ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 103 * PRAHA 21. 8. 1978 * ČÍSLO 3

DEUX MESURES SPÉCIALES DANS L'ESPACE E_2

MILOSLAV JŮZA, Praha

(Reçu le 8 mars 1976)

C. CARATHÉODORY a défini dans [1] la notion de mesure extérieure. F. HAUSDORFF a défini et étudié dans le Mémoire [2] des types différents des mesures extérieures. Dans le dernier temps, les mesures de Carathéodory étaient étudiées systématiquement par ex. dans [4] et [5].

En examinant les singularités des solutions des équations aux dérivées partielles, on a besoin parfois de mesures de type spécial (voir [3], [6], [7]). Dans ce travail-ci, nous examinons la relation qui existe entre deux mesures de ce type.

1. Ayons un espace euclidien E_2 avec un système de coordonnées cartésiennes. Si x_0, y_0 sont des nombres réels et $\delta > 0$, alors l'ensemble

$$K = \{[x, y] \in E_2 : x_0 \leqq x \leqq x_0 + \delta,\ y_0 \leqq y \leqq y_0 + \delta\} \tag{1.1}$$

sera appelé *carré fondamental*; le nombre δ sera appelé *norme* du carré K et désigné par $|K|$. Si $\mathfrak{M}$ est un système de carrés fondamentaux, le nombre

$$|\mathfrak{M}| = \sup_{K \in \mathfrak{M}} |K|$$

est appelé *norme* du système $\mathfrak{M}$. L'ensemble de tous les systèmes dénombrables[1]) de carrés fondamentaux sera désigné par $\mathbf{K}$.

Etant donné des nombres entiers c, d, k, $k \geqq 0$, nous appellerons l'ensemble

$$K = \left\{[x, y] \in E_2 : \frac{c}{2^k} \leqq x \leqq \frac{c+1}{2^k},\ \frac{d}{2^k} \leqq y \leqq \frac{d+1}{2^k}\right\} \tag{1.2}$$

carré dyadic. L'ensemble de tous les systèmes de carrés dyadics sera désigné par $\mathbf{D}$. Évidemment on a $\mathbf{D} \subset \mathbf{K}$.

[1]) Des ensembles finis sont aussi considérés comme dénombrables.

2. Si $M \subset \boldsymbol{E}_2$, nous posons pour $\varepsilon > 0$:

$$h_\varepsilon(M) = \inf \sum_{K \in \mathfrak{M}} |K|$$

où la borne inférieure est prise sur tous les systèmes $\mathfrak{M}$ tels que $\mathfrak{M} \in \mathbf{K}$, $|\mathfrak{M}| \leqq \varepsilon$, $M \subset \bigcup_{K \in \mathfrak{M}} K$;

$$H_\varepsilon(M) = \inf \sum_{K \in \mathfrak{M}} |K|$$

où la borne inférieure est prise sur tous les systèmes $\mathfrak{M}$ tels que $\mathfrak{M} \in \mathbf{D}$, $|\mathfrak{M}| \leqq \varepsilon$, $M \subset \bigcup_{K \in \mathfrak{M}} K$. On a $\mathbf{D} \subset \mathbf{K}$, donc pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout ensemble $M \subset \boldsymbol{E}_2$ on a

$$h_\varepsilon(M) \leqq H_\varepsilon(M).$$

Pour $\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 > 0$ et pour tout ensemble $M \subset \boldsymbol{E}_2$, on a évidemment:

$$h_{\varepsilon_1}(M) \leqq h_{\varepsilon_2}(M), \quad H_{\varepsilon_1}(M) \leqq H_{\varepsilon_2}(M).$$

Alors, il existe des nombres (éventuellement égaux à $+\infty$)

$$h(M) = \lim_{\varepsilon \to 0+} h_\varepsilon(M) = \sup_{\varepsilon > 0} h_\varepsilon(M), \quad H(M) = \lim_{\varepsilon \to 0+} H_\varepsilon(M) = \sup_{\varepsilon > 0} H_\varepsilon(M)$$

et on a

$$h(M) \leqq H(M)$$

pour tout ensemble $M \subset \boldsymbol{E}_2$.

3. Pour tout ε, $1 > \varepsilon > 0$, et pour tout ensemble $M \subset \boldsymbol{E}_2$ on a[2])

$$H_\varepsilon(M) \leqq 9 \,.\, h_\varepsilon(M), \quad \text{donc} \quad H(M) \leqq 9 \,.\, h(M).$$

Tout d'abord nous allons prouver: *Pour chaque carré fondamental K avec la norme $|K| \leqq 1$ il existe un système $\mathfrak{M}_K \in \mathbf{D}$ tel que*

$$K \subset \bigcup_{D \in \mathfrak{M}_K} D, \quad |\mathfrak{M}_K| \leqq |K|, \quad \sum_{D \in \mathfrak{M}_K} |D| \leqq 9 \,.\, |K|.$$

Cependant, K étant donné par la formule (1.1), soit k le plus petit nombre naturel tel que $2^{-k} \leqq \delta$. On a alors

$$2^{-k} \leqq \delta < 2^{-k+1}.$$

Il existe un nombre entier c tel que

$$x_0 \leqq c \,.\, 2^{-k} < x_0 + \delta.$$

Si $c \,.\, 2^{-k} < x_0 + \frac{1}{2}\delta$, posons $c_0 = c - 1$; autrement posons $c_0 = c - 2$. Alors on a

$$c_0 \,.\, 2^{-k} < x_0 < x_0 + \delta < (c_0 + 3) \,.\, 2^{-k}.$$

---

[2]) Voir [6], p. 43 et [7], p. 11.

D'une façon analogue, nous pouvons trouver un nombre entier d_0 tel que

$$d_0 \,.\, 2^{-k} < y_0 < y_0 + \delta < (d_0 + 3) \,.\, 2^{-k} \,.$$

En désignant

$$D_{ij} = \left\{ [x, y] \in E_2 : \frac{c_0 + i}{2^k} \leqq x \leqq \frac{c_0 + i + 1}{2^k} , \ \frac{d_0 + j}{2^k} \leqq y \leqq \frac{d_0 + j + 1}{2^k} \right\},$$

nous avons

$$|D_{ij}| = 2^{-k} \leqq \delta = |K| \,, \quad K \subset \bigcup_{j=0}^{2} \bigcup_{i=0}^{2} D_{ij} \,,$$

$$\sum_{j=0}^{2} \sum_{i=0}^{2} |D_{ij}| = 9 \,.\, 2^{-k} \leqq 9\delta = 9 \,.\, |K| \,.$$

Alors nous pouvons poser $\mathfrak{M}_K = \{D_{ij}\}_{\substack{0 \leqq i \leqq 2 \\ 0 \leqq j \leqq 2}}$.

Si maintenant $1 > \varepsilon > 0$ et si l'ensemble $M \subset E_2$ est couvert par les carrés d'un système $\mathfrak{M} \in \mathbf{K}$ avec $|\mathfrak{M}| \leqq \varepsilon$, nous pouvons couvrir M par l'union

$$\mathfrak{N} = \bigcup_{K \in \mathfrak{M}} \mathfrak{M}_K \in \mathbf{D} \,.$$

On voit aisément que

$$|\mathfrak{N}| \leqq |\mathfrak{M}| \,, \quad \sum_{D \in \mathfrak{N}} |D| = \sum_{K \in \mathfrak{M}} \Big(\sum_{D \in \mathfrak{M}_K} |D| \Big) \leqq \sum_{K \in \mathfrak{M}} 9 \,.\, |K| \,.$$

D'ici on déduit que $H_\varepsilon(M) \leqq 9 \,.\, h_\varepsilon(M)$, alors aussi $H(M) \leqq 9 \,.\, h(M)$.

4. Nous allons prouver qu'il existe des ensembles M tels que $h(M) < H(M)$. En effet, nous avons le

Théorème 1. *Soient α, a, b des nombres réels, $a < b$. Définissons l'ensemble*

$$M_{ab}^{\alpha} = \{[x, y] \in E_2 : a < x < b, \ y = x + \alpha\} \,. \tag{4.1}$$

Alors on a

$$h(M_{ab}^{\alpha}) = b - a \,, \tag{4.2}$$

$$H(M_{ab}^{\alpha}) = \frac{b - a}{1 - p_\alpha} \,, \tag{4.3}$$

où[3])

$$p_\alpha = \liminf_{\substack{k \to \infty \\ k \text{ naturel}}} \left(\min \left(\alpha \,.\, 2^k - [\alpha \,.\, 2^k], \ [\alpha \,.\, 2^k] + 1 - \alpha \,.\, 2^k \right) \right) . \tag{4.4}$$

---

[3]) **r étant un nombre réel, $[r]$ signifie naturellement le nombre entier n tel que $n \leqq r < n + 1$.**

La démonstration du théorème 1 sera réalisée successivement dans les paragraphes suivants.

5. *Si α est un nombre réel, on a*

$$0 \leqq p_\alpha \leqq \tfrac{1}{3}. \tag{5.1}$$

Démonstration. A) Évidemment $\alpha . 2^k - [\alpha . 2^k] \geqq 0$, $[\alpha . 2^k] + 1 - \alpha . 2^k > 0$, donc $p_\alpha \geqq 0$.

