ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 103 * PRAHA 21. 8. 1978 * ČÍSLO 3

DEUX MESURES SPÉCIALES DANS L'ESPACE E_2

MILOSLAV JŮZA, Praha

(Reçu le 8 mars 1976)

C. CARATHÉODORY a défini dans [1] la notion de mesure extérieure. F. HAUSDORFF a défini et étudié dans le Mémoire [2] des types différents des mesures extérieures. Dans le dernier temps, les mesures de Carathéodory étaient étudiées systématiquement par ex. dans [4] et [5].

En examinant les singularités des solutions des équations aux dérivées partielles, on a besoin parfois de mesures de type spécial (voir [3], [6], [7]). Dans ce travail-ci, nous examinons la relation qui existe entre deux mesures de ce type.

1. Ayons un espace euclidien E_2 avec un système de coordonnées cartésiennes. Si x_0, y_0 sont des nombres réels et $\delta > 0$, alors l'ensemble

$$K = \{[x, y] \in E_2 : x_0 \leqq x \leqq x_0 + \delta,\ y_0 \leqq y \leqq y_0 + \delta\} \tag{1.1}$$

sera appelé *carré fondamental*; le nombre δ sera appelé *norme* du carré K et désigné par $|K|$. Si $\mathfrak{M}$ est un système de carrés fondamentaux, le nombre

$$|\mathfrak{M}| = \sup_{K \in \mathfrak{M}} |K|$$

est appelé *norme* du système $\mathfrak{M}$. L'ensemble de tous les systèmes dénombrables[1]) de carrés fondamentaux sera désigné par $\mathbf{K}$.

Etant donné des nombres entiers c, d, k, $k \geqq 0$, nous appellerons l'ensemble

$$K = \left\{[x, y] \in E_2 : \frac{c}{2^k} \leqq x \leqq \frac{c+1}{2^k},\ \frac{d}{2^k} \leqq y \leqq \frac{d+1}{2^k}\right\} \tag{1.2}$$

carré dyadic. L'ensemble de tous les systèmes de carrés dyadics sera désigné par $\mathbf{D}$. Évidemment on a $\mathbf{D} \subset \mathbf{K}$.

[1]) Des ensembles finis sont aussi considérés comme dénombrables.

2. Si $M \subset E_2$, nous posons pour $\varepsilon > 0$:

$$h_\varepsilon(M) = \inf \sum_{K \in \mathfrak{M}} |K|$$

où la borne inférieure est prise sur tous les systèmes $\mathfrak{M}$ tels que $\mathfrak{M} \in \mathbf{K}$, $|\mathfrak{M}| \leqq \varepsilon$, $M \subset \bigcup_{K \in \mathfrak{M}} K$;

$$H_\varepsilon(M) = \inf \sum_{K \in \mathfrak{M}} |K|$$

où la borne inférieure est prise sur tous les systèmes $\mathfrak{M}$ tels que $\mathfrak{M} \in \mathbf{D}$, $|\mathfrak{M}| \leqq \varepsilon$, $M \subset \bigcup_{K \in \mathfrak{M}} K$. On a $\mathbf{D} \subset \mathbf{K}$, donc pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout ensemble $M \subset E_2$ on a

$$h_\varepsilon(M) \leqq H_\varepsilon(M) .$$

Pour $\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 > 0$ et pour tout ensemble $M \subset E_2$, on a évidemment:

$$h_{\varepsilon_1}(M) \leqq h_{\varepsilon_2}(M) , \quad H_{\varepsilon_1}(M) \leqq H_{\varepsilon_2}(M) .$$

Alors, il existe des nombres (éventuellement égaux à $+\infty$)

$$h(M) = \lim_{\varepsilon \to 0+} h_\varepsilon(M) = \sup_{\varepsilon > 0} h_\varepsilon(M) , \quad H(M) = \lim_{\varepsilon \to 0+} H_\varepsilon(M) = \sup_{\varepsilon > 0} H_\varepsilon(M)$$

et on a

$$h(M) \leqq H(M)$$

pour tout ensemble $M \subset E_2$.

3. Pour tout ε, $1 > \varepsilon > 0$, et pour tout ensemble $M \subset E_2$ on a[2])

$$H_\varepsilon(M) \leqq 9 \,.\, h_\varepsilon(M) , \quad \text{donc} \quad H(M) \leqq 9 \,.\, h(M) .$$

Tout d'abord nous allons prouver: *Pour chaque carré fondamental K avec la norme $|K| \leqq 1$ il existe un système $\mathfrak{M}_K \in \mathbf{D}$ tel que*

$$K \subset \bigcup_{D \in \mathfrak{M}_K} D , \quad |\mathfrak{M}_K| \leqq |K| , \quad \sum_{D \in \mathfrak{M}_K} |D| \leqq 9 \,.\, |K| .$$

Cependant, K étant donné par la formule (1.1), soit k le plus petit nombre naturel tel que $2^{-k} \leqq \delta$. On a alors

$$2^{-k} \leqq \delta < 2^{-k+1} .$$

Il existe un nombre entier c tel que

$$x_0 \leqq c \,.\, 2^{-k} < x_0 + \delta .$$

Si $c \,.\, 2^{-k} < x_0 + \frac{1}{2}\delta$, posons $c_0 = c - 1$; autrement posons $c_0 = c - 2$. Alors on a

$$c_0 \,.\, 2^{-k} < x_0 < x_0 + \delta < (c_0 + 3) \,.\, 2^{-k} .$$

---

[2]) Voir [6], p. 43 et [7], p. 11.

D'une façon analogue, nous pouvons trouver un nombre entier d_0 tel que

$$d_0 \, . \, 2^{-k} < y_0 < y_0 + \delta < (d_0 + 3) \, . \, 2^{-k} \, .$$

En désignant

$$D_{ij} = \left\{[x, y] \in E_2 : \frac{c_0 + i}{2^k} \leqq x \leqq \frac{c_0 + i + 1}{2^k}, \; \frac{d_0 + j}{2^k} \leqq y \leqq \frac{d_0 + j + 1}{2^k}\right\},$$

nous avons

$$|D_{ij}| = 2^{-k} \leqq \delta = |K| \, , \quad K \subset \bigcup_{j=0}^{2} \bigcup_{i=0}^{2} D_{ij} \, ,$$

$$\sum_{j=0}^{2} \sum_{i=0}^{2} |D_{ij}| = 9 \, . \, 2^{-k} \leqq 9\delta = 9 \, . \, |K| \, .$$

Alors nous pouvons poser $\mathfrak{M}_K = \{D_{ij}\}_{\substack{0 \leqq i \leqq 2 \\ 0 \leqq j \leqq 2}}$.

Si maintenant $1 > \varepsilon > 0$ et si l'ensemble $M \subset E_2$ est couvert par les carrés d'un système $\mathfrak{M} \in \mathbf{K}$ avec $|\mathfrak{M}| \leqq \varepsilon$, nous pouvons couvrir M par l'union

$$\mathfrak{N} = \bigcup_{K \in \mathfrak{M}} \mathfrak{M}_K \in \mathbf{D} \, .$$

On voit aisément que

$$|\mathfrak{N}| \leqq |\mathfrak{M}| \, , \quad \sum_{D \in \mathfrak{N}} |D| = \sum_{K \in \mathfrak{M}} \Big(\sum_{D \in \mathfrak{M}_K} |D| \Big) \leqq \sum_{K \in \mathfrak{M}} 9 \, . \, |K| \, .$$

D'ici on déduit que $H_\varepsilon(M) \leqq 9 \, . \, h_\varepsilon(M)$, alors aussi $H(M) \leqq 9 \, . \, h(M)$.

4. Nous allons prouver qu'il existe des ensembles M tels que $h(M) < H(M)$. En effet, nous avons le

Théorème 1. *Soient α, a, b des nombres réels, $a < b$. Définissons l'ensemble*

$$M_{ab}^{\alpha} = \{[x, y] \in E_2 : a < x < b, \; y = x + \alpha\} \, . \tag{4.1}$$

Alors on a

$$h(M_{ab}^{\alpha}) = b - a \, , \tag{4.2}$$

$$H(M_{ab}^{\alpha}) = \frac{b - a}{1 - p_\alpha} \, , \tag{4.3}$$

où[3])

$$p_\alpha = \liminf_{\substack{k \to \infty \\ k \text{ naturel}}} \left(\min\left(\alpha \, . \, 2^k - [\alpha \, . \, 2^k], \; [\alpha \, . \, 2^k] + 1 - \alpha \, . \, 2^k\right)\right) . \tag{4.4}$$

---

[3]) **r étant un nombre réel, $[r]$ signifie naturellement le nombre entier n tel que $n \leqq r < n + 1$.**

La démonstration du théorème 1 sera réalisée successivement dans les paragraphes suivants.

5. *Si α est un nombre réel, on a*

$$0 \leqq p_\alpha \leqq \tfrac{1}{3}. \tag{5.1}$$

Démonstration. A) Évidemment $\alpha . 2^k - [\alpha . 2^k] \geqq 0$, $[\alpha . 2^k] + 1 - \alpha . 2^k > > 0$, donc $p_\alpha \geqq 0$.

B) Si $\alpha . 2^k - [\alpha . 2^k] > \frac{1}{2}$ pour un certain k naturel, alors $[\alpha . 2^k] - \alpha . 2^k < -\frac{1}{2}$, et $[\alpha . 2^k] + 1 - \alpha . 2^k < \frac{1}{2}$. Donc

$$\min(\alpha . 2^k - [\alpha . 2^k], [\alpha . 2^k] + 1 - \alpha . 2^k) \leqq \tfrac{1}{2}$$

pour tout α réel et k naturel.

C) Si $\alpha . 2^k - [\alpha . 2^k] < \frac{1}{2}$, alors $\alpha . 2^{k+1} - 2 . [\alpha . 2^k] < 1$, et $[\alpha . 2^{k+1}] = = 2 . [\alpha . 2^k]$. Si encore $\alpha . 2^k - [\alpha . 2^k] > \frac{1}{3}$, on a $\alpha . 2^{k+1} - [\alpha . 2^{k+1}] = \alpha . 2^{k+1} - - 2 . [\alpha . 2^k] > \frac{2}{3}$; $[\alpha . 2^{k+1}] - \alpha . 2^{k+1} < - \frac{2}{3}$ et $[\alpha . 2^{k+1}] + 1 - \alpha . 2^{k+1} < \frac{1}{3}$.

D) Si $[\alpha . 2^k] + 1 - \alpha . 2^k < \frac{1}{2}$, alors $2 . [\alpha . 2^k] + 2 - \alpha . 2^{k+1} < 1$, et $2 . [\alpha . 2^k] + 1 < \alpha . 2^{k+1}$; mais parce que toujours $[\alpha . 2^k] + 1 > \alpha . 2^k$, on a $2. [\alpha . 2^k] + 2 > \alpha . 2^{k+1}$; donc $[\alpha . 2^{k+1}] = 2 . [\alpha . 2^k] + 1$. Si encore $[\alpha . 2^k] + + 1 - \alpha . 2^k > \frac{1}{3}$, alors $[\alpha . 2^{k+1}] - \alpha . 2^{k+1} = 2 . [\alpha . 2^k] + 1 - \alpha . 2^{k+1} > \frac{2}{3} - 1$, donc $\alpha . 2^{k+1} - [\alpha . 2^{k+1}] < \frac{1}{3}$.

E) Si $\alpha . 2^k - [\alpha . 2^k] = \frac{1}{2}$, alors $\alpha . 2^{k+1} - 2 . [\alpha . 2^k] = 1$, et $[\alpha . 2^{k+1}] = = 2 . [\alpha . 2^k] + 1$, d'où l'on déduit $\alpha . 2^{k+1} - [\alpha . 2^{k+1}] = 0 < \frac{1}{3}$.

F) On déduit de B)–E), que si pour un certain k naturel l'inégalité

$$\min(\alpha . 2^k - [\alpha . 2^k], [\alpha . 2^k] + 1 - \alpha . 2^k) > \tfrac{1}{3}$$

a lieu, alors

$$\min(\alpha . 2^{k+1} - [\alpha . 2^{k+1}], [\alpha . 2^{k+1}] + 1 - \alpha . 2^{k+1}) < \tfrac{1}{3}.$$

Alors d'après (4.4) on a $p_\alpha \leqq \frac{1}{3}$.

6. *L'égalité suivante est valable*

$$h(M^\alpha_{ab}) = b - a .$$

Démonstration. A) Si K est un carré fondamental, notons

$$\pi(K) = \{x \in \boldsymbol{R}\colon \text{il existe } y \in \boldsymbol{R} \text{ tel que } [x, y] \in K\} . \tag{6.1}$$

Alors $\pi(K)$ est un intervalle et sa longueur $|\pi(K)|$ est égale à la norme $|K|$. Si $\mathfrak{M}$ est un système dénombrable de carrés fondamentaux couvrant l'ensemble M^{α}_{ab}, alors $\langle a, b\rangle \subset \bigcup_{K\in\mathfrak{M}} \pi(K)$, et

(6.2) $$\sum_{K\in\mathfrak{M}} |K| = \sum_{K\in\mathfrak{M}} |\pi(K)| \geqq b - a\,,$$

donc on *a* $h_\varepsilon(M^{\alpha}_{ab}) \geqq b - a$ pour chaque $\varepsilon > 0$, d'où il résulte que $h(M^{\alpha}_{ab}) \geqq b - a$.

B) Par contre, ayant un nombre $\varepsilon > 0$, choisissons un nombre naturel n tel que $n \geqq (b - a)/\varepsilon$. Pour $i = 0, 1, \dots, n - 1$, définissons le carré

$$K_i = \left\{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2 : a + \frac{i}{n}(b - a) \leqq x \leqq a + \frac{i+1}{n}(b - a)\,,\right.$$
$$\left. a + \frac{i}{n}(b - a) + \alpha \leqq y \leqq a + \frac{i+1}{n}(b - a) + \alpha\right\}.$$

Nous avons

$$M^{\alpha}_{ab} \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} K_i\,, \quad |K_i| = (b - a)/n \leqq \varepsilon$$

et

$$\sum_{i=0}^{n-1} |K_i| = n \,.\, \frac{b - a}{n} = b - a\,.$$

Alors $h_\varepsilon(M^{\alpha}_{ab}) \leqq b - a$ a lieu pour tout $\varepsilon > 0$, donc aussi $h(M^{\alpha}_{ab}) \leqq b - a$.

7. *Pour* $m = 0, 1, 2, \dots$ *écrivons*

(7.1) $$Q_m(q) = \sum_{k=0}^{m} q^k\,.$$

Alors pour chaque m entier non-négatif on a

(7.2) $$H(M^{\alpha}_{ab}) \geqq Q_m(p_\alpha) \,.\, (b - a)\,.$$

Démonstration. A) Si $p_\alpha = 0$, alors $Q_m(p_\alpha) = 1$. Mais si le système $\mathfrak{M}$ de carrés fondamentaux (spécialement de carrés dyadics) couvre l'ensemble M^{α}_{ab}, nous avons (6.2), et dans ce cas pour chaque $\varepsilon > 0$ on a

$$H_\varepsilon(M^{\alpha}_{ab}) \geqq b - a = Q_m(p_\alpha) \,.\, (b - a)\,,$$

donc aussi

$$H(M^{\alpha}_{ab}) \geqq Q_m(p_\alpha) \,.\, (b - a)\,.$$

B) Soit $p_\alpha > 0$. Tout d'abord nous allons prouver

Lemme 1. *Pour chaque nombre q, $0 < q < p_\alpha$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que, $\mathfrak{M}$ étant un recouvrement arbitraire de l'ensemble M^α_{ab} formé des carrés dyadics avec $|\mathfrak{M}| \leqq \delta$, pour chaque $m \geqq 0$ entier on a*

$$\sum_{K\in\mathfrak{M}} |K| \geqq Q_m(q) \, . \, (b - a) \, . \tag{7.3}$$

Démonstration du lemme 1. Ayons un nombre α et un nombre q tel que $0 < q < p_\alpha$. D'après (4.4) il existe un nombre k_0 tel que l'on ait pour $k \geqq k_0$

$$\alpha \, . \, 2^k - [\alpha \, . \, 2^k] > q \, , \quad [\alpha \, . \, 2^k] + 1 - \alpha \, . \, 2^k > q \, . \tag{7.4}$$

Posons $\delta = 2^{-k_0}$. Si $|K| \leqq \delta$ pour un carré dyadic K défini par (1.2), alors $2^{-k} = |K| \leqq \delta = 2^{-k_0}$, donc $k \geqq k_0$, donc (7.4) a lieu. Nous allons prouver maintenant que pour ce δ le lemme 1 est valide pour tous les ensembles M^α_{ab}, $a < b$ étant arbitraires.

Nous effectuons la démonstration par l'induction d'après m. Nous avons $Q_0(q) = 1$. Mais pour un recouvrement arbitraire de l'ensemble M^α_{ab}, nous avons (6.2), dons aussi (7.3) pour $m = 0$. Alors pour $m = 0$ le lemme 1 est valable.

Supposons que la formule (7.3) est déjà prouvée pour $m = \mu - 1$ (μ naturel) pour tous les ensembles M^α_{ab} (pour notre α fixé, mais pour a, b arbitraires) et pour chaque recouvrement dyadic $\mathfrak{M}$ de l'ensemble M^α_{ab} tel que $|\mathfrak{M}| \leqq \delta$. Ayons maintenant un ensemble M^α_{ab} fixement donné et son recouvrement dyadic $\mathfrak{M}$ avec $|\mathfrak{M}| \leqq \delta$. Nous allons prouver la formule (7.3) pour ce recouvrement $\mathfrak{M}$ et pour $m = \mu$.

K étant un carré dyadic défini par (1.2), alors l'ensemble $\pi(K)$ défini par (6.1) est l'intervalle $\langle c \, . \, 2^{-k}, (c + 1) \, . \, 2^{-k} \rangle$. K, L étant des carrés dyadics avec $|K| \geqq |L|$, alors $\pi(L) \subset \pi(K)$ ou $\pi(L) \cap \pi(K)$ est vide ou contient un seul point.

Le recouvrement $\mathfrak{M}$ est dénombrable, car le nombre de tous les carrés dyadics est dénombrable. S'il existait un nombre $\eta > 0$ tel que $|K| \geqq \eta$ pour une infinité de carrés $K \in \mathfrak{M}$, on aurait $\sum_{K\in\mathfrak{M}} |K| = \infty$ et (7.3) aurait lieu. Donc, nous pouvons nous borner au cas où il n'existe pour chaque nombre $\eta > 0$ qu'un nombre fini de carrés $K \in \mathfrak{M}$ tels que $|K| \geqq \eta$.

Nous allons définir des systèmes $\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{M}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ et (pour certains i naturels) les carrés $L_i \in \mathfrak{M}$ de la façon suivante:

$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$;

$\mathfrak{N}_0$ soit l'ensemble des carrés $K \in \mathfrak{M}$, définis par la formule (1.2), pour lesquels on a

$$\frac{c + 1}{2^k} \leqq a \quad \text{ou} \quad \frac{c}{2^k} \geqq b \, ; \tag{7.5}$$

$\mathfrak{M}_j$, $\mathfrak{N}_j$ étant déjà définis pour tous $j < i$, nous allons poser

$$\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_{i-1} - \bigcup_{j=0}^{i-1} \mathfrak{N}_j \, ; \tag{7.6}$$

si maintenant $\mathfrak{M}_i = \emptyset$, posons aussi $\mathfrak{N}_i = \emptyset$; dans le cas contraire nous choisissons pour L_i un carré arbitraire de l'ensemble $\mathfrak{M}_i$ tel que $|L_i| \geqq |L|$ pour chaque $L \in \mathfrak{M}_i$ et $\mathfrak{N}_i$ sera l'ensemble de tous les carrés $L \in \mathfrak{M}_i$ tels que $\pi(L) \subset \pi(L_i)$.

Par le symbol λ nous désignerons le plus grand nombre i tel que L_i est défini ou ∞ dans le cas où L est défini pour chaque i. Nous avons

$$\bigcup_{i=0}^{\lambda} \mathfrak{N}_i = \mathfrak{M}. \tag{7.7}$$

Car si $L \in \mathfrak{M}$, il n'existe (dans le cas auquel nous nous bornons) qu'un nombre fini n de carrés $K \in \mathfrak{M}$ tels que $|K| \geqq |L|$. Alors si L n'a pas été choisi dans quelque $\mathfrak{N}_i$ pour $0 \leqq i \leqq n - 1$, on a dû choisir $L_n = L$, donc $L \in \mathfrak{N}_n$. Comme $\mathfrak{N}_i = \emptyset$ pour $i > \lambda$, (7.7) a lieu.

Si $K \in \mathfrak{M}$, désignons

$$\sigma(K) = \pi(K) \cap \langle a, b \rangle. \tag{7.8}$$

Pour $K \in \mathfrak{N}_i$ et $i > 0$, $\sigma(K)$ est toujours un intervalle. Nous désignerons par $|\sigma(K)|$ sa longueur. Si $x \in (a, b)$, il existe un nombre y tel que $[x, y] \in M^{\alpha}_{ab}$. Le point $[x, y]$ est couvert par un carré $K \in \mathfrak{M}$. D'ici on déduit $x \in \pi(K)$. D'après (7.5) on a $K \notin \mathfrak{N}_0$, alors d'après (7.7) on a $K \in \mathfrak{N}_i$ pour un $i > 0$. Mais d'ici on déduit $x \in \pi(L_i)$, $\pi(L_i) \supset \supset \pi(K)$. D'après (7.8) on a aussi $x \in \sigma(L_i)$. Alors $(a, b) \subset \bigcup_{i=1}^{\lambda} \sigma(L_i)$. De cela on obtient

$$\sum_{i=1}^{\lambda} |\sigma(L_i)| \geqq b - a. \tag{7.9}$$

Maintenant à partir de l'hypothèse d'induction que la formule (7.3) a lieu pour $m = \mu - 1$, nous alons prouver pour $i = 1, \ldots, \lambda$

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq Q_\mu(q) \, . \, |\sigma(L_i)|. \tag{7.10}$$

Pour la démonstration de (7.10), supposons que

$$L_i = \left\{[x, y] \in E_2 : \frac{c_i}{2^{k_i}} \leqq x \leqq \frac{c_i + 1}{2^{k_i}}, \quad \frac{d_i}{2^{k_i}} \leqq y \leqq \frac{d_i + 1}{2^{k_i}}\right\}. \tag{7.11}$$

D'après (7.5) nous avons $(c_i + 1)/2^{k_i} > a$, $c_i/2^{k_i} < b$, car $L_i \notin \mathfrak{N}_0$. Nous distinguerons deux cas:

a) Supposons d'abord que

$$\alpha \, . \, 2^{k_i} \geqq d_i - c_i. \tag{7.12}$$

Le nombre $d_i - c_i$ étant entier, on en déduit

$$[\alpha \, . \, 2^{k_i}] \geqq d_i - c_i,$$

donc

$$\alpha \,.\, 2^{k_i} - (d_i - c_i) \geqq \alpha \,.\, 2^{k_i} - [\alpha \,.\, 2^{k_i}]\,,$$

alors d'après (7.4) on obtient

$$\alpha \,.\, 2^{k_i} - (d_i - c_i) > q$$

ou bien

$$\frac{c_i}{2^{k_i}} + \alpha > \frac{d_i + q}{2^{k_i}}\,. \tag{7.13}$$

Notons

$$N = \left\{[x, y] \in E_2 : \frac{c_i + 1 - q}{2^{k_i}} < x < \frac{c_i + 1}{2^{k_i}}\,,\quad y = x + \alpha\right\}.$$

Si $x > (c_i + 1 - q)/2^{k_i}$ alors d'après (7.13) on a

$$y = x + \alpha > \frac{c_i}{2^{k_i}} + \alpha + \frac{1 - q}{2^{k_i}} > \frac{d_i + q}{2^{k_i}} + \frac{1 - q}{2^{k_i}} = \frac{d_i + 1}{2^{k_i}}\,,$$

et d'après (7.11) aucun point de l'ensemble N n'est placé dans le carré L_i.

(i) Si ni

$$a \in \left(\frac{c_i + 1 - q}{2^{k_i}}\,,\quad \frac{c_i + 1}{2^{k_i}}\right) \text{ ni } \; b \in \left(\frac{c_i}{2^{k_i}}\,,\quad \frac{c_i + 1}{2^{k_i}}\right)$$

n'a lieu, alors $N \subset M^{\alpha}_{ab}$, et N doit être couvert par les carrés de $\mathfrak{M}$. Mais N ne peut être couvert que par les carrés de $\mathfrak{N}_i$, car l'ensemble $\pi(K) \cap \pi(L_i)$ est pour $K \notin \mathfrak{N}_i$ vide ou contient un seul point, donc

$$\pi(K) \cap \left(\frac{c_i}{2^{k_i}}\,,\quad \frac{c_i + 1}{2^{k_i}}\right) = \emptyset\,,$$

et a fortiori

$$\pi(K) \cap \left(\frac{c_i + 1 - q}{2^{k_i}}\,,\quad \frac{c_i + 1}{2^{k_i}}\right) = \emptyset\,.$$

Alors l'ensemble N doit être couvert par les carrés du système $\mathfrak{N}_i - \{L_i\}$. D'après (7.3) et d'après la supposition d'induction, on a

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i - \{L_i\}} |K| \geqq Q_{\mu - 1}(q) \,.\, \frac{q}{2^{k_i}}\,.$$

Comme $|L_i| = 2^{-k_i}$, $|\sigma(L_i)| \leqq 2^{-k_i}$, on en déduit selon (7.1):

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq 2^{-k_i} + Q_{\mu - 1}(q) \,.\, q \,.\, 2^{-k_i} = Q_\mu(q) \,.\, 2^{-k_i} \geqq Q_\mu(q) \,.\, |\sigma(L_i)|\,,$$

ce qui est la formule (7.10).

(ii) Si $c_i/2^{k_i} < b \leqq (c_i + 1 - q)/2^{k_i}$, alors $|\sigma(L_i)| \leqq (1 - q)/2^{k_i}$; on a encore $\sum\limits_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq |L_i| = 2^{-k_i}$, d'où

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq \frac{1}{1 - q} \cdot |\sigma(L_i)| = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot |\sigma(L_i)| > Q_\mu(q) \cdot |\sigma(L_i)| ,$$

ce qui est de nouveau la formule (7.10).

(iii) Si $(c_i + 1 - q)/2^{k_i} < b < (c_i + 1)/2^{k_i}$, nous avons avant tout

$$|\sigma(L_i)| \leqq b - \frac{c_i}{2^{k_i}} < 2^{-k_i} . \tag{7.14}$$

Définissons dans ce cas l'ensemble

$$N' = \left\{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2 : \frac{c_i + 1 - q}{2^{k_i}} < x < b \,, \quad y = x + \alpha\right\} \subset N .$$

L'ensemble $N' \subset M^\alpha_{ab}$ doit être couvert par les carrés du système $\mathfrak{N}_i - \{L_i\}$. Alors d'après (7.3) et (7.1) et d'après la supposition d'induction on a

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i - \{L_i\}} |K| \geqq Q_{\mu-1}(q) \left(b - \frac{c_i + 1 - q}{2^{k_i}}\right) = \left(b - \frac{c_i}{2^{k_i}}\right) \sum_{j=0}^{\mu-1} q^j -$$

$$- \frac{1}{2^{k_i}} \cdot (1 - q) \cdot \sum_{j=0}^{\mu-1} q^j = \left(b - \frac{c_i}{2^{k_i}}\right) \sum_{j=0}^{\mu-1} q^j - \frac{1}{2^{k_i}} + \frac{1}{2^{k_i}} \cdot q^\mu ,$$

donc

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq \left(b - \frac{c_i}{2^{k_i}}\right) \sum_{j=0}^{\mu=1} q^j + \frac{1}{2^{k_i}} \cdot q^\mu ;$$

d'après (7.14) nous obtenons d'ici

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq |\sigma(L_i)| \cdot \sum_{j=0}^{\mu=1} q^j + |\sigma(L_i)| \cdot q^\mu = |\sigma(L_i)| \cdot \sum_{j=0}^{\mu} q^j ,$$

ce qui est de nouveau la formule (7.10).

(iv) Si enfin $b \notin (c_i/2^{k_i}, (c_i + 1)/2^{k_i})$, mais $(c_i + 1 - q)/2^{k_i} < a < (c_i + 1)/2^{k_i}$, alors

$$|\sigma(L_i)| = \frac{c_i + 1}{2^{k_i}} - a .$$

Si nous définissons

$$N' = \left\{[x, y] \in E_2 : a < x < \frac{c_i + 1}{2^{k_i}}, \quad y = x + \alpha\right\} \subset N ,$$

nous avons $N' \subset M^{\alpha}_{ab}$, et N' doit être couvert par les carrés du système $\mathfrak{N}_i - \{L_i\}$. Alors d'après (7.3) et d'après la supposition d'induction nous avons

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i - \{L_i\}} |K| \geqq Q_{\mu-1}(q) \left(\frac{c_i + 1}{2^{k_i}} - a\right) = Q_{\mu-1}(q) \cdot |\sigma(L_i)| ,$$

donc

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq |L_i| + Q_{\mu-1}(q) \cdot |\sigma(L_i)| \geqq |\sigma(L_i)| (1 + Q_{\mu-1}(q)) >$$

$$> |\sigma(L_i)| \cdot (q^{\mu} + Q_{\mu-1}(q)) = Q_{\mu}(q) \cdot |\sigma(L_i)| ,$$

ce qui est de nouveau la formule (7.10).

b) Maintenant nous allons examiner le cas où (7.12) n'est pas valable et alors

$$(7.15) \qquad \alpha \cdot 2^{k_i} < d_i - c_i .$$

Le nombre $d_i - c_i$ étant entier, on déduit de là que

$$[\alpha \cdot 2^{k_i}] + 1 \leqq d_i - c_i ,$$

alors

$$\alpha \cdot 2^{k_i} - (d_i - c_i) \leqq \alpha \cdot 2^{k_i} - ([\alpha \cdot 2^{k_i}] + 1) ,$$

et d'après (7.4) on a

$$\alpha \cdot 2^{k_i} - (d_i - c_i) < -q$$

ou bien

$$(7.16) \qquad \frac{c_i}{2^{k_i}} + \alpha < \frac{d_i - q}{2^{k_i}} .$$

Désignons

$$N = \left\{[x, y] \in E_2 : \frac{c_i}{2^{k_i}} < x < \frac{c_i + q}{2^{k_i}}, \quad y = x + \alpha\right\} .$$

Si $x < (c_i + q)/2^{k_i}$, alors d'après (7.16) on a

$$y = x + \alpha < \frac{c_i}{2^{k_i}} + \alpha + \frac{q}{2^{k_i}} < \frac{d_i - q}{2^{k_i}} + \frac{q}{2^{k_i}} = \frac{d_i}{2^{k_i}} ,$$

alors d'après (7.11) aucun point de l'ensemble N n'est placé dans le carré L_i.

(i) Si ni $a \in (c_i/2^{k_i}, (c_i + 1)/2^{k_i})$ ni $b \in (c_i/2^{k_i}, (c_i + q)/2^{k_i})$ n'a lieu, alors $N \subset M^{\alpha}_{ab}$, et N doit être couvert par les carrés de $\mathfrak{M}$. Mais N ne peut être couvert que par les carrés du système $\mathfrak{N}_i - \{L_i\}$. Alors d'après (7.3) et d'après la supposition d'induction, on a

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i - \{L_i\}} |K| \geqq Q_{\mu-1}(q) \cdot \frac{q}{2^{k_i}} .$$

Comme $|L_i| = 2^{-k_i}$, $|\sigma(L_i)| \leqq 2^{-k_i}$, on en déduit d'après (7.1):

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq \frac{1}{2^{k_i}} + Q_{\mu-1}(q) \cdot \frac{q}{2^{k_i}} = Q_\mu(q) \cdot \frac{1}{2^{k_i}} \geqq Q_\mu(q) \cdot |\sigma(L_i)| ,$$

ce qui est de nouveau la formule (7.10).

(ii) Si $(c_i + q)/2^{k_i} \leqq a < (c_i + 1)/2^{k_i}$, alors $|\sigma(L_i)| \leqq (1 - q)/2^{k_i}$; si de plus $\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq |L_i| = 2^{-k_i}$, alors

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq \frac{1}{1 - q} \cdot | \sigma(L_i)| = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot |\sigma(L_i)| > Q_\mu(q) \cdot |\sigma(L_i)| ,$$

ce qui est la formule (7.10) de nouveau.

(iii) Si $c_i/2^{k_i} < a < (c_i + q)/2^{k_i}$, on a avant tout

$$|\sigma(L_i)| \leqq \frac{c_i + 1}{2^{k_i}} - a < \frac{1}{2^{k_i}} . \tag{7.17}$$

Définissons dans ce cas l'ensemble

$$N' = \left\{ [x, y] \in E_2 : a < x < \frac{c_i + q}{2^{k_i}} , \quad y = x + \alpha \right\} \subset N .$$

L'ensemble $N' \subset M^\alpha_{ab}$ doit être couvert par les carrés du système $\mathfrak{N}_i - \{L_i\}$. Alors d'après (7.3) et (7.1) et d'après la supposition d'induction on a

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i - \{L_i\}} |K| \geqq Q_{\mu-1}(q) \cdot \left(\frac{c_i + q}{2^{k_i}} - a \right) = \left(\frac{c_i + 1}{2^{k_i}} - a \right) \cdot \sum_{j=0}^{\mu-1} q^j -$$

$$- \frac{1}{2^{k_i}} \cdot (1 - q) \cdot \sum_{j=0}^{\mu-1} q^j = \left(\frac{c_i + 1}{2^{k_i}} - a \right) \cdot \sum_{j=0}^{\mu-1} q^j - \frac{1}{2^{k_i}} + \frac{1}{2^{k_i}} q^\mu ,$$

donc

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq \left(\frac{c_i + 1}{2^{k_i}} - a \right) \cdot \sum_{j=0}^{\mu-1} q^j + \frac{1}{2^{k_i}} q^\mu ,$$

d'où selon (7.17) nous obtenons

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq |\sigma(L_i)| \cdot \sum_{j=0}^{\mu-1} q^j + |\sigma(L_i)| \, q^\mu = |\sigma(L_i)| \cdot \sum_{j=0}^{\mu} q^j ,$$

ce qui est la formule (7.10) de nouveau.

(iv) Si enfin $a \notin (c_i/2^{k_i}, (c_i + 1)/2^{k_i})$, mais $b \in (c_i/2^{k_i}, (c_i + q)/2^{k_i})$, alors $|\sigma(L_i)| = b - c_i/2^{k_i}$. Si nous définissons

$$N' = \left\{[x, y] \in E_2 : \frac{c_j}{2^{k_i}} < x < b, \quad y = x + \alpha\right\} \subset N,$$

nous avons $N' \subset M^{\alpha}_{ab}$, alors N' doit être couvert par les carrés du système $\mathfrak{N}_i - \{L_i\}$. Alors d'après (7.3) et d'après la supposition d'induction nous avons

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i - \{L_i\}} |K| \geqq Q_{\mu-1}(q)\left(b - \frac{c_i}{2^{k_i}}\right) = Q_{\mu-1}(q) \cdot |\sigma(L_i)|,$$

d'où

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K| \geqq |L_i| + Q_{\mu-1}(q) \cdot |\sigma(L_i)| \geqq |\sigma(L_i)| \cdot (1 + Q_{\mu-1}(q)) >$$
$$> |\sigma(L_i)| \cdot (q^{\mu} + Q_{\mu-1}(q)) = Q_{\mu}(q) \cdot |\sigma(L_i)|,$$

ce qui est de nouveau la formule (7.10).

Ainsi nous avons prouvé la formule (7.10) pour $1 \leqq i \leqq \lambda$ sous la supposition que la formule (7.3) a lieu pour $m = \mu - 1$. Maintenant par l'union de (7.10) et (7.9) nous allons obtenir

$$\sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| \geqq \sum_{i=1}^{\lambda} \cdot \left(\sum_{K \in \mathfrak{N}_i} |K|\right) \geqq \sum_{i=1}^{\lambda} Q_{\mu}(q) \cdot |\sigma(L_i)| \geqq Q_{\mu}(q)(b - a),$$

ce qui est la formule (7.3) pour $m = \mu$. Alors, le lemme 1 est prouvé par l'induction.

C) Du lemme 1 on déduit:

Si $0 < q < p_{\alpha}$ et m est un nombre entier non-négatif, alors

$$H(M^{\alpha}_{ab}) \geqq Q_m(q) \cdot (b - a).$$

D'ici nous allons obtenir

$$H(M^{\alpha}_{ab}) \geqq (b - a) \cdot \lim_{q \to p_{\alpha}^-} Q_m(q) = (b - a) \cdot Q_m(p_{\alpha}),$$

ce qui est la formule (7.2).

D) Comme $0 < p_{\alpha} < 1$, on obtient des formules (7.2) et (7.1):

(7.18) $$H(M^{\alpha}_{ab}) \geqq \lim_{m \to \infty} Q_m(p_{\alpha}) \cdot (b - a) = \frac{b - a}{1 - p_{\alpha}}.$$

8. Il reste à prouver l'inégalité

(8.1) $$H(M^{\alpha}_{ab}) \leqq \frac{b - a}{1 - p_{\alpha}}$$

La formule (8.1) résulte aisément de ce lemme:

Lemme 2. *Étant donné deux nombres $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, il existe un recouvrement $\mathfrak{M}$ de l'ensemble M_{ab}^{α}, formé de carrés dyadics et tel que*

$$|\mathfrak{M}| \leqq \delta\,, \tag{8.2}$$

$$\sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| \leqq \frac{b-a}{1-p_\alpha} + \varepsilon\,. \tag{8.3}$$

Démonstration du lemme 2. a) Compte tenu de (5.1), nous pouvons choisir un nombre q tel que

$$p_\alpha < q < \min\left(\frac{1}{2},\quad p_\alpha + \frac{\varepsilon}{16(b-a)}\right). \tag{8.4}$$

D'après (8.4) nous avons $1 - q > \frac{1}{2}$, $1 - p_\alpha > \frac{1}{2}$, $q - p_\alpha < \varepsilon/16(b-a)$ et nous obtenons

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1-p_\alpha}{(1-q)(1-p_\alpha)} = \frac{(1-q)+(q-p_\alpha)}{(1-q)(1-p_\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{1-p_\alpha} + \frac{q-p_\alpha}{(1-q)(1-p_\alpha)} < \frac{1}{1-p_\alpha} + 4(q-p_\alpha) < \frac{1}{1-p_\alpha} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}\,;$$

alors

$$\frac{b-a}{1-q} < \frac{b-a}{1-p_\alpha} + \tfrac{1}{4}\varepsilon\,. \tag{8.5}$$

B) Il résulte de (4.4) et (8.4) l'existence d'un nombre naturel k_1 avec

$$2^{-k_1} \leqq \delta\,, \tag{8.6}$$

$$2^{-k_1} \leqq \frac{\varepsilon(1-q)}{16} \tag{8.7}$$

et encore avec

$$\alpha \,.\, 2^{k_1} - [\alpha \,.\, 2^{k_1}] < q \tag{8.8}$$

ou avec

$$[\alpha \,.\, 2^{k_1}] + 1 - \alpha \,.\, 2^{k_1} < q\,. \tag{8.9}$$

Pour $i = 1, 2, \ldots, N_1 = [b \,.\, 2^{k_1}] - [a \,.\, 2^{k_1}] + 1$, définissons les carrés dyadics

$$K_i^1 = \left\{[x, y] \in E_2 : \frac{c_i}{2^{k_1}} \leqq x \leqq \frac{c_i + 1}{2^{k_1}}\,,\quad \frac{d_i}{2^{k_1}} \leqq y \leqq \frac{d_i + 1}{2^{k_1}}\right\},$$

où

$$c_i = [a \,.\, 2^{k_1}] + i - 1$$

et

$$d_i = c_i + [\alpha \,.\, 2^{k_1}] ,$$

si (8.8) a lieu, ou

$$d_i = c_i + [\alpha \,.\, 2^{k_1}] + 1 ,$$

si (8.8) n'a pas lieu (et alors (8.9) a lieu).

De la définition des nombres c_i, il résulte

$$\frac{c_1}{2^{k_1}} = \frac{[a \,.\, 2^{k_1}]}{2^{k_1}} \leqq \frac{a \,.\, 2^{k_1}}{2^{k_1}} = a , \quad \frac{c_1 + 1}{2^{k_1}} = \frac{[a \,.\, 2^{k_1}] + 1}{2^{k_1}} > \frac{a \,.\, 2^{k_1}}{2^{k_1}} = a ,$$

$$\frac{c_{N_1}}{2^{k_1}} = \frac{[b \,.\, 2^{k_1}]}{2^{k_1}} \leqq b , \quad \frac{c_{N_1} + 1}{2^{k_1}} = \frac{[b \,.\, 2^{k_1}] + 1}{2^{k_1}} > b .$$

Nous avons donc les inégalités

$$(8.10) \qquad \frac{c_1}{2^{k_1}} \leqq a < \frac{c_1 + 1}{2^{k_1}} = \frac{c_2}{2^{k_1}} < \frac{c_2 + 1}{2^{k_1}} = \frac{c_3}{2^{k_1}} < \dots$$

$$\dots < \frac{c_{N_1 - 1} + 1}{2^{k_1}} = \frac{c_{N_1}}{2^{k_1}} \leqq b < \frac{c_{N_1} + 1}{2^{k_1}} .$$

On en déduit que

$$\sum_{i=1}^{N_1} |K_i^1| = \frac{c_{N_1} + 1}{2^{k_1}} - \frac{c_1}{2^{k_1}} \leqq b - a + \frac{2}{2^{k_1}} ,$$

alors compte tenu de (8.7) nous avons

$$(8.11) \qquad \frac{N_1}{2^{k_1}} = \sum_{i=1}^{N_1} |K_i^1| \leqq b - a + \frac{\varepsilon(1 - q)}{8} .$$

D'après (8.6) on a encore

$$(8.12) \qquad K_i^1 = 2^{-k} = \delta \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, N_1 .$$

Soit $[x, y] \in M_{ab}^{\alpha}$. Alors $a < x < b$ et d'après (8.10) il existe un i $(1 \leqq i \leqq N_1)$ tel que

$$\frac{c_i}{2^{k_1}} \leqq x \leqq \frac{c_i + 1}{2^{k_1}} .$$

Distinguons maintenant deux cas:

a) Soit (8.8) valable. Si maintenant $c_i \,.\, 2^{-k_1} \leqq x \leqq (c_i + 1 - q) \,.\, 2^{-k_1}$, alors $x + \alpha \geqq c_i \,.\, 2^{-k_1} + \alpha = 2^{-k_1}(c_i + \alpha \,.\, 2^{k_1}) \geqq 2^{-k_1}(c_i + [\alpha \,.\, 2^{k_1}]) = d_i \,.\, 2^{-k_1}$; ensuite $x + \alpha \leqq 2^{-k_1}(c_i + 1 - q) + \alpha = 2^{-k_1}(c_i + 1 - q + \alpha \,.\, 2^{k_1}) < 2^{-k_1}(c_i + 1 + [\alpha \,.\, 2^{k_1}]) = 2^{-k_1}(d_i + 1)$; alors les points $[x, y] \in M_{ab}^{\alpha}$, pour lesquels $c_i \,.\, 2^{-k_1} \leqq x \leqq (c_i + 1 - q) \,.\, 2^{-k_1}$, sont situés dans le carré K_i^1. Alors les points non couverts par les carrés K_i^1 ne peuvent être que les points de l'ensemble M_{ab}^{α} contenus dans les ensembles

$$(8.13) \qquad L_i^1 = \{[x, y] \in E_2 : a_i^{(1)} < x < b_i^{(1)},\ y = x + \alpha\}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, N_1\,,$$

où

$$a_i^{(1)} = \frac{c_i + 1 - q}{2^{k_1}}\,, \quad b_i^{(1)} = \frac{c_i + 1}{2^{k_1}}\,.$$

Il y a N_1 des ensembles L_i^1 et pour chacun d'eux on trouve

$$(8.14) \qquad b_i^{(1)} - a_i^{(1)} \leqq q \,.\, 2^{-k_1}\,, \quad i = 1, \ldots, N_1\,.$$

b) Supposons (8.9) valable. Si maintenant $(c_i + q) \,.\, 2^{-k_1} \leqq x \leqq (c_i + 1) \,.\, 2^{-k_1}$, alors $x + \alpha \geqq 2^{-k_1}(c_i + q) + \alpha = 2^{-k_1}(c_i + q + \alpha \,.\, 2^{k_1}) > 2^{-k_1}(c_i + [\alpha \,.\, 2^{k_1}] + 1) = 2^{-k_1} \,.\, d_i$; ensuite $x + \alpha \leqq 2^{-k_1}(c_i + 1) + \alpha = 2^{-k_1}(c_i + 1 + \alpha \,.\, 2^{k_1}) \leqq 2^{-k_1}(c_i + [\alpha \,.\, 2^{k_1}] + 2) = 2^{-k_1}(d_i + 1)$; alors les points $[x, y] \in M_{ab}^{\alpha}$, pour lesquels $2^{-k_1}(c_i + q) \leqq x \leqq 2^{-k_1}(c_i + 1)$, sont situés dans le carré K_i^1. Alors les points non couverts par les carrés K_i^1 ne peuvent être que les points de l'ensemble M_{ab}^{α} contenus dans les ensembles (8.13), où

$$a_i^{(1)} = \frac{c_i}{2^{k_1}}\,, \quad b_i^{(1)} = \frac{c_i + q}{2^{k_1}}\,.$$

Il y a N_1 des ensembles L_i^1 et pour chacun d'eux (8.14) a lieu.

C) Maintenant pour chaque nombre naturel m formulons cette

Affirmation $\boldsymbol{A}(m)$. *Pour chaque $j = 1, 2, \ldots, m$, un système de carrés dyadics $K_1^j, K_2^j, \ldots, K_{N_j}^j$ est défini. Les ensembles $L_1^m, L_2^m, \ldots, L_{N_m}^m$,*

$$(8.15) \qquad L_i^m = \{[x, y] \in E_2 : a_i^{(m)} \leqq x \leqq b_i^{(m)},\ y = x + \alpha\}\,, \quad i = 1, \ldots, N_m\,,$$

existent, tels que

$$(8.16) \qquad M_{ab}^{\alpha} - \bigcup_{i=1}^{N_m} L_i^m \subset \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{N_j} K_i^j\,.$$

Ensuite on a

(8.17) $$|K_i^j| = 2^{-k_j} \leqq \delta \quad pour \quad i = 1, \ldots, N_j\,, \quad j = 1, \ldots, m\,;$$

(8.18) $$\sum_{i=1}^{N_j} |K_i^j| = N_j \,.\, 2^{-k_j} \leqq q^{j-1}(b-a) + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1-q)\sum_{\iota=1}^{j} q^{j-\iota} \,.\, 2^{1-\iota}$$

$$pour \quad j = 1, \ldots, m\,;$$

(8.19) $$b_i^{(m)} - a_i^{(m)} \leqq q \,.\, 2^{-k_m}\,.$$

Démonstration des affirmations $\boldsymbol{A}(m)$. En B) on a prouvé que nous pouvons définir des carrés dyadics $K_1^1, \ldots, K_{N_1}^1$ tels que l'on ait $\boldsymbol{A}(1)$ (voir (8.12), (8.11) et (8.14)). Supposons maintenant que $\boldsymbol{A}(m)$ vaille pour quelque m naturel. Sous cette supposition nous construirons des carrés dyadics $K_1^{m+1}, \ldots, K_{N_{m+1}}^{m+1}$ tels que $\boldsymbol{A}(m+1)$ sera vraie. Par cela, $\boldsymbol{A}(m)$ sera prouvée pour chaque m naturel.

