ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 102 * PRAHA 21. 11. 1977 * ČÍSLO 4

DVACET PĚT LET MATEMATICKÉHO ÚSTAVU ČESKOSLOVENSKÉ AKADEMIE VĚD

JIŘÍ FÁBERA, Praha*)

V listopadu 1977 uplynulo dvacet pět let od založení Československé akademie věd; její vznik měl mimořádný význam pro rozvoj vědy v naší zemi. Současně se založením Československé akademie věd vznikl Matematický ústav Československé akademie věd z tehdejšího Ústředního ústavu matematického. Prvním ředitelem Matematického ústavu ČSAV byl akademik EDUARD ČECH, nositel Řádu republiky a Řádu práce, jehož vědecké výsledky byly dvakrát oceněny Státní cenou Klementa Gottwalda. Eduard Čech koncipoval a postupně realizoval velkorysý plán výchovy mladých pracovníků v řadě matematických disciplin, v nichž se do té doby v Československu nepracovalo. To umožnilo pozdější rychlý rozvoj československé matematiky. Po odchodu Eduarda Čecha na Karlovu univerzitu se stal ředitelem Matematického ústavu ČSAV člen korespondent ČSAV VLADIMÍR KNICHAL, nositel Řádu práce. Vladimír Knichal stál v čele Matematického ústavu ČSAV osmnáct let; měl plné pochopení pro potřebu a význam aplikací matematiky a sám na tomto poli aktivně pracoval. Za jeho působení Matematický ústav ČSAV vzrostl asi trojnásobně a získal svůj dnešní profil. V letech 1972–1976 byl ředitelem Matematického ústavu akademik JOSEF NOVÁK, nositel Řádu práce. Josef Novák vedl dlouhá léta oddělení teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky Matematického ústavu ČSAV a významně ovlivnil rozvoj práce v topologii. Zastával řadu vysokých funkcí v Československé akademii věd a v současné době je předsedou vědeckého kolegia matematiky ČSAV. Od r. 1976 je ředitelem Matematického ústavu ČSAV Prof. JIŘÍ FÁBERA.

Matematický ústav ČSAV je dnes mezinárodně uznávané vědecké pracoviště a významně se podílí na řešení úkolů Státního programu základního výzkumu. Má tato vědecká oddělení:

oddělení obyčejných diferenciálních rovnic,
oddělení parciálních diferenciálních rovnic,
oddělení konstruktivních metod pro řešení diferenciálních rovnic,

*) Na přípravě tohoto článku spolupracovali M. FIEDLER, Z. FROLÍK, J. KURZWEIL, M. PRÁGER, V. PTÁK, O. VEJVODA, J. VYŠÍN, F. ZÍTEK.

oddělení numerických metod, teorie grafů a matematické logiky,
oddělení funkcionální analýzy,
oddělení teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky,
oddělení základních matematických struktur.

Součástí Matematického ústavu ČSAV je pobočka Matematického ústavu ČSAV v Brně a Kabinet pro modernizaci vyučování matematice.

Pokusíme se nyní přiblížit čtenáři, v kterých hlavních směrech pracují vědecká oddělení a jak se tato práce vyvíjela. Tento přehled však zdaleka není vyčerpávající.

Již v Ústředním ústavu matematickém se malá skupina pracovníků zabývala obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Seminář k této problematice se začal pravidelně scházet v r. 1954 a oddělení obyčejných diferenciálních rovnic bylo ustaveno v r. 1955. Témata, na která se soustřeďovalo nejvíce pozornosti, byla (i) periodická řešení nelineárních soustav a (ii) ljapunovská teorie stability. Obě témata byla zvolena šťastně. Poměrně brzy bylo dosaženo výsledků o existenci a stabilitě periodického řešení v závislosti na parametrech a o charakterizaci různých variant pojmu „stabilní řešení" pomocí ljapunovských funkcí odpovídajících vlastností. Kromě toho obě témata podnítila práci v dalších směrech. Na téma (i) navázalo vyšetřování periodických řešení parciálních diferenciálních rovnic; o tom se ještě zmíníme v odstavci, věnovaném parciálním diferenciálním rovnicím. Má-li autonomní diferenciální rovnice nekonstantní periodické řešení, pak má jednoparametrickou soustavu periodických řešení, která z daného řešení vzniknou posunutím v čase. Proto s tématem (i) souvisí vyšetřování tzv. invariantních variet, tj. variet, které jsou vyplněny trajektoriemi (resp. charakteristikami) řešení dané diferenciální rovnice. Zejména zajímavá je ta situace, kdy invariantní varieta se jen málo změní při malých změnách diferenciální rovnice. Přitom u neautonomních rovnic lze významným způsobem zeslabit pojem „malá změna"; souvisí to s tzv. rychlými a pomalými pohyby v teorii oscilací. Od zeslabení pojmu „malá změna diferenciální rovnice" vede přímá cesta k zobecnění pojmu „diferenciální rovnice"; v podstatě jde o jisté „zúplnění" množiny klasických diferenciálních rovnic. Toto zúplnění lze provést rozmanitým způsobem; např. lze zavést třídu diferenciálních rovnic, jejichž řešení nejsou nutně absolutně spojitá, mají však omezenou variaci. Za tyto výsledky byl člen korespondent ČSAV J. Kurzweil vyznamenán Státní cenou Klementa Gottwalda v r. 1964. Metoda invariantních variet byla později uplatněna při vyšetřování diferenciálních rovnic se zpožděným argumentem. Zobecněné diferenciální rovnice a studium obecných okrajových úloh vyústily ve vyšetřování jistých operátorových rovnic a integrálních rovnic v prostoru funkcí s omezenou variací. Z tématu (ii) se vyvinul zájem o vliv stochastických poruch na řešení deterministických diferenciálních rovnic a později byla soustavně vyšetřována Itoova diferenciální rovnice; byla vypracována metoda odhadu difúze a nalezeny nové souvislosti s parciálními diferenciálními rovnicemi parabolického typu. Snaha oslabit předpoklad, že pravá strana diferenciální rovnice spojitě závisí na závisle proměnné, vede k diferenciálním relacím; s jejich vyšetřováním bylo započato nedávno.

V Matematickém ústavu ČSAV v Brně v letech 1970—1972 a od r. 1972 v pobočce Matematického ústavu ČSAV v Brně pokračovalo vyšetřování disperzí a transformací lineární rovnice druhého řádu, zahájené na přírodovědecké fakultě Univerzity J. E. Purkyně v Brně začátkem padesátých let. Byla vytvořena úplná teorie globálních transformací lineární diferenciální rovnice druhého řádu, vyjasněna souvislost těchto transformací s řešením jisté nelineární diferenciální rovnice třetího řádu a byly odkryty hluboké algebraické zákonitosti v této třídě transformací. Tento jednotící přístup k lineárním diferenciálním rovnicím druhého řádu umožnil řešit celou řadu speciálních problémů. Za vytvoření této teorie byl poctěn Státní cenou Klementa Gottwalda v r. 1968 akademik O. Borůvka. V poslední době byla teorie globálních transformací rozšířena na lineární diferenciální rovnice n-tého řádu.

Oddělení parciálních diferenciálních rovnic se v ústavu konstituovalo roku 1955. Problematika, jíž se oddělení zabývalo, byla v úzké souvislosti s obecnou mechanikou kontinua a někdy i se speciálními problémy technického charakteru (např. vývin tepla při stavbě přehrady). Velká pozornost byla věnována numerickým metodám, jak o tom bude ještě řeč níže. Na konci padesátých let se od tohoto oddělení oddělila skupina pracovníků, jež si za svůj hlavní cíl kladla soustavné vyšetřování především rovnic eliptického a parabolického typu. Z počátku byly studovány především kvalitativní vlastnosti řešení lineárních rovnic. Hlavní pozornost byla věnována tzv. zobecněným (slabým) řešením, která jsou z fyzikálního hlediska přirozenější než řešení klasická, i když vyžadují náročnější funkcionálně-analytický aparát. Těžištěm činnosti této skupiny byl (a vlastně dosud je) výzkum rovnic eliptického typu. Jde o tyto problémy: rozvíjení teorie slabých řešení, a to pro rovnice i pro soustavy rovnic, aplikace této teorie na konkrétní úlohy (především z teorie pružnosti), zkoumání funkcionálních prostorů, souvisejících se zobecněnými řešeními, a konečně podrobné zkoumání regularity slabých řešení (což souvisí velice úzce s devatenáctým Hilbertovým problémem). Shrnutí výsledků dosažených v teorii lineárních eliptických rovnic představuje monografie J. Nečase *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques* (Academia, Praha, 1967).

Od roku 1965 se těžiště bádání přesunuje na nelineární eliptické rovnice. Jde především o systematické vyšetřování moderních metod řešení těchto rovnic, založených na hlubokých výsledcích z funkcionální analýzy (variační metoda, metoda monotónních operátorů). Předmětem zkoumání nebyly jen konkrétní rovnice; ve vší obecnosti byly vyšetřovány obecné nelináerní operátory, podrobně byly popsány jejich spektrální vlastnosti a v posledních letech byla nemalá pozornost věnována i aktuální problematice tzv. variačních nerovnic. Lze říci, že v oboru nelineárních operátorových rovnic vznikla v ČSSR mezinárodně uznávaná škola, která vyvíjí činnost především v Matematickém ústavu ČSAV a na matematicko-fyzikální fakultě Karlovy university. Jisté shrnutí výsledků představuje monografie *Spectral analysis of nonlinear operators* (Lectures Notes in Mathematics No. 346, Springer Verlag 1973) autorů S. Fučíka, J. Nečase, J. Součka a V. Součka.

Důležitým aparátem v teorii parciálních diferenciálních rovnic je teorie funkčních prostorů. V této problematice bylo v oddělení dosaženo významných výsledků především při zavádění nových prostorů (váhových, anisotropních apod.) a při jejich užití pro řešení okrajových úloh.

Od roku 1965 se v oddělení také systematicky studuje teorie potenciálu. Významných výsledků bylo dosaženo při vyšetřování okrajového chování potenciálů v souvislosti s jejich aplikacemi na rovnice matematické fyziky i v abstraktní teorii harmonických prostorů. Značná pozornost byla věnována vyšetřování vlivu geometrické struktury v oblasti na chování potenciálů a jejich aplikabilitě na řešení okrajových úloh eliptického i parabolického typu. Tato problematika je studována v semináři, na jehož práci se podstatně podílejí rovněž pracovníci vysokých škol, zejména matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university.