B) Si $\alpha . 2^k - [\alpha . 2^k] > \frac{1}{2}$ pour un certain k naturel, alors $[\alpha . 2^k] - \alpha . 2^k < -\frac{1}{2}$, et $[\alpha . 2^k] + 1 - \alpha . 2^k < \frac{1}{2}$. Donc

$$\min(\alpha . 2^k - [\alpha . 2^k], [\alpha . 2^k] + 1 - \alpha . 2^k) \leqq \tfrac{1}{2}$$

pour tout α réel et k naturel.

C) Si $\alpha . 2^k - [\alpha . 2^k] < \frac{1}{2}$, alors $\alpha . 2^{k+1} - 2 . [\alpha . 2^k] < 1$, et $[\alpha . 2^{k+1}] = 2 . [\alpha . 2^k]$. Si encore $\alpha . 2^k - [\alpha . 2^k] > \frac{1}{3}$, on a $\alpha . 2^{k+1} - [\alpha . 2^{k+1}] = \alpha . 2^{k+1} - 2 . [\alpha . 2^k] > \frac{2}{3}$; $[\alpha . 2^{k+1}] - \alpha . 2^{k+1} < -\frac{2}{3}$ et $[\alpha . 2^{k+1}] + 1 - \alpha . 2^{k+1} < \frac{1}{3}$.

D) Si $[\alpha . 2^k] + 1 - \alpha . 2^k < \frac{1}{2}$, alors $2 . [\alpha . 2^k] + 2 - \alpha . 2^{k+1} < 1$, et $2 . [\alpha . 2^k] + 1 < \alpha . 2^{k+1}$; mais parce que toujours $[\alpha . 2^k] + 1 > \alpha . 2^k$, on a $2 . [\alpha . 2^k] + 2 > \alpha . 2^{k+1}$; donc $[\alpha . 2^{k+1}] = 2 . [\alpha . 2^k] + 1$. Si encore $[\alpha . 2^k] + 1 - \alpha . 2^k > \frac{1}{3}$, alors $[\alpha . 2^{k+1}] - \alpha . 2^{k+1} = 2 . [\alpha . 2^k] + 1 - \alpha . 2^{k+1} > \frac{2}{3} - 1$, donc $\alpha . 2^{k+1} - [\alpha . 2^{k+1}] < \frac{1}{3}$.

E) Si $\alpha . 2^k - [\alpha . 2^k] = \frac{1}{2}$, alors $\alpha . 2^{k+1} - 2 . [\alpha . 2^k] = 1$, et $[\alpha . 2^{k+1}] = 2 . [\alpha . 2^k] + 1$, d'où l'on déduit $\alpha . 2^{k+1} - [\alpha . 2^{k+1}] = 0 < \frac{1}{3}$.

F) On déduit de B)–E), que si pour un certain k naturel l'inégalité

$$\min(\alpha . 2^k - [\alpha . 2^k], [\alpha . 2^k] + 1 - \alpha . 2^k) > \tfrac{1}{3}$$

a lieu, alors

$$\min(\alpha . 2^{k+1} - [\alpha . 2^{k+1}], [\alpha . 2^{k+1}] + 1 - \alpha . 2^{k+1}) < \tfrac{1}{3}.$$

Alors d'après (4.4) on a $p_\alpha \leqq \frac{1}{3}$.

6. *L'égalité suivante est valable*

$$h(M^\alpha_{ab}) = b - a.$$

Démonstration. A) Si K est un carré fondamental, notons

$$\pi(K) = \{x \in \boldsymbol{R}: \text{ il existe } y \in \boldsymbol{R} \text{ tel que } [x, y] \in K\}. \tag{6.1}$$

Alors $\pi(K)$ est un intervalle et sa longueur $|\pi(K)|$ est égale à la norme $|K|$. Si $\mathfrak{M}$ est un système dénombrable de carrés fondamentaux couvrant l'ensemble M^α_{ab}, alors $\langle a, b\rangle \subset \bigcup_{K\in\mathfrak{M}} \pi(K)$, et

$$\sum_{K\in\mathfrak{M}} |K| = \sum_{K\in\mathfrak{M}} |\pi(K)| \geqq b - a\,, \tag{6.2}$$

donc on a $h_\varepsilon(M^\alpha_{ab}) \geqq b - a$ pour chaque $\varepsilon > 0$, d'où il résulte que $h(M^\alpha_{ab}) \geqq b - a$.

B) Par contre, ayant un nombre $\varepsilon > 0$, choisissons un nombre naturel n tel que $n \geqq (b - a)/\varepsilon$. Pour $i = 0, 1, \ldots, n - 1$, définissons le carré

$$K_i = \left\{[x, y] \in E_2 : a + \frac{i}{n}(b - a) \leqq x \leqq a + \frac{i+1}{n}(b - a)\,,\right.$$
$$\left. a + \frac{i}{n}(b - a) + \alpha \leqq y \leqq a + \frac{i+1}{n}(b - a) + \alpha\right\}.$$

Nous avons

$$M^\alpha_{ab} \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} K_i\,, \quad |K_i| = (b - a)/n \leqq \varepsilon$$

et

$$\sum_{i=0}^{n-1} |K_i| = n \,.\, \frac{b - a}{n} = b - a\,.$$

Alors $h_\varepsilon(M^\alpha_{ab}) \leqq b - a$ a lieu pour tout $\varepsilon > 0$, donc aussi $h(M^\alpha_{ab}) \leqq b - a$.

7. *Pour* $m = 0, 1, 2, \ldots$ *écrivons*

$$Q_m(q) = \sum_{k=0}^{m} q^k\,. \tag{7.1}$$

Alors pour chaque m *entier non-négatif on a*

$$H(M^\alpha_{ab}) \geqq Q_m(p_\alpha) \,.\, (b - a)\,. \tag{7.2}$$

Démonstration. A) Si $p_\alpha = 0$, alors $Q_m(p_\alpha) = 1$. Mais si le système $\mathfrak{M}$ de carrés fondamentaux (spécialement de carrés dyadics) couvre l'ensemble M^α_{ab}, nous avons (6.2), et dans ce cas pour chaque $\varepsilon > 0$ on a

$$H_\varepsilon(M^\alpha_{ab}) \geqq b - a = Q_m(p_\alpha) \,.\, (b - a)\,,$$

donc aussi

$$H(M^\alpha_{ab}) \geqq Q_m(p_\alpha) \,.\, (b - a)\,.$$

B) Soit $p_\alpha > 0$. Tout d'abord nous allons prouver

Lemme 1. *Pour chaque nombre q, $0 < q < p_\alpha$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que, $\mathfrak{M}$ étant un recouvrement arbitraire de l'ensemble M_{ab}^α formé des carrés dyadics avec $|\mathfrak{M}| \leqq \delta$, pour chaque $m \geqq 0$ entier on a*

$$\sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| \geqq Q_m(q) \, . \, (b - a) \, . \tag{7.3}$$

Démonstration du lemme 1. Ayons un nombre α et un nombre q tel que $0 < q < p_\alpha$. D'après (4.4) il existe un nombre k_0 tel que l'on ait pour $k \geqq k_0$

$$\alpha \, . \, 2^k - [\alpha \, . \, 2^k] > q \, , \quad [\alpha \, . \, 2^k] + 1 - \alpha \, . \, 2^k > q \, . \tag{7.4}$$

Posons $\delta = 2^{-k_0}$. Si $|K| \leqq \delta$ pour un carré dyadic K défini par (1.2), alors $2^{-k} = |K| \leqq \delta = 2^{-k_0}$, donc $k \geqq k_0$, donc (7.4) a lieu. Nous allons prouver maintenant que pour ce δ le lemme 1 est valide pour tous les ensembles M_{ab}^α, $a < b$ étant arbitraires.

Nous effectuons la démonstration par l'induction d'après m. Nous avons $Q_0(q) = 1$. Mais pour un recouvrement arbitraire de l'ensemble M_{ab}^α, nous avons (6.2), dons aussi (7.3) pour $m = 0$. Alors pour $m = 0$ le lemme 1 est valable.

Supposons que la formule (7.3) est déjà prouvée pour $m = \mu - 1$ (μ naturel) pour tous les ensembles M_{ab}^α (pour notre α fixé, mais pour a, b arbitraires) et pour chaque recouvrement dyadic $\mathfrak{M}$ de l'ensemble M_{ab}^α tel que $|\mathfrak{M}| \leqq \delta$. Ayons maintenant un ensemble M_{ab}^α fixement donné et son recouvrement dyadic $\mathfrak{M}$ avec $|\mathfrak{M}| \leqq \delta$. Nous allons prouver la formule (7.3) pour ce recouvrement $\mathfrak{M}$ et pour $m = \mu$.

K étant un carré dyadic défini par (1.2), alors l'ensemble $\pi(K)$ défini par (6.1) est l'intervalle $\langle c \, . \, 2^{-k}, (c + 1) \, . \, 2^{-k} \rangle$. K, L étant des carrés dyadics avec $|K| \geqq |L|$, alors $\pi(L) \subset \pi(K)$ ou $\pi(L) \cap \pi(K)$ est vide ou contient un seul point.

Le recouvrement $\mathfrak{M}$ est dénombrable, car le nombre de tous les carrés dyadics est dénombrable. S'il existait un nombre $\eta > 0$ tel que $|K| \geqq \eta$ pour une infinité de carrés $K \in \mathfrak{M}$, on aurait $\sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| = \infty$ et (7.3) aurait lieu. Donc, nous pouvons nous borner au cas où il n'existe pour chaque nombre $\eta > 0$ qu'un nombre fini de carrés $K \in \mathfrak{M}$ tels que $|K| \geqq \eta$.