D'après (4.4) et (8.4), il existe un nombre naturel k_{m+1} tel que $2^{-k_{m+1}} \leqq \delta$, et que

(8.20) $$\frac{1}{2^{k_{m+1}}} \leqq \frac{\varepsilon \,.\, (1-q)}{16 \,.\, N_m \,.\, 2^m}$$

et ou bien

(8.21) $$\alpha \,.\, 2^{k_{m+1}} - [\alpha \,.\, 2^{k_{m+1}}] < q$$

ou bien

(8.22) $$[\alpha \,.\, 2^{k_{m+1}}] + 1 - \alpha \,.\, 2^{k_{m+1}} < q\,.$$

Choisissons un tel k_{m+1}. Pour chaque ensemble $L_i^{(m)}$ définissons v_i carrés dyadics

(8.23) $$K_{i,l}^{m+1} = \left\{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2 : \frac{c_{i,l}}{2^{k_{m+1}}} \leqq x \leqq \frac{c_{i,l}+1}{2^{k_{m+1}}}\,, \quad \frac{d_{i,l}}{2^{k_{m+1}}} \leqq y \leqq \frac{d_{i,l}+1}{2^{k_{m+1}}}\right\};$$

$$l = 1, 2, \ldots, v_i = [b_i^{(m)} \,.\, 2^{k_{m+1}}] - [a_i^{(m)} \,.\, 2^{k_{m+1}}] + 1\,;$$

où

$$c_{i,l} = [a_i^{(m)} \,.\, 2^{k_{m+1}}] + i - 1$$

et

(8.24) $\quad d_{i,l} = c_{i,l} + [\alpha \,.\, 2^{k_{m+1}}]\,, \quad$ si (8.21) a lieu,

(8.25) $\quad d_{i,l} = c_{i,l} + [\alpha \,.\, 2^{k_{m+1}}] + 1\,, \quad$ si (8.21) n'a pas lieu (et alors (8.22) a lieu).

De la définition des nombres $c_{i,l}$ on déduit

$$\frac{c_{i,1}}{2^{k_{m+1}}} = \frac{[a_i^{(m)} \,.\, 2^{k_{m+1}}]}{2^{k_{m+1}}} \leqq \frac{a_i^{(m)} \,.\, 2^{k_{m+1}}}{2^{k_{m+1}}} = a_i^{(m)}\,,$$

$$\frac{c_{i,1}+1}{2^{k_{m+1}}} = \frac{[a_i^{(m)} \cdot 2^{k_{m+1}}]+1}{2^{k_{m+1}}} > \frac{a_i^{(m)} \cdot 2^{k_{m+1}}}{2^{k_{m+1}}} = a_i^{(m)},$$

$$\frac{c_{i,v_i}}{2^{k_{m+1}}} = \frac{[b_i^{(m)} \cdot 2^{k_{m+1}}]}{2^{k_{m+1}}} \leqq b_i^{(m)},$$

$$\frac{c_{i,v_i}+1}{2^{k_{m+1}}} = \frac{[b_i^{(m)} \cdot 2^{k_{m+1}}]+1}{2^{k_{m+1}}} > b_i^{(m)}.$$

Nous avons donc les inégalités

(8.26) $$\frac{c_{i,1}}{2^{k_{m+1}}} \leqq a_i^{(m)} < \frac{c_{i,1}+1}{2^{k_{m+1}}} = \frac{c_{i,2}}{2^{k_{m+1}}} < \frac{c_{i,2}+1}{2^{k_{m+1}}} = \frac{c_{i,3}}{2^{k_{m+1}}} < \dots$$

$$\dots < \frac{c_{i,v_i-1}+1}{2^{k_{m+1}}} = \frac{c_{i,v_i}}{2^{k_{m+1}}} \leqq b_i^{(m)} < \frac{c_{i,v_i}+1}{2^{k_{m+1}}}.$$

D'ici on déduit que

$$\sum_{l=1}^{v_i} |K_{i,l}^{m+1}| = \frac{c_{i,v_i}+1}{2^{k_{m+1}}} - \frac{c_{i,1}}{2^{k_{m+1}}} \leqq b_i^{(m)} - a_i^{(m)} + \frac{2}{2^{k_{m+1}}},$$

d'où compte tenu de (8.19) et (8.20) nous obtenons

(8.27) $$\sum_{l=1}^{v_i} |K_{i,l}^{m+1}| = \frac{v_i}{2^{k_{m+1}}} \leqq \frac{q}{2^{k_m}} + \frac{\varepsilon(1-q)}{8 \cdot N_m \cdot 2^m}.$$

Soit $[x, y] \in L_i^m$. Alors $a_i^{(m)} < x < b_i^{(m)}$ et d'après (8.26) il existe un $l(1 \leqq l \leqq v_i)$ tel que

$$\frac{c_{i,l}}{2^{k_{m+1}}} \leqq x \leqq \frac{c_{i,l}+1}{2^{k_{m+1}}}.$$

Distinguons maintenant deux cas:

a) Soit (8.21), donc aussi (8.24) valable. Si maintenant $c_{i,l} \cdot 2^{-k_{m+1}} \leqq x \leqq \leqq (c_{i,l} + 1 - q) \cdot 2^{-k_{m+1}}$, alors $x + \alpha \geqq c_{i,l} \cdot 2^{-k_{m+1}} + \alpha = 2^{-k_{m+1}}(c_{i,l} + + \alpha \cdot 2^{k_{m+1}}) \geqq 2^{-k_{m+1}}(c_{i,l} + [\alpha \cdot 2^{k_{m+1}}]) = d_{i,l} \cdot 2^{-k_{m+1}}$; ensuite $x + \alpha \leqq \leqq 2^{-k_{m+1}}(c_{i,l} + 1 - q) + \alpha = 2^{-k_{m+1}}(c_{i,l} + 1 - q + \alpha \cdot 2^{k_{m+1}}) < 2^{-k_{m+1}}(c_{i,l} + 1 + + [\alpha \cdot 2^{k_{m+1}}]) = 2^{-k_{m+1}}(d_{i,l} + 1)$; alors les points $[x, y] \in L_i^m$, pour lesquels $c_{i,l} \cdot 2^{-k_{m+1}} \leqq x \leqq (c_{i,l} + 1 - q) \cdot 2^{-k_{m+1}}$, sont situés d'après (8.23) dans le carré $K_{i,l}^{m+1}$. Alors les points non couverts par les carrés $K_{i,l}^{m+1}$ ne peuvent être que les points des ensembles L_i^m contenus dans les ensembles

$$(8.28) \qquad L_{i,l}^{m+1} = \{[x, y] \in E_2 : a_{i,l}^{(m+1)} \leqq x \leqq b_{i,l}^{(m+1)}, \quad y = x + \alpha\},$$

$$l = 1, 2, \ldots, v_i,$$

où

$$(8.29) \qquad a_{i,l}^{(m+1)} = \frac{c_{i,l} + 1 - q}{2^{k_{m+1}}}, \quad b_{i,l}^{m+1} = \frac{c_{i,l} + 1}{2^{k_{m+1}}}.$$

Le nombre des ensembles $L_{i,l}^{m+1}$ est v_i pour i fixe et pour chacun d'eux on a

$$(8.30) \qquad b_{i,l}^{(m+1)} - a_{i,l}^{(m+1)} \leqq q \,.\, 2^{-k_{m+1}}; \quad l = 1, \ldots, v_i; \quad i = 1, \ldots, N_m.$$

b) Si (8.21) n'a pas lieu, alors (8.22) et (8.25) ont lieu. Si dans ce cas $(c_{i,l} + q) \,.\, 2^{-k_{m+1}} \leqq x \leqq (c_{i,l} + 1) \,.\, 2^{-k_{m+1}}$, alors $x + \alpha \geqq (c_{i,l} + q) \,.\, 2^{-k_{m+1}} + \alpha = 2^{-k_{m+1}}(c_{i,l} + q + \alpha \,.\, 2^{k_{m+1}}) > 2^{-k_{m+1}}(c_{i,l} + [\alpha \,.\, 2^{k_{m+1}}] + 1) = d_{i,l} \,.\, 2^{-k_{m+1}}$; ensuite $x + \alpha \leqq (c_{i,l} + 1) \,.\, 2^{-k_{m+1}} + \alpha = 2^{-k_{m+1}}(c_{i,l} + 1 + \alpha \,.\, 2^{k_{m+1}}) < 2^{-k_{m+1}}(c_{i,l} + [\alpha \,.\, 2^{k_{m+1}}] + 2) = (d_{i,l} + 1) \,.\, 2^{-k_{m+1}}$; alors les points $[x, y] \in L_i^m$, pour lesquels $(c_{i,l} + q) \,.\, 2^{-k_{m+1}} \leqq x \leqq (c_{i,l} + 1) \,.\, 2^{-k_{m+1}}$, sont situés d'après (8.23) dans le carré $K_{i,l}^{m+1}$. Alors les points non couverts par les carrés $K_{i,l}^{m+1}$ ne peuvent être que les points des ensembles L_i^m contenus dans les ensembles (8.28), où

$$(8.31) \qquad a_{i,l}^{m+1} = \frac{c_{i,l}}{2^{k_{m+1}}}, \quad b_{i,l}^{m+1} = \frac{c_{i,l} + q}{2^{k_{m+1}}}.$$

Le nombre des ensembles $L_{i,l}^{m+1}$ est v_i pour i fixe et pour chacun d'eux on a (8.30).

Posons maintenant $N_{m+1} = \sum_{i=1}^{N_m} v_i$ et changeons le numérotage des carrés $K_{i,l}^{m+1}$ en posant

$$K_1^{m+1} = K_{1,1}^{m+1}, \quad K_2^{m+1} = K_{1,2}^{m+1}, \ldots, K_{v_1}^{m+1} = K_{1,v_1}^{m+1},$$

$$K_{v_1+1}^{m+1} = K_{2,1}^{m+1}, \ldots, K_{v_1+v_2}^{m+1} = K_{2,v_2}^{m+1}, \quad K_{N_{m+1}-1}^{m+1} = K_{N_m,v_{N_m}-1}^{m+1}, \quad K_{N_{m+1}}^{m+1} = K_{N_m,v_{N_m}}^{m+1}.$$

De la manière analogue nous allons désigner des ensembles

$$L_1^{m+1} = L_{1,1}^{m+1}, \quad L_2^{m+1} = L_{1,2}^{m+1}, \ldots, L_{N_{m+1}}^{m+1} = L_{N_m,v_{N_m}}^{m+1}$$

et les nombres

$$a_1^{(m+1)} = a_{1,1}^{(m+1)}, \ldots, a_{N_{m+1}}^{(m+1)} = a_{N_m,v_{N_m}}^{(m+1)},$$

$$b_1^{(m+1)} = b_{1,1}^{(m+1)}, \ldots, b_{N_{m+1}}^{(m+1)} = b_{N_m,v_{N_m}}^{(m+1)}.$$

D'après la construction des carrés K_i^{m+1} et des ansembles L_i^{m+1} (8.16) a lieu aussi, si nous y écrivons $m + 1$ au lieu de m. D'après (8.23) et d'après le choix du nombre k_{m+1}, (8.17) a lieu aussi pour $j = m + 1$.

De (8.27) il résulte

$$\sum_{i=1}^{N_{m+1}} |K_i^{m+1}| = \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{\gamma_i} |K_{i,l}^{m+1}| = \sum_{i=1}^{N_m} \frac{v_i}{2^{k_{m+1}}} = \frac{N_{m+1}}{2^{k_{m+1}}} \leqq \frac{N_m}{2^{k_m}} \cdot q + \frac{\varepsilon(1-q)}{8 \cdot 2^m}.$$

Si nous appliquons maintenant (8.18) pour $j = m$, nous obtenons d'ici

$$\sum_{i=1}^{N_{m+1}} |K_i^{m+1}| \leqq q(q^{m-1}(b-a) + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1-q)\sum_{\iota=1}^{m} q^{m-\iota} \cdot 2^{1-\iota}) +$$

$$+ \frac{\varepsilon(1-q)}{8 \cdot 2^m} = q^m(b-a) + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1-q)\sum_{\iota=1}^{m} q^{m+1-\iota} \cdot 2^{1-\iota} + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1-q) \cdot 2^{-m},$$

ce qui est la formule (8.18) pour $j = m + 1$.

Enfin, de (8.30) on déduit (8.19) avec $m + 1$ au lieu de m. Nous avons donc prouvé l'affirmation $\boldsymbol{A}(m + 1)$.

D) D'après (8.18) nous avons

$$\frac{N_j}{2^{k_j}} \leqq q^{j-1}\left((b-a) + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1-q)\sum_{\iota=1}^{j} \frac{1}{(2q)^{\iota-1}}\right) =$$

$$= q^{j-1}\left(b - a + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1-q) \cdot \frac{1-(2q)^j}{1-2q}\right).$$

D'après (8.4) on a $0 < 2q < 1$; il en découle

$$\lim_{j\to\infty} N_j \cdot 2^{-k_j} = 0.$$

Choisissons un nombre naturel λ tel que

(8.32) $$N_\lambda \cdot 2^{-k_\lambda} \leqq \varepsilon.$$

De (8.16) il résulte

(8.33) $$M_{ab}^{\alpha} - \bigcup_{i=1}^{N_\lambda} L_i^\lambda \subset \bigcup_{j=1}^{\lambda} \bigcup_{i=1}^{N_j} K_i^j.$$

Le carré K_i^λ soit donné par

$$K_i^\lambda = \{[x, y] \in E_2 : \gamma_i \cdot 2^{-k_\lambda} \leqq x \leqq (\gamma_i + 1) \cdot 2^{-k_\lambda},$$

$$\delta_i \cdot 2^{-k_\lambda} \leqq y \leqq (\delta_i + 1) \cdot 2^{-k_\lambda}\}.$$

a) Si $\alpha \cdot 2^{k_\lambda} - [\alpha \cdot 2^{k_\lambda}] < q$, alors d'après (8.23), (8.28) et (8.29) on a

$$L_i^\lambda = \left\{[x, y] \in E_2 : \frac{\gamma_i + 1 - q}{2^{k_\lambda}} \leqq x \leqq \frac{\gamma_i + 1}{2^{k_\lambda}}, \quad y = x + \alpha\right\}.$$

D'après (8.24) nous avons dans ce cas encore

$$\delta_i = \gamma_i + [\alpha . 2^{k_\lambda}] .$$

Définissons dans ce cas pour $i = 1, \ldots, N_\lambda$ des carrés

$$\bar{K}_i = \{[x, y] \in E_2 : (\gamma_i + \tfrac{1}{2}) . 2^{-k_\lambda} \leqq x \leqq (\gamma_i + 1) . 2^{-k_\lambda} ,$$
$$(\delta_i + 1) . 2^{-k_\lambda} \leqq y \leqq (\delta_i + \tfrac{3}{2}) . 2^{-k_\lambda}\} .$$

Si maintenant $[x, y] \in L_i^\lambda$, alors

$$x \in \left\langle \frac{\gamma_i + 1 - q}{2^{k_\lambda}} , \frac{\gamma_i + 1}{2^{k_\lambda}} \right\rangle \subset \left\langle \frac{\gamma_i + \frac{1}{2}}{2^{k_\lambda}} , \frac{\gamma_i + 1}{2^{k_\lambda}} \right\rangle .$$

Ensuite

$$y = x + \alpha \geqq \frac{\gamma_i + 1 - q}{2^{k_\lambda}} + \alpha = 2^{-k_\lambda}(\gamma_i + 1 - q + \alpha . 2^{k_\lambda}) \geqq$$

$$\geqq 2^{-k_\lambda}(\gamma_i + 1 - q + [\alpha . 2^{k_\lambda}]) = 2^{-k_\lambda}(\delta_i + 1 - q) > \delta_i . 2^{-k_\lambda} ;$$

$$y = x + \alpha < (\gamma_i + 1) . 2^{-k_\lambda} + \alpha = 2^{-k_\lambda}(\gamma_i + 1 + \alpha . 2^{k_\lambda}) <$$

$$< 2^{-k_\lambda}(\gamma_i + 1 + [\alpha . 2^{k_\lambda}] + q) = 2^{-k_\lambda}(\delta_i + 1 + q) < (\delta_i + \tfrac{3}{2}) . 2^{-k_\lambda} .$$

Il en découle que $[x, y] \in K_i^\lambda$ ou $[x, y] \in \bar{K}_i$.

b) Si l'on n'a pas $\alpha . 2^{k_\lambda} - [\alpha . 2^{k_\lambda}] < q$, alors $[\alpha . 2^{k_\lambda}] + 1 - \alpha . 2^{k_\lambda} < q$ a lieu; d'après (8.23), (8.28) et (8.31) on a

$$L_i^\lambda = \{[x, y] \in E_2 : \gamma_i . 2^{-k_\lambda} \leqq x \leqq (\gamma_i + q) . 2^{-k_\lambda}, \ y = x + \alpha\}$$

et d'après (8.25) on a

$$\delta_i = \gamma_i + [\alpha . 2^{k_\lambda}] + 1 .$$

Définissons dans ce cas pour $i = 1, \ldots, N_\lambda$ des carrés

$$\bar{K}_i = \{[x, y] \in E_2 : \gamma_i . 2^{-k_\lambda} \leqq x \leqq (\gamma_i + \tfrac{1}{2}) . 2^{-k_\lambda} , (\delta_i - \tfrac{1}{2}) . 2^{-k_\lambda} \leqq y \leqq \delta_i . 2^{-k_\lambda}\} .$$

Si maintenant $[x, y] \in L_i^\lambda$, alors

$$x \in \left\langle \frac{\gamma_i}{2^{k_\lambda}} , \frac{\gamma_i + q}{2^{k_\lambda}} \right\rangle \subset \left\langle \frac{\gamma_i}{2^{k_\lambda}} , \frac{\gamma_i + \frac{1}{2}}{2^{k_\lambda}} \right\rangle .$$

Ensuite

$$y = x + \alpha \leqq (\gamma_i + q) . 2^{-k_\lambda} + \alpha = 2^{-k_\lambda}(\gamma_i + q + \alpha . 2^{k_\lambda}) <$$

$$< 2^{-k_\lambda}(\gamma_i + q + [\alpha . 2^{k_\lambda}] + 1) = 2^{-k_\lambda}(\delta_i + q) < (\delta_i + 1) . 2^{-k_\lambda} ;$$

$$y = x + \alpha \geqq \gamma_i \,.\, 2^{-k_\lambda} + \alpha = 2^{-k_\lambda}(\gamma_i + \alpha \,.\, 2^{k_\lambda}) >$$

$$> 2^{-k_\lambda}(\gamma_i + [\alpha \,.\, 2^{k_\lambda}] + 1 - q) = 2^{-k_\lambda}(\delta_i - q) > (\delta_i - \tfrac{1}{2}) \,.\, 2^{-k_\lambda} \,.$$

Il en découle que $[x, y] \in K_i^\lambda$ ou $[x, y] \in \bar{K}_i$.

Alors, dans les deux cas, nous avons

$$L_i^\lambda \subset K_i^\lambda \cup \bar{K}_i \,. \tag{8.34}$$

Puis d'après la définition des carrés $\bar{K}_i$ et selon (8.17) on a

$$|\bar{K}_i| = \tfrac{1}{2} \,.\, 2^{-k_\lambda} < \delta \,, \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, N_\lambda \,, \tag{8.35}$$

et d'après (8.32) on obtient

$$\sum_{i=1}^{N_\lambda} |\bar{K}_i| = N_\lambda \,.\, \tfrac{1}{2} \,.\, 2^{-k_\lambda} \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon \,. \tag{8.36}$$

Pour le système $\mathfrak{M}$ nous allons choisir maintenant l'ensemble des carrés

$$K_1^1, \ldots, K_{N_1}^1, K_1^2, \ldots, K_{N_2}^2, \ldots, K_1^\lambda, \ldots, K_{N_\lambda}^\lambda, \bar{K}_1, \ldots, \bar{K}_{N_\lambda} \,.$$

Il résulte de (8.33) et (8.34) que $\mathfrak{M}$ est un recouvrement de l'ensemble M_{ab}^α. D'après (8.17) et (8.35), on a (8.2). Enfin, d'après (8.18), (8.36), (8.4) a (8.5) nous obtenons

$$\sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| = \sum_{j=1}^{\lambda} \sum_{i=1}^{N_j} |K_i^j| + \sum_{i=1}^{N_\lambda} |\bar{K}_i| \leqq \sum_{j=1}^{\lambda} q^{j-1}(b - a) + \sum_{j=1}^{\lambda} \tfrac{1}{8}\varepsilon \,.$$

$$. (1 - q) \sum_{\iota=1}^{j} q^{j-\iota} \,.\, 2^{1-\iota} + \tfrac{1}{2}\varepsilon < (b - a) \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1 - q) \sum_{\iota=1}^{\lambda} \sum_{j=\iota}^{\lambda} q^{j-\iota} \,.$$

$$. 2^{j-\iota} + \tfrac{1}{2}\varepsilon < \frac{b - a}{1 - q} + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1 - q) \sum_{\iota=1}^{\infty} \sum_{j=\iota}^{\infty} q^{j-\iota} \,.\, 2^{1-\iota} + \tfrac{1}{2}\varepsilon <$$

$$< \frac{b - a}{1 - p_\alpha} + \tfrac{1}{4}\varepsilon + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1 - q) \sum_{\iota=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\iota-1}} \,.\, \frac{1}{1 - q} + \tfrac{1}{2}\varepsilon =$$

$$= \frac{b - a}{1 - p_\alpha} + \tfrac{1}{4}\varepsilon + \tfrac{1}{8}\varepsilon(1 - q) \,.\, \frac{2}{1 - q} + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{b - a}{1 - p_\alpha} + \varepsilon \,,$$

alors (8.3) est aussi valable. Donc le lemme 2 (et alors aussi la formule (8.1)) est démontré.

9. a) Soit α un nombre rationnel de la forme $\alpha = r \,.\, 2^{-l}$, où l est un entier non-négatif, r entier. Alors on a $\alpha \,.\, 2^k - [\alpha \,.\, 2^k] = 0$ pour $k \geqq l$, donc $p_\alpha = 0$ a lieu d'après (4.4) et d'après (4.2) et (4.3) on a

$$h(M_{ab}^\alpha) = H(M_{ab}^\alpha) \,.$$

b) Soit α un nombre rationnel, mais pas de la forme $\alpha = r \,.\, 2^{-l}$ avec r, l entiers. Alors (voir [8], chap. V, § 22, page 218)

$$\alpha = \frac{r}{2^l} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s}{2^{l+ij}},$$

où r, s sont entiers, l entier non-négatif, j naturel et $0 < s < 2^j$. On en déduit

$$\alpha \,.\, 2^k - [\alpha \,.\, 2^k] = \alpha \,.\, 2^{k+j} - [\alpha \,.\, 2^{k+j}] > 0\,,$$

$$[\alpha \,.\, 2^k] + 1 - \alpha \,.\, 2^k = [\alpha \,.\, 2^{k+j}] + 1 - \alpha \,.\, 2^{k+j} > 0$$

pour $k \geqq l$, d'où d'après (4.4) il découle

$$p_\alpha = \min_{0 \leqq k < j} (\min (\alpha \,.\, 2^{l+k} - [\alpha \,.\, 2^{l+k}],\ [\alpha \,.\, 2^{l+k} + 1 - \alpha \,.\, 2^{l+k})) > 0\,.$$

D'après (4.2) et (4.3) on a donc dans ce cas toujours

$$h(M^\alpha_{ab}) < H(M^\alpha_{ab})\,.$$

c) Soit $\alpha = \frac{1}{3} = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-2j}$. Alors pour k pair on trouve

$$\alpha \,.\, 2^k - [\alpha \,.\, 2^k] = \tfrac{1}{3}\,, \quad [\alpha \,.\, 2^k] + 1 - \alpha \,.\, 2^k = \tfrac{2}{3}\,,$$

pour k impair on aura

$$\alpha \,.\, 2^k - [\alpha \,.\, 2^k] = \tfrac{2}{3}\,, \quad [\alpha \,.\, 2^k] + 1 - \alpha \,.\, 2^k = \tfrac{1}{3}\,,$$

alors on a

$$\min (\alpha \,.\, 2^k - [\alpha \,.\, 2^k],\ [\alpha \,.\, 2^k] + 1 - \alpha \,.\, 2^k) = \tfrac{1}{3}$$

pour chaque k naturel, et d'après (4.4) on a $p_{1/3} = \frac{1}{3}$. D'après (4.3) nous obtenons alors

$$H(M^{1/3}_{ab}) = \tfrac{3}{4}(b - a) = \tfrac{3}{2} h(M^{1/3}_{ab})\,.$$

d) Soit $\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j^2}$. Cet α est irrationnel. Nous avons

$$\alpha \,.\, 2^{k^2} - [\alpha \,.\, 2^{k^2}] = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{k^2 - j^2} - [\sum_{j=1}^{\infty} 2^{k^2 - j^2}] = \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{k^2 - j^2} < \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-2k-1-j} = 2^{-2k}\,.$$

Alors d'après (4.4) nous obtenons

$$p_\alpha \leqq \liminf_{k \to \infty} (\alpha \,.\, 2^{k^2} - [\alpha \,.\, 2^{k^2}]) \leqq \liminf_{k \to \infty} 2^{-2k} = 0\,,$$

d'où

$$p_\alpha = 0\,, \quad h(M^\alpha_{ab}) = H(M^\alpha_{ab})\,.$$

e) Soit $\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-2j-[\sqrt{j}]}$. Cet α est irrationnel. Si k est un nombre naturel, et en désignant par j_1 le plus petit nombre naturel j tel que $2j + [\sqrt{j}] > k$, nous avons

$$\alpha . 2^k - [\alpha . 2^k] = \sum_{j=j_1}^{\infty} 2^{k-2j-[\sqrt{j}]} > 2^{-3} = \tfrac{1}{8},$$

$$[\alpha . 2^k] + 1 - \alpha . 2^k = 1 - 2^{k-2j_1-[\sqrt{j_1}]} - \sum_{j=j_1+1}^{\infty} 2^{k-2j-[\sqrt{j}]} >$$

$$> 1 - 2^{k-2j_1-[\sqrt{j_1}]} - 2^{k-2j_1-[\sqrt{j_1}]-1} \geqq 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Alors pour chaque k naturel nous avons

$$\min(\alpha . 2^k - [\alpha . 2^k], [\alpha . 2^k] + 1 - \alpha . 2^k) > \tfrac{1}{8},$$

donc d'après (4.4) on a $p_\alpha \geqq \frac{1}{8}$ et d'après (4.2) et (4.3) on obtient

$$h(M_{ab}^\alpha) < H(M_{ab}^\alpha).$$

Littérature

[1] *C. Carathéodory:* Über das lineare Mass von Punktmengen — eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs. Gött. Nachr., 1914, 404—426.

[2] *F. Hausdorff:* Dimension und äusseres Mass. Mathematische Annalen, *79*, 1919, 157—179.

[3] *L. Carleson:* Selected Problems on Exceptional Sets. Van Nostrand Co., 1967.

[4] *H. Federer:* Geometric Measure Theory. Springer-Verlag, 1969.

[5] *C. A. Rogers:* Hausdorff Measures. Cambridge University Press, 1970.

[6] *R. Harvey, J. Polking:* Removable singularities of solutions of linear partial differential equations. Acta matematica, *125*, 1970, 39—56.

[7] *J. Král:* Removable singularities of solutions of semielliptic equations. Rendiconti di Matematica (4) Vol. *6*, Serie VI, 1973, 1—21.

[8] *W. Sierpiński:* Arytmetyka teoretyczna. Warszawa 1955.

Adresse de l'auteur: 106 00 Praha 10, Sasanková 2655.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

UNIQUENESS OF THE OPERATOR ATTAINING $C(H_n, r, n)$

ZDENĚK DOSTÁL, Ostrava

(Received May 24, 1976)

Introduction. Let r be a fixed real number, $0 < r < 1$, n a fixed natural number. Let $L(H_n)$ denote the algebra of all linear operators on an n-dimensional Hilbert space H_n and let the operator norm and the spectral radius of $A \in L(H_n)$ be denoted by $|A|$ and $|A|_\sigma$, respectively.

In connection with the critical exponent, V. PTÁK has introduced in [1] the quantity

$$C(H_n, r, m) = \sup \{|A^m| : A \in L(H_n),\ |A|_\sigma \leqq r,\ |A| \leqq 1\}$$

and found a certain operator $A \in L(H_n)$ such that

$$C(H_n, r, n) = |A^n|\,, \quad |A|_\sigma \leqq r\,, \quad |A| \leqq 1\,. \tag{1}$$

The point of this note is to show that the operator A is unique in the following sense: if $B \in L(H_n)$ is any operator which satisfies (1) then there exists a unitary operator $U \in L(H_n)$ and a complex unit ε such that

$$\varepsilon A = U^* B U\,.$$

2. Notation and preliminaries. Let M_n denote the algebra of all $n \times n$ complex valued matrices.

The adjoint and the spectrum of an operator A will be denoted by A^* and $\sigma(A)$, respectively.

An operator $A \in L(H_n)$ is said to be extremal if $|A| \leqq 1$, $|A|_\sigma \leqq r$ and $|A^n| = C(H_n, r, n)$.

For a given set $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ of vectors $w_i \in H_n$, denote by $G(W)$ the Gramm matrix of W. If $z \in H_n$ and $A \in L(H_n)$, we shall abbreviate $G(z, Az, \ldots, A^{n-1}z)$ by $G(A, z)$.

We shall denote, for $1 \leqq i \leqq n$, by E_i the polynomial

$$E_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{e_j \in \{0,1\} \\ e_1 + \ldots + e_n = i}} x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n}\,,$$

Let $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ be given complex numbers. For $i = 1, 2, \ldots, n$, put $\alpha_i = (-1)^{n-i} E_{n-i+1}(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ so that the roots of the equation

$$x^n = \alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x^{n-1}$$

are exactly $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$. Consider the recursive relation

$$x_{i+n} = \alpha_1 x_i + \ldots + \alpha_n x_{i+n-1} \,. \tag{2}$$

For each i, $1 \leqq i \leqq n$, we denote by $w_i(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ the solution $(w_{i0}, w_{i1}, w_{i2}, \ldots)$ of this relation with the initial conditions

$$w_{ik}(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = \delta_{i,k+1}\,, \quad 0 \leqq k \leqq n-1\,.$$

The result of V. Knichal ([1], Lemma 7) reads:

2.1. *For each $i = 1, 2, \ldots, n$ and each $k \geqq n$,*

$$w_{ik}(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = \varepsilon_i Q_{ik}(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)\,,$$

where $\varepsilon_i = (-1)^{n-i}$ and

$$Q_{ik}(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = \sum_{\substack{e_j \geqq 0 \\ e_1 + \ldots + e_n = k-i+1}} c_{ik}(e_1, \ldots, e_n)\, \varrho_1^{e_1}, \ldots, \varrho_n^{e_n}\,,$$

where all $c_{ik}(e_1, \ldots, e_n) \geqq 0$.

The point of the lemma is that, for $k \geqq n$ and i fixed, all coefficients of w_{ik} are of the same sign.

Following [1], we denote by $P(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ the linear space consisting of all solutions of the recursive relation (2); it is spanned by the vectors $w_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \ldots, w_n(\varrho_1, \ldots \ldots, \varrho_n)$.

Now suppose that all $|\varrho_i| < r$. It is proved in [1] that, in this case, $P(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ is a subspace of the Hilbert space l^2 of all sequences $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ of the complex numbers such that $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$.

Let S denote the shift operator on l^2 which sends $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ to $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Its restriction on $P(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ is denoted by $S \mid P(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$.

The solution $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ of (2) with the initial conditions $a_0 = 1$, $a_1 = \varrho_i, \ldots \ldots, a_{n-1} = \varrho_i^{n-1}$ is the eigenvector corresponding to ϱ_i. On the other hand,

$$(S^n - \alpha_n S^{n-1} - \ldots - \alpha_1) \mid P(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = 0$$

so that the minimal polynomial of $S \mid P(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ is a divisor of $(x - \varrho_1) \ldots \ldots (x - \varrho_n)$. We have thus

$$\sigma(S \mid P(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)) = \{\varrho_1, \ldots, \varrho_n\}\,. \tag{3}$$

3. Shifts. V. Pták has discovered extremal properties of restrictions of the shift S. He has proved:

3.1. Theorem. (Pták). *Let $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ be complex numbers, $|\varrho_i| \leqq r$ for $i = 1, \ldots, n$; $A \in L(H_n)$, $|A| \leqq 1$ and $(A - \varrho_1)(A - \varrho_2) \ldots (A - \varrho_n) = 0$.*

Then

$$|A^n| \leqq |S^n| P(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)| \tag{4}$$

([1], Theorem 6).

Moreover,

$$C(H_n, r, n) = |S^n | P(r, \ldots, r)| \tag{5}$$

(ibid, Theorem 8).

The proof of (5) consists in showing that

$$|S^n | P(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)| \leqq |S^n | P(r, \ldots, r)| . \tag{6}$$

An inspection of the proof of (5) suggests a supplement to the inequality (6).

3.2. *Let $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ be complex numbers, $|\varrho_i| \leqq r$ for $i = 1, \ldots, n$. Then the relation*

$$|S^n | P(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)| = |S^n | P(r, \ldots, r)|$$

holds if and only if $\varrho_1 = \ldots = \varrho_n$ and $|\varrho_1| = r$.

We shall follow [1] in the proof.

Let Q_i, w_i and E_i be those of Section 2. With the aid of the recurrent relations (2), it is easy to verify directly that

$$Q_{in} = E_{n-i+1} \quad \text{and} \quad Q_{1,n+1} = E_1 \,.\, E_n \,.$$

Now suppose all $|\varrho_i| \leqq r$ and let there be i such that $\varrho_1 \neq \varrho_i$ or $|\varrho_i| < r$. It follows immediately that

$$|Q_{1,n+1}(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)| < Q_{1,n+1}(r, \ldots, r) \tag{7}$$

and

$$|Q_{i,n}(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)| < Q_{i,n}(r, \ldots, r) , \quad i = 2, \ldots, n . \tag{8}$$

All coefficients of the forms Q_{ik} being nonnegative, we have

$$|Q_{ik}(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)| \leqq Q_{ik}(r, \ldots, r) , \quad i = 1, \ldots, n . \tag{9}$$

We intend to show that

$$|S^n | P(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)| < |S^n | P(r, \ldots, r)| .$$

To prove this, we associate with each $x \in P(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$, $x \neq 0$, a vector $y \in P(r, \ldots, r)$ such that

$$|S^n x|\,|x|^{-1} < |S^n y|\,|y|^{-1}\,.$$

Put $y = \sum_{i=1}^{n} |x_{i-1}|\,(-1)^{n-i}\, w_i(r, \ldots, r)$. It follows that, for $0 \leqq k \leqq n-1$, we have $|x_k| = |y_k|$. If $k \geqq n$, then

$$(10) \qquad |x_k| = \Big|\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}\, w_{ik}(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)\Big| \leqq \sum_{i=1}^{n} |x_{i-1}|\,|Q_{ik}(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)| \leqq$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{n} |x_{i-1}|\; Q_{ik}(r, \ldots, r) = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}(-1)^{n-i}\, Q_{ik}(r, \ldots, r) = y_k\,.$$

If $x_0 \neq 0$, then we can apply the inequality (7) together with (9) to get $|x_{n+1}| < y_{n+1}$, otherwise by (8) $|x_n| < y_n$. We have thus $|x_k| = |y_k|$ for $k = 0, 1, \ldots, n-1$; $|x_k| \leqq y_k$ for $k \geqq n$, $|x_n| < y_n$ or $|x_{n+1}| < y_{n+1}$ and this implies the desired inequality.

On the other hand, if $\varrho = e^{it}r$, t real, then by (6) and (4)

$$|S^n \mid P(\varrho, \ldots, \varrho)| \leq |S^n \mid P(r, \ldots, r)| = |(e^{it}S)^n \mid P(r, \ldots, r)| \leq |S^n \mid P(\varrho, \ldots, \varrho)|\,,$$

which completes the proof.

We shall need a little more information about $S \mid H(\varrho, \ldots, \varrho)$. Let $|\varrho| < 1$, and abbreviate $S \mid P(\varrho, \ldots, \varrho)$ by S_ϱ, $w_n(\varrho, \ldots, \varrho)$ by w. Clearly $|w| = |S_\varrho w| = \ldots$ $\ldots = |S_\varrho^{n-1} w|$. All the vectors $w, S_\varrho w, \ldots, S_\varrho^{n-2} w$ being linearly independent eigenvectors of $S_\varrho^* S_\varrho \neq I$ corresponding to the eigenvalue 1, we have

$$(11) \qquad \operatorname{rank}(I - S_\varrho^* S_\varrho) = 1\,.$$

We intend to show that $|S_\varrho^n z|$ attains its maximum on the unit sphere for a unique vector. To prove it, assume $u, v \in P(\varrho, \ldots, \varrho)$ linearly independent, $|u| = |v| = 1$, $|S_\varrho^n u| = |S_\varrho^n v| = |S_\varrho^n|$, i.e. $|S_\varrho^n|^2 = |S_\varrho^{*n} S_\varrho^n| = (S_\varrho^{*n} S_\varrho^n u, u) = (S_\varrho^{*n} S_\varrho^n v, v)$. It follows that both u and v are eigenvectors of $S_\varrho^{*n} S_\varrho^n$ corresponding to the eigenvalue $|S_\varrho^n|^2$ and, consequently, $|S_\varrho^n|^2\,|z|^2 = (S_\varrho^{*n} S_\varrho^n z, z) = |S_\varrho^n z|^2$ for each $z \in \operatorname{Span}(u, v)$. Since $\dim \operatorname{Ker}(I - S_\varrho^* S_\varrho) = n - 1$ and S_ϱ is regular there exists a nonzero w, $w \in S^n(\operatorname{Span}(u, v)) \cap \operatorname{Ker}(I - S_\varrho^* S_\varrho)$. Setting $z = |S_\varrho^{-n} w|^{-1} S_\varrho^{-n} w$ we have

$$(12) \qquad (I - S_\varrho^* S_\varrho)\, S_\varrho^n z = 0\,, \quad |S_\varrho^n z| = |S_\varrho^n| = C(H_n, r, n)\,.$$

Hence we can write

$$(13) \qquad |S_\varrho^n z|^2 - |S_\varrho^{n+1} z|^2 = ((I - S_\varrho^* S_\varrho)\, S_\varrho^n z, S_\varrho^n z) = 0\,.$$

Now return to the proof of 3.2 and set $y = \sum_{i=1}^{n} z_{i-1}(-1)^{n-i} \,.\, w_i(r, \ldots, r)$. We have again $|z_i| = |y_i|$ for $i = 0, 1, \ldots, n-1$ and $|z_i| \leqq y_i$ for $i = n, n+1, \ldots$. Applying (12) we get even $|z_i| = y_i$ for $i \geqq n$. Since by (13) $|S_\varrho^n z| = |S_\varrho^{n+1} z|$, we have $z_n = 0$.

At the same time

$$|z_n| = y_n = \sum_{i=1}^{n} |z_{i-1}| \, Q_{in}(r, \ldots, r) = \sum_{i=1}^{n} |z_{i-1}| \, E_{n-i+1}(r, \ldots, r) > 0 ,$$

which is impossible. We have proved the following result:

3.3. *Let* $|\varrho| < 1$, $u, v \in P(\varrho, \ldots, \varrho)$, $|u| = |v| = 1$ *and* $|S^n u| = |S^n v| = C(H_n, r, n)$. *Then* $u = e^{it} v$.

4. Spectrum of extremal operators. Now it is easy to describe the spectrum of extremal operators.

4.1. *If* $A \in L(H_n)$ *is extremal, then* $\sigma(A) = \{\varrho\}$, $|\varrho| = r$.

Proof. Suppose $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ are the roots of the characteristic polynomical of an extremal operator $A \in L(H_n)$. If they were not all equal or some $|\varrho_i| < r$, then, since $(A - \varrho_1) \ldots (A - \varrho_n) = 0$, by 3.1 a 3.2

$$|A^n| \leqq |S^n| \, P(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)| < |S^n| \, P(r, \ldots, r)| = C(H_n, r, n) .$$

We shall need two easy consequences of 4.1.

4.2. *If* $A \in L(H_n)$ *is extremal,* $z \in H_n$, $|z| = 1$ *and* $|A^n z| = A^n$, *then the vectors* z, $Az, \ldots, A^{n-1}z$ *are linearly independent.*

Really, otherwise we could define an extremal operator B which has 0 in its spectrum by setting $Bx = Ax$ for x from the linear span of the vectors $z, Az, \ldots, A^{n-1}z$ and $By = 0$ on the orthogonal complement.

It follows that no extremal operator can be a root of the polynomial of a degree less than the dimension of the space. Together with 4.1, this yields

4.3. *If* $A \in L(H_n)$ *is extremal then its minimal polynomial is* $(x - \varrho)^n$, *where* $|\varrho| = r$.

5. We give a brief account of Pták's method of linearization that we need here ([1], pp. 250–253). In the sequel, let $z \in H_n$ be a fixed unit vector, $\varrho = e^{it} r$ a fixed real number and let T be the companion matrix of $(x - \varrho)^n$, that is

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \end{bmatrix},$$

where α_i are defined by

$$(x - \varrho)^n = x^n - \alpha_n x^{n-1} - \ldots - \alpha_1 .$$

If $A \in L(H_n)$ satisfies $(A - \varrho)^n = 0$, then it is easy to verify directly that for each $z \in H_n$

$$G(A, Az) = TG(A, z)\, T^* . \tag{14}$$

We denote by $\mathscr{A}$ the class of all operators $A \in L(H_n)$ such that $|A| \leqq 1$ and $(A - \varrho)^n = 0$, by $\mathscr{Z}$ the class of all symmetric matrices $Z \in M_n$ satisfying $TZT^* \leqq Z$ and $z_{11} = 1$. The mapping

$$g_z : \mathscr{A} \ni A \mapsto G(A, z) \in \mathscr{Z}$$

is epimorphic.

The crucial point is that there is a linear isomorphism between the cone $\mathscr{T}$ of all symmetric matrices $Z \in M_n$, $TZT^* \leqq Z$, and the cone $\mathscr{P}$ of all symmetric positive semidefinite matrices. It is defined by

$$p : \mathscr{T} \ni Z \mapsto Z - TZT^* \in \mathscr{P} .$$

Let us define a linear functional

$$f : M_n \ni Z \mapsto q(T^n Z T^{*n}) ,$$

where $q(Z)$ denotes the $(1,1)$ entry of Z, and let $\mathscr{Q} = p(\mathscr{Z})$. If $A \in \mathscr{A}$, we may write

$$fp^{-1}(p\, g_z(A)) = f(g_z(A)) = |A^n z|^2 ,$$

so that $\max |A^n z|^2$ for $A \in \mathscr{A}$ equals the maximum of fp^{-1} on the set $\mathscr{Q}$. The last set being compact and convex, the maximum of fp^{-1} will be attained at an extreme point of $\mathscr{Q}$. Since the extreme rays of $\mathscr{P}$ are generated by matrices of the rank 1, the rank of the extreme matrices of $\mathscr{Q}$ is equal to 1.

Put $\mathscr{E} = \{P \in \mathscr{Q} : fp^{-1}(P) = C(H_n, r, n)^2\}$. First we show what do the operators from $\mathscr{A}$, which are sent by pg_z to the extremal point of $\mathscr{E}$, look like.

5.1. *Let $A \in L(H_n)$ be extremal. If the rank of the matrix*

$$G(A, z) - G(A, Az)$$

is equal to 1 and $|A^n z| = C(H_n, r, n)$, then there is a complex number ϱ, $|\varrho| = r$ and a unitary mapping

$$u : H_n \to P(\varrho, \ldots, \varrho)$$

such that

$$A = u^* S u .$$

Proof. Suppose A satisfies the assumptions of the theorem and put $D = (I - A^*A)^{1/2}$. We have seen already that $\sigma(A) = \{\varrho\}$, $|\varrho| = r$. Obviously,

$$G(A, z) - G(A, Az) = G(Dz, DAz, \ldots, DA^{n-1}z) .$$

By 4.2 the vectors $z, Az, \ldots, A^{n-1}z$ form a basis of the space H_n. The rank of $G(Dz, \ldots, DA^{n-1}z)$ being equal to 1, the same holds for D, too.

We denote by e the only unit eigenvector of D with the eigenvalue different from zero and define a linear mapping

$$u : H_n \ni w \mapsto ((Dw, e), \quad (DAw, e), \ldots) \in l^2 .$$

Clearly u maps H_n into $P(\varrho, \ldots, \varrho)$. Since $A^n \to 0$ and $Dw = (Dw, e)\, e$, we have

$$|u(w)|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |(DA^i w, e)|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |DA^i w|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (|A^i w|^2 - |A^{i+1} w|^2) = |w|^2$$

so that u is an isometry. The spaces H_n and $P(\varrho, \ldots, \varrho)$ having the same dimension n, the range of u is $P(\varrho, \ldots, \varrho)$. Moreover, the shift S satisfies

$$uA = Su ,$$

which completes the proof.

The next step consists in showing that $\mathscr{E}$ is a singleton. To prove it, assume P, Q are extreme points of $\mathscr{E}$ and let $A, B \in \mathscr{A}$ be such operators that $p\, g(A) = P$, $p\, g(B) = Q$, $|A^n z| = |B^n z| = C(H_n, r, n)$.

By 5.1 there are isometries $u, v : H_n \to P(\varrho, \ldots, \varrho)$,

$$A = u^* S u , \quad B = v^* S v .$$

It immediately follows that

$$|S^n u z| = |S^n v z| = |A^n z| = C(H_n, r, n) ,$$

by 3.3 we get $uz = e^{it} vz$ and clearly $z = e^{-it} v^* u z$. The desired relation

$$P = p\, g(A) = p\, g(B) = Q$$

is now an easy consequence of $B = v^* u A u^* v$.

Now, if A is any extremal operator, then there is $z \in H_n$ such that $|z| = 1$ and $|A^n z| = C(H_n, r, n)$. Clearly $p\, g_z(A) \in \mathscr{E}$. Since the only matrix belonging to $\mathscr{E}$ is of rank 1, the rank of

$$p\, g_z(A) = G(A, z) - G(A, Az)$$

is equal to 1 and A satisfies the assumptions of 5.1.

We can summarize our results in the promised theorem.

5.2. Theorem. *Let $A \in L(H_n)$, $|A| \leqq 1$, $0 < r < 1$, $|A|_\sigma \leqq r$ and $|A^n| = C(H_n, r, n)$.*

Then $\sigma(A)$ consists of an only point ϱ, $|\varrho| = r$ and A is unitary similar to the restriction of the shift operator S on the space of all sequences $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ which satisfy

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-\varrho)^i x_{k+n-i} = 0 .$$

The problem of uniqueness of extremal operators was raised by V. Pták.

References

[1] *Vlastimil Pták:* Spectral Radius, Norms of Iterates, and the Critical Exponent, Lin. Algebra and its Applications *1*, 245—260 (1968).

[2] *Béla Sz.-Nagy, Ciprian Foiaş:* Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space (Budapest 1970).

[3] *Béla Sz.-Nagy:* Sur la norme des functions de certains operateurs, Acta Math. Acad. Sci. *20* (1969), 331—334.

Author's address: 708 33 Ostrava, Třída vítězného února (Katedra matematiky a deskriptivní geometrie VŠB).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

KONFIGURACE V PROSTORU A_{mk} ODVOZENÉ UŽITÍM KONFIGURACÍ V PROSTORU A_k

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

(Došlo dne 30. června 1976)

Úvod. V tomto článku nejdříve vytvoříme pomocí prostoru A_k (afinní bodový prostor, jehož zaměření je vektorový prostor dimenze k nad tělesem reálných čísel) jistý model prostoru A_{mk}. Potom odvodíme konfigurace v A_{mk} pomocí konfigurací v A_k. Práce je pokračováním resp. zobecněním prací [1] a [2].

