = \mu$ for each $z \in \partial\Omega$. Then obviously

$$F((\lambda_z)) \subset (\mu_z) \quad \text{for each} \quad z \in \partial\Omega\,. \tag{78}$$

In the latter case choose a number $\Delta_z \in (0, \eta)$ small enough to ensure $F((\lambda_z)) \neq F(\partial\Omega)$. Then there is a point $w_z \in F(\partial\Omega) - F((\lambda_z))$. Since $F(\partial\Omega)$ is an analytic topological circumference, there is a conformal mapping g of a region $Y \supset \mathbf{C}$ with $g(\mathbf{C}) = F(\partial\Omega)$. If we choose $\beta_z \in \mathbf{E}_1$ with $g(e^{i\beta_z}) = w_z$ and put

$$\mu_z(t) = g(e^{it}) \quad \text{for} \quad t \in (\beta_z, \beta_z + 2\pi)\,, \tag{79}$$

then μ_z is a one-one analytic mapping satisfying (78).

By the first part of Theorem 3,2, to each $z \in \partial\Omega$ there is a region Ω_z^* containing $\Omega \cup (\lambda_z)$ and a function F_z^* meromorphic on Ω_z^* such that $F_z^* = F$ on $\Omega \cup (\lambda_z)$. For each $z \in \partial\Omega$ we have $z \in (\lambda_z) \subset \Omega_z^*$. Hence there is a $\vartheta_z > 0$ such that, taking

$$U_z = U(f_{-1}(z), \vartheta_z)\,, \tag{80}$$

we have

$$U_z \subset X\,, \quad f(U_z) \subset \Omega_z^*\,. \tag{81}$$

Suppose that for certain two points $z, \zeta \in \partial\Omega$ we have $f(U_z) \cap f(U_\zeta) \neq \emptyset$. The region $U_z \cap U_\zeta$ intersects $\mathbf{C}$ and, therefore, also $\mathbf{U}$. Hence $f(U_z) \cap f(U_\zeta) = f(U_z \cap U_\zeta)$ is a region intersecting Ω. As

$$F_z^* = F \quad \text{on} \quad \bar{\Omega} \cap f(U_z)\,, \quad F_\zeta^* = F \quad \text{on} \quad \bar{\Omega} \cap f(U_\zeta)\,, \tag{82}$$

we have

$$F_z^* = F = F_\zeta^* \quad \text{on} \quad f(U_z) \cap f(U_\zeta) \cap \bar{\Omega}\,. \tag{83}$$

By the „unicity theorem" this implies that

$$F_z^* = F_\zeta^* \quad \text{on} \quad f(U_z) \cap f(U_\zeta)\,. \tag{84}$$

Hence it is consistent to define a function F^* on the set

$$\Omega^* = \bar{\Omega} \cup \bigcup_{z \in \partial\Omega} f(U_z) \tag{85}$$

(which is obviously a region containing $\bar{\Omega}$) as follows:

$$F^* = \begin{cases} F & \text{on} \quad \bar{\Omega}\,, \\ F_z & \text{on} \quad f(U_z) \quad \text{where} \quad z \in \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{86}$$

Obviously, this function is meromorphic on Ω^* and $F^* = F$ on $\bar{\Omega}$.

Now let us prove the second part of Theorem 4,1. Suppose that F is one-one on $\bar{\Omega}$ and $F(\partial\Omega)$ is an analytic topological circumference. Let F^* be meromorphic on a region $\Omega^* \supset \bar{\Omega}$ and let $F^* = F$ on $\bar{\Omega}$. Suppose that for no $\Delta > 0$ the function F^* is one-one on $U(\partial\Omega, \Delta)$. Then there exist two convergent sequences $\{z_n'\}, \{z_n''\}$ of points of Ω^* such that $z_n' \neq z_n''$, $F^*(z_n') = F^*(z_n'')$ for all natural n, and that the points $z' = \lim z_n'$, $z'' = \lim z_n''$ lie in $\partial\Omega$. The continuity of F^* implies that $F^*(z') = \lim F^*(z_n') = \lim F^*(z_n'') = F^*(z'')$. As $F^* = F$ on $\bar{\Omega}$ and the function F is one-one on $\bar{\Omega}$, it follows that $z' = z''$. Thus the function F^* is not one-one in any neighbourhood of the point $z' = z''$. However, this is a contradiction to the second part of Theorem 3,2, by which the mapping $F_{z'}^*$ is conformal at each point of $(\lambda_{z'})$, in particular at z'.

This completes the proof.

References

[1] *Carathéodory C.:* Conformal representation (1932).

[2] *Carathéodory C.:* Funktionentheorie, Band I, II (1950).

[3] *Голузин Г. М.:* Геометрическая теория функций комплексного переменного (1952).

[4] *Kuratowski K.:* Topologie I, II (1948, 1952).

[5] *Leja F.:* Teoria funkcji analitycznych (1957).

[6] *Маркушевич А. И.:* Теория аналитических функций (1950).

[7] *Rudin W.:* Real and Complex Analysis (1966).

[8] *Černý I.:* Cuts in simple connected regions and the cyclic ordering of the system of all boundary elements (Čas. pro pěst. mat. — *103* (1978), 259—281).

[9] *Černý I.:* Základy analysy v komplexním oboru (1967).

Author's address: 118 00 Praha 1, Malostranské n. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

THE INSERTION OF REGULAR SETS IN POTENTIAL THEORY

EVA ČERMÁKOVÁ, Praha

(Received October 29, 1976)

Introduction. In 1924, N. WIENER [8] proposed a new construction of the generalized solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation. His method essentially uses the following fact: Any couple (K, U) consisting of a compact set K and an open set U with $K \subset U$ is admissible in the sense that there is a set V regular for the Dirichlet problem such that

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U .$$

It is known that each couple (K, U) is also admissible for a wide class of more general second order elliptic partial differential equations than the Laplace equation. In fact, this follows from a result of R.-M. HERVÉ [4] (Proposition 7.1) established in the context of Brelot harmonic spaces. A related question in the same context is also investigated in [6]. On the other hand, a similar result is no longer valid e.g. for the heat equation as observed by H. BAUER in [1], p. 147. Consequently, the original Wiener's procedure is not directly applicable. (Note that the Wiener type solution has recently been investigated in [7] in the frame work of the axiomatic potential theory.)

The aim of this paper is to study in terms of Bauer's axiomatics necessary and sufficient conditions guaranteeing that a couple (K, U) is admissible. To this end, a special hull $r(K)$ of K is introduced in a suitable way so that the main result reads then as follows: The couple (K, U) is admissible, if and only if $r(K) \subset U$. For the case of the heat equation, several characterizations of $r(K)$ in terms of absorbent sets and balayage are given.

1. Terminology and notation. In what follows, X will denote a strong harmonic space in the sense of H. Bauer's axiomatics. For all notions we refer to [1]. For any set M we shall denote by M^*, $\operatorname{int} M$ and $\overline{M}$ its boundary, interior and closure, respectively.

Let U be an open subset of X and K a compact subset of U. The couple (K, U) is called *admissible* if there exists a regular set W such that $K \subset W \subset \overline{W} \subset U$. For a compact set $K \subset X$, we put

$$r(K) = \bigcap\{V;\ K \subset V \subset X;\ V \text{ regular}\}.$$

If there is no regular set V such that $K \subset V$, put $r(K) = X$.

2. Lemma. *If $r(K) \neq X$, then*

$$r(K) = \bigcap\{\overline{V};\ K \subset V \subset X;\ V \textit{ regular}\};$$

in particular, $r(K)$ is compact.

Proof. According to Theorem 4.3.5 of [1] to each regular set W such that $K \subset W$, there exists a regular set W_0 such that $K \subset W_0 \subset \overline{W}_0 \subset W$.

3. Theorem. *The following statements are equivalent:*

(i) *a couple (K, U) is admissible;*

(ii) $r(K) \neq X$, $r(K) \subset U$.

Proof. Implication (i) $\Rightarrow$ (ii) is obvious. Assume (ii) and let W be a regular set such that $K \subset W$. We can limit ourselves to the case $\overline{W} \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. Then $\overline{W} \cap (X \setminus U)$ is compact and $r(K) \cap (\overline{W} \cap (X \setminus U)) = \emptyset$, i.e. $[\overline{W} \cap (X \setminus U)] \subset [X \setminus \bigcap\{\overline{V};\ K \subset V,\ V \text{reg.}\}]$, thus

$$\overline{W} \cap (X \setminus U) \subset \bigcup_{\substack{V \text{reg,} \\ K \subset V}} (X \setminus \overline{V}).$$

We can therefore choose regular sets $V_1, \ldots, V_n$ such that

$$\overline{W} \cap (X \setminus U) \subset [X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} \overline{V}_i].$$

By Corollary 4.2.7 of [1], $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ is a regular set. Obviously,

$$K \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i$$

and thus applying Theorem 4.3.5 of [1] we can find a regular set V_0,

$$K \subset V_0 \subset \overline{V}_0 \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i.$$

Put $W_0 = V_0 \cap W$. Then $K \subset W_0$, W_0 is (according to Corollary 4.2.7 of [1] again) regular. Moreover, $\overline{W}_0 \subset U$.

4. Notation. *For $E \subset X$, let $A(E, X)$ be the smallest absorbent set in X containing E. We shall write $A(x, X)$ instead of $A(\{x\}, X)$.*

5. Lemma. *The components of an absorbent set are absorbent sets.*

Proof. For S connected, $A(S, X)$ is always connected. (See Exercise 6.1.2 in [3].) Let B be a component of A. Then $A(B, X)$ is a connected absorbent set containing B. Consequently, $B = A(B, X)$ and B is absorbent.

In what follows, X will denote *the harmonic space corresponding to the heat equation on a Euclidean space* R^{n+1} $(n \geqq 1)$ (see [1], Standard-Beispiel 2, p. 20).

6. Notation. Given a compact set $K \subset X$, the *parabolic hull* M_K of K is the union of K and the set of all $x \in X \setminus K$ for which $A(x, X \setminus K)$ is relatively compact. Denote by T_K the union of K and the set of all $x \in X \setminus K$ for which there exists no absorbent set B in X such that $\emptyset \neq B \subset A(x, X \setminus K)$.

Further put $L_K = \{x \in X;\ R_1^K(x) = 1\}$.

7. Theorem. *For a compact subset* $K \subset X$,

$$r(K) = M_K = T_K = L_K\,.$$

Thus, together with Theorem 3 we obtained a characterization of admissible couples (K, U) in terms of the parabolic hull of K.

The proof of this theorem will be divided into the following steps.

8. Proposition. *Let Y be an open subset of X and A a closed set in Y. Then the following assertions are equivalent:*

(i) *The set A is absorbent in the harmonic space Y.*

(ii) *For each $x \in A$ there exists a neighborhood U_x and an absorbent set B in X such that $U_x \cap A = U_x \cap B$.*

Proof. Suppose (i). For $x \in \operatorname{int} A$, choose a neighborhood U_x of x such that $U_x \subset A$, and put $B = X$. If $x \in Y$ is a boundary point of A, then we choose $a > 0$ in such a way that the set

$$U_x = \{y \in R^{n+1};\ \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 - (a + x_{n+1} - y_{n+1})^2 < 0\,;$$
$$x_{n+1} - a < y_{n+1} < x_{n+1} + a\}$$

is contained in Y. (The sets of this form will be called standard cones. Recall that each standard cone is a regular set — see [1], p. 21). For each $y \in U_x \cap A(x, X)$, $y \neq x$, there is a standard cone S such that $x \in S \subset \bar{S} \subset U_x$, $y \in S^*$. Then $y \in \operatorname{spt} \mu_x^S$, where μ_x^S denotes the harmonic measure corresponding to x and the regular set S (see [1], p. 21). Obviously, $\operatorname{spt} \mu_x^S \subset A$ and hence

$$U_x \cap A(x, X) \subset U_x \cap A\,.$$

Suppose now that there exists $z \in (U_x \cap A) \setminus A(x, X)$. The supports of harmonic measures μ_z^V corresponding to regular sets V, $V \subset U_x$ (consider e.g. standard cones) for which $z \in V$, cover the set $[A(z, X) \cap U_x] \setminus \{z\}$. Thus

$$x \in \operatorname{int}[U_x \cap A(z, X)] \subset U_x \cap A\,,$$

which yields a contradiction with the assumption that x is a boundary point of A. So we obtain $U_x \cap A(x, X) = U_x \cap A$ and we can put $B = A(x, X)$.

Now suppose (ii). By [2] absorbent sets in X are exactly those which are closed and finely open. It follows that there is a fine neighborhood V_x of x, contained in B. Since $U_x \cap V_x$ is a fine neighborhood of x contained in A, A is finely open, and (using [2] again) A is an absorbent set in Y.

9. Corollary. *Let Y be an open subset of X. For each component Q of the boundary of an absorbent set in Y there exists $c \in R$ such that $Q \subset \{x \in X;\ x_{n+1} = c\}$.*

10. Lemma. *For a compact $K \subset X$, $M_K \subset r(K)$.*

Proof. Assume that $K \neq \emptyset$ and choose $x^0 \in M_K \setminus K$. The standard cones are regular, hence $r(K) \neq X$. Suppose that there is a regular neighborhood V of K, such that $x^0 \notin V$. Putting

$$L = \{x \in X;\ x_i = x_i^0 \text{ for all } 1 \leqq i \leqq n,\ x_{n+1} \leqq x_{n+1}^0\}\,,$$

there exists $y \in L$ such that

$$y_{n+1} = \sup\{x_{n+1};\ x \in L \setminus A(x^0, X \setminus K)\}\,.$$

According to Proposition 8, $y_{n+1} < x_{n+1}^0$. Denote

$$L_0 = \{x \in L;\ x_{n+1} > y_{n+1}\}\,.$$

By Proposition 8, $y \notin A(x^0, X \setminus K)$. Simultaneously $y \in \overline{A(x^0, X \setminus K)}$ and hence $y \in K$. It follows $L_0 \cap V^* \neq \emptyset$ and using the fact that $L_0 \subset A(x^0, X \setminus K)$, we have

$$\emptyset \neq L_0 \cap V^* \subset A(x^0, X \setminus K) \cap V^*\,.$$

Let $y^0 \in A(x^0, X \setminus K)$ be chosen such that

$$y_{n+1}^0 = \min\{x_{n+1};\ x \in A(x^0, X \setminus K) \cap V^*\}\,.$$

First, consider the case when y^0 is a boundary point of $A(x^0, X \setminus K)$ relatively to the set $X \setminus K$. Using Proposition 8, there is a neighborhood U_{y^0} of y^0 such that

$$U_{y^0} \cap (X \setminus V) \subset \{x \in X;\ y_{n+1}^0 \leqq x_{n+1}\}\,.$$

It follows (cf. [1], Theorem 4.3.1. and p. 108) that y^0 is an irregular boundary point of V, which is a contradiction. Using a similar argument, y^0 cannot be in the interior of $A(x^0, X \setminus K)$. Thus, $M_K \setminus K \subset V$ and since V is an arbitrary regular set containing K, we have $M_K \setminus K \subset r(K)$. Obviously, $K \subset r(K)$.

The proof of the inclusion $r(K) \subset M_K$ will be more complicated.

11. Lemma. *For a compact set K in X, the set $\{x \in X;\ \hat{R}_1^K(x) = 1\}$ is bounded.*

Proof. Obviously it is sufficient to prove that $\{x \in X;\ \hat{R}_1^K(x) = 1\}$ is bounded for

$$K = \{x \in X;\ |x_i| \leqq a_i,\ i = 1, \ldots, n + 1\} \quad (a_i \geqq 0)\,.$$

(a) If $y \in X$ is such that $y_{n+1} < -a_{n+1}$, then

$$\hat{R}_1^K(y) = R_1^K(y) = 0\,.$$

We can take the superharmonic function (see [1], p. 34.)

$$u = \begin{cases} 0 & \text{on} \quad A(y, X)\,, \\ 1 & \text{on} \quad X \setminus A(y, X)\,. \end{cases}$$

(b) If $y \in X$ is such that $|y_i| \leqq a_i$ for $i = 1, \ldots, n$, $y_{n+1} > a_{n+1}$ consider the set

$$D = \{x \in X \setminus K;\ |x_i| < a_i + 1 \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, n,\ |x_{n+1}| < |y_{n+1}| + 1\}\,.$$

Obviously, $y \in D$. Choose $z \in D$, $z_i = -a_i - \frac{1}{2}$. Using (a), $\hat{R}_1^K(z) = 0$. Applying the maximum principle for the heat equation (e.g. Theorem 2.3 in [5] – note that $\hat{R}_1^K$ is a harmonic function on D, $\hat{R}_1^K \leqq 1$) we obtain $\hat{R}_1^K(y) < 1$.

(c) In the case that for $y \in X$, $y_{n+1} \geqq -a_{n+1}$ and there exists i $(i = 1, \ldots, n)$ such that $|y_i| > a_i$ we can proceed analogously.

12. Notation. For a compact set $\emptyset \neq K \subset X$, we define a sequence $\{K_n\}$:

$$K_n = \{x \in X;\ \operatorname{dist}(x, K) \leqq 1/n\}\,.$$

13. Lemma. $L_K = M_K$.

Proof. Let $K \neq \emptyset$ and consider $x^0 \in X \setminus M_K$. The set $A(x^0, X \setminus K)$ is unbounded, thus using the preceding lemma and Proposition 8, there is $y \in \operatorname{int} A(x^0, X \setminus K)$ such that $R_1^K(y) < 1$. The function $1 - R_1^K$ is harmonic on $X \setminus K$. By the Harnack inequality (see [1], Theorem 1.4.4) applied to $X \setminus K$ and to the Dirac measure at x^0 there is $\alpha \geqq 0$ such that

$$0 < 1 - R_1^K(y) \leqq \alpha(1 - R_1^K(x^0))\,.$$

It follows that $R_1^K(x^0) < 1$.

Thus we proved that $L_K \subset M_K$. Let $y^0 \in M_K \setminus K$, choose n_0 such that $y^0 \notin K_{n_0}$. Let $n \geqq n_0$ be a natural number. According to Proposition 8 we obtain that the "parabolic boundary" (see [5] Chap. 3) of int $A(y^0, X \setminus K)$ in X is contained in K. Using the fact that $\hat{R}_1^{K_n}(y) = 1$ for all $y \in K$ together with the minimum principle for superharmonic functions for the heat equation (see Theorem 2.1 in [5]), we have

$$\inf \{\hat{R}_1^{K_n}(y);\ y \in \operatorname{int} A(y^0, X \setminus K)\} = 1 .$$

Since $y^0 \notin K_n$, $\hat{R}_1^{K_n}$ is continuous at y^0 (compare with Corollary 2.3.5 in [1]) and $\hat{R}_1^{K_n}(y^0) = R_1^{K_n}(y^0) = 1$. Now, applying the assertion of Appendix 3.2.1 of [1] we have

$$R_1^K = \inf_{n \in N} R_1^{K_n} ,$$

and hence $R_1^K(y^0) = 1$ (note that $K_n \supset K_{n_0}$ for $n < n_0$ and $R_1^{K_n} \geqq R_1^{K_{n_0}}$). This means $y^0 \in L_K$. Obviously, $K \subset L_K$.

14. Remark. In the course of the preceding proof we used the equality

$$R_1^K = \inf_{n \in N} R_1^{K_n} .$$

It is an easy consequence that

$$\{x \in X;\ R_1^K(x) = 1\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X;\ R_1^{K_n}(x) = 1\} .$$

Obviously, $\{x \in X;\ \hat{R}_1^K(x) = 1\} \cup K = \{x \in X;\ R_1^K(x) = 1\}$, so that

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X;\ R_1^{K_n}(x) = 1\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X;\ \hat{R}_1^{K_n}(x) = 1\} .$$

15. Lemma. *For a compact $K \subset X$, $r(K) \subset M_K$.*

Proof. Assume that $K \neq \emptyset$. Consider $x^0 \notin M_K$. Using Lemma 13 and the preceding remark, there exists a natural number n such that $\hat{R}_1^{K_m}(x^0) < 1$ for all $m \geqq n$. Simultaneously,

$$\inf_{x \in M_K} \hat{R}_1^{K_m}(x) = 1 .$$

The set M_K is a closed subset of the compact set $r(K)$. Hence, using Proposition 3.1.2 of [3] there is a fundamental system of regular neighborhoods of M_K not containing the point x^0. Thus, $x^0 \notin r(K)$.

16. Lemma. $T_K = M_K$.

Proof. Suppose first that $x \in M_K \setminus T_K$. If B is an absorbent set in X such that $B \subset A(x, X \setminus K)$, then B is a compact absorbent set and hence (see [1], p. 31) must be empty. It follows that $M_K \subset T_K$. Suppose now that the set $A(x, X \setminus K)$ is unbounded. Let $D \supset K$ be an $(n + 1)$-dimensional cube in X such that its faces are parallel to the coordinate axes. Choose $x^0 \in A(x, X \setminus K) \cap (X \setminus D)$. Applying Proposition 8, there is $y^0 \in A(x, X \setminus K)$ such that

$$y^0_{n+1} < \min_{x \in D} x_{n+1} .$$

Again by Proposition 8, $B = A(y^0, X) \subset A(x, X \setminus K)$.

17. Proposition. *Let E be a compact subset of X. If E is convex (or more generally, if the set $\{x \in E;\ x_{n+1} = c\}$ is convex for each $c \in R$) then $r(E) = r(E^*) = E$.*

Proof. Consider $x^0 \in X \setminus E$ and let P be an arbitrary line which contains x^0, $P \subset \{x \in X;\ x_{n+1} = x^0_{n+1}\}$. Consider $A(x^0, X \setminus E)$ and denote by P_1 the half-line starting from x^0 for which $P_1 \cap E = \emptyset$. Then according to Proposition 8, $P_1 \subset \subset A(x^0, X \setminus E)$, i.e. $A(x^0, X \setminus E)$ is unbounded. This means $x^0 \notin r(E)$. Thus we have $r(E) \subset E$. Obviously $E \subset r(E)$. Analogously we can show that $r(E^*) \subset E$. Further, if $x^0 \in \operatorname{int} E$, then $\operatorname{int} E$ is closed and open – hence also finely open – in $X \setminus E^*$. By [2] $\operatorname{int} E$ is an absorbent set in $X \setminus E^*$. Hence $A(x^0, X \setminus E^*) \subset \operatorname{int} E$, i.e. $A(x^0, X \setminus E^*)$ is bounded and $x^0 \in r(E^*)$. Simultaneously $E^* \subset r(E^*)$ and this completes the proof.

References

[1] *H. Bauer:* Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, Springer Verlag, Berlin, 1966.

[2] *Ch. Berg:* Quelques propriétés de la topologie fine dans la théorie du potentiel et des processus standard, Bull. Sci. Math. *95* (1971), 27—31.

[3] *C. Constantinescu* and *A. Cornea:* Potential theory on harmonic spaces, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[4] *R.-M. Hervé*: Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier *12* (1962), 415—571.

[5] *J. M. Landis:* Equations of the second order of elliptic and parabolic types (Russian), Nauka, Moscow, 1971.

[6] *P. A. Loeb:* An axiomatic treatment of pairs of elliptic differential equations, Ann. Inst. Fourier *16*, 2 (1966), 167—208.

[7] *J. Lukeš* and *I. Netuka:* The Wiener type solution of the Dirichlet problem in potential theory, Math. Ann. *224* (1976), 173—178.

[8] *N. Wiener:* Certain notions in potential theory, J. Math. Massachussetts *3* (1924), 24—51.

Author's address: 186 00 Praha 8, Sokolovská 83, ČSSR (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

A PROPERTY OF ENTIRE TRANSCENDENTAL FUNCTIONS

ALEXANDER ABIAN, Ames

(Received November 17, 1976)

Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ be an entire transcendental function and g and h two distinct complex numbers. In this paper it is shown that the set of all complex numbers for which a truncated part of $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ takes on the value g or h has infinitely many accumulation points.

First we prove:

Lemma. *Let $v \neq 0$ be a zero of the entire transcendental function*

$$f(z) = -g + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

where g is a complex number. Then in every neighborhood of v there exists a zero w of the truncated polynomial

$$p_k(z) = -g + \sum_{n=0}^{k} a_n z^n \quad \text{for some} \quad k < \infty \tag{2}$$

such that $w \neq v$.

Proof. Since v is a zero of the entire transcendental function $f(z)$, we see that there exists a circumference C of positive radius with center at v such that $f(z)$ has no zeros on C. But then since $|f(z)|$ is a continuous function on C, it has a positive minimum r. Thus,

$$|f(z)| \geqq r > 0 \quad \text{for} \quad z \in C\,. \tag{3}$$

Clearly, $-g + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ has uniform convergence on C and therefore, for some $m < \infty$, in view of (1), (2), (3), we have:

$$|p_m(z)| + |f(z) - p_m(z)| \geqq r \quad \text{with} \quad |f(z) - p_m(z)| < \tfrac{1}{2}r \quad \text{for} \quad z \in C\,.$$

Consequently, $|p_m(z)| > |f(z) - p_m(z)|$ on C. But then since $f(z)$ has a zero in the disk D whose boundary is C, by Rouché's theorem [1, p. 157], it follows that $p_m(z)$ must also have at least one zero u in D. If $u \neq v$ then we take $k = m$ and $w = u$. If $u = v$ then let k be the smallest natural number larger than m such that $a_k \neq 0$. But then since $v \neq 0$, from the above it follows that $p_k(z)$ has a zero w in D such that $w \neq v$.

Next we prove:

Theorem. *Let* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *be an entire transcendental function and* g *and* h *two distinct complex numbers. Let*

$$G = \{z \mid g = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n \quad \text{for some} \quad k < \infty\}$$

and

$$H = \{z \mid h = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n \quad \text{for some} \quad k < \infty\}$$

Then the set $G \cup H$ *has infinitely many accumulation points.*

Proof. Consider the entire transcendental function $f(z)$ given by (1). Since $h \neq g$, by Picard's big theorem [1, p. 341], at least one of the entire transcendental functions $f(z)$ or $-h + g + f(z)$ must have infinitely many distinct zeros. Without loss of generality, let $f(z)$ have infinitely many distinct zeros. But then, by the above Lemma, each such zero is an accumulation point of the set G mentioned in the Theorem.

Thus, the Theorem is proved.

The author thanks Prof. Stuart A. Nelson for helpful discussions.

Reference

1] *Saks, S.* and *Zygmund, A.*, Analytic Functions, Warsaw, 1952.

Author's address: Iowa State University Ames, Iowa 50011, U.S.A.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

ON A PROBLEM OF V. PTÁK

IVAN KOREC, Bratislava

(Received November 30, 1976)

1. INTRODUCTION AND NOTATION

If x, y are reals, $x < y$, then $[x, y]$, (x, y) denote respectively the closed and the open interval with the endpoints x, y, $(x, y] = (x, y) \cup \{y\}$. N will always denote the set of positive integers, $\emptyset$ the empty set etc.

Let T be a positive real number or ∞. The letters u, v, w will always denote mappings of the interval $(0, T)$ into $(0, T)$. For every such mapping $w(x)$ and every nonnegative integer n define

$$w^n(x) = x \quad \text{if} \quad n = 0\,, \qquad w^n(x) = w(w^{n-1}(x)) \quad \text{if} \quad n \in N\,,$$

$$W(x) = w^0(x) + w^1(x) + w^2(x) + \ldots\,,$$

and quite analogously for u, U or v, V instead of w, W.