Nous allons définir des systèmes $\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{M}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$) et (pour certains i naturels) les carrés $L_i \in \mathfrak{M}$ de la façon suivante:

$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$;

$\mathfrak{N}_0$ soit l'ensemble des carrés $K \in \mathfrak{M}$, définis par la formule (1.2), pour lesquels on a

$$\frac{c + 1}{2^k} \leqq a \quad \text{ou} \quad \frac{c}{2^k} \geqq b \, ; \tag{7.5}$$

$\mathfrak{M}_j$, $\mathfrak{N}_j$ étant déjà définis pour tous $j < i$, nous allons poser

$$\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_{i-1} - \bigcup_{j=0}^{i-1} \mathfrak{N}_j \, ; \tag{7.6}$$

si maintenant $\mathfrak{M}_i = \emptyset$, posons aussi $\mathfrak{N}_i = \emptyset$; dans le cas contraire nous choisissons pour L_i un carré arbitraire de l'ensemble $\mathfrak{M}_i$ tel que $|L_i| \geqq |L|$ pour chaque $L \in \mathfrak{M}_i$ et $\mathfrak{N}_i$ sera l'ensemble de tous les carrés $L \in \mathfrak{M}_i$ tels que $\pi(L) \subset \pi(L_i)$.

Par le symbol λ nous désignerons le plus grand nombre i tel que L_i est défini ou ∞ dans le cas où L est défini pour chaque i. Nous avons

$$\bigcup_{i=0}^{\lambda} \mathfrak{N}_i = \mathfrak{M}. \tag{7.7}$$

Car si $L \in \mathfrak{M}$, il n'existe (dans le cas auquel nous nous bornons) qu'un nombre fini n de carrés $K \in \mathfrak{M}$ tels que $|K| \geqq |L|$. Alors si L n'a pas été choisi dans quelque $\mathfrak{N}_i$ pour $0 \leqq i \leqq n - 1$, on a dû choisir $L_n = L$, donc $L \in \mathfrak{N}_n$. Comme $\mathfrak{N}_i = \emptyset$ pour $i > \lambda$, (7.7) a lieu.

Si $K \in \mathfrak{M}$, désignons

$$\sigma(K) = \pi(K) \cap \langle a, b \rangle. \tag{7.8}$$

Pour $K \in \mathfrak{N}_i$ et $i > 0$, $\sigma(K)$ est toujours un intervalle. Nous désignerons par $|\sigma(K)|$ sa longueur. Si $x \in (a, b)$, il existe un nombre y tel que $[x, y] \in M^{\alpha}_{ab}$. Le point $[x, y]$ est couvert par un carré $K \in \mathfrak{M}$. D'ici on déduit $x \in \pi(K)$. D'après (7.5) on a $K \notin \mathfrak{N}_0$, alors d'après (7.7) on a $K \in \mathfrak{N}_i$ pour un $i > 0$. Mais d'ici on déduit $x \in \pi(L_i)$, $\pi(L_i) \supset \supset \pi(K)$. D'après (7.8) on a aussi $x \in \sigma(L_i)$. Alors $(a, b) \subset \bigcup_{i=1}^{\lambda} \sigma(L_i)$. De cela on obtient

$$\sum_{i=1}^{\lambda} |\sigma(L_i)| \geqq b - a. \tag{7.9}$$

Maintenant à partir de l'hypothèse d'induction que la formule (7.3) a lieu pour $m = \mu - 1$, nous alons prouver pour $i = 1, \ldots, \lambda$

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq Q_\mu(q) \,.\, |\sigma(L_i)|. \tag{7.10}$$

Pour la démonstration de (7.10), supposons que

$$L_i = \left\{[x, y] \in E_2 : \frac{c_i}{2^{k_i}} \leqq x \leqq \frac{c_i + 1}{2^{k_i}}, \ \frac{d_i}{2^{k_i}} \leqq y \leqq \frac{d_i + 1}{2^{k_i}}\right\}. \tag{7.11}$$

D'après (7.5) nous avons $(c_i + 1)/2^{k_i} > a$, $c_i/2^{k_i} < b$, car $L_i \notin \mathfrak{N}_0$. Nous distinguerons deux cas:

a) Supposons d'abord que

$$\alpha \,.\, 2^{k_i} \geqq d_i - c_i. \tag{7.12}$$

Le nombre $d_i - c_i$ étant entier, on en déduit

$$[\alpha \,.\, 2^{k_i}] \geqq d_i - c_i,$$

donc

$$\alpha \cdot 2^{k_i} - (d_i - c_i) \geqq \alpha \cdot 2^{k_i} - [\alpha \cdot 2^{k_i}],$$

alors d'après (7.4) on obtient

$$\alpha \cdot 2^{k_i} - (d_i - c_i) > q$$

ou bien

$$\frac{c_i}{2^{k_i}} + \alpha > \frac{d_i + q}{2^{k_i}}. \tag{7.13}$$

Notons

$$N = \left\{[x, y] \in E_2 : \frac{c_i + 1 - q}{2^{k_i}} < x < \frac{c_i + 1}{2^{k_i}}, \quad y = x + \alpha\right\}.$$

Si $x > (c_i + 1 - q)/2^{k_i}$ alors d'après (7.13) on a

$$y = x + \alpha > \frac{c_i}{2^{k_i}} + \alpha + \frac{1 - q}{2^{k_i}} > \frac{d_i + q}{2^{k_i}} + \frac{1 - q}{2^{k_i}} = \frac{d_i + 1}{2^{k_i}},$$

et d'après (7.11) aucun point de l'ensemble N n'est placé dans le carré L_i.

(i) Si ni

$$a \in \left(\frac{c_i + 1 - q}{2^{k_i}}, \frac{c_i + 1}{2^{k_i}}\right) \text{ ni } b \in \left(\frac{c_i}{2^{k_i}}, \frac{c_i + 1}{2^{k_i}}\right)$$

n'a lieu, alors $N \subset M_{ab}^{\alpha}$, et N doit être couvert par les carrés de $\mathfrak{M}$. Mais N ne peut être couvert que par les carrés de $\mathfrak{N}_i$, car l'ensemble $\pi(K) \cap \pi(L_i)$ est pour $K \notin \mathfrak{N}_i$ vide ou contient un seul point, donc

$$\pi(K) \cap \left(\frac{c_i}{2^{k_i}}, \frac{c_i + 1}{2^{k_i}}\right) = \emptyset,$$

et a fortiori

$$\pi(K) \cap \left(\frac{c_i + 1 - q}{2^{k_i}}, \frac{c_i + 1}{2^{k_i}}\right) = \emptyset.$$

Alors l'ensemble N doit être couvert par les carrés du système $\mathfrak{N}_i - \{L_i\}$. D'après (7.3) et d'après la supposition d'induction, on a

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i - \{L_i\}} |K| \geqq Q_{\mu-1}(q) \cdot \frac{q}{2^{k_i}}.$$

Comme $|L_i| = 2^{-k_i}$, $|\sigma(L_i)| \leqq 2^{-k_i}$, on en déduit selon (7.1):

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq 2^{-k_i} + Q_{\mu-1}(q) \cdot q \cdot 2^{-k_i} = Q_{\mu}(q) \cdot 2^{-k_i} \geqq Q_{\mu}(q) \cdot |\sigma(L_i)|,$$

ce qui est la formule (7.10).

(ii) Si $c_i/2^{k_i} < b \leqq (c_i + 1 - q)/2^{k_i}$, alors $|\sigma(L_i)| \leqq (1 - q)/2^{k_i}$; on a encore $\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq |L_i| = 2^{-k_i}$, d'où

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq \frac{1}{1 - q} \cdot |\sigma(L_i)| = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot |\sigma(L_i)| > Q_\mu(q) \cdot |\sigma(L_i)| \,,$$

ce qui est de nouveau la formule (7.10).

(iii) Si $(c_i + 1 - q)/2^{k_i} < b < (c_i + 1)/2^{k_i}$, nous avons avant tout

$$|\sigma(L_i)| \leqq b - \frac{c_i}{2^{k_i}} < 2^{-k_i} \,. \tag{7.14}$$

Définissons dans ce cas l'ensemble

$$N' = \left\{[x, y] \in E_2 : \frac{c_i + 1 - q}{2^{k_i}} < x < b \,, \quad y = x + \alpha\right\} \subset N \,.$$

L'ensemble $N' \subset M^\alpha_{ab}$ doit être couvert par les carrés du système $\mathfrak{N}_i - \{L_i\}$. Alors d'après (7.3) et (7.1) et d'après la supposition d'induction on a

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i - \{L_i\}} |K| \geqq Q_{\mu-1}(q) \left(b - \frac{c_i + 1 - q}{2^{k_i}}\right) = \left(b - \frac{c_i}{2^{k_i}}\right) \sum_{j=0}^{\mu-1} q^j -$$

$$- \frac{1}{2^{k_i}} \cdot (1 - q) \cdot \sum_{j=0}^{\mu-1} q^j = \left(b - \frac{c_i}{2^{k_i}}\right) \sum_{j=0}^{\mu-1} q^j - \frac{1}{2^{k_i}} + \frac{1}{2^{k_i}} \cdot q^\mu \,,$$

donc

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq \left(b - \frac{c_i}{2^{k_i}}\right) \sum_{j=0}^{\mu=1} q^j + \frac{1}{2^{k_i}} \cdot q^\mu \,;$$

d'après (7.14) nous obtenons d'ici

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq |\sigma(L_i)| \cdot \sum_{j=0}^{\mu=1} q^j + |\sigma(L_i)| \cdot q^\mu = |\sigma(L_i)| \cdot \sum_{j=0}^{\mu} q^j \,,$$

ce qui est de nouveau la formule (7.10).

