Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

DEFINITION UND GRUNDLEGENDE EIGENSCHAFTEN DES NICHTLINEAREN ADJUNGIERTEN OPERATORS

VĚRA BURÝŠKOVÁ, Praha

(Eingegangen am 11. October 1976)

Der Begriff des adjungierten Operators spielt in der Theorie der linearen Operatoren eine wichtige Rolle. In dieser Arbeit wird bestrebt den Begriff des adjungierten Operators bezüglich eines nichtlinearen Operators derart einzuführen, damit die aus der Theorie der linearen Operatoren bekannte Definition inbegriffen ist. Es werden die wichtigsten Eigenschaften des adjungierten Operators untersucht, speziell dann der Zusammenhang mit der Potenzionalität und mit dem Problem der Eigenelemente nichtlinearer Operatoren.

In der Arbeit [1] hat S. YAMAMURO den Begriff des adjungierten Operators für sogenannte "*admissible" Operatoren im Hilbertraum eigenführt, die sich von Potenzialoperatoren nur um einen linearen antisymmetrischen Operator unterscheiden. Das ist eine wesentliche Einschränkung der Klasse von Operatoren, für die der adjungierte Operator existiert. Deshalb bringen wir eine allgemeinere Definition, die es gestattet den Begriff des adjungierten Operators für jeden Operator einzuführen, der auf beliebigen zweidimensionalen Unterräumen eines lokalkonvexen linearen Raums stetig ist und eine stetige Gâteauxsche Ableitung besitzt.

Soweit nicht anderes gesagt wird, werden überall in dieser Arbeit mit X und Y lokalkonvexe lineare topologische Räume bezeichnet und mit X^* und Y^* die zu diesen adjungierte Räume (bezüglich der starken Topologie). Durch das Symbol $F : X \to Y$ wird zum Ausdruck gebracht, dass die Werte des Operators F, der im Raum X definiert ist, im Raum Y liegen. Den Wert eines Funktionals f im Punkt x_0 bezeichnen wir $\langle f, x_0 \rangle$, d. h. $f(x_0) = \langle f, x_0 \rangle$. Das skalare Produkt zweier Elemente x, y eines Hilbertraumes bezeichnen wir mit (x, y). Ferner bedeute $U \subset X$ eine offene konvexe Umgebung der Null.

Definition 1. Wir sagen, dass der Operator $F : U \subset X \to Y$ auf U *k-endlich stetig* ist, falls er auf dem Durchschnitt U mit jedem k-dimensionalen Unterraum von X stetig ist.

Definition 2. Wenn ein linearer Operator $F'(x)$ derart existiert, dass

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x + th) - F(x)}{t} = F'(x)\, h \quad \text{für alle} \quad x \in U\,, \quad h \in X\,,$$

dann sagen wir, dass der Operator $F(x)$ auf U *die Gâteauxsche Ableitung* $F'(x)$ besitzt. Ist $f(x)$ ein Funktional $f : X \to R^1$, dann verwenden wir für dessen G-Ableitung auch die Bezeichnung „Gradient".

Mit dem Symbol $\mathscr{D}$ bezeichnen wir den linearen Raum aller Operatoren $F : U \to \to X^*$, die folgenden Bedingungen genügen:

1° $F(x)$ ist stetig auf U;
2° $F(0) = 0$;
3° $F(x)$ besitzt eine G-Ableitung, die auf U 2-endlich stetig ist.

Definition 3. Sei $F \in \mathscr{D}$. Für $x \in U$ definieren wir den Operator $F^* : U \to X^*$ durch die Gleichung

$$\langle F^*(x), h \rangle = \int_0^1 \langle F'(sx)\, h, x \rangle \, \mathrm{d}s$$

für alle $h \in X$. Der Operator F^* heisst *adjungierter Operator bezüglich des Operators* F auf U.

Bemerkung 1. Aus der Definition 3 bekommen wir unmittelbar, dass für alle $h \in X$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$

$$\langle F^*(tx), h \rangle = \int_0^t \langle F'(sx)\, h, x \rangle \, \mathrm{d}s \tag{1}$$

gilt.

Bemerkung 2. Es ist nicht wesentlich, dass der Operator F auf einer offenen konvexen Umgebung der Null definiert ist. Falls er auf einer anderen konvexen Umgebung definiert ist, dann genügt es eine Translation vorzunehmen, die diesen Fall auf den ersteren überführt.

Ist $F(0) \neq 0$, dann nehmen wir statt F den Operator $G = F - F(0)$ und definieren den adjungierten Operator von F wie folgt:

$$F^* = G^* + F(0)\,.$$

Satz 1. *Sei $F \in \mathscr{D}$. Setzen wir*

$$\varphi(x) = \int_0^1 \langle F(tx), x \rangle \, \mathrm{d}t\,, \tag{2}$$

dann ist φ ein auf U stetiges Funktional. Dieses Funktional besitzt auf U die G-Ableitung und es gilt

$$\varphi'(x)\, h = \langle \operatorname{grad} \varphi(x), h \rangle = \int_0^1 \langle F(tx) - F^*(tx), h \rangle \, dt + \langle F^*(x), h \rangle$$

für alle $x \in U$, $h \in X$.