The function $W(x)$ is a mapping of $(0, T)$ into $(0, \infty) \cup \{\infty\}$. By [1], a function $w(x)$ is said to be small on $(0, T')$, $0 < T' \leqq T$, if $W(x) < \infty$ for all $x \in (0, T')$. A function $w(x)$ is said to be small if it is small on $(0, T)$. The aim of our paper is to give conditions for a function $w(x)$ to be small. V. Pták suggested to study small functions in connection with his results concerning generalizations of the Banach fixed-point theorem and the closed graph theorem.

The main results of this paper are contained in Sections 4 and 5. Sections 2 and 3 contain some lemmas necessary in the proofs of the results in Sections 4 and 5. Section 6 contains examples and counter-examples showing that it is impossible to delete some assumptions in the theorems and lemmas of the previous sections.

All infinite series in the paper consist of nonnegative members and hence their sums always exist; of course, they can be equal to ∞. Analogously all integrals are integrals of nonnegative Lebesgue measurable functions, hence they exist but may be equal to ∞. Measurability of functions is mentioned in theorems and lemmas if necessary but it is not mentioned in their proofs if it is consequence of other assumptions.

2.1. Lemma. *Let* $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ *be a decreasing sequence of positive reals, let* $k > 1$ *and*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.\, \ln \frac{(a_n - a_{n+1}) + k\,.\,(a_{n-1} - a_n)}{a_n - a_{n+1}} < \infty\,.$$

Then $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots < \infty$.

Proof. Denote $c_{n-1} = a_{n-1} - a_n$ for all $n \in \mathsf{N}$. Then we have $a_n = (c_n + c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots) + a$, where $a = \lim_{n\to\infty} a_n$; the limit obviously exists and is nonnegative. We prove that it is equal to 0. If $a > 0$ then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{c_n + k\,.\,c_{n-1}}{c_n} < \infty\,.$$

However, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ and hence $c_n < c_{n-1}$, i.e.

$$\ln \frac{c_n + k\,.\,c_{n-1}}{c_n} > \ln(1 + k)$$

for infinitely many $n \in \mathsf{N}$, which is a contradiction.

Obviously $c_n < c_0$ for almost all $n \in \mathsf{N}$; for the sake of simplicity we assume that $c_n < c_0$ for all $n \in \mathsf{N}$. Then we have

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.\, \ln \frac{c_n + k\,.\,c_{n-1}}{c_n} =$$

$$= (c_1 + c_2 + c_3 + \ldots)\,.\,\ln \frac{c_1 + k\,.\,c_0}{c_1} + (c_2 + c_3 + \ldots)\,.\,\ln \frac{c_2 + k\,.\,c_1}{c_2} +$$

$$+ (c_3 + c_4 + \ldots)\,.\,\ln \frac{c_3 + k\,.\,c_2}{c_3} + \ldots =$$

$$= c_1\,.\,\ln \frac{c_1 + k\,.\,c_0}{c_1} + c_2\,.\,\ln\left(\frac{c_1 + k\,.\,c_0}{c_1}\,.\,\frac{c_2 + k\,.\,c_1}{c_2}\right) +$$

$$+ c_3\,.\,\ln\left(\frac{c_1 + k\,.\,c_0}{c_1}\,.\,\frac{c_2 + k\,.\,c_1}{c_2}\,.\,\frac{c_3 + k\,.\,c_2}{c_3}\right) + \ldots =$$

$$= c_1\,.\,\ln \frac{c_1 + k\,.\,c_0}{c_1} + c_2\,.\,\ln\left(\frac{c_1 + k\,.\,c_0}{c_2}\,.\,\frac{c_2 + k\,.\,c_1}{c_1}\right) +$$

$$+ c_3\,.\,\ln\left(\frac{c_1 + k\,.\,c_0}{c_3}\,.\,\frac{c_2 + k\,.\,c_1}{c_1}\,.\,\frac{c_3 + k\,.\,c_2}{c_2}\right) + \ldots \geqq$$

$$\geqq 0\,.\,c_1\,.\,\ln k + 1\,.\,c_2\,.\,\ln k + 2\,.\,c_3\,.\,\ln k + \ldots = (a_2 + a_3 + a_4 + \ldots)\,.\,\ln k\,.$$

Hence $a_2 + a_3 + a_4 + \ldots < \infty$ and then also $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots < \infty$, q.e.d.

2.2. Lemma. *Let $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ be a decreasing sequence of positive reals, let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ and*

$$a_2/a_1 \leqq a_3/a_2 \leqq a_4/a_3 \leqq \ldots$$

Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \cdot \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_{n+2}} < \infty .$$

Proof. For an arbitrary non-decreasing sequence $b = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$ of positive reals less than 1 and an arbitrary $i \in N$ define

$$F(b) = 1 + b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \ldots ,$$

$$G(b) = b_1 \cdot \frac{1 - b_1}{1 - b_2} + b_1 b_2 \cdot \frac{1 - b_2}{1 - b_3} + b_1 b_2 b_3 \cdot \frac{1 - b_3}{1 - b_4} + \ldots ,$$

$$F_i(b) = F(b_1, b_2, \ldots, b_i, b_i, b_i, \ldots) ,$$

$$G_i(b) = G(b_1, b_2, \ldots, b_i, b_i, b_i, \ldots) .$$

Up to a finite number of members, $F_i(b)$ and $G_i(b)$ are geometrical series with the quotient b_i, hence they are convergent. By an easy computation we can verify that

$$F_{i+1}(b) - F_i(b) = b_1 b_2 \ldots b_i \cdot \frac{b_{i+1} - b_i}{(1 - b_i) . (1 - b_{i+1})} ,$$

$$G_{i+1}(b) - G_i(b) = b_1 b_2 \ldots b_i \cdot \frac{(2 - b_i) . (b_{i+1} - b_i)}{(1 - b_i) . (1 - b_{i+1})} .$$

Hence for all $i \in N$ we have

$$0 \leqq G_{i+1}(b) - G_i(b) \leqq 2 . (F_{i+1}(b) - F_i(b)) .$$

Comparing term by term the infinite series $F_i(b)$, $F(b)$ we obtain $F_i(b) \leqq F(b)$ for all $i \in N$. On the other hand, $F_i(b)$ is greater than the i-th partial sum of $F(b)$ and hence $\lim_{i \to \infty} F_i(b) = F(b)$. The i-th partial sum of $G(b)$ is less than $G_i(b)$ and hence $\lim_{i \to \infty} G_i(b) \geqq G(b)$. (The limit exists but it may be ∞.)

Now we can prove the lemma. Without loss of generality we may assume $a_1 = 1$. Denote $b_n = a_{n+1}/a_n$ for every $n \in N$. The sequence $b = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$ is non-decreasing and $b_n \in (0, 1)$ for all $n \in N$. It holds

$$a_{n+1} \cdot \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_{n+2}} = b_1 b_2 \ldots b_{n-1} \cdot \frac{1 - b_n}{1 - b_{n+1}}$$

for all $n \in N - \{1\}$. Hence it remains to prove that $F(b) < \infty$ implies $G(b) < \infty$. However,

$$G(b) \leqq \lim_{i \to \infty} G_i(b) = G_1(b) + \sum_{i=1}^{\infty} (G_{i+1}(b) - G_i(b)) \leqq$$

$$\leqq 2 \,.\, F_1(b) + \sum_{i=1}^{\infty} 2 \,.\, (F_{i+1}(b) - F_i(b)) = 2 \,.\, F(b) < \infty \,, \quad \text{q.e.d.}$$

2.3. Lemma. *Let $k > 1$, let $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ be a decreasing sequence of positive reals, let*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

and let for all $n \in N$ $a_{n+1} - a_{n+2} \leqq k \,.\, (a_n - a_{n+1})$. Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \,.\, \ln \frac{k \,.\, (a_n - a_{n+1})}{a_{n+1} - a_{n+2}} < \infty \,.$$

Proof. Denote $b_n = a_n - a_{n+1}$ for all $n \in N$. Then obviously $a_n = b_n + b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots$ for all $n \in N$. Without loss of generality we may assume $b_1 = 1$ and $b_{n+1} < 1$ for all $n \in N$. Then we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \,.\, \ln \frac{k \,.\, (a_n - a_{n+1})}{a_{n+1} - a_{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \,.\, \ln \frac{k \,.\, b_n}{b_{n+1}} =$$

$$= (b_2 + b_3 + b_4 + \ldots) \,.\, \ln \frac{k \,.\, b_1}{b_2} + (b_3 + b_4 + \ldots) \,.\, \ln \frac{k \,.\, b_2}{b_3} +$$

$$+ (b_4 + b_5 + \ldots) \,.\, \ln \frac{k \,.\, b_3}{b_4} + \ldots =$$

$$= b_2 \,.\, \ln \frac{k \,.\, b_1}{b_2} + b_3 \,.\, \left(\ln \frac{k \,.\, b_1}{b_2} + \ln \frac{k \,.\, b_2}{b_3} \right) +$$

$$+ b_4 \,.\, \left(\ln \frac{k \,.\, b_1}{b_2} \right) + \ln \frac{k \,.\, b_2}{b_3} + \ln \frac{k \,.\, b_3}{b_4} \Bigg) + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1} \,.\, \ln (k^n / b_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1} \,.\, n \,.\, \ln k + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1} \,.\, |\ln b_{n+1}| \leqq$$

$$\leqq \ln k \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \,:\, (b_{n+1} + e^{-n}) =$$

$$= (1 + \ln k) \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \,.\, e^{-n} < \infty \,.$$

We have used the inequality

$$b \,.\, |\ln b| \leqq n \,.\, (b + \mathrm{e}^{-n}) \quad \text{for all} \quad b \in (0, 1) \quad \text{and} \quad n \in \mathsf{N}\,.$$

To verify it, let us distinguish two cases. If $\ln b \geqq -n$ then $b \,.\, |\ln b| \leqq n \,.\, b$. If $\ln b \leqq -n$ then we have $b \,.\, |\ln b| = |\ln b| \,.\, \mathrm{e}^{-|\ln b|} \leqq n \,.\, \mathrm{e}^{-n}$, since the function $x \,.\, \mathrm{e}^{-x}$ is decreasing on $[1, \infty)$, q.e.d.

3. OTHER LEMMAS

3.1. Lemma. *Let* $a, b, c \in (0, T)$, $a < b < c$, *let* $w(x) < x$ *for all* $x \in [b, c]$, $w(c) = b$, $w(b) = a$ *and* $k > 1$.

a) *If* $w(y) - w(x) \leqq k \,.\, (y - x)$ *for all* $x, y \in [b, c]$, $x < y$ *then*

$$\int_b^c \frac{x \,.\, \mathrm{d}x}{x - w(x)} \geqq \frac{b}{k}\,.$$

b) *If* $w(y) - w(x) \geqq -k \,.\, (y - x)$ *for all* $x, y \in [b, c]$, $x < y$ *then*

$$\int_b^c \frac{x \,.\, \mathrm{d}x}{x - w(x)} \geqq \frac{b}{k + 1} \,.\, \ln \frac{(b - a) + (k + 1) \,.\, (c - b)}{b - a}\,.$$

Proof. a) Let $u(x) = b + k \,.\, (x - c)$. Then $w(x) \geqq u(x)$ for all $x \in [b, c]$ and hence

$$\int_b^c \frac{x \,.\, \mathrm{d}x}{x - w(x)} \geqq \int_b^c \frac{x \,.\, \mathrm{d}x}{x - u(x)} = \int_b^c \frac{\mathrm{d}x}{1 - u(x)/x} \geqq \int_b^c \frac{\mathrm{d}x}{1 - u(b)/b} = \frac{b}{k}\,.$$

b) Let $u(x) = a - k \,.\, (x - b)$. Then $w(x) \geqq u(x)$ for all $x \in [b, c]$ and hence

$$\int_b^c \frac{x \,.\, \mathrm{d}x}{x - w(x)} \geqq \int_b^c \frac{x \,.\, \mathrm{d}x}{x - u(x)} = \int_b^c \frac{x \,.\, \mathrm{d}x}{(k + 1) \,.\, x - k \,.\, b - a}\,;$$

by an easy computation we obtain the required expression, q.e.d.

3.2. Lemma. *Let* $a, b, c \in (0, T)$, $a < b < c$, *let* $w(x) < x$ *for all* $x \in [b, c]$, *let* $w(c) = b$, $w(b) = a$ *and let* k *be a real.*

a) *If* $k \in (0, 1)$ *and* $w(y) - w(x) \geqq k \,.\, (y - x)$ *for all* $x, y \in [b, c]$, $x < y$ *then*

$$\int_b^c \frac{x \,.\, \mathrm{d}x}{x - w(x)} \leqq \frac{c}{k}\,.$$

b) *If* $k > 1$ *and* $0 \leqq w(y) - w(x) \leqq k \,.\, (y - x)$ *for all* $x, y \in [b. c]$, $x < y$ *then*

$$\int_b^c \frac{x \,.\, \mathrm{d}x}{x - w(x)} \leqq c + b \,.\, \ln \frac{(c - b) \,.\, k}{b - a}\,.$$

c) *If the function* $w(x)/x$ *is non-increasing on* $[b, c]$ *then*

$$\int_b^c \frac{x \cdot dx}{x - w(x)} \leqq b \cdot \frac{c - b}{b - a}.$$

Proof. a) Let $u(x) = b + k \cdot (x - c)$. Then $w(x) \leqq u(x)$ for all $x \in [b, c]$ and since $u(x)/x$ is monotone on $[b, c]$ we have

$$\int_b^c \frac{x \cdot dx}{x - w(x)} \leqq \int_b^c \frac{x \cdot dx}{x - u(x)} \leqq \max\left(\frac{b \cdot (c - b)}{b - u(b)}, \frac{c \cdot (c - b)}{c - u(c)}\right) =$$

$$= \max\left(\frac{b}{k}, c\right) \leqq \frac{c}{k}.$$

b) Let $d = b + (b - a)/k$ and $u(x) = b + k \cdot (x - d)$ for $x \in [b, d]$, $u(x) = b$ for $x \in (d, c]$. Then $w(x) \leqq u(x)$ for all $x \in [b, c]$ and therefore

$$\int_b^c \frac{x \cdot dx}{x - w(x)} \leqq \int_b^c \frac{x \cdot dx}{x - u(x)} = \int_b^d \frac{x \cdot dx}{x - u(x)} + \int_d^a \frac{x \cdot dx}{x - u(x)} \leqq$$

$$\leqq d + \left(c - d + b \cdot \ln \frac{c - b}{b - a}\right) = c + b \cdot \ln \frac{k \cdot (c - b)}{b - a}.$$

c) We have

$$\int_b^c \frac{x \cdot dx}{x - w(x)} = \int_b^c \frac{dx}{1 - w(x)/x} = \int_b^c \frac{dx}{1 - a/b} = b \cdot \frac{c - b}{b - a}, \quad \text{q.e.d.}$$

3.3. Lemma. *Let* $w(x) < x$ *for all* $x \in (0, T)$, *let* $k > 1$ *and* $w(y) - w(x) \leqq \leqq k \cdot (y - x)$ *for all* $x, y \in (0, T)$, $x < y$ *or* $w(y) - w(x) \geqq -k \cdot (y - x)$ *for all* $x, y \in (0, T)$, $x < y$. *Let there be* $b \in (0, T)$ *such that the point* $[b, b]$ *is a limit point of the graph of* $w(x)$. *Then there are* $a, c \in (0, T)$, $a < c$ *such that*

$$\int_a^c \frac{x \cdot dx}{x - w(x)} = \infty.$$

Proof. Let e.g. $w(y) - w(x) \leqq k \cdot (y - x)$ for $x < y$ and let the point $[b, b]$ be a limit point of the graph of $w(x)$. It can be easily shown that $b - w(x) \leqq \leqq k \cdot (b - x)$ for all $x \in (0, b)$. Take $c = b$ and $a \in (0, c)$. Then

$$\int_a^c \frac{x \cdot dx}{x - w(x)} \geqq \int_a^b \frac{a \cdot dx}{(k - 1) \cdot (b - x)} = \infty.$$

If $w(y) - w(x) \geqq -k \cdot (y - x)$ for $x < y$, the proof is similar. We choose $a = b$ and $c \in (b, T)$. Q.e.d.

3.4. Lemma. *Let $w(x) < x$ for all $x \in (0, T)$, let $w(x)$ be Lebesgue measurable on $(0, T)$ nad let no point $[b, b]$, $b \in (0, T)$ be a limit point of the graph of $w(x)$. Then for all $a, c \in (0, T)$, $a < c$,*

$$\int_a^c \frac{x \, . \, dx}{x - w(x)} < \infty \, .$$

Proof. Take $a, c \in (0, T)$, $a < c$. Then there exists a positive number ε such that $w(x) \leqq x - \varepsilon$ for all $x \in [a, c]$ and hence

$$\int_a^c \frac{x \, . \, dx}{x - w(x)} \leqq \int_a^c \frac{c \, . \, dx}{\varepsilon} < \infty \, . \quad \text{Q.e.d.}$$

3.5. Lemma. *Let at least one of the functions $u(x)$, $v(x)$ be non-decreasing on $(0, t)$, let $u(x) \leqq v(x)$ for every $x \in (0, t)$. Let $a, b \in (0, T)$, $V(b) < \infty$ and $\lim_{n \to \infty} u^n(a) = 0$. Then $U(a) < \infty$.*

Proof. Without loss of generality we may assume $a \leqq b < t$. Now we can prove $u^n(a) \leqq v^n(b)$ by induction. If $n = 0$ then obviously $u^n(a) = a \leqq b = v^n(b)$. For $n \in N$ we have

$$u^n(a) = u(u^{n-1}(a)) \leqq X \leqq v(v^{n-1}(b)) = v^n(b)$$

where $X = u(v^{n-1}(a))$ if $u(x)$ is non-decreasing and $X = v(u^{n-1}(a))$ if $v(x)$ is non-decreasing. Comparing $U(a)$, $V(b)$ term by term we obtain $U(a) \leqq V(b) < \infty$, q.e.d.

4. CRITERIA OF SMALLNESS

Let t be a fixed element of $(0, T)$; it is suitable to imagine it small. An obvious necessary condition for a function $w(x)$ to be small is

(4.0) $$\lim_{n \to \infty} w^n(x) = 0 \quad \text{for every} \quad x \in (0, T) \, ;$$

this condition will be called the zero-condition for the function $w(x)$. It is easy to see that if a function $w(x)$ satisfies the zero-condition and is small on $(0, t)$ then it is small (i.e. small on the whole $(0, T)$). The problem whether a function $w(x)$ is small is usually much more difficult than the problem whether $w(x)$ satisfies the zero-condition. Therefore it is usually reasonable first to verify (4.0) and only if it holds to find out whether $w(x)$ is small. Hence it is suitable to investigate smallness on $(0, t)$.

We shall also assume

(4.1) $$w(x) < x \quad \text{for all} \quad x \in (0, t]$$

in most theorems. The condition (4.1) is obviously very natural even if it is not necessary for $w(x)$ to be small (see Example 6.5). Our basic result is the following theorem.

4.1. Theorem. *Let $w(x)$ satisfy (4.1) and (4.0), let there be a real k such that*

$$w(y) - w(x) \leqq k\,.\,(y - x) \quad \textit{for all} \quad x, y \in (0, t]\,, \quad x < y \tag{4.2}$$

or

$$w(y) - w(x) \geqq k\,.\,(y - x) \quad \textit{for all} \quad x, y \in (0, t]\,, \quad x < y\,, \tag{4.3}$$

and let

$$\int_0^t \frac{x\,.\,\mathrm{d}x}{x - w(x)} < \infty\,. \tag{4.4}$$

Then the function $w(x)$ is small.

Proof. We may obviously assume $|k| > 1$ and prove only $W(a) < \infty$ for all $a \in (0, t)$. Denote $a_n = w^n(a)$ for all $n \in \mathsf{N} \cup \{0\}$. The sequence $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ is decreasing and its limit is 0. Now let us distinguish two cases.

If (4.2) holds then using Lemma 3.1a for $b = a_n$, $c = a_{n-1}$ we obtain

$$W(a) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqq a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k\,.\int_{a_n}^{a_{n-1}} \frac{x\,.\,\mathrm{d}x}{x - w(x)} =$$

$$= a_0 + k\,.\int_0^a \frac{x\,.\,\mathrm{d}x}{x - w(x)} \leqq a_0 + k\,.\int_0^t \frac{x\,.\,\mathrm{d}x}{x - w(x)} < \infty\,.$$

Let (4.3) hold. Using Lemma 3.1b we obtain

$$\infty > \int_0^a \frac{x\,.\,\mathrm{d}x}{x - w(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n-1}} \frac{x\,.\,\mathrm{d}x}{x - w(x)} \geqq$$

$$\geqq \frac{a_{n+1}}{-k + 1}\,.\ln \frac{(a_n - a_{n+1}) + (-k + 1)\,.\,(a_{n-1} - a_n)}{a_n - a_{n+1}}\,.$$

Now we can use Lemma 2.1. It implies that $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots < \infty$ and hence $W(a) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots < \infty$, q.e.d.

Theorem 4.1 shows that (4.4) is a sufficient smallness condition for a rather large class of functions $w(x)$. Generally speaking, it is not a necessary condition (see Example 6.7). However, (4.4) can turn out to be a necessary and sufficient smallness condition if we restrict the class of functions $w(x)$ considered. Some convenient restrictions are given in the next three theorems. In their proofs the necessity of (4.4) is verified only, the sufficiency being obvious consequence of Theorem 4.1.

4.2. Theorem. *Let $w(x)$ satisfy (4.0) and (4.1), let there be a positive real k such that (4.3) holds. Then the function $w(x)$ is small if and only if (4.4) holds.*

Proof. We may obviously assume $k < 1$. Let $w(x)$ be small. Denote $a_n = w^{n-1}(t)$ for all $n \in N$. By Lemma 3.2 we have

$$\int_0^t \frac{x \, . \, dx}{x - w(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{x \, . \, dx}{x - w(x)} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{k} = \frac{W(t)}{k} < \infty \, . \quad \text{Q.e.d.}$$

4.3. Theorem. *Let $w(x)$ satisfy (4.0) and (4.1) and let the function $w(x)/x$ be non-increasing on $(0, t]$. Then the function $w(x)$ is small if and only if (4.4) holds.*

Proof. Let $w(x)$ be small. Denote $a_n = w^{n-1}(t)$ for all $n \in N$. Then

$$\int_0^t \frac{x \, . \, dx}{x - w(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{x \, . \, dx}{x - w(x)} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_{n+2}} \, . \, a_{n+1} < \infty \, ;$$

the first inequality follows from Lemma 3.2c and the other from Lemma 2.2, q.e.d.

4.4. Theorem. *Let $w(x)$ satisfy (4.0) and (4.1), let $w(x)$ be non-decreasing and let there be a real k such that (4.2) holds. Then $w(x)$ is small if and only if (4.4) holds.*

Proof. We may obviously assume $k > 1$. Let $w(x)$ be small. Denote $a_n = w^{n-1}(t)$ for all $n \in N$. It holds

$$\int_0^t \frac{x \, . \, dx}{x - w(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{x \, . \, dx}{x - w(x)} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + a_{n+1} \, . \, \ln \frac{(a_n - a_{n+1}) \, . \, k}{a_{n+1} - a_{n+2}} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \, . \, \ln \frac{(a_n - a_{n+1}) \, . \, k}{a_{n+1} - a_{n+2}} < \infty \, .$$

The first inequality follows from Lemma 3.2b, the second from $W(t) < \infty$ and Lemma 2.3. Q.e.d.

Up to now we have tried to find smallness conditions which were as general as possible. Now we are going to give some more easily applicable conditions. We begin with a simple theorem for verifying (4.0).

4.5. Theorem. *A continuous function $w(x)$ satisfies the zero-condition if and only if $w(x) < x$ for all $x \in (0, T)$.*

Proof. Let $w(x) < x$ for all $x \in (0, T)$, and $a \in (0, T)$. Denote $a_n = w^n(a)$ for all $n \in N \cup \{0\}$. The decreasing sequence $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ has a limit $b \geqq 0$. If b is positive then $w(b) = b$, which contradicts the assumption. Therefore $b = 0$.

Conversely, let $w(a) \geqq a$ for some $a \in (0, T)$. We have to find b such that $W(b) = \infty$. If $W(a) = \infty$ take $b = a$. Otherwise there is $n \in N$ such that $w^n(a) \geqq w^{n+1}(a)$, $w^n(a) \leqq a$. Denote $c = w^n(a)$. It holds $w(c) \leqq c$, $w(a) \geqq a$, and therefore there is $b \in [c, a]$ such that $w(b) = b$. Then obviously $W(b) = \infty$, q.e.d.

Now we shall reformulate Theorems 4.1–4.4 for the functions $w(x)$ which have the first derivative on $(0, t)$. The proofs of both reformulated theorems are very easy and we shall omit them.

4.6. Theorem. *Let $w(x)$ satisfy (4.0) and (4.1), let $w'(x)$ exist for all $x \in (0, t]$, let there be a real k such that $w'(x) \leqq k$ for all $x \in (0, t]$ or $w'(x) \geqq k$ for all $x \in (0, t]$ and let (4.4) hold. Then the function $w(x)$ is small.*

4.7. Theorem. *Let k be a positive real, let $w(x)$ satisfy (4.0) and (4.1), let $w'(x)$ exist for all $x \in (0, t]$ and let at least one of the following conditions hold:*

(i) $w'(x) \geqq k$ *for all* $x \in (0, t]$;

(ii) $w'(x) \leqq w(x)/x$ *for all* $x \in (0, t]$;

(iii) $0 \leqq w'(x) \leqq k$ *for all* $x \in (0, t]$.

Then the function $w(x)$ is small if and only if (4.4) holds.

4.8. Corollary. *Let a function $w(x)$ satisfy (4.0) and (4.1), let r be a real, $t < e^{-e}$ and let for all $x \in (0, t)$ either*

$$w(x) = x - x^{2-r}$$

or

$$w(x) = x - x^2 \,.\, |\ln x|^{1+r}$$

or

$$w(x) = x - x^2 \,.\, |\ln x| \,.\, (\ln |\ln x|)^{1+r} \,.$$

Then $w(x)$ is small if and only if $r > 0$.

Proof. Let e.g. $w(x) = x - x^2 \,.\, |\ln x|^{1+r}$. Then

$$\int_0^t \frac{x \,.\, dx}{x - w(x)} = \int_0^t \frac{dx}{x \,.\, |\ln x|^{1+r}} = \int_{|\ln t|}^{\infty} \frac{dy}{y^{1+r}} \,.$$

The last integral converges if and only if $r > 0$. Now it suffices to use Theorem 4.7. The other two cases for $w(x)$ are similar. It is also clear how to continue the sequence of formulae for $w(x)$; then the number e^{-e} must be replaced by a smaller number depending on the considered formula. Q.e.d.

4.9. Corollary. *Let a function $w(x)$ satisfy (4.0) and (4.1) and let*

$$w(x) = c_1 \,.\, x + c_2 \,.\, x^2 + c_3 \,.\, x^3 + \ldots$$

for all $x \in (0, t]$ where c_i are real constants. Then $w(x)$ is small if and only if $c_1 < 1$.

The corollary is an immediate consequence of Theorem 4.7. Notice that if $w(x) = c_0 + c_1 \,.\, x + c_2 \,.\, x^2 + \ldots$ then $w(x)$ can satisfy (4.1) only if $c_0 = 0$.

In the preceding section we have given a list of small functions. Now we give some theorems which enable us to conclude that a given function is small if it is related in a certain way to some other small functions. As in Section 4, t denotes a fixed element of $(0, T)$.