(iv) Si enfin $b \notin (c_i/2^{k_i}, (c_i + 1)/2^{k_i})$, mais $(c_i + 1 - q)/2^{k_i} < a < (c_i + 1)/2^{k_i}$, alors

$$|\sigma(L_i)| = \frac{c_i + 1}{2^{k_i}} - a \,.$$

Si nous définissons

$$N' = \left\{[x, y] \in E_2 : a < x < \frac{c_i + 1}{2^{k_i}}, \quad y = x + \alpha\right\} \subset N ,$$

nous avons $N' \subset M_{ab}^{\alpha}$, et N' doit être couvert par les carrés du système $\mathfrak{N}_i - \{L_i\}$. Alors d'après (7.3) et d'après la supposition d'induction nous avons

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i - \{L_i\}} |K| \geqq Q_{\mu-1}(q) \left(\frac{c_i + 1}{2^{k_i}} - a\right) = Q_{\mu-1}(q) \, . \, |\sigma(L_i)| ,$$

donc

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq |L_i| + Q_{\mu-1}(q) \, . \, |\sigma(L_i)| \geqq |\sigma(L_i)| \, (1 + Q_{\mu-1}(q)) >$$
$$> |\sigma(L_i)| \, . \, (q^{\mu} + Q_{\mu-1}(q)) = Q_{\mu}(q) \, . \, |\sigma(L_i)| ,$$

ce qui est de nouveau la formule (7.10).

b) Maintenant nous allons examiner le cas où (7.12) n'est pas valable et alors

$$\alpha \, . \, 2^{k_i} < d_i - c_i \, . \tag{7.15}$$

Le nombre $d_i - c_i$ étant entier, on déduit de là que

$$[\alpha \, . \, 2^{k_i}] + 1 \leqq d_i - c_i ,$$

alors

$$\alpha \, . \, 2^{k_i} - (d_i - c_i) \leqq \alpha \, . \, 2^{k_i} - ([\alpha \, . \, 2^{k_i}] + 1) ,$$

et d'après (7.4) on a

$$\alpha \, . \, 2^{k_i} - (d_i - c_i) < -q$$

ou bien

$$\frac{c_i}{2^{k_i}} + \alpha < \frac{d_i - q}{2^{k_i}} \, . \tag{7.16}$$

Désignons

$$N = \left\{[x, y] \in E_2 : \frac{c_i}{2^{k_i}} < x < \frac{c_i + q}{2^{k_i}}, \quad y = x + \alpha\right\} .$$

Si $x < (c_i + q)/2^{k_i}$, alors d'après (7.16) on a

$$y = x + \alpha < \frac{c_i}{2^{k_i}} + \alpha + \frac{q}{2^{k_i}} < \frac{d_i - q}{2^{k_i}} + \frac{q}{2^{k_i}} = \frac{d_i}{2^{k_i}} ,$$

alors d'après (7.11) aucun point de l'ensemble N n'est placé dans le carré L_i.

(i) Si ni $a \in (c_i/2^{k_i}, (c_i + 1)/2^{k_i})$ ni $b \in (c_i/2^{k_i}, (c_i + q)/2^{k_i})$ n'a lieu, alors $N \subset M_{ab}^{\alpha}$, et N doit être couvert par les carrés de $\mathfrak{M}$. Mais N ne peut être couvert que par les carrés du système $\mathfrak{N}_i - \{L_i\}$. Alors d'après (7.3) et d'après la supposition d'induction, on a

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i - \{L_i\}} |K| \geqq Q_{\mu-1}(q) \cdot \frac{q}{2^{k_i}} .$$

Comme $|L_i| = 2^{-k_i}$, $|\sigma(L_i)| \leqq 2^{-k_i}$, on en déduit d'après (7.1):

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq \frac{1}{2^{k_i}} + Q_{\mu-1}(q) \cdot \frac{q}{2^{k_i}} = Q_\mu(q) \cdot \frac{1}{2^{k_i}} \geqq Q_\mu(q) \cdot |\sigma(L_i)| ,$$

ce qui est de nouveau la formule (7.10).

(ii) Si $(c_i + q)/2^{k_i} \leqq a < (c_i + 1)/2^{k_i}$, alors $|\sigma(L_i)| \leqq (1 - q)/2^{k_i}$; si de plus $\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq |L_i| = 2^{-k_i}$, alors

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq \frac{1}{1 - q} \cdot | \sigma(L_i)| = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot |\sigma(L_i)| > Q_\mu(q) \cdot |\sigma(L_i)| ,$$

ce qui est la formule (7.10) de nouveau.

(iii) Si $c_i/2^{k_i} < a < (c_i + q)/2^{k_i}$, on a avant tout

$$|\sigma(L_i)| \leqq \frac{c_i + 1}{2^{k_i}} - a < \frac{1}{2^{k_i}} . \tag{7.17}$$

Définissons dans ce cas l'ensemble

$$N' = \left\{ [x, y] \in E_2 : a < x < \frac{c_i + q}{2^{k_i}} , \quad y = x + \alpha \right\} \subset N .$$

L'ensemble $N' \subset M_{ab}^\alpha$ doit être couvert par les carrés du système $\mathfrak{N}_i - \{L_i\}$. Alors d'après (7.3) et (7.1) et d'après la supposition d'induction on a

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i - \{L_i\}} |K| \geqq Q_{\mu-1}(q) \cdot \left(\frac{c_i + q}{2^{k_i}} - a \right) = \left(\frac{c_i + 1}{2^{k_i}} - a \right) \cdot \sum_{j=0}^{\mu-1} q^j -$$

$$- \frac{1}{2^{k_i}} \cdot (1 - q) \cdot \sum_{j=0}^{\mu-1} q^j = \left(\frac{c_i + 1}{2^{k_i}} - a \right) \cdot \sum_{j=0}^{\mu-1} q^j - \frac{1}{2^{k_i}} + \frac{1}{2^{k_i}} q^\mu ,$$

donc

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq \left(\frac{c_i + 1}{2^{k_i}} - a \right) \cdot \sum_{j=0}^{\mu-1} q^j + \frac{1}{2^{k_i}} q^\mu ,$$

d'où selon (7.17) nous obtenons

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq |\sigma(L_i)| \cdot \sum_{j=0}^{\mu-1} q^j + |\sigma(L_i)| \, q^\mu = |\sigma(L_i)| \cdot \sum_{j=0}^{\mu} q^j ,$$

ce qui est la formule (7.10) de nouveau.

(iv) Si enfin $a \notin (c_i/2^{k_i}, (c_i + 1)/2^{k_i})$, mais $b \in (c_i/2^{k_i}, (c_i + q)/2^{k_i})$, alors $|\sigma(L_i)| = b - c_i/2^{k_i}$. Si nous définissons

$$N' = \left\{[x, y] \in E_2 : \frac{c_j}{2^{k_i}} < x < b, \quad y = x + \alpha\right\} \subset N ,$$

nous avons $N' \subset M^{\alpha}_{ab}$, alors N' doit être couvert par les carrés du système $\mathfrak{N}_i - \{L_i\}$. Alors d'après (7.3) et d'après la supposition d'induction nous avons

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i - \{L_i\}} |K| \geqq Q_{\mu-1}(q)\left(b - \frac{c_i}{2^{k_i}}\right) = Q_{\mu-1}(q) \cdot |\sigma(L_i)| ,$$

d'où

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq |L_i| + Q_{\mu-1}(q) \cdot |\sigma(L_i)| \geqq |\sigma(L_i)| \cdot (1 + Q_{\mu-1}(q)) >$$
$$> |\sigma(L_i)| \cdot (q^{\mu} + Q_{\mu-1}(q)) = Q_{\mu}(q) \cdot |\sigma(L_i)| ,$$

ce qui est de nouveau la formule (7.10).

Ainsi nous avons prouvé la formule (7.10) pour $1 \leqq i \leqq \lambda$ sous la supposition que la formule (7.3) a lieu pour $m = \mu - 1$. Maintenant par l'union de (7.10) et (7.9) nous allons obtenir

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}} |K| \geqq \sum_{i=1}^{\lambda} \cdot \left(\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K|\right) \geqq \sum_{i=1}^{\lambda} Q_{\mu}(q) \cdot |\sigma(L_i)| \geqq Q_{\mu}(q)(b - a) ,$$

ce qui est la formule (7.3) pour $m = \mu$. Alors, le lemme 1 est prouvé par l'induction.

C) Du lemme 1 on déduit:

Si $0 < q < p_\alpha$ et m est un nombre entier non-négatif, alors

$$H(M^{\alpha}_{ab}) \geqq Q_m(q) \cdot (b - a) .$$

D'ici nous allons obtenir

$$H(M^{\alpha}_{ab}) \geqq (b - a) \cdot \lim_{q \to p_\alpha^-} Q_m(q) = (b - a) \cdot Q_m(p_\alpha) ,$$

ce qui est la formule (7.2).