Beweis. Wir setzen

$$g(\tau) = \varphi(x + \tau h) = \int_0^1 \langle F(tx + \tau ht), x + \tau h \rangle \, dt , \quad x \in U , \quad h \in X .$$

Die unter dem Integralzeichen vorgenommene Differentiation ergibt

$$g'(\tau) = \int_0^1 [\langle F'(tx + t\tau h)(th), x + \tau h \rangle + \langle F(tx + t\tau h), h \rangle] \, dt$$

woraus

$$\varphi'(x)\, h = g'(0) = \int_0^1 \langle F'(tx)(th), x \rangle \, dt + \int_0^1 \langle F(tx), h \rangle \, dt \tag{3}$$

folgt. Durch partielle Integration folgt weiter

$$\int_0^1 \langle F'(tx)(th), x \rangle \, dt = \int_0^1 \langle F'(tx)\, h, x \rangle \, dt - \int_0^1 \int_0^t \langle F'(sx)\, h, x \rangle \, ds \, dt .$$

Nach Definition 3 ist dann

$$\varphi'(x)\, h = \int_0^1 \langle F'(tx)\, h, x \rangle \, dt - \int_0^1 \langle F^*(tx), h \rangle \, dt + \int_0^1 \langle F(tx), h \rangle \, dt =$$

$$= \int_0^1 \langle F(tx) - F^*(tx), h \rangle \, dt + \langle F^*(x), h \rangle .$$

Satz 2. *Ist $F \in \mathcal{D}$, dann existiert ein Potenzialoperator H auf U und ein auf U 2-endlich stetiger Operator R derart, dass folgendes gilt:*

1° $F(x) = H(x) + R(x)$, $x \in U$;

2° $\langle R(x), h \rangle = \int_0^1 \langle F'(tx)\, x, h \rangle\, t \, dt - \int_0^1 \langle F'(tx)\, h, x \rangle\, t \, dt$, $x \in U$, $h \in X$;

3° $\langle R(x), x \rangle \equiv 0$ *auf* U;

4° $H(x) = \operatorname{grad} \varphi(x)$, *wobei* $\varphi(x) = \int_0^1 \langle F(tx), x \rangle \, dt$.

Beweis. Nach (3) des Beweises von Satz 1 gilt

$$\varphi'(x)\, h = \int_0^1 \langle F'(tx)(th), x \rangle \, dt + \int_0^1 \langle F(tx), h \rangle \, dt .$$

Wird auf das zweite Integral die partielle Integration angewendet, dann erhalten wir

$$\varphi'(x)\, h = \int_0^1 \langle F'(tx)(th), x \rangle \, dt + \langle F(x), h \rangle - \int_0^1 \langle F'(tx)(tx), h \rangle \, dt$$

für alle $x \in U$, $h \in X$. Als unmittelbare Folge ist dann

$$\langle F(x), h\rangle = \varphi'(x)\, h + \int_0^1 \langle F'(tx)\,(tx), h\rangle\, dt - \int_0^1 \langle F'(tx)\,(th), x\rangle\, dt\,,$$

d. h.

$$\langle F(x), h\rangle = \langle \operatorname{grad} \varphi(x), h\rangle + \langle R(x), h\rangle\,,$$

woraus $F(x) = H(x) + R(x)$ mit $H(x) = \operatorname{grad} \varphi(x) = \varphi'(x)$ und

$$\langle R(x), h\rangle = \int_0^1 \langle F'(tx)\,(tx), h\rangle\, dt - \int_0^1 \langle F'(tx)\,(th), x\rangle\, dt$$

folgt.

Damit ist der Satz bewiesen.

Folgerung. *Es ist $F \in \mathscr{D}$ genau dann ein Potenzialoperator auf U, wenn $R(x) = 0$ auf U gilt.*

Satz 3. *Die Menge der zu den Operatoren des linearen Raumes $\mathscr{D}$ adjungierten Operatoren bildet wieder einen linearen Raum.*

Beweis. Es sei $F_1, F_2 \in \mathscr{D}$, $c_1, c_2 \in R^1$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, ferner sei $G = c_1F_1 + c_2F_2$. Nach (1) ist

$$\langle G^*(tx), h\rangle = \langle (c_1F_1 + c_2F_2)^*\,(tx), h\rangle =$$

$$= \int_0^t \langle [c_1F_1(sx) + c_2F_2(sx)]'\, h, x\rangle\, ds = \int_0^t \langle [c_1F_1'(sx) + c_2F_2'(sx)]\, h, x\rangle\, ds =$$

$$= c_1 \int_0^t \langle F_1'(sx)\, h, x\rangle\, ds + c_2 \int_0^t \langle F_2'(sx)\, h, x\rangle\, ds =$$

$$= c_1\langle F_1^*(tx), h\rangle + c_2\langle F_2^*(tx), h\rangle = \langle [c_1F_1^*(tx) + c_2F_2^*(tx)], h\rangle\,,$$

woraus $G^* = (c_1F_1 + c_2F_2)^* = c_1F_1^* + c_2F_2^*$ folgt.

Satz 4. *Der Operator $F \in \mathscr{D}$ sei homogen von Grade $\alpha \geqq 1$ (d. h. $F(tx) = t^\alpha F(x)$ für alle $x \in U$, $t \in \langle 0, 1\rangle$). Es sei*

$$\varphi(x) = \int_0^1 \langle F(tx), x\rangle\, dt\,.$$

Dann gilt:

1° *F^* ist auch ein homogener Operator vom Grade α.*

2° *$\langle F^*(x), h\rangle = (1/\alpha)\,\langle F'(x)\, h, x\rangle$ für alle $x \in U$, $h \in X$.*

3° *$H(x) = \operatorname{grad} \varphi(x) = (1/(\alpha + 1))\,[F(x) + \alpha F^*(x)]$ für alle $x \in U$, d. h. $F(x) = H(x) + R(x)$, wobei $R(x) = \alpha[H(x) - F^*(x)]$.*

4° *F ist ein Potenzialoperator auf U dann und nur dann, wenn $F(x) = F^*(x)$ für alle $x \in U$ ist.*