5.1. Theorem. *Let $u(x)$ satisfy the zero-condition, let at least one of the functions $u(x)$, $v(x)$ be non-decreasing on $(0, t)$, let $u(x) \leqq v(x)$ for every $x \in (0, t)$ and let the function $v(x)$ be small on $(0, t)$. Then the function $u(x)$ is small.*

Proof. Take an arbitrary $x \in (0, T)$. The zero-condition implies that there is $n \in N$ such that $a = u^n(x) \in (0, t)$. Obviously $U(x) < \infty$ if and only if $U(a) < \infty$. Since the function $v(x)$ is small on $(0, t)$ it holds $V(a) < \infty$. Then by Lemma 3.5 (used for $b = a$) we have $U(a) < \infty$, and hence $U(x) < \infty$, q.e.d.

Another corollary of Lemma 3.5 follows by taking $u(x) = v(x) = w(x)$.

5.2. Theorem. *Let $w(x)$ satisfy the zero-condition and be non-decreasing on $(0, t]$. Then $w(x)$ is small if and only if $W(t) < \infty$.*

If we want to use Theorem 5.1 it is sometimes useful to extend the list of small functions by the theorem below.

5.3. Theorem. *Let $w(x)$ satisfy the assumptions of Theorem 4.7, $r \in (0, 1)$, let $u(x) = r \,.\, x + (1 - r) \,.\, w(x)$ for all $x \in (0, t]$ and let $u(x)$ satisfy the zero-condition. Then $u(x)$ is small if and only if $w(x)$ is small.*

Proof. The function $u(x)$ also satisfies the assumptions of Theorem 4.7 and

$$\int_0^t \frac{x \,.\, dx}{x - u(x)} = \frac{1}{1 - r} \,.\, \int_0^t \frac{x \,.\, dx}{x - w(x)} \,.$$

The integral on the left converges if and only if the integral on the right converges. Now it is sufficient to use Theorem 4.7. Q.e.d.

We give one example how to use Theorem 5.3.

5.4. Corollary. *If $w(x)$ satisfies the zero-condition, $r > 0$ and*

$$\liminf_{x \to 0^+} \frac{x - w(x)}{x^2 \,.\, |\ln x| \,.\, (\ln |\ln x|)^{1-r}} > 0$$

then the function $w(x)$ is small.

The assumption that at least one of $u(x)$, $v(x)$ is non-decreasing cannot be omitted in Theorem 5.1. (See Examples 6.3, 6.4.) However, it can be replaced by the continuity of $v(x)$. We shall see that from the following theorem.

5.5. Theorem. (J. Smítal). *Let a continuous function $w(x)$ be small and let for all $x \in (0, T)$*

$$u(x) = \sup \{w(y);\ y \in (0, x]\}\ .$$

Then the function $u(x)$ is small.

Proof. Let $b \in (0, T)$. There is the least real a_0 satisfying $w(a_0) = w(b)$. Denote $a_n = u^n(a_0)$ for all $n \in N$. Since $w(x)$ is continuous and small, we have $w(x) < x$ for all $x \in (0, T)$. Then $u(x) < x$ for all $x \in (0, T)$, $u(x)$ being continuous. Therefore $u(x)$ satisfies the zero-condition.

Denote by G_0 the set of all $x \in (0, T)$ such that $u(x)$ is constant in a (sufficiently small) neighbourhood of x. Further, denote for all $n \in N$

$$G_n = \{x \in (0, T);\ u^n(x) \in G_0\}\ ,$$

$$A_0 = [a_1, a_0] - G_0\ , \quad A_n = A_{n-1} - G_n\ .$$

All sets $A_0, A_1, A_2, \ldots$ are closed and $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$. We shall show $A_n \neq \emptyset$ for all $n \in N \cup \{0\}$. If we denote $u^n(X) = \{u^n(x);\ x \in X\}$ for every $X \subseteq (0, T)$ then it holds

$$(5.1) \qquad u^{n+1}(A_n) = [a_{n+2}, a_{n+1}]\ ,$$

$$(5.2) \qquad u^n(A_n) \cap G_0 = \emptyset\ .$$

For $n = 0$, (5.1) and (5.2) obviously hold. Let they be true for some n; we prove them for $n + 1$. It holds $u^{n+1}(A_{n+1}) = u^{n+1}(A_n - G_{n+1}) \subseteq [a_{n+2}, a_{n+1}] - G_0$, hence $u^{n+1}(A_{n+1}) \cap G_0 = \emptyset$. Further, we have $u^{n+2}(A_{n+1}) = u^{n+2}(A_n - G_{n+1}) = u(u^{n+1}(A_n - G_{n+1})) \supseteq u(u^{n+1}(A_n) - u^{n+1}(G_{n+1})) = u([a_{n+2}, a_{n+1}] - G_0) = [a_{n+3}, a_{n+2}]$. The converse inclusion is obvious: $u^{n+2}(A_{n+1}) \subseteq u^{n+2}([a_1, a_0]) = [a_{n+3}, a_{n+2}]$.

We have proved (5.1) and (5.2). (5.1) implies $A_n \neq \emptyset$ for all $n \in N$ and since $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ are closed sets we have $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$. Take $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. It holds $w^n(c) = u^n(c)$ for all $n \in N \cup \{0\}$. Therefore $U(c) = W(c) < \infty$. Now we use Theorem 5.2. Since $u(x)$ is obviously non-decreasing and satisfies (4.1), it is small, q.e.d.

5.6. Corollary. *A continuous function $w(x)$ is small if and only if $w(x) < x$ for all $x \in (0, T)$ and $W(t) < \infty$.*

5.7. Corollary. *Let $v(x)$ be a continuous small function and let $u(x) \leqq v(x)$ for all $x \in (0, T)$. Then the function $u(x)$ is small.*

6.1. Example. A function $w(x)$ such that $w(x) < x$ for all $x \in (0, T)$ which does not satisfy the zero-condition.

Let $w(x) = x/2$ for $x \in (0, t]$, $w(x) = (x + t)/2$ for $x \in (t, T)$. Then obviously $w(x) < x$ for all $x \in (0, T)$. However, for every $a \in (t, T)$ it holds $\lim_{n \to \infty} w^n(a) = t > 0$, hence $w(x)$ does not satisfy the zero-condition.

Remark. The just constructed function $w(x)$ is continuous from the left on $(0, T)$. From Theorem 4.5 we know that it cannot be continuous. It is easy to see that it cannot be even continuous from the right on $(0, T)$.

6.2. Example. A function $w(x)$ satisfying the zero-condition, $w(x) < x$ for all $x \in (0, T)$ and $W(t) < \infty$ which is not small on $(0, t)$.

Choose $r \in (0, t)$ such that r/t is irrational (e.g. $r = t/\sqrt{2}$) and for all $x \in (0, T)$ define $w(x) = r/(r/x + 1)$ if $r/x \in N$, $w(x) = x/2$ otherwise. The function $w(x)$ obviously satisfies (4.0) and $w(x) < x$. It holds also $W(t) = t + t/2 + t/4 + t/8 + \ldots$ $\ldots < \infty$. However, $W(r) = r + r/2 + r/3 + r/4 + \ldots = \infty$, hence $w(x)$ is not small on $(0, t)$.

6.3. Example. Functions $u(x), v(x)$ satisfying the zero-condition and $u(x) <$ $< v(x) < x$ for all $x \in (0, T)$, such that $v(x)$ is small and $U(x) = \infty$ for all $x \in (0, T)$.

Let for all $n \in N$

$$u(t/(2n)) = t/(4n + 1)\,, \qquad v(t/(2n)) = t/(4n)\,,$$
$$u(t/(2n - 1)) = t/(2n + 1)\,, \quad v(t/(2n - 1)) = t/(2n)$$

and for all $x \in (0, T)$ such that $t/x \notin N$ let

$$u(x) = t/(2n + 3)\,, \quad v(x) = t/(2n + 2)\,,$$

where n is the integer part of t/x. Then for every $x \in (0, T)$ there is $m \in N$ such that $u(x) = t/(2m + 1)$, $v(x) = t/(2m)$ and we have

$$U(x) = x + U(u(x)) = x + t/(2m + 1) + t/(2m + 3) + t/(2m + 5) + \ldots = \infty\,,$$
$$V(x) = x + V(v(x)) = x + t/(2m) + t/(4m) + t/(8m) + \ldots < \infty\,.$$

Remark. Neither $u(x)$ nor $v(x)$ can be non-decreasing, and $v(x)$ cannot be continuous.

6.4. Example. A small function $v(x)$ and a continuous but not small function $u(x)$ satisfying the zero-condition and $u(x) \leqq v(x)$ for all $x \in (0, T)$.

Let for all $n \in N$

$$u(t/(2n - 1)) = t/(2n + 3)\,, \quad u(t/(2n)) = t/(4n + 2)\,,$$

let $u(x) = t/5$ for all $x \in (t, T)$ and let $u(x)$ be defined by linear interpolation on each interval $(t/(n+1), t/n)$, $n \in N$. Let for all $n \in N$

$$v(t/(2n)) = t/(4n)\,,$$

$$v(x) = t/(2n+2) \quad \text{for} \quad x \in (t/(2n+1),\ t/(2n-1)] - \{t/2n\}$$

and let $v(x) = t/2$ for $x \in (t, T)$. Then obviously $u(x)$ is continuous and $u(x) \leqq v(x) < x$ for all $x \in (0, T)$. It is easy to verify that $v(x)$ is small. However, $u(x)$ is not small because $U(t) = t + t/5 + t/9 + t/13 + \ldots = \infty$.

Remark. If we replace the linear interpolation by a finer construction we can reach e.g. that $u(x)$ has all derivatives on $(0, T)$.

6.5. Example. A small function $w(x)$ such that $w(x) > x$ for all but countably many $x \in (0, T)$.

Let $(t_0, t_1, t_2, \ldots)$ be an increasing sequence, $t_0 = t$ and $\lim_{n\to\infty} t_n = T$. Denote $t_{-n} = t/2^n$ for all $n \in N$, $Z = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{t_{-n}, t_n\}$ and for all integers n and all $x \in (0, T)$

$$w(x) = t_{n+1} \quad \text{if} \quad x \in (t_{n-1}, t_n)\,, \qquad w(x) = t_{n-1} \quad \text{if} \quad x = t_n\,.$$

Then for all $x \in (0, T) - Z$ we have $w(x) > x$. In spite of that the function $w(x)$ is small: For each x, $W(x)$ converges if and only if $t_{-1} + t_{-2} + t_{-3} + \ldots < \infty$, which obviously holds.

6.6. Example. A function $w(x)$ satisfying (4.0), (4.1) and (4.4) which is not small.

Let for all $x \in (0, T)$

$$w(x) = x/2 \quad \text{if} \quad t/x \notin N\,, \qquad w(x) = t/(t/x + 1) \quad \text{if} \quad t/x \in N\,.$$

Then $w(x)$ satisfies (4.0) and (4.1). It also satisfies (4.4) because $w(x)$ can be replaced by $x/2$ in the integral. However, $w(x)$ is not small since $W(t) = t + t/2 + t/3 + \ldots \ldots = \infty$.

Remark. The function $w(x)$ just constructed is not continuous. However, a continuous function with all the mentioned properties can be found. It could be constructed as an "approximation" of the function $w(x)$. Therefore in Theorem 4.1 the conditions (4.2) or (4.3) cannot be replaced by continuity of $w(x)$.

6.7. Example. A non-decreasing small function $w(x)$ satisfying (4.0) and (4.1) which does not satisfy (4.4).

Denote $a_n = t/2^n$ for all $n \in N$, and define

$$w(x) = a_{n+1} \quad \text{for all} \quad x \in (a_{n+1}, a_n]\,, \qquad w(x) = a_1 \quad \text{for all} \quad x > a_1\,.$$

Then obviously $w(x)$ satisfies (4.1) and is non-decreasing. Further, $w(x)$ is small since $W(x) \leqq x + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots < \infty$, and hence it satisfies (4.0), too. However, (4.4) does not hold. Moreover, for every positive k we have

$$\int_0^k \frac{x \,.\, \mathrm{d}x}{x - w(x)} = \infty$$

because the graph of $w(x)$ has a limit point $[a_n, a_n]$ for some $a_n \in (0, k)$.

Remark. There is also an increasing continuous small function $w(x)$ satisfying (4.0) and (4.1) and not satisfying (4.4). It can be constructed as an "approximation" of the function from Example 6.7. Hence we cannot replace (4.3) with a positive k by the assumption that $w(x)$ is increasing in Theorem 4.2. Analogously we cannot replace the assumption (i) in Theorem 4.7 by the assumption $w'(x) > 0$.

6.8. Example. A decreasing sequence $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ of positive reals such that $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots < \infty$, $a_{n+1} - a_{n+2} \leqq a_n - a_{n+1}$ for all $n \in N$ and

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.\, \ln \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_{n+2}} = \infty \,.$$

(Compare with Lemma 2.3.)

Let $c_1 = 1$, $c_{n+1} = c_n \,.\, \mathrm{e}^{c_n}$, $b_n = 1/c_n$, $a_n = b_n + b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots$ for all $n \in N$. Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.\, \ln \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_{n+2}} \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} \,.\, \ln \frac{c_{n+1}}{c_n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty \,.$$

The other conditions can be easily verified.

References

[1] *V. Pták:* A rate of convergence, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar Hamburg (in print).

[2] *V. Pták:* The rate of convergence of Newton's process, Num. Mathem. *25* (1976), 279—285.

[3] *V. Pták:* Nondiscrete mathematical induction and iterative existence proofs, Linear algebra and its applications *13* (1976), 223—238.

[4] *J. Smítal:* a personal communication.

Author's address: 816 31 Bratislava, Mlynská dolina, Pavilon matematiky (Katedra algebry PFUK).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

ON PERIODIC SOLUTIONS OF NONLINEAR SECOND ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

G. G. HAMEDANI, Tehran

(Received December 29, 1976)

In our previous paper ([2], Theorem 1) we established the existence of w-periodic solutions of the differential equation $x'' + Kx = F(t, x, x')$ for the case $K > 0$. In this note we prove an existence (and uniqueness; Corollary 2) theorem for this differential equation for $K \neq 0$. This theorem is stronger than Theorem 1 of [2] in the sense that there is no restriction on w (except that $[0, w] \subseteq [0, \pi/\sqrt{K}]$ for $K > 0$, and $[0, w] \subseteq [0, +\infty)$ for $K < 0$). Furthermore, its extension (which can be obtained with out difficulties) to a system of nonlinear second order differential equations provides a stronger theorem than Theorems 1 and 2 of [1].

Consider the scalar boundary value problem

$$x'' + f(t, x, x') = 0\,, \tag{1}$$

$$x(0) - x(w) = x'(0) - x'(w) = 0\,, \tag{2}$$

where f is a continuous real-valued function with domain $[0, w] \times R^2$.

Theorem 1. *Let there exist constants $K \neq 0$ and $C > 0$ such that*

$$\begin{aligned} M = \operatorname{Max}\{|Kx - f(t, x, x')| : t \in [0, w]\,,\ \ |x| \le C\,, \\ |x'| \le (\sqrt{|K|})\, C\} \le |K|\, C\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Then in $[0, w] \subseteq [0, \pi/\sqrt{K}]$ if $K > 0$, and in $[0, w] \subseteq [0, +\infty)$ if $K < 0$, the problem (1), (2) has at least one solution $x(t)$ satisfying $|x(t)| \le C$, $|x'(t)| \le (\sqrt{|K|})\, C$ for $0 \le t \le w$.

Proof. If $K > 0$, then problem (1), (2) is equivalent to the integral equation

$$x(t) = \int_0^w G(t, s)\, F(s, x(s), x'(s))\, ds\,, \tag{4}$$

where $F(t, x, x') = Kx - f(t, x, x')$ and $G(t, s)$ is Green's function

$$(5) \qquad G(t, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{K}} \cdot \dfrac{\cos(\sqrt{K})(\frac{1}{2}w + s - t)}{\sin(\sqrt{K})\, w/2} & \text{for} \quad 0 \le s \le t \le w \\[2ex] \dfrac{1}{2\sqrt{K}} \cdot \dfrac{\cos(\sqrt{K})(\frac{1}{2}w + t - s)}{\sin(\sqrt{K})\, w/2} & \text{for} \quad 0 \le t \le s \le w\,. \end{cases}$$

If $K < 0$, then (1), (2) is equivalent to (4) where

$$(6) \quad G(t, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{|K|}} \cdot \dfrac{\exp[-(\sqrt{|K|})(t-s)]\exp[(\sqrt{|K|})w] + \exp[(\sqrt{|K|})(t-s)]}{1 - \exp[(\sqrt{|K|})\,w]} \\ \hfill \text{for} \quad s \le t \\[2ex] \dfrac{1}{2\sqrt{|K|}} \cdot \dfrac{\exp[-(\sqrt{|K|})(s-t)]\exp[(\sqrt{|K|})w] + \exp[(\sqrt{|K|})(s-t)]}{1 - \exp[(\sqrt{|K|})\,w]} \\ \hfill \text{for} \quad t \le s\,. \end{cases}$$

Let $S = \{x \in c'[0, w] : |x(t)| \le C, |x'(t)| \le (\sqrt{|K|})\, C\}$ and define an operator U on S by

$$U\, x(t) = \int_0^w G(t, s)\, F(s, x(s), x'(s))\, ds\,.$$

From (3), it follows that

$$|U\, x(t)| \le M \int_0^w |G(t, s)|\, ds \le \frac{M}{|K|} \leqq C\,,$$

$$\left|\frac{d}{dt}\, U\, x(t)\right| \le M \int_0^w |G_t(t, s)|\, ds \le \frac{M}{\sqrt{|K|}} \le (\sqrt{|K|})\, C\,,$$

and hence U maps S continuously into itself. Therefore by Schauder's theorem (4) (and hence (1), (2)) has a solution with the desired properties.

Corollary 1. *If in addition to the hypotheses of Theorem* 1, *the function* $f(t, x, x')$ *is* w*-periodic in* t *and locally Lipschitzian with respect to* (x, x'), *then* (1), (2) *has a* w*-periodic solution.*

Corollary 2. *If in addition to the hypotheses of Theorem* 1, *the function* $f(t, x, x')$ *is* w*-periodic in* t *and if*

$$|F(t, x_1, x_1') - F(t, x_2, x_2')| \leqq C_1 \left\{|x_1 - x_2| + \frac{1}{\sqrt{|K|}}\, |x_1' - x_2'|\right\}, \quad 0 \le t \le w$$

for $(x_i, x_i') \in \Omega = \{(x, x') : |x| \leqq C,\ |x'| \leqq (\sqrt{|K|})\, C\}$, *where* $C_1 > 0$ *is a constant such that*

$$\frac{2C_1}{|K|} < 1\,,$$

then (1), (2) *has a unique w-periodic solution.*

Proof. If, for $x \in S$, we let

$$\|x\| = \operatorname{Max}\left\{|x(t)| + \frac{1}{\sqrt{|K|}}\, x'(t) : 0 \leq t \leq w\right\},$$

we can easily show that U is a contraction with respect to $\|\cdot\|$ on S.

Applications. Three applications of Theorem 1 for the case $K > 0$ can be found in ([2], pp. 73–75). We give below three applications for the case $K < 0$.

(A$_1$) *Consider the equation*

$$x'' + f(x)\, x'^n + ax = \mu\, p(t)\,, \quad a < 0\,, \quad n \geq 2 \tag{7}$$

where n is an integer, all coefficients are continuous, $f(x)$ *is locally Lipschitzian in* x, $0 \leq f(x) \leq b$ *for all* x, *and* $|\mu|$ *sufficiently small. If* $K < a/2$ *and if* $p(t)$ *is periodic of period* w, *then* (7) *has a w-periodic solution.*

Proof. The hypotheses of Corollary 1 are satisfied by choosing $C = |\mu|^{1/n}$ with $|\mu|$ sufficiently small.

(A$_2$) *Consider the equation*

$$x'' + a(t)\, x + b(t) f(x^2) = \mu\, p(t)\,, \tag{8}$$

and let

(i) $a(t)$, $b(t)$, $p(t)$ *be continuous and* $a(t)$ *non-positive,*

(ii) $f(x)$ *be locally Lipschitzian, non-negative, non-decreasing for* $x \geqq 0$ *and for some* $C > 0$

$$B\frac{f(C^2)}{C} + |\mu|\frac{D}{C} \leq -E\,.$$

where

$$B = \operatorname*{Max}_{t\in[0,w]} |b(t)|\,, \quad D = \operatorname*{Max}_{t\in[0,w]} |p(t)|\,, \quad E = \operatorname*{Max}_{t\in[0,w]} a(t)\,.$$

If $K \leq A = \operatorname*{Min}_{t\in[0,w]} a(t)$ *and if* $a(t)$, $b(t)$, $p(t)$ *are periodic of period* w *then* (8) *has a w-periodic solution.*

Proof. The hypotheses of Corollary 1 are satisfied by choosing C as in (ii).

(A_3) *Consider the equation*

$$x'' + x'(1 - x^2) - x = \mu\, p(t)\,, \tag{9}$$

where $p(t)$ is continuous in t. If $K < -\frac{1}{2}$ and if $p(t)$ is periodic of period w then (9) *has a w-periodic solution.*

Proof. If $0 < C \leq 1$ $0 < \varepsilon < 1/\sqrt{|K|}$, and $|\mu| \leq (1 - \varepsilon(\sqrt{|K|}))\, C/B$, where $B = \underset{t\in[0,w]}{\operatorname{Max}} |p(t)|$, then by Corollary 1 (9) has a w-periodic solution.

References

[1] *G. G. Hamedani:* Periodic Boundary Value Problems for Nonlinear Second Order Vector Differential Equations. To appear in Revue Roum. De Math. Pures Et App.

[2] *B. Mehri* and *G. G. Hamedani:* On the Existence of Periodic Solutions of Nonlinear Second Order Differential Equations, SIAM J. Appl. Math. Vol. *29*, No. 1, July 1975.

Author's address: Arya-Mehr University of Technology, Tehran, Iran.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

BEMERKUNG ÜBER GEMEINSAME BEZIEHUNG ZWISCHEN KARTESISCHEN GRUPPEN UND KARTESISCHEN ZAHLENSYSTEMEN

VÁCLAV HAVEL und IVAN STUDNIČKA, Brno

(Eingegangen am 6. Januar 1977)

Das kartesische Zahlensystem wurde von R. BAER im Jahr 1942 eingeführt ([1], S. 145), während die kartesische Gruppe von G. PICKERT im Jahr 1952 ([4], S. 335). Zu dem Zusammenhang zwischen diesen beiden Begriffen hat sich schon im Jahr 1954 L. LOMBARDO-RADICE ([3], S. 133–134) geäußert, aber nur in Richtung zu seinen „Refraktionsebenen".

Im vorliegenden Artikel ordnen wir jeder vertikal-transitiven Ebene Π mit einem Bezugssystem $\mathfrak{B}$ schon eindeutig eine kartesische Gruppe $\boldsymbol{CG}_{\Pi,\mathfrak{B}}$ und zugleich ein kartesisches Zahlensystem $\boldsymbol{CNS}_{\Pi,\mathfrak{B}}$ zu, klären den beiderseitigen Zusammenhang (Behauptung 1) und schließen einige Folgerungen (Behauptungen 2, 3, 4). Dabei kann man die Frage stellen, ob eine kartesische Gruppe existiert, die mit dem angeschlossenen kartesischen Zahlensystem zusammenfällt und entweder keine Distributivität erfüllt oder aus beiden Distributivitäten genau die linke Distributivität erfüllt. Es ist nicht schwierig Beispiele von solchen kartesischen Gruppen zu konstruieren (§ 3).

1. Es sei eine projektive Ebene gegeben mit einer ausgezeichneten Geraden g_∞ und einem ausgezeichneten Punkt X_∞ auf g_∞.[1] Ist diese Ebene (X_∞, g_∞) – transitiv im Sinne von [1], S. 140, dann werden wir für sie die Benennung *vertikal-transitiv* gebrauchen.

Für ein *Bezugssystem* einer solchen vertikal-transitiven Ebene erklären wir jedes geordnete Quadrupel $(0, X_\infty, Y_\infty, E)$ von Punkten in allgemeiner Lage und mit $X_\infty Y_\infty = g_\infty$ und setzen $Z_\infty := 0E \sqcap g_\infty$, $\hat{Z}_\infty := ((EX_\infty \sqcap 0Y_\infty)(EY_\infty \sqcap 0X_\infty)) \sqcap \sqcap g_\infty$. Im weiteren untersuchen wir eine vertikal-transitive Ebene Π mit einem Bezugssystem $\mathfrak{B} = (0, X_\infty, Y_\infty, E)$. Setzen wir $\mathscr{M} := 0Y_\infty \setminus \{Y_\infty\}$ und führen binäre Operationen $+, \oplus, \cdot, \odot$ auf $\mathscr{M}$ folgendermaßen ein (Abb. 1–4):

[1]) Im weiteren bezeichnen wir mit AB die Gerade durch Punkte $A \neq B$ und mit $a \sqcap b$ den Schnittpunkt der Geraden $a \neq b$. Die Geraden fassen wir als Punktmengen auf.

$$(1)\quad a + b := 0Y_\infty \sqcap ((aX_\infty \sqcap 0Z_\infty)\, Y_\infty \sqcap bZ_\infty)\, X_\infty \qquad \forall a, b \in \mathcal{M},$$

$$(2_1)\quad \ominus a := 0Y_\infty \sqcap ((a\hat{Z}_\infty \sqcap 0X_\infty)\, Y_\infty \sqcap 0\hat{Z}_\infty)\, X_\infty \qquad \forall a \in \mathcal{M},$$

$$(2_2)\quad (\ominus a) \oplus b := 0Y_\infty \sqcap ((a\hat{Z}_\infty \sqcap 0X_\infty)\, Y_\infty \sqcap 0\hat{Z}_\infty)\, X_\infty \qquad \forall a, b \in \mathcal{M},$$

$$(3)\quad a \,.\, b := 0Y_\infty \sqcap X_\infty((aX_\infty \sqcap 0Z_\infty)\, Y_\infty \sqcap 0(bX_\infty \sqcap EY_\infty) \qquad \forall a, b \in \mathcal{M},$$

$$(4)\quad a \odot b := 0Y_\infty \sqcap X_\infty((a\hat{Z}_\infty \sqcap 0X_\infty)\, Y_\infty \sqcap 0(bX_\infty \sqcap EY_\infty) \qquad \forall a, b \in \mathcal{M}.$$

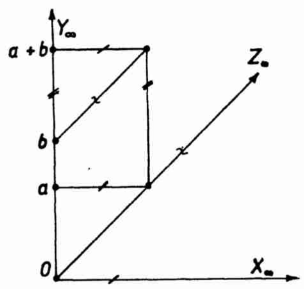


Abb. 1.

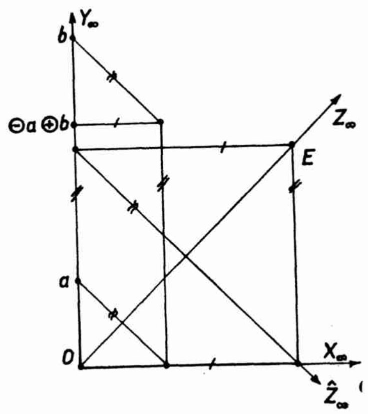


Abb. 2.