D) Comme $0 < p_\alpha < 1$, on obtient des formules (7.2) et (7.1):

$$H(M^{\alpha}_{ab}) \geqq \lim_{m \to \infty} Q_m(p_\alpha) \cdot (b - a) = \frac{b - a}{1 - p_\alpha} . \tag{7.18}$$

8. Il reste à prouver l'inégalité

$$H(M^{\alpha}_{ab}) \leqq \frac{b - a}{1 - p_\alpha} \tag{8.1}$$

La formule (8.1) résulte aisément de ce lemme:

Lemme 2. *Étant donné deux nombres $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, il existe un recouvrement $\mathfrak{M}$ de l'ensemble M^{α}_{ab}, formé de carrés dyadics et tel que*

$$|\mathfrak{M}| \leqq \delta\,, \tag{8.2}$$

$$\sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| \leqq \frac{b - a}{1 - p_\alpha} + \varepsilon\,. \tag{8.3}$$

Démonstration du lemme 2. a) Compte tenu de (5.1), nous pouvons choisir un nombre q tel que

$$p_\alpha < q < \min\left(\frac{1}{2},\quad p_\alpha + \frac{\varepsilon}{16(b - a)}\right). \tag{8.4}$$

D'après (8.4) nous avons $1 - q > \frac{1}{2}$, $1 - p_\alpha > \frac{1}{2}$, $q - p_\alpha < \varepsilon/16(b - a)$ et nous obtenons

$$\frac{1}{1 - q} = \frac{1 - p_\alpha}{(1 - q)(1 - p_\alpha)} = \frac{(1 - q) + (q - p_\alpha)}{(1 - q)(1 - p_\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{1 - p_\alpha} + \frac{q - p_\alpha}{(1 - q)(1 - p_\alpha)} < \frac{1}{1 - p_\alpha} + 4(q - p_\alpha) < \frac{1}{1 - p_\alpha} + \frac{\varepsilon}{4(b - a)}\,;$$

alors

$$\frac{b - a}{1 - q} < \frac{b - a}{1 - p_\alpha} + \tfrac{1}{4}\varepsilon\,. \tag{8.5}$$

B) Il résulte de (4.4) et (8.4) l'existence d'un nombre naturel k_1 avec

$$2^{-k_1} \leqq \delta\,, \tag{8.6}$$

$$2^{-k_1} \leqq \frac{\varepsilon(1 - q)}{16} \tag{8.7}$$

et encore avec

$$\alpha \,.\, 2^{k_1} - [\alpha \,.\, 2^{k_1}] < q \tag{8.8}$$

ou avec

$$[\alpha \,.\, 2^{k_1}] + 1 - \alpha \,.\, 2^{k_1} < q\,. \tag{8.9}$$

Pour $i = 1, 2, \ldots, N_1 = [b \,.\, 2^{k_1}] - [a \,.\, 2^{k_1}] + 1$, définissons les carrés dyadics

$$K^1_i = \left\{[x, y] \in E_2 : \frac{c_i}{2^{k_1}} \leqq x \leqq \frac{c_i + 1}{2^{k_1}}\,,\quad \frac{d_i}{2^{k_1}} \leqq y \leqq \frac{d_i + 1}{2^{k_1}}\right\},$$

où

$$c_i = [a \,.\, 2^{k_1}] + i - 1$$

et

$$d_i = c_i + [\alpha \,.\, 2^{k_1}]\,,$$

si (8.8) a lieu, ou

$$d_i = c_i + [\alpha \,.\, 2^{k_1}] + 1\,,$$

si (8.8) n'a pas lieu (et alors (8.9) a lieu).
De la définition des nombres c_i, il résulte

$$\frac{c_1}{2^{k_1}} = \frac{[a \,.\, 2^{k_1}]}{2^{k_1}} \leqq \frac{a \,.\, 2^{k_1}}{2^{k_1}} = a\,, \quad \frac{c_1 + 1}{2^{k_1}} = \frac{[a \,.\, 2^{k_1}] + 1}{2^{k_1}} > \frac{a \,.\, 2^{k_1}}{2^{k_1}} = a\,,$$

$$\frac{c_{N_1}}{2^{k_1}} = \frac{[b \,.\, 2^{k_1}]}{2^{k_1}} \leqq b\,, \quad \frac{c_{N_1} + 1}{2^{k_1}} = \frac{[b \,.\, 2^{k_1}] + 1}{2^{k_1}} > b\,.$$

Nous avons donc les inégalités

(8.10)
$$\frac{c_1}{2^{k_1}} \leqq a < \frac{c_1 + 1}{2^{k_1}} = \frac{c_2}{2^{k_1}} < \frac{c_2 + 1}{2^{k_1}} = \frac{c_3}{2^{k_1}} < \ldots$$
$$\ldots < \frac{c_{N_1 - 1} + 1}{2^{k_1}} = \frac{c_{N_1}}{2^{k_1}} \leqq b < \frac{c_{N_1} + 1}{2^{k_1}}\,.$$

On en déduit que

$$\sum_{i=1}^{N_1} |K_i^1| = \frac{c_{N_1} + 1}{2^{k_1}} - \frac{c_1}{2^{k_1}} \leqq b - a + \frac{2}{2^{k_1}}\,,$$

alors compte tenu de (8.7) nous avons

(8.11)
$$\frac{N_1}{2^{k_1}} = \sum_{i=1}^{N_1} |K_i^1| \leqq b - a + \frac{\varepsilon(1 - q)}{8}\,.$$

D'après (8.6) on a encore

(8.12)
$$K_i^1 = 2^{-k} = \delta \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, N_1\,.$$

Soit $[x, y] \in M_{ab}^{\alpha}$. Alors $a < x < b$ et d'après (8.10) il existe un i $(1 \leqq i \leqq N_1)$ tel que

$$\frac{c_i}{2^{k_1}} \leqq x \leqq \frac{c_i + 1}{2^{k_1}}\,.$$

Distinguons maintenant deux cas:

a) Soit (8.8) valable. Si maintenant $c_i \,.\, 2^{-k_1} \leqq x \leqq (c_i + 1 - q) \,.\, 2^{-k_1}$, alors $x + \alpha \geqq c_i \,.\, 2^{-k_1} + \alpha = 2^{-k_1}(c_i + \alpha \,.\, 2^{k_1}) \geqq 2^{-k_1}(c_i + [\alpha \,.\, 2^{k_1}]) = d_i \,.\, 2^{-k_1}$; ensuite $x + \alpha \leqq 2^{-k_1}(c_i + 1 - q) + \alpha = 2^{-k_1}(c_i + 1 - q + \alpha \,.\, 2^{k_1}) < 2^{-k_1}(c_i + 1 + [\alpha \,.\, 2^{k_1}]) = 2^{-k_1}(d_i + 1)$; alors les points $[x, y] \in M^{\alpha}_{ab}$, pour lesquels $c_i \,.\, 2^{-k_1} \leqq x \leqq (c_i + 1 - q) \,.\, 2^{-k_1}$, sont situés dans le carré K^1_i. Alors les points non couverts par les carrés K^1_i ne peuvent être que les points de l'ensemble M^{α}_{ab} contenus dans les ensembles

$$(8.13) \qquad L^1_i = \{[x, y] \in E_2 : a^{(1)}_i < x < b^{(1)}_i,\ y = x + \alpha\}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, N_1\,,$$

où

$$a^{(1)}_i = \frac{c_i + 1 - q}{2^{k_1}}\,, \quad b^{(1)}_i = \frac{c_i + 1}{2^{k_1}}\,.$$

Il y a N_1 des ensembles L^1_i et pour chacun d'eux on trouve

$$(8.14) \qquad b^{(1)}_i - a^{(1)}_i \leqq q \,.\, 2^{-k_1}\,, \quad i = 1, \ldots, N_1\,.$$

b) Supposons (8.9) valable. Si maintenant $(c_i + q) \,.\, 2^{-k_1} \leqq x \leqq (c_i + 1) \,.\, 2^{-k_1}$, alors $x + \alpha \geqq 2^{-k_1}(c_i + q) + \alpha = 2^{-k_1}(c_i + q + \alpha \,.\, 2^{k_1}) > 2^{-k_1}(c_i + [\alpha \,.\, 2^{k_1}] + 1) = 2^{-k_1} \,.\, d_i$; ensuite $x + \alpha \leqq 2^{-k_1}(c_i + 1) + \alpha = 2^{-k_1}(c_i + 1 + \alpha \,.\, 2^{k_1}) \leqq 2^{-k_1}(c_i + [\alpha \,.\, 2^{k_1}] + 2) = 2^{-k_1}(d_i + 1)$; alors les points $[x, y] \in M^{\alpha}_{ab}$, pour lesquels $2^{-k_1}(c_i + q) \leqq x \leqq 2^{-k_1}(c_i + 1)$, sont situés dans le carré K^1_i. Alors les points non couverts par les carrés K^1_i ne peuvent être que les points de l'ensemble M^{α}_{ab} contenus dans les ensembles (8.13), où

$$a^{(1)}_i = \frac{c_i}{2^{k_1}}\,, \quad b^{(1)}_i = \frac{c_i + q}{2^{k_1}}\,.$$

Il y a N_1 des ensembles L^1_i et pour chacun d'eux (8.14) a lieu.