Beweis. 1° ist eine unmittelbare Folgerung der Definition 3. Wir beweisen 2°. Aus (1) folgt

$$\langle \boldsymbol{F}^*(tx), h\rangle = \int_0^t \langle \boldsymbol{F}'(sx)\,h, x\rangle\,\mathrm{d}s = \int_0^t \langle s^{\alpha-1}\,\boldsymbol{F}'(x)\,h, x\rangle\,\mathrm{d}s = (t^\alpha/\alpha)\,\langle \boldsymbol{F}'(x)\,h, x\rangle\,,$$

(denn es ist $\boldsymbol{F}'(sx)\,h = s^{\alpha-1}\,\boldsymbol{F}'(x)\,h$). Ferner folgt aus 1°, dass $\langle \boldsymbol{F}^*(tx), h\rangle = t^\alpha\langle \boldsymbol{F}^*(x), h\rangle$ ist, d. h. $(1/\alpha)\,\langle \boldsymbol{F}'(x)\,h, x\rangle = \langle \boldsymbol{F}^*(x), h\rangle$; damit ist die Behauptung 2° bewiesen.

Nach (3) aus dem Beweis des Satzes 1 ist

$$\varphi'(x)h = \langle \operatorname{grad}\varphi(x), h\rangle = \int_0^1 \langle [\boldsymbol{F}(tx) - \boldsymbol{F}^*(tx)], h\rangle\,\mathrm{d}t + \langle \boldsymbol{F}^*(x), h\rangle =$$
$$= \int_0^1 \langle t^\alpha\,\boldsymbol{F}(x) - t^\alpha\,\boldsymbol{F}^*(x), h\rangle\,\mathrm{d}t + \langle \boldsymbol{F}^*(x), h\rangle =$$
$$= \frac{1}{\alpha+1}\langle \boldsymbol{F}(x) - \boldsymbol{F}^*(x), h\rangle + \langle \boldsymbol{F}^*(x), h\rangle = \frac{1}{\alpha+1}\langle \boldsymbol{F}(x) + \alpha\,\boldsymbol{F}^*(x), h\rangle$$

woraus $\boldsymbol{H}(x) = \operatorname{grad}\varphi(x) = (1/(\alpha+1))\,(\boldsymbol{F}(x) + \alpha\,\boldsymbol{F}^*(x))$ für $x \in U$ folgt; damit ist die Behauptung 3° bewiesen.

Wir beweisen noch 4°; $\boldsymbol{F}$ ist ein Potenzialoperator dann und nur dann, wenn $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^*$. a) $\boldsymbol{F}$ sei ein Potenzialoperator. Dann ist $\boldsymbol{F}(x) = \operatorname{grad}\varphi(x)$ nach der Folgerung des Satzes 5.1 in der Arbeit [2], Seite 83. Nach der Behauptung 3° ist

$$\boldsymbol{F}(x) = \operatorname{grad}\varphi(x) = \frac{1}{\alpha+1}\,[\boldsymbol{F}(x) + \alpha\,\boldsymbol{F}^*(x)]\,, \quad \text{d. h.} \quad \boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{F}^*(x)$$

für $x \in U$. b) Sei $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^*$. Dann gilt $\operatorname{grad}\varphi(x) = (1/(\alpha+1))\,[\boldsymbol{F}(x) + \alpha\,\boldsymbol{F}(x)] = \boldsymbol{F}(x)$ und $\boldsymbol{F}$ ist ein Potenzialoperator.

Folgerung aus Satz 4. *Ist $\boldsymbol{F} \in \mathscr{D}$ ein Potenzialoperator, dann gilt*

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{F}^{**} = \ldots .$$

Bemerkung. Ist $\boldsymbol{F} \in \mathscr{D}$, $\boldsymbol{F}$ homogen vom Grade $\alpha \geqq 1$, dann gilt nach Satz 4 die Gleichung

$$\langle \boldsymbol{F}^*(x), h\rangle = \frac{1}{\alpha}\,\langle \boldsymbol{F}'(x)\,h, x\rangle \quad \text{für alle} \quad x \in U\,, \quad h \in X\,.$$

Man kann daher den adjungierten Operator bezüglich eines homogenen Operators allgemeiner in der Form

$$\boldsymbol{F}^*(x) = \frac{1}{\alpha}\,[\boldsymbol{F}'(x)]^*\,(x)\,, \quad x \in U$$

definieren; hier bedeutet $[F'(x)]^*$ bei fest gewähltem $x \in U$ den zum linearen Operator $F'(x)$ gehörigen adjungierten Operator.

Daraus folgt unmittelbar: Besitzt der homogene Operator eine stetige Ableitung auf U, dann ist der zu diesem adjungierte Operator ebenfalls stetig auf U.

Satz 5. *Sei $F \in \mathcal{D}$. Dann und nur dann F ist ein Potenzialoperator, wenn $F(x) = F^*(x)$ für alle $x \in U$ gilt.*

Beweis. 1) Sei $F(x) = F^*(x)$ für alle $x \in U$. Setzen wir

$$\varphi(x) = \int_0^1 \langle F(tx), x \rangle \, dt ,$$

dann gilt nach Satz 1

$$\langle \operatorname{grad} \varphi(x), h \rangle = \int_0^1 \langle F(tx) - F^*(tx), h \rangle \, dt + \langle F^*(x), h \rangle = \\ = \langle F^*(x), h \rangle = \langle F(x), h \rangle$$

für alle $x \in U$, $h \in X$, d. h. $F(x) = \operatorname{grad} \varphi(x)$ und F ist ein Potenzialoperator.