V rámci oddělení obyčejných diferenciálních rovnic byla na začátku šedesátých let studována existence periodických řešení lineární i slabě nelineární vlnové rovnice. S přibývajícím počtem pracovníků, zabývajících se touto tématikou, vznikla nakonec samostatná skupina, jež se později stala součástí oddělení parciálních diferenciálních rovnic. Tato skupina soustavně vyšetřila existenci periodických řešení všech základních typů rovnic matematické fyziky (rovnice vlnové, telegrafní, difúzní, rovnice tyče, desky, atd.). Postupně bylo zkoumáno užití rozličných metod (metoda Poincarého, Günzlerova, Fickenova-Fleischmannova aj.) a různé modifikace metody Fourierovy a hodnocena jejich vlastnost v problémech lineárních i slabě nelineárních. Velká pozornost byla věnována resonančním případům, (tj. případům, kdy perioda „vnějších sil" je v racionálním poměru k vlastním kmitům limitní rovnice), jež zpravidla vedou na řešení obtížných silně nelineárních úloh. Mnoho výsledků, platných pro shora uvedené speciální typy rovnice, se podařilo přenést na abstraktní diferenciální rovnice typu

$$u' + Au = g + \varepsilon F(u)\,, \tag{1}$$

$$u'' + Au = g + \varepsilon F(u)\,, \tag{2}$$

$$u'' + (\alpha + \beta A)\,u' + Au = g + \varepsilon F(u)\,, \tag{3}$$

kde A je neohraničený lineární operátor v Banachově prostoru a F je obecně nelineární operátor „podřízený" operátoru A. Dosažené výsledky byly shrnuty do rozsáhlé připravované monografie o periodických řešeních parciálních diferenciálních rovnic, na níž pracovala většina členů skupiny. Kromě řešení periodických byla pro obdobné problémy vyšetřována i existence řešení skoroperiodických. Bylo zde dosaženo významných výsledků, a to často na základě hlubokých vět z funkcionální analýzy. Studium markovovských procesů, zejména procesů difúzních, dalo v padesátých letech podnět ke studiu teorie semigrup operátorů, která úzce souvisí s teorií počátečního problému pro rovnici (1) (pro $g = 0$ a $\varepsilon = 0$). Zároveň s touto teorií byla v šedesátých letech vypracována teorie „kosinových" funkcí, která úzce souvisí s počátečním problémem pro rovnici (2) (pro $g = 0$ a $\varepsilon = 0$). V posledních letech je studována korektnost a stabilita počátečního problému pro rovnici n-tého řádu

$$(4) \qquad u^{(n)}(t) + A_1 u^{(n-1)}(t) + \ldots + A_n u(t) = 0 ,$$

kde $A_1, \ldots, A_n$ jsou neohraničené operátory.

Při rozdělení původního oddělení parciálních diferenciálních rovnic počátkem šedesátých let vzniklo oddělení konstruktivních metod řešení diferenciálních rovnic. Již od založení ústavu však probíhal výzkum v oblasti aplikací matematiky a numerického řešení diferenciálních rovnic. V následujícím uvádíme i tyto výsledky. V padesátých letech, po založení ústavu, se v oddělení řešily matematické problémy, spojené s výstavbou vodního díla Orlík. Pro urychlení výstavby se uvažovaly dvě varianty, a to stavba ve vysokých pracovních vrstvách a za druhé umělé chlazení vodou proudící v trubkách, uložených v betonovém masivu. Beton při tvrdnutí vyvíjí dosti značné množství tepla a bylo nutno posoudit nebezpečí vzniku trhlin v důsledku tohoto procesu. Původním úmyslem bylo aplikovat již dříve rozvíjenou matematickou teorii rovinné pružnosti na základě teorie funkcí komplexní proměnné. Problematika se však ukázala být velmi rozsáhlou a vedla v podstatě ke studiu eliptických rovnic zejména vyšších řádů (biharmonické ronice) a parabolických rovnic (rovnice pro vedení tepla) včetně metod jejich numerického řešení. Přitom bylo v některých případech nutno uvažovat i nelineární vlivy, které vedly k formulaci a studiu speciálních integrodiferenciálních rovnic. V těchto souvislostech se začínaly pěstovat variační metody řešení parciálních diferenciálních rovnic. V oblasti numerického řešení zmíněných typů rovnic se rozvíjela metoda sítí. Tento velký komplex problémů, na němž práce skončila koncem padesátých let, dal vznik i několika kandidátským pracím a určil i nadále po značnou dobu tématické zaměření práce.

Dalším důležitým faktorem, který ovlivnil volbu problematiky, byl příchod samočinných počítačů. Část poslední fáze výpočtů, souvisejících s vodním dílem Orlík, byla prováděna, zároveň ještě s rozsáhlými výpočty na stolních kalkulačkách, na počítači URAL I. V pozdějším období, začátkem šedesátých let, bylo dosaženo zajímavých výsledků při vyšetřování závislosti řešení okrajových úloh pro eliptické rovnice na malé změně definiční oblasti. Tato problematika je totiž důležitá z hlediska aplikací i numerického řešení. Dalších výsledků bylo dosaženo při vyšetřování chování řešení při zmenšování jednoho rozměru oblasti. Jiným zajímavým výsledkem bylo vybudování teorie diskrétní Fourierovy transformace. Této metody bylo použito k řešení nekonečných soustav algebraických rovnic, vznikajících v teorii pružnosti. Kromě toho byla tímto aparátem studována problematika dislokací v molekulární mříži, které slouží jako model pro výklad pružného chování materiálů.

Od poloviny šedesátých let, v podstatě až dodnes, ovlivňuje zaměření a práci oddělení problematika numerického řešení diferenciálních rovnic na počítačích a problematika numerických výpočtů vůbec. V této době přicházejí i mladí pracovníci, jejichž studium bylo zaměřeno na využívání počítačů. Výzkum v tomto období je charakterizován studiem dvou velkých problémů: numerické stability a optimalizace. Příchod problematiky numerické stability s výkonnými počítači byl zcela přirozený. Velké množství prováděných operací nese sebou nebezpečí ovlivnění, případně i úplného znehodnocení výpočtu zaokrouhlovacími chybami. Pro studium této problematiky při numerickém řešení diferenciálních rovnic byla vybudována teorie numerických procesů. Výpočet je zde chápán jako jeden celek, tj. diskrétní verze původního spojitého problému i metoda jeho řešení se považují za numerický proces, jehož závislost na diskretizačním parametru se vyšetřuje. Při tomto studiu bylo nutno upřesnit některé dřívější názory na problematiku zaokrouhlovacích chyb. Výsledky, v této oblasti dosažené, byly shrnuty v knižní publikaci. Problematika optimalizace vycházela z prací S. L. Soboleva o kvadraturních vzorcích, ale svým pojetím univerzální aproximace i aplikacemi na výpočet obecnějších funkcionálů přispěla podstatnou měrou k rozvoji této teorie. I zde stimulujícím faktorem byla možnost získat výsledky, které by byly užitečné při aplikaci pro výpočty na počítači.

Koncem šedesátých let se objevila problematika metody přesunu podmínek, která se rozvinula začátkem sedmdesátých let. Tato metoda, již dříve ve speciálních případech aplikovaná, je metoda numericky stabilního převodu okrajových úloh na počáteční úlohy (na rozdíl od metody střelby). Metoda přesunu podmínek byla vypracována pro velmi obecný okrajový problém pro lineární soustavu obyčejných diferenciálních rovnic s vnitřními a přechodovými podmínkami. Podrobně byla studována numerická stabilita metody a vypracován příslušný výpočetní algoritmus. Pozornost byla věnována i matematickým modelům v mechanice tuhé fáze. Jistá nelineární evoluční úloha z teorie vazkopružných těles byla řešena v souvislosti s návrhem teplotního řízení při žíhání nádoby jaderného reaktoru. Výsledky byly realizovány při výstavbě jaderné elektrárny A 1 v Jaslovských Bohunicích.

V tomto období ve světovém měřítku zároveň začíná rozvoj matematické teorie metody konečných prvků. K rozvoji této metody přispěla řada prací, které rozpracovávají užití duálních a smíšených variačních principů. Tato problematika zasahuje až do současnosti, kdy je velká pozornost věnována úlohám s jednostrannými okrajovými podmínkami i úlohám kontaktním. Tyto úlohy spadají do obecné problematiky variačních nerovnic. Teoretických výsledků bylo použito při výstavbě pražského metra a ke konstrukci turbin. Kromě toho byla vypracována metodika konstrukce aproximačních funkcí v metodě konečných prvků, které dávají řád aproximace, závislý jen na aproximované funkci.

V posledním období se pěstuje problematika numerického řešení evolučních problémů. Na základě vypracované silně implicitní metody bylo dosaženo užitečných výsledků pro numerické řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic s velmi rozdílnými časovými konstantami (stiff systémy) a pro numerické řešení parabolických rovnic. Tato metodika umožnila zkonstruovat metody s libovolným řádem aproximace vzhledem k časovému kroku dělení. Tato práce se nyní dále rozvíjí při aplikaci metody na abstraktní rovnice. V oblasti aplikací se řeší problematika chlazení transformátorů s velkým výkonem.

Algebraické numerické metody se v Matematickém ústavu ČSAV pěstovaly již od doby jeho založení. Podněty ze semináře V. Knichala vedly k prvnímu výsledkům. Ustavila se malá skupina pracovníků, která se v r. 1955 stala oddělením numerických metod. Bylo dosaženo výsledků o řešení polynomiální rovnice, hlavní náplní však byla, a zčásti je dosud, problematika iteračních metod a s ní spojené otázky rychlosti konvergence. Významných výsledků bylo dosaženo ve vyšetřování Gaussovy-Seidelovy metody pro řešení soustav lineárních rovnic určitého typu, později i o řešení soustav nelineárních rovnic, problému vlastních čísel atd. Byla vybudována teorie zobecněných (vektorových) norem a rozvinuta teorie M-matic (matic třídy K). Obou směrů bylo použito k získání velmi silných odhadů vlastních čísel matic.

Další směr, který upoutal a dosud poutá pozornost pracovníků oddělení, byla problematika souvislosti kombinatorické struktury nenulových prvků matice s některými charakteristikami matice. Zde se uplatnila terminologie a metody teorie grafů, ostatně již dříve použité ke studiu simplexů v n-rozměrném euklidovském prostoru. Tak bylo nalezeno vyjádření hlavních minorů matice pomocí ohodnoceného grafu matice, vyjádření struktury inverzní matice k matici dané kombinatorické struktury a struktury matic, které vznikají při aplikaci eliminační metody. V poslední době je v této souvislosti věnována pozornost lineárním problémům s velkou řídkou maticí, tj. s maticí, která má jen malé procento nenulových prvků. Takové problémy se vyskytují v ekonomii, ve stavebnictví, v jaderné technice i jinde.

Řada výsledků se týkala speciálních tříd matic, maticových nerovností a nově zavedených maticových funkcí (např. zobecněných složených matic). Zejména byly vyšetřovány nezáporné matice, jejich spektrální vlastnosti, jakož i zobecnění těchto matic na operátory zachovávající konvexní kužel.

Důležitých výsledků bylo dosaženo i v samotné teorii grafů. Pracovalo se zde mj. v problematice koster grafů a vnořování grafů do grafů speciálního typu (např. do grafu hran n-rozměrné krychle).

Součástí oddělení numerických metod je také skupina matematické logiky. Matematická logika měla v Matematickém ústavu ČSAV vynikajícího představitele v předčasně zesnulém doc. L. Riegrovi, který pracoval v intuicionistickém výrokovém počtu, v algebraických metodách logiky a v axiomatické teorii množin. Jeho žáci navázali zejména na výzkum v teorii množin a podíleli se na studiu metamatematických vlastností teorie množin (důkazy nezávislosti různých tvrzení na axiomech teorie množin) a na vybudování systémů teorií množin zobecňujících nebo nahrazujících.