C) Maintenant pour chaque nombre naturel m formulons cette

Affirmation A(m). *Pour chaque $j = 1, 2, \ldots, m$, un système de carrés dyadics $K^j_1, K^j_2, \ldots, K^j_{N_j}$ est défini. Les ensembles $L^m_1, L^m_2, \ldots, L^m_{N_m}$,*

$$(8.15) \qquad L^m_i = \{[x, y] \in E_2 : a^{(m)}_i \leqq x \leqq b^{(m)}_i,\ y = x + \alpha\}\,, \quad i = 1, \ldots, N_m\,,$$

existent, tels que

$$(8.16) \qquad M^{\alpha}_{ab} - \bigcup_{i=1}^{N_m} L^m_i \subset \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{N_j} K^j_i\,.$$

Ensuite on a

$$(8.17)\qquad |K_i^j| = 2^{-k_j} \leqq \delta \quad pour \quad i = 1, \ldots, N_j, \quad j = 1, \ldots, m\,;$$

$$(8.18)\qquad \sum_{i=1}^{N_j} |K_i^j| = N_j \,.\, 2^{-k_j} \leqq q^{j-1}(b - a) + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1 - q) \sum_{\iota=1}^{j} q^{j-\iota} \,.\, 2^{1-\iota}$$

$$pour \quad j = 1, \ldots, m\,;$$

$$(8.19)\qquad b_i^{(m)} - a_i^{(m)} \leqq q \,.\, 2^{-k_m}\,.$$

Démonstration des affirmations $\boldsymbol{A}(m)$. En B) on a prouvé que nous pouvons définir des carrés dyadics $K_1^1, \ldots, K_{N_1}^1$ tels que l'on ait $\boldsymbol{A}(1)$ (voir (8.12), (8.11) et (8.14)). Supposons maintenant que $\boldsymbol{A}(m)$ vaille pour quelque m naturel. Sous cette supposition nous construirons des carrés dyadics $K_1^{m+1}, \ldots, K_{N_{m+1}}^{m+1}$ tels que $\boldsymbol{A}(m + 1)$ sera vraie. Par cela, $\boldsymbol{A}(m)$ sera prouvée pour chaque m naturel.

D'après (4.4) et (8.4), il existe un nombre naturel k_{m+1} tel que $2^{-k_{m+1}} \leqq \delta$, et que

$$(8.20)\qquad \frac{1}{2^{k_{m+1}}} \leqq \frac{\varepsilon \,.\, (1 - q)}{16 \,.\, N_m \,.\, 2^m}$$

et ou bien

$$(8.21)\qquad \alpha \,.\, 2^{k_{m+1}} - [\alpha \,.\, 2^{k_{m+1}}] < q$$

ou bien

$$(8.22)\qquad [\alpha \,.\, 2^{k_{m+1}}] + 1 - \alpha \,.\, 2^{k_{m+1}} < q\,.$$

Choisissons un tel k_{m+1}. Pour chaque ensemble $L_i^{(m)}$ définissons v_i carrés dyadics

$$(8.23)\qquad K_{i,l}^{m+1} = \left\{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2 : \frac{c_{i,l}}{2^{k_{m+1}}} \leqq x \leqq \frac{c_{i,l} + 1}{2^{k_{m+1}}}, \quad \frac{d_{i,l}}{2^{k_{m+1}}} \leqq y \leqq \frac{d_{i,l} + 1}{2^{k_{m+1}}}\right\};$$

$$l = 1, 2, \ldots, v_i = [b_i^{(m)} \,.\, 2^{k_{m+1}}] - [a_i^{(m)} \,.\, 2^{k_{m+1}}] + 1\,;$$

où

$$c_{i,l} = [a_i^{(m)} \,.\, 2^{k_{m+1}}] + i - 1$$

et

$$(8.24)\qquad d_{i,l} = c_{i,l} + [\alpha \,.\, 2^{k_{m+1}}], \quad \text{si (8.21) a lieu},$$

$$(8.25)\qquad d_{i,l} = c_{i,l} + [\alpha \,.\, 2^{k_{m+1}}] + 1, \quad \text{si (8.21) n'a pas lieu (et alors (8.22) a lieu)}.$$

De la définition des nombres $c_{i,l}$ on déduit

$$\frac{c_{i,1}}{2^{k_{m+1}}} = \frac{[a_i^{(m)} \,.\, 2^{k_{m+1}}]}{2^{k_{m+1}}} \leqq \frac{a_i^{(m)} \,.\, 2^{k_{m+1}}}{2^{k_{m+1}}} = a_i^{(m)}\,,$$

$$\frac{c_{i,1}+1}{2^{k_{m+1}}} = \frac{[a_i^{(m)} \cdot 2^{k_{m+1}}]+1}{2^{k_{m+1}}} > \frac{a_i^{(m)} \cdot 2^{k_{m+1}}}{2^{k_{m+1}}} = a_i^{(m)},$$

$$\frac{c_{i,v_i}}{2^{k_{m+1}}} = \frac{[b_i^{(m)} \cdot 2^{k_{m+1}}]}{2^{k_{m+1}}} \leqq b_i^{(m)},$$

$$\frac{c_{i,v_i}+1}{2^{k_{m+1}}} = \frac{[b_i^{(m)} \cdot 2^{k_{m+1}}]+1}{2^{k_{m+1}}} > b_i^{(m)}.$$

Nous avons donc les inégalités

$$\text{(8.26)} \qquad \frac{c_{i,1}}{2^{k_{m+1}}} \leqq a_i^{(m)} < \frac{c_{i,1}+1}{2^{k_{m+1}}} = \frac{c_{i,2}}{2^{k_{m+1}}} < \frac{c_{i,2}+1}{2^{k_{m+1}}} = \frac{c_{i,3}}{2^{k_{m+1}}} < \dots$$

$$\dots < \frac{c_{i,v_i-1}+1}{2^{k_{m+1}}} = \frac{c_{i,v_i}}{2^{k_{m+1}}} \leqq b_i^{(m)} < \frac{c_{i,v_i}+1}{2^{k_{m+1}}}.$$

D'ici on déduit que

$$\sum_{l=1}^{v_i} |K_{i,l}^{m+1}| = \frac{c_{i,v_i}+1}{2^{k_{m+1}}} - \frac{c_{i,1}}{2^{k_{m+1}}} \leqq b_i^{(m)} - a_i^{(m)} + \frac{2}{2^{k_{m+1}}},$$

d'où compte tenu de (8.19) et (8.20) nous obtenons

$$\text{(8.27)} \qquad \sum_{l=1}^{v_i} |K_{i,l}^{m+1}| = \frac{v_i}{2^{k_{m+1}}} \leqq \frac{q}{2^{k_m}} + \frac{\varepsilon(1-q)}{8 \cdot N_m \cdot 2^m}.$$

Soit $[x, y] \in L_i^m$. Alors $a_i^{(m)} < x < b_i^{(m)}$ et d'après (8.26) il existe un $l(1 \leqq l \leqq v_i)$ tel que

$$\frac{c_{i,l}}{2^{k_{m+1}}} \leqq x \leqq \frac{c_{i,l}+1}{2^{k_{m+1}}}.$$

Distinguons maintenant deux cas:

a) Soit (8.21), donc aussi (8.24) valable. Si maintenant $c_{i,l} \cdot 2^{-k_{m+1}} \leqq x \leqq$ $\leqq (c_{i,l} + 1 - q) \cdot 2^{-k_{m+1}}$, alors $x + \alpha \geqq c_{i,l} \cdot 2^{-k_{m+1}} + \alpha = 2^{-k_{m+1}}(c_{i,l} +$ $+ \alpha \cdot 2^{k_{m+1}}) \geqq 2^{-k_{m+1}}(c_{i,l} + [\alpha \cdot 2^{k_{m+1}}]) = d_{i,l} \cdot 2^{-k_{m+1}}$; ensuite $x + \alpha \leqq$ $\leqq 2^{-k_{m+1}}(c_{i,l} + 1 - q) + \alpha = 2^{-k_{m+1}}(c_{i,l} + 1 - q + \alpha \cdot 2^{k_{m+1}}) < 2^{-k_{m+1}}(c_{i,l} + 1 +$ $+ [\alpha \cdot 2^{k_{m+1}}]) = 2^{-k_{m+1}}(d_{i,l} + 1)$; alors les points $[x, y] \in L_i^m$, pour lesquels $c_{i,l} \cdot 2^{-k_{m+1}} \leqq x \leqq (c_{i,l} + 1 - q) \cdot 2^{-k_{m+1}}$, sont situés d'après (8.23) dans le carré $K_{i,l}^{m+1}$. Alors les points non couverts par les carrés $K_{i,l}^{m+1}$ ne peuvent être que les points des ensembles L_i^m contenus dans les ensembles

$$(8.28) \qquad L_{i,l}^{m+1} = \{[x, y] \in E_2 : a_{i,l}^{(m+1)} \leqq x \leqq b_{i,l}^{(m+1)}, \quad y = x + \alpha\},$$

$$l = 1, 2, \ldots, \nu_i,$$

où

$$(8.29) \qquad a_{i,l}^{(m+1)} = \frac{c_{i,l} + 1 - q}{2^{k_{m+1}}}, \quad b_{i,l}^{m+1} = \frac{c_{i,l} + 1}{2^{k_{m+1}}}.$$