2) Sei F ein Potenzialoperator. Nach der Folgerung 5.1 in der Arbeit [2] ist dann

$$F(x) = \operatorname{grad} \varphi(x), \quad \varphi(x) = \int_0^1 \langle F(tx), x \rangle \, dt .$$

Ferner ist $F'(x)$ nach Satz 5.1 in [2] ein symmetrischer linearer Operator

$$\langle F'(x) \, h, k \rangle = \langle F'(x) \, k, h \rangle . \tag{4}$$

Nach Satz 1 ist

$$\langle F(x), h \rangle = \int_0^1 \langle F(tx), h \rangle \, dt - \int_0^1 \langle F^*(tx), h \rangle \, dt + \langle F^*(x), h \rangle .$$

Es genügt daher zu zeigen, dass

$$\int_0^1 \langle F(tx), h \rangle \, dt = \int_0^1 \langle F^*(tx), h \rangle \, dt$$

ist. Wird auf das links stehende Integral die partielle Integration angewendet und die Beziehung (4) berücksichtigt, dann erhalten wir

$$\int_0^1 \langle F(tx), h \rangle \, dt = \langle F(x), h \rangle - \int_0^1 t \langle F'(tx) \, h, x \rangle \, dt .$$

Ähnlich folgt durch partielle Integration des rechts stehenden Integrals

$$\int_0^1 \langle F^*(tx), h \rangle \, dt = \int_0^1 \int_0^t \langle F'(sx) \, h, x \rangle \, ds \, dt =$$

$$= \langle F(x), h\rangle - \int_0^1 t\langle F'(tx)\, h, x\rangle \,\mathrm{d}t\,.$$

Es gilt daher

$$\int_0^1 \langle F(tx), h\rangle \,\mathrm{d}t - \int_0^1 \langle F^*(tx), h\rangle \,\mathrm{d}t = \langle F(x), h\rangle - \int_0^1 t\langle F'(tx)\, h, x\rangle \,\mathrm{d}t -$$
$$- \langle F(x), h\rangle + \int_0^1 t\langle F'(tx)\, h, x\rangle \,\mathrm{d}t = 0$$

für alle $x \in U$, $h \in X$.

Damit ist der Satz bewiesen.

Beispiel 1. Sei G in R^n eine offene und beschränkte Menge, deren Grenze regulär ist. Mit U sei die Menge aller auf G stetigen Funktionen bezeichnet, $U \subset L_2(G)$. Wir betrachten den Operator

$$F(x) = x(s) \int_G K(s, t)\, x^2(t) \,\mathrm{d}t\,,$$

dessen Kern $K(s, t)$ auf $G \times G$ stetig ist. Offenbar ist $F: U \to L_2(G)$ ein Element aus $\mathscr{D}$. Wir bestimmen den adjungierten Operator. Der Operator ist homogen vom Grade 3. Nach Satz 4 ist

$$\langle F^*(x), h\rangle = \tfrac{1}{3}\langle F'(x)\, h, x\rangle\,, \quad F'(x)\, h = g'(0)\,, \quad \text{wobei} \quad g(\tau) = F(x + \tau h)\,.$$

Es gilt daher

$$g'(0) = h(s) \int_G K(s, t)\, x^2(t) \,\mathrm{d}t + x(s) \int_G K(s, t)\, 2\, x(t)\, h(t) \,\mathrm{d}t\,,$$

$$\langle F'(x)\, h, x\rangle = \int_G h(s) \int_G K(s, t)\, x^2(t) \,\mathrm{d}t\, x(s) \,\mathrm{d}s +$$
$$+ 2 \int_G x(s) \int_G K(s, t)\, x(t)\, h(t)\, x(s) \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}s =$$
$$= \left\langle x(s) \int_G [K(s, t) + 2\, K(t, s)]\, x^2(t) \,\mathrm{d}t, h \right\rangle.$$

Daraus folgt nach Satz 4

$$F^*(x) = \tfrac{1}{3}\, x(s) \int_G [K(s, t) + 2\, K(t, s)]\, x^2(t) \,\mathrm{d}t\,.$$

Nach Satz 5 ist F genau dann ein Potenzialoperator, wenn $F = F^*$ ist. In diesem Fall ist dafür notwendig und hinreichend, dass der Kern $K(s, t)$ symmetrisch ist.

Ist der Kern $K(s, t)$ positiv, dann ist auch der Operator F positiv, d. h. $\langle F'(x)\, h, h\rangle \geqq 0$ für alle $x \in U$, $h \in L_2(G)$, und der Operator F^* ist ebenfalls positiv.

Hilfsatz 1. *Sei X ein linearer normierter Raum, $U \subset X$ eine die Null umfassende sternförmige Menge. Ist $F : U \to X^*$ ein homogener Operator vom Grade $\alpha \geqq 1$, der auf U im verstärkten Sinne stetig ist, dann ist auch das Funktional*

$$\varphi(x) = \int_0^1 \langle F(tx), x \rangle \, dt$$

im verstärkten Sinne stetig auf U.

Beweis. Erstens ist

$$\varphi(x) = \int_0^1 t^\alpha \langle F(x), x \rangle \, dt = \frac{1}{\alpha + 1} \langle F(x), x \rangle .$$

Sei nun $x_n \in U$,

$$x_n \xrightarrow{\text{schwach}} x_0 \in U .$$

Dann gilt

$$|\varphi(x_n) - \varphi(x_0)| = \left| \frac{1}{\alpha + 1} (\langle F(x_n), x_n \rangle - \langle F(x_0), x_0 \rangle) \right| =$$

$$= \frac{1}{\alpha + 1} |\langle F(x_n), x_n - x_0 \rangle + \langle F(x_n) - F(x_0), x_0 \rangle| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\alpha + 1} \{ \|F(x_n) - F(x_0)\| \, \|x_n - x_0\| +$$

$$+ \|F(x_n) - F(x_0)\| \, . \, \|x_0\| + |\langle F(x_0), x_n - x_0 \rangle| \} .$$

Aufgrund der verstärkten Stetigkeit von F und der schwachen Konvergenz $x_n \to x_0$ folgt unmittelbar

$$\lim_{n \to \infty} |\varphi(x_n) - \varphi(x_0)| = 0 ,$$

womit gezeigt ist, dass das Funktional φ im verstärkten Sinne auf U stetig ist.