Model A_{mk}. Nechť $A_k = \{A, Z_k, \varepsilon\}$ je model afinního bodového prostoru dimenze k (A je neprázdná množina, Z_k je vektorový prostor dimenze k a ε přiřazení, které musí existovat mezi A a Z_k). Uvažujme m-členný kartézský součin $A \times A \times \ldots \ldots A = A'$, tj. množinu všech uspořádaných m-tic prvků množiny A. Stručně naznačíme základní myšlenky důkazu, že množina těchto m-tic je při vhodně zavedených operacích modelem afinního prostoru dimenze mk. Nejdříve zavedeme označení: $B = [B_1, B_2, \ldots, B_m]$ a $\mathscr{U} = (\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2, \ldots, \mathscr{U}_m)$, kde $B \in A'$, $B_i \in A$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$, $\mathscr{U} \in Z_k \times Z_k \times \ldots \times Z_k$ (m-členný kartézský součin), $\mathscr{U}_i \in Z_k$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$. Bod B_i budeme nazývat i-tý obraz bodu B a právě tak vektor $\mathscr{U}_i$ je i-tý obraz vektoru $\mathscr{U}$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$. V A_k zvolíme uspořádanou m-tici bází: $\bar{O}_i = \{O_i, \mathscr{U}_{1i}, \mathscr{U}_{2i}, \ldots, \mathscr{U}_{ki}\}$, pro $i = 1, 2, \ldots, m$. Bodu $B = [B_1, B_2, \ldots, B_m]$ přiřadíme mk-tici čísel tak, že čísla na místech $ik, ik + 1, \ldots, ik + (k - 1)$ jsou souřadnice bodu B_i v bázi $\bar{O}_i$ (opět pro $i = 1, 2, \ldots, m$). Každé uspořádané mk-tici čísel (reálných) přiřadíme bod, jehož i-tý obraz má za souřadnice v $\bar{O}_i$ čísla na místech $ik, ik + 1, \ldots \ldots, ik + (k - 1)$. Zřejmě tedy existuje prosté zobrazení mezi množinou A' a množinou všech uspořádaných mk-tic čísel – označme ji P_{mk}. Víme, že množinu P_{mk} můžeme při vhodném zavedení příslušných operací uvažovat jako aritmetický model afinního prostoru dimenze mk, tj. A_{mk}. Nyní zavedeme, že vektory sčítáme tak, že sečteme příslušné obrazy a podobně vektor a bod sečteme tak, že sečteme příslušné obrazy. Je zřejmé, že uvažované prosté zobrazení mezi A' a P_{mk} takto zavedené operace zachovává a je tedy izomorfní. Lze tedy A' uvažovat jako model bodového prostoru dimenze mk, jehož zaměření je vektorový prostor dimenze mk nad tělesem reálných čísel. Označíme: $A_{mk} = \{A' = A_k \times A_k \times \ldots \times A_k, Z_k \times Z_k \times \ldots \times Z_k, \varepsilon\}$ a také stručněji $A_{mk} = A_k \times A_k \times \ldots \times A_k$.

Nyní uvážíme co vyplní resp. jak se interpretují podprostory prostoru A_{mk}. Platí zřejmě, že každý podprostor prostoru A_{mk} je uspořádaná m-tice množin prostoru A_k (i-tou množinu tvoří i-té obrazy). Přenecháme čtenáři, aby dokázal, že zřejmě uvažované množiny jsou podprostory prostoru A_k. Označíme: $A_s = [A_{1i_1}, A_{2i_2}, \ldots, A_{mi_m}]$, kde A_s je podprostor prostoru A_{mk} dimenze s, A_{ji_p} jsou podprostory prostoru A_k, přičemž první index, tj. j ($j = 1, 2, \ldots, m$) určuje, kterým obrazem daného A_s je A_{ji_p} a druhý index, tj. i_p, určuje rozměr podprostoru A_{ji_p} (zřejmě $p = 1, 2, \ldots, m$, avšak číslo i_p je číslo z množiny $\{0, 1, \ldots, k\}$ a čísla i_p a i'_p, kde $p \neq p'$, nemusí být různá).

Pro naše účely, tj. hledání konfigurací, nepotřebujeme znát všechny možné typy podprostorů prostoru A_{mk} a proto uvážíme jenom „přípustné" podprostory.

Věta 1. *Každou uspořádanou m-tici podprostorů* $[A_{1i_1}, A_{2i_2}, \ldots, A_{mi_m}]$ *prostoru* A_k, *přičemž platí* $i_1 + i_2 + \ldots + i_m = s$, *kde* $s < mk$ *a* $i_p = 0, 1, \ldots, k$ *můžeme uvažovat jako podprostor* $A_s \subset A_{mk}$.

Důkaz. Zvolíme-li bázi zaměření podprostoru A_{ji_p} vektory $\mathscr{U}_{j1}, \mathscr{U}_{j2}, \ldots, \mathscr{U}_{ji_p}$, potom zaměření A_s můžeme určit vektory: $(\mathscr{U}_{11}, \emptyset, \ldots, \emptyset)$, $(\mathscr{U}_{12}, \emptyset, \ldots, \emptyset), \ldots$
$\ldots, (\mathscr{U}_{1i_1}, \emptyset, \ldots, \emptyset)$, $(\emptyset, \mathscr{U}_{21}, \emptyset, \ldots, \emptyset)$, $(\emptyset, \mathscr{U}_{22}, \emptyset, \ldots, \emptyset), \ldots, (\emptyset, \mathscr{U}_{2i_2}, \emptyset, \ldots, \emptyset), \ldots$
$\ldots, (\emptyset, \emptyset, \ldots, \emptyset, \mathscr{U}_{j1}, \emptyset, \ldots, \emptyset)$, $(\emptyset, \ldots, \emptyset, \mathscr{U}_{j2}, \emptyset, \ldots, \emptyset), \ldots, (\emptyset, \ldots, \emptyset, \mathscr{U}_{ji_j}, \emptyset, \ldots, \emptyset), \ldots$
$\ldots, (\emptyset, \emptyset, \ldots, \emptyset, \mathscr{U}_{m1})$, $(\emptyset, \ldots, \emptyset, \mathscr{U}_{m2}), \ldots, (\emptyset, \ . \ , \emptyset, \mathscr{U}_{mi_m})$

Zavedeme ještě: $\mathscr{U}_{ji_p} = \emptyset$ ($\emptyset$ je nulový vektor A_k) právě když $i_p = 0$. Nyní je zřejmé, že zaměření prostoru A_s je určeno právě $i_1 + i_2 + \ldots + i_m$ lineárně nezávislými vektory a uvažovaný A_s má dimenzi s

Konfigurace v A_{mk} odvozené pomocí konfigurací v A_k.

Příklad. V rovině A_2 je dána konfigurace K typu $(9_3, 9_3)$ Odvoďte v prostoru $A_6 = A_2 \times A_2 \times A_2$ konfigurace K_i pomocí konfigurace K.

Řešení I. a) Bodem konfigurace K_1 je uspořádaná trojice bodů konfigurace K – je jich zřejmě $9^3 = 729$.

b) Přímkou konfiguracee K_1 je uspořádaná trojice $[A_{1i_1}, A_{2i_2}, A_{3i_3}]$, přičemž právě jedno $i_p = 1$ a ostatní dvě jsou rovna nule; A_{ji_p} je prvek konfigurace K. Všech přímek K_1 je $9 . 81 . 3 = 2187$, neboť v K je 9 přímek a 81 různých uspořádaných dvojic bodů a každá přímka může být prvním, druhým resp. třetím obrazem. Na každé přímce v K_1 leží zřejmě právě tři body z K_1.

c) Rovinou konfigurace K_1 je uspořádaná trojice podprostorů konfigurace K: $[A_{1i_1}, A_{2i_2}, A_{3i_3}]$, přičemž právě jedno $i_p = 0$ a ostatní dvě jsou rovny jedné. Všech rovin v K_1 je $81 . 9 . 3 = 2187$, neboť existuje 81 uspořádaných dvojic přímek, bodů je 9 a každý z nich může být 1., 2., 3. obrazem. Nechť $[ABC, EFG, H]$ je rovina konfigurace K_1, jejíž první obraz je přímka obsahující body A, B a C konfigurace K, druhý obraz přímka obsahující body E, F a G a konečně třetí obraz je jediný bod H. Tato rovina zřejmě obsahuje těchto dvět bodů: $[A, E, H]$, $[A, F, H]$, $[A, G, H]$, $[B, E, H]$, $[B, F, H]$, $[B, G, H]$, $[C, E, H]$, $[C, F, H]$, $[C, G, H]$. Dále tato rovina obsahuje těchto šest přímek: $[A, EFG, H]$, $[B, EFG, H]$, $[C, EFG, H]$, $[ABC, E\ H]$, $[ABC, F, H]$ a $[ABC, G, H]$. Toto platí zřejmě pro každou rovinu.

d) Trojrozměrným prostorem konfigurace K_1 je uspořádaná trojice $[A_{11}, A_{21}, A_{31}]$, tj. uspořádaná trojice přímek konfigurace K – je jich zřejmě $9^3 = 729$. V každém trojrozměrném prostoru leží 27 bodů, neboť daný trojrozměrný prostor lze např. vyjádřit ve tvaru $[ABC, EFG, HKM]$ a zřejmě počet bodů tohoto prostoru je roven trojnásobku počtu bodů obsažených v rovině. Právě tak v tomto trojrozměrném prostoru leží 27 přímek. $[ABC, E, H]$, $[ABC, E, K]$, $[ABC, E, M]$, $[ABC, F, H]$, $[ABC, F, K]$, $[ABC, F, M]$, $[ABC, G, H]$, $[ABC, G, K]$, $[ABC, G, M]$ a obdobně dostaneme devět přímek s konstantní přímkou EFG a právě tak devět přímek s přímkou HKM. Zřejmě v každém tomto prostoru leží devět rovin.

e) Čtyřrozměrným prostorem konfigurace K_1 je uspořádaná trójice $[A_{1i_1}, A_{2i_2}, A_{3i_3}]$ podprostorů konfigurace K, přičemž právě jedno $i_p = 2$ a ostatní dvě jsou rovny jedné. Všech uspořádaných dvojic přímek je 81 a rovina může být prvním, druhým resp. třetím obrazem daného prostoru – tedy všech čtyřrozměrných prostorů konfigurace K_1 je právě $81 . 3 = 243$. V každém čtyřrozměrném prostoru leží 81 bodů; je to devítinásobek počtu bodů ležících v rovině. Nechť daný čtyřrozměrný prostor je $[ABC, EFG, ABCEFGHKM]$. V tomto prostoru leží 27 přímek s konstantním prvním obrazem ABC, 27 přímek s konstantním druhým obrazem EFG a 81 přímek, jejichž třetí obraz je přímka konfigurace K; leží tedy v každém čtyřrozměrném prostoru 135 přímek. V každém čtyřrozměrném prostoru leží právě devět trojrozměrných prostorů – např. v uvažovaném prostoru $[ABC, EFG, ABCEFGHKM]$ leží jedině trojrozměrné prostory $[ABC, EFG, \ldots]$, kde třetím obrazem je přímka konfigurace K a těchto přímek je právě devět.

f) Nadrovinou konfigurace K_1 je uspořádaná trojice $[A_{1i_1}, A_{2i_2}, A_{3i_3}]$, přičemž právě jedno i_p je rovno jedné a ostatní dvě jsou rovny dvěma. Zřejmě těchto nadrovin je 27, neboť rovinou může být první a druhý obraz, první a třetí, druhý a třetí – zbývající obraz musí být vždy přímkou a těch je právě devět – tedy $3 . 9 = 27$. V nadrovině leží 243 bodů, neboť je-li např. $[ABCEFGHKM, ABCEFGHKM, ABC]$, potom bodů ležících v tomto prostoru a majících za třetí obraz bod A je 81 a právě tak je 81 bodů s třetím obrazem v bodě B i C. Počet přímek obsažených v daném podprostoru je 567 a sice 81 přímek má za třetí obraz přímku ABC, 243 má za první obraz přímku a zbývající dva jsou body a 243 má druhý obraz přímku a zbývající dva jsou body. V daném podprostoru leží celkem 405 rovin a sice 243 z nich má první a druhý obraz přímku, 81 má první a třetí obraz přímku a 81 má druhý a třetí obraz přímku. Počet trojrozměrných prostorů ležících v nadrovině je zřejmě 81 a snadno spočítáme, že nadrovina obsahuje právě 18 čtyřrozměrných podprostorů.

Čísla na a pod hlavní diagonálou matice konfigurace K_1 jsme dostali v předcházející úvaze. Přenecháme čtenáři, aby ověřil správnost i ostatních čísel, přičemž nezapomeneme, že musí platit $a_{ss} . a_{sk} = a_{ks} . a_{kk}$ (je-li $s < k$, potom předcházející zápis čteme: počet s-rozměrných prostorů konfigurace násobený počtem k-rozměrných podprostorů procházejících daným s-rozměrným podprostorem je roven součinu s-rozměrných podprostorů obsažených v daném k-rozměrném prostoru s počtem všech k-rozměrných podprostorů dané konfigurace). Matice konfigurace K_1:

$$\begin{bmatrix} 729 & 9 & 27 & 27 & 27 & 9 \\ 3 & 2187 & 6 & 9 & 15 & 7 \\ 9 & 6 & 2187 & 3 & 1 & 5 \\ 27 & 27 & 9 & 729 & 3 & 3 \\ 81 & 135 & 9 & 9 & 243 & 2 \\ 243 & 567 & 405 & 81 & 18 & 27 \end{bmatrix}.$$

Řešení II. a) Bodem, přímkou a nadrovinou nechť je v K_2 táž trojice jako v K_1.

b) Rovinou konfigurace K_2 je uspořádaná trojice podprostorů konfigurace K: $[A_{1i_1}, A_{2i_2}, A_{3i_3}]$, přičemž právě jedno $i_p = 2$ a ostatní jsou rovny nule. Uspořádaných dvojic bodů konfigurace K je právě 81 a rovina může být prvním, druhým resp. třetím obrazem dané roviny. Všech rovin konfigurace K_2 je tedy $81 . 3 = 243$.

c) Trojrozměrným prostorem je uspořádaná trojice $[A_{1i_1}, A_{2i_2}, A_{3i_3}]$, přičemž právě jedno $i_p = 0$, právě jedno $i_p = 1$ a právě jedno $i_p = 2$. Zvolíme-li např. rovinu jako první obraz, dostáváme $81 . 2 = 162$ různých trojrozměrných prostorů; konfigurace K_2 obsahuje celkem $162 . 3 = 486$ navzájem různých trojrozměrných prostorů.

d) Čtyřrozměrným prostorem konfigurace K_2 je uspořádaná trojice $[A_{1i_2}, A_{2i_2}, A_{3i_3}]$, přičemž právě jedno $i_p = 0$ a ostatní jsou rovny dvěma. Zřejmě všech těchto prostorů je 27.

Dostali jsme čísla na hlavní diagonále matice konfigurace K_2 a přenecháme čtenáři ověření správnosti ostatních čísel matice konfigurace K_2:

$$\begin{bmatrix} 729 & 9 & 3 & 18 & 3 & 9 \\ 3 & 2187 & 1 & 8 & 2 & 7 \\ 9 & 9 & 243 & 6 & 2 & 6 \\ 27 & 36 & 3 & 486 & 1 & 4 \\ 81 & 162 & 18 & 18 & 27 & 3 \\ 243 & 567 & 54 & 72 & 3 & 27 \end{bmatrix}.$$

Řešení III. Bodem, přímkou, rovinou a nadrovinou v konfiguraci K_3 nechť je táž trojice jako v konfiguraci K_1. Trojrozměrný a čtyřrozměrný prostor v konfiguraci K_3 nechť je táž trojice jako v konfiguraci K_2. Snadno zjistíme, že konfigurace K_3 má matici:

$$\begin{bmatrix} 729 & 9 & 27 & 18 & 3 & 9 \\ 3 & 2187 & 6 & 8 & 2 & 7 \\ 9 & 6 & 2187 & 2 & 1 & 5 \\ 27 & 36 & 9 & 486 & 1 & 4 \\ 81 & 162 & 81 & 18 & 27 & 3 \\ 243 & 567 & 405 & 72 & 3 & 27 \end{bmatrix}.$$

Řešení IV. Nechť v konfiguraci K_4 je rovina a trojrozměrný prostor táž trojice jako v konfiguraci K_2 a ostatní prostory jsou stejné jako v konfiguraci K_1. Dostáváme:

$$\begin{bmatrix} 729 & 9 & 3 & 18 & 27 & 9 \\ 3 & 2187 & 1 & 8 & 15 & 7 \\ 9 & 9 & 243 & 6 & 9 & 6 \\ 27 & 36 & 3 & 486 & 3 & 4 \\ 81 & 135 & 9 & 6 & 243 & 2 \\ 243 & 567 & 54 & 72 & 18 & 27 \end{bmatrix}.$$

Na předcházejícím příkladě jsme si ověřili, že zcela jednoduchým (avšak hodně pracným) způsobem můžeme pomocí konfigurace v A_2 odvozovat konfigurace v A_6. Dále jsme viděli, že dostáváme celou řadu možností pro volbu „přípustných" podprostorů. Ještě poznamenáme, že nelze volit všechny možné kombinace, např. čtyřrozměrný prostor jako v konfiguraci K_2, ostatní jako v konfiguraci K_1, neboť zvolený čtyřrozměrný prostor neobsahuje žádný trojrozměrný prostor.

Jedno z možných pokračování tohoto článku by bylo (tak jako v [2]), zcela obecně k dané konfiguraci najít matice příslušných konfigurací. Předcházejícím příkladem jsme ukázali, že tato práce by byla značně rozsáhlá a proto ukončíme tento článek obecnou větou.

Věta 2. *Nechť existuje v prostoru A_k konfigurace K. V prostoru $A_{mk} = A_k \times \times A_k \times \ldots \times A_k$ uvažujme množinu podprostorů, pro které platí:*

1. *Jestliže A_j patří uvažované množině, potom $A_j = [A_{1i_1}, A_{2i_2}, \ldots, A_{mi_m}]$, přičemž $A_{ji_p} \in K$ a $i_1 + i_2 + \ldots + i_m = j$.*

2. *Nechť A_j a A'_j jsou dva různé podprostory uvažované množiny a $A'_j = [A_{1i'_1}, A_{2i'_2}, \ldots, A_{mi'_m}]$, potom v součtu $i'_1 + i'_2 + \ldots + i'_m$ lze provést záměnu sčítanců tak, že platí $i_1 = i'_{j_1}, i_2 = i'_{j_2}, \ldots, i_m = i'_{j_m}$.*

3. *Každý podprostor uvažované množiny má vlastní podprostory všech dimenzí náležející dané množině.*

Všechny podprostory s předcházejícími vlastnostmi určují konfiguraci (označme ji K_t) v prostoru $A_{mk} = A_k \times A_k \times \ldots \times A_k$.

Důkaz. Je třeba dokázat, že každý s-rozměrný podprostor množiny K_i je incidentní vždy s týmž počtem k-rozměrných podprostorů množiny K_i. Každý s-rozměrný resp. k-rozměrný podprostor konfigurace K_i je uspořádaná m-tice jistých podprostorů konfigurace K. V konfiguraci K platí, že každý s'-rozměrný podprostor je incidentní s týmž počtem k'-rozměrných podprostorů. Z našeho příkladu a předcházející úvahy je vidět, že počet s-rozměrných podprostorů K_i incidentních s k-rozměrným podprostorem K_i vypočteme tak, že budeme vhodně násobit a sčítat čísla matice konfigurace K. Z vlastnosti 2) plyne, že počet těchto s-rozměrných podprostorů incidentních s daným k-rozměrným podprostorem bude vždy stejný.

Literatura

[1] *Jaromír Krys:* Konfigurace v čtyřrozměrném prostoru odvozené užitím rovinných konfigurací, Časopis pro pěstování matematiky roč. *100* (1975) str. 129—134.

[2] *Jaromír Krys:* O jednom modelu $2k$-rozměrného prostoru, Časopis pro pěstování matematiky roč. *101* (1976) str. 20—27.

Adresa autora: 501 91 Hradec Králové, Orlické nábř. č. 1 (Katedra matematiky pedagogické fakulty).

Zusammenfassung

KONFIGURATIONEN IM RAUM A_{mk}, DIE MIT HILFE DER KONFGURATIONEN IM RAUM A_k HERGELEITET SIND

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

Sei $A_k = \{A, Z_k, \varepsilon\}$ ein Modell eines affinen Punktraumes der Dimension k. Das m-gliedrige kartesische Produkt $A' = A \times A \times \ldots \times A$ kann man als ein Modell des Raumes A_{mk}, d. h. des affinen Punktraumes der Dimension mk untersuchen. Ein Unterraum des Raumes A_{mk} ist ein geordnetes m-tupel der Unterräume des Raumes A_k. Es sei K eine Konfiguration in A_k. Dann kann man die Konfigurationen K_i in A_{mk} herleiten, wobei die Unterräume der Konfigurationen K_i passend gewählte geordnete m-tupel der Unterräume der Konfiguration K sind. Wenn diese Ergebnisse für ein Modell gelten, dann gelten sie für alle, d. h. die erwägten Konfigurationen existieren im affinen Raum gegebener Dimension.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

RELATIVE BICOMPLEMENTS AND TOLERANCE EXTENSION PROPERTY IN DISTRIBUTIVE LATTICES

JOSEF NIEDERLE, Brno

(Received August 11, 1976)

It is a well-known result of A. DAY that if L is a sublattice of a distributive lattice D then every congruence relation on L can be extended to a congruence relation on the whole D. The purpose of the present paper is to give a characterization of such pairs $[D, L]$ that every compatible tolerance relation on L can be extended on D.

By a tolerance relation we mean a reflexive and symmetric binary relation. It need not be transitive. The concept was introduced by ZEEMAN and compatible tolerance relations on algebras were for the first time studied by B. ZELINKA. Some properties of compatible tolerance relations on distributive lattices are important: Let D be a distributive lattice, T a compatible tolerance relation on D. Then

1) $\{x \in D \mid [x, a] \in T\}$ forms a convex sublattice of D for each fixed $a \in D$;

2) $[x, y] \in T \Leftrightarrow [x \wedge y, x \vee y] \in T$ for arbitrary $x, y \in D$;

3) the intersection of an arbitrary set of compatible tolerance relations on D is again a compatible tolerance relation on D;

4) to every binary relation R on D there exists a least compatible tolerance relation $T(R)$ on D containing R. $T(R)$ will be called the compatible tolerance relation generated by R. $T(R) = \{[a, b] \mid$ there exists an $(m + n)$-ary term t such that $a = t(a_1, \ldots, a_m, x_1, \ldots, x_n)$, $b = t(b_1, \ldots, b_m, x_1, \ldots, x_n)$ for some $[a_i, b_i] \in R \cup R^*\}$ where $[x, y] \in R^* :\Leftrightarrow [y, x] \in R$.

The following result is well-known:

Lemma 1. *Let D be a distributive lattice, J an ideal (dual ideal) in D, $a \in D \setminus J$. Then there exists an ideal (dual ideal) I, $J \subseteq I$, $a \notin I$, which is maximal with this property. I is prime.*

Lemma — Definition. *Let D be a distributive lattice, $a, b \in D$, $a < b$, I an ideal in D not containing b, F a dual ideal in D not containing a, which are both maximal* *with these properties and let $D = I \cup F$. Then $T = (I \times I) \cup (F \times F)$ is a compatible tolerance relation on D.*

Such tolerance relations will be called to be *of the type* τ.

Definition. By a *relative bicomplement* of a subinterval $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ of an interval $\langle a, b \rangle$ we mean an element x with the property $x \wedge \bar{a} = a$, $x \vee \bar{b} = b$.

A sublattice L of a lattice D is said to be *closed under relative bicomplements* if whenever $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ has a relative bicomplement in $\langle a, b \rangle$ in D, $a, b, \bar{a}, \bar{b} \in L$, then $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ has a relative bicomplement in $\langle a, b \rangle$ in L, too.

Let L be a sublattice of a lattice D, T a compatible tolerance relation on L. A compatible tolerance relation $\bar{T}$ on D is said to be an *extension* of T if $\bar{T}|_L = T$.

$[D, L]$ is said to have the *tolerance extension property* (TEP) (τ*-tolerance extension property* (τ TEP)) if every compatible tolerance relation on L(of the type τ) has an extension on D.

Lemma 2. *Let T be a compatible tolerance relation on the distributive lattice D. Let $a, b \in D$, $[a, b] \notin T$, $a < b$. Then there exists a compatible tolerance relation T_{ab} of the type τ containing T and not containing $[a, b]$.*

Proof. Suppose $a, b \in D$, $a < b$, T is a compatible tolerance relation on D, $[a, b] \notin T$. Let $A = \{x \in D \mid [x, a] \in T\}$, let J be the ideal in D generated by A. Clearly $b \notin J$, hence there exists (by Lemma 1) an ideal I_{ab} containing J and not containing b which is maximal with this property, I_{ab} prime. Let B denote the set $\{x \in D \mid [x, y] \in T \text{ for some } y \in D \setminus I_{ab}\}$. $B \neq \emptyset$ for $b \in B$. B is a dual ideal in D not containing a:

(i) $x, y \in B \Rightarrow \exists x', y' \in D \setminus I_{ab}$, $[x, x'], [y, y'] \in T \Rightarrow [x \wedge y, x' \wedge y'] \in T$, $x' \wedge \wedge y' \in D \setminus I_{ab}$ (for I_{ab} is prime) $\Rightarrow x \wedge y \in B$;

(ii) $x \in B$, $x \leqq y \Rightarrow \exists x' \in D \setminus I_{ab}$, $[x, x'] \in T \Rightarrow [y \vee x', y \vee x] \in T$, $y \vee x = y$, $y \vee x' \in D \setminus I_{ab} \Rightarrow y \in B$;

(iii) $a \notin B$ for $[x, a] \in T \Rightarrow x \in A \subseteq J \subseteq I_{ab}$.

By Lemma 1, there exists a dual ideal F_{ab} containing B and not containing a which is maximal with this property. $T \subseteq T_{ab} = (I_{ab} \times I_{ab}) \cup (F_{ab} \times F_{ab})$. Clearly $[a, b] \notin \notin T_{ab}$. Q.E.D.

Proposition 1. *Let T be a compatible tolerance relation on a distributive lattice L. Then T can be represented as an intersection of a set of compatible tolerance relations of the type τ.*

Proof. Let $C = (L \times L) \setminus T$. Clearly $T \subseteq \bigcap_{\substack{[a,b] \in C \\ a<b}} T_{ab}$. Conversely, if $[x, y] \notin T$, then by (2) $[x \wedge y, x \vee y] \notin T$, hence $[x \wedge y, x \vee y] \notin T_{x \wedge y, x \vee y}$, again by (2) $[x, y] \notin T_{x \wedge y, x \vee y}$ and therefore $[x, y] \notin \bigcap_{\substack{[a,b] \in C \\ a<b}} T_{ab}$. Consequently $T = \bigcap_{\substack{[a,b] \in C \\ a<b}} T_{ab}$. Q.E.D.

Proposition 2. $[D, L]$ *has* TEP *if and only if it has* τ TEP.

Proof. $\Rightarrow$ Clear.

$\Leftarrow$ Let T be a compatible tolerance relation on L. By Proposition 1 $T = \bigcap_{\substack{[a,b]\in C\\ a<b}} T_{ab}$, T_{ab} have extensions $\bar{T}_{ab}$. $\bigcap_{\substack{[a,b]\in C\\ a<b}} \bar{T}_{ab}$ is an extension of T: It is clearly a compatible tolerance relation on D, $T = \bigcap_{\substack{[a,b]\in C\\ a<b}} T_{ab} \subseteq \bigcap_{\substack{[a,b]\in C\\ a<b}} \bar{T}_{ab}$, $x, y \in L, [x, y] \in \bigcap_{\substack{[a,b]\in C\\ a<b}} \bar{T}_{ab} \Rightarrow [x, y] \in \bar{T}_{ab}\ \forall a, b \in L$, $a < b, [a, b] \notin T \Rightarrow [x, y] \in T_{ab}\ \forall a, b \in L, a < b, [a, b] \notin T \Rightarrow [x, y] \in \bigcap_{\substack{[a,b]\in C\\ a<b}} T_{ab} = T$. Q.E.D.

Proposition 3. *Let* L *be a sublattice of a distributive lattice* D *not closed under relative bicomplements. Then* $[D, L]$ *has not* TEP.

Proof. Let $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ be a subinterval of $\langle a, b \rangle$ which has a relative bicomplement x in D but no relative bicomplement in L. A compatible tolerance relation T of the type τ on L which has no extension on D will be constructed. Let A denote the set $\{d \in L \mid d \wedge \bar{a} = a\}$, let J be the ideal in L generated by $A \cup \{\bar{b}\}$. $b \notin J$ (as $b \in J \Rightarrow$ $\Rightarrow \bar{b} \vee \bigvee_{i=1}^{n} d_i \geqq b,\ d_i \in A \Rightarrow \bar{b} \vee (b \wedge \bigvee_{i=1}^{n} d_i) = (\bar{b} \vee b) \wedge (\bar{b} \vee \bigvee_{i=1}^{n} d_i) = b,\ \bar{a} \wedge$ $\wedge (b \wedge \bigvee_{i=1}^{n} d_i) = a$, i.e. $b \wedge \bigvee_{i=1}^{n} d_i$ is a relative bicomplement of $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ in $\langle a, b \rangle$ in L), therefore there exists in L an ideal I containing J and not containing b which is maximal with this property. Let E be the dual ideal in L generated by the set $(L \setminus I) \cup$ $\cup \{\bar{a}\}$. $a \notin E$ (as $a \in E \Rightarrow \exists x \in L \setminus I, x \wedge \bar{a} \leqq a \Rightarrow x \vee a \in L \setminus I, (x \vee a) \wedge \bar{a} = a \Rightarrow$ $\Rightarrow x \vee a \in A \subseteq J \subseteq I$). As far as F is the maximal dual ideal containing E and not containing a, $T = (I \times I) \cup (F \times F)$ is a compatible tolerance relation on L. If $\bar{T}$ were an extension of T on D, then $a = a \vee a = a \vee (x \wedge \bar{a})$, $b = b \wedge b =$ $= (\bar{b} \vee x) \wedge (\bar{b} \vee b) = \bar{b} \vee (x \wedge b)$, $[a \vee (x \wedge \bar{a}), \bar{b} \vee (x \wedge b)] \in \bar{T} \Rightarrow [a, b] \in \bar{T}$ which is a contradiction. Q.E.D.

Proposition 4. *If* L *is a sublattice of a distributive lattice* D *closed under relative bicomplements, then* $[D, L]$ *has* τ TEP.

Proof. Let T be a compatible tolerance relation of the type τ on L formed by an ideal I and a dual ideal F. Suppose the compatible tolerance relation $\bar{T}$ on D generated by T is not an extension of T, i.e. there exist $x, y \in L$, $x < y$, $[x, y] \in \bar{T}$, $[x, y] \notin T$. It is clearly $x \in L \setminus F$, $y \in L \setminus I$.

$[x, y] \in \bar{T}$ implies the existence of an $(m + n)$-ary term t such that

$$(*) \qquad x = \mathrm{t}(a_1, \ldots, a_m, x_1, \ldots, x_n), \quad y = \mathrm{t}(b_1, \ldots, b_m, x_1, \ldots, x_n)$$

for some $a_i, b_i \in L$, $[a_i, b_i] \in T$, $x_j \in D$.

It is known that in distributive lattices every p-ary term $t \equiv t(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ is equivalent to a term of the form

$$\bigvee \bigwedge \xi_{i_k}, \quad i_k \in \{1, \ldots, p\}.$$

It is easy to see that $(*)$ implies

$$x = \bigvee_{i=1}^{q} (c_i' \wedge y_i') \quad \text{and} \quad y = \bigvee_{i=1}^{q} (d_i' \wedge y_i')$$

for some $c_i', d_i' \in L$, $[c_i', d_i'] \in T$, $y_i' \in D$, $q \in \mathbf{N}$.

Denote

$$c_i = y \wedge (x \vee (c_i' \wedge d_i')), \quad d_i = y \wedge (x \vee c_i' \vee d_i'), \quad y_i = y \wedge (x \vee y_i').$$

Evidently, it holds

$$(**) \qquad x = \bigvee_{i=1}^{q} (c_i \wedge y_i), \quad y = \bigvee_{i=1}^{q} (d_i \wedge y_i),$$

$$c_i, d_i \in L, \quad x \leqq c_i \leqq d_i \leqq y, \quad [c_i, d_i] \in T, \quad x \leqq y_i \leqq y.$$

It can be supposed that the binomials in $(**)$ are indexed so that

$$c_i, d_i \in I \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, r < q \quad \text{and} \quad c_i, d_i \in F \quad \text{for} \quad i = r + 1, \ldots, q.$$

Denote $\bar{c} = \bigwedge_{i=1}^{r} c_i$, $\bar{d} = \bigvee_{i=1}^{r} d_i$, $\bar{\bar{c}} = \bigwedge_{i=r+1}^{q} c_i$, $\bar{\bar{d}} = \bigvee_{i=r+1}^{q} d_i$, $\bar{z} = \bigvee_{i=1}^{r} y_i$, $\bar{\bar{z}} = \bigvee_{i=r+1}^{q} y_i$.

Clearly $x \leqq \bar{c} \leqq \bar{d} \leqq y$, $x \leqq \bar{\bar{c}} \leqq \bar{\bar{d}} \leqq y$, $x \leqq \bar{z} \leqq y$, $x \leqq \bar{\bar{z}} \leqq y$.

$$x \leqq (\bar{c} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{\bar{c}} \wedge \bar{\bar{z}}) = \Big(\bigwedge_{j=1}^{r} c_j \wedge \bigvee_{i=1}^{r} y_i\Big) \vee \Big(\bigwedge_{j=r+1}^{q} c_j \wedge \bigvee_{i=r+1}^{q} y_i\Big) =$$

$$= \bigvee_{i=1}^{r} \Big(\bigwedge_{j=1}^{r} c_j \wedge y_i\Big) \vee \bigvee_{i=r+1}^{q} \Big(\bigwedge_{j=r+1}^{q} c_j \wedge y_i\Big) \leqq$$

$$\leqq \bigvee_{i=1}^{r} (c_i \wedge y_i) \vee \bigvee_{i=r+1}^{q} (c_i \wedge y_i) = x, \quad \text{hence} \quad x = (\bar{c} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{\bar{c}} \wedge \bar{\bar{z}}).$$

$$y \geqq (\bar{d} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{\bar{d}} \wedge \bar{\bar{z}}) = \Big(\bigvee_{j=1}^{r} d_j \wedge \bigvee_{i=1}^{r} y_i\Big) \vee \Big(\bigvee_{j=r+1}^{q} d_j \wedge \bigvee_{i=r+1}^{q} y_i\Big) =$$

$$= \bigvee_{i=1}^{r} \Big(\bigvee_{j=1}^{r} d_j \wedge y_i\Big) \vee \bigvee_{i=r+1}^{q} \Big(\bigvee_{j=r+1}^{q} d_j \wedge y_i\Big) \geqq$$

$$\geqq \bigvee_{i=1}^{r} (d_i \wedge y_i) \vee \bigvee_{i=r+1}^{q} (d_i \wedge y_i) = y, \quad \text{hence} \quad y = (\bar{d} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{\bar{d}} \wedge \bar{\bar{z}}).$$

If $F \cap I = \emptyset$, then T is a congruence and $\bar{T}$ is an extension of T.

Suppose $F \cap I \neq \emptyset$, let $e \in F \cap I$, $x \leqq e \leqq y$. Denote $\tilde{d} = \bar{d} \vee e$, $\tilde{c} = \bar{c} \wedge e$. Clearly $\tilde{c} \leqq \tilde{d}$, $\tilde{c}, \tilde{d} \in I \cap F$. Then $\bar{z} \wedge \tilde{c} = \bar{z} \wedge \bar{c} \wedge e = x$, $y \geqq \bar{z} \vee \tilde{d} = \bar{z} \vee \bar{d} \vee \vee e \geqq (\bar{z} \wedge \bar{d}) \vee (\bar{z} \wedge \bar{d}) \vee e = y$, thus $\bar{z}$ is a relative bicomplement of $\langle \tilde{c}, \tilde{d} \rangle$ in $\langle x, y \rangle$ in D. But $\langle \tilde{c}, \tilde{d} \rangle$ cannot have a relative bicomplement in $\langle x, y \rangle$ in L for if b were such a bicomplement, $x = x \vee x = x \vee (b \wedge \tilde{c})$, $y = \tilde{d} \vee b = \tilde{d} \vee (b \wedge y)$, $[x \vee (b \wedge \tilde{c}), \tilde{d} \vee (b \wedge y)] \in T \Rightarrow [x, y] \in T$. Consequently, L is not closed under relative bicomplements. Q.E.D.

An immediate consequence of Propositions 2, 3, 4 is

Theorem. *Let L be a sublattice of a distributive lattice D. $[D, L]$ has* TEP *if and only if L is closed in D under relative bicomplements.*

References

[1] *A. Day:* A congruence extension property. Algebra Univ. *1* (1971), 189—190.

[2] *E. C. Zeeman:* The topology of the brain and visual perception. In: The topology of 3-manifolds. Ed. by K. M. Fort, pp. 240—256.

[3] *B. Zelinka:* Tolerance in algebraic structures. Czech. Math. J. *20* (1970), 179—183.

[4] *B. Zelinka:* Tolerance in algebraic structures II. Czech. Math. J. *25* (1975), 175—178.

[5] *I. Chajda* and *B. Zelinka:* Tolerance relation on lattices. Časop. pěst. Mat. *99* (1974), 394—399.

Author's address: 602 00 Brno, Sady Osvobození 5.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

NOTES ON LATTICE CONGRUENCES

IVAN CHAJDA, Přerov

(Received August 11, 1976)

It is well-known that each ideal of a lattice L is a kernel of at least one congruence relation on L if and only if L is distributive (see e.g. [1]), and that there exists a one-to-one correspondence between congruences and ideals for relatively complementary distributive lattices (see [2]). An approach adopted in [3] enables us to investigate the relationship between congruences and ideals also for modular lattices.

Definition 1. Let J be an ideal of a given lattice L. Denote $a \vee J = \{a \vee j; j \in J\}$. A binary relation T_J on L defined by the rule

$\langle x, y\rangle \in T_J$ if and only if there exists $u \in L$ with $x, y \in u \vee J$ is said to be *induced by the ideal J.*

It is clear that T_J is a symmetrical relation on L. Further, for each $a \in L$ and an arbitrary $j \in J$ we have $a = a \vee (a \wedge j)$; clearly $a \wedge j \in J$, thus $a \in a \vee J$, which implies the reflexivity of T_J. Thus T_J is a tolerance relation on L (see [3]). In [3], conditions of the compatibility of T_J are studied (for the compatibility, see [4]). We shall now investigate the conditions for T_J to be a congruence relation. By Definition 1, if T_J is a congruence relation, J is a kernel of T_J.

Theorem 1. *Let L be a lattice and J an ideal of L. If the relation T_J induced by J is compatible on L, then T_J is a congruence relation on L.*

Proof. As T_J is reflexive, symmetrical and compatible, we must prove only its transitivity. Suppose $a, b, c \in L$ and $\langle a, b\rangle \in T_J$, $\langle b, c\rangle \in T_J$. Then there exist $u, v \in L$ and $i, j, k, l \in J$ with $a = u \vee i$, $b = u \vee j$, $b = v \vee k$, $c = v \vee l$. As $i, l \in J$, we have

$$(1^\circ) \qquad \langle i, l\rangle \in T_J\,.$$

From $u \in u \vee J$, $a \in u \vee J$ it follows $\langle u, a\rangle \in T_J$. Analogously it can be proved that $\langle u, b\rangle \in T_J$, $\langle v, b\rangle \in T_J$, $\langle v, c\rangle \in T_J$. As T_J is symmetrical, also $\langle b, v\rangle \in T_J$. From the compatibility of T_J then

(2°) $$\langle u, b\rangle \in T_J,\ \langle b, v\rangle \in T_J \Rightarrow \langle (u \wedge b), (b \wedge v)\rangle \in T_J .$$

From $b = u \vee j$ we have $b \geqq u$, from $b = v \vee k$ then $b \geqq v$. Then (2°) implies $\langle u, v\rangle \in T_J$, which together with (1°) implies

$$\langle (u \vee i), (v \vee l)\rangle \in T_J ,$$

thus $\langle a, c\rangle \in T_J$. Hence T_J is transitive.

Lemma 1. *Let L be a lattice and J its ideal. Let T_J be the relation induced by J. If $a, b, c, d \in L$ and $\langle a, b\rangle \in T_J$, $\langle c, d\rangle \in T_J$, then*

$$\langle (a \vee c), (b \vee d)\rangle \in T_J .$$

Proof. If $\langle a, b\rangle \in T_J$, $\langle c, d\rangle \in T_J$, then $a = u \vee i$, $b = u \vee j$, $c = v \vee k$, $d = v \vee l$ for some $u, v \in L$, $i, j, k, l \in J$. Hence $a \vee c = (u \vee v) \vee (i \vee k)$, $b \vee d = (u \vee v) \vee (j \vee l)$, thus $a \vee c \in (u \vee v) \vee J$ and $b \vee d \in (u \vee v) \vee J$, i.e. $\langle (a \vee c), (b \vee d)\rangle \in T_J$.

Lemma 2. *Let L be a lattice, J an ideal of L and T_J the relation induced by J. If $a, b \in L$ and $\langle a, b\rangle \in T_J$, then $a = (a \wedge b) \vee i$, $b = (a \wedge b) \vee j$ for some $i, j \in J$.*

Proof. If $\langle a, b\rangle \in T_J$, then by Definition 1, $a = u \vee i$, $b = u \vee j$ for some $u \in L$, $i, j \in J$. Hence $a \geqq a \wedge b \geqq u$, $a \geqq i$, thus $a = a \vee i \geqq (a \wedge b) \vee i \geqq u \vee i = a$, i.e. $a = (a \wedge b) \vee i$. Analogously it can be proved that $b = (a \wedge b) \vee j$.

Lemma 3. *Let L be a modular lattice, J an ideal of L and T_J the relation induced by J. Let $c, d \in L$ and $c \leqq d$. If $\langle c, d\rangle \in T_J$ and T_J is transitive, then $\langle (a \wedge d), (a \wedge c)\rangle \in T_J$ for each $a \in L$.*

Proof. Let $\langle c, d\rangle \in T_J$. Then there exist $u \in L$ and $i, j \in J$ with $c = u \vee j$, $d = u \vee i$. As $c \leqq d$ and L is modular, we have $j \leqq i$, thus $d = c \vee i$.

Put $x = a \wedge d$, $y = x \vee c$, $t = y \wedge i$. Then $y \geqq c$, $d \geqq x$. From these inequalities and by the modularity of L we obtain

$$c \vee t = c \vee (y \wedge i) = (c \vee i) \wedge y = d \wedge y = d \wedge (x \vee c) =$$
$$= (d \wedge x) \vee c = (d \wedge (a \wedge d)) \vee c = (a \wedge d) \vee c = y .$$

As $t \in J$, this implies $\langle y, c\rangle \in T_J$. From $y = c \vee t$, $t \leqq x \vee t$ and by the modularity of L it follows

$$((x \vee t) \wedge c) \vee t = (x \vee t) \wedge (c \vee t) = (x \vee t) \wedge (c \vee t \vee t) =$$
$$= (x \vee t) \wedge (y \vee t) = (x \vee t) \wedge (x \vee c \vee t) = x \vee t ,$$

hence $\langle (x \vee t) \wedge c, (x \vee t) \rangle \in T_J$. Clearly also $\langle (x \vee t), x \rangle \in T_J$. By the transitivity of T_J, $\langle (x \vee t) \wedge c, x \rangle \in T_J$. By Lemma 2, there exists $q \in J$ with $x = (x \wedge ((x \vee t) \wedge c)) \vee q$. However, $x \wedge ((x \vee t) \wedge c) = x \wedge c$, thus $x = (x \wedge c) \vee q$, i.e. $\langle x, (x \wedge c) \rangle \in T_J$. As $x \wedge c = a \wedge d \wedge c = a \wedge c$, this implies $\langle (a \wedge d), (a \wedge c) \rangle \in T_J$.

Theorem 2. *Let L be a modular lattice, J its ideal and T_J the relation induced by J. If T_J is transitive, then it is a congruence relation on L.*

Proof. If T_J is transitive, it is an equivalence relation on L. It remains to prove the compatibility of T_J. Let $a, b, c, d \in L$ and $\langle a, b \rangle \in T_J$, $\langle c, d \rangle \in T_J$. By Lemma 1, we must prove only that T_J preserves the operation $\wedge$. By Lemma 2, there exist $i, j \in J$ with $a = (a \wedge b) \vee i$, $b = (a \wedge b) \vee j$. By Theorem 1 in [3] ,$(a \wedge b) \vee J$ is a convex sublattice of L, thus

$$a \in (a \wedge b) \vee J,\ b \in (a \wedge b) \vee J \Rightarrow a \vee b \in (a \wedge b) \vee J\,,$$

hence $\langle (a \wedge b), (a \vee b) \rangle \in T_J$. Analogously it can be proved that $\langle (c \wedge d), (c \vee d) \rangle \in T_J$. By Lemma 3, this implies

$$\langle (a \wedge c \wedge d), (a \wedge (c \vee d)) \rangle \in T_J\,.$$

Thus $a \wedge c \wedge d \in u_0 \vee J$, $a \wedge (c \wedge d) \in u_0 \vee J$ for some $u_0 \in L$. By Theorem 1 in [3], $u_0 \vee J$ is a convex sublattice of L; clearly

$$a \wedge c \wedge d \leqq a \wedge c \leqq a \wedge (c \vee d)\,, \quad a \wedge c \wedge d \leqq a \wedge d \leqq a \wedge (c \vee d)\,,$$

thus also $a \wedge c \in u_0 \vee J$ and $a \wedge d \in u_0 \vee J$, hence $\langle (a \wedge c), (a \wedge d) \rangle \in T_J$. Analogously also $\langle (a \wedge d), (b \wedge d) \rangle \in T_J$, thus the transitivity of T_J implies $\langle (a \wedge c), (b \wedge d) \rangle \in T_J$, i.e. T_J is a compatible relation.

Corollary. *Let L be a modular lattice, J an ideal of L and T_J the relation induced by J. Then the following assertions are equivalent:*

(a) T_J is a compatible relation on L.
(b) T_J is transitive.
(c) T_J is an equivalence relation on L.
(d) T_J is a congruence relation on L with the kernel J.

Proof. The implication (d) $\Rightarrow$ (a) is clear and (a) $\Leftrightarrow$ (d) follows by Theorem 1. The implication (d) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b) is also clear and (b) $\Rightarrow$ (d) by Theorem 2.

The following concept is transferred from [3]:

Definition 2. Let L be a lattice and $c \in L$. If for each $a, b \in L$ the element c fulfils the identity

$$(a \vee c) \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c\,,$$

c is called a *semi-distributive element.*

Theorem 3. *Let L be a modular lattice and $j \in L$ a semi-distributive element. Let J be a principal ideal generated by j and T_J the relation induced by J. Then T_J is a congruence relation on L (with the kernel J).*

Proof. By Theorem 2 in [3], T_J is a compatible relation for the principal ideal J generated j (it means $J = \{x \in L;\ x \leqq j\}$). By Theorem 1, T_J is a congruence relation on L. Clearly, J is the kernel of this congruence.

References

[1] *Hashimoto J.:* Ideal Theory for Lattices, Math. Japonicae *2*, (1952), 149—186.

[2] *Szász G.:* Introduction to lattice theory, Akadem. Kiadó, Budapest 1963.

[3] *Chajda I.:* A construction of tolerances on modular lattices, Časop. pěst. matem. *101* (1976) Praha, 195—198.

[4] *Chajda I., Zelinka B.:* Compatible relations on algebras, Časop. pěst. mat. *100* (1975) Praha, 355—360.