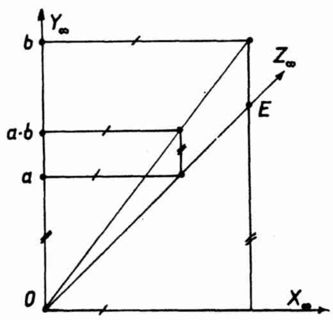


Abb. 3.

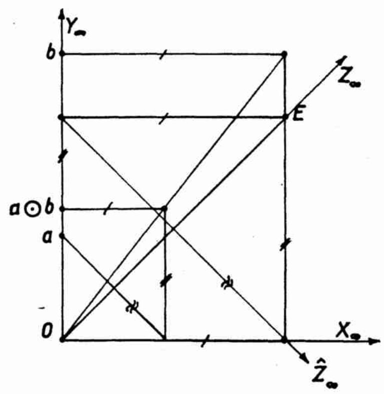


Abb. 4.

Daraus folgt, daß $(\mathcal{M}, +, 0)$, $(\mathcal{M}, \oplus, 0)$ Gruppen mit neutralem Element 0 sind, daß für jedes $x \in \mathcal{M}$ die Beziehungen $0 = x \,.\, 0 = 0 \,.\, x = x \odot 0 = 0 \odot x$, $x = 1 \,.\, x = x \,.\, 1$, $x = 1 \odot x$, $\ominus x = x \odot (\ominus 1)$ gelten und daß

$$(5)\qquad \#\{x \in \mathcal{M} \mid x \,.\, a = x \,.\, b + c\} = \#\{x \in \mathcal{M} \mid c + b \,.\, x = a \,.\, x\} = 1$$

für jedes $a, b, c \in \mathcal{M}$ mit $a \neq b$, und

$$\#\{x \in \mathcal{M} \mid x \odot a = x \odot b \oplus c\} = \#\{x \in \mathcal{M} \mid c \oplus b \odot y = a \odot y\} = 1$$

für jedes $a, b, c \in \mathcal{M}$ mit $a \neq b$ gilt.

Damit sind die nachstehenden Definitionen motiviert. Ein geordnetes Quadrupel $(\mathcal{M}, +, ., 0)$ heißt *verallgemeinerte kartesische Gruppe*, falls $\mathcal{M}$ eine wenigstens zweielementige Menge ist, wobei $(\mathcal{M}, +, 0)$ eine Gruppe bildet, $x . 0 = 0 . x = 0$ für jedes $x \in \mathcal{M}$ gilt und die Bedingung (5) erfüllt ist. Wenn überdies ein ausgezeichnetes Element $1 \in \mathcal{M}$ existiert mit $x . 1 = 1 . x = x$ für jedes $x \in \mathcal{M}$, bzw. mit $-(x . (-1)) = 1 . x = x$ für jedes $x \in \mathcal{M}$, so heißt $(\mathcal{M}, +, ., 0)$ eine *kartesische Gruppe*, bzw. ein *kartesisches Zahlensystem*.

Wir können nun die obigen Betrachtungen kürzer fassen: Die gegebene vertikal-transitive Ebene Π mit ihrem Bezugssystem $\mathfrak{B}$ bestimmt eindeutig eine kartesische Gruppe $\boldsymbol{CG}_{\Pi,\mathfrak{B}}$ und ein kartesisches Zahlensystem $\boldsymbol{CNS}_{\Pi,\mathfrak{B}}$. Umgekehrt ist jede kartesische Gruppe, bzw. jedes kartesische Zahlensystem isomorph[2]) mit der kartesischen Gruppe $\boldsymbol{CG}_{\Pi,\mathfrak{B}}$ bezüglich einer geeigneten vertikal-transitiven Ebene Π mit einem geeigneten Bezugssystem $\mathfrak{B}$, bzw. mit dem kartesischen Zahlensystem $\boldsymbol{CNS}_{\Pi,\mathfrak{B}}$ bezüglich einer geeigneten vertikal-transitiven Ebene Π mit einem geeigneten Bezugssystem $\mathfrak{B}$. Diese wohlbekannte Tatsache lassen wir hier ohne Beweis.

2. Es sei Π eine vertikal-transitive Ebene und $\mathfrak{B} = (0, X_\infty, Y_\infty, E)$ ihr Bezugssystem. Wir bezeichen wie oben $\boldsymbol{CG}_{\Pi,\mathfrak{B}} = (\mathcal{M}, +, ., 0, 1)$ und $\boldsymbol{CNS}_{\Pi,\mathfrak{B}} = (\mathcal{M}, \oplus, \odot, 0, 1)$. Wir setzen $a . b = c \Leftrightarrow a =: c/b$ und $a \odot b = c \Leftrightarrow a =: c//b$.

Behauptung 1. *Für die binaren Operationen* $+, ., \oplus, \odot$ *gelten die Beziehungen*

(i) $+ = \oplus$,

(ii) $(-a/-1) . b = a \odot b \quad \forall a, b \in \mathcal{M}$,

(iii) $(c//1) \odot d = c . d \quad \forall c, d \in \mathcal{M}$.

Behauptung 2. *Die binaren Operationen* $., \odot$ *fallen zusammen, wenn und nur wenn*

(iv) $a . (-1) = -a \quad \forall a \in \mathcal{M}$,

bzw. wenn und nur wenn

(v) $a \odot 1 = a \quad \forall a \in \mathcal{M}$.

ist.

Behauptung 3. $\boldsymbol{CG}_{\Pi,\mathfrak{B}}$ *erfüllt die linke, bzw. rechte Distributivität*[3]), *wenn und nur wenn* $\boldsymbol{CNS}_{\Pi,\mathfrak{B}}$ *die linke, bzw. die rechte Distributivität erfüllt.*

---

[2]) Gemeint ist der übliche Isomorphismus der algebraischen Systeme mit derselben Signatur.

[3]) Wir gebrauchen hier die Unterscheidung der beiden Distributivitäten nach G. Pickert (Addition bevorzugt die Multiplikation).

Behauptung 4. *Die Assoziativität für . ist genau dann der Assoziativität für $\odot$ äquivalent, wenn die Operationen . , $\odot$ zusammenfallen.*

Beweis der Behauptung 1. Es seien a, b beliebige Elemente der Menge $\mathcal{M} \setminus \{0\}$. Dann gilt $(\ominus a) \oplus b = (-a) + b$ genau dann, wenn für die Punkte B', C' $B'X_\infty = C'X_\infty$ gilt. (B' und C' werden so konstruiert, daß für $A = a$, $A' = b$ zuerst $B := 0X_\infty \sqcap AZ_\infty$, $C := 0X_\infty \sqcap A\hat{Z}_\infty$ gefunden wird und dann $B' := A'Z_\infty \sqcap BY_\infty$, $C' := A'\hat{Z}_\infty \sqcap CY_\infty$.) Die Geltung von $B'X_\infty = C'X_\infty$ ist aber eine Folge des

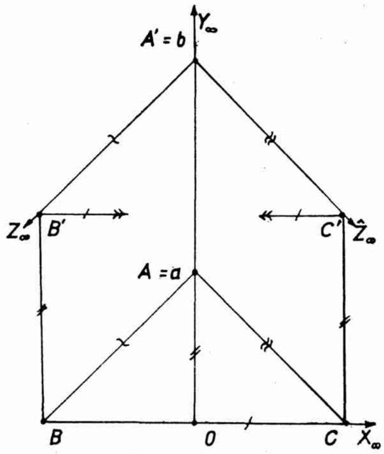


Abb. 5.

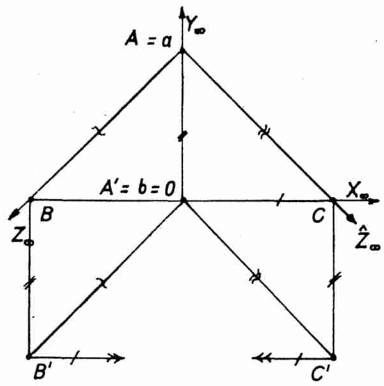


Abb. 6.

Desarguesschen Satzes (mit Zentrum Y_∞ und Achse g_∞), angewendet auf die Punkte A, B, C, A', B', C' (Abb. 5). Insbesondere für $b = 0$ bekommt man $\ominus a = -a$, so daß das Zusammenfallen von . und $\odot$ daher folgt (Abb. 6). Die Gerade $(EX_\infty \sqcap 0Y_\infty)(EY_\infty \sqcap 0X_\infty)$, bzw. aZ_∞, hat bezüglich $\mathbf{CG}_{\Pi,\mathfrak{B}}$ die Gleichung $y = x \,.\, (-1) + 1$, bzw. $y = x \,.\, (-1) + a$, so daß $(-a/-1) \,.\, b \in ((a\hat{Z}_\infty \sqcap 0X_\infty)\, Y_\infty \sqcap 0(bX_\infty \sqcap EY_\infty))\, X_\infty$ ist. Daraus folgt $(-a/-1) \,.\, b = a \odot b$ für jedes $a, b \in \mathcal{M}$. Setzen wir $-a/-1 = c$, dann ist $c \,.\, b = a \odot b$, während (ii) ergibt $(-a/-1) \,.\, 1 = a \odot 1$, d. h. $a = c//1$, und folglich $c \,.\, b = (c//1) \odot b$. ∎

Behauptung 2 ist eine unmittelbare Folge der Behauptung 1.

Beweis der Behauptung 3. Angenommen es gilt die linke Distributivität

(A) $$(a + b) \,.\, c = a \,.\, c + b \,.\, c \quad \forall a, b, c \in \mathcal{M} \,.$$

Es soll die linke Distributivität

(B) $$(a + b) \odot c = a \odot c + b \odot c \quad \forall a, b, c \in \mathcal{M}$$

hergeleitet werden.

Für jedes $a, b, c \in \mathscr{M}$ ist $a \odot c + b \odot c = (-a/-1) . c + (-b/-1) . c = ((-a/-1) + (-b/-1)) . c$ und weiter auch $(a + b) \odot c = (-(a + b)/-1) . c$. Für jedes $a, b, u, v \in \mathscr{M}$ ist die Summe von $-a = u . (-1)$, $-b = v . (-1)$ gleich $u . (-1) + v . (-1) = (u + v) . (-1)$, so daß also $u + v = (-a - b)/-1$. Nachdem aber (A) die Komutativität der Addition $+$ zur Folge hat (vgl. z. B. [4], S. 336), ist auch $-a - b = -(a + b)$ für jedes $a, b \in \mathscr{M}$. Daraus folgt schon (B).

Im weiteren setzen wir (B) voraus und wollen (A) herleiten. Erstens ist für jedes $a, b, c \in \mathscr{M}$ $a . c + b . c = (a//1) \odot c + (b//1) \odot c = (a//1 + b//1) \odot c$ und zweitens $(a + b) . c = ((a + b)//1) \odot c$. Für jedes $a, b, u, v \in \mathscr{M}$ ist die Summe von $a = u \odot 1$, $b = v \odot 1$ gleich $u \odot 1 + v \odot 1 = (u + v) \odot 1$, so daß also $u + v = (a + b)//1$ und daraus folgt schon (A).

Es gelte nun die rechte Distributivität

$$\text{(C)} \qquad a . (b + c) = a . b + a . c \quad \forall a, b, c \in \mathscr{M} .$$

Wir wollen die restliche rechte Distributivität

$$\text{(D)} \qquad a \odot (b + c) = a \odot b + a \odot c \quad \forall a, b, c \in \mathscr{M}$$

herleiten: Die linke Seite von (D) ist gleich $(-a/-1) . b + (-a/-1) . c = (-a/-1) . (b + c)$ und die rechte Seite ist gleich $(-a/-1) . b + (-a/-1) . c = (-a/-1) . (b + c)$. Damit ist (D) erfüllt.

Falls (D) gilt, dann ist $a \odot (b + c) = (a//1) . (b + c)$ und $a . b + a . c = (a//1) \odot b + (a//1) \odot c = (a//1) . (b + c)$, womit ist (C) erfüllt.

Beweis der Behauptung 4. Für $a, b, c \in \mathscr{M}$ gelte $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$. Nach (ii) ist dann $(-(-a/-1) . b/-1) . c = (-a/-1) . ((-b/-1) . c)$ und für $u = -a/-1$, $v = -b/-1$, $w = -(u . b)/-1$ also $w . c = u . (v . c)$. Zur Geltung von $(u . v) . c = u . (v . c)$ ist also notwendig sowie auch hinreichend, daß $w = u . v$ oder auch $-(u . b) = (u . v) . (-1)$ gilt. Für $v = 1$ folgt daraus $b = 1$ und $-u = u . (-1)$, so daß dann $. = \odot$.

Für $a, b, c \in \mathscr{M}$ gelte nun $(a . b) . c = a . (b . c)$. Dann folgt nach (iii) auch $(((a//1) \odot b)//1) \odot c = (a//1) \odot ((b//1) \odot c)$ und für $u = a//1$, $v = b//1$ und $w = (u \odot b)//1$ ist also $w \odot c = u \odot (v \odot c)$. Zur Geltung von $(u \odot v) \odot c = u \odot (v \odot c)$ ist also notwendig und hinreichend, daß $w = u \odot v$ oder auch $u \odot b = (u \odot v) \odot 1$ ist. Für $v = 1$ folgt daraus $b = 1$ und weiter $u \odot 1 = (u \odot 1) \odot 1$, woraus sich schon (v) und $. = \odot$ ergibt. ∎

3. Es sei $(\mathscr{R}, +, ., 0, 1)$ der Körper der reellen Zahlen. Wir nehmen eine auf $\{x \in \mathscr{R} \mid x \leqq 0\}$ von $-\infty$ zu 0 stetige monotone reelle Funktion f und definieren die Multiplikation $._f$ auf $\mathscr{R}$, so daß $a ._f b := f(a) . b$, falls $a, b < 0$ und $a ._f b := a . b$ in allen übrigen Fällen ist. Nach [3], S. 136–137, ist $(\mathscr{R}, +, ._f, 0, 1)$ eine kartesische Gruppe mit $x ._f (-1) = -f(x)$ für jedes $x \leqq 0$. Ist $f \neq \mathrm{id}_{\{x \in \mathscr{R} | x \leqq 0\}}$, so gibt es $x_0 < 0$, so daß $x_0 \cdot_f(-1) \neq x_0$. Daher ist $(\mathscr{R}, +, \cdot_f, 0, 1)$ kein kartesisches Zahlensystem.

Es ensteht die Frage nach der Existenz einer kartesischen Gruppe, die zugleich ein kartesisches Zahlensystem ist und wenigstens eine Distributivität nicht erfüllt. M. HALL fand schon in seiner grundlegenden Arbeit [2] (in Appendix, S. 273–276) Linksquasikörper R, S, T, U (in seiner Bezeichnung) der Ordnung 9, von denen keiner die linke Distributivität erfüllt; R hat assoziative Multiplikation und S, T, U nicht; das Element -1 liegt bei R, S, T im Zentrum, bei U aber nicht, so daß R, S, T zugleich kartesische Zahlensysteme sind, während U nicht diese Eigenschaft hat. Somit hat man also ein Beispiel der kartesischen Gruppe, wo die linke Distributivität verletzt ist.

Wir kehren nun zu dem Körper $(\mathscr{R}, +, ., 0, 1)$ der reelen Zahlen zurück. Definiert man weiter eine neue Multiplikation $*_f$ auf $\mathscr{R}$ mittels $a *_f b := b \cdot_f a$ für jedes $a, b \in \mathscr{R}$, wobei die obige Funktion f so gewählt ist, daß $f(-1) = -1, f \neq \mathrm{id}_{\{x \in \mathscr{R} | x \leqq 0\}}$, so sind in der kartesischen Gruppe $(\mathscr{R}, +, *_f, 0, 1)$ beide Distributivitäten, sowie auch die multiplikative Assoziativität verletzt, jedoch gilt $x *_f(-1) = -x$ für jedes $x \in \mathscr{R}$.

Zuletzt wollen wir ein Beispiel der kartesischen Gruppe angeben mit kommutativer Multiplikation, aber mit verletzter Distributivität. Wir nehmen den Körper der rationalen Zahlen $(\mathscr{Q}, +, ., 0, 1)$ und wandeln die Multiplikation . in eine neue Multiplikation $\odot$ wie folgt um: Wir setzen $\mathscr{Q}' := \{p/q \mid p$ ist eine ungerade ganze Zahl; q eine nichtverschwindende ganze Zahl; p, q teilerfremd$\}$, $\alpha_x = 2$ für jedes $x \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$, $\alpha_x = 0$ für jedes $x \in \mathscr{Q}'$ und $a \odot b = a \,.\, b \,.\, (1 + \alpha_a \,.\, \alpha_b)$ für jedes $a, b \in \mathscr{Q}$. Offensichtlich ist $\odot$ kommutativ. Wegen $2 \odot (4 + 1) \neq 2 \odot 4 + 2 \odot 1$ ist die Distributivität verletzt. Die Gültigkeit von $\#\{x \in \mathscr{Q} \mid x \odot a = x \odot b + c\} = 1$ für jedes $a, b, c \in \mathscr{Q}$ mit $a \neq b$ prüfen wir folgendermaßen nach. Es ist $x \odot a - x \odot b = x \,.\, a \,.\, (1 + \alpha_x \,.\, \alpha_a) - x \,.\, b \,.\, (1 + \alpha_x \,.\, \alpha_b)$, so daß die Gleichung $x \odot a = x \odot b + c$ als $x \,.\, (a - b + \alpha_x \,.\, (a \,.\, \alpha_a - b \,.\, \alpha_\beta)) = c$ überschrieben werden kann. Diese Gleichung lautet für $x \in \mathscr{Q}'$: (*) $x \,.\, (a - b) = c$ und für $x \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$: (**) $x \,.\, (a - b + 2 \,.\, (a \,.\, \alpha_a - b \,.\, \alpha_b)) = c$. Es seien nun a, b, c drei vorgegebene Elemente aus $\mathscr{Q}$, wobei $a \neq b$. Ist erstens $c = 0$, dann ist 0 die einzige Lösung in $\mathscr{Q}'$ der Gleichung (*) und im Fall $a - b + 2 \,.\, (a \,.\, \alpha_a - b \,.\, \alpha_b) \neq 0$ gibt es keine Lösung der Gleichung (**) in $\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$.

Bemerken wir, daß für $a - b \in \mathscr{Q}'$, bzw. $\in \mathscr{Q} / \mathscr{Q}'$ auch $a - b + 2 \,.\, (a \,.\, \alpha_a - b \,.\, \alpha_b) \in \mathscr{Q}'$, bzw. $\in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$ ist. Daraus folgt, daß der Fall $c = 0$, $a - b + 2 \,.\, (a \,.\, \alpha_a - b \,.\, \alpha_b) = 0$ nicht möglich ist, weil aus der zweiten Gleichung einerseits $a - b \in \mathscr{Q}' \setminus \{0\}$, anderseits aber auch $a - b = -2 \,.\, (a \,.\, \alpha_a - b \,.\, \alpha_b) \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$ folgt, was einen Widerspruch liefert. Zweitens setzen wir nun $c \neq 0$ voraus, so daß die Gleichung (*) höchstens eine Lösung in $\mathscr{Q}'$ und die Gleichung (**) höchstens eine Lösung in $\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$ hat. Weil aber $a - b$ und $a - b + 2 \,.\, (a \,.\, \alpha_a - b \,.\, \alpha_b)$ zugleich zu $\mathscr{Q}'$ oder zugleich zu $\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$ gehören, hat entweder die Gleichung (*) eine Lösung in $\mathscr{Q}'$ und die Gleichung (**) keine Lösung in $\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$ oder die Gleichung (*) keine Lösung in $\mathscr{Q}'$ und die Gleichung (**) eine Lösung in $\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$.

Literaturverzeichnis

[1] *R. Baer:* Homogeneity of projective planes, Amer. Journ. Math. *64* (1942), 137—152.
[2] *M. Hall:* Projective planes, Trans. Amer. Math. Soc. *54* (1943), 229—277.
[3] *L. Lombardo-Radice:* I piani di rifrazione, Rend. Mat. Appl. *13* (1954), 130—142.
[4] *G. Pickert:* Nichtkommutative cartesische Gruppen, Arch. d. Math. *3* (1952), 335—342.

Anschrift der Verfasser: 602 00 Brno, Hilleho 6 (Vysoké učení technické).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

SOME GLOBAL CHARACTERIZATIONS OF THE SPHERE IN E^4

KAREL SVOBODA, Brno

(Received April 25, 1977)

1. Let M be a surface in the 4-dimensional Euclidean space E^4. Let $\{U_\alpha\}$ be a covering of M such that in any domain U_α there is a field of orthonormal frames $\{M; v_1, v_2, v_3, v_4\}$ such that $v_1, v_2 \in T(M)$, $v_3, v_4 \in N(M)$, $T(M)$, $N(M)$ being the tangent and the normal bundle of M, respectively. Then we have

$$\begin{aligned}(1)\qquad dM &= \omega^1 v_1 + \omega^2 v_2 ,\\ dv_1 &= \omega_1^2 v_2 + \omega_1^3 v_3 + \omega_1^4 v_4 , \quad dv_2 = -\omega_1^2 v_1 + \omega_2^3 v_3 + \omega_2^4 v_4 ,\\ dv_3 &= -\omega_1^3 v_1 - \omega_2^3 v_2 + \omega_3^4 v_4 , \quad dv_4 = -\omega_1^4 v_1 - \omega_2^4 v_2 - \omega_3^4 v_3 ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\qquad & d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i , \quad d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j ,\\ & \omega_i^j + \omega_j^i = 0 , \qquad \omega^3 = \omega^4 = 0 .\end{aligned}$$

Using the exterior differentiation and applying Cartan's lemma, we get from (2) the existence of real functions a_i, b_i $(i = 1, 2, 3)$; α_i, β_i $(i = 1, 2, 3, 4)$; A_i, B_i, C_i, D_i, E_i $(i = 1, 2)$ in each U_α such that

$$\begin{aligned}(3)\qquad & \omega_1^3 = a_1\omega^1 + a_2\omega^2 , \quad \omega_2^3 = a_2\omega^1 + a_3\omega^2 ,\\ & \omega_1^4 = b_1\omega^1 + b_2\omega^2 , \quad \omega_2^4 = b_2\omega^1 + b_3\omega^2 ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4)\qquad & da_1 - 2a_2\omega_1^2 - b_1\omega_3^4 = \alpha_1\omega^1 + \alpha_2\omega^2 ,\\ & da_2 + (a_1 - a_3)\,\omega_1^2 - b_2\omega_3^4 = \alpha_2\omega^1 + \alpha_3\omega^2 ,\\ & da_3 + 2a_2\omega_1^2 - b_3\omega_3^4 = \alpha_3\omega^1 + \alpha_4\omega^2 ,\\ & db_1 - 2b_2\omega_1^2 + a_1\omega_3^4 = \beta_1\omega^1 + \beta_2\omega^2 ,\\ & db_2 + (b_1 - b_3)\,\omega_1^2 + a_2\omega_3^4 = \beta_2\omega^1 + \beta_3\omega^2 ,\\ & db_3 + 2b_2\omega_1^2 + a_3\omega_3^4 = \beta_3\omega^1 + \beta_4\omega^2 ;\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad & d\alpha_1 - 3\alpha_2\omega_1^2 - \beta_1\omega_3^4 = A_1\omega^1 + (B_1 - a_2K - \tfrac{1}{2}b_1k)\,\omega^2\,,\\
& d\alpha_2 + (\alpha_1 - 2\alpha_3)\,\omega_1^2 - \beta_2\omega_3^4 = (B_1 + a_2K + \tfrac{1}{2}b_1k)\,\omega^1 +\\
& \quad + (C_1 + a_1K - \tfrac{1}{2}b_2k)\,\omega^2\,,\\
& d\alpha_3 + (2\alpha_2 - \alpha_4)\,\omega_1^2 - \beta_3\omega_3^4 = (C_1 + a_3K + \tfrac{1}{2}b_2k)\,\omega^1 +\\
& \quad + (D_1 + a_2K - \tfrac{1}{2}b_3k)\,\omega^2\,,\\
& d\alpha_4 + 3\alpha_3\omega_1^2 - \beta_4\omega_3^4 = (D_1 - a_2K + \tfrac{1}{2}b_3k)\,\omega^1 + E_1\omega^2\,,\\
& d\beta_1 - 3\beta_2\omega_1^2 + \alpha_1\omega_3^4 = A_2\omega^1 + (B_2 - b_2K + \tfrac{1}{2}a_1k)\,\omega^2\,,\\
& d\beta_2 + (\beta_1 - 2\beta_3)\,\omega_1^2 + \alpha_2\omega_3^4 = (B_2 + b_2K - \tfrac{1}{2}a_1k)\,\omega^1 +\\
& \quad + (C_2 + b_1K + \tfrac{1}{2}a_2k)\,\omega^2\,,\\
& d\beta_3 + (2\beta_2 - \beta_4)\,\omega_1^2 + \alpha_3\omega_3^4 = (C_2 + b_3K - \tfrac{1}{2}a_2k)\,\omega^1 +\\
& \quad + (D_2 + b_2K + \tfrac{1}{2}a_3k)\,\omega^2\,,\\
& d\beta_4 + 3\beta_3\omega_1^2 + \alpha_4\omega_3^4 = (D_2 - b_2K - \tfrac{1}{2}a_3k)\,\omega^1 + E_2\omega^2\,,
\end{aligned}
$$

where

$$K = a_1a_3 - a_2^2 + b_1b_3 - b_2^2\,, \quad k = (a_1 - a_3)\,b_2 - (b_1 - b_3)\,a_2\,.$$

Denote further as usual

$$H = (a_1 + a_3)^2 + (b_1 + b_3)^2\,.$$

The invariants K, H are the Gauss and the mean curvature, respectively.

Now, let us introduce some elementary remarks necessary in the following.

As mentioned in [1], a normal vector field $X = xv_3 + yv_4$ is parallel, if

$$(6) \qquad dx - y\omega_3^4 = 0\,, \quad dy + x\omega_3^4 = 0\,.$$

In this case we can choose orthonormal frames $\{M; v_1, v_2, v_3, v_4\}$ in each U_α in such a way that

$$k = 0\,.$$

Further, let $v_1, v_2 \in T(M)$ generate an orthogonal conjugate net of lines on M. Then it is easy to see that

$$a_2 = 0\,, \quad b_2 = 0\,, \quad k = 0$$

on M. Hence, because of (4), we see that ω_1^2 is the mean 1-form and there are real functions ϱ, σ such that

$$
\begin{aligned}
(7) \qquad & \omega_1^2 = \varrho\omega^1 + \sigma\omega^2\,,\\
& \alpha_2 = \varrho(a_1 - a_3)\,, \quad \alpha_3 = \sigma(a_1 - a_3)\,,\\
& \beta_2 = \varrho(b_1 - b_3)\,, \quad \beta_3 = \sigma(b_1 - b_3)\,.
\end{aligned}
$$

Now, let us revert to the object of our consideration.

Let $f : M \to \mathscr{R}$ be a function. Its covariant derivatives f_i, f_{ij} to U_α for each α with respect to the frames $\{M; v_1, v_2, v_3, v_4\}$ are defined by the formulas

$$\mathrm{d}f = f_1\omega^1 + f_2\omega^2 , \tag{8}$$

$$\mathrm{d}f_1 - f_2\omega_1^2 = f_{11}\omega^1 + f_{12}\omega^2 , \quad \mathrm{d}f_2 + f_1\omega_1^2 = f_{12}\omega^1 + f_{22}\omega^2 .$$

In all following proofs we use the maximum principle in this form:

Let M be a surface in E^4 and ∂M its boundary. Let f be a function on M and f_i, f_{ij} its covariant derivatives. Let (i) *$f \geqq 0$ on M;* (ii) *$f = 0$ on ∂M;* (iii) *f satisfy in U_α the equation*

$$a_{11}f_{11} + 2a_{12}f_{12} + a_{22}f_{22} + a_1f_1 + a_2f_2 + a_0f = a$$

with $a_{ij}x^ix^j$ positive definite, $a_0 \leqq 0$ and $a \geqq 0$. Then $f = 0$ on M.