Satz 6. *Sei X ein reflexiver Banachraum.*

$$K_r = \{ x \in X : \|x\| < r, \ r > 0 \} .$$

Sei $F : X \to X^*$ ein homogener Operator vom Grade $\alpha \geqq 1$, der im verstärkten Sinne stetig ist und der auf jeder Kugel K_r eine gleichmässig stetige Ableitung besitzt.

Dann ist F^* vollkompakt.

Beweis. Auf Grund der Bemerkung, die nach dem Satz 4 folgt, gilt:

$$F^*(x) = \frac{1}{\alpha} [F'(x)]^* (x) .$$

Im Sinne von Satz 7.8 auf Seite 91 [11] ist dann $F'(x)$ ein linearer vollstetiger Operator für jedes $x \in X$ und die Ableitung $F'(x)$, die eine Abbildung von X in den Raum der stetigen linearen Operatoren von X in X^* darstellt, ist kompakt und deshalb vollkompakt, da sie nach Voraussetzung des Satzes gleichmäsig stetig ist.

Da nun $[F'(x)]^*$ als adjungierter Operator bezüglich eines vollstetigen linearen Operators für jedes fest gewähltes $x \in X$ vollstetig und deshalb vollkompakt ist (sieh Satz 4 auf Seite 266 [3]), besitzt F^* auch die Eigenschaft der Vollkompaktheit.

Beispiel 2. Es bedeute U die Menge aller in $L_2(0, 1)$ stetigen Funktionen. Wir betrachten den Operator

$$F(x) = \int_0^1 K(s, t)\, x^n(t)\, dt\,,$$

dessen Kern $K(s, t)$ für $0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$ stetig ist und der Ungleichung $0 < c \leqq K(s, t)$ genügt. Der Operator $F : U \to L_2(0, 1)$ ist auf jeder beschränkten Menge $M \subset U$ gleichmässig stetig, denn es gilt für alle $x, y \in M$ nach der Schwarzschen Ungleichung folgendes:

$$\|F(x) - F(y)\|^2 \leqq m^2 \int_0^1 \left(\int_0^1 [x^n(t) - y^n(t)]\, dt \right)^2 ds \leqq$$

$$\leqq m^2 \int_0^1 \left(\int_0^1 [x(t) - y(t)]^2\, dt \int_0^1 [x^{n-1}(t) + \ldots + y^{n-1}(t)]^2\, dt \right) ds \leqq$$

$$\leqq m \,.\, N^2 \|x - y\|^2\,,$$

wobei

$$N^2 = \sup_{x,y \in M} \|x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}\|^2\,,$$

$$m = \max_{\substack{0 \leqq s \leqq 1 \\ 0 \leqq t \leqq 1}} K(s, t)\,.$$

Man kann beweisen, dass F vollstetig, d. h. auch vollkompakt, jedoch für $n \geqq 2$ nicht im verstärkten Sinne stetig ist (siehe [2], Seite 26). Wir bestimmen den adjungierten Operator:

$$F'(x)\, h = g'(0)\,,$$

wobei

$$g(\tau) = F(x + \tau h)\,,$$

$$g'(\tau) = \int_0^1 K(s, t)\, n[x(t) + \tau\, h(t)]^{n-1}\, h(t)\, dt$$

und dann

$$F'(x)\, h = n \int_0^1 K(s, t)\, x^{n-1}(t)\, h(t)\, dt\,.$$

Der Operator F ist homogen vom Grade n. Nach der Behauptung (2) von Satz 4 ist

$$\langle F^*(x), h\rangle = \frac{1}{n}\langle F'(x)\,h, x\rangle \quad \text{für alle} \quad x \in U\,, \quad h \in X = L_2(0,1)\,,$$

d. h.

$$\langle F^*(x), h\rangle = \frac{1}{n}\int_0^1 n \int_0^1 K(s,t)\,x^{n-1}(t)\,h(t)\,x(s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 K(t,s)\,x^{n-1}(s)\,h(s)\,x(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \left\langle x^{n-1}(s)\int_0^1 K(t,s)\,x(t)\,\mathrm{d}t, h(s)\right\rangle.$$

Daraus folgt

$$F^*(x) = x^{n-1}(s)\int_0^1 K(s,t)\,x(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Der adjungierte Operator F^* ist ebenfalls gleichmässig stetig, jedoch nicht vollstetig Für $n > 1$ ist offenbar F kein Potenzialoperator, denn in diesem Fall ist stets $F^* \neq F$

Bemerkung. Ist $K(s,t)$ eine bezüglich der beiden Variablen messbare Funktion, die der Bedingung

$$\varphi(s) = \|K(s,.)\|_{L_2} \in L_q \quad \text{mit} \quad q = \frac{2\alpha}{2\alpha - 1}\,, \quad 0 < \alpha\,, \quad \alpha \neq \tfrac{1}{2}$$

genügt, dann ist der Operator $F : L_{2\alpha} \to L_q$, der durch

$$F(x) = \int_0^1 K(s,t)\,x^{\alpha}(t)\,\mathrm{d}t$$

definiert ist, vollstetig. Dieses Resultat ist eine unmittelbare Folgerung von Satz 1.11 in [10] und Satz 19.1 in [2].

Beispiel 3. Betrachten wir den Operator $F : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, der durch die Beziehung

$$F(x) = \int_0^1\int_0^1 K(s,t_1,t_2)\,x(t_1)\,x(t_2)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2$$

definiert ist. Wir nehmen an, dass der Kern $K(s,t_1,t_2)$ als Funktion der Variablen s, $t_1, t_2 \in \langle 0, 1\rangle$ quadratisch integrierbar ist.