Author's address: 750 00 Přerov, třída Lidových milicí 290.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

CUTS IN SIMPLE CONNECTED REGIONS AND THE CYCLIC ORDERING OF THE SYSTEM OF ALL BOUNDARY ELEMENTS

ILJA ČERNÝ, Praha

(Received September 16, 1976)

1. In the present paper we shall work in the *extended complex plane* $\mathbf{S}$; the *open complex plane* will be denoted by $\mathbf{E}$. By a *neighbourhood of a point* $z \in \mathbf{E}$ we mean any circle $U(z, \varepsilon) = \{\zeta \in \mathbf{E};\ |\zeta - z| < \varepsilon\}$ (where $\varepsilon \in (0, \infty)$); *neighbourhoods of the point* ∞ will be the sets $U(\infty, \varepsilon) = \{\zeta \in \mathbf{S};\ |\zeta| > 1/\varepsilon\}$ (where $\varepsilon \in (0, \infty)$ again). Neighbourhoods of points $z \in \mathbf{S}$ will be denoted briefly by $U(z)$ also. $\mathbf{N}$ will always denote *the set of all natural numbers*, $\mathbf{U} = U(0, 1)$ will be the *unit circle*, $\mathbf{C} = \partial\mathbf{U}$ the *unit circumference*. By ϱ^* we denote the *metric* in $\mathbf{S}$ obtained by transferring the cartesian metric of the threedimensional euclidean space by means of the stereographical projection of the unit sphere onto $\mathbf{S}$ (see [4], p. 24).

We shall use the common definition of the *topological limes superior* of a sequence of points $z_n \in \mathbf{S}$ or non-empty sets $M_n \subset \mathbf{S}$: $\operatorname{ls} z_n$ denotes the set of all accumulation points of $\{z_n\}$, $\operatorname{ls} M_n = \bigcup \operatorname{ls} z_n$ where the summation extends over all sequences of points $z_n \in M_n$ (cf. [1]). Note that $\operatorname{ls} z_n$ and $\operatorname{ls} M_n$ are non-empty compact sets (as $\mathbf{S}$ is compact). Besides, in what follows, we shall use the following two simple assertions:

(1) $$\emptyset \neq M_n \subset N_n \quad \text{for all} \quad n \Rightarrow \operatorname{ls} M_n \subset \operatorname{ls} N_n\,,$$

(2) if $\{M_n\}$ is a nonincreasing sequence of (non-empty) sets M_n, then

$$\operatorname{ls} M_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n\,.$$

The following implication concerns one of the basic properties of any conformal mapping F of Ω onto G (where Ω, G are open subsets of $\mathbf{S}$):

(3) $$z_n \in \Omega\,, \quad \operatorname{ls} z_n \subset \partial\Omega \Rightarrow \operatorname{ls} F(z_n) \subset \partial G\,.$$

It immediately implies that

(4) $$\emptyset \neq M_n \subset \Omega\,, \quad \operatorname{ls} M_n \subset \partial\Omega \Rightarrow \operatorname{ls} F(M_n) \subset \partial G\,.$$

(See [4], pp. 488–489.)

By a *curve in M* we understand any continuous mapping $\varphi : \langle\alpha, \beta\rangle \to M$ (where $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$); a *curve* will be a curve in $\mathbf{S}$. If $\varphi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbf{S}$ is a curve, we denote

(5) $$i.p.\ \varphi = \varphi(\alpha)\,, \quad e.p.\ \varphi = \varphi(\beta)\,,$$

(6) $$\langle\varphi\rangle = \varphi(\langle\alpha, \beta\rangle),\ (\varphi\rangle = \varphi((\alpha, \beta\rangle),\ \langle\varphi) = \varphi(\langle\alpha, \beta))\ (\varphi) = \varphi((\alpha, \beta))\,.$$

We say that the curve $\varphi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbf{S}$ is *simple*, iff the mapping φ is one-one. By a *closed curve* we understand as usual a curve φ with $i.p.\ \varphi = e.p.\ \varphi$. A *Jordan curve* will be any closed curve $\varphi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbf{S}$ such that both restrictions $\varphi \mid \langle\alpha, \beta)$, $\varphi \mid (\alpha, \beta\rangle$ are one-one. If φ is a Jordan curve in $\mathbf{E}$, we denote by Int φ (Ext φ) *the bounded* (*unbounded*) *component of* $\mathbf{S} - \langle\varphi\rangle$. A *Jordan region* will be any region (connected open set) Ω the boundary $\partial\Omega$ of which has the form $\langle\varphi\rangle$ where φ is a Jordan curve (in $\mathbf{S}$).

We introduce *the index of a point* $z \in \mathbf{S} - \langle\varphi\rangle$ *with respect to a closed curve* φ as usual (see e.g. [4], p. 214); notation: $\operatorname{ind}_\varphi z$. We say that a Jordan curve φ in $\mathbf{E}$ is *positively* (*negatively*) *oriented*, iff $\operatorname{ind}_\varphi = 1$ ($\operatorname{ind}_\varphi = -1$) on Int φ.

If $\varphi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbf{S}$ is a curve, we define the curve $\dot{-}\varphi$ by

(7) $$(\dot{-}\varphi)(t) = \varphi(-t)\,, \quad t \in \langle-\beta, -\alpha\rangle\,.$$

If $\psi : \langle\gamma, \delta\rangle \to \mathbf{S}$ is another curve and if $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$, we define the *oriented sum* $\varphi \dot{+} \psi$ of the curves φ, ψ by setting

(8) $$(\varphi \dot{+} \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{for } t \in \langle\alpha, \beta\rangle\,, \\ \psi(t - \beta + \gamma) & \text{for } t \in \langle\beta, \beta + \delta - \gamma\rangle\,. \end{cases}$$

We write $\varphi \dot{-} \psi$ for $\varphi \dot{+} (\dot{-}\psi)$ and speak of the *oriented difference* of φ, ψ. Sure it is clear what we mean by $\varphi_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \varphi_n$ (where $n \geqq 2$).

We say *the curves* $\varphi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbf{S}$, $\psi : \langle\gamma, \delta\rangle \to \mathbf{S}$ *differ only unsubstantially*, iff there is a continuous increasing mapping ω of $\langle\gamma, \delta\rangle$ onto $\langle\alpha, \beta\rangle$ with $\psi = \varphi \circ \omega$.

It is clear that $\langle\dot{-}\varphi\rangle = \langle\varphi\rangle$, that $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$, if the curves φ, ψ differ only unsubstantially, and that $\langle\varphi \dot{\pm} \psi\rangle = \langle\varphi\rangle \cup \langle\psi\rangle$, if the oriented sum (difference) exists.

In what follows we shall use the following "*θ-curve theorem*":

Theorem 1,1. *Suppose $\varphi = \varphi_1 \dot{+} \varphi_2$ is a positively oriented Jordan curve, λ a simple curve such that $i.p.\ \lambda = i.p.\ \varphi_1$, $e.p.\ \lambda = e.p.\ \varphi_1$, $(\lambda) \subset$ Int φ. Then $\omega_1 = \varphi_1 \dot{-} \lambda$, $\omega_2 = \varphi_2 \dot{+} \lambda$ are positively oriented Jordan curves and*

(9) $$\operatorname{Int} \varphi - (\lambda) = \operatorname{Int} \omega_1 \cup \operatorname{Int} \omega_2$$

where the sets on the right are disjoint.

(This theorem is an immediate consequence of the well known "*topological θ-curve theorem*" – see e.g. [1] – and of the basic properties of the index of a point with respect to a curve.)

If Ω is a region and φ a curve such that *i.p.* $\varphi \in \partial\Omega$, $(\varphi\rangle \subset \Omega$ we speak of a *curve φ from the boundary $\partial\Omega$ of the region Ω into Ω* (or: *from i.p. φ into Ω*). The following theorem is well known in the theory of conformal mappings (see [4], p. 531).

Theorem 1,2. *Suppose that F is a conformal mapping of Ω onto $\boldsymbol{U}$ and $\varphi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \to \boldsymbol{S}$ is a curve from $\partial\Omega$ into Ω. Then the limit $(F \circ \varphi)(\alpha+)$ exists. Besides, if $\varphi^* : \langle\alpha^*, \beta^*\rangle \to \boldsymbol{S}$ is another curve from $\partial\Omega$ into Ω, we have*

$$(F \circ \varphi)(\alpha+) = (F \circ \varphi^*)(\alpha^*+)\,,$$

iff the following condition is satisfied:

(10) $\varphi(\alpha) = \varphi^*(\alpha^*)$, *and for each neighbourhood $U(\varphi(\alpha))$ there is a curve λ in $U(\varphi(\alpha)) \cap \Omega$ with i.p. $\lambda \in \langle\varphi\rangle$, e.p. $\lambda \in \langle\varphi^*\rangle$.*

Remark 1. An assertion analogous to the first part of Theorem 1,2 holds, of course, for any curve $\varphi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \boldsymbol{S}$ with $\varphi(\beta) \in \partial\Omega$, $\langle\varphi) \subset \Omega$. Instead of $(F \circ \varphi)(\alpha+)$ we investigate, naturally, the limit $(F \circ \varphi)(\beta-)$.

This implies immediately that for any curve $\varphi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \boldsymbol{S}$ with $(\varphi) \subset \Omega$ and for any conformal mapping F of Ω onto $\boldsymbol{U}$ it is consistent to define a curve $\psi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \boldsymbol{S}$ by

(11)
$$\psi(t) = \begin{cases} (F \circ \varphi)(\alpha+)\,, & \text{if } t = \alpha\,, \\ (F \circ \varphi)(t)\,, & \text{if } t \in (\alpha, \beta)\,, \\ (F \circ \varphi)(\beta-)\,, & \text{if } t = \beta\,. \end{cases}$$

(If, e.g., $\varphi(\alpha) \in \Omega$, we have $(F \circ \varphi)(\alpha+) = F(\varphi(\alpha))$, of course.) We shall say that (under above conditions) the curve (11) is the *F-image of φ*.

Let Ω be a fixed region. Let us write, for a moment, $\varphi \sim \psi$, iff $\varphi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \boldsymbol{S}$, $\varphi^* : \langle\alpha^*, \beta^*\rangle \to \boldsymbol{S}$ are curves from $\partial\Omega$ into Ω satisfiing (10). It is obvious that the binary relation $\sim$ is reflexive, symmetric, and transitive, hence an equivalence. It partitions the set of all curves from $\partial\Omega$ into Ω into equivalence classes, which we call *bundles of curves* (*from $\partial\Omega$ into Ω*). (Cf. [4], p. 527.) By $\mathfrak{S}(\Omega)$ we denote *the set of all bundles* of curves from $\partial\Omega$ into Ω. If $\mathscr{S} \in \mathfrak{S}(\Omega)$, $\varphi \in \mathscr{S}$, $\varphi^* \in \mathscr{S}$, then *i.p.* $\varphi =$ = *i.p.* φ^*. Thus, it is consistent to define $o(\mathscr{S}) =$ *i.p.* φ, where $\varphi \in \mathscr{S}$. The point $o(\mathscr{S})$ will be called *the origin of $\mathscr{S}$*.

In what follows we shall use that

(12) in any bundle $\mathscr{S} \in \mathfrak{S}(\Omega)$ there are simple curves.

(Proof. Let $\varphi \in \mathscr{S}$, $\varphi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \boldsymbol{S}$. Then $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$ and, by a well known theorem – see, e.g., [1] – there is a simple curve $\psi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \langle\varphi\rangle$ such that $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$, $\psi(\beta) = \varphi(\beta)$. Obviously, $\psi \in \mathscr{S}$.)

By Theorem 1,2, we have: If F is a conformal mapping of Ω onto $\mathbf{U}$, $\mathscr{S} \in \mathfrak{S}(\Omega)$, $\varphi \in \mathscr{S}$ a curve defined in $\langle\alpha, \beta\rangle$, then the number $(F \circ \varphi)(\alpha+)$ is independent of the choise of the curve $\varphi \in \mathscr{S}$. We denote it by $W_F(\mathscr{S})$. (Cf. with [4], p. 537.)

Thus, for any region Ω conformally equivalent to $\mathbf{U}$ and for any conformal mapping F of Ω onto $\mathbf{U}$, we have defined the function $W_F : \mathfrak{S}(\Omega) \to \mathbf{C}$. By Theorem 1,2,

$$W_F \text{ is one-one (on } \mathfrak{S}(\Omega).) . \tag{13}$$

In what follows it will be important that

$$\overline{W_F(\mathfrak{S}(\Omega))} = \mathbf{C} . \tag{14}$$

(The proof of this assertion see, e.g., in [3], p. 402; of course, a little different terminology is used there.)

On the unit circumference $\mathbf{C}$ we define a *cyclic ordering* of triples of distinct points: We write $w_1 \prec w_2 \prec w_3$, iff there is a positively oriented Jordan curve $\omega : \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbf{S}$ with $\langle\omega\rangle = \mathbf{C}$, and a triple of points $t_j \in \langle\alpha, \beta)$ $(j = 1, 2, 3)$ such that $t_1 < t_2 < t_3$ and $w_j = \omega(t_j)$ for $j = 1, 2, 3$. Further, we write $w_1 \precsim w_2 \precsim w_3$, iff either $w_1 \prec w_2 \prec w_3$, or $w_1 = w_2$, or $w_2 = w_3$. Symbols like $w_1 \precsim w_2 \prec w_3$, $w_1 \prec w_2 \precsim w_3$ have an analogous meaning. The symbol

$$w_1' \prec w_2' \prec \ldots \prec w_n' \prec \ldots \prec w_0 \prec \ldots \prec w_n'' \prec \ldots \prec w_2'' \prec w_1''$$

will also appear; it will mean that there is a positively oriented Jordan curve ω : : $\langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbf{S}$ with $\langle\omega\rangle = \mathbf{C}$, and points $t_n', t_n'', t_0 \in \langle\alpha, \beta)$ such that $w_n' = \omega(t_n')$, $w_n'' = \omega(t_n'')$ for each $n \in \mathbf{N}$, $w_0 = \omega(t_0)$, and

$$t_1' < t_2' < \ldots < t_n' < \ldots < t_0 < \ldots < t_n'' < \ldots < t_2'' < t_1'' .$$

If $w_1 \neq w_2$, the set $C_1 = \{w \in \mathbf{C};\ w_1 \precsim w \precsim w_2\}$ is an arc of the circumference $\mathbf{C}$ joining w_1 with w_2; $\{w \in \mathbf{C};\ w_1 \prec w \prec w_2\}$ is the corresponding open arc, $C_2 = \{w \in \mathbf{C};\ w_2 \precsim w \precsim w_1\}$ the complementary arc.

Any mapping

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{az + b}{cz + d} & \text{for } z \in \mathbf{E} , \\ a/c & \text{for } z = \infty \end{cases} \tag{15}$$

where $a, b, c, d \in \mathbf{E}$ are numbers with $ad - bc \neq 0$ will be called a *linear fractional function*[1]).

[1]) We define $A/0 = \infty$ for $A \in \mathbf{S}$, $A \neq 0$.

Besides very familiar properties of linear fractional functions (see [4]) we need, in what follows, the following two ones:

(16) If F is a conformal mapping of $\mathbf{U}$ onto itself, then there is a linear fractional function f such that $f = F$ on $\mathbf{U}$.

(17) If f is a linear fractional function satisfiing $f(\mathbf{U}) = \mathbf{U}$, then the relation $w_1 \prec \prec w_2 \prec w_3$ implies the relation $f(w_1) \prec f(w_2) \prec f(w_3)$.

(For proofs of (16) and (17) see, e.g., [4], p. 470 and 543 resp.)

2. Suppose that Ω is a region and let $\varphi = \varphi_1 \dot{-} \varphi_2$ be a simple or Jordan curve such that the curves φ_1, φ_2 belong to distinct bundles from $\mathfrak{S}(\Omega)$. (The last condition is, obviously, independent of the decomposition of φ into the oriented difference of two curves.) Then the curve φ will be called a *cut in Ω*.

Theorem 2,1. *If φ is a cut in a region Ω conformally equivalent to $\mathbf{U}$, we have*

$$\Omega - (\varphi) = \Omega_1 \cup \Omega_2 \tag{18}$$

where Ω_1, Ω_2 are disjoint regions conformally equivalent to $\mathbf{U}$ and

$$\langle\varphi\rangle \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2\,, \quad \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega \cup (\varphi)\,. \tag{19}$$

Proof. By assumption, there is a conformal mapping F of Ω onto $\mathbf{U}$. Let ψ be the F-image of φ. By the definition of a cut and by the second part of Theorem 2,1, ψ is a simple cut in $\mathbf{U}$ [2]). By the "topological" "θ-curve theorem", this implies that

$$\mathbf{U} - (\psi) = U_1 \cup U_2 \tag{20}$$

where U_1, U_2 are disjoint Jordan regions. Besides, there exist two distinct points $w_1, w_2 \in \mathbf{C}$ such that the arcs

$$C_1 = \{w \in \mathbf{C};\ w_1 \leqq w \leqq w_2\}\,, \quad C_2 = \{w \in \mathbf{C};\ w_2 \leqq w \leqq w_1\} \tag{21}$$

have the following property:

$$\partial U_j = C_j \cup (\psi) \quad \text{for} \quad j = 1, 2\,.\text{[3])} \tag{22}$$

This implies that

$$\langle\psi\rangle = \partial U_1 \cap \partial U_2\,, \quad \partial U_1 \cup \partial U_2 = \mathbf{C} \cup (\psi)\,. \tag{23}$$

---

[2]) i.e. a simple curve which is a cut in $\mathbf{U}$.

[3]) Of course, we have $\{w_1, w_2\} = \{i.p.\ \psi,\ e.p.\ \psi\}$.

Put

$$\Omega_j = F_{-1}(U_j) \quad \text{for} \quad j = 1, 2\,. \tag{24}$$

Then Ω_j are disjoint regions conformally equivalent to $\mathbf{U}$ (since the Jordan regions U_j are conformally equivalent to $\mathbf{U}$). The equality (18) follows immediately from (20). The rest of the assertion of theorem 2,1 is an easy consequence of (3) and of the definition of the boundary.

Remark 1. It is easy to see that in the assertion of Theorem 2,1 it is not possible to replace the inclusion $\langle\varphi\rangle \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ by equality. More detailed informations about boundaries of the regions Ω_j are contained in Theorem 6,2 which follows.

Suppose that all assumptions of Theorem 2,1 are fulfilled and let φ^* be another cut in Ω. As it is easy to see, Ω_1 is a component of both $\Omega - (\varphi)$ and $\Omega - (\varphi^*)$, iff either the curves φ, φ^*, or the curves φ, $\dot{-}\varphi^*$ differ only unsubstantially (as only then $\langle\varphi\rangle = \langle\varphi^*\rangle$).

Lemma 1. *Let Ω be a region conformally equivalent to $\mathbf{U}$, let φ be a cut in Ω. For each conformal mapping F of Ω onto $\mathbf{U}$ denote by ψ_F the F-image of φ; further, put*

$$C_F^+ = \{w \in \mathbf{C};\ i.p.\ \psi_F \leqq w \leqq e.p.\ \psi_F\}\,, \tag{25}$$

$$C_F^- = \{w \in \mathbf{C};\ e.p.\ \psi_F \leqq w \leqq i.p.\ \psi_F\}$$

and suppose that U_F^+ resp. U_F^- is the component of $\mathbf{U} - (\psi_F)$ satisfiing

$$\partial U_F^+ = C_F^+ \cup (\psi_F) \quad resp. \quad \partial U_F^- = C_F^- \cup (\psi_F)\,. \tag{26}$$

Then, for any two conformal mappings F, G of Ω onto $\mathbf{U}$ we have

$$F_{-1}(U_F^+) = G_{-1}(U_G^+)\,, \quad F_{-1}(U_F^-) = G_{-1}(U_G^-)\,. \tag{27}$$

Proof. Let $\langle\alpha, \beta\rangle$ be the domain of the cut φ. If F, G are conformal mappings of Ω onto $\mathbf{U}$, then $F \circ G_{-1}$ is a conformal mapping of the circle $\mathbf{U}$ onto itself. By (16), there is a linear fractional function f such that $f = F \circ G_{-1}$ on $\mathbf{U}$. This implies that

$$i.p.\ \psi_F = (F \circ \varphi)(\alpha+) = ((f \circ G) \circ \varphi)(\alpha+) = f((G \circ \varphi)(\alpha+)) = f(i.p.\ \psi_G)\,.$$

Similarly, $e.p.\ \psi_F = f(e.p.\ \psi_G)$. By (17), this implies that

$$C_F^+ = f(C_G^+)\,, \quad C_F^- = f(C_G^-)\,. \tag{28}$$

Further, it follows that

$$U_F^+ = f(U_G^+)\,, \quad U_F^- = f(U_G^-)$$

so that

$$F_{-1}(U_F^+) = G_{-1}(f_{-1}(f(U_G^+))) = G_{-1}(U_G^+)\,.$$

This is the first equality in (27); the proof of the second one is analogous.

Remark 2. If all assumptions of Lemma 1 are satisfied and if we use the same notation, then the regions $F_{-1}(U_F^+)$, $F_{-1}(U_F^-)$ are independent of the choise of the conformal mapping F (of Ω onto $\boldsymbol{U}$). They depend only of the region Ω and the cut φ. Therefore, it is consistent to define

$$\Omega_\varphi^+ = F_{-1}(U_F^+)\,, \quad \Omega_\varphi^- = F_{-1}(U_F^-)$$

(where F is any conformal mapping of Ω onto $\boldsymbol{U}$ and where U_F^+, U_F^- are as in Lemma 1). We say then that *the component* Ω_φ^+ resp. Ω_φ^- *of* $\Omega - (\varphi)$ *lies on the right side* resp. *left side of the cut* φ.

Example 1. Suppose all assumptions of Theorem 1,1 are satisfied and use the same notation. Then the region Int ω_1 (Int w_2) lies on the right (left) side of the cut λ (in the Jordan region Int φ).

Remark 3. Let φ, φ^* be cuts in a region Ω (conformally equivalent to $\boldsymbol{U}$). Then $\Omega_\varphi^+ = \Omega_{\varphi^*}^+$ (and, as a consequence, $\Omega_\varphi^- = \Omega_{\varphi^*}^+$), iff the curves φ, φ^* differ only unsubstantially. The equality $\Omega_\varphi^+ = \Omega_{\varphi^*}^-$ (and, as a consequence, also the equality $\Omega_\varphi^- = \Omega_{\varphi^*}^+$) holds, iff the curves φ, $\dot{-}\varphi^*$ differ only unsubstantially.

3. Definition. Let Ω be a region conformally equivalent to $\boldsymbol{U}$. For each $n \in \boldsymbol{N}$ let $\varphi_n = \varphi_{n,1} \dot{-} \varphi_{n,2}$ be a cut in Ω and let Ω_n be a component of $\Omega - (\varphi_n)$. Suppose that the following four conditions hold:

I. The sequence $\{\Omega_n\}$ is nonincreasing.

II. For each pair of natural numbers $m \neq n$ we have $(\varphi_m) \cap (\varphi_n) = \emptyset$ and the curves $\varphi_{m,1}, \varphi_{m,2}, \varphi_{n,1}, \varphi_{n,2}$ belong to four distinct bundles from $\mathfrak{S}(\Omega)$.

III. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{\Omega}_n \subset \partial\Omega$.

IV. If $\varphi \in \mathscr{S}$, $\varphi^* \in \mathscr{S}^*$, where $\mathscr{S}, \mathscr{S}^* \in \mathfrak{S}(\Omega)$, and if $\langle\varphi\rangle \cap \Omega_n \neq \emptyset \neq \langle\varphi^*\rangle \cap \Omega_n$ for all $n \in \boldsymbol{N}$, then $\mathscr{S} = \mathscr{S}^*$.

Then we shall say that $\{\Omega_n\}$ is a *normal sequence in* Ω.

Remark 1. If Ω_n are as in the above definition, then the following condition (stronger than I) holds:

I*. For each $n \in \boldsymbol{N}$ we have $\bar{\Omega}_{n+1} \cap \Omega \subset \Omega_n$.

Condition I implies, namely, that $\bar{\Omega}_{n+1} \subset \bar{\Omega}_n$. As, by theorem 2.1,

$$\partial\Omega_n \subset \partial\Omega \cup (\varphi_n)\,, \quad \partial\Omega_{n+1} \subset \partial\Omega \cup (\varphi_{n+1})\,,$$

the inclusion $\bar{\Omega}_{n+1} \subset \bar{\Omega}_n$ implies that

$$\Omega_{n+1} \cup (\varphi_{n+1}) = \bar{\Omega}_{n+1} \cap \Omega \subset \bar{\Omega}_n \cap \Omega = \Omega_n \cup (\varphi_n)\,.$$

By condition II, however, $(\varphi_{n+1}) \cap (\varphi_n) = \emptyset$, so that $(\varphi_{n+1}) \subset \Omega_n$. This and the inclusion $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$ imply that $\bar{\Omega}_{n+1} \cap \Omega \subset \Omega_n$.

Theorem 3,1. *Let F be a conformal mapping of Ω onto $\mathbf{U}$. For each $n \in \mathbf{N}$ let $\varphi_n = \varphi_{n,1} \dotplus \varphi_{n,2}$ be a cut in Ω and ψ_n the F-image of φ_n. Then the following* 3 *assertions hold*:

1. *If condition* I *holds, then the condition* II *is equivalent to the following one*: *For each $n \in \mathbf{N}$, we have $\overline{F(\Omega_{n+1})} \cap \mathbf{U} \subset F(\Omega_n)$, and the arc $\overline{F(\Omega_{n+1})} \cap \mathbf{C}$ is a subset of the open arc $\overline{F(\Omega_n)} \cap \mathbf{C} - \{i.p.\ \psi_n,\ e.p.\ \psi_n\}$.*

2. *If conditions I–III hold, then the condition* IV *is equivalent to the statement that the set $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F(\Omega_n)}$ contains only one point.*

3. *Suppose that the sequence $\{\Omega_n\}$ is normal in Ω (so that conditions* I–IV *hold) and denote by w the only point of the set $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F(\Omega_n)}$. Then the sequence $\{F(\Omega_n)\}$ is normal in $\mathbf{U}$, for each $n \in \mathbf{N}$ the arc $\overline{F(\Omega_{n+1})} \cap \mathbf{C}$ is contained in the open arc $\overline{F(\Omega_n)} \cap \mathbf{C} - \{i.p.\ \psi_n,\ e.p.\ \psi_n\}$, the point w lies, for each $n \in \mathbf{N}$, on the open arc $\overline{F(\Omega_n)} \cap \mathbf{C} - \{i.p.\ \psi_n,\ e.p.\ \psi_n\}$, and the distance of w and the component of $\mathbf{U} - (\psi_n)$ distinct from $F(\Omega_n)$ is positive. Finally,*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\Omega}_n = \{z \in \partial\Omega;\ \text{there are } z_n \in \Omega \text{ with } z_n \to z,\ F(z_n) \to w\}\,. \tag{29}$$

Proof. As we can take $\dot{-}\varphi_n$ instead of φ_n, we may, without loss of generality, suppose that each region Ω_n lies on the right side of the cut φ_n. Then

$$\overline{F(\Omega_n)} \cap \mathbf{C} = \{w \in \mathbf{C};\ i.p.\ \psi_n \leqq w \leqq e.p.\ \psi_n\}$$

for each $n \in \mathbf{N}$.

1. If I is satisfied, we have $\overline{F(\Omega_{n+1})} \cap \mathbf{C} \subset \overline{F(\Omega_n)} \cap \mathbf{C}$ for each $n \in \mathbf{N}$. By Theorem 1,2, condition II is equivalent to the statement that, for any two distinct natural numbers m, n, the sets (ψ_m), (ψ_n) are disjoint and $i.p.\ \psi_m$, $e.p.\ \psi_m$, $i.p.\ \psi_n$, $e.p.\ \psi_n$ are four distinct points. Hence, the arc $\overline{F(\Omega_{n+1})} \cap \mathbf{C}$ is a subset of the open arc $\overline{F(\Omega_n)} \cap$ $\cap\, \mathbf{C} - \{i.p.\ \psi_n,\ e.p.\ \psi_n\}$.

The proof of the reverse assertion is similar.

2. Now suppose conditions I–III hold. Condition III may be, by (2), written

equivalently in the form $\operatorname{ls} \Omega_n \subset \partial\Omega$ and it implies, by (4) (where $G = \boldsymbol{U}$ must be set), that

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F(\Omega_n)} = \operatorname{ls} F(\Omega_n) \subset \boldsymbol{C} .$$

By a well known theorem, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F(\Omega_n)}$ is a continuum. Obviously, it is both non-empty and not equal to $\boldsymbol{C}$. Hence, it is an arc of the circumference $\boldsymbol{C}$ or a one-point set.

Suppose it is an arc. By (14), there exist two distinct points w', w'' of this arc, not equal to the end points of the arc, and belonging to the set $W_F(\mathfrak{S}(\Omega))$. Hence, there exist two distinct bundles $\mathscr{S}', \mathscr{S}'' \in \mathfrak{S}(\Omega)$ with $w' = W_F(\mathscr{S}')$, $w'' = W_F(\mathscr{S}'')$. Choose curves $\varphi' \in \mathscr{S}'$, $\varphi'' \in \mathscr{S}''$; without loss of generality we may suppose their domain is $\langle 0, 1 \rangle$. Let ψ', ψ'' be the F-image of φ', φ'', respectively. As $w' = \psi'(0)$, $w'' = \psi''(0)$ are interior points of the arc $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F(\Omega_n)}$ [4], they are interior points of each arc $\overline{F(\Omega_n)} \cap \cap \boldsymbol{C}$. Hence, $\langle \psi' \rangle \cap F(\Omega_n) \neq \emptyset \neq \langle \psi'' \rangle \cap F(\Omega_n)$ for each n, and, consequently, $\langle \varphi' \rangle \cap \Omega_n \neq \emptyset \neq \langle \varphi'' \rangle \cap \Omega_n$ for each n. Since the curves φ', φ'' belong to two distinct bundles from $\mathfrak{S}(\Omega)$, the condition IV does not hold.

Reversely, suppose the condition IV does not hold. Then there are curves φ', φ'' belonging to two distinct bundles $\mathscr{S}', \mathscr{S}'' \in \mathfrak{S}(\Omega)$ such that $\langle \varphi' \rangle \cap \Omega_n \neq \emptyset \neq \neq \langle \varphi'' \rangle \cap \Omega_n$ for each n. This implies, as it is easy to see, the points $W_F(\mathscr{S}')$, $W_F(\mathscr{S}'')$ belong to the continuum $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F(\Omega_n)}$. By (13), these points are distinct (so that the continuum $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F(\Omega_n)}$ contains more than one point).

3. Suppose the sequence $\{\Omega_n\}$ is normal in Ω. According to what we have proved already, the continuum $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F(\Omega_n)}$ contains one and only one point; denote it by w. As we easily see, it remains to prove the equality (29); all remaining assertions are either proved already, or they are obvious consequences of what has been said above.

Let $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\Omega}_n$. Then there is a sequence of points $z_n \in \Omega_n$ with $z_n \to z$. This implies $\operatorname{ls} F(z_n) \subset \operatorname{ls} F(\Omega_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F(\Omega_n)} = \{w\}$ so that $F(z_n) \to w$. This proves that the left side of (29) is a subset of the right one. Suppose, reversely, that $z \in \partial\Omega$ and that there are points $z_n \in \Omega$ with $z_n \to z$, $F(z_n) \to w$. Since, for each $m \in \boldsymbol{N}$, the distance of the point w and the component of $\boldsymbol{U} - (\psi_m)$ distinct from $F(\Omega_m)$ is positive, there is, for each $m \in \boldsymbol{N}$, an index n_m such that $F(z_n) \in F(\Omega_m)$ for each $n > n_m$. This implies $z_n \in \Omega_m$ for all $n > n_m$ and $z = \lim z_n \in \bar{\Omega}_m$ for all $m \in \boldsymbol{N}$, hence $z \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bar{\Omega}_m$. This completes the proof of the equality (29).

[4]) i.e. points of this arc distinct from both end points of it.

4. We shall say two sequences $\{\Omega_n\}$, $\{\Omega_m^*\}$ (for the time being, of arbitrary non-empty sets) are *mutually inscribed*, iff the following conditions hold:

$$(30)\qquad \bigwedge_n \bigvee_{m_n} \bigwedge_{m > m_n} [\Omega_m^* \subset \Omega_n]\,, \quad \bigwedge_m \bigvee_{n_m} \bigwedge_{n > n_m} [\Omega_n \subset \Omega_m^*]\,.$$

This represents a binary relation between some pairs of sequences of non-empty sets. As it is easy to see, the relation is reflexive, symmetric, and transitive. If Ω is a fixed region conformally equivalent to $\mathbf{U}$, the above relation partitions the set of all normal sequences in Ω into equivalence classes; these classes will be called *boundary elements of the region* Ω.

Thus, a boundary element of Ω is any non-empty system $\mathscr{H}$ of normal sequences in Ω satisfiing the following two conditions:

A. If $\{\Omega_n\} \in \mathscr{H}$ and if normal sequences $\{\Omega_n\}$, $\{\Omega_m^*\}$ are mutually inscribed, then $\{\Omega_m^*\} \in \mathscr{H}$.

B. If $\{\Omega_n\}$, $\{\Omega_m^*\} \in \mathscr{H}$, then the sequences $\{\Omega_n\}$, $\{\Omega_m^*\}$ are mutually inscribed.

By $\mathfrak{H}(\Omega)$ we denote *the system of all boundary elements of the region* Ω.

The geometric image of a boundary element $\mathscr{H} \in \mathfrak{H}(\Omega)$ will be the set

$$(31)\qquad \langle \mathscr{H} \rangle = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\Omega}_n \quad \text{where} \quad \{\Omega_n\} \in \mathscr{H}\,.$$

(Obviously, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\Omega}_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bar{\Omega}_m^*$ for any two mutually inscribed normal sequences $\{\Omega_n\}$, $\{\Omega_m^*\}$ so that the definition is consistent.)

If any conformal mapping F of Ω onto $\mathbf{U}$ is given, we define the following mapping γ_F of the system $\mathfrak{H}(\Omega)$ into $\mathbf{C}$: For each $\mathscr{H} \in \mathfrak{H}(\Omega)$, $\gamma_F(\mathscr{H})$ is the only point of the set $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F(\Omega_n)}$ where $\{\Omega_n\} \in \mathscr{H}$. (The set $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F(\Omega_n)}$ contains, by theorem 3,1, one and only one point, which is, obviously, independent of the choise of $\{\Omega_n\} \in \mathscr{H}$.)

Theorem 4,1. *If F is a conformal mapping of Ω onto $\mathbf{U}$, then γ_F is a one-one mapping of $\mathfrak{H}(\Omega)$ onto $\mathbf{C}$.*

Proof. First we prove the mapping γ_F is one-one: Let $\gamma_F(\mathscr{H}) = \gamma_F(\mathscr{H}^*) = w$ for a pair of elements $\mathscr{H}, \mathscr{H}^* \in \mathfrak{H}(\Omega)$. Let $\{\Omega_n\} \in \mathscr{H}$, $\{\Omega_m^*\} \in \mathscr{H}^*$. Then $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F(\Omega_n)} = \{w\}$, and, by theorem 3,1, dist $(w, \bar{U} - \overline{F(\Omega_n)}) > 0$ [5]) for each $n \in \mathbf{N}$. Hence, for each $n \in \mathbf{N}$ there is a neighbourhood $U_n(w)$ such that $U_n(w) \cap \bar{U} \subset \overline{F(\Omega_n)}$.

[5]) $\mathbf{U} - \overline{F(\Omega_n)}$ is the component of $\mathbf{U} - (\psi_n)$ distinct from $F(\Omega_n)$.

Since $\{w\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{F(\Omega_m^*)}$ so that, obviously, diam $F(\Omega_m^*) \to 0$, there is an m_n such that $\overline{F(\Omega_m^*)} \subset U_n(w)$ for all $m > m_n$. This proves that

$$\bigwedge_n \bigvee_{m_n} \bigwedge_{m>m_n} [\overline{F(\Omega_m^*)} \subset \overline{F(\Omega_n)}] .$$

Since the interior of the closure of any Jordan region is equal to this region (see [4], p. 556), it follows that

$$\bigwedge_n \bigvee_{m_n} \bigwedge_{m>m_n} [F(\Omega_m^*) \subset F(\Omega_n)] .$$

This implies the first condition of (30); the second one holds similarly. This proves the sequences $\{\Omega_n\}, \{\Omega_m^*\}$ are mutually inscribed so that $\mathscr{H} = \mathscr{H}^*$. This completes the proof the mapping γ_F is one-one.

For the proof of the implication

(32) $$w \in \mathbf{C} \Rightarrow \text{there is an } \mathscr{H} \in \mathfrak{H}(\Omega) \text{ with } \gamma_F(\mathscr{H}) = w$$

we need the following auxiliary assertion:

(33) For each $w \in \mathbf{C}$ and each $U(w)$ there is a cut φ in Ω with $\overline{F(\Omega_\varphi^+)} \subset U(w)$ such that the point w is an interior point of the arc $\overline{F(\Omega_\varphi^+)} \cap \mathbf{C}$.

First, let us prove the implication (32) by means of (33). The assertion (33) easily implies the existence of cuts φ_n in Ω such that:

a) $F(\Omega_{\varphi_{n+1}}^+) \subset F(\Omega_{\varphi_n}^+) \cap U(w, 1/n)$ for each $n \in \mathbf{N}$,

b) denoting by ψ_n the F-image of φ_n we have $\langle\psi_{n+1}\rangle \cap \langle\psi_n\rangle = \emptyset$ for each n and

$$i.p.\ \psi_1 \prec \ldots \prec i.p.\ \psi_n \prec \ldots \prec w \prec \ldots \prec e.p.\ \psi_n \prec \ldots \prec e.p.\ \psi_1 .$$

By Theorem 3,1, we easily prove the sequence $\{\Omega_{\varphi_n}^+\}$ is normal in Ω. Denoting by $\mathscr{H}$ the boundary element of the region Ω containing the sequence $\{\Omega_{\varphi_n}^+\}$ we obviously have $\gamma_F(\mathscr{H}) = \{w\}$.

It remains to prove (33). Suppose the point $w_0 \in \mathbf{C}$ and its neighbourhood $U(w_0)$ are given. By (14), there are points $w_1, w_2 \in U(w_0) \cap W_F(\mathfrak{S}(\Omega))$ with $w_1 \prec w_0 \prec \prec w_2$. Let $\mathscr{S}_j \in \mathfrak{S}(\Omega)$ $(j = 1, 2)$ be bundles such that $W_F(\mathscr{S}_j) = w_j$. By (12), each bundle $\mathscr{S}_j$ contains a simple curve φ_j; we may suppose the domains of both curves φ_j are equal to a certain interval $\langle\alpha, \beta\rangle$. If ψ_j denotes the F-image of φ_j, then ψ_j is a simple curve from the point w_j into $\mathbf{U}$.

As we easily see, there is a simple curve $\psi : \langle\alpha, \gamma\rangle \to U(w_0)$ such that:

a) $(\psi) \subset \mathbf{U}$,

b) $\psi = \omega_1 + \omega_2 \dot{-} \omega_3$ where $\omega_1 = \psi_1 \mid \langle\alpha, \delta\rangle$, $\omega_3 = \psi_2 \mid \langle\alpha, \delta\rangle$ for an appropriately chosen $\delta \in (\alpha, \beta\rangle$.

Then the function φ defined on $\langle\alpha, \gamma\rangle$ by

$$\varphi(\alpha) = o(\mathscr{S}_1), \quad \varphi(t) = F_{-1}(\psi(t)) \quad \text{for} \quad t \in (\alpha, \gamma), \quad \varphi(\gamma) = o(\mathscr{S}_2)$$

is, obviously, a cut in Ω. Since the boundary of the Jordan region $F(\Omega_\varphi^+)$, equal to $(\psi) \cup \{w \in \mathbf{C};\ w_1 \precsim w \precsim w_2\}$, is a subset of $U(w_0)$, the same holds for the set $\overline{F(\Omega_\varphi^+)}$. Besides, we have $w_0 \in \{w \in \mathbf{C};\ w_1 \prec w \prec w_2\}$ and $\overline{F(\Omega_\varphi^+)} \cap \mathbf{C} = \{w \in \mathbf{C};\ w_1 \precsim \precsim w \precsim w_2\}$.

This completes the proof of (33).

Theorem 4,2. *Let Ω be a region conformally equivalent to $\mathbf{U}$. Then for each bundle $\mathscr{S} \in \mathfrak{S}(\Omega)$ there is one and only one boundary element $\mathscr{H} \in \mathfrak{H}(\Omega)$ such that for each $\varphi \in \mathscr{S}$ and each sequence $\{\Omega_n\} \in \mathscr{H}$ we have $\langle\varphi\rangle \cap \Omega_n \neq \emptyset$ for all n. This element $\mathscr{H}$ has, further, the following two properties:*

1. *for each conformal mapping F of Ω onto $\mathbf{U}$ we have $W_F(\mathscr{S}) = \gamma_F(\mathscr{H})$;*

2. *if $\mathscr{H}^* \neq \mathscr{H}$ is another boundary element of the region Ω, then for each curve $\varphi \in \mathscr{S}$ and each sequence $\{\Omega_m^*\} \in \mathscr{H}^*$ there is an m_0 such that $\langle\varphi\rangle \cap \Omega_m^* = \emptyset$ for all $m > m_0$.*

Proof. Suppose the conformal mapping F of Ω onto $\mathbf{U}$ is fixed. By Theorem 4,1, for each bundle $\mathscr{S} \in \mathfrak{S}(\Omega)$ there is one and only one boundary element $\mathscr{H} \in \mathfrak{H}(\Omega)$ such that $W_F(\mathscr{S}) = \gamma_F(\mathscr{H})$.

Let $\mathscr{S} \in \mathfrak{S}(\Omega)$ and let $\mathscr{H} = (\gamma_F)_{-1}(W_F(\mathscr{S}))$ be the corresponding boundary element. If $\varphi \in \mathscr{S}$ is a curve defined on $\langle\alpha, \beta\rangle$ and $\{\Omega_n\} \in \mathscr{H}$ an arbitrary sequence, we have $W_F(\mathscr{S}) = (F \circ \varphi)(\alpha+)$ and, also, $\{W_F(\mathscr{S})\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F(\Omega_n)}$. The point $W_F(\mathscr{S})$ is an interior point of any arc $\overline{F(\Omega_n)} \cap \mathbf{C}$. If ψ denotes the F-image of φ, then *i.p.* $\psi = \psi(\alpha) = W_F(\mathscr{S})$. Hence, for each n, $\langle\psi\rangle \cap F(\Omega_n) \neq \emptyset$ (since by Theorem 3,1, $\operatorname{dist}(\psi(\alpha), \mathbf{U} - \overline{F(\Omega_n)}) > 0$). It follows immediately that $\langle\varphi\rangle \cap \Omega_n \neq \emptyset$ for each n.

If $\mathscr{H}^* \in \mathfrak{H}(\Omega)$, $\mathscr{H}^* \neq \mathscr{H}$, $\varphi \in \mathscr{S}$, $\{\Omega_m^*\} \in \mathscr{H}^*$, then $\gamma_F(\mathscr{H}^*) \neq \gamma_F(\mathscr{H})$ and $\operatorname{dist}(\gamma_F(\mathscr{H}^*), \langle\psi\rangle) > 0$ (where ψ is the F-image of φ). Since $\operatorname{diam} F(\Omega_m^*) \to 0$ for $m \to \infty$, we have $F(\Omega_m^*) \cap \langle\psi\rangle = \emptyset$, hence $\Omega_m^* \cap \langle\varphi\rangle = \emptyset$, for all m sufficiently large.

It remains to prove that for each conformal mapping G of Ω onto $\mathbf{U}$ the following implication holds:

If $\mathscr{S} \in \mathfrak{S}(\Omega)$, $\mathscr{H} \in \mathfrak{H}(\Omega)$, $W_F(\mathscr{S}) = \gamma_F(\mathscr{H})$, then $W_G(\mathscr{S}) = \gamma_G(\mathscr{H})$.

Then, however, $G \circ F_{-1}$ is a conformal mapping of $\mathbf{U}$ onto itself, and there is a linear fractional function f such that $f = G \circ F_{-1}$ on $\mathbf{U}$. This implies that for each curve $\varphi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbf{S}$, $\varphi \in \mathscr{S}$ we have

$$W_G(\mathscr{S}) = (G \circ \varphi)(\alpha+) = ((f \circ F) \circ \varphi)(\alpha+) = f((F \circ \varphi)(\alpha+)) = f(W_F(\mathscr{S})). \tag{34}$$

If $\{\Omega_n\} \in \mathscr{H}$, then, further,

$$(35) \qquad \{\gamma_G(\mathscr{H})\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G(\Omega_n)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f(F(\Omega_n))} = f(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F(\Omega_n)}) = \{f(\gamma_F(\mathscr{H}))\}\,.$$

Hence, the equality $W_F(\mathscr{S}) = \gamma_F(\mathscr{H})$ implies the equality $W_G(\mathscr{S}) = \gamma_G(\mathscr{H})$, which completes the proof of Theorem 4,2.

Definition. Suppose Ω is a region conformally equivalent to $\boldsymbol{U}$ and $\mathscr{S} \in \mathfrak{S}(\Omega)$. *The boundary element* (of the region Ω) *determined by the bundle* $\mathscr{S}$ will be the boundary element $\mathscr{H} \in \mathfrak{H}(\Omega)$ with the property that the condition $\langle\varphi\rangle \cap \Omega_n \neq \emptyset$ for each n holds for a certain (hence, for each) curve $\varphi \in \mathscr{S}$ and for a certain (hence, for each) sequence $\{\Omega_n\} \in \mathscr{H}$.

Remark 1. As we easily see, for the boundary element $\mathscr{H} \in \mathfrak{H}(\Omega)$ determined by the bundle $\mathscr{S} \in \mathfrak{S}(\Omega)$ the following condition holds: If $\varphi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \boldsymbol{S}$, $\varphi \in \mathscr{S}$, $\{\Omega_n\} \in \mathscr{H}$, then for each $n \in \boldsymbol{N}$ there is a $\delta_n > 0$ such that $\varphi((\alpha, \alpha + \delta_n)) \subset \Omega_n$.

5. It is convenient to introduce a *cyclic ordering* into the system $\mathfrak{H}(\Omega)$ (where Ω is a region conformally equivalent to $\boldsymbol{U}$) as follows: We write $\mathscr{H}_1 \prec \mathscr{H}_2 \prec \mathscr{H}_3$ [6]), iff for any conformal mapping F of Ω onto $\boldsymbol{U}$ the relation

$$(36) \qquad \gamma_F(\mathscr{H}_1) \prec \gamma_F(\mathscr{H}_2) \prec \gamma_F(\mathscr{H}_3)$$

holds.

Let us note that the validity of (36) for one conformal mapping F of Ω onto $\boldsymbol{U}$ implies the validity of a similar relation for any such mapping. Suppose, namely, G is another conformal mapping of Ω onto $\boldsymbol{U}$. Denoting by f the linear fractional function satisfiing $f = G \circ F_{-1}$ on $\boldsymbol{U}$ we have the equality $\gamma_G(\mathscr{H}) = f(\gamma_F(\mathscr{H}))$ for each boundary element $\mathscr{H} \in \mathfrak{H}(\Omega)$ (cf. (35)). By (17), the relation $\gamma_G(\mathscr{H}_1) \prec \prec \gamma_G(\mathscr{H}_2) \prec \gamma_G(\mathscr{H}_3)$ is a consequence of the relation (36).