2. In the following consider the mean curvature vector field

$$\xi = (a_1 + a_3)\, v_3 + (b_1 + b_3)\, v_4 \tag{9}$$

on M. Further, $v_1, v_2 \in T(M)$ being the tangent orthonormal vector fields, define normal vector fields ξ_i, ξ_{ij} $(i, j = 1, 2)$ by

$$\xi_1 = (v_1\xi)^N , \quad \xi_2 = (v_2\xi)^N ; \tag{10}$$

$$\xi_{11} = (v_1\xi_1)^N , \quad \xi_{12} = (v_1\xi_2)^N , \quad \xi_{21} = (v_2\xi_1)^N , \quad \xi_{22} = (v_2\xi_2)^N , \tag{11}$$

where $(X)^N$ denotes the field of normal components of X. Under this notation introduce the fields

$$v_{11} = (v_1v_1)^N , \quad v_{22} = (v_2v_2)^N . \tag{12}$$

Now, we are going to get another proof of the assertion mentioned in [2]:

Theorem 1. *Let M be a surface in E^4. Let*

(i) *$K > 0$ on M;*
(ii) *ξ be parallel in $N(M)$;*
(iii) *∂M consist of umbilical points.*

Then M is a part of a 2-dimensional sphere in E^4.

Proof. On M, consider the function

$$f = H - 4K = (a_1 - a_3)^2 + (b_1 - b_3)^2 + 4a_2^2 + 4b_2^2 . \tag{13}$$

Relations (8) yield for f especially, by virtue of (4), (5),

$$
\begin{aligned}
(14) \qquad f_{11} = & -2[(a_1 - a_3)\, a_3 + (b_1 - b_3)\, b_3 - 4(a_2^2 + b_2^2)]\, K - \\
& - [k + 4(a_1 b_2 - a_2 b_1)]\, k + 2(\alpha_1 - \alpha_3)^2 + 2(\beta_1 - \beta_3)^2 + \\
& + 8(\alpha_2^2 + \beta_2^2) + 2(a_1 - a_3)(A_1 - C_1) + 2(b_1 - b_3)(A_2 - C_2) + \\
& + 8(a_2 B_1 + b_2 B_2)\,, \\
f_{22} = & \; 2[(a_1 - a_3)\, a_1 + (b_1 - b_3)\, b_1 + 4(a_2^2 + b_2^2)]\, K - \\
& - [k + 4(a_2 b_3 - a_3 b_2)]\, k + 2(\alpha_2 - \alpha_4)^2 + 2(\beta_2 - \beta_4)^2 + \\
& + 8(\alpha_3^2 + \beta_3^2) + 2(a_1 - a_3)(C_1 - E_1) + 2(b_1 - b_3)(C_2 - E_2) + \\
& + 8(a_2 D_1 + b_2 D_2)\,.
\end{aligned}
$$

Adding these equations under the condition (ii) which implies $k = 0$ on M, we get

$$
(15) \qquad f_{11} + f_{22} - 2fK = 2V + 2\Phi + 8\varphi + 8(a_2^2 + b_2^2)\, K
$$

where

$$
\begin{aligned}
(16) \qquad V = & (\alpha_1 - \alpha_3)^2 + (\alpha_2 - \alpha_4)^2 + (\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 - \beta_4)^2 + \\
& + 4(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + 4(\beta_2^2 + \beta_3^2)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(17) \qquad \Phi &= (a_1 - a_3)(A_1 - E_1) + (b_1 - b_3)(A_2 - E_2)\,, \\
\varphi &= a_2(B_1 + D_1) + b_2(B_2 + D_2)\,.
\end{aligned}
$$

Now, we have from (ii) using (4), (6), (9)

$$
\begin{aligned}
(18) \qquad & \alpha_1 + \alpha_3 = 0\,, \quad \alpha_2 + \alpha_4 = 0\,, \\
& \beta_1 + \beta_3 = 0\,, \quad \beta_2 + \beta_4 = 0\,.
\end{aligned}
$$

By exterior differentiation of these equations we obtain

$$
\begin{aligned}
& (A_1 + C_1 + a_3 K)\,\omega^1 + (B_1 + D_1)\,\omega^2 + (\alpha_2 + \alpha_4)\,\omega_1^2 + (\beta_1 + \beta_3)\,\omega_3^4 = 0\,, \\
& (B_1 + D_1)\,\omega^1 + (C_1 + E_1 + a_1 K)\,\omega^2 - (\alpha_1 + \alpha_3)\,\omega_1^2 + (\beta_2 + \beta_4)\,\omega_3^4 = 0\,, \\
& (A_2 + C_2 + b_3 K)\,\omega^1 + (B_2 + D_2)\,\omega^2 + (\beta_2 + \beta_4)\,\omega_1^2 - (\alpha_1 + \alpha_3)\,\omega_3^4 = 0\,, \\
& (B_2 + D_2)\,\omega^1 + (C_2 + E_2 + b_1 K)\,\omega^2 - (\beta_1 + \beta_3)\,\omega_1^2 - (\alpha_2 + \alpha_4)\,\omega_3^4 = 0
\end{aligned}
$$

and hence using (18)

$$
\begin{aligned}
& A_1 + C_1 + a_3 K = 0\,, \quad C_1 + E_1 + a_1 K = 0\,, \quad B_1 + D_1 = 0\,, \\
& A_2 + C_2 + b_3 K = 0\,, \quad C_2 + E_2 + b_1 K = 0\,, \quad B_2 + D_2 = 0\,.
\end{aligned}
$$

By means of these relations we finally have $\varphi = 0$ and

$$
\Phi = [(a_1 - a_3)^2 + (b_1 - b_3)^2]\, K\,.
$$

Thus the equation (15) reduces to

$$f_{11} + f_{22} - 4fK = 2V$$

and the maximum principle yields our assertion.

3. The following theorems are generalizations of this basic result. One of them is

Theorem 2. *Let M be a surface in E^4. Let*

(i) $K > 0$ *on* M;
(ii) $v_1, v_2 \in T(M)$ *generate an orthogonal conjugate net on* M;
(iii) $\xi_1, \xi_2 \in N(M)$ *be parallel in* $N(M)$;
(iv) ∂M *consist of umbilical points.*

Then M is a part of a 2-dimensional sphere in E^4.

Proof. Recall that the condition (ii) implies the relations (7) and

$$a_2 = 0\,, \quad b_2 = 0\,, \quad k = 0$$

on M. Thus the equation (15) has the form

$$f_{11} + f_{22} - 2fK = 2V + 2\Phi$$

where V, Φ are the functions introduced in (16), (17) respectively.
Now, we get from (9), (10) using (4)

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (\alpha_1 + \alpha_3)\, v_3 + (\beta_1 + \beta_3)\, v_4\,, \\ \xi_2 &= (\alpha_2 + \alpha_4)\, v_3 + (\beta_2 + \beta_4)\, v_4\,. \end{aligned} \tag{19}$$

As ξ_1 is parallel according to the assumption (iii), we have from (6) using (5)

$$(A_1 + C_1 + a_3K)\,\omega^1 + (B_1 + D_1)\,\omega^2 + (\alpha_2 + \alpha_4)\,\omega_1^2 = 0\,,$$
$$(A_2 + C_2 + b_3K)\,\omega^1 + (B_2 + D_2)\,\omega^2 + (\beta_2 + \beta_4)\,\omega_1^2 = 0\,.$$

Multiply these equations by $a_1 - a_3$, $b_1 - b_3$ respectively. Then using (7) we get in particular

$$\begin{aligned} (a_1 - a_3)(A_1 + C_1 + a_3K) + \alpha_2(\alpha_2 + \alpha_4) &= 0\,, \\ (b_1 - b_3)(A_2 + C_2 + b_3K) + \beta_2(\beta_2 + \beta_4) &= 0\,. \end{aligned} \tag{20}$$

In the same way we obtain from the condition of parallelness of ξ_2

$$\begin{aligned} (a_1 - a_3)(C_1 + E_1 + a_1K) - \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_3) &= 0\,, \\ (b_1 - b_3)(C_2 + E_2 + b_1K) - \beta_3(\beta_1 + \beta_3) &= 0\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Hence from (20), (21)

$$(a_1 - a_3)(A_1 - E_1) = (a_1 - a_3)^2 K - \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_3) - \alpha_2(\alpha_2 + \alpha_4),$$
$$(b_1 - b_3)(A_2 - E_2) = (b_1 - b_3)^2 K - \beta_3(\beta_1 + \beta_3) - \beta_2(\beta_2 + \beta_4)$$

and

$$\Phi = fK - \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_3) - \alpha_2(\alpha_2 + \alpha_4) - \beta_3(\beta_1 + \beta_3) - \beta_2(\beta_2 + \beta_4).$$

Thus we have

$$f_{11} + f_{22} - 4fK =$$
$$= 2V - 2[\alpha_3(\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_2(\alpha_2 + \alpha_4) + \beta_3(\beta_1 + \beta_3) + \beta_2(\beta_2 + \beta_4)]$$

V being the function (16), and further

$$f_{11} + f_{22} - 4fK = \tfrac{7}{2}(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) +$$
$$+ 2[(\alpha_1 - \tfrac{3}{2}\alpha_3)^2 + (\alpha_4 - \tfrac{3}{2}\alpha_2)^2 + (\beta_1 - \tfrac{3}{2}\beta_3)^2 + (\beta_4 - \tfrac{3}{2}\beta_2)^2]$$

so that by means of the maximum principle $f = 0$ on M. This completes our proof.

4. A generalization of the characterization of the sphere in E^4 is formulated in the following

Theorem 3. *Let M be a surface in E^4. Let*

(i) $K > 0$ *on* M;

(ii) $v_1, v_2 \in T(M)$ *generate an orthogonal conjugate net on* M;

(iii) (a) $\langle \xi_{11} + S(\xi_{12} - \xi_{21}), v_{11} - v_{22} \rangle \geqq 0$ *on M where $S : M \to \mathscr{R}$ is a function satisfying* $|S| \leqq 4\sqrt{(2)} - 5$ *and*

(b) $\xi_2 \in N(M)$ *be parallel in* $N(M)$;

or

(iii′) (a′) $\langle -\xi_{22} + S(\xi_{12} - \xi_{21}), v_{11} - v_{22} \rangle \geqq 0$ *on M where $S : M \to \mathscr{R}$ is a function such that* $|S| \leqq 4\sqrt{(2)} - 5$ *and*

(b′) $\xi_1 \in N(M)$ *be parallel in* $N(M)$;

(iv) *each point of ∂M be umbilical.*

Then M is a part of a 2-dimensional sphere in E^4.

Proof. We are going to prove the case of the assumption (iii), the proof of the theorem under the condition (iii′) being analogous.

First of all, we get from (19) by means of (5), having in mind that $k = 0$ on M,

$$d\xi_1 = [(A_1 + C_1 + a_3K)v_3 + (A_2 + C_2 + b_3K)v_4]\,\omega^1 +$$
$$+ [(B_1 + D_1)v_3 + (B_2 + D_2)v_4]\,\omega^2 + \xi_2\omega_1^2,$$

$$d\xi_2 = [(C_1 + E_1 + a_1 K) v_3 + (C_2 + E_2 + b_1 K) v_4] \omega^2 +$$
$$+ [(B_1 + D_1) v_3 + (B_2 + D_2) v_4] \omega^1 - \xi_1 \omega_1^2 \pmod{v_1, v_2}$$

and hence, using (7) implied by (ii) we get from (11)

$$\begin{aligned}
\xi_{11} &= (A_1 + C_1 + a_3 K) v_3 + (A_2 + C_2 + b_3 K) v_4 + \varrho \xi_2 , \\
\xi_{12} &= (B_1 + D_1) v_3 + (B_2 + D_2) v_4 - \varrho \xi_1 , \\
\xi_{21} &= (B_1 + D_1) v_3 + (B_2 + D_2) v_4 + \sigma \xi_2 , \\
\xi_{22} &= (C_1 + E_1 + a_1 K) v_3 + (C_2 + E_2 + b_1 K) v_4 - \sigma \xi_1 .
\end{aligned} \tag{22}$$

Further, we have from (12) directly

$$v_{11} - v_{22} = (a_1 - a_3) v_3 + (b_1 - b_3) v_4 . \tag{23}$$

Assumption (iii) (b) yields immediately, see (21),

$$(a_1 - a_3)(C_1 + E_1 + a_1 K) + (b_1 - b_3)(C_2 + E_2 + b_1 K) =$$
$$= \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_3) + \beta_3(\beta_1 + \beta_3) .$$

From (22), (23) using (7) we obtain

$$(a_1 - a_3)(A_1 + C_1 + a_3 K) + (b_1 - b_3)(A_2 + C_2 + b_3 K) =$$
$$= \langle \xi_{11} + S(\xi_{12} - \xi_{21}), v_{11} - v_{22} \rangle - \alpha_2(\alpha_2 + \alpha_4) - \beta_2(\beta_2 + \beta_4) +$$
$$+ S[\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_3(\alpha_2 + \alpha_4) + \beta_2(\beta_1 + \beta_3) + \beta_3(\beta_2 + \beta_4)] .$$

Hence the relation (17) has the form

$$\Phi = \langle \xi_{11} + S(\xi_{12} - \xi_{21}), v_{11} - v_{22} \rangle + fK -$$
$$- \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_3) - \alpha_2(\alpha_2 + \alpha_4) - \beta_3(\beta_1 + \beta_3) - \beta_2(\beta_2 + \beta_4) +$$
$$+ S[\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_3(\alpha_2 + \alpha_4) + \beta_2(\beta_1 + \beta_3) + \beta_3(\beta_2 + \beta_4)]$$

and

$$f_{11} + f_{22} - 4fK = 2\langle \xi_{11} + S(\xi_{12} - \xi_{21}), v_{11} - v_{22} \rangle + 2W \tag{24}$$

where

$$W = V - \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_3) - \alpha_2(\alpha_2 + \alpha_4) - \beta_3(\beta_1 + \beta_3) - \beta_2(\beta_2 + \beta_4) +$$
$$+ S[\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_3(\alpha_2 + \alpha_4) + \beta_2(\beta_1 + \beta_3) + \beta_3(\beta_2 + \beta_4)] . \tag{25}$$

Now it is easy to see that

$$W = (\alpha_1 - \tfrac{3}{2}\alpha_3 + \tfrac{1}{2}S\alpha_2)^2 + (\alpha_4 - \tfrac{3}{2}\alpha_2 + \tfrac{1}{2}S\alpha_3)^2 + \tag{26}$$
$$+ (\beta_1 - \tfrac{3}{2}\beta_3 + \tfrac{1}{2}S\beta_2)^2 + (\beta_4 - \tfrac{3}{2}\beta_2 + \tfrac{1}{2}S\beta_3)^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{4}[(7 - S^2)\,\alpha_2^2 + 20S\alpha_2\alpha_3 + (7 - S^2)\,\alpha_3^2] +$$
$$+ \tfrac{1}{4}[(7 - S^2)\,\beta_2^2 + 20S\beta_2\beta_3 + (7 - S^2)\,\beta_3^2]\,.$$

The two last terms of (26) are non-negative for each α_i, β_i $(i = 2, 3)$ because of (iii) (a). The assumption (iii) (a) and the maximum principle complete again the proof.

As a special case of this assertion, we introduce

Corollary 1. *Let M be a surface in E^4. Assume* (i), (ii), (iv) *and let*

(iii) (a) $\xi_{11} + S(\xi_{12} - \xi_{21}) = 0$ *on M, $S : M \to \mathscr{R}$ being a function such that $|S| \leqq 4\sqrt{(2)} - 5$ on M and*

(b) ξ_2 *be parallel in $N(M)$*

or

(iii′) (a′) $-\xi_{22} + S(\xi_{12} - \xi_{21}) = 0$ *on M where $S : M \to \mathscr{R}$ is a function satisfying $|S| \leqq 4\sqrt{(2)} - 5$ on M and*

(b′) ξ_1 *be parallel in $N(M)$.*

Then M is a part of a 2-dimensional sphere in E^4.

Other trivial consequences can be obtained by putting $S = 0$ in Theorem 3 and Corollary 1.

5. Finally, we are going to prove a more general version of Theorem 3.

Theorem 4. *Let M be a surface in E^4. Let*

(i) $K > 0$ *on M;*

(ii) $v_1, v_2 \in T(M)$ *generate an orthogonal conjugate net of lines on M;*

(iii) $\langle \xi_{11} - \xi_{22} + S(\xi_{12} - \xi_{21}),\ v_{11} - v_{22} \rangle \geqq 0$ *on M where $S : M \to \mathscr{R}$ is a function such that $|S| \leqq 4\sqrt{(2)} - 5$ on M;*

(iv) *each point of ∂M be umbilical.*

Then M is a part of a 2-dimensional sphere in E^4.

Proof. From (17), (22) and (23) we have immediately

$$\Phi = \langle \xi_{11} - \xi_{22} + S(\xi_{12} - \xi_{21}),\ v_{11} - v_{22} \rangle + fK -$$
$$- \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_3) - \alpha_2(\alpha_2 + \alpha_4) - \beta_3(\beta_1 + \beta_3) - \beta_2(\beta_2 + \beta_4) +$$
$$+ S[\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_3(\alpha_2 + \alpha_4) + \beta_2(\beta_1 + \beta_3) + \beta_3(\beta_2 + \beta_4)]$$

and hence

$$f_{11} + f_{22} - 4fK = 2\langle \xi_{11} - \xi_{22} + S(\xi_{12} - \xi_{21}),\ v_{11} - v_{22} \rangle + 2W$$

where W is the function introduced by (25). Thus we get again the relation (26) and, according to the condition (iii), M is a part of a sphere in E^4 by virtue of the maximum principle.

Again we can formulate

Corollary 2. *Let M be a surface in E^4 satisfying the assumptions* (i), (ii), (iv) *of Theorem* 4. *Let*

(iii) $\xi_{11} - \xi_{22} + S(\xi_{12} - \xi_{21}) = 0$ *on* M, $S : M \to \mathscr{R}$ *being a function such that* $|S| \leqq 4\sqrt{(2)} - 5$ *on* M.

Then M is a part of a 2-dimensional sphere in E^4.

We have got trivial consequences of Theorem 4 and Corollary 2 for $S = 0$ on M.

References

[1] *A. Švec:* Contributions to the global differential geometry of surfaces. Rozpravy ČSAV, *87*, 1, 1977, 1–94.

[2] *D. A. Hoffman:* Surfaces in constant curvature manifolds with parallel mean curvature vector field. Bull. Am. Math. Soc., *78*, 1972, 247–250.

Author's address: 602 00 Brno, Gorkého 13 (Strojní fakulta VUT).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

SOME PROPERTIES OF SEMIBASE PFAFFIAN FORMS ON THE TANGENT BUNDLE

TOMÁŠ KLEIN, Zvolen

(Received May 3, 1977)

Let M be a differentiable manifold. Let TM, or T^*M denote the tangent, or the co-tangent bundle of M. In the theory of the mechanical structures (see [1] p. 173) the semibase forms on the bundle TM are of particular interest. In this paper we shall describe some properties of these forms and of the related structures.

1. Let (x^i), (x^i, y^i), (x^i, z_i), $(x^i, y^i, \xi^i, \eta^i)$, $(x^i, z_i, \sigma^i, \tau_i)$ be local charts on M, TM, T^*M, TTM, TT^*M, respectively. Let $\Lambda(TM)$ denote the graded algebra of exterior differential forms on TM. Denote $\mathscr{B}(TM)$ the subalgebra of all semibase forms on TM (see [1] p. 167). If $\omega \in \Lambda(TM)$ is a 1-form, then $\omega \in \mathscr{B}(TM)$ if and only if, with respect to a local coordinate system, we have

$$\omega = f_i(x, y)\, \mathrm{d}x^i . \tag{1}$$

There is a bijection between the vector space of all semibase 1-forms on TM and the vector space of all morphisms $TM \to T^*M$. The morphism p determined by the form (1) can be written locally

$$p : (x^i, y^i) \longmapsto (x^i, z_i = f_i(x, y)) .$$

Then the morphism

$$p_* : TTM \to TT^*M$$

will be written locally in the form

$$p_* : \begin{cases} x^i = x^i , \quad z_i = f_i(x, y) , \\ \sigma^i = \xi^i , \quad \tau_i = \dfrac{\partial f_i}{\partial x^j}\, \xi^j + \dfrac{\partial f_i}{\partial y^j}\, \eta^j . \end{cases} \tag{2}$$

Definition 1. A semibase 1-form $\omega \in \Lambda(TM)$ is called an *L-form* iff the corresponding morphism p is linear.

Locally, ω is an L-form if and only if

$$\omega = f_{ij}(x)\, y^j\, \mathrm{d}x^i\,.$$

2. Let V or V^* be a Liouville vector field on TM or T^*M, respectively. Locally, we can writte

$$V = y^i\, \partial/\partial y^i\,, \quad V^* = z_i\, \partial/\partial z_i\,.$$

Using (2) we get

$$p_*(x^i, y^i, 0, y^i) = \left(x^i,\ z_i = f_i(x, y),\ 0,\ \frac{\partial f_i}{\partial y^j}\, y^j\right). \tag{3}$$

Theorem 1. *The morphism p_* maps a Liouville vector field V on TM into a Liouville vector field V^* on T^*M if and only if the form ω is homogeneous of the 1-st order.*

Proof. A semibase form ω is homogeneous of the *1*-st order iff its Lie derivative $L_V\omega = \omega$, which is equivalent to

$$\frac{\partial f_i}{\partial y^j}\, y^j = f_i\,.$$

Hence and from (3) the theorem follows.

Corollary. *If ω is an L-form then $p_*(V) = V^*$ (see* [2]).

Let

$$X = a^i(x, y)\, \partial/\partial x^i + b^i(x, y)\, \partial/\partial y^i$$

be a vector field on TM, ω a semibase form (1) and p_* the corresponding morphism (2). We ask under which conditions we have

$$p_*(X) = V^*\,. \tag{4}$$

We can see easily that (4) holds iff

$$a^i = 0\,, \quad z_i = \frac{\partial f_i}{\partial y^j}\, b^j\,,$$

or equivalently, iff

$$f_i = \frac{\partial f_i}{\partial y^j}\, b^j\,. \tag{5}$$

Definition 2. The vector fields X on TM which are mapped into a Liouville vector field V^* on T^*M we shall call *Z-fields*.

Theorem 2. *For the Z-fields from Definition* 2 *and for the form* ω *from* (1)

$$L_Z\omega = \omega\,, \quad i_Z\omega = 0\,, \quad i_Z\,\mathrm{d}\omega = \omega\,, \quad L_Z\,\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega$$

hold.

Proof.

$$L_Z\omega = \sum_i [Z(f_i)\,\mathrm{d}x^i + f_i\,\mathrm{d}(Z(x^i))] = \sum_{i,j}\left[\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\,b^j\,\mathrm{d}x^i\right] = f_i\,\mathrm{d}x^i = \omega$$

if we use (5).

$i_Z\omega = \omega(Z) = 0$, because Z is a vertical field. From the relation

$$L_X\omega = i_X\,\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}i_X\omega \tag{6}$$

(see [1] p. 92) we get

$$i_Z\,\mathrm{d}\omega = \omega \tag{7}$$

if we use last relations.

Relation (6) can also be written as follows

$$L_Z\,\mathrm{d}\omega = i_Z\,\mathrm{d}\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}i_Z\,\mathrm{d}\omega\,. \tag{8}$$

However $\mathrm{d}\mathrm{d}\omega = 0$, so $i_Z\,\mathrm{d}\mathrm{d}\omega = 0$. By the (7) $i_Z\,\mathrm{d}\omega = \omega$, therefore (8) implies $L_Z\,\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega$, q.e.d.

Definition 3. The form ω from (1) will be called *regular* or *singular* at $u \in TM$, if the map p_* is regular or singular at u.

3. Let ω be the singular form and dim Ker p_* be the constant function on TM. In such a case the tangent spaces Ker p_* form distribution $\mathcal{V}$. The distribution is known to be integrable. As can be seen from (2) the distribution is vertical. The equations (2) also imply that the vector field

$$Y = b^i\,\partial/\partial y^i$$

is a subfield of vertical distribution $\mathcal{V}$ if and only if

$$\frac{\partial f_i}{\partial y^j}\,b^j = 0\,. \tag{9}$$

Theorem 3. *Vertical vector* Y *is a vector of distribution* $\mathcal{V}$ *if and only if* $i_Y\,\mathrm{d}\omega = 0$.

Proof. The exterior differentiation of ω from (1) is

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial f_i}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i + \frac{\partial f_i}{\partial y^j}\,\mathrm{d}y^j \wedge \mathrm{d}x^i\,. \tag{10}$$

Then

$$i_Y \,\mathrm{d}\omega = \frac{\partial f_i}{\partial y^j} b^j \,\mathrm{d}x^i$$

which with respect to (9) demonstrates Theorem 3.

Corollary. *Denote by $A_h(\omega)$ the set of all such tangent vectors $Y \in T_h TM$ that $i_Y \,\mathrm{d}\omega = 0$. Then*

$$\operatorname{Ker} p_*(h) = A_h(\omega) \cap T_h T_{\pi h} M\,,$$

where $\pi : TM \to M$ is a fiber projection.

Theorem 4. *Let Y be a vector subfield of distribution ∇. Then the form ω from* (1) *is invariant with respect to vector field Y, i.e. $L_Y \omega = 0$.*

Proof. According to Theorem 3 $i_Y \,\mathrm{d}\omega = 0$. The form ω is semibase, the vector field Y is vertical and therefore $i_Y \omega = \omega(Y) = 0$; moreover, according to (6) also $L_Y \omega = 0$, q.e.d.

Theorem 5. *Let ω be a closed form, M be connected manifold and X be a vector field on TM. Then the form ω is invariant with to respect to vector field X if and only if $i_X \omega$ is a constant function.*

Proof. If ω is a closed form then $\mathrm{d}\omega = 0$. Relation (6) implies that $L_X \omega = \mathrm{d} i_X \omega$. This further implies that $L_X \omega = 0$ (the form ω is invariant) iff $\mathrm{d} i_X \omega = 0$, i.e. $i_X \omega$ is a constant function and vice versa.

Corollary. *If Y is a vertical vector field and ω is a closed form then ω is variant with respect to the vector field Y.*

Theorem 6. *Let ω be a semibase 1-form on TM. Let*

$$X = a^i(x)\, \partial/\partial x^i$$

be a vector field on M. Let ^1X, or $^1X^*$ respectively, be a prolongation of vector field X on TM, or T^*M respectively. Then

$$p_*(^1X_h) = {}^1X^*_{p(h)} \quad \textit{iff} \quad [L_{^1X}(\omega)]_h = 0\,,$$

where $h \in TM$ and $^1X_h \in T_h TM$.