Der Operator F genügt den Bedingungen von Satz 6, wonach der Operator F und der zu diesem adjungierte Operator F^* auf jeder Kugel des Raumes $L_2(0,1)$ vollkompakt ist.

Wir beweisen:

$$F^*(x) = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 [K(t_2,t_1,s) + K(t_1,s,t_2)]\,x(t_1)\,x(t_2)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\,.$$

Zuerst zeigen wir, dass der Operator $\boldsymbol{F}$ im verstärkten Sinne stetig ist:

$$\boldsymbol{F}(x) = \int_0^1 (\boldsymbol{K}_s x)(t_2)\, x(t_2)\, \mathrm{d}t_2\,, \quad \text{wobei} \quad (\boldsymbol{K}_s x)(t_2) = \int_0^1 K(s, t_1, t_2)\, x(t_1)\, \mathrm{d}t_1\,.$$

Die $\boldsymbol{K}_s$ sind lineare und vollstetige Operatoren für alle $s \in \langle 0, 1\rangle$, $\boldsymbol{K}_s : L_2(0, 1) \to$ $\to L_2(0, 1)$ (siehe [3]). Sei $x_n \xrightarrow{\text{schwach}} x_0$. Dann folgt $\boldsymbol{K}_s x_n \to \boldsymbol{K}_s x_0$, da jeder lineare und vollstetige Operator im reflexiven Raum auch im verstärkten Sinne stetig ist. Durch einfache Rechnung folgt

$$\|\boldsymbol{F}(x_n) - \boldsymbol{F}(x_0)\|^2 = \int_0^1 |\langle \boldsymbol{K}_s x_n, x_n - x_0\rangle + \langle \boldsymbol{K}_s(x_n - x_0), x_0\rangle|^2\, \mathrm{d}s = \int_0^1 |f_n(s)|^2\, \mathrm{d}s\,.$$

Wegen $(a + b)^2 \leqq 2(a^2 + b^2)$ ist ferner

$$\begin{aligned} |f_n(s)|^2 &\leqq 2(\langle \boldsymbol{K}_s x_n, x_n - x_0\rangle^2 + \langle \boldsymbol{K}_s(x_n - x_0), x_0\rangle^2) \leqq \\ &\leqq 2\|\boldsymbol{K}_s x_n\|^2\, \|x_n - x_0\|^2 + 2\|\boldsymbol{K}_s(x_n - x_0)\|^2\, \|x_0\|^2 \leqq \\ &\leqq 2\|\boldsymbol{K}_s\|^2\, \|x_n - x_0\|^2\, (\|x_n\|^2 + \|x_0\|^2) \leqq M\|\boldsymbol{K}_s\|^2\,, \\ & n = 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad M = \text{const}\,. \end{aligned}$$

Nach der Voraussetzung ist die Funktion $\|\boldsymbol{K}_s\|^2$ integrierbar. Damit ist gezeigt, dass die Funktion $|f_n(s)|^2$ eine integrierbare Majorante besitzt, wonach

$$\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{F}(x_n) - \boldsymbol{F}(x_0)\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(s)|^2\, \mathrm{d}s = 0$$

gilt. Der Operator $\boldsymbol{F}$ ist tatsächlich im verstärkten Sinne stetig.

Wir bestimmen nun den adjungierten Operator:

$$\boldsymbol{F}'(x)\, h = g'(0) = \int_0^1\!\!\int_0^1 K(s, t_1, t_2)\, [x(t_1)\, h(t_2) + x(t_2)\, h(t_1)]\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2\,,$$

wobei $g(\tau) = \boldsymbol{F}(x + \tau h)$.

Die Ableitung $\boldsymbol{F}'(x)$ ist als linearer Operator stetig. Ferner ist der Operator $\boldsymbol{F}$ homogen vom Grade 2. Dies hat zur Folge (siehe (2) im Satz 4), dass

$$\begin{aligned} &\langle \boldsymbol{F}^*(x), h\rangle = \tfrac{1}{2}\langle \boldsymbol{F}'(x)\, h, x\rangle = \\ &= \left\langle \frac{1}{2} \int_0^1\!\!\int_0^1 K(s, t_1, t_2)\, [x(t_1)\, h(t_2) + x(t_2)\, h(t_1)]\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2, x \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{1}{2} \int_0^1\!\!\int_0^1 [K(t_2, t_1, s) + K(t_1, s, t_2)]\, x(t_1)\, x(t_2)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2, h \right\rangle \end{aligned}$$

ist. Damit ist gezeigt, dass der adjungierte Operator $\boldsymbol{F}^*$ durch

$$\boldsymbol{F}^*(x) = \frac{1}{2} \int_0^1\!\!\int_0^1 [K(t_2, t_1, s) + K(t_1, s, t_2)]\, x(t_1)\, x(t_2)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2$$

ausgedrückt ist. Setzen wir

$$K^*(s, t_1, t_2) = \tfrac{1}{2}[K(t_2, t_1, s) + K(t_1, s, t_2)],$$

dann ist auch dieser Kern quadratisch integrierbar.

Bemerkung. Ist der Kern $K(s, t_1, t_2)$ in allen drei Variablen symmetrisch, dann gilt $\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{F}$. Nach Satz 5 ist damit gezeigt, dass $\boldsymbol{F}$ ein Potenzialoperator ist.

Weitere Beispiele homogener Operatoren, die in den Anwendungen eine wichtige Rolle spielen, sind in den Arbeiten [5], [6], [7] angeführt.

Nächstfolgend betrachten wir einige Anwendungen des adjungierten Operators in der Theorie der Eigenelemente homogener Operatoren. Das skalare Produkt bezeichnen wir wieder mit runden Klammern.