Důležitý byl rovněž rozvoj logických aspektů informatiky (Computer Science) a obecných matematických základů této disciplíny. Byly studovány formální jazyky a rozvinuta obecná teorie algoritmických struktur. Jako aplikace matematické logiky v informatice byly vyvinuty některé metody automatické formace hypotéz.

Někteří pracovníci dnešního oddělení numerických metod, teorie grafů a matematické logiky mají hlavní podíl na spolupráci MÚ ČSAV s n. p. Aritma. V minulých letech byl zde vypracován překladač programovacího jazyka Fortran pro počítač

A 1010, v současné době se pracuje na problematice programového vybavení nového výpočetního systému KA 10 pro práci s databázemi.

Funkcionální analýzou se zabývala malá skupina pracovníků již v Ústředním ústavu matematickém. V padesátých letech se začal pravidelně scházet seminář z funkcionální analýzy, později se konstituovalo oddělení topologie a funkcionální analýzy; od něj se v r. 1977 oddělila skupina topologie. Od samého počátku se kladl velký důraz na souvislosti s numerickou matematikou. Vznikla celá řada prací ve spolupráci s oddělením numerických metod, věnovaných otázkám lineární algebry, důležitým pro aplikace, zejména v numerické matematice, ale i v jiných oborech, jako je např. teorie pravděpodobností nebo matematická ekonomie. Jejich význam však zasahuje i dále, např. do navrhování obvodů s transistory. Zároveň se studovaly některé základní souvislosti úplnosti topologických lineárních prostorů s otevřeností lineárních zobrazení. Jedním z významných výsledků těchto vyšetřování, je charakterizace prvků úplného obalu lokálně konvexního prostoru, kterého se u nás dosáhlo nezávisle na francouzském badateli A. GROTHENDIECKOVI.

V téže době vznikla myšlenka studia doplňování topologických prostorů formálními lineárními kombinacemi bodů. Uzávěr takto vzniklého lineárního prostoru lze potom interpretovat jako jistou množinu měr. Takové lineární kombinace lze přirozeným způsobem považovat za lineární funkcionály na prostoru spojitých funkcí, takže daný topologický prostor S je vnořen do duálního prostoru $C(S)'$. Vyvrcholením těchto vyšetřování je věta, která podává nutné a postačující podmínky pro to, aby separátně spojitá funkce na kartézském součinu dvou topologických prostorů $S \times T$ měla rozšíření na $C(S)' \times C(T)'$, které je separátně spojitou bilineární formou. Tato věta obsahuje jako speciální případ obě klasické věty o slabé kompaktnosti, větu Eberleinovu i větu Krejnovu o slabé kompaktnosti konvexního obalu. V interpretaci teorie her jde v podstatě o to, aby příslušná funkce, definovaná jen na čistých strategiích, měla separátně spojité bilineární rozšíření na smíšené strategie. Za výsledky v teorii lineárních prostorů byla udělena Státní cena Klementa Gottwalda Prof. V. PTÁKOVI.

Dalším velikým celkem, který úzce souvisí s numerickou matematikou, jsou otázky konvergence iteračních procesů. V této souvislosti vznikla myšlenka tzv. kritického exponentu. V podstatě jde o tuto otázku: pro řadu iteračních procesů jsou známy teoretické podmínky, jejichž splnění zaručuje konvergenci procesu. Jejich verifikace může však být velmi obtížná, dokonce někdy obtížnější než řešení samého problému. Myšlenka kritického exponentu spočívá, zhruba řečeno, v tomto: Jestliže kritický exponent uvažovaného procesu je roven číslu q, znamená to, že lze o konvergenci tohoto procesu rozhodnout na základě chování prvních q kroků, aniž se verifikují jakékoli podmínky konvergence. Pozdější výsledky umožňují dokonce získat nejen kvalitativní výsledek, zda metoda konverguje, ale dokonce i kvantitativní informaci o rychlosti konvergence.

Měření rychlosti konvergence iteračních procesů je předmětem dalšího rozsáhlého souboru prací, věnovaného mírám konvergence.

Byly položeny základy k nové teorii existenčních vět iterativního typu, tzv. metoda spojité matematické indukce, která umožňuje vyšetřování procesu převést na řešení jistých systémů funkcionálních nerovností. Zejména se touto metodou podařilo poprvé v historii získat odhady pro Newtonův proces ostré v každém kroku.

V šedesátých letech se oddělení rozrostlo o některé mladší pracovníky; z jejich příspěvků vynikly zejména cenné práce z teorie lineárních operátorů a jejich aplikací; v novější době vznikly některé práce z nelineární analýzy, z nich je nutno jmenovat práce týkající se problémů podrelaxovaných metod a tzv. malých dělitelů, které zobecňují výsledky Kolmogorova a Arnolda. Mezi cenné aplikace metod funkcionální analýzy patří též studium rozpadu nestabilních částic (ve spolupráci s Fyzikálním ústavem ČSAV).

Také v teorii pravděpodobnosti a v matematické statistice se v Matematickém ústavu ČSAV pracuje od počátku jeho existence; ostatně již v Ústředním ústavu matematickém byla nevelká skupina pracovníků, která se zabývala především aplikacemi metod matematické statistiky.

Tato tradice úzké spolupráce s praxí a s aplikovaným výzkumem, zvláště v zemědělských, biologických a lékařských vědách, trvá dodnes. Pohled na dlouholetou činnost v tomto směru a její konkrétní výsledky nás přesvědčují o účelnosti a účinnosti těchto aplikací. Pracovníci Matematického ústavu se tu podíleli na rozsáhlých průzkumech antropologických, na výzkumu kazivosti zubů, na řadě šlechtitelských výzkumů v zemědělské rostlinné i živočišné výrobě.

Nešlo ovšem jen o pouhé použití známých metod. Pro účely hodnocení výsledků složitých experimentů, např. polních pokusů, byly vypracovány nové modely a postupy, mj. metoda vyloučení půdních trendů v blokových pokusech, včetně odvození nutných a postačujících podmínek existence řešení pro příslušný matematický model.

V souvislosti s aplikacemi matematické statistiky v zemědělství má zvláštní význam genetický seminář, v němž se mnoho let zkoumala problematika genetiky populací; účast pracovníků Matematického ústavu na tomto semináři byla podstatná.

Plodná spolupráce s praxí ovlivnila také práci v matematicko-statistické teorii. Za hlavní směry výzkumné činnosti Matematického ústavu ČSAV v tomto oboru lze označit jednak teorii výběrových šetření, zejména teorii výběru z konečné populace, kde byla vykonána skutečně průkopnická práce, jednak teorii neparametrických testů, kde byla hlavně vybudována asymptotická teorie požadovaných testů. Získané výsledky, např. odvození nutných a postačujících podmínek pro asymptotickou normalitu požadovaných testů, přitom dosáhly opravdu světového uznání. V současné době se výzkumná činnost v Matematickém ústavu orientuje na tématiku lineárních modelů a mnohorozměrných statistických problémů.

Druhou součástí práce v oddělení je výzkum ve vlastní teorii pravděpodobnosti. Také zde lze vyčlenit tři hlavní směry, které tu byly v průběhu uplynulého čtvrtstoletí pěstovány.

Poměrně nejstálejším byl směr, který se — v podstatě po celou dobu existence ústavu — orientoval na topologické základy teorie pravděpodobnosti a teorie míry a který nakonec vyústil v relativně samostatné studium tzv. konvergenčních struktur.

Druhou velkou oblastí teorie pravděpodobnosti, k níž pracovníci Matematického ústavu ČSAV přispívali, je teorie stochastických procesů, zejména procesů markovovských. Byly podrobně studovány otázky podmíněných limitních pravděpodobností za předpokladu, že proces zůstává v určité množině stavů, teorie větvících se procesů se spojitým systémem stavů a otázky klasifikace a ergodických vlastností Markovových řetězců s obecným systémem stavů. Zde bylo mj. dokázáno, že u nerozložitelných Markovových řetězců lze provést obdobnou klasifikaci jako v klasickém případě, ale jejich spektrální vlastnosti se výrazně liší.

K tomuto směru lze připojit též studium některých aplikovaných partií teorie stochastických procesů, např. teorie hromadné obsluhy, kde jsou markovovské procesy hlavním pracovním nástrojem.

Třetí významný směr práce tohoto oddělení Matematického ústavu leží na pomezí teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Tvoří jej výzkum statistických problémů ve stochastických procesech, jednak gaussovských, jednak integrovatelných s kvadrátem. Zde byla originálním způsobem vybudována teorie obecných regresních odhadů. Byly odvozeny jak ryze teoretické výsledky, tak i metody vhodné pro konkrétní výpočty.

Vedle těchto hlavních směrů vznikla v Matematickém ústavu ČSAV řada prací, orientovaných k jednotlivým problémům teorie pravděpodobnosti. Za zvláštní zmínku stojí především práce o podmíněných pravděpodobnostech a podmíněných středních hodnotách.

Mezi topologická témata, na která se od r. 1962 zaměřovala pozornost skupiny topologů (nyní oddělení základních matematických struktur) patřilo

(i) zkoumání obecných struktur spojitosti,

(ii) zkoumání filtrů, a to mj. v souvislosti s problematikou klasifikace nespojitých funkcí.

Ve směru (i) byly především zkoumány merotopické prostory, jež zahrnují jako speciální případ prostory topologické a uniformní (merotopické prostory se fakticky vyskytly již u E. Čecha, jenž však je nezkoumal jako zvláštní druh prostorů). Byly získány důležité obecné poznatky o těchto prostorech, jež, jak se ukázalo, lze dostat jako kvocienty uniformních prostorů. Mj. byla nalezena jednoduchá „universální" třída těchto prostorů, tj. taková třída, kde každý úplně regulární merotopický prostor lze vnořit do vhodného prostoru z této třídy, a bylo dokázáno, že — při omezení na jistou třídu merotopických prostorů — lze přirozeným způsobem zavést prostory zobrazení (což, jak známo, nejde pro topologické prostory). Ve směru (ii) byla mj. dosti podrobně zkoumána konvergence podle filtrů (i jiné druhy konvergence), což je ostatně pojítkem obou zmíněných tématických směrů. Na základě filtrové konvergence byla podána úplná klasifikace těch nespojitých funkcí, jež jsou společně dosažitelné spojitými fukcemi; tato klasifikace zahrnuje klasické Baireovo třídění. V této souvislosti byly též zkoumány součiny filtrů a byly konstruovány součinově idempotentní filtry, což mj. poskytuje jednotnou proceduru pro vytváření všech Baireových funkcí.

Od roku 1965 se soustředila pozornost mimo jiné též na tzv. separabilní deskriptivní teorii množin a na teorii ultrafiltrů.

Za práce v deskriptivní teorii množin byla v roce 1972 RNDr. Z. FROLÍKOVI, DrSc,, udělena Státní cena Klementa Gottwalda. Bylo např. dokázáno, že bairovsky měřitelné zobrazení analytického (k-analytického v terminologii G. Choqueta) do metrického prostoru lze bez újmy na obecnosti pokládat za spojité, což je silné tvrzení, které má aplikace např. na projektivní limity měr.

V teorii ultrafiltrů byla zavedena a studována dvě základní uspořádání R-K a R-F a problém nehomogenosti extremálně nesouvislých kompaktních prostorů byl redukován na otázku linearity uspořádání R-F.