Proof. In local coordinates we get

(11) $$^1X_h = a^i\, \partial/\partial x^i + \frac{\partial a^i}{\partial x^j} y^j\, \partial/\partial y^i\,,$$

$$^1X^*_{p(h)} = a^i\, \partial/\partial x^i - \frac{\partial a^j}{\partial x^i} f_j\, \partial/\partial z_i\,.$$

The following expression is obtained by calculation

$$(12) \qquad [L_{1\,X}(\omega)]_h = \sum_{i,j}\left[\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\,a^j + \frac{\partial f_i}{\partial y^j}\cdot\frac{\partial a^j}{\partial x^k}\,y^k + f_j\,\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right]\mathrm{d}x^i\,.$$

From (2) we have

$$(13) \qquad p_*({}^1X_h) = a^i\,\partial/\partial x^i + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\,a^j + \frac{\partial f_i}{\partial y^j}\cdot\frac{\partial a^j}{\partial x^k}\,y^k\right)\partial/\partial z_i\,.$$

Comparing (11), (12), (13) the statement of Theorem 6 is confirmed.

4. The equations (2) imply that

$$p_*(T_hT_{\pi h}M) \subset T_{p(h)}T^*_{\pi h}M\,.$$

Let us consider a vector field

$$X = a^i(x)\,\partial/\partial x^i\,,$$

i.e. a section $M \to TM$. Let $X_m \equiv X(m) \in T_mM$. Let us denote map

$$p_* : T_{X_m}T_mM \to T_{p(X_m)}T^*_mM$$

by p_*/X_m. Using canonic identification

$$T_{X_m}T_mM \equiv T_mM\,,\quad T_{p(X_m)}T^*_mM \equiv T^*_mM$$

we obtain the linear morphism

$$p_*/X_m : T_mM \to T^*_mM\,,$$

which can be locally expressed according to (2) as follows

$$(14) \qquad p_*/X : x^i = x^i\,,\quad z_i = \frac{\partial f_i(x, a(x))}{\partial y^j}\,y^j\,.$$

The linear map (14) determines the semibase L-form on TM

$$(15) \qquad \beta = (\omega/X) = \frac{\partial f_i(x, a(x))}{\partial y^j}\,y^j\,\mathrm{d}x^i\,.$$

Theorem 7. *Let $V = y^i\,\partial/\partial y^i$ be the Liouville vector field on TM. Let X be a vector field by means of which the form* (15) *was formed. Then the following is true for any $m \in M$:*

$$(i_V\,\mathrm{d}\omega)_{X_m} = \beta_{X_m}\,.$$

Proof. By contraction of form (10) we obtain

$$(16) \qquad i_V\,\mathrm{d}\omega = \frac{\partial f_i(x, y)}{\partial y^j}\,y^j\,\mathrm{d}x^i\,.$$

Comparing (15) and (16) the statement of Theorem 7 is confirmed.

By exterior differentiation of the form (15) we obtain

$$(17)\quad \mathrm{d}\beta = \left(\frac{\partial^2 f_i(x, a)}{\partial y^j\, \partial x^k} + \frac{\partial^2 f_i(x, a)}{\partial y^j\, \partial y^l} \cdot \frac{\partial a^l}{\partial x^k}\right) y^j\, \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^i + \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial y^j}\, \mathrm{d}y^j \wedge \mathrm{d}x^i .$$

From (10) and (17) we get:

Theorem 8. *Form* $\mathrm{d}\beta$ *belongs to class 2n on TM if and only if form* $\mathrm{d}\omega$ *is a 2-form of class 2n along the section* $X : M \to TM$. *The form* $\mathrm{d}\omega - \mathrm{d}\beta$ *is semibase along the field X.*

Corollary. *Let us recall that symplectic structure on TM (see [1] p. 123) is determined by a closed differential 2-form* $\delta \in \Lambda^2(TM)$ *of a constant class 2n. In our case the symplectic structure on TM is determined by form* $\mathrm{d}\beta$ *iff* $d\omega$ *is the symplectic form along section* $X : M \to TM$.

Theorem 9. *Let* $Y = c^i\, \partial/\partial x^i + b^i\, \partial/\partial y^i \in T_{X_m}TM$. *Let* i_β *or* i_ω *be the map* $Y \mapsto i_Y\, \mathrm{d}\beta$ *or* $Y \mapsto i_Y\, \mathrm{d}\omega$. *Then* $i_\beta(Y) - i_\omega(Y)$ *is a semibase form.*

Proof.

$$(18)\qquad i_\beta : Y \mapsto \left(\left(\frac{\partial^2 f_i(x, a)}{\partial y^j\, \partial x^k} + \frac{\partial^2 f_i(x, a)}{\partial y^j\, \partial y^l} \cdot \frac{\partial a^l}{\partial x^k}\right) a^j (c^k\, \mathrm{d}x^i - c^i\, \mathrm{d}x^j) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial y^j}\, b^j\, \mathrm{d}x^i - \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial y^j}\, c^i\, \mathrm{d}y^j\right),$$

$$(19)\qquad i_\omega : Y \mapsto \left(\frac{\partial f_i(x, a)}{\partial x^j} (c^j\, \mathrm{d}x^i - c^i\, \mathrm{d}x^j) + \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial y^j} (b^j\, \mathrm{d}x^i - c^i\, \mathrm{d}y^j)\right).$$

Comparing (18) and (19) we obtain confirmation of the statement of Theorem 9.

Theorem 10. *Let X be a projectable vector field on TM. Then* $\mathrm{d}i_X\beta$ *is a semibase form if and only if* $\mathrm{d}i_X\beta = 0$.

Proof. Let us remember that vector field X on TM is projectable iff $\pi_* X$ is a vector field on M, i.e. locally

$$(20)\qquad X = a^i(x)\, \partial/\partial x^i + b^i(x, y)\, \partial/\partial y^i .$$

By contraction of form (15) by the vector field (20) we obtain

$$i_X\beta = \frac{\partial f_i}{\partial y^j}\, y^j a^i .$$

Therefore

$$(21)\quad \mathrm{d}i_X\beta = \left[\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial y^j\,\partial y^k} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^j\,\partial y^l}\cdot\frac{\partial a^l}{\partial x^k}\right) y^j a^i + \frac{\partial f_i}{\partial y^j}\cdot\frac{\partial a^i}{\partial x^k} y^j\right]\mathrm{d}x^k + \frac{\partial f_i}{\partial y^k} a^i\,\mathrm{d}y^k .$$

Form $\mathrm{d}i_X\beta$ is semibase iff

$$(22)\qquad \frac{\partial f_i}{\partial y^k} a^i = 0 .$$

By differentiation (22) we obtain

$$(23)\qquad \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial y^j\,\partial x^k} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^j\,\partial y^l}\cdot\frac{\partial a^l}{\partial x^k}\right) a^i + \frac{\partial f_i}{\partial y^j}\cdot\frac{\partial a^i}{\partial x^k} = 0 .$$

By comparing (21) and (23) the statement of Theorem 10 is obtained.

Theorem 11. *If ω is a semibase form and X is a projectable vector field on TM then $L_X\omega$ is a semibase form.*

Proof. For the form ω from (1) and vector field X from (20) the following is true:

$$(24)\qquad \mathrm{d}i_X\omega = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j} a^i + f_i\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right)\mathrm{d}x^j + \frac{\partial f_i}{\partial y^j} a^i\,\mathrm{d}y^j$$

and

$$(25)\qquad i_X\,\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j} a^j - \frac{\partial f_j}{\partial x^i} a^j + \frac{\partial f_i}{\partial y^j} b^j\right)\mathrm{d}x^i - \frac{\partial f_i}{\partial y^j} a^i\,\mathrm{d}y^j .$$

By substituting from (24) and (25) into (6) we get the result that $L_X\omega$ is semibase form, q.e.d.

Theorem 12. *Let X be the vector field on TM. Then $L_X\omega$ is a semibase form for any semibase form ω if and only if X is a projectable vector field.*

Proof. The contraction of any form ω from (1) along a vector field

$$X = a^i(x, y)\,\partial/\partial x^i + b^i(x, y)\,\partial/\partial y^i \quad \text{on} \quad TM$$

is

$$i_X\omega = f_i(x, y)\,a^i(x, y) .$$

By exterior differentiation we obtain

$$(26)\qquad \mathrm{d}i_X\omega = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j} a^i + f_i\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right)\mathrm{d}x^j + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y^j} a^i + f_i\frac{\partial a^i}{\partial y^j}\right)\mathrm{d}y^j .$$

The form $i_X\,\mathrm{d}\omega$ for any vector field X on TM can be expressed in form (25). From

(6) and from the addition of (25) and (26) we get that the form $L_X\omega$ is semibase on TM iff

$$f_i \frac{\partial a^i}{\partial y^j} = 0 .$$

This is possible for all f_i iff a^i are functions of x only, i.e. if the vector field X on TM is projectable, q.e.d.

Literature

[1] *Godbillon C.:* Géométrie différentielle et mécanique analytique (Russian translation), Mir, Moscow 1973.

[2] *Dekrét A.:* On bilinear structures on differentiable manifolds, to apear.

Author's address: 960 53 Zvolen, Štúrova 4 (Vysoká škola lesnícka a drevárska).

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

IVAN CHAJDA, Přerov: *On the tolerance extension property.* (O vlastnosti rozšiřování tolerancí.)

Tolerancí na algebře $\mathfrak{A} = (A, F)$ se nazývá reflexivní a symetrická relace na A splňující tzv. substituční podmínku pro každou operaci $f \in F$. V práci jsou studovány nutné a postačující podmínky pro to, aby každou toleranci na podalgebře bylo možno rozšířit na celou algebru. Speciálně je tento problém řešen pro polosvazy a svazy.

MIRKO HORŇÁK, Košice: *A theorem on non-existence of a certain type of nearly regular cell-decompositions of the sphere.* (Veta o neexistencii určitého typu skoropravidelných bunkových rozkladov guľovej plochy.)

V článku je dokázané, že neexistuje bunkový rozklad guľovej plochy s multi-5-uholníkovými stenami, v ktorom práve dva vrcholy nie sú multi-3-valentné a vzájomná vzdialenosť týchto vrcholov (v zmysle teórie grafov) je rovná 3.

ILJA ČERNÝ, Praha: *Several theorems concerning extensions of meromorphic and conformal mappings.* (Několik vět o rozšíření meromorfních a konformních zobrazení.)

V článku se dokazuje několik tvrzení o rozšíření meromorfního resp. konformního zobrazení, která jsou obecnější než běžně citovaná. Rozšiřování se provádí přes obecnější části V hranice oblasti, v níž je dané zobrazení meromorfní resp. konformní. Kromě lokální konformnosti rozšíření v jednotlivých bodech množiny V se vyšetřuje i konformnost rozšíření v jisté oblasti obsahující V.

EVA ČERMÁKOVÁ, Praha: *The insertion of regular sets in potential theory.* (Vložení regulárních množin v teorii potenciálu.)

V klasické teorii potenciálu existuje ke každé kompaktní množině K a otevřené množině U, $K \subset U$ regulární množina V taková, že $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Obecněji, v axiomatické teorii potenciálu — např. pro rovnici vedení tepla — to již neplatí. V práci je dokázáno několik ekvivalentních podmínek pro existenci takové regulární množiny.

ALEXANDER ABIAN, Ames: *A property of entire transcendental functions.* (O jedné vlastnosti úplných transcendentních funkcí.)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ je úplná transcendentní funkce, g, h dvě různá komplexní čísla. Autor dokazuje, že množina všech komplexních čísel, pro něž některý částečný součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ nabývá hodnoty g nebo h má nekonečně mnoho hromadných bodů.

IVAN KOREC, Bratislava: *On a problem of V. Pták.* (O jednom probléme V. Ptáka.)

Zobrazenie $w(x)$ intervalu $(0, T)$ do $(0, T)$ budeme nazývať malou funkciou, ak platí $x + w(x) + w(w(x)) + w(w(w(x))) + \ldots < \infty$ pro všetky $x \in (0, T)$. Vyšetrujú sa kritéria malosti funkcií. Napríklad sa dokazuje, že ak $w(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots \in (0, T)$ pre všetky $x \in (0, T)$, tak funkcia $w(x)$ je malá práve vtedy, keď $c_0 = 0$ a $c_1 < 1$.

G. G. HAMEDANI, Tehran: *On periodic solutions of nonlinear second order ordinary differential equations.* (O periodických řešeních nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu.)

Autor navazuje na svůj dřívější článek, v němž dokázal existenci w-periodických řešení rovnice $x'' + Kx = F(t, x, x')$ při $K > 0$. V článku je dokázána věta o existenci a jednoznačnosti řešení uvedené rovnice při $K \neq 0$ bez podstatnějších omezení na w. Rozšíření tohoto výsledku na nelineární diferenciální rovnice druhého řádu představuje rovněž zobecnění dosavadních autorových výsledků.

VÁCLAV HAVEL, IVAN STUDNIČKA, Brno: *Bemerkung über gemeinsame Beziehung zwischen kartesischen Gruppen und kartesischen Zahlensystemen.* (Poznámka o vzájemném vztahu kartézských grup a kartézských číselných systémů.)

V článku je provedeno vzájemné srovnání obou v nadpisu uvedených planárních ternárních okruhů příslušných k téže (A, a)-transitivní rovině (A inciduje s a).

KAREL SVOBODA, Brno: *Some global characterizations of the sphere in* E^4. (O globální charakterizaci sféry v E^4.)

Článek pojednává o globální charakterizaci sféry mezi plochami v E^4 užitím paralelnosti vektorového pole střední křivosti ξ a jistých normálových polí z ξ odvozených.

TOMÁŠ KLEIN, Zvolen: *Some properties of semibase Pfaffian forms on the tangent bundle.* (Niektoré vlastnosti polobázových Pfaffových foriem na TM).

Nech M je diferencovateľná varieta a TM resp. T^*M je jej dotykový resp. kodotykový bandl. Existuje bijekcia $\varkappa : \mathscr{B}(TM) \to \mathscr{F}(TM, T^*M)$, kde $\mathscr{B}(TM)$ je fibrovaný priestor všetkých polobázových Pfaffovych foriem na TM a $\mathscr{F}(TM, T^*M)$ je množina všetkých morfizmov priestorov TM, T^*M. V práci sú najdené niektoré vlastnosti foriem $\omega \in \mathscr{B}(TM)$ s použitím bijekcie $\varkappa$.

RECENSE

W. Maier, H. Kiesewetter: FUNKTIONALGLEICHUNGEN MIT ANALYTISCHEN LÖSUNGEN, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971, 184 stran, vázané.

Kniha podává moderní výklad funkcionálních rovnic zejména z hlediska jejich použití v teorii analytických funkcí jedné i více proměnných.

V první kapitole autoři vycházejí z klasických Abelových vyšetřování integrálních součtů s algebraickými integrandy. Lineární funkcionální rovnice tvaru

$$\sum_{l=1}^{s} a_l f(x_l) + \sum_{k=1}^{p} a_k f(\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_s)) = a$$

vytvářejí přechod mezi aditivními větami typu Abelovy věty a funkcionálními rovnicemi pro n-logaritmy. Modernosti a jasnosti výkladu v 1. kapitole přispívá podstatně ten fakt, že se řešení a jejich vlastnosti studují v termínech vhodných algebraických struktur.

2. kapitola je věnována tzv. mřížovým funkcím (Gitterfunktionen), přičemž se používá Riemannovy myšlenky charakterizace anatických funkcí pomocí jistých funkcionálních vlastností. Výsledků kapitoly se v jejím závěru používá k výkladu a dalšímu rozvíjení Hurwitzových a Lerchových myšlenek týkajících se zobecnění Riemannovy ζ-funkce.

Ve 3. kapitole jsou vyloženy některé aplikace teorie v oblasti analytické teorie čísel, např. při vyjádření počtu řešení diofantické rovnice $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2k}^2 = n$ pomocí eliptických funkcí 2. druhu. Dále autoři rozvíjejí některé ideje Rademachera, Isekiho a Glaeskeho týkající se reciprokého chování Dedekindových součtů.

Ve 4. kapitole se autoři téměř výhradně zaměřili na objemy v zakřiveném prostoru R_{n-1} interpretované jakožto aditivní funkcionály. Např. Eulerův dialgoritmus a Kummerovy n-algoritmy se používají k určení objemů ve variatách s konstantní křivostí.

Závěrem lze říci, že kniha bude užitečná pro každého zájemce o funkcionální rovnice a jejich použití v teorii funkcí a analytické teorii čísel.

Jaroslav Morávek, Praha

SYMPOSIUM ON THE THEORY OF SCHEDULING AND ITS APPLICATIONS, editor S. E. Elmaghraby, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 86, Springer-Verlag 1973, 437 stran, cena DM 32,—.

Tento svazek Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems obsahuje články přednesené na symposiu „Symposium on the theory of scheduling and its applications" konaném na universitě Severní Karoliny v Raleigh od 15. do 17. května 1972. V souhlasu s rozdělením symposia na sekce jsou rozděleny i proceedings na čtyři části: I. Přehledné referáty, II. Aplikace, III. Teorie, IV. Modely procesů.

Teorie optimálního uspořádání (theory of scheduling) má stále rostoucí význam v operačním výzkumu, ekonomických a inženýrských aplikacích matematiky a pro matematiky zabývající se kombinatorickými strukturami je cenným zdrojem zajímavých ale i obtížných problémů. Při řešení reálných problémů z teorie optimálního uspořádání jsou neodmyslitelným prostředkem též samočinné počítače.

Sborník bude užitečný všem kdo se zabývají operačním výzkumem, použitím matematiky v ekonomii, jakož i diskretními a kombinatorickými partiemi teoretické matematiky.

Jaroslav Morávek, Praha

Gerhard Preuss, ALLGEMEINE TOPOLOGIE, Springer-Verlag 1972, edice Hochschultexte, brožované, 488 stran, cena DM 28,—.

Kniha vznikla na základě autorových přednášek na Freie Universität Berlin. Jejím cílem je výklad základů obecné topologie s použitím moderního matematického jazyka a s poměrně častými exkurzemi do teorie kategorií. Je psána velmi pečlivým a srozumitelným způsobem, zejména pokud jde o důkazy vět. Srozumitelnosti přispívají v nemalé míře i vhodně zvolené motivující a vysvětlující poznámky za formulacemi vět popř. jejich důkazy. Pro získání představy o struktuře knihy uvádíme pořadí jednotlivých kapitol spolu s jejich stručným obsahem:

Úvodní kapitola obsahuje spolu s přípravnými úvahami základní množinovou symboliku a též zavádí pojem metrického prostoru.

Kapitola 1. zavádí pojem topologického prostoru a též pojem spojitého zobrazení jakož i jeho obecnější pojetí pomocí pojmů kategorie a funktor.

2. kapitola obsahuje elementy teorie filtrů názorně ilustrované celou řadou příkladů týkajících se konvergence spočetných posloupností v prostorech splňujících 1. axiom spočetnosti (ještě speciálnějším příkladem jsou metrické prostory).

Ve 3. kapitole se opět systematičtěji používá jazyka kategorií a funktorů. Jsou vyloženy pojmy úplnosti a koúplnosti kategorie topologických prostorů.

Studium topologických prostorů splňujících různé axiomy oddělitelnosti je předmětem 4. kapitoly.

Obsahem 5. kapitoly jsou pojmy souvislosti v topologických prostorech a 6. kapitola se zabývá vzájemným vztahem mezi pojmy oddělitelnosti a souvislosti v topologických prostorech.

7. kapitola je věnována různým pojmům kompaktnosti a s ním souvisejícím kompaktifikacím, např. Čechově-Stoneově kompaktifikaci.

8. kapitola pojmenovaná „Epireflexe a monoreflexe" navazuje na závěrečnou část konce 7. kapitoly. Jejím předmětem je vyšetřování podmínek, za nichž má funktor vnoření podkategorie do dané kategorie levý adjungovaný funktor.

9. kapitola je věnována základům teorie uniformních prostorů a jejich některým vztahům k předchozím pojmům. Např. se zkoumá metrizovatelnost uniformních prostorů.

Desátá a závěrečná kapitola knihy obsahuje úvod do teorie proximitních prostorů. Je zde probrána i otázka izomorfismu mezi kategorií proximitních prostorů a kategorií totálně omezených uniformních prostorů.

Na závěr lze říci, že kniha je vhodná pro zikání solidních základů obecné topologie v moderním pojetí. Hodí se jak k přípravě přednášek tak i pro samostatné studium. Poslední bude zejména usnadněno celou řadou vhodných cvičení umístěných na konci knihy.

Jaroslav Morávek, Praha

Wolfram Menzel: THEORIE DER LERNSYSTEME (Teorie systémů učení), Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970, viii + 159 str., DM 22,—.

Základní pojmy jsou zavedeny v kap. 3 (str. 13—19). Neprázdná množina X příp. Y se nazývá množinou ***vstupů*** (***podnětů***) příp. ***výstupů*** (***ozvěn***). Dvojice $(x, y) \in X \times Y$ se nazývá ***akcí*** (je jí určena ozvěna y na podnět x). Vlastní ***učení*** (***chování***) je konečnou posloupností akcí, která se zapisuje ve tvaru $v = (x^1y^1, x^2y^2, \ldots, x^my^m)$ místo zdlouhavějšího $((x^1, y^1), (x^2, y^2), \ldots$ $\ldots, (x^m, y^m))$. Předmětem zkoumání tedy jsou řetězy nad abecedou $X \times Y$. Prázdný řetěz se značí symbolem Λ a délka řetězu v symbolem $l(v)$, takže $l(v) = m$ a $l(\Lambda) = 0$.

Především se uvažuje zobrazení λ, které každému řetězu v nad $X \times Y$ přiřazuje podmnožinu $\lambda(v) \subset X \times Y$ „možných následujících akcí". Řetěz $v = (x^1y^1, \ldots, x^my^m)$ se nazývá *λ-přípustný* jestliže $x^1y^1 \in \lambda(\Lambda)$ a jestliže $x^{i+1}y^{i+1} \in \lambda(x^1y^1, \ldots, x^iy^i)$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, m - 1$. Zejména tedy prázdný řetěz Λ je λ-přípustný. *Systémem učení nad* X, Y se nazývá takové zobrazení λ, že platí: je-li v λ-přípustným řetězem pak $\{x;\ x \in X$ a existuje $y \in Y$ takové, že $(x, y) \in \lambda(v)\} = X$.

Dále se uvažuje zobrazení β, které každému řetězu v nad $X \times Y$ přiřazuje podmnožinu $\beta(v) \subset X$ „možných následujících podnětů". Řetěz $v = (x^1y^1, x^2y^2, \ldots, x^my^m)$ se nazývá *β-dosažitelným* jestliže $x^1 \in \beta(\Lambda)$ jestliže $x^{i+1} \in \beta(x^1y^1, \ldots, x^iy^i)$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, m - 1$. Zejména prázdný řetěz Λ je β-dosažitelný. *Poučením nad* X, Y se nazývá takové zobrazení β, že platí: je-li v β-dosažitelný, potom $\beta(v) \neq \emptyset$.

Konečně, *cílem učení nad* X, Y se nazývá taková pomnožina $\zeta \subset X \times Y$, pro kterou platí: $\{x;\ x \in X$ a existuje $y \in Y$ takové, že $xy \in \zeta\} = X$. Zdá se, ze učební cíl je zde pojat příliš obecně, když se totiž připouští, aby na týž podnět x byly možné či přípustné dvě různé ozvěny $y \neq y'$, totiž může se stát, že $xy \in \zeta$ i $xy' \in \zeta$. Obvykle však požadujeme, aby na každý podnět byly nejvýše jedna ozvěna, což odpovídá požadavku, aby učební cíl ζ byl funkcí.

Kapitola 4 a 5 (str. 20—57) jsou pomocné (podobně jako kapitoly 1 a 2) a ukazuje se v nich, že a jak se dá systém učení vyjádřit Mealyho automatem. V souvislosti s tím se zavádí celá řada dalších pojmů.

Vlastní *proces učení* je určen pěticí $(X, Y, \lambda, \beta, \zeta)$, ale jeho vlastní vyšetřování začíná až v kapitole 6 (str. 58—75). Řetěz $v = (x^1y^1, \ldots, x^my^m)$ se nazývá *$\beta\lambda$-chováním*, jestliže je β-dosažitelný a současně λ-přípustný. Množina všech $\beta\lambda$-chování se označuje symbolem V_λ^β na str. 21 a symbolem Σ_λ^β na str. 60. Tedy při procesu učení vůbec nezáleží na těch řetězech nad $X \times Y$, které buď nejsou λ-přípustné nebo nejsou β-dosažitelné. Proto se systém učení λ příp. poučení β nazývá *normovaný*, jestliže množina všech λ-přípustných řetězů V_λ^β příp. množina všech β-dosažitelných řetězů V^β splňuje podmínku: $v \in V_\lambda \Leftrightarrow \lambda(v) \neq \emptyset$ příp. $v \in V^\beta \Leftrightarrow \beta(v) \neq \emptyset$. Zřejmě ke každému systému učení λ příp. ke každému poučení β existuje právě jeden normovaný systém λ příp. právě jedno normované poučení β.

Učební úlohou se nazývá dvojice (β, ζ) sestávající z poučení β a z učebního cíle ζ. O řetězu $v^m = (x^1y^1, \ldots, x^my^m)$ říkáme, že *končí v učebním cíli* ζ, jestliže existuje takový index i, $0 \leqq i \leqq m$, že platí $\bigcup_{\substack{n \geqq i \\ v^n \in V_\lambda}} \lambda(v^n) \subset \zeta$, což je podmínka velice silná a obtížně testovatelná (protože zahrnuje nekonečně mnoho řetězů).

Učební systém λ *řeší učební úlohu* (β, ζ), jestliže každé $\beta\lambda$-chování končí v učebním cíli ζ. Množina všech učebních úloh, které jsou řešeny systémem učení λ, se nazývá *kapacitou učebního systému* λ a označuje se $C(\lambda)$. Je-li G množinou učebních úloh, říkáme, že λ *řeší* G, jestliže řeší každou učební úlohu z G. Např. je-li λ libovolný systém učení nad X, Y, lze za poučení nad X, Y zvolit takové zobrazení η, že $\eta(v) = X$ platí pro každý řetěz v nad $X \times Y$ (η je tzv. *jednotkové poučení*), takže λ řeší každou učební úlohu (β, ζ) kde $\zeta \supset \bigcup_{v \in V_\lambda} \lambda(v)$.

Úloha (β, ζ) se nazývá *lehčí než* úloha (β', ζ') když $\zeta \supset \zeta'$ a $\beta \sqsubset \beta'$, což je definováno takto: $\beta \sqsubset \beta' \Rightarrow \beta(v) \subset \beta'(v)$ platí pro každé $v \in V^\beta$. Tedy úloha je lehčí, když vyžaduje méně poučení a při tom její učební cíl v sobě zahrnuje učební cíl úlohy těžší. To je ve shodě s obvyklým chápáním obtížnosti nějaké úlohy potud, pokud chápeme užší učební cíl jako obtížnější, protože je v něm méně libovůle, ale na druhé straně to je zcela proti intuitivnímu chápání obtížnosti úlohy jakmile se omezíme na funkční úlohy. Potom totiž platí: $\zeta \supset \zeta' \Rightarrow \zeta = \zeta'$, a tedy záleží jenom na poučení.

Řetěz $v \in V_\lambda$ se nazývá *terminální* (vzhledem k λ), jestliže v končí v každém takovém učebním cíli ζ, k němuž existuje poučení β takové, že $(\beta, \zeta) \in C(\lambda)$.