Theorem 5,1. *For each boundary element $\mathscr{H}_0$ of the region Ω and for each open set M containing $\langle\mathscr{H}_0\rangle$ there are elements $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2 \in \mathfrak{H}(\Omega)$ with $\mathscr{H}_1 \prec \mathscr{H}_0 \prec \mathscr{H}_2$ such that*

$$(37) \qquad \mathscr{H}_1 \prec \mathscr{H} \prec \mathscr{H}_2 \Rightarrow \langle\mathscr{H}\rangle \subset M\,.$$

Proof. Suppose the assertion does not hold. Then there is an element $\mathscr{H}_0 \in \mathfrak{H}(\Omega)$ and an open set M containing $\langle\mathscr{H}_0\rangle$ such that for each two elements $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2 \in \in \mathfrak{H}(\Omega)$ satifiing $\mathscr{H}_1 \prec \mathscr{H}_0 \prec \mathscr{H}_2$ there is an element $\mathscr{H} \in \mathfrak{H}(\Omega)$ such that $\mathscr{H}_1 \prec \prec \mathscr{H} \prec \mathscr{H}_2$ and $\langle\mathscr{H}\rangle - M \neq \emptyset$.

[6]) The confusion of the sign $\prec$ for cyclic ordering in $\boldsymbol{C}$ with the sign now introduced will sure not take place.

Fix a conformal mapping F of Ω onto $\mathbf{U}$ and let $w_0 = \gamma_F(\mathscr{H}_0)$. Choose points $w_n^1, w_n^2 \in \mathbf{C}$ such that

$$(38) \qquad w_n^1 \to w_0 \, , \quad w_n^2 \to w_0 \, ,$$

$$(39) \qquad w_1^1 \prec w_2^1 \prec \ldots \prec w_n^1 \prec \ldots \prec w_0 \prec \ldots \prec w_n^2 \prec \ldots \prec w_2^2 \prec w_1^2$$

and denote

$$(40) \qquad \mathscr{H}_n^j = (\gamma_F)_{-1}\,(w_n^j) \quad \text{for} \quad j = 1, 2 \quad \text{and} \quad n \in \mathbf{N} \, .$$

Then $\mathscr{H}_n^1 \prec \mathscr{H}_0 \prec \mathscr{H}_n^2$ for each n and, by assumption, there are elements $\mathscr{H}_n \in \mathfrak{H}(\Omega)$ with $\mathscr{H}_n^1 \prec \mathscr{H}_n \prec \mathscr{H}_n^2$ and $\langle \mathscr{H}_n \rangle - M \neq \emptyset$. Denote $w_n = \gamma_F(\mathscr{H}_n)$ and choose points $z_n \in \langle \mathscr{H}_n \rangle - M$. By (29), for each $n \in \mathbf{N}$ there is a point $z_n^* \in \Omega$ such that

$$(41) \qquad \varrho^*(z_n^*, z_n) < \frac{1}{n} \, , \quad \varrho^*(F(z_n^*), w_n) < \frac{1}{n} \, .$$

The relation $\mathscr{H}_n^1 \prec \mathscr{H}_n \prec \mathscr{H}_n^2$ implies that $w_n^1 \prec w_n \prec w_n^2$. Thus, by (38), we have $w_n \to w_0$; (41) implies that $F(z_n^*) \to w_0$ also. There is a convergent subsequence $\{z_{n_k}\}$ of $\{z_n\}$; denoting $z_0 = \lim z_{n_k}$ we have

$$z_{n_k}^* \to z_0 \, , \quad F(z_{n_k}^*) \to w_0 \, ,$$

which implies $z_0 \in \langle \mathscr{H}_0 \rangle$. This is a contradiction to the fact none of the points z_{n_k} lies in the open set M containing $\langle \mathscr{H}_0 \rangle$.

This contradiction completes the proof of Theorem 5,1.

6. It is quite easy to prove the following theorem (the proof of which we do not present, since we need it only for making clear the significance of the assertion which then follows):

Theorem 6,1. *Suppose Ω, Ω^* are two regions conformally equivalent to $\mathbf{U}$. Let $\mathscr{H}_j \in \mathfrak{H}(\Omega)$, $\mathscr{H}_j^* \in \mathfrak{H}(\Omega^*)$ be two arbitrary triples of boundary elements such that*

$$(42) \qquad \mathscr{H}_1 \prec \mathscr{H}_2 \prec \mathscr{H}_3 \, , \quad \mathscr{H}_1^* \prec \mathscr{H}_2^* \prec \mathscr{H}_3^* \, .$$

Then there exists one and only one conformal mapping F of Ω onto Ω^* such that for each $j = 1, 2, 3$ the following implication holds:

$$(43) \qquad z_n \in \Omega \, , \quad \operatorname{ls} z_n \subset \langle \mathscr{H}_j \rangle \Rightarrow \operatorname{ls} F(z_n) \subset \langle \mathscr{H}_j^* \rangle \, .$$

Theorem 6,1 shows the cyclic ordering of the system of all boundary elements plays an important role in certain fundamental questions of the theory of conformal mappings. Theorem 6,2 contains several criteria for the relation $\mathscr{H}_1 \prec \mathscr{H}_2 \prec \mathscr{H}_3$.

Note that the verifiing of this relation immediately by the definition is, excluding the most trivial cases, practically impossible, since further properties of conformal mappings F of Ω onto $\mathbf{U}$ are unknown. The assertions presented in what follows make it possible to decide (also in many concrete situations) which component of $\Omega - (\varphi)$ lies on the right (left) side of the cut φ in Ω. Further informations, very useful in many aplications, about boundaries of the components of $\Omega - (\varphi)$ are presented also. Besides, these assertions contain several fundamental informations connected with the possibility of a continuous extension of a conformal mapping to a certain part of the boundary of its definition domain.

Theorem 6,2. 1. *Suppose φ is a cut in a region Ω conformally equivalent to $\mathbf{U}$; let $\langle\alpha, \beta\rangle$ be its definition domain. Denote by $\mathscr{S}_0$ resp. $\mathscr{S}_1$ the bundle from $\mathfrak{S}(\Omega)$ containing the curve $\varphi \mid \langle\alpha, \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\rangle$ resp. $\dot{-}\varphi \mid \langle\frac{1}{2}(\alpha + \beta), \beta\rangle$, and let $\mathscr{H}_0$ resp. $\mathscr{H}_1$ be the boundary element of the region Ω determined by the bundle $\mathscr{S}_0$ resp. $\mathscr{S}_1$.*

Then

$$(44') \qquad \bigcup_{\mathscr{H}_0 \prec \mathscr{H} \prec \mathscr{H}_1} \langle\mathscr{H}\rangle \cup (\varphi) \subset \partial\Omega_\varphi^+ \subset \bigcup_{\mathscr{H}_0 \preceq \mathscr{H} \preceq \mathscr{H}_1} \langle\mathscr{H}\rangle \cup (\varphi),$$

$$(44'') \qquad \bigcup_{\mathscr{H}_1 \prec \mathscr{H} \prec \mathscr{H}_0} \langle\mathscr{H}\rangle \cup (\varphi) \subset \partial\Omega_\varphi^- \subset \bigcup_{\mathscr{H}_1 \preceq \mathscr{H} \preceq \mathscr{H}_0} \langle\mathscr{H}\rangle \cup (\varphi).$$

Further, if both sets $\langle\mathscr{H}_0\rangle$, $\langle\mathscr{H}_1\rangle$ contain only one point, the following equalities hold:

$$(45) \qquad \partial\Omega_\varphi^+ = \bigcup_{\mathscr{H}_0 \preceq \mathscr{H} \preceq \mathscr{H}_1} \langle\mathscr{H}\rangle \cup (\varphi), \quad \partial\Omega_\varphi^- = \bigcup_{\mathscr{H}_1 \preceq \mathscr{H} \prec \mathscr{H}_0} \langle\mathscr{H}\rangle \cup (\varphi).$$

2. *Let all assumptions of the first part of the theorem hold. Let φ_1 be a simple curve satisfiing i.p. $\varphi_1 = \varphi(t_1)$, e.p. $\varphi_1 = \varphi(t_2)$, where $\alpha < t_1 < t_2 < \beta$, and $(\varphi_1) \subset \Omega - (\varphi)$. Put $\varphi_2 = \varphi \mid \langle t_1, t_2\rangle$, $\varphi^* = \varphi_1 \dot{-} \varphi_2$. Suppose the Jordan curve φ^* is positively oriented and* Int $\varphi^* \subset \Omega$.

Then Int $\varphi^* \cup (\varphi_1) \subset \Omega_\varphi^+$.

3. *Let all assumptions of the first part of the theorem hold. If φ is a negatively oriented Jordan curve, then $\Omega_\varphi^+ = \Omega \cap$* Int φ, *and the following two implications hold:*

$$(46) \qquad \langle\mathscr{H}\rangle \subset \operatorname{Int}\varphi \Rightarrow \mathscr{H}_0 \prec \mathscr{H} \prec \mathscr{H}_1, \quad \langle\mathscr{H}\rangle \subset \operatorname{Ext}\varphi \Rightarrow \mathscr{H}_1 \prec \mathscr{H} \prec \mathscr{H}_0.$$

4. *Let all assumptions of the first part of the theorem hold. Let φ be a simple curve, λ a simple curve in $\partial\Omega$ such that* a) *i.p. λ = i.p. φ, e.p. λ = e.p. φ,* b) *the Jordan curve $\lambda \dot{-} \varphi$ is positively oriented, and* c) Int $(\lambda \dot{-} \varphi) \subset \Omega$.

Then $\Omega_\varphi^+ =$ Int $(\lambda \dot{-} \varphi)$.

Further, suppose the definition domain of the curve λ is $\langle 0, 1\rangle$. For each $t \in (0, 1)$ let $\mathscr{S}_t \in \mathfrak{S}(\Omega)$ be the bundle containing a curve from $\lambda(t)$ into $\operatorname{Int}(\lambda \dotminus \varphi)$. *Denote by $\mathscr{H}_t$ (where $t \in (0, 1)$) the boundary element of the region Ω determined by the bundle $\mathscr{S}_t$. Then the following four assertions hold:*

(47) $\mathscr{H}_0 \prec \mathscr{H}_t \prec \mathscr{H}_1$ *for each* $t \in (0, 1)$.

(48) *If* $t_1, t_2 \in (0, 1)$, *then* $\mathscr{H}_0 \prec \mathscr{H}_{t_1} \prec \mathscr{H}_{t_2} \prec \mathscr{H}_1$, *iff* $t_1 < t_2$.

(49) *The function $\gamma_F(\mathscr{H}_t)$ is a one-one and continuous mapping of the interval $\langle 0, 1\rangle$ onto the arc $\{w \in \mathbf{C};\ \gamma_F(\mathscr{H}_0) \leqq w \leqq \gamma_F(\mathscr{H}_1)\}$ of the circumference $\mathbf{C}$.*

(50) $\langle \mathscr{H}_t \rangle = \{\lambda(t)\}$ *for each* $t \in (0, 1)$.

5. *Let all assumptions of the first part of the theorem hold. Suppose φ is a Jordan curve in $\mathbf{E}$ and $\lambda : \langle 0, 1\rangle \to \partial\Omega \cap \mathbf{E}$ is a Jordan curve with i.p. λ = i.p. φ.*

If $(\varphi) \subset \operatorname{Int} \lambda$ (resp. $(\varphi) \subset \operatorname{Ext} \lambda$), denote $G = \operatorname{Int} \lambda \cap \operatorname{Ext} \varphi$ (resp. $G = \operatorname{Ext} \lambda \cap \cap \operatorname{Int} \varphi$) and suppose the curves φ, λ are positively (resp. negatively) oriented. Suppose, further, $G \subset \Omega$, and for each $t \in (0, 1)$ let $\mathscr{S}_t \in \mathfrak{S}(\Omega)$ be the bundle containing a curve from $\lambda(t)$ into G, $\mathscr{H}_t \in \mathfrak{H}(\Omega)$ the boundary element determined by the bundle $\mathscr{S}_t$.

Then $\Omega_\varphi^+ = G$, and assertions (47)–(50) hold.

Proof. Since φ will be a fixed cut in the region Ω, we shall write Ω^+ resp. Ω^- instead of Ω_φ^+ resp. Ω_φ^-. Let us fix a conformal mapping F of Ω onto $\mathbf{U}$ and denote by ψ the F-image of φ. Then

(51) $$\mathbf{U} - (\psi) = U^+ \cup U^-$$

where U^+, U^- are components of $\mathbf{U} - (\psi)$, hence disjoint Jordan regions. Choose notation so that

(52) $$\partial U^+ = (\psi) \cup C^+ , \quad \partial U^- = (\psi) \cup C^-$$

where

(53) $$C^+ = \{w \in \mathbf{C};\ \psi(\alpha) \leqq w \leqq \psi(\beta)\} , \quad C^- = \{w \in \mathbf{C};\ \psi(\beta) \leqq w \leqq \psi(\alpha)\} .$$

Then, by definition,

(54) $$\Omega^+ = F_{-1}(U^+) , \quad \Omega^- = F_{-1}(U^-) .$$

Since $\mathscr{H}_0$ resp. $\mathscr{H}_1$ is the boundary element determined by the bundle $\mathscr{S}_0$ resp. $\mathscr{S}_1$, we have, by definition of these bundles,

(55) $$\gamma_F(\mathscr{H}_0) = W_F(\mathscr{S}_0) = \psi(\alpha) , \quad \gamma_F(\mathscr{H}_1) = W_F(\mathscr{S}_1) = \psi(\beta) .$$

1. We first prove (by assumptions of the first part of the theorem) the inclusions (44'). The condition $\mathscr{H}_0 \prec \mathscr{H} \prec \mathscr{H}_1$ means, by definition and by (55), that $\psi(\alpha) \prec$

$\prec \gamma_F(\mathscr{H}) \prec \psi(\beta)$, i.e. $\gamma_F(\mathscr{H}) \in \hat{C}^+$. (If L is an arc with end points a, b we denote, in what follows, by $\hat{L}$ the corresponding open arc $L - \{a, b\}$.) This implies $\operatorname{dist}(\gamma_F(\mathscr{H}), \overline{U^-}) > 0$. If $\{\Omega_n\} \in \mathscr{H}$, then $\{\gamma_F(\mathscr{H})\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F(\Omega_n)}$ and $\operatorname{diam} \overline{F(\Omega_n)} \to 0$. This implies $F(\Omega_n) \subset U^+$ for all sufficiently large n, so that, for such n, we have $\Omega_n \subset \Omega^+$, hence $\bar{\Omega}_n \subset \bar{\Omega}^+$. Thus, $\langle \mathscr{H} \rangle = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\Omega}_n \subset \bar{\Omega}^+ \cap \partial\Omega$, and, by Theorem 2,1, $\bar{\Omega}^+ \cap \partial\Omega \subset \partial\Omega^+$. This proves that $\bigcup_{\mathscr{H}_1 \prec \mathscr{H} \prec \mathscr{H}_2} \langle \mathscr{H} \rangle \subset \partial\Omega^+$; by Theorem 2,1, this implies

$$\bigcup_{\mathscr{H}_1 \prec \mathscr{H} \prec \mathscr{H}_2} \langle \mathscr{H} \rangle \cup (\varphi) \subset \partial\Omega^+ . \tag{56}$$

Now suppose that $z \in \partial\Omega^+ - (\varphi)$; then, by Theorem 2,1, we have $z \in \partial\Omega$. Since $z \in \partial\Omega^+$, there are points $z_n \in \Omega^+$ with $z_n \to z$. Since there is a convergent subsequence, we may suppose that $\lim F(z_n) = w$ exists. Since $F(z_n) \in U^+$, we have $w \in \partial U^+$; since $z \in \partial\Omega$, we have $w \in \mathbf{C}$. This yields $w \in \partial U^+ \cap \mathbf{C} = C^+$.

Let $\mathscr{H} \in \mathfrak{H}(\Omega)$ be the element with $\gamma_F(\mathscr{H}) = w$. Then $\mathscr{H}_0 \leqq \mathscr{H} \leqq \mathscr{H}_1$ and $z \in \langle \mathscr{H} \rangle$. This proves the inclusion

$$\partial\Omega^- - (\varphi) \subset \bigcup_{\mathscr{H}_0 \leqq \mathscr{H} \leqq \mathscr{H}_1} \langle \mathscr{H} \rangle . \tag{57}$$

(56) and (57) implie (44′). The proof of (44″) is analogous.

Now suppose the set $\langle \mathscr{H}_0 \rangle$ contains only one point z_0. Since $\psi(\alpha) \in \partial U^+$, there are points $w_n \in U^+$ with $w_n \to \psi(\alpha)$. By (29) and by definition of $\langle \mathscr{H}_0 \rangle$, we have $\operatorname{ls} F_{-1}(w_n) \subset \langle \mathscr{H}_0 \rangle$ $(=\{z_0\})$, so that $\lim F_{-1}(w_n) = z_0$. Since $F_{-1}(w_n) \in \Omega^+$, we have, by (3), $z_0 \in \partial\Omega^+$. Hence, the inclusion $\langle \mathscr{H}_0 \rangle \subset \partial\Omega^+$ holds. We prove similarly that $\langle \mathscr{H}_1 \rangle \subset \partial\Omega^+$, if $\langle \mathscr{H}_1 \rangle$ contains one point only. By Theorem 2,1, we have $(\varphi) \subset \partial\Omega^+$.

Thus, by (56), if both $\langle \mathscr{H}_0 \rangle$ and $\langle \mathscr{H}_1 \rangle$ contain one point only, we have

$$\bigcup_{\mathscr{H}_0 \leqq \mathscr{H} \leqq \mathscr{H}_1} \langle \mathscr{H} \rangle \cup (\varphi) \subset \partial\Omega^+ . \tag{58}$$

This, together with (57), yields the first equality in (45); the proof of the other one is similar.

2. Let all assumptions of the second part of the theorem be fulfilled. By them, we have $\overline{\operatorname{Int} \varphi^*} \subset \Omega$. Since the curve φ^* is positively oriented and since the mapping F is holomorphic on Ω, by a well known theorem (see [4], p. 572), the curve $\psi^* = F \circ \varphi^*$ also is positively oriented.

Choose simple curves ω^+, ω^- such that $\langle \omega^+ \rangle = C^+$, $\langle \omega^- \rangle = C^-$ and that $\omega = \omega^+ + \omega^-$ is a positively oriented Jordan curve. Then, by Theorem 1,1, the curves $\omega^+ \dotplus \psi$, $\omega^- + \psi$ also are positively oriented, and $\operatorname{Int}(\omega^+ \dotplus \psi) = U^+$, $\operatorname{Int}(\omega^- + \psi) = U^-$.

The inclusion $(\psi_1) \subset U^-$ for the curve $\psi_1 = F \circ \varphi_1$ would, by Theorem 1,1, implie the curve $\dot{-}\psi^* = F \circ \varphi_2 \dotplus \psi_1 = \psi \mid \langle t_1, t_2 \rangle \dotplus \psi_1$ is positively oriented, which is a contradiction. Therefore, $(\psi_1) \subset U^+$ so that $(\varphi_1) \subset \Omega^+$.

As $\langle \varphi_2 \rangle = \varphi(\langle t_1, t_2 \rangle)$ is a subset of the boundary of the region $\operatorname{Int} \varphi^*$, we have

$$\varphi(\langle t_1, t_2 \rangle) \cap \operatorname{Int} \varphi^* = \emptyset \,. \tag{59}$$

From the inclusion $\overline{\operatorname{Int} \varphi^*} \subset \Omega$ it follows that $\partial\Omega \subset \mathbf{S} - \Omega \subset \operatorname{Ext} \varphi^*$. Since the sets $\varphi(\langle \alpha, t_1))$, $\varphi((t_2, \beta \rangle)$ are connected and disjoint with $\langle \varphi^* \rangle = \partial(\operatorname{Ext} \varphi^*)$, and since the sets $\varphi(\langle \alpha, t_1)) \cap \partial\Omega$, $\varphi((t_2, \beta \rangle) \cap \partial\Omega$ (containing $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$, respectively) are non-empty, we have

$$\varphi(\langle \alpha, t_1)) \cup \varphi((t_2, \beta \rangle) \subset \operatorname{Ext} \varphi^* \,. \tag{60}$$

(59) and (60) implie $\langle \varphi \rangle \cap \operatorname{Int} \varphi^* = \emptyset$. Thus, the connected set $\operatorname{Int} \varphi^* \subset \Omega$ is a subset of one of the components Ω^+, Ω^- of the set $\Omega - (\varphi)$, whereas $\overline{\operatorname{Int} \varphi^*}$ is disjoint with the other one. Since $(\varphi_1) \subset \Omega^+ \cap \overline{\operatorname{Int} \varphi^*}$, we have $\operatorname{Int} \varphi^* \cup (\varphi_1) \subset \Omega^+$, which completes the proof of the second part of the theorem.

3. Let all assumptions of the third part of the theorem be fulfilled. It is not too difficult to prove the sets

$$\Omega \cap \operatorname{Int} \varphi \,, \quad \Omega \cap \operatorname{Ext} \varphi \tag{61}$$

are components of the set $\Omega - (\varphi)$. (The proof will be left to the reader.) In order to prove $\Omega^+ = \Omega \cap \operatorname{Int} \varphi$ it is sufficient, by the 2. part of the present theorem, to find a curve φ_1 with properties mentioned there and such that $(\varphi_1) \subset \Omega \cap \operatorname{Int} \varphi$.

We prove easily that

$$\partial(\Omega \cap \operatorname{Int} \varphi) = (\partial\Omega \cap \operatorname{Int} \varphi) \cup \langle \varphi \rangle \tag{62}$$

and that the set (φ) is open in $\partial(\Omega \cap \operatorname{Int} \varphi)$. By a well known theorem (see e.g. [4], p. 527), the set of all points $z \in (\varphi)$ accessible from $\Omega \cap \operatorname{Int} \varphi$ (i.e. all points $z \in (\varphi)$ such that there is a simple curve from z into $\Omega \cap \operatorname{Int} \varphi$) is dense in (φ). From this it follows easily there are numbers $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$, $t_1 < t_2$, and a simple curve φ_1 such that

$$i.p.\ \varphi_1 = \varphi(t_1) \,, \quad e.p.\ \varphi_1 = \varphi(t_2) \,, \quad (\varphi_1) \subset \Omega \cap \operatorname{Int} \varphi \,. \tag{63}$$

Put $\varphi_2 = \varphi \mid \langle t_1, t_2 \rangle$. Since the curve φ, by assumptions, is negatively oriented, the curve $\varphi^* = \varphi_1 \dotplus \varphi_2$ is, by Theorem 1,1, oriented positively.

By the same theorem, $\operatorname{Int} \varphi^* \subset \operatorname{Int} \varphi$. Obviously, $\varphi(\alpha) \in \operatorname{Ext} \varphi^*$. Since $\langle \varphi^* \rangle \subset \Omega$, we have $\langle \varphi^* \rangle \cap (\boldsymbol{S} - \Omega) = \emptyset$, so that the connected set $\boldsymbol{S} - \Omega$ [7]) is disjoint either with Int φ^*, or with Ext φ^*. Since the set $(\boldsymbol{S} - \Omega) \cap$ Ext φ^* contains $\varphi(\alpha)$, we have $(\boldsymbol{S} - \Omega) \cap$ Int $\varphi^* = \emptyset$ so that Int $\varphi^* \subset \Omega$.

Thus, we have Int $\varphi^* \subset \Omega \cap$ Int φ. This proves, by the 2. part of the theorem, that $\Omega \cap$ Int $\varphi = \Omega^+$.

It remains to prove the implications (46). Let $\mathscr{H} \in \mathfrak{H}(\Omega)$, $\langle \mathscr{H} \rangle \subset$ Int φ, $\{\Omega_n\} \in \mathscr{H}$. As $\langle \mathscr{H} \rangle = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{\Omega}_n$, it follows from the inclusion $\langle \mathscr{H} \rangle \subset$ Int φ that $\bar{\Omega}_n \subset$ Int φ for all n sufficiently large. For such n we have, further, $F(\Omega_n) \subset F(\Omega \cap \text{Int}\, \varphi) = F(\Omega^+) = U^+$ so that the arc $\overline{F(\Omega_n)} \cap \boldsymbol{C}$ is a subset of C^+. By Theorem 3,1, this implies $\gamma_F(\mathscr{H})$ is a point of the open arc $\hat{C}^+$, i.e. $\psi(\alpha) \prec \gamma_F(\mathscr{H}) \prec \psi(\beta)$, which means that $\mathscr{H}_0 \prec \mathscr{H} \prec \mathscr{H}_1$.

This completes the proof of the first implication (46); the proof of the second one is analogous.

4. Now let all assumptions of the fourth part of the theorem hold. Since the region $G = \text{Int}\,(\lambda \dotminus \varphi)$, by these assumptions, is contained in Ω and since it is disjoint with $\langle \varphi \rangle$, it is contained in a certain component Ω^* of the set $\Omega - (\varphi)$. Provided that $G \neq \Omega^*$, the region Ω^* would intersect both G and $\boldsymbol{S} - G$, hence ∂G also. This, however, is a contradistion, as

$$\Omega^* \cap \partial G = \Omega^* \cap (\langle \lambda \rangle \cup \langle \varphi \rangle) \subset (\Omega - (\varphi)) \cap (\partial \Omega \cup (\varphi)) = \emptyset\,.$$

Hence $G = \Omega^*$, which means G is a component of the set $\Omega - (\varphi)$.

Let us prove that $G = \Omega^+$. The conformal mapping $F \mid G$ (of the Jordan region G onto one component of the set $\boldsymbol{U} - (\psi)$, hence onto a Jordan region) may be, by a well known theorem (see [4], p. 538), extended to a homeomorphic mapping F^* of $\bar{G}$ onto $\overline{F(G)}$. According to another well known theorem (see [4], p. 541) the curve $F^* \circ (\lambda \dotminus \varphi) = F^* \circ \lambda \dotminus \psi$ has the same orientation as the curve $\lambda \dotminus \varphi$, hence the positive one. The curve $F^* \circ \lambda$ is simple, and $\langle F^* \circ \lambda \rangle$ is equal either to C^+ or to C^-. Provided that $\langle F^* \circ \lambda \rangle = C^-$, the curve $F^* \circ \lambda \dotminus \psi$ would, obviously, be negatively oriented. Hence $\langle F^* \circ \lambda \rangle = C^+$, which implies $F(G) = U^+$ and $G = \text{Int}\,(\lambda \dotminus \varphi) = \Omega^+$, as we had to prove.

Let us note that in consequence of what has been said above also the following assertion holds:

(64) The mapping $F^* \circ \lambda$ admits of an extension to a positively oriented Jordan curve χ such that $i.p.\ \chi = i.p.\ (F^* \circ \lambda) = \psi(\alpha)$, $\langle \chi \rangle = \boldsymbol{C}$.

Now let us suppose the curve λ is defined on the interval $\langle 0, 1 \rangle$. $\mathscr{S}_t$, $\mathscr{H}_t$ (where $t \in \langle 0, 1 \rangle$) let be defined as in assumptions. Let $t \in (0, 1)$ and suppose $\mu_t \in \mathscr{S}_t$ is a curve from $\lambda(t) = o(\mathscr{S}_t)$ into $G = \text{Int}\,(\lambda \dotminus \varphi)$ defined on $\langle 0, 1 \rangle$. Then

[7]) **The region Ω is conformally equivalent to $\boldsymbol{U}$, hence its complement is connected.**

$$\gamma_F(\mathscr{H}_t) = W_F(\mathscr{S}_t) = (F \circ \mu_t)(0+) = F^*(\mu_t(0)) = F^*(\lambda(t))\,;$$

besides, obviously,

$$\gamma_F(\mathscr{H}_0) = \psi(\alpha) = F^*(\lambda(0))\,, \quad \gamma_F(\mathscr{H}_1) = \psi(\beta) = F^*(\lambda(1))\,.$$

From this it follows that

$$\gamma_F(\mathscr{H}_t) = F^*(\lambda(t)) \quad \text{for each} \quad t \in \langle 0, 1\rangle\,. \tag{65}$$

Since $F^* \circ \lambda$ is one-one and continuous on $\langle 0, 1\rangle$ and $\langle F^* \circ \lambda\rangle = C^+$, (49) holds.

By (64), (47) and (48) also hold.

Thus, it remains to prove (50). If $t \in (0, 1)$ and $z \in \langle \mathscr{H}_t \rangle$, there are points $z_n \in \Omega$ such that $z_n \to z$, $F(z_n) \to \gamma_F(\mathscr{H}_t) = F^*(\lambda(t))$ (cf. (29)). Since $F^*(\lambda(t)) \in \hat{C}^+$, we have $F(z_n) \in U^+$ for all n sufficiently large. Since the mapping $(F^*)_{-1}$ is continuous on $\overline{U}^+$, the relation $F(z_n) \to F^*(\lambda(t))$ implies $z_n \to \lambda(t)$. Hence $z = \lambda(t)$. Thus, $\lambda(t)$ is the only point of the set $\langle \mathscr{H}_t \rangle$.

5. Let all assumptions of the fifth part of the theorem hold. Suppose first $(\varphi) \subset \subset \operatorname{Int} \lambda$. Let

$$G = \operatorname{Int} \lambda \cap \operatorname{Ext} \varphi \subset \Omega \tag{66}$$

and suppose the curves φ, λ are positively oriented. As $\langle \lambda \rangle \subset \partial\Omega$, we have either $\Omega \subset \operatorname{Int} \lambda$ or $\Omega \subset \operatorname{Ext} \lambda$. Hence, the inclusion $(\varphi) \subset \Omega \cap \operatorname{Int} \lambda$ implies $\Omega \subset \operatorname{Int} \lambda$. As we easily see, the set G is a component of the set $\operatorname{Int} \lambda - (\varphi)$. As $G \subset \Omega$, the inclusion $G \subset \operatorname{Int} \lambda$ implies G is a component of the set $\Omega - (\varphi)$ also. The other component of the set $\Omega - (\varphi)$ equals to $\Omega \cap \operatorname{Int} \varphi$. Besides, obviously,

$$\partial G = \langle \lambda \rangle \cup \langle \varphi \rangle\ ^{8})\,. \tag{67}$$

By the theorem on accessibility of points of the boundary of any Jordan region from this region (see [4], p. 196), it immediately follows there is a simple curve λ^* and numbers $t^* \in (0, 1)$, $T^* \in (\alpha, \beta)$ such that

$$i.p.\ \lambda^* = \lambda(t^*)\,, \quad e.p.\ \lambda^* = \varphi(T^*)\,, \quad (\lambda^*) \subset G\,. \tag{68}$$

Take

$$\lambda_1 = \lambda \,|\, \langle 0, t^* \rangle\,, \quad \lambda_2 = \lambda \,|\, \langle t^*, 1 \rangle\,, \quad \varphi_1 = \varphi \,|\, \langle \alpha, T^* \rangle\,, \quad \varphi_2 = \varphi \,|\, \langle T^*, \beta \rangle\,. \tag{69}$$

Then the Jordan curves

$$\nu_1 = \lambda_1 \dotplus \lambda^* \dot{-} \varphi_1\,, \quad \nu_2 = \lambda_2 \dot{-} \varphi_2 \dot{-} \lambda^* \tag{70}$$

---

[8]) This is an analogy of the topological θ-curve theorem (see [1]). Instead of a topological circumference (a set homeomorphic to $\mathbf{C}$) and an arc the end points of which are the only points common with the circumference, here we have two topological circumferences with one and only one point common.

are, by Theorem 1,1, positively oriented. Besides, it is obvious that

$$\operatorname{ind}_{v_1} + \operatorname{ind}_{v_2} = \operatorname{ind}_\lambda - \operatorname{ind}_\varphi \tag{71}$$

on $\mathbf{S} - (\langle\lambda\rangle \cup \langle\varphi\rangle \cup \langle\lambda^*\rangle)$.

If $z \in \operatorname{Int} v_j$ for $j = 1$ or $j = 2$, then (71) implies that $\operatorname{ind}_\lambda z - \operatorname{ind}_\varphi z = \operatorname{ind}_{v_1} z + \operatorname{ind}_{v_2} z \geqq \operatorname{ind}_{v_j} z = 1$. From this it follows that $\operatorname{ind}_\lambda z = 1$, $\operatorname{ind}_\varphi z = 0$, which means that $z \in \operatorname{Int} \lambda \cap \operatorname{Ext} \varphi = G$. This proves the inclusion

$$\operatorname{Int} v_1 \cup \operatorname{Int} v_2 \subset G\,. \tag{72}$$

Thus, any curve going from the point $\lambda(t)$, where $0 < t < t^*$ resp. $t^* < t < 1$, into $\operatorname{Int} v_1$ resp. $\operatorname{Int} v_2$ goes into G also.

Taking into account that $\lambda^* \in \mathscr{S}_{t^*}$, $\varphi_1 \in \mathscr{S}_0$, $\dot{-}\varphi_2 \in \mathscr{S}_1$ we see that, by the 4. part of the theorem (aplied to the curves $v_1 = \lambda_1 \dot{-} (\varphi_1 \dot{-} \lambda^*)$, $v_2 = \lambda_2 \dot{-} (\lambda^* \dot{+} \varphi_2)$), we have

$$\mathscr{H}_0 \prec \mathscr{H}_t \prec \mathscr{H}_{t^*} \quad \text{for} \quad t \in (0, t^*)\,, \quad \mathscr{H}_{t^*} \prec \mathscr{H} \prec \mathscr{H}_1 \quad \text{for} \quad t \in (t^*, 1)\,. \tag{73}$$

From this (47) and (48) follow easily.

By the 4. part of the present theorem, the function $\gamma_F(\mathscr{H}_t)$ where $t \in \langle 0, t^*\rangle$ resp. $t \in \langle t^*, 1\rangle$, is one-one and continuous, and

$$\{\gamma_F(\mathscr{H}_t);\ t \in \langle 0, t^*\rangle\} = \{w \in \mathbf{C};\ \gamma_F(\mathscr{H}_0) \leqq w \leqq \gamma_F(\mathscr{H}_{t^*})\} \tag{74'}$$

resp.

$$\{\gamma_F(\mathscr{H}_t);\ t \in \langle t^*, 1\rangle\} = \{w \in \mathbf{C};\ \gamma_F(\mathscr{H}_{t^*}) \leqq w \leqq \gamma_F(\mathscr{H}_1)\}\,. \tag{74''}$$

This proves (49). It is obvious also that $F(G) = U^+$, which implies $G = \Omega^+$.

The assertion (50) will be proved similarly as in the proof of the fourth part of the theorem.

This completes the proof of the 5. part of the theorem in case that $(\varphi) \subset \operatorname{Int} \lambda$. If $(\varphi) \subset \operatorname{Ext} \lambda$ (and if corresponding assumptions of the 5. part hold), we proof analogously the components of the set $\Omega - (\varphi)$ are the sets $G = \operatorname{Ext} \lambda \cap \operatorname{Int} \varphi$, $\Omega \cap \operatorname{Ext} \varphi$; (67) also holds.

Defining the curves v_1, v_2 by (70) we prove once more they are positively oriented. The rest of the proof also is similar as in case $(\varphi) \subset \operatorname{Int} \lambda$.

This completes the proof of Theorem 6,2.

Remark 1. Theorem 6,2 yields some informations of the relations between $\langle\mathscr{H}_0\rangle$ resp. $\langle\mathscr{H}_1\rangle$ and $\partial\Omega_\varphi^+$, $\partial\Omega_\varphi^-$. In the general case, however, not much can be said. Of course, it is e.g. $o(\mathscr{S}_0) \in \langle\mathscr{H}_0\rangle \cap \partial\Omega_\varphi^+ \cap \partial\Omega_\varphi^-$ and $\langle\mathscr{H}_0\rangle \subset \partial\Omega_\varphi^+ \cup \partial\Omega_\varphi^-$. In what follows we show by examples that the relations between $\langle\mathscr{H}_0\rangle$ (and, similarly, $\langle\mathscr{H}_1\rangle$) and $\partial\Omega_\varphi^+$, $\partial\Omega_\varphi^-$ may be rather complicated.

Example 1. The inclusion $\langle \mathscr{H}_0 \rangle \subset \partial\Omega_\varphi^+ \cap \partial\Omega_\varphi^-$, as we know, holds if $\langle \mathscr{H}_0 \rangle$ contains one point only. However, it also may hold in case $\langle \mathscr{H}_0 \rangle$ is a proper continuum. If e.g.

$$(76) \quad \Omega = \{z \in \mathbf{E};\ 0 < \operatorname{Re} z < 2,\ |\operatorname{Im} z| < 1\} - \left(\langle 0, 1\rangle \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \overline{\frac{i}{n};\ 1 + \frac{i}{n}}\right)$$ [9]

and

$$(77) \qquad \varphi(t) = 1 + (1 + i)\, t \quad \text{for} \quad t \in \langle 0, 1\rangle\,,$$

then

$$\langle \mathscr{H}_0 \rangle = \langle 0, 1\rangle \subset \partial\Omega_\varphi^+ \cap \partial\Omega_\varphi^-\,.$$

Example 2. If

$$(78) \qquad \Omega = \{z \in \mathbf{E};\ 0 < \operatorname{Re} z < 2,\ 0 < \operatorname{Im} z < 1\} - \bigcup_{n=2}^{\infty} \overline{\frac{i}{n};\ 1 + \frac{i}{n}}$$

and if φ is as in (77), we have $o(\mathscr{S}_0) = 1$, $\langle \mathscr{H}_0 \rangle = \langle 0, 1\rangle$, and

$$\langle \mathscr{H}_0 \rangle \subset \partial\Omega_\varphi^-\,, \quad \langle \mathscr{H}_0 \rangle \cap \partial\Omega_\varphi^+ = \{o(\mathscr{S}_0)\}\,.$$

Example 3. In examples 1 and 2 both sets $\langle \mathscr{H}_0 \rangle \cap \partial\Omega_\varphi^+$, $\langle \mathscr{H}_0 \rangle \cap \partial\Omega_\varphi^-$ were connected. In the general case, nothing like this holds. Take, namely,

$$(79) \qquad \Omega = \{z \in \mathbf{E};\ 0 < \operatorname{Re} z < 2,\ |\operatorname{Im} z| < 1\} -$$

$$- \left(\langle 0, 1\rangle \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \overline{\frac{i}{n};\ 1 + \frac{i}{n}} \cup \{z \in \mathbf{E};\ \tfrac{1}{3} \leqq \operatorname{Re} z \leqq \tfrac{2}{3},\ -\tfrac{1}{2} \leqq \operatorname{Im} z \leqq 0\}\right),$$

and let φ be as in (77). Then $\langle \mathscr{H}_0 \rangle = \langle 0, 1\rangle$ and

$$\langle \mathscr{H}_0 \rangle \subset \partial\Omega_\varphi^-\,, \quad \langle \mathscr{H}_0 \rangle \cap \partial\Omega_\varphi^+ = \langle 0, \tfrac{1}{3}\rangle \cup \langle \tfrac{2}{3}, 1\rangle\,.$$

It is easy to see an analogous example may be given with $\langle \mathscr{H}_0 \rangle \cap \partial\Omega_\varphi^+$ equal e.g. to the Cantor discontinuum.

Example 4. Examples 1–3 may sugest the set $\langle \mathscr{H}_0 \rangle$ always is a subset either of $\partial\Omega_\varphi^+$ or of $\partial\Omega_\varphi^-$. In general, however, nothing like this hold. Take, namely,

$$(80) \qquad J = \{z \in \mathbf{E};\ |\operatorname{Re} z| < 4,\ 0 < \operatorname{Im} z < 8\}\,;$$

for each $n \in \mathbf{N}$ let

$$(81') \quad A_n = \partial U\left(\overline{0;\, 6i} \cup \overline{2i - 2;\, 2i},\ \frac{1}{n}\right) \cap \{z;\ \operatorname{Re} z \leqq 0,\ 0 \leqq \operatorname{Im} z \leqq 6\}\,,$$

[9]) If $a, b \in \mathbf{E}$, $a \neq b$, then $\overline{a; b}$ denotes the set $\{z;\ z = a + t(b - a),\ t \in \langle 0, 1\rangle\}$.

$$(81'') \qquad B_n = \partial U\left(\overline{0; 6i} \cup \overline{4i; 4i + 2}, \frac{1}{n}\right) \cap \{z; \operatorname{Re} z \geqq 0,\ 0 \leqq \operatorname{Im} z \leqq 6\}.$$

Put

$$(82) \qquad \Omega = J - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n) \cup \overline{0;\ 6i} \cup \overline{2i - 2;\ 2i} \cup \overline{4i;\ 4i + 2}\right)$$

and

$$(83) \qquad \varphi(t) = 6i + 2it\,, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle\,.$$

Then $\langle \mathscr{H}_0 \rangle = \overline{0, 6i} \cup \overline{2i - 2; 2i} \cup \overline{4i; 4i + 2}$, $\langle \mathscr{H}_0 \rangle \cap \partial\Omega_\varphi^- = \overline{0; 6i} \cup \cup \overline{2i - 2; 2i}$, $\langle \mathscr{H}_0 \rangle \cap \partial\Omega_\varphi^+ = \overline{0; 6i} \cup \overline{4i; 4i + 2}$.

References

[1] *Kuratowski K.:* Topologie I, II (1948, 1952).

[2] *Carathéodory C.:* Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete (Math. Annalen 73, 1913).

[3] *Markuševič A. I.:* Teorija analitičeskich funkcij (1950).

[4] *Černý I.:* Základy analysy v komplexním oboru (1967).

Author's address: 118 00 Praha 1, Malostranské nám 25 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

NEW UPPER BOUNDS FOR THE CROSSING NUMBER OF K_n ON THE KLEIN BOTTLE

MILAN KOMAN, Praha

(Received October 7, 1976)

1. INTRODUCTION

The crossing number of a graph G for an orientable as well as for a nonorientable surface with the genus g is defined as the least possible number of crossings in a drawing of G on the mentioned surface. For an orientable surface we use the notation $cr_g^*(G)$, for the nonorientable one $cr_g(G)$, $g = 1, 2, 3, \ldots$.

The crossing numbers are most frequently investigated for the complete graphs K_n and the complete bipartite graphs $K_{m,n}$. Most papers deal with the plane. The other surfaces mentioned are the torus, the projective plane and the Klein bottle.

We shall give briefly the most important results in the chronological order.

1. ZARANKIEWICZ 1954 [1] and URBANIK 1955 [2];

$$cr_0^*(K_{m,n}) \leqq \left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m-1}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

2. GUY 1960 [3], HARARY and HILL 1962 [4], BLAŽEK and KOMAN 1963 [5], SAATY 1964 [6]:

$$cr_0^*(K_n) \leqq \frac{1}{4}\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right]\left[\frac{n-3}{2}\right].$$

3. GUY, JENKYNS and SCHAER 1967 [7]:

$$cr_1^*(K_n) \leqq \frac{59}{216}\binom{n-1}{4}, \quad n \geqq 10.$$

4. BLAŽEK and KOMAN 1967 [8, 9], HARBORTH 1971 [10]:

$$cr_0^*(K_{n_1 n_2 \ldots n_k}) \leqq \sum_i a_i b_i A_i B_i - \sum_{i<j} a_i b_i a_j b_j +$$

$$+ \sum_{r<s<t<u} (a_r a_s a_t a_u + a_r a_s c_t c_u + a_r c_s c_t a_u + c_r c_s c_t c_u + c_r c_s a_t a_u + c_r a_s a_t c_u),$$

where

$$a_i = \left[\frac{n_i}{2}\right], \quad b_i = \left[\frac{n_i - 1}{2}\right], \quad c_i = \left[\frac{n_i + 1}{2}\right],$$

$$A_i = [(\sum_j n_j - n_i)/2], \quad B_i = [(\sum_j n_j - n_i - 1)/2].$$

5. GUY and JENKYNS 1969 [11]:

$$cr_1^*(K_{m,n}) \leqq \frac{1}{6}\binom{m-1}{2}\binom{n-1}{2}, \quad m, n \geqq 45.$$

6. KOMAN 1969 [12, 13]:

$$cr_1(K_n) \leqq \frac{39}{128}\binom{n-1}{4}, \quad n \geqq 10;$$

$$cr_2(K_n) \leqq \frac{37}{128}\binom{n-1}{4}, \quad n \geqq 10.$$

7. GUY and HILL 1973 [14]:

$$cr_0^*(\bar{C}_n) \leqq \frac{1}{64}(n-3)^2(n-5)^2, \quad n \text{ odd};$$

$$\leqq \frac{1}{64}n(n-4)(n-6)^2, \quad n \text{ even},$$

where $\bar{C}_n$ is the complement of a circuit of the length n.

8. KOMAN 1974 [13]:

$$cr_2(K_{m,n}) \leqq \frac{1}{6}\binom{m-1}{2}\binom{n-1}{2}$$

for infinite integers m and n. It is a hiatus that the inequality holds for all $m, n \geqq 45$.

From the given survey it is seen among other that on the torus as well as on the Klein bottle the same upper bounds for the crossing numbers of the complete bipartite graphs $K_{m,n}$ hold.

In this paper we shall show that for the complete graph K_n the known value

$$\frac{59}{216}\binom{n-1}{4}$$

is the upper bound not only for the torus but also for the Klein bottle.

2. PRECISE VALUES AND BOUNDS FOR $n \leqq 15$

The results for the Klein bottle and for the torus are given simultaneously (see [7, 12]):

$$cr_2(K_7) = 1\,, \qquad cr_1^*(K_7) = 0\,,$$

$$cr_2(K_8) = 4\,, \qquad cr_1^*(K_8) = 4\,,$$

$$cr_2(K_9) = 9\,, \qquad cr_1^*(K_9) = 9\,.$$

For $n = 10$ in contradistinction to the torus, where the precise value $cr_1^*(K_{10})$ is known, only the upper and lower estimates are known for the Klein bottle:

$$22 \leqq cr_2(K_{10}) \leqq 24\,, \qquad cr_1^*(K_{10}) = 23\,.$$

The upper bounds for the both surfaces follow from Figs. 1 and 2.

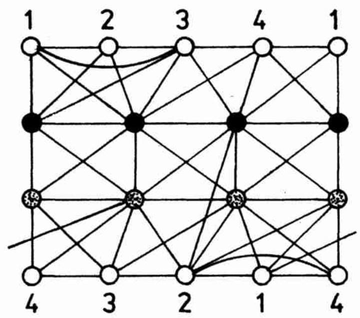


Fig. 1 ($cr_2(K_{10}) \leqq 24$)

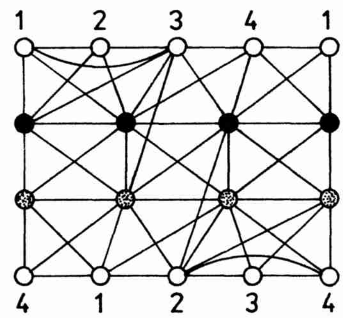


Fig. 2 ($cr_1^*(K_{10}) \leqq 23$)

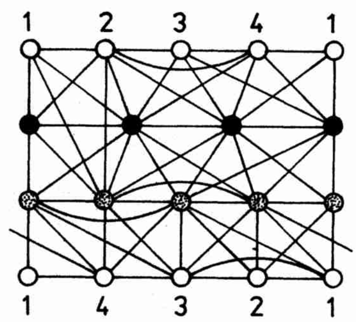


Fig. 3

For $11 \leqq n \leqq 15$ we can give for the Klein bottle as well as for the torus the following estimates:

$$35 \leqq cr_2(K_{11}) \leqq 43, \qquad 37 \leqq cr_1^*(K_{11}) \leqq 42,$$
$$53 \leqq cr_2(K_{12}) \leqq 72, \qquad 56 \leqq cr_1^*(K_{12}) \leqq 70,$$
$$77 \leqq cr_2(K_{13}) \leqq 109, \qquad 81 \leqq cr_1^*(K_{13}) \leqq 105,$$
$$108 \leqq cr_2(K_{14}) \leqq 161, \qquad 114 \leqq cr_1^*(K_{14}) \leqq 154,$$
$$148 \leqq cr_2(K_{15}) \leqq 225, \qquad 156 \leqq cr_1^*(K_{15}) \leqq 225.$$

The inequality $cr_2(K_{11}) \leqq 43$ gives Fig. 3. The upper bound is here lower by 1 than that given in [12]. The inequality $cr_2(K_{15}) \leqq 225$ is a consequence of the construction which will be presented in Part 3. For $n = 15$, the upper bound for $cr_2(K_{15})$ decreases from 239 (see [12]) to 225.