Satz 7. *Sei X ein Hilbertraum, $\boldsymbol{F} \in \mathscr{D}$. Der Operator $\boldsymbol{F}$ sei homogen vom Grade $\alpha \geqq 1$, ferner sei λ_0 ein Eigenwert dieses Operators mit dem Eigenelement $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$ (d. h. $\boldsymbol{F}(x_0) = \lambda_0 x_0$). Sei μ_0 ein Eigenwert des adjungierten Operators $\boldsymbol{F}^*$ mit dem Eigenelement y_0. Ist $x_0 = y_0$, dann ist $\lambda_0 = \mu_0$.*

Beweis. Nach Satz 2 und Satz 4 ist

$$(\boldsymbol{F}(x), x) = (\boldsymbol{H}(x), x) + (\boldsymbol{R}(x), x) = \frac{1}{\alpha + 1}[(\boldsymbol{F}(x), x) + \alpha(\boldsymbol{F}^*(x), x)] + (\boldsymbol{R}(x), x) =$$

$$= \frac{1}{\alpha + 1}[(\boldsymbol{F}(x), x) + \alpha(\boldsymbol{F}^*(x), x)],$$

woraus

$$(\boldsymbol{F}(x), x) = (\boldsymbol{F}^*(x), x)$$

folgt. Dann es gilt

$$(\boldsymbol{F}(x_0), x_0) = (\lambda_0 x_0, x_0) = (\mu_0 x_0, x_0) = (\boldsymbol{F}^*(x_0), x_0)$$

und ferner ist

$$\lambda_0 \|x_0\|^2 = \mu_0 \|x_0\|^2 \Rightarrow \lambda_0 = \mu_0 .$$

Die Behauptung des Satzes ist damit bewiesen.

Satz 8. *Sei $\boldsymbol{F} \in \mathscr{D}$, bzw. $\boldsymbol{G} \in \mathscr{D}$ ein homogener Operator vom Grade $\alpha \geqq 1$, bzw. $\beta \geqq 1$. Ferner sei*

$$\varphi(x) = \int_0^1 \langle \boldsymbol{F}(tx), x \rangle \,\mathrm{d}t , \quad \psi(x) = \int_0^1 \langle \boldsymbol{G}(tx), x \rangle \,\mathrm{d}t ,$$

$$\operatorname{grad} \varphi(x) = \boldsymbol{H}(x), \quad \operatorname{grad} \psi(x) = \boldsymbol{K}(x) .$$

Sei λ_0 ein Eigenwert des Paares $(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{K})$, d. h. $\boldsymbol{H}(x_0) = \lambda_0 \boldsymbol{K}(x_0)$, $\|x_0\| = 1$. Die Zahl

$$\lambda_1 = \frac{\alpha + 1}{\beta + 1} \lambda_0$$

ist dann und nur dann ein Eigenwert des Paares $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$, wenn die Zahl

$$\mu_1 = \frac{\beta(\alpha + 1)}{\alpha(\beta + 1)} \lambda_0$$

ein Eigenwert des Paares $(\boldsymbol{F}^*, \boldsymbol{G}^*)$ ist.

Beweis. Nach Behauptung (3) von Satz 4 gilt

$$\boldsymbol{H}(x_0) = \frac{1}{\alpha + 1} [\boldsymbol{F}(x_0) + \alpha \boldsymbol{F}^*(x_0)] = \lambda_0 \frac{1}{\beta + 1} [\boldsymbol{G}(x_0) + \beta \boldsymbol{G}^*(x_0)] = \lambda_0 \boldsymbol{K}(x_0) .$$

Für

$$\boldsymbol{F}(x_0) = \lambda_1 \boldsymbol{G}(x_0)$$

folgt

$$\frac{1}{\alpha + 1} [\lambda_1 \boldsymbol{G}(x_0) + \alpha \boldsymbol{F}^*(x_0)] = \lambda_0 \frac{1}{\beta + 1} [\boldsymbol{G}(x_0) + \beta \boldsymbol{G}^*(x_0)] .$$

Ist nun

$$\lambda_1 = \lambda_0 \frac{\alpha + 1}{\beta + 1},$$

dann erhalten wir

$$\frac{\lambda_0 \beta}{\beta + 1} \boldsymbol{G}^*(x_0) = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \boldsymbol{F}^*(x_0) ,$$

woraus

$$\boldsymbol{F}^*(x_0) = \mu_1 \boldsymbol{G}^*(x_0) \quad \text{mit} \quad \mu_1 = \lambda_0 \frac{\beta(\alpha + 1)}{\alpha(\beta + 1)}$$

folgt. Die umgekehrte Implikation ist ersichtlich.

Folgerung. *Sind $\varphi(x)$, $\psi(x)$ homogene Funktionale vom Satz 8, sind ferner $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ homogene Operatoren vom gleichen Grad $\alpha \geqq 1$, dann ist λ_0 genau dann ein Eigenwert des Paares $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$, wenn λ_0 Eigenwert des Paares $(\boldsymbol{F}^*, \boldsymbol{G}^*)$ ist.*

Beweis. Wird $\alpha = \beta$ in λ_1 und μ_1 eingesetzt, dann folgt unmittelbar $\lambda_1 = \mu_1 = \lambda_0$.