Od roku 1968 byla značná pozornost věnována studiu uniformních struktur motivovaná aplikacemi v neseparabilní teorii množin a v teorii míry (v návaznosti na práce RAJKOVA a LECAMA byly studovány tzv. uniformní míry a volné uniformní míry; tato teorie obsahuje velkou část topologické teorie míry a cylindrické míry). V obou zaměřeních bylo dosaženo řady hlubokých výsledků. Ve vlastní teorii uniformních prostorů bylo např. dokázáno, že lokálně jemné prostory jsou subjemné, což řešilo jeden z centrálních problémů v monografii J. ISBELLA. Vyšetřování uniformních měr bylo nosným programem pro studium teorie míry z nejrůznějších hledisek; v poslední době se objevily první výsledky v deskriptivní kvantové teorii pole.

V posledních letech se začaly zkoumat otázky, související s aplikacemi matematiky v psychologických a biologických oborech, a to

(i) po stránce matematické tématiky motivované problémy zmíněných oborů,

(ii) po stránce matematického modelování některých jevů z oblasti psychologie a lékařství.

Ve směru (i) byly získány některé věty o soustavách prahově lineárních transformací a jejich souvislostech s klasifikací nespojitých funkcí, v poslední době pak věty o charakteristikách konečných metrizovaných pravděpodobnostních polí (v souvislosti s teorií informace). Ve směru (ii) se nyní na konkrétním materiálu zkoumá problematika modelů onemocnění, v jejichž průběhu se vyskytují jak prudké oscilace, tak i povlovná deteriorace.

V roce 1970 vznikla pobočka Matematického ústavu ČSAV v Brně. Má sice jen malý počet pracovníků, vyvíjí však bohatou činnost. Kromě problematiky obyčejných diferenciálních rovnic, o níž již byla řeč, se pěstuje diferenciální geometrie (teorie jetů a prostorů s konexí) a algebraická lingvistika. V obou těchto disciplinách bylo dosaženo hlubokých výsledků.

Součástí Matematického ústavu ČSAV je též Kabinet pro modernizaci vyučování matematice. Vznikl v roce 1969 přičleněním matematické části tehdejšího Kabinetu pro modernizaci vyučování matematice a fyzice k Matematickému ústavu ČSAV. Kabinet provádí základní výzkum ve vyučování matematice. Spolupracuje s třinácti experimentálními školami (10 základními, 3 gymnázii) a se šesti vysokoškolskými fakultami. Byly vypracovány pokusné osnovy a učební texty pro všechny ročníky ZDŠ i gymnázií. Zkušeností získaných při vyučování na experimentálních školách se využívá při tvorbě osnov a učebnic pro ZDŠ a gymnázia.

Práce Kabinetu tématicky navazuje na práci oddělení elementální matematiky, které bylo v Matematickém ústavu ČSAV v letech 1952—1964. Toto oddělení mělo významnou úlohu ve dvou směrech. Především přispělo prací na poli elementární a školské matematiky k zvýšení úrovně školské matematiky a zájmu o ni jak v Matematickém ústavu, tak i v širší veřejnosti. Pracovníku oddělení doc. J. Holubářovi byla udělena Komenského medaile. Dále pak mělo toto oddělení hlavní podíl na organizaci matematické olympiády. Tato již všeobecně známá soutěž byla založena z podnětu akademika E. Čecha v roce 1951 a od svého vzniku je Matematický ústav ČSAV jejím spolupořadatelem.

Vědecko-výzkumnou činností se zdaleka nevyčerpává práce ústavu. Matematický ústav se také podílí na zpracování a kontrole matematických úkolů státních programů základního výzkumu a na organizaci vědecké práce v matematice vůbec. Je významným školícím pracovištěm, na kterém vyrostlo a vyrůstá mnoho mladých vědeckých pracovníků československých i zahraničních. Věnuje také velkou pozornost mezinárodní vědecké spolupráci. Uzavřel celou řadu dohod s matematickými pracovišti zemí RVHP, pravidelně pořádá „Pražská topologická symposia — TOPOSYM" a „Porady československých a sovětských matematiků", společně s jinými matematickými pracovišti v ČSSR pak „Československé konference o diferenciálních rovnicích a jejich aplikacích — EQUADIFF", „Československá symposia o teorii grafů", konference „Základní problémy numerické matematiky" a mnoho dalších konferencí a symposií.

Matematický ústav ČSAV vydává časopisy *Czechoslovak Mathematical Journal* a *Časopis pro pěstování matematiky*, které jsou pokračováním původního Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky, vydávaného Jednotou československých matematiků a fysiků, a časopis *Aplikace matematiky*, založený roku 1955.

Knihovna Matematického ústavu, do níž byly v roce 1951 zařazeny knihy a časopisy z bývalé knihovny JČSMF a která je jednou z největších odborných matematických knihoven v ČSSR, slouží celé československé vědecké veřejnosti.

Uplynulé čtvrtstoletí bylo obdobím hlubokých přeměn celé naší společnosti. Součástí těchto přeměn byl i velký růst vědecko-výzkumné základny, který odpovídá stále rostoucí úloze vědy. Tento růst by nebyl možný bez všestranné a velkorysé podpory, kterou naše stranické a státní orgány trvale věnují rozvoji vědy.

Dokumentovalo to i jednání XV. sjezdu KSČ, kde byla jak v hlavní zprávě generálního tajemníka s. Gustáva Husáka tak i v diskusním vystoupení předsedy Československé akademie věd s. Jaroslava Kožešníka věnována pozornost problematice základního výzkumu, jeho efektivnosti a uplatnění v praxi i potřebě jeho dalšího rozvoje.

Závěry XV. sjezdu KSČ byly předmětem jednání vedoucích orgánů ČSAV, které je rozpracovaly do konkrétních úkolů pro vědecká pracoviště. Pracovníci Matematického ústavu, jsouce si vědomi toho, jak skvělé podmínky pro rozkvět vědy poskytuje socialistické zřízení, soustředí všechny své síly a schopnosti k tomu, aby se ctí splnili náročné úkoly, jež před naši matematickou vědu klade výstavba rozvinuté socialistické společnosti.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

ON CONDITIONS ON RIGHT HAND SIDES OF DIFFERENTIAL RELATIONS

JIŘÍ JARNÍK and JAROSLAV KURZWEIL, Praha

(Received April 25, 1977)

0. INTRODUCTION

We are interested in the solutions of

$$\dot{x} \in F(t, x)\,, \tag{0.1}$$

which are locally absolutely continuous and fulfil (0.1) almost everywhere. Let $\mathscr{K}_n$ be the set of nonempty convex compact subsets of R^n, $G \subset R \times R^n$ and assume that

$$F : G \to \mathscr{K}_n\,, \tag{0.2}$$

$$\text{for almost all } t \text{ the map } F(t, \cdot) \text{ is upper semicontinuous} \tag{0.3}$$

(of course, $F(t, \cdot)(x) = F(t, x)$ if the right-hand side is defined). In order to guarantee the existence of solutions, some conditions are to be added. For example, analogously to the ordinary differential equations it may be assumed that

$$\text{for every } x \text{ the map } F(\cdot, x) \text{ is measurable}\,, \tag{0.4}$$

$$F \text{ is bounded (in some sense)} \tag{0.5}$$

or (0.4) may be replaced by a more general selection property (cf. [1]).

The map F may fulfil (0.2), (0.3) and (0.4) and at the same time behave rather unreasonably as a function of the pair of variables (t, x); an example is given in Section 4. Nevertheless, if F fulfils (0.3), then (0.1) may be replaced without loss of generality by

$$\dot{x} \in \hat{F}(t, x) \tag{0.6}$$

where $\hat{F}$ is in a certain sense regular as a function of the pair (t, x).

Let $\mathscr{K}_n^0 = \mathscr{K}_n \cup \{\emptyset\}$, let Z be a metric space, $H : Z \to \mathscr{K}_n^0$. H is called upper semicontinuous, if for every open set $U \subset R^n$ the set $\{z \in Z \mid H(z) \subset U\}$ is open.

(This is equivalent to the usual definition if $H : Z \to \mathscr{K}_n$.) If $S \subset Z$, let the map $H|_S$: $S \to \mathscr{K}_n^0$ be defined by $H|_S(z) = H(z)$. Denote by $m(B)$ the Lebesgue measure of a set $B \subset R$. The above statement is made precise in the following

0.1. Theorem. *Let F fulfil (0.2), (0.3). Then there exists such an $\hat{F} : G \to \mathscr{K}_n^0$ that*

(0.7) *to every $\varepsilon > 0$ there exists such a measurable set $A_\varepsilon \subset R$ that $m(R - A_\varepsilon) < \varepsilon$ and that $\hat{F}|_{G \cap (A_\varepsilon \times R^n)}$ is upper semicontinuous,*

(0.8) $$\hat{F}(t, x) \subset F(t, x) \quad \textit{for} \quad (t, x) \in G\,,$$

(0.9) *every solution of (0.1) is simultaneously a solution of (0.6).*

It follows from (0.8) that every solution of (0.6) is simultaneously a solution of (0.1), so that the sets of solutions of both the equations are identical. Moreover, if the existence theorem holds for (0.1), then $m(B) = 0$ by Theorem 3.1, B being the set of such $t \in R$ that $(t, x) \in G$, $\hat{F}(t, x) = \emptyset$ for some x. Without loss of generality we may change F on $G \cap (B \times R^n)$ and obtain that $\hat{F}(t, x) \neq \emptyset$ for $(t, x) \in G$ ((0.7)–(0.9) being in force simultaneously).

Theorem 0.1 is an immediate consequence of the following more general theorem, which is not concerned with differential relations but with a selection problem. Let X be a separable metric space.

0.2. Theorem. *Assume that*

(0.10) $$G \subset R \times X\,, \quad F : G \to \mathscr{K}_n$$

and that (0.3) holds. Then there exists a function $\hat{F} : G \to \mathscr{K}_n^0$ satisfying (0.8),

(0.11) *to every $\varepsilon > 0$ there is a measurable set $A_\varepsilon \subset R$ such that $m(R - A_\varepsilon) < \varepsilon$ and the function $\hat{F}|_{G \cap (A_\varepsilon \times X)}$ is upper semicontinuous,*

(0.12) *if $I \subset R$ is measurable, $u : I \to X$ measurable, $(t, u(t)) \in G$ for $t \in I$, $v : I \to R^n$ measurable, $v(t) \in F(t, u(t))$ for almost all $t \in I$, then $v(t) \in \hat{F}(t, u(t))$ for almost all $t \in I$.*

Theorem 0.2 is proved in Section 1 (see Theorem 1.5). As u in Theorem 0.2 is required to be measurable (and not continuous) and X is a general separable metric space, Theorem 0.1 may be extended to differential relations the right-hand sides of which depend on the values of the solution x or its derivative $\dot{x}$ with deviated arguments or on the "portion" x_t of x, $x_t : [-1, 1] \to R^n$ being defined by $x_t(\tau) = x(t + \tau)$. These extensions of Theorem 0.1 are not described in more detail, the application of Theorem 0.2 being straightforward.