3. BOUNDS FOR $n \geqq 16$

The drawing of the graphs K_n, $n \geqq 3$ on the Klein bottle, which gives the upper bound for the crossing number $cr_2(K_n)$, arises by a simple modification of an analogous Guy-Jenkyns's drawing on the torus [17]. For $n = 12$ the both drawings are obvious from Figs. 4 and 5.

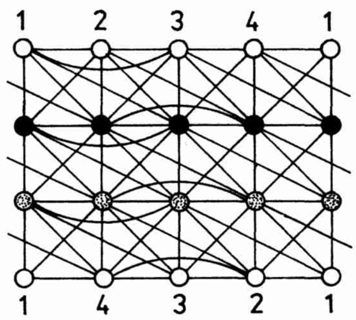


Fig. 4 ($cr_2(K_{12}) \leqq 72$)

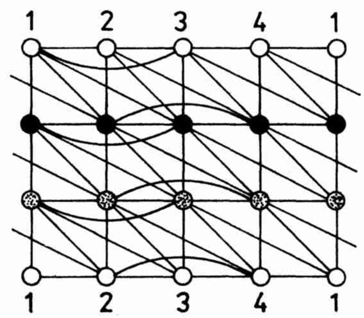


Fig. 5 ($cr_1^*(K_{12}) \leqq 72$)

For other n's the drawings for K_n are generalizations of Figs. 4, 5. All n vertices are divided into three approximately equal parts: white, black and grey. We dislocate the vertices according to Fgs. 6, 7. After sticking the appropriate pairs of vertices we obtain in the first case the Klein bottle, in the second the torus.

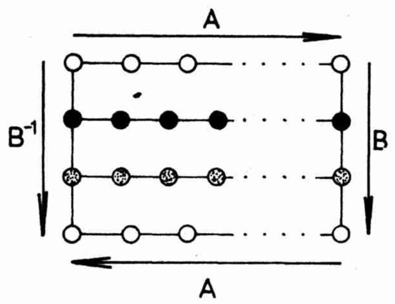


Fig. 6 (Klein bottle)

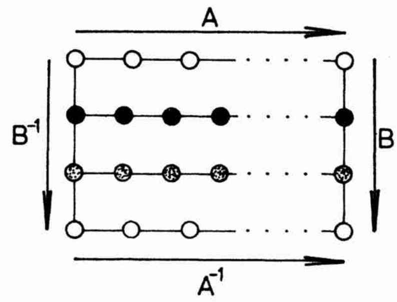


Fig. 7 (torus)

On the constructed surface we join all the vertices having the same colour with the identically coloured circuit. In this way three disjoined circuits arise: white, black and grey, which form already a crossingfree subdrawing of the sought drawing. The edges joining two vertices with different colours are determined by these crossingfree circuits. The other edges are constructed according to the following rule.

First of all we label all the vertices with cyclical orders on each of the crossingfree coloured circuits with the integers

$$1, 2, 3, \ldots, n_i$$

(n_i is the length of the white, black and grey circuit C_i respectively). We join two identically coloured vertices u, v coinciding with a crossingfree circuit C_i (with length n_i) on one side iff the edge uv is parallel to some of the edges

$$1w\,, \quad w = 2, 3, \ldots, [n_i/2]\,.$$

Other remaining joins of the vertices belonging to C_i are constructed on the opposite side of the circuit C_i. Two edges uv, wt, whose endpoints belong to the same crossingfree circuits C_i of length n_i are called parallel iff

$$u + v \equiv w + t \pmod{n_i}$$

holds.

The just obtained drawing of the graph K_n on the Klein bottle as well as that on the torus contains three subdrawings of complete graphs generated by white, black or grey vertices respectively. These subdrawings are homeomorphical with the drawing given in [5] by means of the construction B.

From the table and from [12, 13] we obtain the inequalities

$$\frac{1}{14}\binom{n}{4} \leqq cr_2(K_n) \leqq \frac{59}{216}\binom{n-1}{4}.$$

As in [7] we obtain the following upper bounds:

$n =$	Common upper bound for $cr_2(K_n)$ and $cr_1(K_n)$
$6k = 3u$	$u(u-2)(59u^2 - 98u + 24)/64 = n(n-6)(59n^2 - 294n + 216)/5184$
$6k + 1 = 3u + 1$	$u(177u^3 - 412u^2 + 180u + 64)/192 =$ $= (n-1)(59n^3 - 589n^2 + 1541n - 435)/5184$
$6k + 2 = 3u - 1$	$(u-1)(177u^3 - 707u^2 + 727u - 117)/192 =$ $= (n-2)(59n^3 - 530n^2 + 944n + 480)/5184$
$6k + 3 = 3u$	$(u-1)(59u^3 - 157u^2 + 45u - 27)/64 =$ $= (n-3)(59n^3 - 471n^2 + 405n - 243)/5184$
$6k + 4 = 3u + 1$	$(u-1)(177u^3 - 235u^2 - 97u + 27)/192 =$ $= (n-4)(59n^3 - 412n^2 + 356n + 240)/5184$
$6k + 5 = 3u - 1$	$(u-2)(177u^3 - 530u^2 + 416u - 96)/192 =$ $= (n-5)(59n^3 - 353n^2 + 365n - 87)/5184$

To compare the upper bounds for the same graph (class of graphs) but for different surfaces it is useful to investigate the coefficients by the leading members:

	K_n	$K_{m,n}$	$\bar{C}_n$
Euclidean plane	$\frac{1}{64} = 0{\cdot}0156\ldots$	$\frac{1}{16} = 0{\cdot}0625\ldots$	$\frac{1}{64} = 0{\cdot}0156\ldots$
Projective plane	$\frac{13}{1024} = 0{\cdot}0126\ldots$	?	?
Torus	$\frac{59}{5184} = 0{\cdot}0113\ldots$	$\frac{1}{24} = 0{\cdot}0416\ldots$	?
Klein bottle	$\frac{59}{5184} = 0{\cdot}0113\ldots$	$\frac{1}{24} = 0{\cdot}0416\ldots$	?

References

[1] *Zarankiewicz, K.:* On a Problem of P. Turán concerning graphs. Fund. Math. *41* (1954), 137—145.

[2] *Urbanik, K.:* Solution du problème posé par P. Turán, Colloq. Math. *3* (1955), 200—201.

[3] *Guy, R. K.:* A combinatorial problem. Bull. Malayan Math. Soc. *7* (1960), 68—72.

[4] *Harary, F.* and *Hill, A.:* On the number of crossings in a complete graph. Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), *13* (1962—3), 333—338.

[5] *Blažek, J.* and *Koman, M.:* A minimal problem concerning complete plane graphs. Theory of graphs and its applications, editor M. Fiedler, Proc. Symp. Smolenice June 1963, Prague 1964, 113—117.

[6] *Saaty, T. L.*: The minimum number of intersections in complete graphs. Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., *52* (1964), 688—690.
[7] *Guy, R. K., Jenkyns, T. A., Schaer, J.*: The toroidal crossing number of complete graph. (Univ. Calgary, Research paper 18 (1967), 1—20.) J. Comb. Theory, *4*, (1968), 376—390.
[8] *Blažek, J.* and *Koman, M.*: On an extremal problem concerning graphs. CMUC, *8*, 1 (1967), 49—52.
[9] *Blažek, J.* and *Koman, M.*: The crossing number of complete k-chromatic graphs. (in Czech), Matemat., Sborník Ped., fak. UK Praha 1970, 69—84.
[10] *Harborth H.*: Über die Kreuzungszahl vollständiger, n-geteilter Graphen. Math. Nachrichten, *48* (1971), 179—188.
[11] *Guy, R. K.* and *Jenkyns, T. A.*: The toroidal crossing number of $K_{m,n}$. J. Comb. Theory, *6* (1969), 235—250.
[12] *Koman, M.*: On the crossing number of graphs, Acta Univ. Carol. Math. Phys., *10* (1969), 9—46.
[13] *Koman, M.*: A note on the crossing number of $K_{m,n}$ on the Klein bottle. Recent Advanc. in Graph Theory, Proc. Symp. Praque, June 1973, Editor M. Fiedler, Acad. Praque 1975, 327—334.
[14] *Guy, R. K.* and *Hill, A.*: The crossing number of the complement of a circuit. Discr. Math., *5* (1973), 335—344.

Author's address: 116 39 Praha 1, Rettigové 4 (Katedra matematiky a fyziky pedagogické fakulty UK).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

ON A PROBLEM OF R. HÄGGKVIST CONCERNING EDGE-COLOURINGS OF GRAPHS

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Received October 25, 1976)

At the 5th Hungarian Colloquium on Combinatorics in Keszthely in 1976 R. HÄGGKVIST has proposed the following problem [1]:

Let $Q(n, G)$ be the set of n-line-colourings of G. Let $q \in Q(n, G)$. Define $L(q)$ $(l(q))$ as the maximal (minimal) length of a cycle with edges from two of q's line-colour classes. Put

$$L(n, G) = \min_{q \in Q(n,G)} L(q), \quad l(n, G) = \max_{q \in Q(n,Q)} l(q).$$

Give bounds on $L(n, G)$ and $l(n, G)$ for reasonable defined graphs G. Especially: Is $L(n, K_{n,n}) = 2n$?

In this paper we shall study $L(n, K_{n,n})$ for n which is a power of 2. Instead of "line" we shall say "edge".

Theorem. *Let $n = 2^m$, where m is a positive integer. Then $L(n, K_{n,n}) = 4$.*

Proof. For each positive integer m denote $G(m) = K_{n,n}$, where $n = 2^m$. Denote $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $P = \{n + 1, n + 2, \ldots, 2n\}$. The vertices of $G(m)$ are $u_1, \ldots, u_n$, $v_1, \ldots, v_n$, the edges are u_iv_j for each i and j from N. For each $G(m)$ we shall introduce an edge-colouring $q(m)$ by n colours such that no vertex of $G(m)$ is incident with any two edges of the same colour. We define it recurrently. In the graph $G(1)$ we colour the edges u_1v_1, u_2v_2 by the colour 1, the edges u_1v_2, u_2v_1 by the colour 2. Now let the colouring $q(m)$ of $G(m)$ by the colours from N be given for some m; we shall construct the colouring $Q(m + 1)$ of the edges of $G(m + 1)$. Consider four graphs H_1, H_2, H_3, H_4 which are all isomorphic to $G(m)$. The vertices of H_1 are denoted in the same way as in $G(m)$; we may consider $G(m)$ and H_1 as the same graph. The vertices of H_2 are $u_{n+1}, \ldots, u_{2n}, v_{n+1}, \ldots, v_{2n}$ and the edges are u_iv_j for all i and j from P. The vertices of H_3 are $u_1, \ldots, u_n, v_{n+1}, \ldots, v_{2n}$ and the edges are u_iv_j for each i from N and each j from P. The vertices of H_4 are $u_{n+1}, \ldots, u_{2n}$, $v_1, \ldots, v_n$ and the edges are u_iv_j for each i from P and each j from N. Now we shall colour the edges of the graphs H_1, H_2, H_3, H_4. The graph H_2 is considered the same as $G(m)$, therefore its edges will be coloured by the colours from N in the same way as the edges of $G(m)$. Also the edges of H_2 will be coloured by the colours from N;

the edge u_iv_j is coloured by the same colour as the edge $u_{i-n}v_{j-n}$ of $G(m)$. The edges of H_3 will be coloured by the colours from P; the edge u_iv_j is coloured by the colour $c + n$, where c is the colour of the edge u_iv_{j-n} in $G(m)$. The edges of H_4 will be coloured also by the colours from P; the edge u_iv_j is coloured by the colour $c + n$, where c is the colour of the edge $u_{i-n}v_j$ in $G(m)$. Now we shall take the graphs H_1, H_2, H_3, H_4 and identify all pairs of vertices which are denoted by the same symbol in two of these graphs; thus we obtain the graph $G(m + 1)$. We preserve the colours of edges; evidently the colouring thus obtained is a colouring of $G(m + 1)$ by $2n$ colours and no vertex of $G(m + 1)$ is incident with two edges of the same colour.

Now consider the cycles in $G(m + 1)$ whose edges are coloured only by two colours. In $G(1)$ we have only one cycle and it has the length 4. We shall proceed by induction; suppose that in $G(m)$ each cycle whose edges are coloured by two colours in $q(m)$ has the length 4 and consider the graph $G(m + 1)$ with the above constructed colouring $q(m + 1)$. Let c_1, c_2 be two of the colours $1, \ldots, 2n$. If $c_1 \in N$, $c_2 \in N$, such a cycle is either wholly in H_1, or wholly in H_2. As these graphs were coloured in the same way as $G(m)$, this cycle must have the length 4. Analogously if $n + 1 \leqq c_1 \leqq 2n$, $n + 1 \leqq c_2 \leqq 2n$, such a cycle is either wholly in H_3, or wholly in H_4 and it must have the length 4. Let $1 \leqq c_1 \leqq n$, $n + 1 \leqq c_2 \leqq 2n$. Let C be a cycle whose edges are coloured only by the colours c_1 and c_2. Without loss of generality we may suppose that C contains an edge u_iv_j of H_1; it is coloured by c_1. Now let k be such a number that v_ju_k is an edge of C coloured by c_2; this means that the edge v_ju_{k-n} of $G(m)$ is coloured by $c_2 - n$. Let l be such a number that u_kv_l is an edge of C coloured by c_1; then $u_{k-n}v_{l-n}$ in $G(m)$ is coloured also by c_1. The edge v_lu_i is in H_3 and is coloured by the colour $c + n$, where c is the colour of the edge u_iv_{l-n} in $G(m)$; but $c = c_2 - n$, because in $G(m)$ there is a cycle with the length 4 with the vertices $u_i, v_j, u_{k-n}, v_{l-n}$ whose edges are coloured by the colours c_1 and $c_2 - n$. (The only exception is $k = i + n$, $l = j + n$, but also in this case we have evidently a cycle of the length 4.) Thus v_lu_i is coloured also by c_2 and C has the length 4. Analogously if $n + 1 \leqq c_1 \leqq 2n$, $1 \leqq c_2 \leqq n$. Thus for every positive integer m we have $L(q(m)) = 4$ and $L(n, G(m)) \leqq 4$. As in a bipartite graph without multiple edges no cycle has a length smaller than 4, we have $L(n, G(m)) = 4$ and this means $L(n, K_{n,n}) = 4$ for each $n = 2^m$, where m is a positive integer.

This is also the negative answer to the question at the end of the problem. If $n = 2^m$, where $m \geqq 2$ is an integer, then $L(n, K_{n,n}) \neq 2n$.

Reference

[1] Proceedings of the Fifth Hungarian Colloquium on Combinatorics held in Keszthely, June 28—July 3, 1976 (to appear).

Author's address: **460 01 Liberec, Komenského 2 (Vysoká škola strojní a textilní).**

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

ÜBER DIE CHARAKTERISIERUNG DER VERBÄNDE DURCH IHRE c-TEILVERBÄNDE

VÁCLAV VILHELM, Praha

(Eingegangen am 22. Dezember 1976)

Ein Teilverband L_1 eines Verbandes L heisst ein c-Teilverband in L, wenn jede Kette in L_1, die keine echte Verfeinerung in L_1 besitzt, zugleich keine echte Verfeinerung in L hat. Sei K eine Klasse der Verbände, K_1 ihre Teilklasse. Die Klasse K_1 heisst nach JAKUBÍK [1] in der Klasse K durch c-Teilverbände charakterisierbar, wenn es eine Menge $S \subset K \setminus K_1$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: ein Verband $L \in K$ gehört zu $K \setminus K_1$ genau dann, wenn er einen zu einem Verband der Menge S isomorphen c-Teilverband enthält. In der vorliegenden Arbeit wollen wir u. a. das in [1] gestelltes Problem über die Charakterisierbarkeit der Klasse aller distributiven Verbände in der Klasse aller modularen Verbände durch c-Teilverbände untersuchen.

Ist L ein Verband und K seine Kette, so werden wir unter der Länge $l(K)$ der Kette K die Mächtigkeit der Menge K verstehen; die Kardinalzahl $l(L) = \sup \{l(K) \mid K$ eine Kette in $L\}$ heisst dann die Länge des Verbandes L. L heisst ein Verband mit lokal endlicher Länge, wenn die Länge jedes Intervalls $\langle a, b \rangle \subset L$ endlich ist. L heisst ein Verband mit lokal endlichen Ketten, wenn jede seine Kette von lokal endlicher Länge ist.

I.

Sei C eine Klasse der Verbände, die mit jedem Verband alle mit ihm isomorphen Verbände, mit jedem System der Verbände der Klasse C auch sein cartesisches Produkt und mit jedem direkten System der Verbände aus C zugleich den direkten Limes des Systems enthält. Setzen wir weiter voraus, dass C eine nichtleere Teilklasse $\bar{C}_1 \neq C$ enthält, in der mit jedem Verband L_1 alle Verbände der Klasse C liegen, welche einen mit L_1 isomorphen Teilverband besitzen. Unter diesen Voraussetzungen über die Klassen C und $\bar{C}_1$ werden wir für jede reguläre Kardinalzahl m einen Verband $L(m) \in \bar{C}_1$ konstruieren, in dem $l(K) \geqq m$ für jede seine maximale Kette K zwischen beliebigen Elementen $a, b \in L(m)$ $(a < b)$ ist.

Konstruktion des Verbandes $L(m)$. Es sei ω die erste transfinite Zahl der regulären

Mächtigkeit m. Wählen wir in $\bar{C}_1$ einen Verband L_1. Infolge der Voraussetzungen über $\bar{C}_1$ muss L_1 mehr als ein Element enthalten. Es sei ι $(1 \leqq \iota < \omega)$ eine transfinite Zahl. Setzen wir voraus, wir haben schon die zunehmende Kette $\{L_\alpha\}_{1 \leqq \alpha < \iota}$ der Verbände der Klasse C konstruiert. Ist ι keine Limeszahl, so setzen wir

$$L_\iota = L_{\iota-1} \times L_{\iota-1}$$

und betten den Verband $L_{\iota-1}$ mittels der Abbildung $a \mapsto (a, a)$ für jedes $a \in L_{\iota-1}$ in den L_ι ein. $L_{\iota-1}$ ist dann ein Teilverband des L_ι und L_ι ist ein Element der Klasse C. Es sei ι eine Limeszahl. Für jedes α $(1 \leqq \alpha < \iota)$ bilden wir das cartesische Produkt

$$S_\alpha = \prod L_\gamma \, (\alpha \leqq \gamma < \iota)$$

der Verbände L_γ. Wieder ist $S_\alpha \in C$. Definieren wir nun für jede Zahlen α, β $(\alpha \leqq \leqq \beta < \iota)$ den Verbandshomomorphismus

$$g_\beta^\alpha : S_\alpha \to S_\beta\,,$$

wo $g_\beta^\alpha[(a_\gamma)_{\alpha \leqq \gamma < \iota}] = (a_\gamma)_{\beta \leqq \gamma < \iota}$ ist. Das System $(S_\alpha, g_\beta^\alpha)$ ist offenbar ein direktes System der Verbände der Klasse C. Es sei $\varinjlim S_\alpha = (L_\iota, (l_\iota^\alpha)_{\alpha<\iota})$ sein direkter Limes. Dann ist $L_\iota \in C$ und für jede Zahlen α, β $(1 \leqq \alpha \leqq \beta < \iota)$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S_\alpha \arrow[r, "l_\iota^\alpha"] & L_\iota \\
S_\beta \arrow[u, "g_\beta^\alpha"] \arrow[ru, "l_\iota^\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Die Einbettungen $h_\alpha : L_\alpha \to S_\alpha$ $(1 \leqq \alpha < \iota)$, wo $h_\alpha(a) = (a_\gamma)_{\alpha \leqq \gamma < 1}$, $a_\gamma = a$ ist, geben die Homomorphismen $l_\iota^\alpha h_\alpha : L_\alpha \to L_\iota$ und das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
L_\alpha \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[rd, "l_\iota^\alpha h_\alpha"'] & L_\beta \arrow[d, "l_\iota^\beta h_\beta"] \\
 & L_\iota
\end{tikzcd}$$

ist wieder für jede α, β $(1 \leqq \alpha \leqq \beta < \iota)$ kommutativ. Die Homomorphismen $l_\iota^\alpha h_\alpha$ sind schon injektiv: es sei $a, b \in L_\alpha$, $l_\iota^\alpha h_\alpha(a) = l_\iota^\alpha h_\alpha(b)$. Dann gibt es ein γ $(\alpha \leqq \gamma < \iota)$, so dass

$$g_\gamma^\alpha(h_\alpha(a)) = g_\gamma^\alpha(h_\alpha(b))$$

ist. Es ist also $(a_\delta)_{\gamma \leqq \delta < \iota} = (b_\delta)_{\gamma \leqq \delta < \iota}$, $a_\delta = a$, $b_\delta = b$. Daher ist $a = b$. Jedes Element $a \in L_\alpha$ $(1 \leqq \alpha\, \iota)$ kann so mit dem Element $1_\iota^\alpha h_\alpha(a) \in L_\iota$ identifiziert werden; jeder Verband L_α $(1 \leqq \alpha < \iota)$ ist dann ein Teilverband des L_ι. Setzen wir endlich $L(m) = \varinjlim (L_\iota) = \bigcup L_\iota$ $(1 \leqq \iota < \omega)$. Es ist $L(m) \in C$.

Satz 1. *Der oben konstruierte Verband $L(m)$ liegt in der Teilklasse $\bar{C}_1$ und jede seine maximale Kette zwischen Elementen $a, b \in L(m)$ $(a < b)$ hat die Mächtigkeit $\geqq m$.*

Beweis. Die erste Behauptung ist klar, denn $L(m) \in C$, $L_1 \subset L(m)$, $L_1 \in \bar{C}_1$ ist. Sei K eine Kette im $L(m)$ der Länge $l(K) < m$ und es sei $a \leqq x < b$ für jedes $x \in K$. Offenbar genügt es die Existenz eines solchen Elementes $c \in L(m)$ zu beweisen, dass $x < c < b$ für jedes $x \in K$ ist: dann kann $K \cup \{a, b\}$ keine maximale Kette zwischen a, b sein. Zu jedem $x \in K \cup \{a, b\}$ gibt es eine transfinite Zahl $\alpha(x) < \omega$, für die $x \in L_{\alpha(x)}$ ist. Weil Card $\{\alpha(x) \mid x \in K \cup \{a, b\}\} < m$ und m eine reguläre Kardinalzahl ist, kann man eine transfinite Zahl $\alpha < \omega$ finden, so dass $\alpha(x) < \alpha$ für jedes $x \in K \cup \{a, b\}$ ist. Die Kette $K \cup \{a, b\}$ liegt also im Verband $L_\alpha \subset L(m)$. Hat K das grösste Element d, sei $c = (d, b) \in L_\alpha \times L_\alpha = L_{\alpha+1}$. Für jedes $x \in K$ ist dann im $L(m)$

$$x \leqq d = (d, d) < (d, b) < (b, b) = b\,.$$

Nehmen wir jetzt an, K besitze kein grösstes Element. In diesem Fall enthält K eine in der Anordnung $\leqq$ wohlgeordnete und mit K konfinale Teilkette T. Schreiben wir die Elemente der Kette T in der Form x_γ, wo die Indexen die Menge $M = \{\gamma \mid \alpha \leqq \leqq \gamma < \iota\}$ der transfiniten Zahlen durchlaufen und $x_\gamma < x_\delta$ gleichbedeutend mit $\gamma < \delta$ ist. Es gilt $\alpha < \omega$, Card $M \leqq$ Card $K < m$ and ω ist die erste transfinite Zahl der Mächtigkeit m; daher ist $\iota < \omega$. Die Zahl ι ist offenbar eine Limeszahl. Nehmen wir das Element $y = (x_\gamma)_{\alpha \leqq \gamma < \iota} \in S_\alpha$ und sei $c = l_\iota^\alpha(y) \in L(m)$. Wählen wir ein $\beta \in M$, so ist für jedes δ $(\beta \leqq \delta < \iota)$

$$g_\delta^\alpha(h_\alpha(x_\beta)) = (t_\sigma)_{\delta \leqq \sigma < \iota}\,, \quad t_\sigma = x_\beta\,,$$

$$g_\delta^\alpha(h_\alpha(b)) = (z_\sigma)_{\delta \leqq \sigma < \iota}\,, \quad z_\sigma = b\,,$$

$$g_\delta^\alpha(y) = (x_\sigma)_{\delta \leqq \sigma < \iota}\,.$$

Für jedes σ $(\delta < \sigma < \iota)$ ist aber $t_\sigma = x_\beta < x_\sigma < b = z_\sigma$. Darum gilt

$$g_\delta^\alpha(h_\alpha(x_\beta)) < g_\delta^\alpha(y) < g_\delta^\alpha(h_\alpha(b))$$

im S_δ für jedes δ $(\beta \leqq \delta < \iota)$ und im $L_\iota \subset L(m)$ ist also

$$x_\beta = l_\iota^\alpha\, h_\alpha(x_\beta) < l_\iota^\alpha(y) = c < l_\iota^\alpha\, h_\alpha(b) = b$$

für jedes $\beta \in M$. Weil die Kette T mit der Kette K konfinal ist, folgt daraus für jedes $x \in M$ die Ungleichung $x < c < b$, q.e.d.

Satz 2. *Die Klasse $C_1 = C \setminus \bar{C}_1$ ist nicht in der Klasse C durch c-Teilverbände charakterisierbar.*

Beweis. Setzen wir voraus, der Satz wäre falsch. Sei S die entsprechende Menge, mit deren Hilfe die Klasse C_1 in C durch c-Teilverbände charakterisiert ist. Sei $S = \{K_\beta \mid \beta \in B\}$. Weil $\bar{C}_1 \neq C$ ist, muss $B \neq \emptyset$ und $l(K_\beta) > 1$ für jedes $\beta \in B$ sein. S ist eine Menge; daher gibt es eine Kardinalzahl m, so dass $l(K_\beta) < m$ über jedes $\beta \in B$ ist. Wir können voraussetzen, dass m eine reguläre Kardinalzahl ist. Für die Zahl m bilden wir den Verband $L(m) \in \bar{C}_1$. $L(m)$ ist ein Verband der Klasse C, welcher nicht zur Klasse C_1 gehört. Es gibt also einen mit einem Verband K_β ($\beta \in B$) isomorphen c-Teilverband L des $L(m)$. Weil $l(K_\beta) > 1$, enthält L verschiedene vergleichbare Elemente a, b. Jede maximale Kette in L zwischen a, b ist aber zugleich die maximale Kette im $L(m)$ zwischen a, b und diese hat nach dem Satz 1 die Mächtigkeit $\geqq m$. Es ist also $l(L) \geqq m$, aber gleichzeitig ist $L \cong K_\beta$, $l(K_\beta) < m$; das ist ein Widerspruch.

Als eine unmittelbare Folgerung des Satzes 2 bekommen wir die folgende Beantwortung der Fragen (a) und (b) in [1].

Korollar. (a) *Die Klasse K_d aller distributiven Verbände ist nicht in der Klasse K_m aller modularen Verbände durch c-Teilverbände charakterisierbar.*

(b) *Sei K_0 die Klasse aller Verbände. Es sei K_1 ($\emptyset \neq K_1 \neq K_0$) eine Teilklasse der K_0, die mit jedem Verband alle zu seinen Teilverbänden isomorphen Verbände enthält. Dann ist die Klasse K_1 nicht in der Klasse K_0 durch c-Teilverbände charakterisierbar.*

Beweis. Die Klassen K_m und $K_m \setminus K_d$, resp. K_0 und $K_0 \setminus K_1$ erfüllen offenbar die Voraussetzungen über die Klassen C und $\bar{C}_1$. Die Behauptungen folgen dann aus dem Satz 2.

II.

Wesentlich verschieden ist der Sachverhalt in der Klasse $\bar{K}$ aller Verbände mit lokal endlichen Ketten. Bezeichnen wir mit $\bar{K}_l$, resp. $\bar{K}_s$, resp. $\bar{K}_m$, resp. $\bar{K}_d$ die Teilklassen aller Verbände mit lokal endlicher Länge, resp. aller semimodularen, resp. modularen, resp. distributiven Verbände der Klasse $\bar{K}$. Es sei weiter $\bar{K}_1$ die Teilklasse der Verbände der Klasse $\bar{K}$, in denen jede zwei maximale Ketten R_a^b, S_a^b zwischen beliebigen vergleichbaren Elementen a, b des Verbandes die gleiche Länge haben. Es ist gut bekannt, dass die Teiklassen $\bar{K}_s, \bar{K}_m, \bar{K}_d$ in der Klasse $\bar{K}_l$ durch c-Teilverbände charakterisierbar sind. (Siehe z. B. [1].)

Diese Ergebnisse kann man noch etwas verschärfen. Führen wir zu diesem Zwecke die folgende Definition ein.

Definition. Sei K eine Klasse der Verbände, K_1 sei ihre Teilklasse. Die Teilklasse K_1 heisst in der Klasse K durch c-Teilverbände *stark charakterisierbar*, wenn es eine Menge $T \subset K \setminus K_1$ gibt, so dass $L \in K \setminus K_1$ genau dann ist, wenn L ein Intervall $\langle a, b\rangle$ und im $\langle a, b\rangle$ solche c-Teilverbände L_α ($\alpha \in A$, $A \neq \emptyset$) enthält, dass $\sup\{l(L_\alpha) \mid \alpha \in A\} = l(\langle a, b\rangle)$ und $L_\alpha \cong L'_\alpha$, $L'_\alpha \in T$ für jedes $\alpha \in A$ ist.

Seien m, n $(2 \leqq m,\ 2 \leqq n)$ natürliche Zahlen. Mit $L(m, n)$ bezeichnen wir den Verband mit Elementen

$$x = x_1 < x_2 < \ldots < x_m = y\,, \quad x = y_1 < y_2 < \ldots < y_n = y\,,$$

wo x_i, y_j für $1 < i < m$, $1 < j < n$ unvergleichbar sind. ($L(m, n)$ ist also ein zyklischer Verband.) Ferner sei M_5 ein modularer nicht distributiver Verband mit fünf Elementen, B ein Verband mit dem Diagramm auf Abb. 1 und B' der zum B duale Verband.

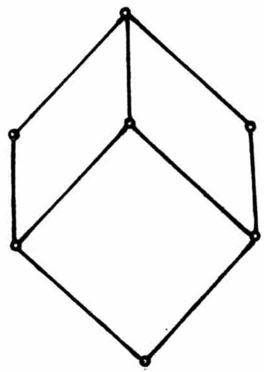


Abb. 1

Satz 3. (a) *Die Klasse $\overline{K}_1$ ist in $\overline{K}$ durch c-Teilverbände stark charakterisierbar. Die entsprechende Menge aus der Definition ist $T = \{L(m, n) \mid 3 \leqq m < n\}$.*

(b) *Die Klasse $\overline{K}_s$, resp. $\overline{K}_m$, resp. $\overline{K}_d$ ist in der Klasse $\overline{K}_1$, resp. $\overline{K}_s$, resp. $\overline{K}_m$ durch c-Teilverbände stark charakterisierbar; die entsprechende Menge ist $\{L(m, m) \mid 4 \leqq m\} \cup \{B'\}$, resp. $\{B\}$, resp. $\{M_5\}$.*

Für den Beweis beweisen wir zuerst das folgende

Lemma. *Sei $L \in \overline{K}$, $\langle a, b\rangle$ ein Intervall in L. Dann sind entweder jede zwei maximalen Ketten in L zwischen a, b von derselben Länge oder es gibt ein Teilintervall $\langle a', b'\rangle \subset \langle a, b\rangle$, so dass $\langle a', b'\rangle$ c-Teilverbände C_α $(\alpha \in A \neq \emptyset)$ des L enthält und $\sup\{l(C_\alpha) \mid \alpha \in A\} = l(\langle a', b'\rangle)$, $C_\alpha \cong L(m_\alpha, n_\alpha)$ $(m_\alpha \neq n_\alpha)$ ist.* (Vergl. [2], Thm. 7.)

Beweis. R, S seien maximale Ketten in L zwischen a, b. Ist $l(R) = 2$, so ist die Behauptungen richtig. Setzen wir voraus, die Behauptung gelte für jedes Intervall $\langle c, d\rangle \subset L$, welches eine maximale Kette P mit $l(P) < n$ $(n \geqq 2)$ enthält. Es sei $\langle a, b\rangle$ ein Intervall in L, in dem n die kleinste Länge seiner maximalen Ketten ist. R sei eine maximale Kette in $\langle a, b\rangle$, $l(R) = n$. Für den Beweis kann man sich offenbar nur auf den Fall begrenzen, in dem $\langle a, b\rangle$ eine maximale Kette S $(l(S) > n)$

enthält und R, S keinen zyklischen Teilverband des Verbandes L erzeugen. Die Elemente der Kette R, resp. S seien

$$a = a_1 < a_2 < \ldots < a_m = b\,, \quad \text{resp.} \quad a = b_1 < b_2 < \ldots < b_m = b\,.$$

Es gilt also $a_2 \vee b_2 = c < b$ oder $a < d = a_{n-1} \wedge b_{m-1}$. Untersuchen wir den ersten dieser dualen Fälle. Es sei T, resp. U, resp. V eine maximale Kette in L zwischen c, b, resp. a_2, c, resp. b_2, c. Es gilt $l(R') = n - 1$, wo $R' = R \setminus \{a\}$ ist. Sind die Längen der Ketten R, $U \cup T$ verschieden, dann gilt die Behauptung des Hilfsatzes nach der Induktionsvoraussetzung. Es sei also $l(U \cup T) = n - 1$. Dann ist $l(U) < n - 1$; also ist $l(U \cup \{a\}) < n$. Infolge der Induktionsvoraussetzung können wir uns auf den Fall $l(\{a\} \cup U) = l(\{a\}) \cup V)$, also $l(U) = l(V)$ begrenzen. Es ist daher $l(V \cup T) = l(U \cup T) = n - 1$. Aber für die Länge der Kette $S' = S \setminus \{a\}$ gilt $l(S') = m - 1 > n - 1$. Die Ketten S' und $V \cup T$ haben daher verschiedene Längen und es ist $l(V \cup T) = n - 1$. Die Behauptung ist wieder nach der Induktionsvoraussetzung richtig.

Beweis des Satzes 3. Die Behauptung (a) folgt unmittelbar aus dem Lemma; (b) ist die Folgerung der Behauptung (a), der Inklusionen $\bar{K}_d \subset \bar{K}_m \subset \bar{K}_s \subset \bar{K}_1 \cap \bar{K}_t$ und der Sätze (A), (B), (C) in [1].

Literatur

[1] *Ján Jakubík:* Sublattices with saturated chains, Czech. Math. Journal *25 (100)*, 1975, 442—444.
[2] *Oystein Ore:* Chains in partially ordered sets, Bull. Am. Math. Soc. *49*, 1943, 558—566.

Anschrift des Verfassers: 121 34 Praha 2, Trojanova 13 (Stavební fakulta ČVUT).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

ÜBER EINE EIGENSCHAFT VON OVALEN

VÁCLAV MEDEK, Bratislava

(Eingegangen am 11. Januar 1977)

1. Im weiteren werden wir unter einer projektiven Ebene R entweder eine endliche projektive Ebene ungerader Ordnung n, oder eine unendliche projektive Ebene verstehen und wenn es zu keinem Missverständnis kommen kann, werden wir nur über eine Ebene sprechen.

Ein Oval in einer Ebene ist eine Menge O solcher Punkte, dass jede Gerade der Ebene mit der Menge O höchstens zwei gemeinsame Punkte hat und durch jeden Punkt der Menge O gerade eine Gerade (Tangente des Ovals) geht, die mit der Menge O keinen weiteren Punkt gemeinsam hat. Ein Oval in einer endlichen Ebene ist eigentlich ihr maximaler k-Bogen, d. h. eine Menge O solcher $n + 1$ Punkte, von welchem keine drei auf einer Geraden liegen.

Die Geraden einer Ebene R kann man in 3 Gruppen, bezüglich des Ovals O, zerteilen: a) Sekanten, die mit dem Oval O zwei verschiedene Punkte gemeinsam haben, b) Tangenten, die mit dem Oval O gerade einen Punkt gemeinsam haben und c) äussere Geraden, die mit dem Oval O keinen gemeinsamen Punkt haben. Durch jeden Punkt des Ovals geht gerade eine Tangente. Durch einen Punkt einer unendlichen Ebene R, der nicht auf dem Oval liegt, können entweder zwei verschiedene Tangenten des Ovals gehen (äusserer Punkt), oder es geht durch ihn keine Tangente (innerer Punkt) [1].

Ein Oval in einer endlichen Ebene ist gerade dann ein Kegelschnitt, wenn die Ebene eine desarguessche ist [2].

2. Definition 1. Ein in ein Oval eingeschriebenes Viereck bilden vier verschiedene Punkte des Ovals; diese vier Punkte nennen wir Ecken des Vierecks, die durch zwei verschiedene Ecken gehende Gerade nennt man die Seite des Vierecks und zwei Seiten nennen wir gegenüberliegende Seiten, wenn sie keine gemiensame Ecke haben. Die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten nennen wir die Diagonalpunkte des Vierecks.

Definition 2. Sei P ein Punkt, der nicht auf dem Oval O liegt; konstruieren wir alle solche in das Oval O eingeschriebene Vierecke, für die der Punkt P sein Diagonalpunkt ist. Quasipolare des Punktes P bezüglich des Ovals O ist die Menge aller anderen Diagonalpunkte aller solchen Vierecken zusammen mit den Berührungspunkten der Tangenten des Ovals O, die durch den Punkt P gehen (wenn solche Tangenten existieren). Die Quasipolare eines Punktes P des Ovals O (bezüglich des Ovals O) ist die Tangente des Ovals O in dem Punkte P.

Aus der Definition 2 folgt unmittelbar

Satz 1. *Wenn der Punkt Q auf der Quasipolare des Punktes P bezüglich des Ovals O liegt, dann enthält die Quasipolare des Punktes Q bezüglich des Ovals O den Punkt P.*

Bemerkung. Eine Quasipolare muss nicht ein Teil einer Geraden sein. Z. B. für das Oval von Hughes $O(H) = \{A_0, A_1, A_6, A_7, B_2, C_8, C_9, D_8, D_9, E_2\}$ sind die Quasipolaren aller Punkte A_i $(i = 0, 1, \ldots, 12)$ (und selbstverständlich auch aller Punkte des Ovals) Geraden. Die Quasipolaren aller anderen Punkte sind aber nicht Teile von Geraden. (Über das Oval $O(H)$ siehe z. B. [3].)

Satz 2. *Sei O ein endliches Oval der Ordnung n; die maximale Anzahl der Punkte der Quasipolare des Punktes $P \in R$ bezüglich des Ovals O ist:* a) *für einen inneren Punkt P: $(n^2 - 1)/4$,* b) *für einen äusseren Punkt P: $(n^2 - 4n + 11)/4$ und* c) *für einen Punkt P des Ovals O: $n + 1$.*

Beweis. a) Ist der Punkt P ein innerer Punkt, dann kann man gerade $(n + 1)/2$ solcher verschiedenen Sekanten des Ovals O konstruieren, die durch den Punkt P gehen. Die Menge aller solcher Vierecke, die für die Quasipolare des Punktes P in Betracht kommen, enthält gerade

$$\binom{\frac{n+1}{2}}{2} = (n^2 - 1)/8$$

Vierecke und die Anzahl der Punkte der Quasipolare ist also am meisten $(n^2 - 1)/4$.

b) Ist der Punkt P ein äusserer Punkt, dann kann man gerade $(n - 1)/2$ solcher verschiedenen Sekanten des Ovals O konstruieren und dieselbe Betrachtung wie im Falle a) führt uns zur maximalen Anzahl der Punkte der Quasipolare:

$$2 + 2\binom{\frac{n-1}{2}}{2} = (n^2 - 4n + 11/)4\,.$$

Im Falle c) ist die Behauptung evident.

B e m e r k u n g. Die Zahlen von dem Satz 2 kann man nicht verbessern. Z. B. für ein willkürliches Oval der Ordnung 5 enthält die Quasipolare eines ihren willkürlichen inneren Punktes gerade 6 Punkte. Die Quasipolare des äusseren Punktes B_0 bezüglich des Ovals $O(H)$ von Hughes enthält die Punkte $A_2, B_4, B_5, C_4, C_9, D_7, D_8, D_{11}, E_0, E_{10}, E_{11}, F_3, F_5, G_{10}$, also 14 Punkte. (Diese Punkte findet man mittels der direkten Konstruktion der zugehörigen Vierecken). Es existieren solche inneren und auch äusseren Punkte der Ovalen, deren Quasipolaren die maximale Anzahl der Punkten nicht enthalten.

Satz 3. *Die Quasipolaren eines willkürlichen Punktes einer endlichen projektiven Ebene der Ordnung n bezüglich des Ovals O enthält mindestens $n - 1$ verschiedener Punkten.*

B e w e i s. a) Ist der Punkt ein innerer Punkt des Ovals O, wir konstruieren eine willkürliche Sekante s des Ovals O, die durch den Punkt P geht. Ausser der Sekanten s gehen durch den Punkt P noch $(n - 1)/2$ weitere Sekanten. Jede diese Sekante zusammen mit der Sekante s bestimmt ein in das Oval O eingeschriebenes Viereck und die Diagonalpunkte aller dieser Vierecke (ausser dem Punkt P) sind verschieden. Wir bekommen so $2(n - 1)/2 = n - 1$ verschiedene Punkte der Quasipolare des Punktes P.

b) Ist der Punkt P ein äusserer Punkt des Ovals O, dann existieren (ausser der Sekanten s des Ovals O) noch $(n - 3)/2$ weitere Sekanten des Ovals O, die durch den Punkt P gehen, und dieselbe Anzahl der Vierecke mit verschiedenen Diagonalpunkten, also wir bekommen $2(n - 3)/2 = n - 3$ verschiedene Punkte der Quasipolare des Punktes P. Zwei Berührungspunkte der Tangenten des Ovals O, die durch den Punkt P gehen, ergeben weitere zwei Punkte der Quasipolare des Punktes P, also zusammen $n - 1$ Punkte.

c) Für einen Punkt des Ovals ist die Behauptung evident.

B e m e r k u n g. Den Satz 3 kann man auch nicht verbessern, da z. B. für ein Oval in der Ebene der Ordnung 5 die Quasipolare eines äusseren Punktes P zwei Berührungspunkte der Tangenten des Ovals enthält, die durch den Punkt P gehen, und zwei Diagonalpunkte des einzigen in das Oval eingeschriebenen Vierecks mit dem Diagonalpunkt P, also zusammen $5 - 1 = 4$ Punkte.

Satz 4. *Sei die Quasipolare des Punktes P bezüglich des Ovals O ein Teil der Geraden p; sei s eine willkürliche Sekante des Ovals O, die durch den Punkt P geht; dann liegt der Durchschnittspunkt der Tangenten des Ovals O in den Durchschnittspunkten S, S' der Sekanten s mit dem Oval O auf der Geraden p.*

B e w e i s. Für einen Punkt $P \in O$ ist die Behauptung evident. Bezeichnen wir jetzt den Durchschnittspunkt der Tangenten t des Ovals O im Punkte S mit der Geraden p

mit T. Sei t' die Verbindungslinie der Punkte T und S' und setzen wir voraus, dass diese Gerade das Oval O in einem weiteren Punkte $R' \neq S'$ durchschneidet; dann muss die Gerade PR' das Oval O in einem weiteren Punkte $R \neq R'$ durchschneiden. (Der Punkt R' kann nicht der Berührungspunkt einer Tangenten des Ovals O, die durch den Punkt P geht, sein, da dann müsste der Punkt S' auf der Geraden p liegen. Aber der Punkt S' kann nicht auf der Geraden p liegen. Hat die Gerade p mit dem Oval O keinen gemeinsamen Punkt, ist das evident. Wenn der Punkt S' auf der Geraden p liegt, dann wählen wir einen solchen Punkt $U \in O$, der nicht auf der Geraden p liegt und so, dass die Gerade PU eine Sekante des Ovals O ist. Sei U' der zweite Durchschnittspunkt der Geraden PU mit dem Oval O. Dann liegen die Diagonalpunkte des Vierecks $UU'SS'$ nicht auf der Geraden p, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist). Dann ist $SS'RR'$ ein in das Oval eingeschriebenes Viereck und der Durchschnittspunkt seiner gegenüberliegenden Seiten SR, $S'R'$ sollte auf der Geraden p liegen. Da aber die Verbindungslinie $S'R'$ die Gerade p in dem Punkte T schneidet, müsste auch die Gerade SR durch den Punkt T gehen, was unmöglich ist.

Satz 5. *Sei die Quasipolare des Punktes P bezüglich des Ovals O, das mehr als 5 Punkte enthält, ein Teil der Geraden p; dann gehört jeder Punkt der Geraden p zur Quasipolare des Punktes P.*

Beweis. Liegt der Punkt P auf dem Oval O, folgt die Behauptung unmittelbar aus der Definition der Quasipolare. Liegt der Punkt P nicht auf dem Oval O, wählen wir auf der Geraden p, die die Quasipolare des Punktes P bezüglich des Ovals O enthält, einen willkürlichen Punkt M, der verschieden von möglichen Durchschnittspunkten der Geraden p mit dem Oval O ist (der Durchschnittspunkt $p \cap O$ gehört zur Quasipolare, da er der Berührungspunkt der Tangenten des Ovals, die durch den Punkt P geht, ist). Sei m die Sekante des Ovals O, die durch den Punkt M geht, verschieden von der Geraden p ist und nicht durch den Punkt P geht. Seien A, B die Durchschnittspunkte der Geraden m mit dem Oval O und A', B' die Durschnittspunkte der Geraden PA und PB mit dem Oval O (die Geraden PA, PB können nicht Tangenten des Ovals O sein, da dann die Punkte A, B zu der Geraden p gehören müssten). Der Diagonalpunkt $M' = AB \cap A'B'$ des Vierecks $ABA'B'$ muss der Quasipolare des Punktes P bezüglich des Ovals O gehören; er muss also auf der Geraden p liegen. Das ist nur so möglich, wenn $M = M'$ ist, also wenn der Punkt M zu dieser Quasipolare gehört.

Bemerkung. Der Satz 5 ermöglicht uns die Quasipolare, die eine Gerade ist, einfach die Polare zu nennen.

Jeder Punkt P der Ebene R, der nicht auf dem Oval O liegt, bestimmt eine involutorische Bijektion $\boldsymbol{P}$ der Punkten des Ovals O und zwar so: Sei A ein willkürlicher Punkt des Ovals O; dann ist das Bild $\boldsymbol{P}(A)$ des Punktes A in der Involution $\boldsymbol{P}$ entweder der Punkt A, wenn die Gerade PA eine Tangente des Ovals O ist, oder ist es der zweite Durchschnittspunkt A' der Geraden PA mit dem Oval O. Da wir uns mit keinen weiteren Involutionen beschäftigen werden, werden wir im weiteren unter der Involution gerade die beschriebene Abbildung verstehen.

Definition 3. Zwei verschiedene Involutionen $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}$ nennen wir quasivertauschbar (bezüglich des Ovals O), wenn ein solcher Punkt $A \in O$ existiert, der nicht auf der Geraden IJ liegt und auch kein Fixpunkt keiner der Involutionen $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}$ ist, für welchen $\boldsymbol{IJ}(A) = \boldsymbol{JI}(A)$ ist.