Le nombre des ensembles $L_{i,l}^{m+1}$ est ν_i pour i fixe et pour chacun d'eux on a

$$(8.30) \qquad b_{i,l}^{(m+1)} - a_{i,l}^{(m+1)} \leqq q \cdot 2^{-k_{m+1}}; \quad l = 1, \ldots, \nu_i; \quad i = 1, \ldots, N_m.$$

b) Si (8.21) n'a pas lieu, alors (8.22) et (8.25) ont lieu. Si dans ce cas $(c_{i,l} + q) \cdot 2^{-k_{m+1}} \leqq x \leqq (c_{i,l} + 1) \cdot 2^{-k_{m+1}}$, alors $x + \alpha \geqq (c_{i,l} + q) \cdot 2^{-k_{m+1}} + \alpha = 2^{-k_{m+1}}(c_{i,l} + q + \alpha \cdot 2^{k_{m+1}}) > 2^{-k_{m+1}}(c_{i,l} + [\alpha \cdot 2^{k_{m+1}}] + 1) = d_{i,l} \cdot 2^{-k_{m+1}}$; ensuite $x + \alpha \leqq (c_{i,l} + 1) \cdot 2^{-k_{m+1}} + \alpha = 2^{-k_{m+1}}(c_{i,l} + 1 + \alpha \cdot 2^{k_{m+1}}) < 2^{-k_{m+1}}(c_{i,l} + [\alpha \cdot 2^{k_{m+1}}] + 2) = (d_{i,l} + 1) \cdot 2^{-k_{m+1}}$; alors les points $[x, y] \in L_i^m$, pour lesquels $(c_{i,l} + q) \cdot 2^{-k_{m+1}} \leqq x \leqq (c_{i,l} + 1) \cdot 2^{-k_{m+1}}$, sont situés d'après (8.23) dans le carré $K_{i,l}^{m+1}$. Alors les points non couverts par les carrés $K_{i,l}^{m+1}$ ne peuvent être que les points des ensembles L_i^m contenus dans les ensembles (8.28), où

$$(8.31) \qquad a_{i,l}^{m+1} = \frac{c_{i,l}}{2^{k_{m+1}}}, \quad b_{i,l}^{m+1} = \frac{c_{i,l} + q}{2^{k_{m+1}}}.$$

Le nombre des ensembles $L_{i,l}^{m+1}$ est ν_i pour i fixe et pour chacun d'eux on a (8.30).

Posons maintenant $N_{m+1} = \sum_{i=1}^{N_m} \nu_i$ et changeons le numérotage des carrés $K_{i,l}^{m+1}$ en posant

$$K_1^{m+1} = K_{1,1}^{m+1}, \quad K_2^{m+1} = K_{1,2}^{m+1}, \ldots, K_{\nu_1}^{m+1} = K_{1,\nu_1}^{m+1},$$

$$K_{\nu_1+1}^{m+1} = K_{2,1}^{m+1}, \ldots, K_{\nu_1+\nu_2}^{m+1} = K_{2,\nu_2}^{m+1}, \quad K_{N_{m+1}-1}^{m+1} = K_{N_m,\nu_{N_m}-1}^{m+1}, \quad K_{N_{m+1}}^{m+1} = K_{N_m,\nu_{N_m}}^{m+1}.$$

De la manière analogue nous allons désigner des ensembles

$$L_1^{m+1} = L_{1,1}^{m+1}, \quad L_2^{m+1} = L_{1,2}^{m+1}, \ldots, L_{N_{m+1}}^{m+1} = L_{N_m,\nu_{N_m}}^{m+1}$$

et les nombres

$$a_1^{(m+1)} = a_{1,1}^{(m+1)}, \ldots, a_{N_{m+1}}^{(m+1)} = a_{N_m,\nu_{N_m}}^{(m+1)},$$

$$b_1^{(m+1)} = b_{1,1}^{(m+1)}, \ldots, b_{N_{m+1}}^{(m+1)} = b_{N_m,\nu_{N_m}}^{(m+1)}.$$

D'après la construction des carrés K_i^{m+1} et des ansembles L_i^{m+1} (8.16) a lieu aussi, si nous y écrivons $m + 1$ au lieu de m. D'après (8.23) et d'après le choix du nombre k_{m+1}, (8.17) a lieu aussi pour $j = m + 1$.

De (8.27) il résulte

$$\sum_{i=1}^{N_{m+1}} |K_i^{m+1}| = \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{\gamma_i} |K_{i,l}^{m+1}| = \sum_{i=1}^{N_m} \frac{v_i}{2^{k_{m+1}}} = \frac{N_{m+1}}{2^{k_{m+1}}} \leqq \frac{N_m}{2^{k_m}} \cdot q + \frac{\varepsilon(1-q)}{8 \cdot 2^m}.$$

Si nous appliquons maintenant (8.18) pour $j = m$, nous obtenons d'ici

$$\sum_{i=1}^{N_{m+1}} |K_i^{m+1}| \leqq q(q^{m-1}(b-a) + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1-q)\sum_{\iota=1}^{m} q^{m-\iota} \cdot 2^{1-\iota}) +$$

$$+ \frac{\varepsilon(1-q)}{8 \cdot 2^m} = q^m(b-a) + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1-q)\sum_{\iota=1}^{m} q^{m+1-\iota} \cdot 2^{1-\iota} + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1-q) \cdot 2^{-m},$$

ce qui est la formule (8.18) pour $j = m + 1$.

Enfin, de (8.30) on déduit (8.19) avec $m + 1$ au lieu de m. Nous avons donc prouvé l'affirmation $\boldsymbol{A}(m + 1)$.

D) D'après (8.18) nous avons

$$\frac{N_j}{2^{k_j}} \leqq q^{j-1}\left((b-a) + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1-q)\sum_{\iota=1}^{j} \frac{1}{(2q)^{\iota-1}}\right) =$$

$$= q^{j-1}\left(b - a + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1-q) \cdot \frac{1-(2q)^j}{1-2q}\right).$$

D'après (8.4) on a $0 < 2q < 1$; il en découle

$$\lim_{j\to\infty} N_j \cdot 2^{-k_j} = 0.$$

Choisissons un nombre naturel λ tel que

(8.32) $$N_\lambda \cdot 2^{-k_\lambda} \leqq \varepsilon.$$

De (8.16) il résulte

(8.33) $$M_{ab}^{\alpha} - \bigcup_{i=1}^{N_\lambda} L_i^\lambda \subset \bigcup_{j=1}^{\lambda} \bigcup_{i=1}^{N_j} K_i^j.$$

Le carré K_i^λ soit donné par

$$K_i^\lambda = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2 : \gamma_i \cdot 2^{-k_\lambda} \leqq x \leqq (\gamma_i + 1) \cdot 2^{-k_\lambda},$$
$$\delta_i \cdot 2^{-k_\lambda} \leqq y \leqq (\delta_i + 1) \cdot 2^{-k_\lambda}\}.$$

a) Si $\alpha \cdot 2^{k_\lambda} - [\alpha \cdot 2^{k_\lambda}] < q$, alors d'après (8.23), (8.28) et (8.29) on a

$$L_i^\lambda = \left\{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2 : \frac{\gamma_i + 1 - q}{2^{k_\lambda}} \leqq x \leqq \frac{\gamma_i + 1}{2^{k_\lambda}}, \quad y = x + \alpha\right\}.$$

D'après (8.24) nous avons dans ce cas encore

$$\delta_i = \gamma_i + [\alpha . 2^{k_\lambda}] .$$

Définissons dans ce cas pour $i = 1, \ldots, N_\lambda$ des carrés

$$\bar{K}_i = \{[x, y] \in E_2 : (\gamma_i + \tfrac{1}{2}) . 2^{-k_\lambda} \leqq x \leqq (\gamma_i + 1) . 2^{-k_\lambda} ,$$
$$(\delta_i + 1) . 2^{-k_\lambda} \leqq y \leqq (\delta_i + \tfrac{3}{2}) . 2^{-k_\lambda}\} .$$

Si maintenant $[x, y] \in L_i^\lambda$, alors

$$x \in \left\langle \frac{\gamma_i + 1 - q}{2^{k_\lambda}} , \frac{\gamma_i + 1}{2^{k_\lambda}} \right\rangle \subset \left\langle \frac{\gamma_i + \frac{1}{2}}{2^{k_\lambda}} , \frac{\gamma_i + 1}{2^{k_\lambda}} \right\rangle .$$

Ensuite

$$y = x + \alpha \geqq \frac{\gamma_i + 1 - q}{2^{k_\lambda}} + \alpha = 2^{-k_\lambda}(\gamma_i + 1 - q + \alpha . 2^{k_\lambda}) \geqq$$

$$\geqq 2^{-k_\lambda}(\gamma_i + 1 - q + [\alpha . 2^{k_\lambda}]) = 2^{-k_\lambda}(\delta_i + 1 - q) > \delta_i . 2^{-k_\lambda} ;$$

$$y = x + \alpha < (\gamma_i + 1) . 2^{-k_\lambda} + \alpha = 2^{-k_\lambda}(\gamma_i + 1 + \alpha . 2^{k_\lambda}) <$$

$$< 2^{-k_\lambda}(\gamma_i + 1 + [\alpha . 2^{k_\lambda}] + q) = 2^{-k_\lambda}(\delta_i + 1 + q) < (\delta_i + \tfrac{3}{2}) . 2^{-k_\lambda} .$$