The conditions (0.7), (0.11) are analogous to that of Scorza-Dragoni which had been introduced for differential equations [2]. The same condition was used in [3] where the result by Scorza-Dragoni was extended to differential relations. The necessity of admitting $\hat{F}(t, x) = \emptyset$ is clear from the following example.

Let $M_i \subset R$, $i = 1, 2$ be non-measurable sets, $m^*(M_i) = 1$ (the asterisk denotes the outer measure), $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 \cup M_2 = (0, 1)$ and put $F(t, x) = \{f(t)\}$ where $f(t) = 1$ for $t \in M_1$, $f(t) = 0$ for $t \in M_2$. The condition (0.7) implies that $\hat{F}(\cdot, x)$ is measurable. However, with regard to (0.8) this is only possible if $\hat{F}(t, x) = \emptyset$ for $(t, x) \in G \cap (A \times R)$ where $G = (0, 1) \times \{0, 1\}$, $m(R - A) = 0$.

0.3. In Section 2, assuming that the metric space X is complete separable and that the set G is of type F_σ, we prove that the function $\hat{F}$ from 0.2 is unique in the following sense: If $\hat{F}_i : G \to \mathscr{K}_n^0$, $i = 1, 2$ fulfil the conditions (0.8), (0.11), (0.12) with $\hat{F}_i$ instead of $\hat{F}$, then there is a set $A \subset R$ such that $m(R - A) = 0$ and $\hat{F}_1(t, x) = \hat{F}_2(t, x)$ for $(t, x) \in G \cap (A \times X)$. (See Note 2.7.)

In Section 3 we prove a theorem which gives sufficient conditions that $\hat{F}(t, x) = \emptyset$ occurs only for t from a set of measure zero.

The results of Sections 1–3 may be extended to the case when X is a topological space with some additional properties; e.g. in Section 1 it is sufficient to assume that X is a topological space with a countable open basis.

0.4. In Section 4 the existence of such functions $F, Q : [0, 1] \times R \to \{\{0\}, [0, 1]\}$ is proved that $Q(t, x) = F(t, x + t)$ and that

(0.13) for every $t \in [0, 1]$ the set $\{x \mid F(t, x) = [0, 1]\}$ contains at most one point,

(0.14) for every $x \in R$ the set $\{t \mid F(t, x) = [0, 1]\}$ contains at most one point,

(0.15) for every $x \in [0, 1]$, the function $Q(\cdot, x)$ is not measurable on any interval $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta \leqq 1$.

By (0.13) and (0.14) F fulfils (0.3) and (0.4) but Q does not fulfil (0.4) by (0.15). For this result the authors are indebted to I. Vrkoč.

1.

1.1. Definition. Let X be a metric space, R the real line, $G \subset R \times X$. The metric in X is denoted by ϱ, the metric $\hat{\varrho}$ in $R \times X$ is given by $\hat{\varrho}((t_1, x_1), (t_2, x_2)) = \max\{|t_1 - t_2|, \varrho(x_1, x_2)\}$. Let $P(G)$ be the set of such $t \in R$ that $(t, x) \in G$ for some $x \in X$. $G(t, \cdot)$ denotes the set of such $x \in X$ that $(t, x) \in G$. The set of all $f : G \to R$ such that $f(t, \cdot)$ is upper semicontinuous for almost all t is denoted by $\mathscr{USC}_2(G \to R)$; the set of all $f : G \to R$ which satisfy the condition

(1.1) to every $\varepsilon > 0$ there is a measurable set $A_\varepsilon \subset R$ with $m(R - A_\varepsilon) < \varepsilon$ such that $f|_{G \cap (A_\varepsilon \times X)}$ is upper semicontinuous

is denoted by $\mathscr{SD}^*(G \to R)$.

1.2. Theorem. *Let X be separable, let $f \in \mathscr{U}\mathscr{S}\mathscr{C}_2(G \to R)$ have a finite range. Then there exists $\hat{f} \in \mathscr{S}\mathscr{D}^*(G \to R)$ so that*

(i) *$\hat{f}(t, x) \leqq f(t, x)$ for $(t, x) \in G \cap (A \times X)$ where $A \subset R$, $m(R - A) = 0$;*

(ii) *if $I \subset R$ is measurable, $u : I \to X$ measurable, $(t, u(t)) \in G$ for $t \in I$, $v : I \to R$ measurable and $v(t) \leqq f(t, u(t))$ almost everywhere (a.e.) in I, then $v(t) \leqq \leqq \hat{f}(t, u(t))$ a.e. in I.*

Proof. Without loss of generality we may assume that the set $P(G)$ is bounded. Let B be a subset of $P(G)$ such that $m(B) = 0$ and that $f(t, \cdot)$ is upper semicontinuous for $t \in I - B$. Let $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ be the values of the function f, $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$. Let us choose numbers β_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ so that

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 \ldots < \beta_{k-1} < \alpha_k < \beta_k .$$

It follows from the upper semicontinuity of $f(t, \cdot)$ that the sets

$$U_i(t) = \{x \mid f(t, x) < \beta_i\} , \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

are relatively open in $G(t, \cdot)$ for $t \in P(G) - B$. Let $\{V_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$ be a countable open basis of X and

$$D_{ji} = \{t \mid V_j \cap G(t, \cdot) \subset U_i(t)\} , \quad j = 1, 2, \ldots \quad i = 1, 2, \ldots, k .$$

If D_{ji} is measurable, we denote $D_{ji} = E_{ji}$; if not, let E_{ji} be a measurable set, $D_{ji} \subset \subset E_{ji}$, $m^*(D_{ji}) = m(E_{ji})$ (the asterisk denotes the outer measure). Obviously $0 \leqq m^*(D_{ji}) < \infty$, as $P(G)$ is bounded.

Let us put

$$\vartheta_{ji} = \begin{cases} \alpha_i & \text{for } (t, x) \in E_{ji} \times V_j , \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

and define

$$\hat{f}(t, x) = \inf_{i,j} \vartheta_{ji}(t, x) \qquad \text{for} \quad (t, x) \in G .$$

We shall prove (i). Let us assume that $(t, x) \in G \cap (C \times X)$, $C = P(G) - B$ and $f(t, x) = \alpha_i$. Then $x \in U_i(t)$, $U_i(t)$ is relatively open in $G(t, \cdot)$ and there exists a positive integer j such that $x \in V_j$, $V_j \cap G(t, \cdot) \subset U_i(t)$, i.e. $t \in D_{ji} \subset E_{ji}$. Hence $(t, x) \in \in E_{ji} \times V_j$ and $\vartheta_{ji}(t, x) = \alpha_i$,

$$\hat{f}(t, x) = \inf_{i,j} \vartheta_{ji}(t, x) \leqq \alpha_i = f(t, x)$$

and (i) holds.

Now let us prove (ii). To this aim assume that $u : I \to X$, $v : I \to R$ are measurable, $(t, u(t)) \in G$ for $t \in I$, $v(t) \leqq f(t, u(t))$ a.e. in I.

Let us denote

$$L_j = \{t \mid u(t) \in V_j\} , \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Then L_j are measurable sets. Let the indices i, j be fixed. Choose an arbitrary $t \in D_{ji} \cap L_j$. Then $u(t) \in V_j \cap G(t, \cdot) \subset U_i(t)$, hence $f(t, u(t)) < \beta_i$ and $v(t) \leqq \alpha_i$. Consequently, $D_{ji} \cap L_j \subset H_i$, where

$$H_i = \{t \mid v(t) \leqq \alpha_i\}.$$

Since E_{ji} was chosen to satisfy $m(E_{ji}) = m^*(D_{ji})$, we have evidently

$$m(E_{ji} \cap L_j) = m^*(D_{ji} \cap L_j). \tag{1.2}$$

Moreover, we have $D_{ji} \cap L_j \subset H_i$ and thus $m(E_{ji} \cap L_j - H_i) = m(E_{ji} \cap L_j) - m(E_{ji} \cap L_j \cap H_i) = m^*(D_{ji} \cap L_j) - m(E_{ji} \cap L_j \cap H_i) = m^*(D_{ji} \cap L_j \cap H_i) - m(E_{ji} \cap L_j \cap H_i) \leqq 0$ since $D_{ji} \subset E_{ji}$. This means that $v(t) \leqq \alpha_i$ a.e. in $E_{ji} \cap L_j$.

On the other hand, if $t \in I - L_j$, then $u(t) \notin V_j$ by definition, therefore $\vartheta_{ji}(t, u(t)) = \infty$. Hence the inequality $v(t) \leqq \vartheta_{ji}(t, u(t))$ holds in $I - N_{ji}$, $m(N_{ji}) = 0$. Putting $N = \bigcup_{i,j} N_{ji}$ we have $m(N) = 0$ and $v(t) \leqq \hat{f}(t, u(t))$ for $I - N$, which proves (ii).

It remains to show that $\hat{f} \in \mathcal{SD}^*(G \to R)$. Let i, j be fixed. Let us define

$$\hat{\vartheta}_{ji}(t) = \begin{cases} \alpha_i & \text{for } \ t \in E_{ji}, \\ \infty & \text{otherwise}. \end{cases}$$

Given $\varepsilon > 0$, find $A_\varepsilon^{ji} \subset R$, $m(R - A_\varepsilon^{ji}) < 2^{-(i+j)}\varepsilon$ so that $\hat{\vartheta}_{ji}$ is upper semicontinuous on A_ε^{ji}. (Such sets exist in virtue of Lusin's theorem.) Put $A_\varepsilon = \bigcup_{i,j} A_\varepsilon^{ji}$; then obviously $m(R - A_\varepsilon) < \varepsilon$. We have

$$\vartheta_{ji}(t, x) = \begin{cases} \hat{\vartheta}_{ji}(t) & \text{for } \ x \in V_j, \\ \infty & \text{otherwise}. \end{cases}$$

Since the sets V_j are open, it is easily seen that ϑ_{ij} are upper semicontinuous on $G \cap (A_\varepsilon \times X)$.

By definition, $\hat{f}(t, x) = \inf_{i,j} \vartheta_{ji}(t, x)$ for $(t, x) \in G$. Consequently, $\hat{f}|_{G \cap (A_\varepsilon \times X)}$ is upper semicontinuous which completes the proof of the theorem.

1.3. Theorem. *Let X be separable, let $f \in \mathcal{USC}_2(G \to R)$. Then there exists $\hat{f} \in \mathcal{SD}^*(G \to R)$ such that* (i), (ii) *from Theorem* 1.2 *holds.*

Proof. Without loss of generality we can assume that $f(G) \subset [0, 1]$. Let us define functions $\psi_{kl} : G \to [0, 1]$ for $k = 1, 2, \ldots, l = 1, 2, \ldots, 2^k - 1$ by

$$\psi_{kl}(t, x) = \begin{cases} \dfrac{l}{2^k} & \text{if } \ f(t, x) < \dfrac{l}{2^k}, \\ 1 & \text{if } \ f(t, x) \geqq \dfrac{l}{2^k} \end{cases}$$

and put $f_k(t, x) = \min_{l=1,\dots,2^k-1} \psi_{kl}(t, x)$. Then evidently $f(t, x) = \inf_k f_k(t, x)$.