Satz 6. *Zwei Involutionen* $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}$ *sind gerade dann quasivertauschbar, wenn ein solches in das Oval eingeschriebenes Viereck existiert, dass die Punkte* I, J *seine Diagonalpunkte sind.*

Beweis. Sei $ABCD$ ein in das Oval O eingeschriebenes Viereck und sei $I = AB \cap CD$, $J = AD \cap BC$; dann ist $\boldsymbol{I}(A) = B$, $\boldsymbol{JI}(A) = \boldsymbol{J}(B) = C$, $\boldsymbol{J}(A) = D$, $\boldsymbol{IJ}(A) = \boldsymbol{I}(D) = C$, also $\boldsymbol{IJ}(A) = \boldsymbol{JI}(A)$.

Umgekehrt, setzen wir voraus, dass ein solcher Punkt $A \in O$ existiert, dass $\boldsymbol{IJ}(A) = \boldsymbol{JI}(A)$ ist und sei $\boldsymbol{I}(A) = B \neq A$; $\boldsymbol{J}(A) = D \neq A, B$; $\boldsymbol{J}(B) = C$. Dann ist notwendig: $C = \boldsymbol{J}(B) = \boldsymbol{JI}(A) = \boldsymbol{IJ}(A) = \boldsymbol{I}(D)$, also ist der Punkt D das Bild des Punktes C in der Involution $\boldsymbol{I}$ und die Punkte C, D liegen auf einer Geraden, die durch den Punkt I geht. Die Punkte C, D sind verschieden, da wenn $C = D$, d. h. $\boldsymbol{J}(A) = \boldsymbol{J}(B)$ wäre, müsste $A = B$ gelten. Die Punkte A, B, C, D sind also 4 verschiedene Punkte des Ovals O und die Punkte I, J sind Diagonalpunkte des Vierecks $ABCD$.

Satz 7. *Die Quasipolare des Punktes* I*, der nicht auf dem Oval* O *liegt, bezüglich des Ovals* O*, ist die Menge aller solchen Punkte* $X \in R$*, für die die Involutionen* $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{X}$ *quasivertauschbar bezüglich des Ovals* O *sind erweitert um die möglichen Berührungspunkte der Tangenten des Ovals* O*, die durch den Punkt* I *gehen.*

Beweis folgt aus der Definition der Quasipolare und aus dem Satz 6.

Definition 4. Zwei verschiedene Involutionen $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}$ nennen wir vertauschbar, wenn über jeden Punkt A des Ovals O gilt: $\boldsymbol{IJ}(A) = \boldsymbol{JI}(A)$.

Satz 8. *Seien die Quasipolaren aller Punkte* $P \in R$ *bezüglich des Ovals* O $(P \notin O)$ *Geraden und sei* card $O > 7$; *dann liegen alle Punkte* $X \in R$*, für die die Involution* $\boldsymbol{X}$ *vertauschbar mit der Involution* $\boldsymbol{P}$ *ist, auf der Polare* p *des Punktes* P *bezüglich des Ovals* O *und umgekehrt für jeden Punkt* X *der Polare* p *(mit der Ausnahme der Punkten des Ovals* O*) gilt:* $\boldsymbol{PX} = \boldsymbol{XP}$.

Beweis folgt unmittelbar aus den Sätzen 5, 6 und 7.

Setzen wir im weiteren voraus, dass O ein Oval einer desarguesschen Ebene R ist, card $O > 5$ und dass die Quasipolaren aller Punkten der Ebene R, die nicht auf dem Oval O liegen, Geraden sind.

Zu jedem Punkt $P \in R$, der nicht auf dem Oval O liegt, ordnen wir eine zentrale Kollineation σ^P mit dem Zentrum P, mit der Achse in der Polaren p des Punktes P bezüglich des Ovals O zu, die den gegebenen Punkt $A \in O$, der nicht auf der Geraden p liegt, in den Punkt $A' = PA$ abbildet. Das Zentrum P, die Achse p, der Punkt A und sein Bild A' bestimmen die zentrale Kollineation σ^P. Wir werden beweisen, dass das Oval O in der Kollineation σ^P invariant ist. Wirklich, sei $B \neq A, A'$ ein Punkt des Ovals O, der nicht auf der Geraden p liegt und sei $B' = PB$; dann ist $AA'BB'$ ein in das Oval O eingeschriebenes Viereck und hat den Diagonalpunkt P. Dann müssen die weiteren zwei Diagonalpunkte des Vierecks $AA'BB'$ auf der Geraden p liegen, also die Geraden AB und $A'B'$ müssen sich auf der Achse p der Kollineation σ^P schneiden. Der Punkt B' ist dann das Bild des Punktes B in der Kollineation σ^P. Wenn der Punkt T ein Durschnittspunkt der Geraden p mit dem Oval O ist, dann ist $\sigma^P(T) = T$.

Buekenhout [4] hat diesen Satz bewiesen: Ist R eine desarguessche Ebene und O eine solche perspektive quadratische Menge in R, die keine Vereinigung von zwei Geraden ist, dann ist R eine pappussche Ebene und O ein Kegelschnitt. Die quadratische Menge Q ist eine Verallgemeinerung des Ovals und wir nennen sie perspektiv, wenn für jeden Punkt aus R, der nicht der Menge Q gehört, eine solche perspektive Kollineation existiert, die die Menge Q invariant lässt.

Aus diesem Satz folgt

Satz 9. *Sei R eine desarguessche Ebene und sei O ein Oval der Ebene R; ist die Quasipolare jedes Punktes, der nicht auf dem Oval O liegt, eine Gerade, dann ist die Ebene R eine pappussche Ebene und das Oval O ist ein Kegelschnitt.*

Der Beweis folgt daraus, dass die Abbildungen σ^P perspektive Kollineationen sind und dass sie das Oval invariant lassen.

Bemerkung. Da jede endliche desarguessche Ebene eine pappussche Ebene ist und da jedes Oval in einer solchen Ebene ein Kegelschnitt ist, gibt der Satz 9 nur für unendliche Ebenen ein neues Ergebnis.

Literatur

[1] *Qvist, B.:* Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane. Ann. Acad. Sc. Fennicae, Ser. A, *134*, 1952, 1—27.

[2] *Segre, B.:* Lectures on Modern Goemetry. Roma 1961.

[3] *Hughes, D. R.:* A class of non-Desarguesian projective planes. Canad. J. Math. *9*, 1957, 278—388.

[4] *Buekenhout, F.:* Ensembles quadratiques des éspaces projectifs. Math. Z. *110*, 1969, 306—318.

Anschrift des Verfassers: 884 20 Bratislava, Radlinského 11 (Stavebná fakulta SVŠT).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

ON AN INTEGRAL FORMULA

ALOIS ŠVEC, Olomouc

(Received January 13, 1977)

One of the main tools used in the global differential geometry is the integral formula (1.14.1) of [1] for the so-called Codazzi-tensors. In the following paper, I present a more (possibly the most) general integral formula; the above mentioned formula appears then as its simple corollary.

Given a Riemannian manifold (M, g), $\dim M = n$. Let ∇ be its associated Euclidean connection. In each coordinate neighborhood U of M, we may choose orthonormal sections $\{v_1 \ldots v_n\}$ of $T(U)$ such that ∇ is given by

$$(1) \qquad \nabla m = \omega^i v_i, \quad \nabla v_i = \omega_i^j v_j ; \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0$$

and we have

$$(2) \qquad d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j - \tfrac{1}{2} R_{ikl}^j \omega^k \wedge \omega^l, \quad R_{ikl}^j + R_{ilk}^j = 0 .$$

The curvature tensor (at $m \in U$)

$$(3) \qquad R : T_m(M) \times T_m(M) \times T_m(M) \to T_m(M),$$
$$R(y^i v_i, z^i v_i)(x^i v_i) = R_{ikl}^j x^i y^k z^l v_j$$

satisfies (2_3) and

$$(4) \qquad R_{ikl}^j + R_{jkl}^i = 0, \quad R_{ikl}^j = R_{kij}^l, \quad R_{ikl}^j + R_{ilj}^k + R_{ijk}^l = 0,$$

i.e.,

$$(5) \qquad R(y, z)\, x + R(z, y)\, x = 0, \quad g(x, R(z, t)\, y) + g(y, R(z, t)\, x) = 0,$$
$$g(y, R(z, t)\, x) = g(t, R(x, y)\, z),$$
$$g(y, R(z, t)\, x) + g(z, R(t, y)\, x) + g(t, R(y, z)\, x) = 0$$

for $x, y, z, t \in T_m(M)$.

Let (E, g^*), $\dim E = n + N$ be a Euclidean vector bundle over M; on E, let a metric connection ∇^* satisfying

$$(6) \qquad \nabla^*_x g^*(\xi, \eta) = g^*(\nabla^*_x \xi, \eta) + g^*(\xi, \nabla^*_x \eta)$$

for each $x \in T_m(M)$, $m \in M$ and local sections $\xi, \eta : M \to E$ defined in a neighborhood of m be given. Suppose that E is trivial over U, and let $w_\alpha : U \to E$ $(\alpha, \beta, \ldots = 1, \ldots, N)$ be orthonormal sections; ∇^* is then given by

$$(7) \qquad \nabla^* w_\alpha = \tau_\alpha^\beta w_\beta\,, \quad \tau_\alpha^\beta + \tau_\beta^\alpha = 0\,.$$

We have

$$(8) \qquad d\tau_\alpha^\beta = \tau_\alpha^\gamma \wedge \tau_\gamma^\beta - \tfrac{1}{2} S_{\alpha ij}^\beta \omega^i \wedge \omega^j\,, \quad S_{\alpha ij}^\beta + S_{\alpha ji}^\beta = 0\,,$$

the curvature tensor of ∇^* being

$$(9) \qquad S : T_m(M) \times T_m(M) \times E_m \to E_m\,,$$

$$S(x^i v_i, y^i v_i)\,(\xi^\alpha w_\alpha) = S_{\alpha ij}^\beta \xi^\alpha x^i y^j w_\beta\,.$$

Evidently,

$$(10) \qquad S_{\alpha ij}^\beta + S_{\beta ij}^\alpha = 0\,,$$

i.e., S satisfies

$$(11) \qquad S(x, y)\,\xi + S(y, x)\,\xi = 0\,, \quad g^*(\xi, S(x, y)\,\eta) + g^*(\eta, S(x, y)\,\xi) = 0$$

for each $\xi, \eta \in E_m$; $x, y \in T_m(M)$.

For each $m \in M$, let a p-linear mapping

$$(12) \qquad F : \times^p\, T_m(M) \to E_m$$

be given. The mappings

$$(13) \qquad F^{(1)} : \times^{p+1}\, T_m(M) \to E_m\,, \quad F^{(2)} : \times^{p+2}\, T_m(M) \to E_m$$

let be introduced by

$$(14) \qquad F^{(1)}(x_{(1)}, \ldots, x_{(p)}, x) = \nabla^*_x F(x'_{(1)}, \ldots, x'_{(p)}) -$$

$$- \sum_{r=1}^{p} F(x_{(1)}, \ldots, x_{(r-1)}, \nabla_x x'_{(r)}, x_{(r+1)}, \ldots, x_{(p)})\,,$$

$$F^{(2)} = (F^{(1)})^{(1)}\,,$$

where $x_{(1)}, \ldots, x_{(p)}, x \in T_m(M)$ and $x'_{(1)}, \ldots, x'_{(p)}$ are local sections of $T(M)$ such that $x'_{(1)}(m) = x_{(1)}, \ldots, x'_{(p)}(m) = x_{(p)}$.

Lemma. *The mappings $F^{(1)}$ and $F^{(2)}$ are well defined, i.e., they do not depend on the choice of the sections $x'_{(1)}, \dots, x'_{(p)}$. Further,*

$$(15)\qquad F^{(2)}(x_{(1)}, \dots, x_{(p)}, y, x) - F^{(2)}(x_{(1)}, \dots, x_{(p)}, x, y) =$$
$$= \sum_{r=1}^{d} F(x_{(1)}, \dots, x_{(r-1)}, R(x, y)\, x_{(r)}, x_{(r+1)}, \dots, x_{(p)}) - S(x, y)\, F(x_{(1)}, \dots, x_{(p)}) .$$

Proof. Let us write, in U,

$$(16)\qquad F(x^i_{(1)}v_i, \dots, x^i_{(p)}v_i) = F^\alpha_{i_1\dots i_p} x^{i_1}_{(1)} \dots x^{i_p}_{(p)} w_\alpha .$$

The components $F^\alpha_{i_1\dots i_p i}$ let be introduced by

$$(17)\qquad \mathrm{d}F^\alpha_{i_1\dots i_p} - \sum_{r=1}^{p} F^\alpha_{i_1\dots i_{r-1} i i_{r+1}\dots i_p}\omega^i_{i_r} + F^\beta_{i_1\dots i_p}\tau^\alpha_\beta = F^\alpha_{i_1\dots i_p i}\omega^i .$$

Then it is easy to see that

$$(18)\qquad F^{(1)}(x^i_{(1)}v_i, \dots, x^i_{(p)}v_i, x^i v_i) = F^\alpha_{i_1\dots i_p i} x^{i_1}_{(1)} \dots x^{i_p}_{(p)} x^i \omega_\alpha .$$

The exterior differentiation of (17) yields

$$(19)\qquad (\mathrm{d}F^\alpha_{i_1\dots i_p i} - F^\alpha_{i_1\dots i_p j}\omega^j_i - \sum_{r=1}^{p} F^\alpha_{i_1\dots i_{r-1} j i_{r+1}\dots i_p i}\omega^j_{i_r} + F^\beta_{i_1\dots i_p i}\tau^\alpha_\beta) \wedge \omega^i =$$
$$= \tfrac{1}{2}(\sum_{r=1}^{p} F^\alpha_{i_1\dots i_{r-1} k i_{r+1}\dots i_p} R^k_{i_r j i} - F^\beta_{i_1\dots i_p} S^\alpha_{\beta j i})\, \omega^j \wedge \omega^i .$$

The components $F^\alpha_{i_1\dots i_p ij}$ let be defined by

$$(20)\qquad \mathrm{d}F^\alpha_{i_1\dots i_p i} - F^\alpha_{i_1\dots i_p j}\omega^j_i - \sum_{r=1}^{p} F^\alpha_{i_1\dots i_{r-1} j i_{r+1}\dots i_p i}\omega^j_{i_r} + F^\beta_{i_1\dots i_p i}\tau^\alpha_\beta = F^\alpha_{i_1\dots i_p ij}\omega^j .$$

Clearly,

$$(21)\qquad F^{(2)}(x^i_{(1)}v_i, \dots, x^i_{(p)}v_i, x^i v_i, y^i v_i) = F^\alpha_{i_1\dots i_p ij} x^{i_1}_{(1)} \dots x^{i_p}_{(p)} x^i y^j w_\alpha ,$$

and (19) implies

$$(22)\qquad F^\alpha_{i_1\dots i_p ji} - F^\alpha_{i_1\dots i_p ij} = \sum_{r=1}^{p} F^\alpha_{i_1\dots i_{r-1} k i_{r+1}\dots i_p} R^k_{i_r ij} - F^\beta_{i_1\dots i_p} S^\alpha_{\beta ij} ,$$

i.e., (15). QED.

Let us introduce the following notation. For $H : \times^q T_m(M) \to \mathbb{R}$ a q-linear mapping, $q \geqq 2$, $1 \leqq q_1 < q_2 \leqq q$, write

$$(23)\qquad H(x_{(1)}, \dots, x_{(q_1-1)}, A, x_{(q_1+1)}, \dots, x_{(q_2-1)}, A, x_{(q_2+1)}, \dots, x_{(q)}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} H(x_{(1)}, \dots, x_{(q_1-1)}, v_i, x_{(q_1+1)}, \dots, x_{(q_2-1)}, v_i, x_{(q_2+1)}, \dots, x_{(q)}) ,$$

where $\{v_1, \dots, v_n\}$ is an arbitrary orthonormal basis of $T_m(M)$; (23) is well defined.

Theorem. *Let (M, g), (E, g^*, ∇^*) be as above. At each $m \in M$, let p-linear mappings $F, G : \times^p T_m(M) \to E_m$ be given. On M, consider the 1-form*

$$\tag{24} \begin{aligned} \varphi(x) = {} & g^*(F(A_1, \ldots, A_{p-1}, x),\ G^{(1)}(A_1, \ldots, A_{p-1}, B, B)) - \\ & - g^*(F(A_1, \ldots, A_{p-1}, B),\ G^{(1)}(A_1, \ldots, A_{p-1}, x, B)) . \end{aligned}$$

Let ∂M be the boundary of M and $*$ the Hodge operator. Then

$$\tag{25} \begin{aligned} \int_{\partial M} * \varphi = \int_M & \{g^*(F^{(1)}(A_1, \ldots, A_{p-1}, B, B),\ G^{(1)}(A_1, \ldots, A_{p-1}, C, C)) - \\ & - g^*(F^{(1)}(A_1, \ldots, A_{p-1}, B, C),\ G^{(1)}(A_1, \ldots, A_{p-1}, C, B)) + \\ & + g^*(F(A_1, \ldots, A_{p-1}, B),\ \sum_{r=1}^{p-1} G(A_1, \ldots, A_{r-1}, R(B. C)\, A_r, A_{r+1}, \ldots, A_{p-1}, C) + \\ & + G(A_1, \ldots, A_{p-1}, R(B, C)\, C) - S(B, C)\, G(A_1, \ldots, A_{p-1}, C))\}\, \mathrm{d}o , \end{aligned}$$

do *being the volume element on M.*

Proof. On U we get

$$\tag{26} \varphi = \delta_{\alpha\beta}\delta^{i_1 j_1} \ldots \delta^{i_{p-1} j_{p-1}} \delta^{kl} (F^\alpha_{i_1 \ldots i_{p-1} i} G^\beta_{j_1 \ldots j_{p-1} kl} - F^\alpha_{i_1 \ldots i_{p-1} k} G^\beta_{j_1 \ldots j_{p-1} il})\, \omega^i .$$

Hence

$$\tag{27} \begin{aligned} \mathrm{d} * \varphi = {} & \delta_{\alpha\beta}\delta^{i_1 j_1} \ldots \delta^{i_{p-1} j_{p-1}} \delta^{kl} \delta^{ij} (F^\alpha_{i_1 \ldots i_{p-1} ij} G^\beta_{j_1 \ldots j_{p-1} kl} - F^\alpha_{i_1 \ldots i_{p-1} kj} G^\beta_{j_1 \ldots j_{p-1} il} + \\ & + F^\alpha_{i_1 \ldots i_{p-1} i} G^\beta_{j_1 \ldots j_{p-1} klj} - F^\alpha_{i_1 \ldots i_{p-1} k} G^\beta_{j_1 \ldots j_{p-1} ilj})\, \mathrm{d}o = \\ = {} & \delta_{\alpha\beta}\delta^{i_1 j_1} \ldots \delta^{i_{p-1} j_{p-1}} \delta^{kl} \delta^{ij} \{F^\alpha_{i_1 \ldots i_{p-1} ij} G^\beta_{j_1 \ldots j_{p-1} kl} - F^\alpha_{i_1 \ldots i_{p-1} kj} G^\beta_{j_1 \ldots j_{p-1} il} + \\ & + F^\alpha_{i_1 \ldots i_{p-1} i} (G^\beta_{j_1 \ldots j_{p-1} klj} - G^\beta_{j_1 \ldots j_{p-1} kjl})\}\, \mathrm{d}o ; \end{aligned}$$

using (22) for G, we get (25). QED.

Corollary. *Let (M, g) be a Riemannian manifold. Let $T(x, y)$ be a symmetric tensor on M, and let there be a function $\tau : \partial M \to \mathbb{R}$ such that $T(x, y) = \tau g(x, y)$ on ∂M. Further, let $T(x, y)$ have, at $m \in M$, orthonormal eigen-vectors $\{v_1, \ldots, v_n\}$ with the corresponding eigen-values $k_1, \ldots, k_n$, and let K_{ij} be the sectional curvature corresponding to the 2-direction $\{v_i, v_j\}$. Then*

$$\tag{28} \begin{aligned} \int_M & \{T^{(1)}(A, B, B)\, T^{(1)}(A, C, C) - T^{(1)}(A, B, C)\, T^{(1)}(A, C, B) - \\ & - \sum_{1 \leq i < j \leq n} K_{ij}(k_i - k_j)^2\}\, \mathrm{d}o = 0 . \end{aligned}$$

Proof. Set $E = M \times \mathbb{R}$, $F(x, y) = G(x, y) = T(x, y)$. Then

$$\varphi(x) = T(A, x)\, T^{(1)}(A, B, B) - T(A, B)\, T^{(1)}(A, x, B) =$$

$$= \delta^{ik}\delta^{lm}T_{ij}T_{klm}x^j - \delta^{ik}\delta^{jm}T_{ij}T_{klm}x^l .$$

At $m \in \partial M$ we have $T_{ij} = \tau\delta_{ij}$ and

$$\varphi(x) = \tau\delta^{lm}(T_{jlm} - T_{ljm})\, x^j = 0 .$$

Further, at $m \in M$,

$$T(A, B)\{T(R(B, C)\, A, C) + T(A, R(B, C)\, C)\} =$$

$$= \delta^{im}\delta^{jp}\delta^{lq}T_{ij}T_{kl}R^k_{mpq} + \delta^{ik}\delta^{jp}\delta^{qm}T_{ij}T_{kl}R^l_{mpq} =$$

$$= \sum_{i,k}\delta^{im}\delta^{ip}\delta^{kq}k_ik_kR^k_{mpq} + \sum_{i,k}p^{ik}\delta^{ip}\delta^{qm}k_ik_kR^k_{mpq} =$$

$$= \sum_{i,k}k_ik_kR^k_{iik} + \sum_i\delta^{qm}k_i^2R^i_{miq} = \sum_{i,k}k_ik_kK_{ik} - \sum_{i,j}k_i^2K_{ji} = - \sum_{1 \leq i < j \leq n}(k_i - k_j)^2\, K_{ij} .$$

Inserting these into (25), we get (28). QED.

Bibliography

[1] *U. Simon:* A further method in global differential geometry. Abh. Math. Sem. Hamburg, *44* (1975), 52—69.

Author's address: 771 46 Olomouc, Leninova 26 (Přírodovědecká fakulta UP).

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

MILOSLAV JŮZA, Praha: *Deux mesures spéciales dans l'espace* E_2. (Dvě speciální míry v prostoru E_2.)

Budiž h jednorozměrná Hausdorffova míra v prostoru E_2, vzniklá pokrýváním množiny čtvercovými intervaly, H budiž jednorozměrná síťová Hausdorffova míra v E_2, vzniklá pokrýváním množiny dyadickými intervaly. Dokazuje se, že pro některé množiny M je $h(M) < H(M)$.

ZDENĚK DOSTÁL, Ostrava: *Uniqueness of the operator attaining* $C(H_n, r, n)$. (Jednoznačnost operátoru $C(H_n, r, n)$.)

V. Pták zavedl v souvislosti s kritickým exponentem konstantu $C(B, r, m)$ a nalezl operátor A takový, že $|A^n| = C(H_n, r, n)$. V článku je dokázáno, že A je v jistém smyslu jediný.

JOSEF NIEDERLE, Brno: *Relative bicomplements and tolerance extension property.* (Relativní bikomplementy a rozšiřitelnost relací tolerance v distributivních svazech.)

Relace tolerance je reflexivní a symetrická binární relace. Relativní bikomplement dvou prvků z ohraničeného intervalu ve svazu je třetí prvek z téhož intervalu takový, že supremum všech tří prvků je horní hranice intervalu a jejich infimum dolní hranice intervalu. V článku je pomocí relativních bikomplementů studována rozšiřitelnost relací tolerance z podsvazu distributivního svazu na celý svaz.

IVAN CHAJDA, Přerov: *Notes on lattice congruences.* (Poznámky o svazových kongruencích.,)

Je známo, že každý ideál svazu L je jádrem aspoň jedné kongruence na L tehdy a jen tehdy je-li L distributivní. V práci jsou dány nutné a postačující podmínky, aby daný ideál byl jádrem aspoň jedné kongruence na modulárním svazu. Je-li J ideál svazu L, zaveďme $\langle x, y \rangle \in T_J$ tehdy a jen tehdy, když $x = a \vee i$, $y = a \vee j$ pro některé $a \in L$, $i, j \in J$. Hlavní výsledek:

Je-li L modulární svaz a J ideál v L, pak je ekvivalentní: (a) T_J je kompatibilní relace na L, (b) T_J je transitivní relace na L, (c) T_J je ekvivalence na L, (d) T_J je kongruence na L s jádrem J.

Dále je v práci získán výsledek pro speciální případ ideálu.

ILJA ČERNÝ, Praha: *Cuts in simple connected regions and the cyclic ordering of the system of all boundary elements.* (Řezy v jednoduše souvislých oblastech a cyklické uspořádání systému všech hraničních elementů.)

V článku je podán vyčerpávající výklad pojmů a tvrzení potřebných k vybudování teorie hraničních elementů (Caratheodoryho „Primeneden“) oblasti konformě ekvivalentní s jednotkovým kruhem. Definují se hraniční elementy takové oblasti a cyklické uspořádání systému všech těchto elementů. Je dokázáno několik kritérií týkajících se cyklického uspořádání a dalších vlastností hraničních elementů.

MILAN KOMAN, Praha: *New upper bounds for the crossing number of K_n on the Klein bottle* (Nový horní odhad pro průsečíkové číslo K_n na Kleinově láhvi.)

Pro průsečíkové číslo $cr_2(K_n)$, $n \geqq 10$ kresby úplného grafu K_n na Kleinově láhvi jsou odvozeny odhady

$$\frac{1}{4}\binom{n}{4} \leqq cr_2(K_n) \leqq \frac{59}{216}\binom{n-1}{4}.$$

Horní odhady souhlasí s horním odhadem průsečíkového čísla $cr_1^*(K_n)$ pro kresby úplného grafu K_n na anuloidu.

BOHDAN ZELINKA, Liberec: *On a problem of R. Häggkvist concerning edge-colourings of graphs.* (O problému R. Häggkvista týkajícím se obarvení hran grafu.)

V článku se dokazuje, že pro $n = 2^r$, kde r je přirozené číslo, lze hrany úplného sudého grafu $K_{n,n}$ obarvit n barvami tak, že každá kružnice v tomto grafu, která obsahuje hrany pouze dvou barev má délku čtyři. Je to negativní řešení jednoho problému R. Häggkvista.

VÁCLAV VILHELM, Praha: *Über die Charakterisierung der Verbände durch ihre c-Teilverbände.* (O charakterizaci svazů pomocí jejich c-podsvazů.)

Práce odpovídá na otázky z článku J. Jakubíka: Sublattices with saturated chains, Czech. Math. J. *25* (*100*), (1975), 442—444. Buď C třída svazů, která je vzhledem k isomorfním svazům, kartézským součinům a direktním limitám svazů třídy C uzavřená; C_1 ($\emptyset \neq C_1 \neq C$) buď její podtřída, která s každým svazem obsahuje všechny svazy, které jsou izomorfní k jeho podsvazům. Ke každému regulárnímu kardinálnímu číslu m obsahuje pak třída $C - C_1$ svaz, ve kterém každý maximální řetěz mezi libovolnými srovnatelýnmi prvky má mohutnost $\geqq m$ a třída C_1 není v C charakterizovatelná pomocí c-podsvazů.

VÁCLAV MEDEK, Bratislava: *Über eine Eigenschaft von Ovalen.* (O jednej vlastnosti oválov.)

V práci sa popisuje taká vlastnosť oválu v projektívnej rovine, ktorá predstavuje podmienku pre to, aby rovina bola pappusovská.

ALOIS ŠVEC, Olomouc: *On an integral formula.* (O integrálním vzorci.)

V článku je dokázán obecný integrální vzorec pro tenzory na riemannovských varietách.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

RECENSE

Jaroslav Ježek: UNIVERZÁLNÍ ALGEBRA A TEORIE MODELŮ, Matematický seminář SNTL, sv. 8. Vydalo SNTL (Praha) v r. 1976; 226 str., cena 18 Kčs.

Se sympatiemi pozoruji, jak přibývá česky a slovensky psané algebraické literatury. Z posledního desetiletí si připomeňme zejména Kurošovy Kapitoly, Birkhoffovu a McLaneovu Algebru, a Beranovy Grupy a svazy. Nyní k nim přibyla pěkná knížka Ježkova věnovaná disciplíně, která u nás zatím knižně zpracovaná nebyla. Ostatně i ve světovém měřítku lze souhrnná díla o této partii algebry spočítat na prstech.

Kniha je rozdělena na předmluvu, úvod, 5 kapitol a komentáře. V Úvodu (14 str.) autor vysvětluje elementy teorie množin. Zhruba řečeno jde o neformální výklad Gödelovy-Bernaysovy-von Neumannovy koncepce. Ze základních 9 principů se odvozují potřebná další tvrzení, včetně některých záležitostí z obecné topologie. Kapitola I (15 str.) obsahuje potřebné partie z teorie kategorií: limity a některé jejich speciální případy, příslušné duální situace, a modifikace (tj. v jiné terminologii reflexe). Jde o dost hutný výklad. Autor správně doporučuje, aby čtenář-začátečník prostudoval kapitolu nejprve spíš orientačně, a při další četbě se k ní podle potřeby vracel. V kapitole II (51 str.) se vysvětluje pojem kvazistruktury (tj. množiny s parciálními operacemi a relacemi, které jsou pojmenovány operačními a relačními symboly daného jazyka), struktury a algebry. Studují se kategorie kvazistruktur daného jazyka. Z obsahu: homomorfismy, podstruktury, kongruence, kartézské a subkartézské součiny, sumy, kvaziprimitivní a primitivní třídy, volné kvazistruktury, termy a algebraické operace, extenzívní třídy (tj. třídy, jejichž každá kvazistruktura je podstrukturou kvazistruktury s idempotentem), volné kompozice amalgámů. Tato kapitola je vhodným úvodem do problematiky dnešní algebry. V kapitole III (39 str.) se čtenář seznámí s některými partiemi teorie modelů. Po úvodu věnovaném formulím se studuje redukovaný součin struktur podle filtru a věta o kompaktnosti. Z dalšího obsahu kapitoly: úplné teorie, definovatelnost (zde je např. odvozena Craigova-Lyndonova interpolační věta), axiomatizovatelné třídy, univerzální třídy, kvazivariety.

Těžiště knihy je nesporně v kap. IV (50 str.), nazvané Variety algeber. Zde především kniha přestává být (jen) úvodním textem a stává se monografií. Kapitola začíná vcelku „klasicky" Birkhoffovou větou. Dále se vyšetřují některé speciální typy variet a svazy variet. Za nejzajímavější považuji paragrafy, věnované větám Malcevova typu. To jsou věty, podle kterých z jistých podmínek (zpravidla jde o množinu nějakých identit) plyne některá vlastnost svazu kongruencí (např. modularita či distributivnost). Autor odvozuje i jedno značně obecné malcevovské schéma. Dále se vyšetřují variety algeber, jejichž kongruence mají některou „přirozenou" vlastnost. Např. kongruence je charakterizována každou svou rozkladovou třídou, každé poduniverzum je rozkladovou třídou některé kongruence atp. S podobnými situacemi se čtenář možná už setkal třeba v teorii svazů. Mám na mysli např. Hashimotovu větu (v. str. 56 a 124 Skornjakovovy knihy Элементы теории структур). Kapitola V (35 str.) se nazývá Algoritmické problémy algebry. Algoritmus se zde definuje jako Turingův stroj. Autor formuluje slovní problém a ukazuje, že ve varietě pologrup není tento problém řešitelný. Uvádí některé typy variet s řešitelným slovním problémem. V závěru se zabývá dalšími otázkami, souvisejícími s rekurzívností. Např. rekurzívní axiomatizovatelností teorie a rozhodnutelností. Komentáře (2 str.) jsou průvodcem po literatuře

(72 položek). Některá doporučení k další četbě jsou uvedena už v předmluvě (3 str.), která se také letmo dotýká historie. Dílo uzavírá rejstřík (4 str.).

Základní text je zpracován obv. formou věta — důkaz. Některá snadnější odvození jsou čtenáři přenechána jako cvičení. Množství příkladů z „klasičtějších" algebraických teorií motivuje definice a demonstruje dosažené výsledky. V těchto příkladech je obsažena řada dalších cenných informací. Zde se zpravidla důkaz nepodává. Autorovi se podařilo zpracovat text zcela korektně a zahrnul do díla spoustu pěkných výsledků, často i z poslední doby a dosud knižně nezpracovaných. Výklad je srozumitelný. To má několik příčin: Jednak je to promyšlenost koncepce. Jde o organický celek, z něhož lze sotva co vypustit, aniž bychom měnili celý další text. Jednak je tu vhodně zvolena terminologie a symbolika. To není zanedbatelné v disciplíně, kde označení a terminologie dosud velmi kolísá. Sympatický je také styl autorova vyjadřování. Jeho gramatické věty jsou stručné a srozumitelné. Svou zásluhu má také redakce a tiskárna.

Kniha je přístupná pro každého pozorného čtenáře, který má zálibu v abstrakci a zcela průměrnou zběhlost v četbě matematických textů. Lze ji doporučit všem matematikům, kteří se chtějí seznámit s metodami moderní algebry. K tomuto účelu lze za minimum považovat kap. II. Přeju této pěkné knížce co nejvíc poctivých čtenářů.

Teo Sturm, Praha

BEITRÄGE ZUR NUMERISCHEN MATHEMATIK 4 (Příspěvky k numerické matematice), sborník vydaný k 70. narozeninám Prof. H. Heinricha pod redakcí F. Kuhnerta a J. W. Schmidta, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975, 268 stran, cena 57 M.

Svazek je uveden životopisem jubilanta i zhodnocením jeho vědecké a organizační činnosti. Následuje 24 původních příspěvků různých autorů, které jsou věnovány aktuálním problémům numerické analysy. Dva z příspěvků jsou napsány rusky, dva anglicky, ostatní v jazyce německém. Všechny nesou v záhlaví věnování Prof. Heinrichovi k sedmdesátinám. Škoda, že v recensním výtisku chybělo několik stránek.

Vlastimil Pták, Praha

A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin: ZÁKLADY TEORIE FUNKCÍ A FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY. Teoretická knižnice inženýra, SNTL, Praha 1975, 584 stran, váz. Kčs 60,—, brož. Kčs 52,—.

Známá učebnice A. N. Kolmogorova a S. V. Fomina vyšla doposud ve třech ruských vydáních (v r. 1954, 1960 a 1972), ve dvou překladech do angličtiny a byla přeložena i do francouzštiny. Nyní máme k dispozici i český překlad třetího (oproti prvním dvěma značně upraveného a rozšířeného) ruského vydání. Kniha je vhodná nejen pro matematiky a fyziky, ale také pro posluchače těch vysokých škol, na kterých matematika hraje podstatnou roli, a rovněž pro kvalifikované pracovníky ve výzkumu i v inženýrské praxi. V předmluvě k druhému ruskému vydání se říká: „Třebaže v knize jsou především vyloženy obecné pojmy teorie množin a funkcionální analýzy, může čtenář skoro ve všech jejích částech najít klasickou problematiku s nimi souvisící". Výběr a uspořádání probírané látky jsou skutečně natolik šťastné, že čtenář si utvoří dobrý přehled o základech funkcionální analýzy a získá na ně správný pohled. Přitom je kniha psána velmi srozumitelně a přehledně. Je přístupná každému, kdo ovládá základy klasické matematické analýzy (bez teorie míry a Lebesgueova integrálu) a lineární algebry.

Kniha je rozdělena do deseti částí. První část seznamuje čtenáře se základy teorie množin, druhá pojednává o metrických a topologických prostorech, třetí o normovaných a topologických lineárních prostorech. Čtvrtá část se zabývá lineárními funkcionály a operátory, mj. zde čtenář najde i kapitolu o distribucích (i s krátkým výkladem o jejich užití v teorii diferenciálních rovnic). Pátá část je věnována míře, měřitelným funkcím a integrálu. Teorie míry je zde vysvětlena nejdříve pro množiny v rovině a teprve pak se přechází k obecné teorii míry, obecným otázkám prodloužení míry, obecnému pojmu měřitelné funkce a jejím vlastnostem atd. Teorie Lebesgueova integrálu je vyložena pro případ obecného prostoru s mírou, ale nechybí ani srovnání s Riemannovým integrálem v jednorozměrném případě. Neurčitý Lebesgueův integrál, obecné věty o derivaci (pro funkce jedné reálné proměnné), dále Stieltjesův a Lebesgueův-Stieltjesův integrál a některé aplikace jsou předmětem šesté části. Sedmá část pojednává o prostoru L_1 funkcí integrovatelných a o prostoru L_2 funkcí integrovatelných s kvadrátem, přičemž zvláštní kapitola se zabývá ortogonálními systémy funkcí v prostoru L_2 a řadami vzhledem k ortogonálním systémům. Na to navazuje osmá část, věnovaná podrobnému výkladu Fourierových řad a Fourierovu integrálu. Devátá část obsahuje základy teorie lineárních integrálních rovnic a stručně jsou zde vysvětleny i některé fyzikální aplikace. Poslední část se zabývá výkladem některých základních pojmů nelineární funkcionální analýzy, především základů diferenciálního počtu v lineárních prostorech. V dodatku, který byl napsán teprve pro třetí ruské vydání V. M. Tichomirovem, se čtenář ve stručnosti seznámí s Banachovými algebrami.

Překladatelé se snažili srozumitelnost ruského originálu ještě zvýšit řadou doplňujících poznámek pod čarou i některými drobnými úpravami přímo v textu. K přehlednosti přispěli podrobným přehledem označení, věcným rejstříkem a rejstříkem symbolů. Široký seznam literatury uvedený v originálu doplnili ještě několika českými tituly. Je nutno vyzdvihnout i pěknou grafickou úpravu knihy. Celý překlad je bezesporu zdařilý. Jako u každého rozsáhlého díla, i zde je ovšem možno (podle mínění recenzenta) najít některé (skutečně drobné) nedostatky, resp. vady na kráse. (Např. termín podprostor nul pro jádro operátoru nezní v češtině právě nejlépe; srozumitelnost výkladu pojmu mohutnosti množiny na str. 43 poněkud utrpěla tím, že při překladu vypadla jedna vysvětlující věta.)

Jak už bylo řečeno, jde o knihu srozumitelnou širokému okruhu čtenářů a vzhledem k velkému zájmu o všechna její předešlá vydání lze očekávat, že její překlad do češtiny bude uvítán naší odbornou veřejností neméně dobře.

Milan Kučera, Praha

György Bizám - János Herczeg: LOGIK MACHT SPASS, 85 Aufgaben mit Lösungen, Akadémiai Kiadó, Budapest 1976, stran 391, cena neuvedena.

Při vyučování se v matematice obvykle sledují dva cíle: jednak se rozvíjí logické myšlení a jednak se žáci seznamují s konkrétním matematickým materiálem. To je dvojité zatížení, jež mnohým adeptům ztěžuje cestu k úspěchu. Tato nová knížka nepředpokládá proto žádné předběžné znalosti a chce, aby se čtenář soustředil jen na rozvoj svého matematického myšlení. Publikace je určena čtrnáctiletým školákům, ale autoři soudí, že po ní sáhnou i dospělí s vysokoškolským vzděláním, aby se pobavili při řešení různých hříček. Praví se, že až na několik vyjmenovaných výjimek všechny úlohy jsou původní. Děti bude možná bavit, že skoro každá úloha je zaobalena do obšírného příběhu, čímž text ztrácí na hutnosti. Pro matematicky náročnějšího studenta, jaké známe např. z našich matematických olympiád, je však taková redundance spíše na obtíž.

V první části knihy je uvedeno všech 85 úloh, druhá pak přináší podrobná řešení s mnoha poznámkami. Na vydání se spojilo nakladatelství Maďarské akademie věd v Budapešti se západoněmeckým nakladatelstvím Ernsta Kletta ve Stuttgartu. Těm, kdo sledují popularizační literaturu, je symbióza těchto dvou vydavatelství známá.

Jiří Sedláček, Praha

I. M. Geľfand a kolektív: SÚRADNICOVÁ SÚSTAVA. Alfa, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava 1976, 112 stran, 88 obr., cena 5,— Kčs.

Na originálu, jenž už čtyřikrát vyšel rusky, se vedle hlavního autora podíleli J. G. Glagolevová a A. A. Kirillov. Knížku do slovenštiny přeložila Viera Zaťková a bratislavské vydavatelství Alfa ji zařadilo jako druhý svazek do své edice Epsilon.

Text je rozdělen do dvou kapitol. První z nich je delší a skládá se ze tří paragrafů (souřadnice bodu na přímce, v rovině, v prostoru). Druhá kapitola je členěna rovněž do tří částí (úvod, čtyřrozměrný prostor, čtyřrozměrná krychle). Stručně se dá říci, že je to elementární úvod do analytické geometrie určený středoškolským studentům i jiným zájemcům. V knížce je řada úloh a cvičení s návody k samostatnému přemýšlení.

Jiří Sedláček, Praha

W. D. Wallis - A. P. Street - J. S. Wallis: COMBINATORICS: ROOM SQUARES, SUM-FREE SETS, HADAMARD MATRICES, Lecture Notes in Mathematics, 292, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1972. Stran 508, cena DM 50,—.

V úvaze „Combinatorial Analysis" (The Mathematical Sciences: A Collection of Essays, M.I.T. Press, 1969) Gian-Carlo Rota uvádí poznámku: ... několik posledních let je pravděpodobně svědkem explose kombinatorické aktivity..., kterou během dalších let můžeme jen potvrdit. Za pokračujícího rozmachu lze ještě stále (viz Marshall Hall, Jr., Combinatorial Theory, Blaisdell, Waltham, 1967), ... za ústřední úlohu nejnovější kombinatoriky pokládat sestavování předmětů podle zvláštních pravidel a vyhledávání všech možných způsobů sestrojení těchto sestav.... Hlubší rozbor uvedené úlohy se pak stal pracovní osnovou recensované knihy, uvedené autory jen jako část jmenované explose. Obsahuje tři samostatné monografie o třech pojmech, z nichž každému je dodnes věnována zvláštní pozornost. Sami autoři, Walter Denis Wallis, Jennifer Seberry Wallis (oba z University of Newcastle, New South Wales, Australie) a Anne Penfold Street (University of Queensland, St. Lucia, Queensland, Australia), už dlouho a úspěšně bádají v kombinatorice a představují samostatnou a významnou školu tohoto oboru, umístěnou u protinožců. Tento svazek monografií předpokládá základní vědomosti z teorie grup (i kvazigrup), z lineární algebry a z teorie čísel (zde zejména z teorie o cyklotomii). V každé z těchto monografií se používá teorie grafů, avšak žádná z nich teorií grafů není. Dále každá z nich tvoří samostatný a uzavřený celek (nikoliv bez vzájemných souvislostí), který nevyžaduje žádné specifické kombinatorické znalosti a je chápána jako vstupní přehled do studia příslušného pojmu. Aby výklad byl pokud možno nezávislý na dalších pramenech, je celá kniha uvedena společným seznamem základních definic z kombinatoriky.

Jak bylo řečeno, 1. část knihy tvoří společný úvod s myšleným názvem „Co by měl každý mladý kombinatorik znát". Tato část má jen 28 stran a sled sedmi odstavců je následující. Aritmetika (Galoisova pole, kvadratické zbytky, Legendreovy symboly, Fermatova čísla, cyklotomická čísla), vyvážená neúplná bloková schémata ((b, v, r, k, λ)-konfigurace, (v, k, λ)-konfigurace), matice (matice incidence blokového schématu, Hadamardova matice, Kroneckerovy součiny), diferenční množiny (cyklická diferenční množina, diferenční množina na aditivní abelovské grupě), grafy (podgrafy, lineární faktorizace, obarvení hran), grupy (grupoid, pologrupa, kvazigrupa, lupa, latinský čtverec), rozklady (Ramseyova čísla, součtově volné množiny, Schurova funkce). Méně zkušený čtenář může další podrobnosti vyhledat v učebnicích. Z citovaných uveďme především už citovanou knihu M. Halla, Jr., [1970], dále následuje Frank Harary,Graph Theory, Addison-Wesley,Reading, 1969, [1973], ještě Herbert John Ryser, Combinatorial Mathematics, Carus Mathematical Monograph, 14, M.A.A.,1963, [1966] a konečně I. M. Vinogradov, Základy teorie čísel, NČSAV, Praha 1953, [Osnovy těorii čisel, GITTL, Moskva, 1952]. Běží o knihy u nás vesměs dostupné [v hranatých závorkách jsou data vydání v ruštině].

2. část, která má 92 stran a sepsal ji W. D. Wallis, nese název Roomovy čtverce. T. G. Room uvedl pojem Roomova čtverce v krátké poznámce: A new type of magic square, Math. Gazette, *39*, (1955), str. 307. Brzy na to následovaly aplikace ve statistice a souvislosti s dalšími matematickými pojmy. Nechť r je liché přirozené číslo a nechť $R = \{0, 1, ..., r\}$. Sestava buněk o r řádcích a r sloupcích, jejíž buňky jsou buď prázdné, nebo obsahují neuspořádanou dvojici prvků z R, se nazývá Roomovým čtvercem $\mathscr{R}$ o straně r nad R, když platí: (i) každá neuspořádaná dvojice

prvků z R se vyskytuje právě jednou v $\mathscr{R}$, (ii) každý prvek z R se vyskytuje právě jednou v každém řádku a právě jednou v každém sloupci z $\mathscr{R}$.

V úvodní kapitole se dovídáme o tom, že isomorfismus Roomových čtverců vede k jeho standartisaci, kde neuspořádanou dvojici 0, i obashuje buňka v i-tém řádku a v i-tém sloupci. Odtud se přes matici incidence Roomova čtverce dostáváme k pojmům: Roomův čtverec Hadamarda — matice incidence Roomova čtverce je maticí incidence blokového schématu odpovídajícího Hadamardově matici, doplňkové Roomovy čtverce — součet matic incidence je roven součtu jednotkové matice a matice ze samých jedniček, Roomův čtverec vnořitelný do řecko-latinského čtverce, šikmý Roomův čtverec — když transponujeme jeho matici incidence, obdržíme matici incidence jeho doplňkového čtverce, Roomův podčtverec. Dále, lineární faktorizace úplného grafu na množině R, jakožto množině jeho uzlů, vyvolává řádkovou a sloupcovou faktorizaci Roomova čtverce nad R. K těmto faktorizacím lze pak přiřadit latinské čtverce a tak se dostaneme k souvislosti Roomova čtverce s kvazigrupami. Následujících pět kapitol je věnováno konstrukcím Roomova čtverce. Především máme zde metodu startér-následovník: Nechť s je přirozené číslo. Startérem v aditivní abelovské grupě G řádu $2s + 1$ rozumíme takovou množinu $X = \{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \ldots, \{x_s, y_s\}\}$, že množina $\{x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_s\}$ obsahuje každý nenulový prvek z G právě jednou a výrazy $\pm(x_1 - y_1), \pm(x_2 - y_2), \ldots, \pm(x_s - y_s)$ dávají také všechny nenulové prvky z G. Následovníkem A_X startéru X rozumíme uspořádanou množinu různých nenulových prvků z G, totiž $A_X = [a_1, a_2, \ldots, a_s]$ takovou, že $\{x_1 + a_1, x_2 + a_2, \ldots, x_s + a_s, y_1 + a_1, y_2 + a_2, \ldots, y_s + a_s\}$ obsahuje všechny nenulové prvky z G. Speciálně je zde užíván startér Steinerova systému trojic. Následuje zobecnění konstrukce Mooreova typu — jisté vroubení Roomova čtverce, kdy z existence Roomova čtverce o straně r plyne existence Roomova čtverce o straně $4r + 1$. Dále, jestliže zarámujeme Roomovy čtverce do jednoho rámce (k zařazení do rámce nám poslouží vhodný řecko-latinský čtverec), potom lze získat další Roomův čtverec, na příklad zarámováním devíti Roomových čtverců o straně r, obdržíme Roomův čtverec o straně $3r$. Také lze diagonálně sdružovat Roomovy čtverce o stranách r_1 a r_2 a doplnit na Roomův čtverec o straně $r_1 + r_2$. Zde se uvádí jen jeden jednoduchý případ této úlohy. Další konstrukce se opírají o konečné projektivní prostory, o následovníky startérů s vlastností $x_i + y_i = 0$, pro každé $1 \leqq i \leqq s$ a o vyvážená schémata. Hlavní věta 7. kapitoly hovoří o existenci Roomových čtverců ještě takto: Roomovy čtverce o straně r existují pro každé r, vyjma $r = 3, 5$ (takové neexistují), 257 (o tomto případu se pochybuje). Od té doby, co byla kniha uveřejněna, byl problém existence Roomových čtverců úplně rozřešen. John F. Dillon a Robert A. Morris sestrojili v práci A skew Room square of side 257, Utilitas Math., 1973, *4*, Nov., 187—192, šikmý Roomův čtverec o straně 257 a W. D. Wallis pak sám v práci Solution of the Room square existence problem, J. Combin. Theory, 1974, A *17*, No 3, 379—383, píše o existenci Roomova čtverce o straně 257 vůbec. Výklad 8. kapitoly je převzat z universitních přednášek W. D. Wallise z roku 1971 a týká se Roomových čtverců o straně $r = 7$. Následující dvě kapitoly hovoří o Roomových čtvercích vyšších dimensí, o souvislosti Roomových čtverců s Howellovými rotacemi a o aplikacích při pořádání turnajů v bridge a ve statistice.