Il en découle que $[x, y] \in K_i^\lambda$ ou $[x, y] \in \bar{K}_i$.

b) Si l'on n'a pas $\alpha . 2^{k_\lambda} - [\alpha . 2^{k_\lambda}] < q$, alors $[\alpha . 2^{k_\lambda}] + 1 - \alpha . 2^{k_\lambda} < q$ a lieu; d'après (8.23), (8.28) et (8.31) on a

$$L_i^\lambda = \{[x, y] \in E_2 : \gamma_i . 2^{-k_\lambda} \leqq x \leqq (\gamma_i + q) . 2^{-k_\lambda}, \ y = x + \alpha\}$$

et d'après (8.25) on a

$$\delta_i = \gamma_i + [\alpha . 2^{k_\lambda}] + 1 .$$

Définissons dans ce cas pour $i = 1, \ldots, N_\lambda$ des carrés

$$\bar{K}_i = \{[x, y] \in E_2 : \gamma_i . 2^{-k_\lambda} \leqq x \leqq (\gamma_i + \tfrac{1}{2}) . 2^{-k_\lambda} , (\delta_i - \tfrac{1}{2}) . 2^{-k_\lambda} \leqq y \leqq \delta_i . 2^{-k_\lambda}\} .$$

Si maintenant $[x, y] \in L_i^\lambda$, alors

$$x \in \left\langle \frac{\gamma_i}{2^{k_\lambda}} , \frac{\gamma_i + q}{2^{k_\lambda}} \right\rangle \subset \left\langle \frac{\gamma_i}{2^{k_\lambda}} , \frac{\gamma_i + \frac{1}{2}}{2^{k_\lambda}} \right\rangle .$$

Ensuite

$$y = x + \alpha \leqq (\gamma_i + q) . 2^{-k_\lambda} + \alpha = 2^{-k_\lambda}(\gamma_i + q + \alpha . 2^{k_\lambda}) <$$

$$< 2^{-k_\lambda}(\gamma_i + q + [\alpha . 2^{k_\lambda}] + 1) = 2^{-k_\lambda}(\delta_i + q) < (\delta_i + 1) . 2^{-k_\lambda} ;$$

$$y = x + \alpha \geqq \gamma_i \,.\, 2^{-k_\lambda} + \alpha = 2^{-k_\lambda}(\gamma_i + \alpha \,.\, 2^{k_\lambda}) >$$

$$> 2^{-k_\lambda}(\gamma_i + [\alpha \,.\, 2^{k_\lambda}] + 1 - q) = 2^{-k_\lambda}(\delta_i - q) > (\delta_i - \tfrac{1}{2}) \,.\, 2^{-k_\lambda} \,.$$

Il en découle que $[x, y] \in K_i^\lambda$ ou $[x, y] \in \bar{K}_i$.

Alors, dans les deux cas, nous avons

$$L_i^\lambda \subset K_i^\lambda \cup \bar{K}_i \,. \tag{8.34}$$

Puis d'après la définition des carrés $\bar{K}_i$ et selon (8.17) on a

$$|\bar{K}_i| = \tfrac{1}{2} \,.\, 2^{-k_\lambda} < \delta \,, \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, N_\lambda \,, \tag{8.35}$$

et d'après (8.32) on obtient

$$\sum_{i=1}^{N_\lambda} |\bar{K}_i| = N_\lambda \,.\, \tfrac{1}{2} \,.\, 2^{-k_\lambda} \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon \,. \tag{8.36}$$

Pour le système $\mathfrak{M}$ nous allons choisir maintenant l'ensemble des carrés

$$K_1^1, \ldots, K_{N_1}^1, K_1^2, \ldots, K_{N_2}^2, \ldots, K_1^\lambda, \ldots, K_{N_\lambda}^\lambda, \bar{K}_1, \ldots, \bar{K}_{N_\lambda} \,.$$

Il résulte de (8.33) et (8.34) que $\mathfrak{M}$ est un recouvrement de l'ensemble M_{ab}^α. D'après (8.17) et (8.35), on a (8.2). Enfin, d'après (8.18), (8.36), (8.4) a (8.5) nous obtenons

$$\sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| = \sum_{j=1}^{\lambda} \sum_{i=1}^{N_j} |K_i^j| + \sum_{i=1}^{N_\lambda} |\bar{K}_i| \leqq \sum_{j=1}^{\lambda} q^{j-1}(b - a) + \sum_{j=1}^{\lambda} \tfrac{1}{8}\varepsilon \,.$$

$$.\, (1 - q) \sum_{\iota=1}^{j} q^{j-\iota} \,.\, 2^{1-\iota} + \tfrac{1}{2}\varepsilon < (b - a) \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1 - q) \sum_{\iota=1}^{\lambda} \sum_{j=\iota}^{\lambda} q^{j-\iota} \,.$$

$$.\, 2^{J-\iota} + \tfrac{1}{2}\varepsilon < \frac{b - a}{1 - q} + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1 - q) \sum_{\iota=1}^{\infty} \sum_{j=\iota}^{\infty} q^{j-\iota} \,.\, 2^{1-\iota} + \tfrac{1}{2}\varepsilon <$$

$$< \frac{b - a}{1 - p_\alpha} + \tfrac{1}{4}\varepsilon + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1 - q) \sum_{\iota=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\iota-1}} \,.\, \frac{1}{1 - q} + \tfrac{1}{2}\varepsilon =$$

$$= \frac{b - a}{1 - p_\alpha} + \tfrac{1}{4}\varepsilon + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1 - q) \,.\, \frac{2}{1 - q} + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{b - a}{1 - p_\alpha} + \varepsilon \,,$$

alors (8.3) est aussi valable. Donc le lemme 2 (et alors aussi la formule (8.1)) est démontré.

9. a) Soit α un nombre rationnel de la forme $\alpha = r \,.\, 2^{-l}$, où l est un entier non-négatif, r entier. Alors on a $\alpha \,.\, 2^k - [\alpha \,.\, 2^k] = 0$ pour $k \geqq l$, donc $p_\alpha = 0$ a lieu d'après (4.4) et d'après (4.2) et (4.3) on a

$$h(M_{ab}^\alpha) = H(M_{ab}^\alpha) \,.$$

b) Soit α un nombre rationnel, mais pas de la forme $\alpha = r \,.\, 2^{-l}$ avec r, l entiers. Alors (voir [8], chap. V, § 22, page 218)

$$\alpha = \frac{r}{2^l} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s}{2^{l+ij}},$$

où r, s sont entiers, l entier non-négatif, j naturel et $0 < s < 2^j$. On en déduit

$$\alpha \,.\, 2^k - [\alpha \,.\, 2^k] = \alpha \,.\, 2^{k+j} - [\alpha \,.\, 2^{k+j}] > 0\,,$$

$$[\alpha \,.\, 2^k] + 1 - \alpha \,.\, 2^k = [\alpha \,.\, 2^{k+j}] + 1 - \alpha \,.\, 2^{k+j} > 0$$

pour $k \geqq l$, d'où d'après (4.4) il découle

$$p_\alpha = \min_{0 \leqq k < j} (\min (\alpha \,.\, 2^{l+k} - [\alpha \,.\, 2^{l+k}],\ [\alpha \,.\, 2^{l+k} + 1 - \alpha \,.\, 2^{l+k})) > 0\,.$$

D'après (4.2) et (4.3) on a donc dans ce cas toujours

$$h(M_{ab}^\alpha) < H(M_{ab}^\alpha)\,.$$

c) Soit $\alpha = \frac{1}{3} = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-2j}$. Alors pour k pair on trouve

$$\alpha \,.\, 2^k - [\alpha \,.\, 2^k] = \tfrac{1}{3}\,, \quad [\alpha \,.\, 2^k] + 1 - \alpha \,.\, 2^k = \tfrac{2}{3}\,,$$

pour k impair on aura

$$\alpha \,.\, 2^k - [\alpha \,.\, 2^k] = \tfrac{2}{3}\,, \quad [\alpha \,.\, 2^k] + 1 - \alpha \,.\, 2^k = \tfrac{1}{3}\,,$$

alors on a

$$\min (\alpha \,.\, 2^k - [\alpha \,.\, 2^k],\ [\alpha \,.\, 2^k] + 1 - \alpha \,.\, 2^k) = \tfrac{1}{3}$$

pour chaque k naturel, et d'après (4.4) on a $p_{1/3} = \frac{1}{3}$. D'après (4.3) nous obtenons alors

$$H(M_{ab}^{1/3}) = \tfrac{3}{4}(b - a) = \tfrac{3}{2} h(M_{ab}^{1/3})\,.$$

d) Soit $\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j^2}$. Cet α est irrationnel. Nous avons

$$\alpha \,.\, 2^{k^2} - [\alpha \,.\, 2^{k^2}] = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{k^2 - j^2} - [\sum_{j=1}^{\infty} 2^{k^2 - j^2}] = \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{k^2 - j^2} < \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-2k-1-j} = 2^{-2k}\,.$$

Alors d'après (4.4) nous obtenons

$$p_\alpha \leqq \liminf_{k \to \infty} (\alpha \,.\, 2^{k^2} - [\alpha \,.\, 2^{k^2}]) \leqq \liminf_{k \to \infty} 2^{-2k} = 0\,,$$

d'où

$$p_\alpha = 0\,, \quad h(M_{ab}^\alpha) = H(M_{ab}^\alpha)\,.$$