V následujících kapitolách 7—9 se řeší některé otázky, které se týkají různých speciálních případů základních pojmů. V kapitole 7 (str. 76—96) se systém učení λ nad X, Y nazývá *lokálně finitní*, jestliže ke každému řetězu $v = (x^1y^1, \ldots, x^my^m) \in V_\lambda$ existuje takový index i, $0 \leqq i \leqq m$, že řetěz $(x^1y^1, \ldots, x^iy^i)$ je terminální. Podmnožina učebních úloh $B \subset C(\lambda)$ se nazývá *bází pro systém učení* λ jestliže: (1) ke každé úloze $a \in C(\lambda)$ existuje úloha $b \in B$, která je lehčí než a; (2) je-li $b, c \in B$ a b je lehčí než c, potom $b = c$; (3) každá úloha v B je normovaná, tj. normované je její poučení. Např. se dokazuje věta 8, která říká, že učební systém λ nad X, Y má bázi právě tehdy, když (a) pro každé poučení β a pro každou množinu učebních cílů Z nad X, Y takových, že $(\beta, \zeta) \in C(\lambda)$ platí pro každý $\zeta \in Z$, jsou splněny dvě podmínky: (i) $\bigcap Z$ je také učebním cílem nad X, Y, a (ii) $(\beta, \bigcap Z) \in C(\lambda)$, a když dále platí podmínka (b) pro každou neprázdnou množinu poučení A a každý takový cíl ζ nad X, Y, že $(\beta, \zeta) \in C(\lambda)$ pro každá $\beta \in A$, platí $(\bigcup_{\beta \in A} \beta, \zeta) \in C(\lambda)$. Odtud plyne důsledek 7.13, že každý lokálně finitní systém učení má bázi.

Poučení v nad X, Y se nazývá *neredundantní na* λ, jestliže existuje takový cíl ζ, že $(v, \zeta) \in C(\lambda)$ a pro každé poučení β nad X, Y platí, že je-li $(\beta, \zeta) \in C(\lambda)$ potom $\beta \sqsubseteq v$. Učební cíl ϑ nad X, Y se nazývá λ-*minimální*, jestliže existuje takové poučení β, že $(\beta, \vartheta) \in C(\lambda)$ a pro každý cíl ζ nad X, Y platí: je-li $(\beta, \zeta) \in C(\lambda)$, potom $\zeta \supset \vartheta$. Věta 9 říká, že každý systém učení, který má konečnou bázi je lokálně finitní. Tvrzení 7.22 např. říká, že jsou-li X a Y konečné množiny a platí-li (b) z věty 8, pak λ má konečnou bázi.

Kapitola 8 (str. 97—115) je věnována konečným systémum učení. Systém učení λ nad X, Y se nazývá *finitní*, jestliže existuje takové nezáporné celé číslo k, že pro každou úlohu $(\beta, \zeta) \in C(\lambda)$ a každé chování $v \in V_\lambda^\beta$ takové, že $l(v) = k$, platí, že v končí v učebním cíli ζ.

Množina úloh G nad X, Y se nazývá *finitně řešitelná pomocí* λ, jestliže existuje nezáporné celé číslo k takové, že pro každou úlohu $(\beta, \zeta) \in G$ platí že každé $\beta\lambda$-chování $v \in V_\lambda^\beta$ délky k končí v ζ. G se nazývá *finitně řešitelná* (bez ohledu na λ), jestliže existuje systém učení λ, s jehož pomocí je G finitně řešitelná.

Kapitola 9 (str. 116—124) je věnována syntéze systému učení, který řeší danou, finitně řešitelnou, množinu úloh G nad X, Y, avšak induktivní definice 9.4 systému učení je příliš složitá než aby mohla být zde uvedena.

Poslední kapitola 10 (str. 125—150) pojednává o různých typech systémů učení a pokouší se je srovnat s autorovým pojetím. Avšak autor se omezuje pouze na formální popis učební úlohy (β, ζ), a v žádném případě nezadává i příslušný učební systém λ. Jsou uvažovány tyto typy učení: 1) vznik Pavlovova podmíněného reflexu, 2) učení pomocí odměny a trestu, 3) klasifikace vzorků (podle N. J. Nilsson: Learning Machines, New York, McGraw Hill 1965), 4) učení se předpovídání dalších členů posloupnosti podle odhalované zákonitosti, 5) učení se stanovit induktivní závěry (podle A. M. Uttley: The Design of Conditional Probability by Computers, Information and Control 2, 1959, 1—24), 6) učení se při hledání cesty z bludiště, 7) učení se hrám, 8) statistické modely učení, které vedou ke stochastiským systémům učení, aj.

Karel Čulík, Amherst

John G. Kemeny, J. Laurie Snell, Anthony W. Knapp: DENUMERABLE MARKOV CHAINS (Spočetné markovovské řetězce). Vyšlo jako 40. svazek edice Graduate Texts in Mathematics v nakladatelství Springer, New York—Heidelberg—Berlin 1976; 484 stran, cena 41,— DM.

Jde o druhé vydání knihy rozšířené o kapitolu věnovanou náhodným polím, kterou napsal David Griffeath. Autoři využili příležitosti nového vydání k opravení chyb, k rozšíření seznamu literatury a uvedení kapitoly *Additional notes*, ve které se zmiňují o rozvoji a pokrocích v teorii markovovských řetězců od prvého vydání knihy (1966), tj. za posledních deset let.

Účelem knihy je podat systematické pojednání o spočetných markovovských řetězcích, které obsahuje nejen základy, ale které je rozšířeno o teorii potenciálu a teorii hranice pro náhodné řetězce. Velká část materiálu, který kniha zpracovává, byla dříve soustředěna pouze v článcích a výzkumných pracích. K vyšetřování markovovských řetězců je v této knize použito nekonečných matic, které zjednodušují značení, zkracují tvrzení a jejich důkazy a často dávají i nové výsledky. Umožňují také plné využití duality mezi mírami tj. řádkovými, a funkcemi tj. sloupcovými vektory.

Kniha se přirozeně rozpadá do 5 částí. První obsahuje základní pojmy a tvrzení z analýzy a algebry, týkající se hlavně teorie nekonečných matic, teorie míry a úvod do teorie stochastických procesů, zejména martingalů. Ke studiu a pochopení dalších částí čtenář vystačí se znalostmi této první, vyjma kapitol, které se zabývají teorií hranic. Tam se předpokládá hlubší znalost topologie a teorie míry v kompaktních metrických prostorech. Druhá část obsahuje základní teorii spočetných markovovských řetězců. Za definicí následují příklady, je poukázáno na souvislost s martingaly a na závěr je provedena podrobná klasifikace stavů na základě dosažitelnosti a počtu průchodů daným stavem. V dalších částech se vždy rozlišuje zvlášť případ rekurentního a transientního řetězce. Jejich vlastnosti se zkoumají v následujících dvou kapitolách. Třetí část se zabývá teorií potenciálu. Její první kapitola se soustřeďuje na motivaci potenciálu, ukazuje se jednoznačný vztah mezi Brownovým pohybem a teorií potenciálu a vztahy mezi klasickou teorií potenciálu a markovovskými řetězci. Další kapitoly jsou věnovány teorii potenciálu pro transietntní a rekurentní řetězce. Jsou definovány pojmy náboj, potenciál, kapacita, energie a jiné, jež se používají k odvozování různých vlastností markovovských řetězců. Čtvrtá část pojednává o teorii hranice, a to opět pro oba druhy řetězců zvlášť. Pro transientní případ je definována Martinova hranice vstupu a výstupu a vyšetřována např. konvergence řetězců k hraničním bodům. Vzhledem k tomu, že rekurentní řetězec je v každém stavu nekonečněkrát, nemá např. otázka konvergence smysl. Intuitivně je však vidět, že o jistém limitním chování lze uvažovat. Postupuje se následujícím způsobem. K rekurentnímu řetězci P je přidán absorbční stav a aplikuje se teorie hranice pro transientní řetězce. Získaná hranice je hranicí i pro P. Až sem se 1. a 2. vydání naprosto shodují. Na závěr 2. vydání je přidána ještě jedna kapitola s názvem *Úvod do náhodných polí*, což jsou v jistém smyslu zobecněné řetězce. Autor se zabývá markovovskými poli, Gibbsovými poli, jejich vzájemnými vztahy, při čemž je využito jak teorie potenciálu, tak teorie hranice. Na závěr jsou uvedeny příklady těchto polí. Každá kapitola, vyjma poslední, obsahuje paragraf s názvem ,,Basic example", což je jednoduchý příklad markovovského řetězce, na němž se demonstrují výsledky příslušných kapitol. Příklad slouží ke srovnání a snazšímu pochopení celé teorie. Na konci každé kapitoly (vyjma 1. a 7.) je řada neřešených problémů, celkem 239, a většinou každá kapitola obsahuje několik vyřešených příkladů. Kniha je uzavřena kapitolou, která obsahuje historické poznámky k jednotlivým kapitolám s výčtem literatury zabývající se daným tématem. Jako poslední je umístěn přehled užitých značení a jmenný rejstřík.

Autoři do knihy nezahrnuli všechny výsledky, které se týkají markovovských řetězců, o některých se pouze zběžně zmiňují (např. součty nezávislých náhodných veličin, limitní věty), ale na druhou stranu se jim podařilo dosáhnout toho, že kniha je uzavřeným celkem, který čtenář může číst bez dalšího nahlížení do jiných pramenů. Je tedy vhodná pro ty, kteří se chtějí zabývat hlubším studiem markovovských řetězců, pro aspiranty, či jako náplň seminářů nebo postgraduálních kursů. Vzhledem k tomu, že v některých částech se užívá poměrně složitého značení, není kniha příliš vhodná pro ty, kteří by měli zájem jen o studium několika kapitol.

Věra Lánská, Praha

W. Velte: DIREKTE METHODEN DER VARIATIONSRECHNUNG. Teubner Studienbücher: Mathematik, Leitfäden der angewandten Mathematik, Band 26. B. G. Teubner, Stuttgart 1976, 208 stran, DM 24,80.

Podtitul této publikace je: Úvod se zřetelem na okrajové úlohy pro parciální diferenciální rovnice. Tím je blíže specifikovaná oblast, které se kniha dotýká a ke které je svým obsahem zaměřena.

Přímé metody variačního počtu umožňují dát konstruktivní důkazy existence řešení okrajové úlohy pro parciální diferenciální rovnici, pokud tuto lze převést na extremální úlohu. Důležitá je také ta skutečnost, že tyto konstruktivní důkazy vedou k numerickým metodám pro určení přibližných řešení.

Po obecném úvodu o základech funkcionální analýzy a lineárních okrajových úlohách v první kapitole se autor ve druhé kapitole zabývá metodou nejmenších čtverců a energetickou metodou pro kvadratické extremální úlohy (Rayleighova a Ritzova metoda). Numerickou stabilitou, vlastnostmi konvergence projekčních metod a metodou konečných prvků se zabývá třetí kapitola knihy. V kapitole čtvrté autor popisuje metodu komplementárních extremálních úloh pro lineární okrajové problémy. Tyto úlohy umožní stanovení dolní meze pro odhad chyby přibližného řešení (Treftzova metoda, která je podobná Ritzově metodě). V páté kapitole je popsáno, jak lze získat oboustranné odhady pro hodnotu funkcionálu spolu s odhady pro řešení okrajových úloh. Závěrečná 6. kapitola se zabývá nelineárními úlohami, pro které příslušný funkcionál není kvadratický, resp. úlohami, kde vazbové podmínky jsou dány ve tvaru nerovností. Teorie monotonních operátorů zůstává vzhledem k elementárnější povaze knihy stranou.

V knize je mnoho příkladů, které dobře ilustrují popisované metody. Jde o dobrý úvodní text, který poskytne základní informace o přímých metodách variačního počtu.

Štefan Schwabik, Praha

William Arveson: AN INVITATION TO C^*-ALGEBRAS. Graduate Texts in Mathematics 39. Springer-Verlag, New York 1976. Stran x + 106, cena DM 31,30.

Algebry typu C^* představují účinný nástroj pro hlubší studium operátorů v Hilbertově prostoru a samy o sobě zaujímají významné postavení mezi obecnými Banachovými algebrami. Jejich teorie je značně rozsáhlá a zahrnuje již několik monografií (např. Dixmier, Sakai). Nová knížka Williama Arvesona, jednoho z předních badatelů v teorii operátorových algeber, může sloužit jako vhodný úvod na tomto poli.

Základní výsledky o obecných C^*-algebrách jsou uvedeny v prvé kapitole. Pozornost je zde věnována též speciálním třídám C^*-algeber, majícím vztah ke kompaktním operátorům, jejichž teorie je více rozpracována.

Další části knihy připouštějí volnější výběr podle zájmu čtenáře. Druhá kapitola pojednává o teorii multiplicity. Třetí kapitola, do značné míry nezávislá na ostatních, je pěkným úvodem do teorie borelovských struktur v polských prostorech. Výsledků této kapitoly se užívá v závěrečné čtvrté kapitole, věnované teorii reprezentací.

Jaroslav Zemánek, Praha

John L. Kelley, Isaac Namioka: LINEAR TOPOLOGICAL SPACES. Graduate Texts in Mathematics 36. Springer-Verlag, New York 1976. Stran xv + 256, cena DM 36,20.

Toto je druhé, v podstatě nezměněné vydání knihy známé od r. 1963. Předmětem jsou hlavně geometrické aspekty funkcionální analýzy, tj. studium prostorů jako takových. Jsou uvedeny obecné výsledky spočívající na pojmu konvexity, úplnosti, kompaktnosti, kategorie a duality. Pozornost je věnována též pojmu uspořádání v prostoru, možnost násobení prvků se však neuvažuje. Je třeba říci, že v takto zvoleném pojetí kniha vniká dosti do hloubky teorie, takže může býti zvláště cenná pro pracovníky, kteří se již sami mohou orientovat v tomto oboru a potřebují vyhledat určitou speciální informaci geometrického charakteru. Na druhé straně poněkud úzké zaměření a ne vždy dostatečná motivace výsledků mohou činit knihu méně přitažlivou pro základní studium. Podobně jako ve známé knize o topologii od prvního z autorů je i zde mnoho úloh pro čtenáře.

Jaroslav Zemánek, Praha

Richard B. Holmes: GEOMETRIC FUNCTIONAL ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS. Graduate Texts in Mathematics 24. Springer-Verlag, New York 1975. Stran x + 246, cena DM 39,10.

Autor knihy je znám především svými pracemi z teorie aproximací. Geometrická povaha teorie aproximací podstatným způsobem ovlivnila autorův pohled na funkcionální analýzu, tento pohled umožnil zjednodušit řadu důkazů, a to všechno se obráží na stránkách nové knihy. Budiž řečeno předem, že tento přístup je ve světové literatuře ojedinělý a zcela originální.

Sjednocujícím pojmem v celé teorii je pojem konvexity. Většina výsledků se přímo týká anebo podstatně závisí na vlastnostech konvexních množin. Další významné pojmy jsou kompaktnost a dualita. Tyto pojmy hrají důležitou roli při formulaci a řešení optimalizačních úloh.

Klasické výsledky funkcionální analýzy jsou snad ve všech paragrafech oživeny krásnými aplikacemi. To činí knihu neobyčejně obsažnou a užitečnou. Jako příklad by bylo možno uvést důkaz Schauderovy věty o pevném bodu, větu Borsukovu-Dugundjiho o rozšiřování spojitých funkcí, Michaelovu větu o spojitých selektorech, Jamesovu charakterizaci reflexivních prostorů, větu Bishopovu-Phelpsovu o subreflexivitě, věty o pevném bodu pro funkce s množinovými hodnotami (Fan-Kakutani), a řadu jiných aplikací. Pozornost je věnována též pojmu univerzálního prostoru a přenormování. Další důležité výsledky, obrácení vět a protipříklady je možno najít ve cvičeních, kterých je v knize celkem asi přes dvě stě. Pěkný je též výklad Rieszovy-Kakutaniho charakterizace funkcionálů na prostoru spojitých funkcí.

Předběžné požadavky kladené na čtenáře jsou minimální. Věci z lineární algebry jsou připomenuty v úvodní kapitole, teorie míry se potřebuje většinou jen v příkladech. Volně se užívá pouze základních pojmů obecné topologie. Kniha se tak stává přístupnou širokému okruhu čtenářů. Pravděpodobně bude vydána též v ruském překladu a lze ji vřele doporučit pozornosti všech matematiků.

Jaroslav Zemánek, Praha

F. F. Bonsall - J. Duncan: COMPLETE NORMED ALGEBRAS. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 80. Springer-Verlag, Berlin 1973. Stran x + 301, cena DM 68,—.

Teorie normovaných algeber je jedním z těch míst v současné matematice, kde se zvláště výrazně projevují hlubší vztahy mezi jednotlivými obory, konkrétně mezi analýzou, algebrou a topologií. Jako příklad uveďme pozoruhodný výsledek B. E. Johnsona: polojednoduchost Banachovy algebry implikuje jednoznačnost její topologie. Působíme-li tedy na prostor „algebraickou silou" (tj. požadujeme-li polojednoduchost algebry), má to topologický účinek. Obdobně např. působení mechanické síly mívá nejen mechanické účinky, ale může též vyvolat vznik tepla, tj. jiné kvality. Oba zmíněné jevy jsou zřejmě projevem obecnějšího přírodního principu, který si zasluhuje, aby byl studován. Neboť objasnění kvalitativních změn by zřejmě umožnilo hlouběji proniknout do skutečných tajemství přírody. Je proto zvláště cenné, jestliže ideje normovaných algeber přispívají (alespoň tedy ve filozofickém smyslu) též k bližšímu pochopení tohoto obecného problému.

Recenzovaná kniha si všímá obecných principů spektrální teorie v obecné situaci Banachových algeber, nikoli jejich speciálních tříd jako jsou C^*-algebry, uniformní algebry, grupové algebry apod., které mají svou vlastní speciální literaturu včetně řady monografií. Knihy tohoto obecného zaměření ovšem existovaly již kolem r. 1960 (viz např. Gelfand-Raikov-Šilov, Naimark, Rickart), avšak nynější kniha do značné míry bere v úvahu mohutný rozvoj, k němuž došlo v období, řekněme, 1967—1973. Tento rozvoj stále pokračuje, takže úplně nejnovější výsledky nemohly být do knihy zařazeny. Nicméně je tato kniha cenným příspěvkem a vhodným doplňkem existujících monografií.

Materiál je rozčleněn do sedmi tématických celků. První kapitola uvádí základní výsledky o spektru prvku v Banachově algebře, fundamentální formuli vyjadřující vztah mezi spektrálním poloměrem a normou, funkcionální kalkulus založený na Cauchyově integrálu, elementární funkce, pojem numerického oboru, základní fakta o algebrách s aproximativní jednotkou, pojem ideálu a modulu, algebry s involvucí, aj. Druhá kapitola je věnována Gelfandově teorii komutativních algeber a výsledkům Šilova; potřebná tvrzení z teorie analytických funkcí více proměnných jsou zde citována bez důkazu. Analogie této teorie pro nekomutativní algebry je založena na pojmu ireducibilní reprezentace a je předmětem kapitoly třetí. Tato kapitola obsahuje též Johnsonovy výsledky z r. 1967 o automatické spojitosti ireducibilní reprezentace jakož i výše zmíněnou větu o jednoznačnosti topologie v polojednoduché algebře. Rovněž je v této kapitole zaveden klasický pojem Jacobsonova radikálu.

Čtvrtá kapitola, pojednávající o minimálních ideálech, je zřejmě zvláště blízká individuálnímu zájmu autorů. Pátá kapitola, věnovaná algebrám s involucí a s tím spojeným pojmem pozitivního funkcionálu, obsahuje různé charakterizace C^*-algeber (Gelfand-Naimark, Vidav-Palmer, Russo-Dye), jakož i teorii hermitovských algeber založenou na výsledcích V. Ptáka z r. 1970. Šestá kapitola je pěkným úvodem do kohomologických metod, které v poslední době nacházejí stále větší uplatnění. Závěrečná sedmá kapitola je věnována několika různorodým výsledkům (např. Halmosův pojem kapacity, charakterizace nilpotentních algeber), a též některým výsledkům z prací samotných autorů.

Zvláště cenná je rozsáhlá bibliografie zahrnující 488 titulů. Tato bibliografie ovšem není úplná, neboť jsou citovány jen práce, které mají blízký vztah k obsahu knihy. Tak se stalo, že byl opomenut důležitý výsledek E. Vesentiniho z r. 1968 o subharmonicitě spektrálního poloměru, který se ukázal být zvláště užitečný v různých aplikacích. Opomenutí tohoto krásného analytického výsledku je možno považovat za snad jedinou závažnější vadu, kterou tato kniha v době svého vydání (1973) mohla nést.

Výklad je veden pečlivě, některá drobná nedopatření nebo zlepšení si čtenář sám může doplnit. Teorie Banachových algeber by mohla mít i značnou pedagogickou cenu pro základní studium na vysokých školách matematického zaměření, neboť v rámci jednoho předmětu by bylo možno velmi názorně demonstrovat základní pojmy a metody (pojmy, o jejichž místě v matematice není pochyb), které se dosud přednášejí odděleně nejméně ve třech předmětech. Tím by se podpořila tendence ke zbližování jednotlivých oborů matematiky a vynikly by výhody, které takové zblížení vždy přináší. V tomto smyslu může recenzovaná kniha (resp. některé její upravené části) sloužit i jako učebnice.

Knihu vhodně doplňují tři speciálnější knížky vydané v poslední době v Cambridge University Press: dvě brožury od těchže autorů věnované teorii numerického oboru, a třetí od A. M. Sinclaira věnovaná automatické spojitosti lineárních operátorů. Kniha sama o sobě může se stát velmi užitečnou pomůckou při studiu jakýchkoli otázek spektrální teorie.

Jaroslav Zemánek, Praha

F. Kártészi: INTRODUCTION TO FINITE GEOMETRIES. Akadémiai Kiadó, Budapest 1976, str. 266, obr. 118.

Kniha obsahuje materiál přednášený autorem od roku 1948 na Eötvos Loránd University of Budapest pod názvem *Projektivní geometrie*. Je psána velmi názorně a srozumitelně. Mnohý nově zavedený pojem je interpretován na nějakém modelu, čtenáři už známém. Například modelem konečné projektivní roviny je pravidelný n-úhelník. Kniha obsahuje šest kapitol, dodatek a 25 citací použité literatury. Výklad je provázen názornými obrázky a za každou kapitolou jsou úlohy k procvičování.

V první kapitole jsou základy konečné geometrie: Konečná projektivní rovina, její konstrukce, incidenční tabulky, souřadnicový systém. Galoisova tělesa, souřadnice bodu, rovnice přímky. Podrovina konečné projektivní roviny, afinní rovina, hyperbolická rovina. Galoisovy roviny a Desarguesova věta, model nedesarguesovské roviny a vytvoření její incidenční tabulky. Grupa kolineací konečné projektivní roviny, samodružné elementy, Fanova rovina. Kolineace v afinní rovině, jejich rozlišení. Souvislost konečné roviny se systémem ortogonálních latinských čtverců. Druhá kapitola se jmenuje Galoisova geometrie. Je v ní stať o Galoisově prostoru. Dále autor rozlišuje konečné projektivní roviny sudého a lichého řádu a dokáže jejich základní vlastnosti. V této kapitole jsou také blíže rozvedeny některé věci z první kapitoly: Souřadnice bodové, přímkové, transformace souřadnic, dvojpoměr. Vlastnosti nesingulárního lineárního zobrazení, kolineace. Další část druhé kapitoly je věnována oválům v konečné projektivní rovině. Hovoří se tu o oválu, o jeho vlastnostech v rovině sudého, případně lichého řádu. Dále jsou tu uvedeny kuželosečky v Galoisově rovině (tj. množiny bodů, které vyhovují kvadratické rovnici). Dále se probírají regulární a singulární kuželosečky, jejich vlastnosti a polarita. Zde se také autor zmiňuje o faktu, že v Galoisových rovinách řádu 2^r, kde $r > 2$, existují ovály, které se nedají vyjádřit anulováním kvadratické formy, ale dále se jimi v knize nezabývá. V další části kapitoly nacházíme korespondenci mezi dvěma svazky přímek, jednoznačné určení kuželosečky, Pascalovu větu, Segreho větu a důkaz její platnosti v rovinách lichého řádu. Následuje konstrukce Galoisova tělesa, podtělesa a studuje se izomorfismus a automorfismus těchto těles. Speciálně se tu studují kolineace a homografie v Galoisově rovině. Nechybí ani důkaz tvrzení, že v Galoisově rovině platí Desarguesova věta.

Třetí kapitola je věnována geometrickým konfiguracím a tkáním. Jsou v ní probrány různé typy konfigurací v rovině, tkání a *R*-tkání.

Ve čtvrté kapitole jsou uvedeny základní pojmy teorie grafů a to: Graf, stupeň uzlu grafu, regulární graf, izomorfismus grafů, Petersenův graf a graf Desarguesovy konfigurace.

Pátá kapitola je navzána kombinatorika a konečné geometrie. Je věnována základům kombinatoriky a různým aplikacím konečných geometrií. Je tu uvedena inverzní geometrie, dále sférická geometrie, Möbiusova rovina a stereografická projekce. V závěru kapitoly je pojednáno o blokových schématech a incidenčních strukturách. V šesté kapitole jsou některá podle autora „přídatná témata“: Fanova rovina a Gleasonova věta, Moultonova nedesarguesovská rovina, afinní rovina a afinní prostor.

V dodatku čtenář najde podrobnosti o algebraických strukturách a souvislost konečných těles s teorií čísel. Na závěr dodatku je krátká stať o ternárních okruzích.

V knize je několik tiskových chyb, které si čtenář snadno opraví sám.

Recensovaná kniha je učebnice, nikoliv kompendium. Je určena především studentům a širší matematické veřejnosti, nejen specialistům v konečné geometrii. Výborně se hodí pro začátečníky v tomto oboru. Seznámí je s problematikou konečné geometrie a se souvislostmi s jinými obory. Kniha je psána pedagogicky zdatně, prozrazuje autorovy dlouholeté zkušenosti v práci se studenty.

Zdeňka Tischerová, Praha

Lars Gårding: ENCOUNTER WITH MATHEMATICS. Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin, 1977. 270 stran, cena DM 22,30.

Představovat autora knihy těm, kteří z parciálních diferenciálních rovnic ovládají o trochu více než pouze definici parciální derivace, je zbytečné. Tento „majitel důležité nerovnosti“ se pustil do velice záslužného a těžkého úkolu: pro čtenáře se znalostmi zhruba posluchače prvního ročníku matematiky universitního směru se pokusil podat výklad historie různých disciplín matematiky s důrazem na vypíchnutí nosných idejí a s ukázkou některých neřešených problémů.

Kniha je rozdělena do dvanácti kapitol. 1. Modely a realita, 2. Teorie čísel, 3. Algebra, 4. Geometrie a lineární algebra, 5. Limity, spojitost a topologie, 6. Heroické století (rozumí se 17. století), 7. Derivování, 8. Integrace, 9. Řady, 10. Pravděpodobnost, 11. Aplikace, 12. Sociologie, psychologie a výuka matematiky. Téměř každá kapitola končí citáty z prací a dopisů slavných matematiků, případně vyobrazením těchto osob a jejich životními daty.

Čtenáře recenze asi napadne jistá analogie s knihou S. Marcus: *Matematická analýza čtená podruhé,* která vyšla v Academii v r. 1976. Tyto dvě publikace však není možno srovnávat vzhledem k tomu, že Gårdingova kniha má podstatně širší záběr, kdežto kniha Marcusova jde více do podrobností.