Kniha obsahuje řadu autorových původních výsledků a kapitoly 4 a 5 jsou zcela původní. Práci doplňuje seznam 10 nerozřešených problémů. Hluboce zpracovaný souhrn bibliografických poznámek ke každé kapitole zřetelně ukazuje na vzrušující průběh badatelské práce v tomto oboru. Počet odkazů k literatuře je roven 50.

A. P. Street napsala 3. část o 148 stranách s názvem Součtově volné množiny. Úvodní práci o těchto množinách podal I. Schur, Über die Kongruenz $x^m + y^m \equiv z^m \pmod p$, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, *25*, (1916), 114—117, vzhledem ke studiím L. E. Dicksona, On the congruence $x^n + y^n + z^n \equiv 0 \pmod p$ a Lower limit for the number of sets of solutions of $x^e + y^e + z^e \equiv 0 \pmod p$, publikované v J. für reine und angew. Math., *135*, (1909) na stránkách 134—141 a 181—188 postupně. Tyto množiny byly dále studovány v jednotlivých souvislostech, zejména však ve spojitosti s Ramseyovými čísly. Nechť je dána aditivn pologrupa a nechť $S \neq \emptyset$ je její podmnožina. Definujme množinu $S + S$ takto, $S + S = \{s_1 + s_2 \mid s_1, s_2 \in S\}$. Řekneme, že S je součtově volná množina, právě když $S \cap (S + S) = \emptyset$.

První kapitola druhé monografie je věnována důkazu Ramseyovy věty. Tuto větu uvedl F. P. Ramsey v práci On a problem in formal logic, Proc. Lond. Math. Soc., 2nd series, *30* (1930), 264—286. Nechť $S \neq \emptyset$ je s-množina (tj. $|S| = s$) a nechť $\Pi_r(S)$ je soubor všech r-podmnožin množiny S. Dále, nechť $\Pi_r(S) = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ je rozklad $\Pi_r(S)$ na n navzájem disjunktních množin. Konečně, nechť pro některé $k \geqq r$ existuje k-podmnožina K množiny S taková, že všechny r-podmnožiny množiny K patří téže A_i pro některé $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom množinu K nazýváme (k, A_i)-podmnožinou množiny S. Ramseyova věta pak zní: Nechť $n, k_1, k_2, \ldots, k_n, r$ jsou přirozená čísla, pro něž $k_i \geqq r$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pak existuje nejmenší přirozené číslo $R(k_1, k_2, \ldots, k_n, r)$ takové, že platí následující tvrzení pro každé $s \geqq R(k_1, k_2, \ldots, k_n, r)$: Pro každou s-množinu S a pro každý rozklad souboru $\Pi_r(S)$ na n tříd $A_1, A_2, \ldots, A_n$, existuje podmnožina $K_i \subseteq S$, jež je (k_i, A_i) - podmnožinou pro některé $i = 1, 2, \ldots, n$. Dále, Schurovou funkcí $f(n)$ se rozumí největší přirozené číslo takové, že lze množinu přirozených čísel $\{1, 2, \ldots, f(n)\}$ rozložit na n součtově volných množin. Ve druhé kapitole se uvažuje původní Schurův problém a při studiu rovnice $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ jsou nalezeny hranice $89^{(n/4) - c \log n} < f(n) < [n!\, e] - 1$ pro některou kladnou konstantu c a některé n. Tento výsledek je aplikován k odhadu Ramseyových čísel. Zde je Ramseyovo číslo $R_n(3, 2)$ (jestliže $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = k \geqq 2$, pak místo $R(k_1, k_2, \ldots, k_n, 2)$ píšeme stručně $R_n(k, 2)$) nejmenším přirozeným číslem takovým, že při obarvení hran úplného grafu na $R_n(3, 2)$ uzlech n barvami se vyskytuje monochromatický trojúhelník. Na příklad dostáváme, že $R_2(3, 2) = 6$. Kapitoly 3 a 4 zlepšují odhad pro $f(n)$, zejména při přihlédnutí k systému (S) simultánních lineárních rovnic, kde rozkladem množiny celých čísel se dostaneme k (S)-volným množinám, tj. k množinám, jež neobsahují žádné řešení systému (S). Pro československou matematickou obec je povzbuzující, že mezi články o něž se opírá vybudování kapitoly 4 je citována práce slovenského matematika Štefana Známa, On k-thin sets and n-extensive graphs, Matematický časopis, *17* (1967), 217—307. Příbuzný problém k výše uvedenému problému se studuje v kapitole 5. Nechť X a Y jsou množiny přirozených čísel. X nazveme přípustnou vzhledem k Y právě když žádný součet dvou různých prvků z X nepatří do Y. Zde se zejména sleduje případ $X \subseteq Y$. Označme $g(A)$ počet prvků v největší podmnožině množiny A, přípustné vzhledem k A. Pro funkci $g(N) = \min_{|A| = N} g(A)$ je nalezen odhad pro některé kladné c a k a pro dostatečně velké N: $c \log N < g(N) < kN^{(2/5) + \varepsilon}$ pro každé $\varepsilon > 0$. 6. kapitola obsahuje soubor aditivních vět o konečných grupách. Navazuje na práci: Henry B. Mann, Addition theorems: The addition theorems of group theory and number theory, Interscience Tracts in pure and applied mathematics, Number 18, John Wiley, New York—London—Sydney, (1965), a je úvodem ke kapitole 7, kde se studují součtově volné množiny v grupách a k 8. kapitole pojednávající o užití předchozích výsledků k odhadům Ramseyových čísel. Problematika těchto kapitol je předložena jen v hrubých rysech, neboť je velmi málo známých výsledků k disposici. Proto také už nejsou uváděna další zobecnění, na příklad o součtově volných množinách u semigrup a podobně. Sympatická autorka dodává: inu také proto, že se někde má přestat. Je toho totiž v matematice stále ještě mnoho neprobádaného.

I zde nalezneme celou řadu původních autorčinných výsledků, zejména v kapitole 7. Každá kapitola je uzavřena odstavcem, který obsahuje pečlivý, obsažný a chronologický popis vývoje problematiky. Celou knihu uzavírá rozbor o možnosti dalších rozšíření, dále následuje seznam 7 nerozřešených problémů a 77 odkazů na literaturu.

Ve 4. části píše J. S. Wallis o Hadamardových maticích na 216 stranách. Čtenář se nemusí obávat množství látky, protože počet stran je značně ovlivněn zápisem matice. I tak se v této monografii podává jen přehled o konstrukcích Hadamardových matic, o jejich ekvivalenci a o jejich užití. Hadamardovou maticí stupně n rozumíme matici stupně n sestavenou z prvků $+1$ a -1, jejíž řádkové vektory jsou navzájem ortogonální.

V úvodní kapitole je uveden užitečný živočichopis některých druhů Hadamardových matic. Především se uvádí souvislost každé Hadamardovy matice stupně $4t$ (t přirozené) se symetrickým vyváženým neúplným blokovým schématem s parametry $v = 4t - 1$, $k = 2t - 1$, $\lambda = t - 1$ a s jeho doplňkem a tedy i s příslušnými diferenčními množinami. Dále následují tyto druhy Hadamardových matic: Šikmá Hadamardova matice H stupně $4t$ (t přirozené) — Hadamardova matice tvaru $H = S + I$, kde S je antisymetrická matice a I matice jednotková; symetrická konferenční matice N stupně $n \equiv 2 \pmod 4$ — matice sestavená z prvků $+1$ a -1 tvaru $N = R + I$, kde R je symetrická s hlavní diagonálou ze samých nul, dále platí $RR^T = (n - 1) I$ a $RJ = 0$, kde R^T je matice transponovaná k R a J matice sestavená ze samých $+1$; dvě Hadamardovy matice M a N se nazývají příbuzné matice, když M je šikná Hadamardova matice a platí $N^T = N$, $MN^T = NM^T$; dvě Hadamardovy matice M a N se nazývají speciální Hadamardovy matice, když platí $MN^T = -NM^T$. Všechny tyto pojmy se dají uvést v komplexním tvaru, když definujeme: Komplexní Hadamardovou maticí C stupně c rozumíme matici sestavenou z prvků $+1$, -1, $+i$, $-i$, pro níž platí $CC^* = cI$, kde C^* je Hermitián konjugovaný s C a $i = \sqrt{-1}$. Ve 2.—6. kapitole se podávají konstrukce jmenovaných druhů Hadamardových matic. Běží zde vesměs o výsledky, které ve svých badatelských pracích uveřejnili V. Belevitch, P. Delsarte, J. H. Goethals, R. E. A. C. Paley, J. J. Seidel, G. Szekeres, R. J. Turyn, A. L. Whiteman, J. Williamson a jiní. Objevují se zde další pojmy: Když $S + I$ je šikmá Hadamardova matice nebo symetrická konferenční matice stupně s, potom $SS^T = (s - 1) I$ a buď $S^T = -S$, nebo $S^T = S$. Takže S je ortogonální matice s hlavní diagonálou ze samých nul. Dále Paleyova matice, jež souvisí s množinou bodů na projektivní přímce — viz R. E. A. C. Paley, On orthogonal matrices, J. Math. Phys., *12* (1933), 311—320. Připomeňme, že kapitoly 2 a 4 jsou v podstatě původními výsledky autorky. Hadamardovy sestavy se studují v kapitole 7. Hadamardovou sestavou $H[h, k, \lambda]$ nad neurčitými $x_1, x_2, \ldots, x_k$, kde $k \leqq h$, rozumíme matici stupně h s prvky vybranými z množiny $\{x_1, -x_1, x_2, -x_2, \ldots, x_k, -x_k\}$ tak, že (i) v každém řádku je λ prvků $\pm x_j$ ($j = 1, 2, \ldots, k$) a podobně ve sloupcích, (ii) řádky jsou formálně ortogonální v tom smyslu, že jsou-li prvky $x_1, x_2, \ldots, x_k$ prvky komutativního okruhu, pak řádky jsou vzájemně ortogonální a podobně pro sloupce. Zde se studují sestavy typu Williamsona, Baumerta-Halla, Goethalse-Seidela, Baumerta-Halla-Welche, $H[h, h, 1]$ a stupně h dělitelného osmi. Konstrukce uvedených druhů Hadamardových matic a výsledků plynoucí odtud lze užít ke konstrukci Hadamardovy matice samé. To je obsahem kapitoly 8, kde je toto téma přehledně zpracováno. Krátká 9. kapitola uvádí výsledky A. T. Butsona, P. Delsarta a J. M. Goethalse o zobecněných Hadamardových maticích. Matice H stupně h, jejíž všechny prvky jsou p-násobné komplexní kořeny jednotky, se nazývá zobecněnou Hadamardovou maticí $H(p, h)$, když $HH^* = hI$. V 10. kapitole se studují následující ekvivalence Hadamardových matic: Dvě Hadamardovy matice H_1 a H_2 se nazývají Z-ekvivalentní, když H_2 obdržíme z H_1 sledováním níže uvedených úprav: (a) Přičteme k jednomu řádku celočíselný násobek jiného řádku. (b) Změníme znaménko jednoho řádku. (c) Zaměníme libovolně pořadí řádků. (d) Provedeme odpovídající úpravy se sloupci. Úpravy pro H-ekvivalenci jsou tyto: (a) Změníme znaménko jednoho řádku. (b) Zaměníme libovolně pořadí řádků. (c) Provedeme odpovídající úpravy pro sloupce. Úpravy pro S-ekvivalenci jsou tyto: (a) Změníme znaménko j-tého řádku a j-tého sloupce. (b) Zaměníme i-tý řádek s j-tým řádkem a i-tý sloupec a j-tým sloupcem. Monografie je uzavřena stručným přehledem (nikoliv podrobným) o užití Hadamardových matic. Připomíná se tato problematika: vyvážené neúplné blokové schéma; silně regulární grafy; v elektrotechnice — telemetrické systémy (telemetrický systém Marineru '69 je založen na Hadamardově matici stupně 32), telefonní sítě; v teorii informace — napodobení bílého šumu, maximální kódy, vytváření Walshových funkcí; ve statistice — bloková schémata, váhové diagramy; v psychologii — relace řízení, struktura živočišných společností a další.

Následuje ještě 11 tabulek titulovaných: Známé třídy jistých Hadamardových matic a podobně. Zde je tedy zřetelně patrné ještě stálé široké pole působnosti. Autorka mimo jiné sama zformulovala 21 nezodpovězených otázek. Odkazů na literaturu je uvedeno 183.

Všichni tři autoři zpracovali dnes živé oblasti kombinatoriky. Většina literatury této oblasti je stále roztroušena po časopisech. Čilý styk autorů s dalšími badateli oboru (jako jsou H. L. Abott, L. D. Baumert, K. R. Matthews, L. Moser, G. Szekeres, E. G. Whitehead, A. L. Whiteman a jiní) umožnil autorům přihlédnout i k neuveřejněným studiím. Tak na příklad výsledky kapitoly 8 části 3 jsou objevy J. G. Kalbfleische a R. G. Stantona, atd. Přes zřejmý hluboký přístup ponechávají si tyto monografie značnou svěžest a srozumitelnost. Každému, kdo se chce seznámit s těmito oblastmi kombinatoriky, lze nejen tuto knihu vřele doporučit, ale i pokládat za spolehlivou a pohodlnou bránu, srdečně zvoucí k tvůrčí účasti na zmíněné explosi. A není na světě tolik příležitostí, jež dávají možnost nerušeně, avšak přece jen s jistým vzrušením se pohybovat v samém ohnisku neutuchající explose.

Některé drobné nedostatky, na příklad na stránce 35^{11} místo (i, j) patří (i, i), na stránce 36^{6} místo x, y je lepší vzhledem k předchozímu zavedení psát $\{x, y\}$, a podobně, jsou zřejmě vyvolány způsobem tisku edice Lecture Notes in Mathematics. Ty snadno odhalí každý čtenář sběhlý ve čtení matematického textu. Nemohou tedy způsobit žádné obtíže a ani nemohou odradit nikoho od četby tak srozumitelného textu, i když značně obsažného.

Věroslav Jurák, Poděbrady

Daniel D. Joseph: STABILITY OF FLUID MOTIONS I., II. Springer Tracts in Natural Philosophy. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1976. I. díl: 57 obr., XIII + 282 str., cena DM 97,—; II. díl: 39 obr., XIV + 274 str., cena 97,— DM.

V této dvoudílné monografii D. D. Josepha je vyšetřována stabilita proudových polí nestlačitelných vazkých tekutin. Tato proudová pole jsou popsána Navierovými-Stokesovými rovnicemi, resp. rovnicemi podobného typu. Stabilita řešení takovýchto rovnic je již dlouhou dobu předmětem zájmu mnoha vědeckých pracovišť, protože její změny poměrně dobře odráží podstatné změny v charakteru proudění, jako např. přechod od laminárního proudění k turbulentnímu proudění. Teorie stability dosud zdaleka není uzavřena a mnoho cenných výsledků z této oblasti je nedávného data.

V prvních kapitolách knihy D. D. Josepha je podán přehled zejména novějších částí teorie stability i nestability řešení Navierových-Stokesových rovnic včetně souvislostí s dalšími vlastnostmi řešení, jako např. jejich bifurkací. Autor se neomezuje pouze na stabilitu ve smyslu Ljapunova, ale zabývá se i asymptotickou stabilitou, globální asymptotickou stabilitou a tzv. globální monotónní stabilitou. Při odvozování postačujících podmínek pro stabilitu je používána především energetická metoda, která vychází z odhadů derivace celkové kinetické energie poruch původního proudění podle času. Tato derivace je vzhledem k předpokladu o nulové rychlosti proudění na hranici proudového pole a o pevnosti této hranice stejná, ať používáme Navierovy-Stokesovy rovnice, nebo tzv. linearizované Navierovy-Stokesovy rovnice pro poruchy proudění. Proto výsledky, odvozené energetickou metodou, mají globální charakter a týkají se především globální asymptotické stability a globální monotónní stability.

Dále je v knize ukázána konstrukce periodického řešení, které se při změnách Reynoldsova čísla bifurkuje od stacionárního řešení Navierových-Stokesových rovnic v okamžiku ztráty stability původního stacionárního řešení a je též vyšetřována stabilita bifurkovaného řešení. Na základě hypotéz Landaua a Hopfa jsou podrobně vysvětleny souvislosti postupného větvení stále složitějších typů řešení Navierových-Stokesových rovnic se vznikem turbulence.

Ve třetí kapitole je fyzikální význam energetické metody ilustrován na studiu poruch laminárního Poiseuilleova proudění v trubici. Je zkoumán typ první poruchy, která se objeví při zvětšování Reynoldsova čísla a jejíž kinetická energie se s rostoucím časem zvětšuje. Podobné problémy jsou pomocí teorie bifurkací a variačního počtu studovány i ve čtvrté kapitole. Zbývající kapitoly prvního dílu jsou věnovány studiu globální stability Couettova a Couettova-Poiseuilleova proudění mezi rotujícími válci a proudění mezi rotujícími koulemi.

Ve druhém dílu knihy D. D. Josepha je zkoumána nejprve stabilita konvektivních proudění, kde pohyb je způsoben pouze rozdílem hustot tekutiny, souvisejícím se změnami teplot a chemického složení tekutiny. Tato proudová pole lze popsat Oberbeckovými-Boussinesquovými rovnicemi. Autor věnuje pozornost zejména stabilitě tzv. nehybných řešení Oberbeckových-Boussinesquových rovnic, protože v těchto případech je možné studovat procesy vedoucí eventuálně k nestabilitě bez komplikací, způsobených pohybem. Devátá kapitola je věnována stabilitě nehybných řešení v případě heterogenní tekutiny, jako např. slané vody. Velké rozdíly hodnot koeficientů difuse tepla a soli vedou k novým mechanismům nestability, které jsou vyšetřovány zobecněnou energetickou metodou.

Dále je zkoumána stabilita a bifurkace konvektivních proudění v porézních materiálech. Ve dvanácté kapitole je při studiu takovýchto typů proudových polí použita tzv. variační teorie turbulence. Ve třinácté kapitole lze nalézt některé nové metody vyšetřování stability proudění vyzkoelastických tekutin. Závěrečná čtrnáctá kapitola je věnována otázkám stability ploch, oddělujících dvě různé tekutiny.

Výklad je doplněn množstvím cvičení, komentářů a poznámek, týkajících se např. dalších prací o stabilitě nebo bifurkacích řešení Navierových-Stokesových rovnic. Na závěr prvního dílu je připojena řada dodatků, věnovaných především matematickému aparátu, který je v knize používán.

Kniha je určena čtenářům, kteří mají základní znalosti z teorie parciálních diferenciálních rovnic a z teorie proudění nestlačitelných vazkých tekutin. Poněkud hlubší znalosti z matematiky však vyžaduje důkladné porozumění částí, věnovaných teorii bifurkací. Lze předpokládat, že odborníci, kteří se zabývají matematickou teorií přechodu laminárního proudění v turbulentní proudění, naleznou v knize cennou pomůcku.

Jiří Neustupa, Praha

L. E. Sigler: ALGEBRA. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin 1976. Stran XI + 419, cena DM 36,20.

Kniha je úvodní učebnicí algebry a svým obsahem nepříliš překračuje dvousemestrový universitní kurs základů algebry. Hlavní pozornost tu věnoval autor dvěma hlediskům: předně snaze po plné srozumitelnosti a dostatečné konkrétnosti výkladu, na druhé straně pak úsilí o to, aby celkové uspořádání i vnitřní obsah knihy byly v souladu s metodami universální algebry a aby tak byly zdůrazněny společné vlastnosti rozmanitých algebraických struktur a tím aby byla začátečníku co nejvíce ulehčena orientace v obsahu a metodách algebry. Snaha učinit studium knihy pro čtenáře co nejvíc přehledným a přitažlivým se projevuje i v rozdělení textu jednotlivých kapitol na krátké většinou dvou až pětistránkové články. Přitom každý z nich je ukončen několika jednoduchými otázkami ověřujícími, zda čtenář obsahu článku porozuměl a řadou samostatných cvičení. Správné odpovědi na otázky jsou pak uvedeny na konci knihy.

Pro představu o obsahu učebnice jistě postačí uvést výčet jednotlivých kapitol: 1. Teorie množin; 2. Okruhy: základní teorie; 3. Okruhy: přirozená a celá čísla; 4. Okruhy: použití celých čísel (konečné množiny, podílové těleso, charakteristika okruhu); 5. Polynomy a rozklad v prvočinitele (euklidovské okruhy, okruhy hlavních ideálů, obory integrity s jednoznačným rozkladem v prvočinitele, nadtěleso); 6. Lineární algebra: moduly (základní pojmy, vektorové prostory); 7. Lineární algebra: modul morfismů (změna báze ve vektorovém prostoru, duální prostor, lineární rovnice, determinanty); 8. Abstraktní systémy (algebraická struktura, morfismy, kongruence, součiny algebraických struktur); 9. Monoidy a grupy; 10. Lineární algebra: moduly nad obory integrity hlavních ideálů a podobnost.

Václav Vilhelm, Praha

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

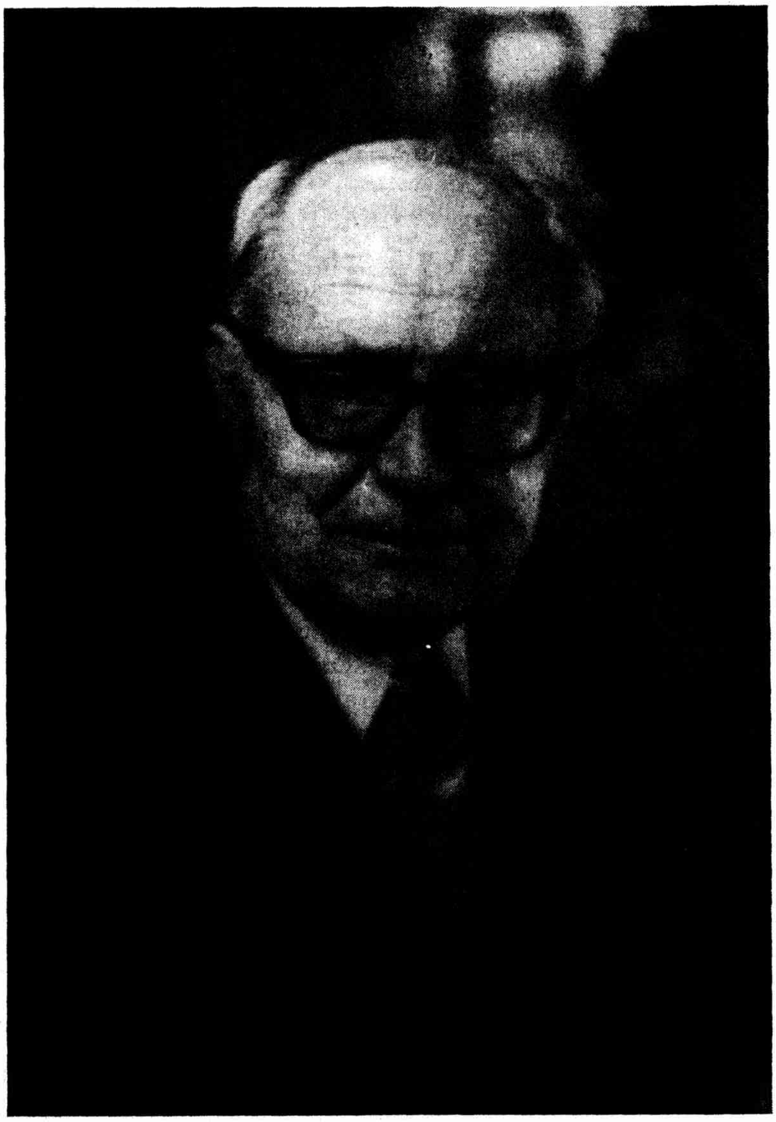
ZPRÁVY

ŠEDESÁT LET DOC. RNDR. KARLA DRÁBKA, CSC.

BOŘIVOJ KEPR, Praha

Dne 2. ledna 1978 se dožil šedesáti let doc. RNDr. KAREL DRÁBEK, CSc., dlouholetý učitel deskriptivní geometrie katedry matematiky a deskriptivní geometrie na stavební fakultě ČVUT. Narodil se v Chrášťanech (okres Rakovník) jako syn železničáře. Vystudoval s vyznamenáním na staroslavné reálce v Rakovníku a jako chudý a nadaný student byl přijat do Hlávkovy studentské koleje, aby mohl po maturitě pokračovat ve studiu svých oblíbených předmětů, matematiky a deskriptivní geometrie, na přírodovědecké fakultě University Karlovy. Tam si brzo všimli nadaného studenta Drábka profesoři FR. VYČICHLO a V. HLAVATÝ a tak se stalo, že byl náš jubilant od 1. 11. 1938 přijat jako pomocná vědecká síla k prof. Hlavatému. Krátce poté přišla neblahá léta okupace hitlerovským fašistickým Německem. Po demonstracích studentů dne 15. 11. 1939 při pohřbu „Hlávkáře" JANA OPLETALA, studenta mediciny, byl Karel Drábek spolu s mnoha jinými dne 17. 11. 1939 zatčen a odvezen do koncentračního tábora Sachsenhausen-Oranienburg. Odtud se vrátil domů po 20. 1. 1942, nastoupil zaměstnání u bývalé firmy Otta v Rakovníku a navázal stálé spojení s profesory Vyčichlem a Hlavatým. Po osvobození v roce 1945, ještě jako student přírodovědecké fakulty UK se stal asistentem ústavu deskriptivní geometrie tehdejší Vysoké školy inženýrského stavitelství ČVUT. Tento ústav vedl prof. Ing. Dr. techn. FR. KADEŘÁVEK, DrSc.. Od roku 1945 působí Karel Drábek na katedře matematiky a deskriptivní geometrie v podstatě stále. V podstatě proto, že od roku 1948 došlo postupně k mnoha reorganizacím vysokých škol a ústavů. Měnily se názvy vysokých škol a fakult, různé fakulty byly spojovány apod. A tak doc. Drábek učil deskriptivní geometrii na Vysoké škole (pak fakultě) inženýrského stavitelství, na fakultě zemědělského inženýrství (obor lesního inženýrství), perspektivu na Akademii výtvarných umění a na Vysoké škole umělecko-průmyslové, deskriptivní geometrii na pedagogické fakultě v dálkovém studiu pro středoškolské učitele, na tehdejší Vysoké škole architektury a pozemního stavitelství pro kandidáty učitelství kreslení a deskriptivní geometrie na středních školách, na fakultě ekonomického inženýrství a konečně na stavební fakultě ČVUT. Z tohoto výčtu je patrna vskutku rozsáhlá pedagogická činnost doc. Drábka. Jeho pedagogické zkušenosti tomu pak v nejlepším slova smyslu odpovídají.

Na elektrotechnické fakultě ČVUT obhájil K. Drábek v roce 1966 úspěšně svoji kandidátskou disertační práci *„Kinematické zobecnění de la Hireových kružnic"* a byl mu udělen vědecký titul kandidáta fyzikálně matematických věd. V roce 1968 obhájil svoji habilitační práci *„Kinematika n-rozměrného euklidovského prostoru"*



a na základě toho byl v roce 1969 jmenován docentem matematiky na katedře matematiky a deksriptivní geometrie stavební fakulty ČVUT. V roce 1971 získal na matematicko-fyzikální fakultě UK titul RNDr.

Významná je rovněž práce doc. Drábka na úseku odborné a vědecké činnosti a z toho plynoucí rozsáhlé činnosti publikační, která je podrobně uvedena na konci článku. Je autorem, příp. spoluautorem studenty oblíbených vysokoškolských skript z deskriptivní geometrie, v dohledné době vyjde v SNTL dvoudílná celostátní učebnice z tohoto předmětu pro stavební fakulty, na níž se doc. Drábek jako spoluautor podílel význačnou měrou. Těžiště vědecké činnosti doc. Drábka spočívá však v práci na problémech kinematické geometrie. Řadu let je význačným a aktivním pracovníkem v semináři o kinematické geometrii, který vede prof. RNDr. ZD. PÍRKO, DrSc. Práce v tomto semináři tvoří součást vědecko-výzkumného úkolu „Metody kinematické analýzy a syntézy". Tu vznikla kandidátská i habilitační práce doc. Drábka a celá dlouhá řada vědeckých článků, jichž je doc. Drábek autorem nebo spoluautorem. Podrobnosti jsou opět uvedeny na konci tohoto článku. O výsledcích své vědecké práce v kinematické geometrii referoval doc. Drábek na vědeckých konferencích ČVUT, dále pak v Německé demokratické republice (Drážďany) a v Bulharsku (Sofie).

Dalším velice důležitým úsekem práce doc. Drábka je jeho dlouholetá činnost zabývající se historií deskriptivní geometrie v českých zemích v minulém století a na počátku našeho století. Je vedoucím pracovníkem vědecko-výzkumného úkolu, jehož náplní je právě uvedená problematika. Původně byl tento úkol zařazen jako fakultní, po úspěšné oponentuře, což bylo zásluhou vskutku mravenčí práce doc. Drábka, byl tento úkol počínaje rokem 1976 zařazen jako součást státního plánu základního výzkumu při Ústavu čs. a světových dějin ČSAV.

V roce 1977 jsme si připomněli úctyhodné stáří 125 let katedry matematiky a deskriptivní geometrie stavební fakulty ČVUT. Při příležitosti tohoto výročí za pomoci a podpory děkanátu stavební fakulty byl vydán sborník. K náplni tohoto sborníku a ke zdaru příslušného slavnostního zasedání podstatnou měrou, zejména na úseku historie, přispěl doc. K. Drábek.

Doc. Drábek má velice bohatou a záslužnou účast i v práci politicko-výchovné a na úseku veřejné činnosti. Celá léta pracuje jako aktivní funkcionář ROH, SČSP a SPB. Každý rok u příležitosti Mezinárodního dne studenstva vykládá posluchačům prvních ročníků fakulty jak to tehdy 17. listopadu 1939 a potom dále bylo. Od roku 1972 až do konce roku 1977 vykonával obětavě náročnou funkci zástupce vedoucího rozsáhlé katedry matematiky a deskriptivní geometrie na stavební fakultě ČVUT. Od roku 1936 je členem Jednoty československých matematiků a fyziků.

Za svoji činnost v období okupace a za politicko-výchovnou práci získal doc. K. Drábek od Svazu osvobozených politických vězňů a od Svazu protifašistických bojovníků řadu pamětních medailí, čestných odznaků, pamětních plaket a diplomů. Za obětavou a dlouholetou pedagogickou činnost čestná uznání od rektora ČVUT a děkana stavební fakulty. Ke svým šedesátinám byl dne 11. ledna 1978 doc. Drábek vyznamenán zlatou medailí ČVUT.

Spolupracovníci a přátelé doc. Drábka vysoko hodnotí jeho obětavou a záslužnou práci a přejí mu ze srdce do dalších let mnoho zdraví, pracovních úspěchů a osobní spokojenosti.

SEZNAM PRACÍ DOC. RNDR. KARLA DRÁBKA, CSC.

A. Knihy:

[1] Přehled užité matematiky: Kap. 4. Křivky a jejich konstrukce. SNTL, Praha 1963, str. 131—175 (2. vyd. 1968, 3. vyd. 1973).

[1a] Survey of Applicable Mathematics: Chap. 4. Plane Curves and Constructions. SNTL, Praha 1969 (překlad pro Iliffe Boocks Ltd, London), str. 150—204.

[2] Deskriptivní geometrie I. díl (spol. s *F. Harantem* a *O. Setzerem*). SNTL Praha, v tisku.

[3] Deskriptivní geometrie II. díl (spol. s *F. Harantem* a *O. Setzerem*). SNTL Praha, v tisku.

B. Skripta:

[1] Deskriptivní geometrie a stereotomie. Část I (spoluautor a redakce), SPN, Praha 1951 (dotisky v SNTL 1954, 1959).

[2] Deskriptivní geometrie a stereotomie. Část II (spoluautor a redakce), SPN, Praha 1952 (dotisky v SNTL 1953, 1954).

[3] Promítací metody a konstrukce křivek a ploch druhého stupně (spol. s *F. Harantem*). SNTL, Praha 1958 (dotisk 1959 a 1961).

[4] Sbírka úloh a příkladů z deskriptivní geometrie a stereotomie (spol. s *F. Harantem*). SNTL, Praha 1959 (dotisk 1961 a 1963).

[5] Deskriptivní geometrie I (spol. s *F. Harantem, St. Horákem* a *Al. Urbanem*). SNTL, Praha 1962 (dotisk 1964 a 1974).

[6] Deskriptivní geometrie II (spol. s *F. Harantem, M. Menšíkem* a *O. Setzerem*). SNTL, Praha 1962 (dotisk 1964 a 1974).

[7] Deskriptivní geometrie III (spol. s *F. Harantem, M. Menšíkem* a *B. Keprem*). SNTL, Praha 1963 (dotisk 1965 a 1974).

[8] Příklady pro cvičení z deskriptivní geometrie. SNTL, Praha 1964.

[9] Předlohy ke cvičení z deskriptivní geometrie II. díl (spol. s *Vl. Jislem*). SNTL, Praha 1968 (dotisk 1972, 1973).

[10] Předlohy ke cvičení z deskriptivní geometrie I. díl (spol. s *Vl. Jislem*). SNTL, Praha 1969 (dotisk 1972 a 1973).

[11] Předlohy pro cvičení z deskriptivní geometrie I. díl (spol. s *J. Burešovou, J. Černým, K. Malečkem* a *B. Rosovou*). Vydavatelství ČVUT Praha, 1975, dotisk 1977.

[12] Předlohy pro cvičení z deskriptivní geometrie II. díl (spol. s kolektivem jako v [11]). Vydavatelství ČVUT Praha, 1976, dotisk 1977.

C. Vědecké a odborné články:

[1] Poznámka k eliptickému pohybu (spol. s *V. Mahelem* a *M. Pišlem*) Práce ČVUT, *IV*, čís. 1, část 2, 1963, str. 25—33.

[2] Kinematické zobecnění de la Hireových kružnic. Kandidátská disertační práce, 1966, str. 79 + 1.

[3] Kinematické zobecnění de la Hireových kružnic. Strojnícky časopis (*XVII*), 1966, str. 562—579.

[4] Durch ein Geschwindigkeitsfeld erzeugte Bewegungen des Raumes (R_n). Acta Polytechnica — Práce ČVUT, *IV*, 1967, seš. 3, str. 5—14.

[5] Kinematika n-rozměrného euklidovského prostoru. Habilitační práce, 1968, str. 105.

[6] Pohyb neproměnlivého n-rozměrného euklidovského prostoru. Strojnícky časopis (*XX*), 1969, str. 58—70.

[7] Základní pólové vlastnosti n-rozměrného afinního, ekviformního a euklidovského pohybu.

Sborník referátů VIII. celostátní konference kateder mechaniky, pružnosti a pevnosti v Ostravě (10.—13. 6. 1969), část I, str. 7.

[8] Základy afinní kinematiky v rovině (spol. s *Zd. Pírkem*). Pokroky (*XV*), 1970, čís. 1, str. 1—16.

[9] Afinní kinematika v rovině I (spol. s *Zd. Pírkem*). Strojnícky časopis (*XXI*), 1970, str. 307—328.

[10] Kubika spjatá s rychlostmi pohybu neproměnlivého tělesa. Strojnícky časopis (*XXII*), 1971, str. 167—172.

[11] Příklad afinního pohybu (spol. s *Zd. Pírkem*). Acta Polytechnica — Práce ČVUT, *IV*, 1971, str. 21—48.

[12] Zur Verallgemeinerung eines Satzes von Weyr (spol. s *O. Setzerem*). Acta Polytechnica — Práce ČVUT, *IV*, 1, 1972, str. 91—96.

[13] Affine Kinematik in der Ebene II (spol. s *Zd. Pírkem*). Strojnícky časopis (*XXIII*), 1972, str. 339—352.

[14] Cesàrovy metody v kinematice roviny. Sborník tézí referátů konference o teorii mechanismů a strojů v Liberci (11.—13. 9. 1973) na str. 2.

[15] Affine Kinematik in der Ebene III (spol. s *Zd. Pírkem*). Strojnícky časopis (*XXIV*), 1973, str. 338—347.

[16] Kurven, welche mit den Geschwindigkeiten der n-dimensionalen Euklidischen Bewegung des starren Systems verbunden sind. Aplikace matematiky (*18*), 1973, str. 445—451.

[17] Lineární vazby v afinním pohybu. Acta Polytechnica — Práce ČVUT, *IV*, 3, 1974, str. 93—98.

[18] Výzkumná zpráva k úkolu I-4-2/15 „Metody kinematické analýzy a syntézy" (spol. s prof. *Zd. Pírkem*), 1975.

[19] Cesàrovská analýza rovinné ekviformní kinematiky. Sborník referátů díl B z II. konference o teorii strojů a mechanizmů v Liberci (14.—16. 1976), str. 133—141.

[20] Beitrag zur $\mathcal{E}$-Kinematik der Ebene: Hüllkurven der $\mathcal{E}$-Bewegung (spol. s *J. Chudým*). Acta Polytechnica — Práce ČVUT, 1976, *16*, 4, 3, str. 87—96.

[21] Výzkumná zpráva k fakultnímu úkolu F 2/76 „Metody kinematické analýzy a syntézy" za rok 1976 (spol. s *J. Chudým, O. Glossem, Zd. Jankovským, Zd. Pírkem* a *J. Somrem*).

[22] Gruppentheoretische Grundlagen der Affinkinematik in der Ebene (spol. s *Zd. Pírkem*). Strojnícky časopis (*28*), 1977, čís. 3, str. 312—331.

[23] Přirozené elementy geometrického pohybu v rovině. Acta Polytechnica — Práce ČVUT, v tisku.

[24] Beitrag zur $\mathcal{K}$-Kinematik in der Ebene: Gruppentheoretische Grundlagen der $\mathcal{K}$-Bewegung. Acta Polytechnica — Práce ČVUT, v tisku.

[25] Beitrag zur $\mathcal{E}$-Kinematik in der Ebene: Gruppentheoretische Grundlagen der $\mathcal{E}$-Bewegung (spol. s *J. Chudým*). Acta Polytechnica — Práce ČVUT, v tisku.

[26] Příspěvek ke $\mathcal{K}$-kinematice roviny: Rozšíření Chaslesovy věty a Catalanova věta v geometrickém pohybu roviny. Sborník spisů vydávaných stavební fakultou ČVUT v Praze, v tisku.

D. Články životopisné a články týkající se historie deskriptivní geometrie:

[1] K výročí smrti prof. Rudolfa Skuherského, Rozhledy (*42*), 1963—64, str. 92—94.

[2] Sto let od smrti Rudolfa Skuherského, Pokroky (*VIII*), 1963, str. 288—290.

[3] Vzpomínka na prof. Kadeřávka, Rozhledy (*44*), 1965—66, str. 286—287.

[4] Šedesát let doc. RNDr. Miroslava Menšíka, Časopis (*91*), 1966, str. 367—368.

[5] Šedesát let doc. Oty Setzera, Časopis (*91*), 1966, str. 369—370.

[6] Dvě jubilea na stavební fakultě ČVUT, Pokroky (*XI*), 1966, str. 318—319.

[7] 125. výročí narozenin Karla Pelze, Rozhledy (*49*), 1970—71, str. 92—94.

[8] 225. výročí narozenin Gasparda Monge, Rozhledy (*50*), 1971—72, str. 86—88.

[9] Pracovníci v deskriptivní geometrii na reálkách v českých zemích, Výtah z referátu na II. vědecké konferenci ČVUT (12.—14. 6. 1973), Acta Polytechnica — Práce ČVUT, *IV*, 1973, str. 25—28.

[10] Výzkumná zpráva k fakultnímu vědecko-výzkumnému úkolu 424 *A*/69—74 „Historie deskriptivní geometrie v českých zemích", 1975.

[11] Výročí narozenin pěti profesorů pražské vysoké technické školy, Rozhledy (*53*), 1974—75, str. 515—519.

[12] Stodvacetpět let katedry matematiky a deskriptivní geometrie stavební fakulty ČVUT v Praze. Sborník fakulty stavební, 1977, str. 8—21, 45—47, 55—59, 68.

[13] Stodvacetpět let katedry matematiky a deskriptivní geometrie na stavební fakultě ČVUT v Praze. Pokroky (*22*), 1977, příloha č. 5, str. 1—2.

[14] Stodvacetpět let katedry matematiky a deskriptivní geometrie na stavební fakultě ČVUT v Praze. Dějiny věd a techniky, v tisku.

[15] Ústavy matematiky a deskriptivní geometrie ČVUT 1939—1945. Zasláno do časopisu Dějiny věd a techniky.

E. Popularizující odborné články:

[1] O vlastnostech některých křivek inženýrské praxe (spol. s *B. Keprem*), Sborník Geometrie v technice a umění k 70. narozeninám prof. Ing. Dr. techn. Fr. Kadeřávka, SNTL, Praha 1955, str. 20—46.

[2] O dělicím poměru na přímce, Rozhledy (*38*), 1959—60, str. 304—307.

[3] Sestrojení sdružených průměrů elipsy s daným úhlem φ, Rozhledy (*38*), 1960—61, str. 64—68.

[4] Několik úloh o parabole s daným parametrem, Rozhledy (*39*), 1960—61, str. 447—453.

[5] Sdružené průměry kuželosečky o daném úhly φ, Rozhledy (*40*), 1961—62, str. 13—17.

[6] Sestrojení paraboly pomocí pevné kružnice a přímky, Rozhledy (*40*), 1961—62, str. 156—159.

[7] Sestrojení elipsy a hyperboly pomocí dvou pevných kružnic, Rozhledy 1961—62, str. 212 až 217.

[8] Řešení úlohy z konstrukcí trojúhelníka (spol. s *J. B. Pavlíčkem*, Rozhledy (*41*), 1962—63, str. 104—107.

[9] Pól a polára kružnice, Rozhledy (*42*), 1963—64, str. 304—308.

[10] Konstrukce druhého ohniska kuželosečky, Rozhledy (*42*), 1963—64, str. 400—404.

[11] Konstrukce trojúhelníka daného stranou, příslušnou výškou a poloměrem vepsané kružnice, Rozhledy (*44*), 1965—66, str. 4—7, 49—52.

[12] Použití komplexních čísel v geometrii, Rozhledy (*44*), 1965—66, str. 289—293, 348—352.

[13] Tečna a normála středové kuželosečky, Rozhledy (*45*), 1966—67, str. 8—11.

[14] K zobecnění Pythagorovy věty, Rozhledy (*45*), 1966—67, str. 110—112.

[15] Mocnost bodu ke kružnici, Rozhledy (*45*), 1966—67, str. 270—272.

[16] Svazky kružnic, Rozhledy (*46*), 1967—68, str. 123—126.

[17] Kuželosečky vytvořené ve svazcích kružnic, Rozhledy (*46*), 1967—68, str. 175—180.

[18] K přibližné konstrukci čísla e, Rozhledy (*47*), 1968—69, str. 274—276.

[19] Geometrické příbuznosti, Rozhledy (*48*), 1969—70, str. 359—366.

[20] Konstrukce s rovinou totožnosti, Rozhledy (*48*), 1969—70, str. 446—448.

[21] Duální čísla, Rozhledy (*49*), 1970—71, str. 13—16.

[22] Použití Skuherského axonometrie v praxi, Rozhledy (*49*), 1970—71, str. 101—106.

[23] Základy cyklografie, Rozhledy (*49*), 1970—71, str. 405—413, 450—455.

[24] Kuželosečky v Gaussově rovině, Rozhledy (*51*), 1972—73, str. 301—309.

[25] Analytická geometrie kuželoseček Gaussovy roviny, Rozhledy (*51*), 1972—73, str. 337—341.

[26] Oskulační kružnice kuželoseček, Rozhledy (*53*), 1974—75, str. 66—70.

[27] Úloha o elipsách a Fibonacciova čísla, Rozhledy (*53*), 1974—75, str. 446—448.

[28] Duální čísla v geometrii, Rozhledy (*54*), 1975—76, str. 243—251.
[29] Styk dvou křivek, Rozhledy (*55*), 1977—78, str. 161—164.
[30] Základy kinematické geometrie v rovině, Rozhledy, v tisku.

F. Různé:

[1] Četveruchin - Manevič: Některé základní směry a problematika v deskriptivní geometrii. Překlad z ruštiny pro Časopis (*88*), 1963, str. 364—370.
[2] Přijímací zkoušky z deskriptivní geometrie na ČVUT (spoluautor: kótované promítání), Rozhledy (*44*), 1965—66, str. 259—260.
[3] Lidice a Ležáky stále varují, Rozhledy (*50*), 1971—72, str. 433—434.

Kromě uvedených publikací napsal doc. K. Drábek pro různé časopisy 54 recense knih, 28 recenzí článků, dále 11 lektorských posudků skript a knih, 3 oponentské posudky a zpracoval 7 článků při fakultním vědecko-výzkumném úkolu „Kritické zhodnocení díla prof. Jana Sobotky".

KONFERENCE ČESKÝCH MATEMATIKŮ A II. VALNÉ SHROMÁŽDĚNÍ MATEMATICKÉ VĚDECKÉ SEKCE JČSMF

Ve dnech 13.—15. února 1978 uspořádala ve Zvíkovském Podhradí matematická vědecká sekce JČSMF ve spolupráci s plzeňskou pobočkou JČSMF Konferenci českých matematiků a II. valné shromáždění matematické vědecké sekce. 75 účastníků vyslechlo těchto 6 přednášek na téma netradiční aplikace matematiky:

J. Anděl: *Použití některých statistických metod v nestandardních aplikacích,*
J. Milota, Š. Schwabik: *Dynamika populací,*
M. Vlach: *Paradoxy racionality,*
M. Katětov: *Některé novější aplikace v biologických a psychologických oborech,*
P. Hájek, T. Havránek: *Matematické základy mechanizované formace hypotéz,*
E. Kindler: *Použití kompartmentových systémů pro modelování v biologii a medicině.*

Přednášky byly pro posluchače velmi atraktivní a podnětné a na jejich základě došlo k řadě kontaktů mezi pracovníky různých oborů matematiky. Účastníci se shodli na tom, že by se měly podobné konference stát tradičními.

Současně s Konferencí českých matematiků se konalo II. valné shromáždění matematické vědecké sekce JČSMF, na kterém byl zvolen nový výbor MVS a byly stanoveny cíle práce MVS. Novým předsedou výboru MVS byl zvolen Svatopluk Fučík z matematicko-fyzikální fakulty University Karlovy v Praze.

Vladimír Doležal, Praha