Since the functions $\psi_{kl}(t, \cdot)$ are upper semicontinuous, the same holds for $f_k(t, \cdot)$ (for almost all t). Moreover, the range of f_k is finite. Hence we can find $\hat{f}_k \in \in \mathcal{SD}^*(G \to R)$ by Theorem 1.2 satisfying (i), (ii) with $f_k, \hat{f}_k$ instead of $f, \hat{f}$. Put

$$\hat{f}(t, x) = \inf_k \hat{f}_k(t, x) . \tag{1.3}$$

Then evidently $\hat{f} \in \mathcal{SD}^*(G \to R)$.

It remains to prove (i), (ii). The first point is evident since $\hat{f}(t, x) \leqq \hat{f}_k(t, x) \leqq \leqq f_k(t, x)$ for $k = 1, 2, \dots$ and hence $\hat{f}(t, x) \leqq \inf_k f_k(t, x) = f(t, x)$. To prove (ii), suppose that $u : I \to X$ is measurable, $v : I \to R$ is measurable and $v(t) \leqq f(t, u(t))$ a.e. in I. Then also $v(t) \leqq f_k(t, u(t))$ and hence by Theorem 1.2 (ii) $v(t) \leqq \hat{f}_k(t, u(t))$. The assertion now follows immediately from (1.3).

1.4. Definition. Let X be a metric space, R^n the n-dimensional Euclidean space, $R = R^1$, $G \subset R \times X$. Then $\mathcal{K}_n$ denotes the family of all non-empty compact convex subsets of R^n, $\mathcal{K}_n^0 = \mathcal{K}_n \cup \{\emptyset\}$. If S is a family of subsets of R^n, then the set of all $F : G \to S$ such that $F(t, \cdot)$ is upper semicontinuous for almost all t is denoted by $\mathcal{USC}_2(G \to S)$; the set of all $F : G \to S$ which satisfy the condition

(1.4) to every $\varepsilon > 0$ there is a measurable set $A_\varepsilon \subset R$ such that $m(R - A_\varepsilon) < \varepsilon$ and the function $F|_{G \cap (A_\varepsilon \times X)}$ is upper semicontinuous

is denoted by $\mathcal{SD}^*(G \to S)$.

The main result is formulated in the following

1.5. Theorem. *Let X be separable, $F \in \mathcal{USC}_2(G \to \mathcal{K}_n)$. Then there exists $\hat{F} \in \mathcal{SD}^*(G \to \mathcal{K}_n^0)$ such that*

(i) *$\hat{F}(t, x) \subset F(t, x)$ for $(t, x) \in G$,*

(ii) *if $I \subset R$ is measurable, $u : I \to X$ measurable, $(t, u(t)) \in G$ for $t \in I$, $v : I \to R^n$ measurable, $v(t) \in F(t, u(t))$ a.e. in I, then $v(t) \in \hat{F}(t, u(t))$ a.e. in I.*

Proof. Let $\{u_j\}$, $j = 1, 2, \dots$ be a countable dense set in R^n and denote

$$\omega_j(t, x) = \sup \{(y, u_j) \mid y \in F(t, x)\} .$$

Then $\omega_j \in \mathcal{USC}_2(G \to R)$ in virtue of the assumption on F. Therefore, by Theorem 1.3 we find to every ω_j a function $\hat{\omega}_j \in \mathcal{SD}^*(G \to R)$ such that (i), (ii) from Theorem 1.3 holds with ω_j, $\hat{\omega}_j$ instead of $f, \hat{f}$. Define

$$\hat{F}(t, x) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{y \in R^n \mid (y, u_j) \leqq \hat{\omega}_j(t, x)\} . \tag{1.5}$$

By a standard separation theorem

$$F(t, x) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{y \in R^n \mid (y, u_j) \leqq \omega_j(t, x)\},$$

so that (i) holds.

If u, v are functions from Theorem 1.5 (ii), then $(v(t), u_j) \leqq \omega_j(t, u(t))$ a.e. in I, $j = 1, 2, \ldots$. By Theorem 1.3 we conclude that then

$$(v(t), u_j) \leqq \hat{\omega}_j(t, u(t)) \quad \text{a.e. in } I, \quad j = 1, 2, \ldots$$

and hence by (1.5)

$$v(t) \in \hat{F}(t, u(t)) \quad \text{a.e. in } I.$$

Theorem 1.5 is proved completely.

2.

Before we pass to the problem of uniqueness of the function $\hat{F}$ from Theorem 1.5, let us introduce several lemmas. In the sequel, if $M \subset R \times X$ then $P(M)$, $P_X(M)$ denote the projections of M onto R and X, respectively.

2.1. Lemma. *Let Y be a separable metric space, $\varphi : Y \to R$ an upper semicontinuous function. Then there exists a sequence of continuous functions $\psi_j : Y \to R$ such that*

$$\psi_{j+1}(y) \leqq \psi_j(y), \quad j = 1, 2, \ldots,$$
$$\lim_{j \to \infty} \psi_j(y) = \varphi(y)$$

for $y \in Y$.

For the proof, see [4], p. 88, Theorem 14.7.5.

2.2. Lemma. *Let X be a complete separable metric space, $Q \subset R \times X$ a compact set. Then*

(i) *both $P(Q)$ and $P_X(Q)$ are compact;*

(ii) *there is a measurable function $w : P(Q) \to X$ such that $(t, w(t)) \in Q$ for $t \in P(Q)$.*

Proof. (i) holds, as P and P_X are continuous maps and Q is compact.

Since $P_X(Q)$ is compact by (i), it can be covered by a finite number of closed balls $\bar{B}_i^{(1)}$, $i = 1, 2, \ldots, k_1$, with centers s_{i1} and radius equal to one. Denote $D_i^{(1)} = \bar{B}_i^{(1)} \cap P_X(Q)$; then $D_i^{(1)}$ are compact and cover $P_X(Q)$. Let us define a function $w_1 : P(Q) \to X$ as follows:

Put $w_1(t) = s_{11}$ for $t \in P(Q \cap (R \times D_1^{(1)})) = P_{11}$; if $P_{11}, \ldots, P_{i-1,1}$ have been defined ($i \geqq 2$), then put

$$w_1(t) = s_{i1} \quad \text{for} \quad t \in P(Q \cap ((R - \bigcup_{q=1}^{i-1} P_{q1}) \times D_i^{(1)})).$$

Thus we obtain a measurable function $w_1 : P(Q) \to X$. Evidently, it may be assumed that $B_i^{(1)} \cap P_X(Q) \neq \emptyset$; consequently, $(t, w_1(t)) \in \Omega(Q, 1)$ for $t \in P(Q)$ where $\Omega(M, \varepsilon)$ denotes the ε-neighborhood of the set M.

Given a finite covering of $P_X(Q)$ by compact sets $D_i^{(j)}$, $i = 1, 2, \ldots, k_j$ with diam $D_i^{(j)} \leqq 2^{-(j-1)}$, we find a finite number of balls $\bar{B}_i^{(j+1)}$, $i = 1, 2, \ldots, k_{j+1}$, with centers $s_{i,j+1}$ and radius 2^{-j} with the following properties: $\bar{B}_i^{(j+1)}$, $i = 1, \ldots, q_1$ cover $D_1^{(j)}$, $\bar{B}_i^{(j+1)}$, $i = q_1 + 1, \ldots, q_2$ cover $D_2^{(j)}, \ldots, \bar{B}_i^{(j+1)}$, $i = q_{k_j - 1} + 1, \ldots, q_{k_j}$ cover $D_{k_j}^{(j)}$. Further, we define $D_i^{(j+1)} = \bar{B}_i^{(j+1)} \cap D_l^{(j)}$ for $i = q_{l-1} + 1, \ldots, q_l$. Evidently $D_i^{(j+1)}$, $i = 1, \ldots, k_{j+1}$ cover $P_x(Q)$. We define a function $w_{j+1} : P(Q) \to X$ as follows:

Put $w_{j+1}(t) = s_{1,j+1}$ for $t \in P(Q \cap (R \times D_1^{(j+1)})) = P_{1,j+1}$; if $P_{1,j+1}, \ldots, P_{i-1,j+1}$ have been defined ($i \geqq 2$), then put

$$w_{j+1}(t) = s_{i,j+1} \quad \text{for} \quad t \in P\Big(Q \cap \Big(\Big(R - \bigcup_{q=1}^{i-1} P_{q,j+1}\Big) \times D_i^{(j+1)}\Big)\Big).$$

Similarly as for w_1, we conclude that $w_{j+1} : P(Q) \to X$ is measurable and $(t, w_{j+1}(t)) \in \Omega(Q, 2^{-j})$ for $t \in P(Q)$.

The functions $w_1, w_2, \ldots$ form a Cauchy sequence. Indeed, it is easily seen that the values $w_j(t)$, $w_{j+1}(t)$ are centers of balls (in X) with radii $2^{-(j+1)}, 2^{-j}$ respectively. These balls have a non-empty intersection, hence $\varrho(w_j(t), w_{j+1}(t)) \leqq 2^{-j+1}$ and $\varrho(w_p(t), w_q(t)) \leqq 2^{-p+2}$ for $p < q$.

As X is complete, there exists a measurable function $w : P(Q) \to X$, $w(t) = \lim_{j \to \infty} w_j(t)$ for $t \in P(Q)$. Moreover $(t, w(t)) \in Q$ for $t \in P(Q)$ in virtue of $(t, w_{j+1}(t)) \in \Omega(Q, 2^{-j})$. Lemma 2.2 is proved.

2.3. Lemma. *Let X be a complete separable metric space, $\emptyset \neq Q_j \subset R \times X$, Q_j closed sets, $j = 1, 2, \ldots$. Let $Q_{j+1} \subset Q_j$, $Q = \bigcap_{j=1}^{\infty} Q_j$. Let the set Q_j have a finite 2^{-j}-net, $j = 1, 2, \ldots$.*

Then the set Q is non-empty, compact and

$$P(Q) = \bigcap_{j=1}^{\infty} P(Q_j). \tag{2.1}$$

Proof. Evidently Q is closed and has a finite ε-net for every $\varepsilon > 0$. Since X is complete, this implies that Q is compact. Since $Q_j \neq \emptyset$, we can choose a sequence $z_1, z_2, \ldots$ such that $z_j \in Q_j$, $z_j = (t_j, x_j)$, $j = 1, 2, \ldots$.

Since Q_1 has a finite 2^{-1}-net, there is a point ζ_1 of this net and a subsequence of $\{z_j\}$, say $\{z_{1j}\}$ such that

$$\hat{\varrho}(z_{1j}, \zeta_1) < 2^{-1}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Given a sequence $\{z_{kj}\}$, $j = 1, 2, \ldots$ and k positive integer, we find ζ_{k+1} belonging to the finite $2^{-(k+1)}$-net of Q_{k+1} and a subsequence $\{z_{k+1,j}\}$, $j = 1, 2, \ldots$ such that

$$\hat{\varrho}(z_{k+1,j}, \zeta_{k+1}) < 2^{-(k+1)}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Thus we can define by induction sequences $\{z_{kj}\}$, $j = 1, 2, \ldots$ for every positive integer k so that

$$\hat{\varrho}(z_{kp}, z_{kq}) < 2^{-k}, \quad k, p, q \text{ positive integers}.$$

Taking the diagonal sequence $\{z_{jj}\}$, $j = 1, 2, \ldots$ we conclude by a standard argument that it is a Cauchy sequence and hence in virtue of completeness of X there exists $z \in X$, $z = \lim_{j \to \infty} z_{jj}$. Since $z_{pp} \in Q_j$ for $p = j, j + 1, \ldots$ and Q_j are closed, we have $z \in Q_j$, $j = 1, 2, \ldots$ and consequently $Q \neq \emptyset$.