Typografická úroveň publikace je vysoká. Ostatně na tuto úroveň jsme si u Springerů již zvykli a toto hodnocení není nic nového. Jednoduchými počteními výkony se mi podařilo odhalit drobnou nesrovnalost na str. 54, kde se v podstatě píše: „Evariste Galois (1811—1822) died in a duel at the age 21".

Četba knihy je příjemnou záležitostí pro každého, kdo to s matematikou myslí dobře. Ten, kdo matematiku přednáší, by se s touto knihou měl rozhodně seznámit.

Svatopluk Fučík, Praha

A. V. Balakrishnan: APPLIED FUNCTIONAL ANALYSIS. Applications of Mathematics, svazek 3. Springer, New York—Heidelberg—Berlin 1976. Str. X + 309; seznam literatury, resjtřík. Cena DM 36,20.

Recensovaná publikace vznikla podstatným rozšířením a přepracováním autorovy knihy *Introduction to optimization in a Hilbert space* (42. svazek Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, Springer 1971), která je u nás přístupná v ruském překladu. Rozsah knihy se zvětšil na dvojnásobek a toto zvětšení se projevilo jak ve výkladu teoretických základů, tak i v kapitolách, věnovaných aplikacím funkcionální analýzy v teorii regulace.

Autorovým cílem bylo podat takový výklad základních pojmů a metod funkcionální analýzy, které by čtenáři umožnily pochopit možnosti jejich aplikací v teorii regulace či v systémové analýze. Tento záměr vedl autora k tomu, že neusiluje o maximální možnou obecnost úvah, ale pracuje prakticky v celé knize v Hilbertově prostoru. To mu umožňuje podat bohatší výsledky, užitečné právě pro aplikace. Příkladem může být teorie semigrup v Hilbertově prostoru, která, řečeno autorovými slovy, leží pro daný účel ve správné rovnováze mezi příliš obecným a příliš speciálním.

Kniha je rozdělena do šesti kapitol, z nichž tři mají aplikovaný charakter: jsou to kapitoly 2, 5 a 6.

Kapitola 1. je úvodním pojednáním o Hilbertových prostorech a jejich základních vlastnostech. Definuje se zde lineární prostor, lineární funkcionál, vnitřní součin a norma, konvexní množina, ortogonalita atd. Nalezneme zde Rieszovu větu o representaci, větu Hahnovu-Banachovu, výklad pojmu slabé konvergence atd.

2. kapitola začíná podrobnějším, i když zhuštěným výkladem vlastností konvexních množin, zejména definicí Minkowského funkcionálu a větou o oddělování. Pokračuje pak aplikací této věty na problém minimalizace konvexního funkcionálu (Convex Programming) a na teorii her (Minimax Theorem). Nakonec se dokazuje s její pomocí Farsova věta, důležitá pro jisté optimalizační problémy v konečně dimensionálním případě.

Obsah 3. kapitoly je charakterizován jejím názvem: Funkce, transformace, operátory. Je poměrně rozsáhlým (asi 100 stran) úvodem do spektrální teorie operátorů v Hilbertových prostorech. (Tato část je oproti zmíněné původní knize nová.)

4. kapitola je věnována teorii semigrup lineárních operátorů, zejména disipativním, kompaktním a Hilbertovým-Schmidtovým semigrupám. Tato teorie je ilustrována aplikacemi na parciální diferenciální rovnice matematické fyziky.

V 5. kapitole ukazuje autor aplikace některých funkcionálně-analytických metod na problémy optimální regulace.

Konečně 6. kapitola je věnována úvodu do problémů stochastické optimalizace. Autor používá netradičně jen konečně aditivní míry. Po přípravných úvahách, v nichž se dojde k pojmům bílého šumu a stochastické rovnice, následují hlavní odstavce, věnované problémům filtrace a stochastické regulace.

Dílo je doplněno rejstříkem a representativní bibliografií knižní literatury. Autor navíc opatřil každou kapitolu úvodem, v němž mj. specifikuje literaturu, vhodnou k hlubšímu studiu jednotlivých problémů.

Kniha je psána dobře srozumitelným slohem, tisk je zřetelný a úhledný. K jejímu pochopení je třeba jen základních znalostí z reálné analýzy. Vzhledem ke zhuštěnosti výkladu bude čtení snazší pro toho, kdo má jisté předběžné znalosti funkcionální analýzy v Hilbertových prostorech.

Dílo lze doporučit studentům vyšších ročníků a pracovníkům v matematice, aplikované matematice, teorii pravděpodobnosti, informatice, teorii regulace apod.

Jiří Jarník, Praha

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

ZPRÁVY

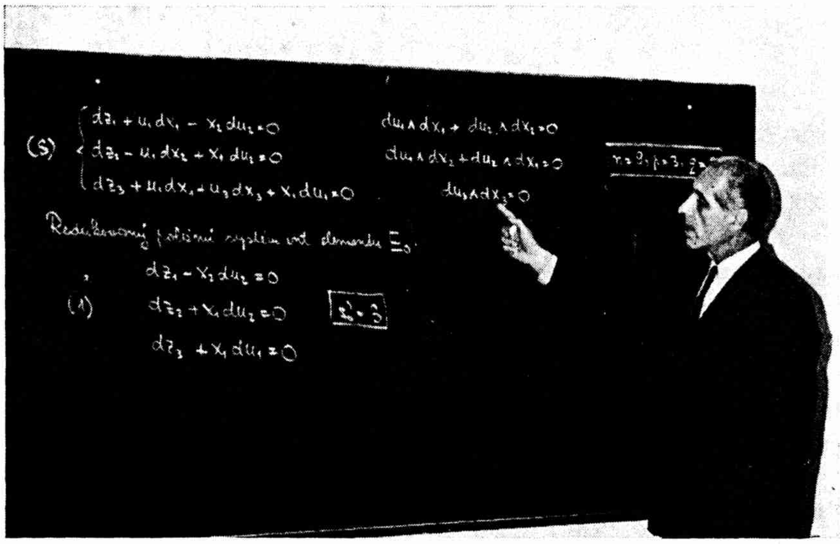
ŠEDESÁT LET PROF. RNDR. KARLA SVOBODY

Alois Švec, Olomouc

Profesor Karel Svoboda se narodil 9. prosince 1918 v Kunovicích v rodině železničního zřízence. Maturoval v r. 1937 na st. reálném gymnáziu v Uh. Hradišti. Matematiku a deskriptivní geometrii studoval na přírodovědecké fakultě brněnské univerzity, studia ukončil až po osvobození v r. 1946 a dosáhl aprobace pro vyučování matematice a deskriptivní geometrii na středních školách. Hodnost doktora přírodních věd získal v r. 1948, v r. 1957 se stal kandidátem fyzikálně-matematických věd; habilitoval se v r. 1958. V době okupace byl od 17. 11. 1939 do poloviny května 1940 vězněn v koncentračním táboře Sachsenhausen. Po návratu pracoval až do konce války u Stavební správy pro úpravu řeky Moravy v Uh. Hradišti. Po osvobození nastoupil ještě před ukončením studií jako výpomocný asistent Matematického ústavu přírodovědecké fakulty brněnské univerzity. Asistentem byl ustanoven v r. 1946, odborným asistentem v r. 1950, docentem v r. 1958, zástupcem profesora v r. 1963, mimořádným profesorem je od r. 1966.

Svobodovy vědecké práce z algebraické geometrie jsou pod vlivem vědecké činnosti prof. L. Seiferta — týkají se polární teorie kubické nadplochy ve čtyřrozměrném projektivním prostoru, která je vytvořena bisekantami racionální normální křivky čtvrtého stupně. Z podnětu prof. O. Borůvky se zabýval studiem Cartanových metod a zaměřil se na diferenciální geometrii. Studoval a) plochy v prostorech s konstantní křivostí, jejichž indikatrix normální křivosti je kružnicí, která má střed v příslušném bodě plochy nebo leží na kulové ploše se středem v bodě plochy; b) otázky, týkající se deformace neparabolických kongruencí přímek v projektivních a simplektických prostorech a útvarů k nim invariantně přiřazených (v návaznosti na práce E. Čecha); c) bodovou a projektivní deformaci plně fokálních pseudokongruencí lineárních prostorů. Společně s V. Havlem a I. Kolářem vypracoval metodu konstrukce kanonického reperu podvariety. O svých výsledcích přednášel na IV. sjezdu sovětských matematiků v Leningradě a na přednáškových pobytech v NDR a Rumunsku. Podílel se na činnosti semináře diferenciální geometrie, vedeného od r. 1952 prof. J. Klapkou; od r. 1971 je vedoucím tohoto semináře. Spolupracoval na řešení výzkumného úkolu státního plánu „Studium variet prostorů projektivních a prostorů s projektivní konexí" a vytvořil samostatnou odbornou skupinu, složenou většinou z pracovníků vysokých škol technického směru. V současné době je odpovědným řešitelem výzkumného úkolu „Geometrie přímkových útvarů a jejich zobecnění".

Prof. Svoboda přednášel různé obory geometrie v učitelském i odborném studiu, na fakultě organizačně zajišťoval výuku deskriptivní geometrie. Spolupůsobil při sestavování celostátních učebních plánů a osnov geometrických předmětů. Pro potřeby posluchačů učitelských kombinací s matematikou vydal dvojdílný učební text z analytické geometrie, který byl používán i na jiných vysokých školách.



Na přírodovědecké fakultě vykonal mnoho organizační i veřejně prospěšné práce. Po válce pomáhal znovu vybudovat matematický ústav (hlavně jeho knihovnu), byl tajemníkem katedry matematiky, vedoucím katedry algebry a geometrie a působil i v řadě jiných funkcí (v některých pracuje dodnes). Po téměř celou dobu pobytu na fakultě se podílel na odborářské práci. Dále byl funkcionářem JČSMF a členem redakčních rad Časopisu pro pěstování matematiky a Archives of Mathematics. V současné době je členem komise pro obhajoby kandidátských prací v oboru geometrie.

Toto jsou jen chladná a stručná fakta o dosavadní práci prof. Svobody. Vždy se cítil spíše učitelem než vědeckým pracovníkem. Budiž mi však dovoleno napsat, že je více než učitelem i vědeckým pracovníkem: je přítelem, rádcem, neúnavným pomocníkem. Vždyť kolik z nás děkuje právě jemu za pomoc a cenné rady při vlastní vědecké práci, výchovu během aspirantury, úpravu práce do tisku.

Prof. Svoboda nemiluje jubilea (pisatel rovněž). Svoboda je však částí našeho matematického (a pro mnohé z nás i osobního) života. Proto nechť dovolí, abychom mu všichni přáli mnoho zdraví a spokojenosti do dalších let.

SEZNAM PRACÍ PROF. RNDR. KARLA SVOBODY

[1] Sur une classe de surfaces à l'indicatrice de courbure normale localement sphérique dans un espace à cinq dimensions. Práce Brněnské základny ČSAV *XXVII*, 373—392, 1955.

[2] Kubická nadplocha s dvojnou křivkou čtvrtého stupně ve čtyřrozměrném prostoru. Práce Brněnské základny ČSAV *XXVII*, 393—404, 1955.

[3] Sur une caractérisation métrique de la surface de Veronèse. Spisy přír. fak. Masarykovy univ., č. 368, 1—22, 1955.

[4] Poznámka o plochách s lokálně sférickou indikatricí normální křivosti v pětirozměrném prostoru. Čas. pěst. mat., *81*, 299—303, 1956.

[5] Příspěvek k teorii normální křivky čtyřrozměrného prostoru. Čas. pěst. mat., *82*, 301—307, 1957.

[6] Projektivní vlastnosti minimálních ploch s kružnicemi normální křivosti. Čas. pěst. mat., *83*, 287—316, 1958.

[7] Sur une classe de surfaces sphériques dans un espace à courbure constante. Czech. Math. J., *8* (*83*), 399—447, 1958.

[8] Poznámka o minimálních plochách s kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru. Čas. pěst. mat., *85*, 291—299, 1960.

[9] Complément au Mémoire: Sur une classe de surfaces sphériques dans un espace à courbure constante. Czech. Math. J., *11* (*86*), 428—439, 1961.

[10] Cycles de congruences stratifiables dans un espace projectif de dimension impaire. Ann. di mat. pura ed appl., (*IV*) *LVII*, 239—256, 1962.

[11] La méthode de repérage des systèmes de sous-variétés. (*Spclečně s V. Havlem a I. Kolářem.*) CMUC, *5* (*4*), 183—201, 1964.

[12] Déformation symplectique des congruences de droites. Arch. math., *1*, 59—74, 1965.

[13] Déformation ponctuelle des congruences de droites dans des espaces symplectiques à trois dimensions. CMUC, *6* (*4*), 393—401, 1965.

[14] Sur la bidéformation symplectique des congruences de droites dans un espace à cinq dimensions. Anal. sti. ale Univ. ,,Al. I. Cuza" din Iasi, Mat. XI_B, 411—428, 1965.

[15] Sur une application de la théorie des correspondances développables de E. Čech. Arch. Math., *2*, 33—41, 1966.

[16] Sur la déformation projective des pseudocongruences complètement focales. Arch. Math., *3*, 83—98, 1967.

[17] Über die Punktdeformation einer vollständig fokalen Pseudokongruenz. Math. Nachr., *38*, 197—206, 1968.

[18] Sur une classe de congruences de droites dans un espace projectif de dimension paire. Arch. Math., *5*, 157—166, 1969.

[19] Sur la déformation projective des systèmes osculateurs d'une congruence de droites. Czech. Math. J., *20* (*95*), 315—326, 1970.

[20] Sur la bidéformation projective des congruences de droites. Czech. Math. J., *20* (*95*), 327 à 336, 1970.

[21] Remarque sur la déformation symplectique des congruences de droites. Scripta fac. sci. nat. Univ. Purkynianae Brunensis, Math., *1*, 25—35, 1971.

[22] Note sur les pseudocongruences complètement focales. Knižnice odb. a věd. spisů VUT v Brně, B-56, 13—16, 1975.

M. FIEDLER A V. PTÁK LAUREÁTY NÁRODNÍ CENY

21. dubna 1978 převzali vedoucí vědečtí pracovníci Matematického ústavu ČSAV prof. RNDr. MIROSLAV FIEDLER, DrSc., a prof. RNDr. VLASTIMIL PTÁK, DrSc., z rukou předsedy České národní rady Národní cenu, která jim byla společně udělena za soubor prací z teorie matic.

Oba studovali matematiku na Karlově universitě hned po válce. Dále se vzdělávali jako aspiranti tehdejšího Ústředního ústavu matematického. V Matematickém ústavu ČSAV, který z této instituce později vznikl, působí dodnes. Prof. Fiedler zde vede oddělení numerických metod, teorie grafů a matematické logiky a prof. Pták oddělení funkcionální analýzy.

Prof. Fiedler začal publikovat počátkem padesátých let. Jeho první práce jsou věnovány studiu algebraických křivek a geometrii simplexu. K druhému tématu se později ještě několikrát vrátil. Mezi pracemi z druhé poloviny padesátých let převládají numerické metody řešení algebraických rovnic a soustav lineárních rovnic. O numerické metody se prof. Fiedler stále zajímá a patří v tomto oboru k našim předním znalcům. Koncem padesátých let vycházejí také první jeho práce z teorie grafů, zaměřené tehdy zejména na aplikace v ekonomii. Hlavní oblastí činnosti prof. Fiedlera je už přes dvacet let teorie matic, ve které patří ke světové špičce. Různým aspektům lineární algebry je věnováno na šedesát z více než osmdesáti jeho dosud uveřejněných článků. Jsou v nich kombinovány algebraické, kombinatorické i geometrické ideje a výsledků bylo zpravidla dosaženo důmyslným využitím poměrně elementárních prostředků. Jde o vysokou matematiku, která koření v praktické realitě a svými důsledky se do ní zase vrací.

Prof. Pták se zabývá především funkcionální analýzou. První své práce o pologrupách uveřejnil kolem r. 1950. Potom následovala série článků o topologických lineárních prostorech a od poloviny padesátých let pak vycházejí jeho příspěvky k nejrůznějším oborům funkcionální analýzy i k sousedním disciplínám (topologie, teorie matic, analýza). Dosud publikoval více než sto prací. Jsou v nich obsaženy i výsledky, které mají základní význam pro příslušné partie (např. topologické lineární prostory, hermitovské algebry, kritické exponenty operátorů, věty o uzavřeném grafu) a za některé z nich byl r. 1966 prof. Pták odměněn Státní cenou Klementa Gottwalda. Pro jeho styl je příznačná přirozená motivace zkoumaných otázek a jejich elegantní výklad v širokých souvislostech. Prof. Pták už mnoho let vede pravidelný seminář, který se stal Mekkou českých i slovenských odborníků i zahraničních hostů. Účastníci semináře dobře znají jeho zájem o matice — při referování bývají v nejabstraktnějších místech přerušováni dotazem ohledně významu pro konečnou dimenzi.

Jak je vidět, průnikem zájmů prof. Fiedlera a prof. Ptáka je právě teorie matic. Není divu, že za dlouholetého pobytu ve společné pracovně došlo k syntéze diskrétního, geometrického, algebraického i funkcionálně analytického přístupu k této problematice a vzniklo tak 16 společných prací. Jejich vynikající výsledky jsou zařazeny do všech hlavních monografií, které v posledních letech vyšly (Faddějev-Faddějeva, Gantmacher, Householder, Marcus-Minc, Seneta, Todd, Varga), a jsou citovány snad ve stovkách časopiseckých článků.

Pokusme se několika slovy naznačit, v čem je hlavní přínos prací zařazených do oceněného souboru, i když je těžké vytrhnout je z kontextu ostatních prací obou autorů. Zejména prof. Fiedler se zabýval některými dále uvedenými otázkami i v řadě svých samostatných prací.

Nejprve si všimněme prací, věnovaných hlavně numerické matematice. V práci [4] byl poprvé ve světové literatuře vyšetřován vliv štěpení symetrické matice na rychlost konvergence příslušné iterační metody Gaussova-Seidelova typu. V práci [5] je k dané symetrické matici A konstruována posloupnost unitárních matic U_k taková, že matice $U_k\, A\, U_k^*$ za určitých předpokladů kvadraticky konvergují k diagonální matici, a je tak vlastně navržena iterační metoda pro výpočet kompletního spektra symetrické matice. Numerické aplikace má i práce [10], která se v podstatě zabývá otázkou, jak převést invertování velké matice na invertování matic menších. To lze využít zejména při invertování špatně podmíněných leontěvovských matic. I ve většině ostatních prací však najdeme numerické důsledky.

Různé souvislosti (lokalizace vlastních čísel, konvergence iteračních metod, analýza elektrických obvodů) vedly ke zkoumání matic s nekladnými nediagonálními prvky (Fan, Kotěljanskij, Ostrowski). V práci [7], která patří k nejcitovanějším z celého souboru, byla provedena syntéza dosavadních výsledků a byly odvozeny významné nové výsledky i jejich význam pro spektrální teorii, konvergenci iteračních procesů lineární algebry a maticové nerovnosti. Matice, patřící do zde zavedené třídy K, tj. čtvercové reálné matice s nekladnými nediagonálními prvky a s kladnými hlavními minory, byly pak dále studovány v pracích [13], [14], [15] a [16]. V práci [13] jsou kvantitativně vylepšeny některé výsledky práce [7], zejména pokud jde o aplikace na spektrální otázky, a pak jsou zkoumány souvislosti s větami o konvergenci relaxačních metod. Výsledky práce [4] rozšířené později R. S. Vargou na nesymetrické matice jsou zde zobecněny na obecnější třídu procesů Gaussova-Seidelova typu. Práce [16] byla inspirována Kotěljanského větou o odhadu determinantu matice pomocí determinantu majorantní matice z třídy K. Ta je zde dokázána přirozeným způsobem a podstatně zesílena. Mezi vlastnostmi pozitivně definitních matic a matic třídy K lze pozorovat některé příbuzné rysy. Obě třídy jsou však na druhé straně natolik rozdílné, že se zdá, jako by některé podobnosti byly čistě náhodné. V práci [14] však byly příbuznosti vysvětleny — jejich příčinou jsou vlastnosti bilineárních forem. Jinou třídou související s maticemi třídy K jsou matice s dominatní diagonálou. V práci [15] je navázáno na Ostrowského studium tříd matic diagonálně podobných maticím s převládající diagonálou a jsou charakterizovány třídy matic diagonálně podobných maticím, u nichž diagonála dominuje ve slabším smyslu.

V další sérii prací jsou hledána kritéria regularity čtvercové matice. Aplikujeme-li je na matice $A - \lambda I$, dostaneme tak oblasti, v nichž leží vlastní čísla matice A. Tak např. klasická Hadamardova věta o regularitě matice s dominantní diagonálou dává klasické Geršgorinovy kruhy. O těchto otázkách je rozsáhlá literatura a v kritériích známých před uveřejněním práce [6] vesměs figurovaly hodnoty prvků matice. V práci [6] byly odvozeny daleko obecnější odhady, v nichž vystupuje jen norma nediagonální části matice, přičemž výsledky platí pro širokou třídu norem včetně norem nejfrekventovanějších. Formulují-li se výsledky pro matice rozdělené na bloky, vyjasňuje se odlišná role diagonálních a nediagonálních bloků. Kritéria jiného typu jsou odvozena v práci [8]. Konečně dimenzionální prostor je zde rozložen na direktní součet podprostorů, na každém z nichž je dána nějaká norma. Ty pak indukují operátorové normy bloků, na něž je příslušným způsobem rozložena daná matice. Kritérium spočívá v tom, že matice je regulární, pokud jistá matice sestavená z uvedených norem patří k třídě K. Variujeme-li různým způsobem rozklad prostoru a volby konkrétních parciálních norem, dostáváme rozmanitá speciální kritéria regularity a příslušné věty o lokalizaci vlastních čísel, zahrnující i předtím známé výsledky (Geršgorin, Ostrowski, Fan, Brauer). Také práce [1] se zabývá touto problematikou. V pracích [2], [11] a [12] jsou dále vylepšeny konkrétní odhady odvozené v [8]. První dvě z těchto prací též rozvíjejí následující ideu: Je-li čtvercová matice A rozdělena na bloky

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & B \end{pmatrix}$$

kde α je číslo, dá se čekat, že pokud budou vektory a, b malé, bude některé vlastní číslo matice A blízké číslu α. V práci [12] je problém zobecněn: matice je rozdělena na čtyři bloky a odhaduje se spektrum matice pomocí spektra čtvercových diagonálních polí. V této souvislosti se také navrhují iterační procesy pro výpočet vlastních čísel.

Některé vlastnosti matic souvisejí jen s rozložením nulových a nenulových prvků a lze je tedy studovat čistě kombinatorickými metodami. V práci [3] jsou tak z klasické Perronovy-Frobeniovy věty o vlastním čísle nezáporné matice odvozeny přes kombinatorickou strukturu mocnin matice další informace o rozložení spektra nezáporné matice v závislosti na jejím indexu imprimitivity. Perronova-Frobeniova věta inspirovala i práci [17]. Podle [3] z ní totiž plyne, že dvojitě stochastická matice má vlastní číslo -1, jen když má sudý index imprimitivity, tj. jen když má (až na stejnou permutaci řádků a sloupců) blokově diagonální tvar. V práci [17] je odhadnuta vzdálenost ostatních vlastních čísel dvojitě stochastické matice, která tuto vlastnost nemá, od čísla -1 pomocí její vzdálenosti od matic, které uvedenou vlastnost mají, a pomocí její míry ireducibility. Kombinatorické postupy můžeme často najít i v jiných pracích, o nichž jsme se zde zmínili. Se vzdáleností prostoru matic se setkáváme též v práci [9], kde se studuje aproximace lineárních transformací konečně dimensionálního prostoru singulárními transformacemi. Je zajímavé, že minimální vzdálenost dané matice A od matic hodnosti nejvýše r je rovna $(r + 1)$-vému (podle velikosti) vlastnímu číslu matice AA^*.

Poslední dvě práce přispívají k teorii kuželů v konečně rozměrných prostorech. V práci [18] je zaveden názorný pojem diagonály konvexní množiny a jsou studovány diagonály polyedrických kuželů, zejména pak jejich souvislost s lineární závislostí extremálních paprsků. Dosažených výsledků je pak v práci [19] využito ke studiu kuželů lineárních operátorů. Hlavní výsledek ukazuje, že v konečně rozměrném prostoru může mít extremální operátor jakoukoliv hodnost h s výjimkou $h = 2$.

Srdečně blahopřejeme laureátům a těšíme se na další pěkné práce z jejich dílny.

Pavla a Antonín Vrbovi, Praha

SEZNAM OCENĚNÝCH PRACÍ

[1] *M. Fiedler:* Some estimates of spectra of matrices, Symp. PICC, Roma (1960), 33—36.

[2] *M. Fiedler:* Some estimates of the proper values of matrices, J. SIAM, *13* (1965), 1—5.

[3] *V. Pták:* Ob odnoj kombinatornoj teoreme i jejo primenenii k něotricatelnym matricam, Czech. Math. J. *8* (1958), 487—495.

[4] *M. Fiedler, V. Pták:* Über die Konvergenz des verallgemeinerten Seidelschen Verfahrens zur Lösung von Systemen linearer Gleichungen, Math. Nachr. *15* (1956), 31—38.

[5] *M. Fiedler, V. Pták:* O jedné iterační metodě diagonalisace symetrických matic, Čas. pěst. mat. *85* (1960), 18—36.

[6] *M. Fiedler, V. Pták:* Some inequalities for the spectrum of a matrix, Mat.-fyz. čas. SAV *10* (1960), 148—166.

[7] *M. Fiedler, V. Pták:* On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors, Czech. Math. J. *12* (1962), 382—400.

[8] *M. Fiedler, V. Pták:* Generalized norms of matrices and the location of the spectrum, Czech. Math. J. *12* (1962), 558—571.

[9] *M. Fiedler, V. Pták:* Sur la meilleure approximation des transformations linéaires par des transformations de rang préscrit, C. R. Acad. Sci. *254* (1962), 3805—3807.

[10] *M. Fiedler, V. Pták:* On aggregation in matrix theory and its application to numerical inverting of large matrices, Bull. Acad. Polon. *11* (1963), 757—759.

[11] *M. Fiedler, V. Pták:* Ocenki i iteracionnyje metody dlja nachožděnija prostogo sobstvennogo čisla počti rozložimoj matricy, DAN SSSR *151* (1963), 790—793.

[12] *M. Fiedler, V. Pták:* Estimates and iteration procedures for proper values of almost decomposable matrices, Czech. Math. J. *14* (1964), 593—608.

[13] *M. Fiedler, V. Pták:* Some results on matrices of class K and their application to the convergence rate of iteration procedures, Czech. Math. J. *16* (1966), 260—273.

[14] *M. Fiedler, V. Pták:* Some generalizations of positive definitness and monotonicity, Num. Math. *9* (1966), 163—172.

[15] *M. Fiedler, V. Pták:* Diagonally dominant matrices, Czech. Math. J. *17* (1967), 420—433.

[16] *M. Fiedler, V. Pták:* Cyclic products and an inequality for determinants, Czech. Math. J. *19* (1969), 428—451.

[17] *M. Fiedler, V. Pták:* A quantitative extension of the Perron-Frobenius theorem for doubly stochastic matrices, Czech. Math. J. *25* (1975), 339—353.

[18] *M. Fiedler, V. Pták:* Diagonals of convex sets, Czech. Math. J. *28* (1978), 25—44.

[19] *M. Fiedler, V. Pták:* The rank of extreme positive operators on polyhedral cones, Czech. Math. J. *28* (1978), 45—55.