Satz 9. *Der Operator $\boldsymbol{F} \in \mathfrak{D}$ sei homogen vom Grade $\alpha \geqq 1$. Sei λ_0 ein Eigenwert des Operators*

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\alpha + 1} [\boldsymbol{F} + \alpha \boldsymbol{F}^*]$$

mit dem Eigenelement x_0.

a) *Falls $F(x_0) = 0$, dann ist x_0 Eigenelement des Operators F^* mit dem Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_0(\alpha + 1)/\alpha$.*

b) *Falls $F^*(x_0) = 0$, dann ist x_0 Eigenelement des Operators F mit dem Eigenwert $\lambda_2 = \lambda_0(\alpha + 1)$.*

Beweis. Erstens ist

$$H(x_0) = \lambda_0 x_0 = \frac{1}{\alpha + 1}\left[F(x_0) + \alpha F^*(x_0)\right].$$

a) Falls $F(x_0) = 0$, dann ist

$$H(x_0) = \frac{\alpha}{\alpha + 1} F^*(x_0) = \lambda_0 x_0 \Rightarrow F^*(x_0) = \lambda_1 x_0, \quad \text{wobei} \quad \lambda_1 = \lambda_0 \frac{\alpha + 1}{\alpha}.$$

b) Falls $F^*(x_0) = 0$, dann ist

$$H(x_0) = \frac{1}{\alpha + 1} F(x_0) = \lambda_0 x_0 \Rightarrow F(x_0) = \lambda_2 x_0, \quad \text{wobei} \quad \lambda_2 = \lambda_0(\alpha + 1).$$

Der Satz ist damit bewiesen.

Wir führen nun den Begriff der Norm eines homogenen Operators ein und beweisen einige von ihren Eigenschaften.

Definition 4. Als *Norm* eines stetigen und homogenen Operators F vom Grade $\alpha > 0$ verstehen wir die Zahl

$$\|F\| = \sup_{\|x\| \leqq 1} \|F(x)\|.$$

Ähnlich wird die Norm $\|F^*\|$ des adjungierten Operators eingeführt.

Bemerkung. Ist $x \in X$, $x \neq 0$, $x_1 = x/\|x\|$, dann haben wir

$$\|F(x_1)\| \leqq \|F\| \quad \text{d. h.} \quad \left\|F\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqq \|F\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|^\alpha}\|F(x)\| \leqq \|F\|.$$

Es gilt daher die Ungleichung $\|F(x)\| \leqq \|F\|\,\|x\|^\alpha$. Die für $\alpha = 1$ gültige Gleichheit $\|F\| = \|F^*\|$ ist allgemein nicht erfüllt. In der Definition der Norm eines homogenen Operators genügt es die Stetigkeit nur im Nullpunkt zu fordern (siehe [2] auf Seite 30).

Satz 10. *Sei F ein homogener Operator vom Grade $\alpha \geqq 1$, der im Nullpunkt eine stetige G-Ableitung F' besitz. Es gilt dann:*

1° $\|F\| \leqq (1/\alpha)\,\|F'\|$

2° $\|F^*\| \leqq (1/\alpha)\,\|F'\|$.

Beweis. 1° Für homogene Operatoren gilt der verallgemeinerte Eulersche Satz über homogene Funktionen $F'(x)(x) = \alpha F(x)$, d. h.

$$\|F(x)\| = \frac{1}{\alpha} \|F'(x)(x)\| \leqq \frac{1}{\alpha} \|F'(x)\| \, \|x\| \leqq \frac{1}{\alpha} \|F'\| \, \|x\|^{\alpha+1} ,$$

woraus

$$\|F\| = \sup_{\|x\| \leqq 1} \|F(x)\| \leqq \sup_{\|x\| \leqq 1} \frac{1}{\alpha} \|F'\| \, \|x\|^{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha} \|F'\|$$

folgt.

2° Sei x_0 mit $\|x_0\| \leqq 1$ fest gewählt. Nach dem Hahn-Banachschen Satz existiert ein h_0 derart, dass

$$\langle F^*(x_0), h_0 \rangle = \|F^*(x_0)\| , \quad \|h_0\| = 1$$

ist. Ferner nach Satz 4 ist

$$\|F^*(x_0)\| = \frac{1}{\alpha} \langle F'(x_0) \, h_0, x_0 \rangle ,$$

woraus

$$\|F^*(x_0)\| \leqq \frac{1}{\alpha} \|F'(x_0)\| \, \|h_0\| \, \|x_0\| \leqq \frac{1}{\alpha} \|F'\| \, \|x_0\|^{\alpha+1}$$

folgt. Da nun x_0 beliebig gewählt werden kann, gilt die Ungleichung $\|F^*\| \leqq$ $\leqq (1/\alpha) \|F'\|$. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 11. *Ist $F \in \mathscr{D}$ ein homogener Operator vom Grade $\alpha \geqq 1$, dann gilt*

$$\sup_{\|x\| \leqq 1} |\langle F(x), x \rangle| = \sup_{\|x\| \leqq 1} |\langle F^*(x), x \rangle| \leqq \min \{ \|F\|, \|F^*\| \} .$$

Beweis. Nach Beweis vom Satz 7 ist $\langle F(x), x \rangle = \langle F^*(x), x \rangle$ für alle $x \in X$, woraus die Gleichheit der oberen Grenzen unmittelbar gefolgert werden kann. Ferner gilt nach Satz 4

$$|\langle F^*(x), x \rangle| = \frac{1}{\alpha} |\langle F'(x)(x), h \rangle| = \frac{1}{\alpha} |\langle \alpha F(x), x \rangle| \leqq \|F(x)\| \, \|x\| \leqq \|F\| \, \|x\|^{\alpha+1}$$

und daneben noch die Ungleichung

$$|\langle F^*(x), x \rangle| \leqq \|F^*\| \, \|x\|^{\alpha+1} .$$

Daraus folgt schon die Behauptung des Satzes.

Bemerkung. Es kann die Frage gestellt werden, unter welchen Voraussetzungen

$$\sup_{\|x\| \leqq 1} |\langle F(x), x \rangle| = \|F\| , \quad \text{bzw.} \quad \|F^*\| = \|F\|$$