It remains to prove (2.1). The inclusion

$$P(Q) \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} P(Q_j)$$

is evident. Let $t \in \bigcap_{j=1}^{\infty} P(Q_j)$. Then there exist x_j, $j = 1, 2, \ldots$ such that $(t, x_j) \in Q_j$. Similarly as above we construct subsequences of $\{x_j\}$, find that the diagonal sequence has a limit x and that $(t, x) \in Q_j$, $j = 1, 2, \ldots$. Then obviously $(t, x) \in Q$ and hence $t \in P(Q)$.

Lemma 2.3 is proved.

2.4. Theorem. *Let X be a complete separable metric space, $G \subset R \times X$ a set of class F_σ, $F_i \in \mathcal{SD}^*(G \to \mathcal{K}_n^0)$, $i = 1, 2$, $\Omega = \{(t, x) \in G \mid F_1(t, x) - F_2(t, x) \neq \emptyset\}$.*

Then the set $D = P(\Omega)$ is measurable and there exist measurable functions $v : D \to R^n$, $w : D \to X$ such that

$$(t, w(t)) \in G \quad \text{and} \quad v(t) \in F_1(t, w(t)) - F_2(t, w(t)) \quad \text{a.e. in } D.$$

The theorem is an easy consequence of the following

2.5. Proposition. *Let us keep the notation of Theorem 2.4. Let $0 < m^*(D) < \infty$, $0 < \zeta < m^*(D)$. Then there exists a compact set $Q \subset G$ with $m(P(Q)) \geqq \zeta$,*

$$F_1(t, x) - F_2(t, x) \neq \emptyset \quad \textit{for} \quad (t, x) \in Q. \tag{2.2}$$

Further, there exist measurable functions $\hat{v} : P(Q) \to R^n$, $\hat{w} : P(Q) \to X$ such that

$$\hat{v}(t) \in F_1(t, \hat{w}(t)) - F_2(t, \hat{w}(t)) \quad \text{for} \quad t \in P(Q). \tag{2.3}$$

Proof. Let $\zeta + 2\eta < m^*(D)$, $\zeta > 0$, $\eta > 0$. Let $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$, $H_i \subset H_{i+1}$ for $i = 1, 2, \ldots$, the sets H_i being closed. Without loss of generality we may assume that the set $P(Q)$ is bounded. Obviously $D = P(\Omega) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(\Omega \cap H_i)$, $P(\Omega \cap H_i) \subset P(\Omega \cap H_{i+1})$ for $i = 1, 2, \ldots$ so that $m^*(D) = \lim_{i \to \infty} m^*(P(\Omega \cap H_i))$ and there exists such an integer r that

$$m^*(P(\Omega \cap H_r)) > \zeta + 2\eta.$$

There exists a closed set $A_\eta \subset R$ such that $m(R - A_\eta) < \eta$ and the functions $F_i|_{G\cap(A_\eta \times X)}$, $i = 1, 2$ are upper semicontinuous. Let the set $\{u_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ be dense in R^n and put

$$\varphi_i(t, x) = \sup \{(u_i, y) \mid y \in F_2(t, x)\} \quad \text{for} \quad (t, x) \in G \cap (A_\eta \times X)\,.$$

Then the function φ_i is evidently upper semicontinuous, $i = 1, 2, \dots$ and according to Lemma 2.1 there exist continuous functions $\psi_{ij} : G \cap (A_\eta \times X) \to R$ so that

$$\psi_{i,j+1}(t, x) \leqq \psi_{i,j}(t, x)\,, \quad \lim_{j\to\infty} \psi_{ij}(t, x) = \varphi_i(t, x)\,.$$

For $k = 1, 2, \dots$ put

(2.4)
$$\Omega_k = \{(t, x) \in H_r \cap (A_\eta \times X) \mid F_1(t, x) \cap \cap [\bigcup_{i=1}^{k} \{z \in R^n \mid (u_i, z) \geqq \psi_{ik}(t, x)\}] \neq \emptyset\}\,.$$

These sets are closed, since F_1 is upper semicontinuous, ψ_{ij} are continuous and the sets H_r, A_η are closed. Moreover, $\Omega_{k+1} \supset \Omega_k$, $k = 1, 2, \dots$. Let us prove

(2.5)
$$\Omega \cap H_r \cap (A_\eta \times X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k\,.$$

Let $(t, x) \in \Omega \cap H_r \cap (A_\eta \times X)$. Then there exists $h \in F_1(t, x) - F_2(t, x)$. Since $F_2(t, x)$ is closed convex, there is $u \in R^n$ such that

$$(u, h) > \sup \{(u, y) \mid y \in F_2(t, x)\}\,.$$

Since $F_2(t, x)$ is compact, there is an index l such that

$$(u_l, h) > \varphi_l(t, x)\,.$$

Consequently, if k is such that $k \geqq l$ and $(u_l, h) > \psi_{lk}(t, x)$ we have $(t, x) \in \Omega_k$ and hence

$$\Omega \cap H_r \cap (A_\eta \times X) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k\,.$$

The converse inclusion being obvious, we conclude that (2.5) holds.

Obviously $P(\Omega \cap H_r \cap (A_\eta \times X)) = P(\Omega \cap H_r) \cap A_\eta$ and since $m(R - A_\eta) < \eta$, $m^*(P(\Omega \cap H_r)) > \zeta + 2\eta$, we have $m^*(P(\Omega \cap H_r) \cap A_\eta) > \zeta + \eta$. In virtue of (2.5) we have

$$P(\Omega \cap H_r) \cap A_\eta = \bigcup_{k=1}^{\infty} P(\Omega_k)\,,$$

$P(\Omega_{k+1}) \supset P(\Omega_k)$ and hence there is a positive integer p such that $m^*(P(\Omega_p)) > > \zeta + \eta$.

Let the set $\{g_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ be dense in $R \times X$. Then

$$P(\Omega_p) = \bigcup_{l=1}^{\infty} P(\Omega_p \cap (\bigcup_{k=1}^{l} \bar{B}(g_k, 1)))$$

and there exists l_1 such that $m^*(P(Q_1)) > \zeta + \frac{1}{2}\eta$, where $Q_1 = \Omega_p \cap (\bigcup_{k=1}^{l_1} \bar{B}(g_k, 1))$.

By induction we find $l_2, l_3, \ldots$ so that $Q_{i+1} = Q_i \cap (\bigcup_{k=1}^{l_{i+1}} \bar{B}(g_k, 2^{-i}))$ and

$$m^*(P(Q_{i+1})) > \zeta + 2^{-(i+1)}\eta . \tag{2.6}$$

Put $Q = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i$. Obviously $Q \subset Q_1 \subset \Omega_p \subset H_r \subset G$ and the sets Q_i are closed. By Lemma 2.3 the set Q is compact, non-empty and satisfies (2.1); moreover, $Q \subset G$. It follows from (2.6) that $m^*(P(Q)) \geqq \zeta$. Since $P(Q)$ is compact by Lemma 2.2 (i), we conclude

$$m(P(Q)) \geqq \zeta .$$

By Lemma 2.2 (ii) there exists $\hat{w} : P(Q) \to X$ measurable and such that $(t, \hat{w}(t)) \in Q$ for $t \in P(Q)$, i.e.

$$F_1(t, \hat{w}(t)) - F_2(t, \hat{w}(t)) \neq \emptyset .$$

Now we shall find a measurable function $\hat{v} : P(Q) \to R^n$ satisfying

$$\hat{v}(t) \in F_1(t, \hat{w}(t)) \cap [\bigcup_{i=1}^{p} \{z \in R^n \mid (u_i, z) \geqq \psi_{ip}(t, \hat{w}(t))\}] \tag{2.7}$$

for $t \in P(Q)$. In virtue of (2.4) and the inclusion $\Omega_p \supset Q$, the set on the right-hand side of (2.7) is a non-empty set for $t \in P(Q)$. Evidently (2.7) implies (2.3).

Let j be a positive integer. Find a closed set $C_j \subset P(Q)$ with

$$m(C_j) > m(P(Q))\,(1 - 2^{-j}) ,$$

such that the function $\hat{w}|_{C_j}$ is continuous and the function $F_1|_{G \cap (C_j \times R^n)}$ is upper semicontinuous. The composed function $F_1(t, \hat{w}(t))$ is upper semicontinuous on C_j. The continuity of the functions ψ_{ip}, $i = 1, 2, \ldots$ implies that the set

$$H_j = \{(t, y) \mid t \in C_j,\ y \in F_1(t, \hat{w}(t)) \cap \cap [\bigcup_{i=1}^{p} \{z \in R^n \mid (u_i, z) \geqq \psi_{ip}(t, \hat{w}(t))\}]\}$$

is compact. Consequently, by Lemma 2.2 (ii) there exists a measurable function $v_j : C_j \to R^n$ such that $(t, v_j(t)) \in H_j$ for $t \in C_j$.

The function $\hat{v}$ defined by $\hat{v}(t) = v_1(t)$ for $t \in C_1$, $\hat{v}(t) = v_j(t)$ for $j = 2, 3, \ldots, t \in C_j - \bigcup_{i=1}^{j-1} C_i$ is measurable, defined a.e. in $P(Q)$ and satisfies (2.7). This completes the proof of Proposition 2.5.

2.6. Proof of Theorem 2.4. According to Proposition 2.5, to every $\varepsilon > 0$ there is a compact set $Q_\varepsilon \subset G$ such that $m^*(D) - m(P(Q_\varepsilon)) < \varepsilon$; hence D is measurable. Further, consider compact sets $Q_{2^{-j}}$ and find functions $\hat{v}_j$, $\hat{w}_j$ from Proposition 2.5 satisfying (2.3) for $t \in P(Q_{2^{-j}})$. Similarly as above, put $v(t) = \hat{v}_1(t)$, $w(t) = \hat{w}_1(t)$ for $t \in Q_{2^{-1}}$, $v(t) = \hat{v}_j(t)$, $w(t) = \hat{w}_j(t)$ for $j = 2, 3, \ldots$, $t \in Q_{2^{-j}} - \bigcup_{i=1}^{j-1} Q_{2^{-i}}$. Then the functions v, w are defined a.e. in $P(Q)$ and satisfy the assertion of Theorem 2.4.

2.7. Note. Let the metric space X be complete separable and let $G \subset R \times X$ be of type F_σ. Let $\hat{F}_i \in \mathscr{S}\mathscr{D}^*(G \to \mathscr{K}_n^0)$, $i = 1, 2$ fulfil the conditions (0.8), (0.12) with $\hat{F}_i$ instead of $\hat{F}$. Put

$$\Omega_1 = \{(t, x) \in G \mid \hat{F}_1(t, x) - \hat{F}_2(t, x) \neq \emptyset\},$$
$$\Omega_2 = \{(t, x) \in G \mid \hat{F}_2(t, x) - \hat{F}_1(t, x) \neq \emptyset\}.$$

By Theorem 2.4 the sets $D_i = P(\Omega_i)$ are measurable and there exist measurable functions $v_i : D_i \to R^n$, $w_i : D_i \to X$, $i = 1, 2$ such that

$$v_1(t) \in \hat{F}_1(t, w_1(t)) - \hat{F}_2(t, w_1(t)) \quad \text{a.e. in} \quad D_1, \tag{2.8}$$
$$v_2(t) \in \hat{F}_2(t, w_2(t)) - \hat{F}_1(t, w_2(t)) \quad \text{a.e. in} \quad D_2.$$

By (2.8) and (0.8) $v_1(t) \in F(t, w_1(t))$ a.e. in D_1 and by (0.12) $v_1(t) \in \hat{F}_2(t, w_1(t))$ a.e. in D_1. Consequently $m(D_1) = 0$ and similarly $m(D_2) = 0$. The assertion from 0.3 holds with $A = R - (D_1 \cup D_2)$.

3.

3.1. Theorem. *Let $F \in \mathscr{S}\mathscr{D}^*(G \to \mathscr{K}_n^0)$ where $G \subset R \times X$, X being a metric space. To every $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in G$ let there exist a non-degenerate interval I and a function $w : I \to X$ such that*

$$\lim_{t \to \tilde{t}} w(t) = \tilde{x}, \tag{3.1}$$

$$F(t, w(t)) \neq \emptyset \quad \text{a.e. in} \quad I. \tag{3.2}$$

Let E be the set of all $t \in R$ such that there exists $x \in X$ with $F(t, x) = \emptyset$. Then $m(E) = 0$.

Proof. Let us assume that $m^*(E) > 0$. Let $A \subset R$ be a measurable set such that $m(R - A) < m^*(E)$ and the function $F|_{G \cap (A \times X)}$ is upper semicontinuous. Then $m^*(A \cap E) > 0$. Let B be the set of $t \in A$ which are points of metrical density of the set A. Then $m(A - B) = 0$, hence $m^*(B \cap E) > 0$.

Let us choose $\tilde{t} \in B \cap E$ and find $\tilde{x}$ so that $F(\tilde{t}, \tilde{x}) = \emptyset$. Let $w : I \to X$ be the function from the assumptions of Theorem 3.1.

Since $F|_{G\cap(A\times X)}$ is upper semicontinuous, there exists an open set $U \subset G$ so that $(\bar{t}, \tilde{x}) \in U$ and $F(t, x) = \emptyset$ for $(t, x) \in U \cap (A \times X)$. By (3.1) there exists $\delta > 0$ such that $F(t, w(t)) = \emptyset$ provided $t \in I \cap A$, $|t - \bar{t}| < \delta$. However, since $\bar{t}$ is a point of metrical density of the set A, (3.2) cannot hold.

4.

Notation. Let A be a set of real numbers and r a real number. The sets $A + r$, rA are defined by $A + r = \{a + r \mid a \in A\}$ and $rA = \{ra \mid a \in A\}$. Denote by $\varkappa(\alpha)$ the cardinal number corresponding to an ordinal type α. Let $\varkappa$ be the cardinal number of continuum and ω the first ordinal type fulfilling $\varkappa(\omega) = \varkappa$. If A is a set then $\varkappa(A)$ is the cardinal number of A.

First we shall formulate without proofs four well-known results.

4.1. Lemma. *Let $\tilde{F}$ be the system of all closed subsets of $[0, 1]$. Then $\varkappa(\tilde{F}) = \varkappa$.*

4.2. Lemma. *Let A be an uncountable closed subset of $[0, 1]$. Then $\varkappa(A) = \varkappa$.*

4.3. Lemma. *The set of ordinal types $\{\beta \mid 0 \leqq \beta < \alpha\}$ is of the ordinal type α.*

4.4. Lemma. *If σ is an infinite cardinal number, then $2\sigma = \sigma^2 = \sigma$.*

Since $\varkappa(\{\alpha \mid 0 \leqq \alpha < \omega\}) = \varkappa(\omega) = \varkappa$ (cf. Lemma 4.3), there exists a one-to-one mapping $\alpha \to r_\alpha$ of $\{\alpha \mid 0 \leqq \alpha < \omega\}$ onto the interval $[0, 1]$.

4.5. Lemma. *If Z is a set, $Z \subset [0, 1]$, $\varkappa(Z) = \varkappa$, then there exists a real function g defined on $\{\alpha \mid 0 \leqq \alpha < \omega\}$ such that $g(\alpha) \in Z$ for every α, g is one-to-one and the mapping $\alpha \to g(\alpha) + r_\alpha$ is one-to-one.*

Proof. Let g be a function defined on a set $\{\alpha \mid 0 \leqq \alpha < \delta\}$, $\delta \leqq \omega$ which fulfils $g(\alpha) \in Z$ and

$$g(\alpha) \neq g(\beta) \quad \text{and} \quad g(\alpha) + r_\alpha \neq g(\beta) + r_\beta \tag{4.1}$$

for all α, β from its definition domain, $\alpha \neq \beta$. Let Q be the set of all such functions g. Denote by $\preceq$ a partial ordering on Q defined by $g^{(1)} \preceq g^{(2)}$ if the domain of definition $D^{(1)}$ of $g^{(1)}$ is contained in the domain of definition $D^{(2)}$ of $g^{(2)}$ and $g^{(1)}, g^{(2)}$ coincide on $D^{(1)}$. Let now $\Lambda \neq \emptyset$ be a set of indices, $g^{(\lambda)} \in Q$ for $\lambda \in \Lambda$ and let $\{g^{(\lambda)} \mid \lambda \in \Lambda\}$ be a linearly ordered subset of Q. Denote by $D^{(\lambda)} = \{\alpha \mid 0 \leqq \alpha < \delta^{(\lambda)}\}$ the corresponding domains of definition. Put $\delta = \sup_{\lambda \in \Lambda} \delta^{(\lambda)}$, $D = \{\alpha \mid 0 \leqq \alpha < \delta\}$, i.e. $D = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D^{(\lambda)}$. For every $\alpha \in D$ there exists $\lambda \in \Lambda$ such that $\alpha \in D^{(\lambda)}$. Put $g(\alpha) = g^{(\lambda)}(\alpha)$. Obviously $g \in Q$ and $g^{(\lambda)} \preceq g$ for $\lambda \in \Lambda$. This implies (by the Zorn lemma) that Q has a maximal element $\bar{g}$ with a domain of definition $\bar{D} = \{\alpha \mid 0 \leqq \alpha < \bar{\delta}\}$.

Assume $\bar{\delta} < \omega$. Denote $V = \{\bar{g}(\alpha) \mid 0 \leqq \alpha < \bar{\delta}\} \cup \{\bar{g}(\alpha) + r_\alpha - r_{\bar{\delta}} \mid 0 \leqq \alpha < \bar{\delta}\}$. Evidently $\varkappa(V) \leqq \varkappa(\bar{\delta}) + \varkappa(\bar{\delta}) < \varkappa(\omega) = \varkappa$ (see Lemma 4.4 and the definition of ω). Thus $Z - V \neq \emptyset$ and there exists $z \in Z - V$. Define $\hat{g}(\alpha) = \bar{g}(\alpha)$ for $0 \leqq \alpha < \bar{\delta}$ and $\hat{g}(\bar{\delta}) = z$.

Obviously $\hat{g} \in Q$ with the domain of definition $\hat{D} = \{\alpha \mid 0 \leqq \alpha < \bar{\delta} + 1\}$ and, moreover, $\bar{g} \neq \hat{g}$ and $\bar{g} \precsim \hat{g}$. This contradicts the fact that $\bar{g}$ is maximal. We conclude $\bar{\delta} = \omega$ and Lemma 4.5 is proved.

Denote by F the family of all closed subsets A of $[0, 1]$ fulfilling $m(A) > 0$. It can be deduced from Lemma 4.1 that $\varkappa(F) = \varkappa$ and since $\varkappa(\{\alpha \mid 0 \leqq \alpha < \omega\}) = \varkappa$ there exists a one-to-one mapping $\alpha \to F_\alpha$ defined on $\{\alpha \mid 0 \leqq \alpha < \omega\}$ which maps $\{\alpha \mid 0 \leqq \alpha < \omega\}$ onto F.

4.6. Lemma. *Let $C = \{(\alpha, \beta) \mid 0 \leqq \beta \leqq \alpha < \omega\}$. There exists a real function f defined on C such that*

$$f(\alpha, \beta) \in F_\alpha \quad for \quad 0 \leqq \beta \leqq \alpha\,, \tag{4.2}$$

$$f(\alpha, \beta) \neq f(\alpha', \beta') \quad for \quad (\alpha, \beta) \neq (\alpha', \beta')\,, \tag{4.3}$$

$$f(\alpha, \beta) + r_\beta \neq f(\alpha', \beta') + r_{\beta'} \quad for \quad (\alpha, \beta) \neq (\alpha', \beta')\,. \tag{4.4}$$

Proof. Denote $C^{(\delta)} = \{(\alpha, \beta) \mid 0 \leqq \beta \leqq \alpha < \delta\}$ for all $\delta \leqq \omega$ and let G be the set of all real functions defined on sets $C^{(\delta)}$ fulfilling (4.2) to (4.4). As in the proof of Lemma 4.5 we introduce a partial ordering on G. We write $f^{(1)} \precsim f^{(2)}$ if the corresponding domains of definition satisfy $C_1 \subset C_2$ and $f^{(1)} = f^{(2)}$ on C_1.

The existence of a maximal element of G can be proved analogously as in the proof of Lemma 4.5. Denote the maximal element by $\bar{f}$ and the corresponding domain of definition by $\bar{C} = \{(\alpha, \beta) \mid 0 \leqq \beta \leqq \alpha < \bar{\delta}\}$.

Assume $\bar{\delta} < \omega$. Put $W_\alpha = \{\bar{f}(\alpha, \beta) \mid 0 \leqq \beta \leqq \alpha\}$ for $\alpha < \bar{\delta}$. Obviously $\varkappa(W_\alpha) = \varkappa(\{\beta \mid 0 \leqq \beta \leqq \alpha\}) = \varkappa(\alpha) + 1 \leqq \varkappa(\bar{\delta})$. Denote $W = \bigcup_{\alpha < \bar{\delta}} W_\alpha = \{\bar{f}(\alpha, \beta) \mid 0 \leqq \beta \leqq \alpha < \bar{\delta}\}$. Since $\varkappa(\{\alpha \mid 0 \leqq \alpha < \bar{\delta}\}) = \varkappa(\bar{\delta})$ we obtain $\varkappa(W) \leqq \varkappa^2(\bar{\delta}) = \varkappa(\bar{\delta})$ (see Lemma 4.4; notice that $\varkappa(\bar{\delta})$ cannot be finite). Let $W' = \{\bar{f}(\alpha, \beta) + r_\beta - r_\gamma \mid 0 \leqq \beta \leqq \alpha < \bar{\delta},\ 0 \leqq \gamma \leqq \bar{\delta}\}$. Analogously as for W we can estimate

$$\varkappa(W') \leqq \varkappa(\{(\alpha, \beta) \mid 0 \leqq \beta \leqq \alpha < \bar{\delta}\} \times \{\gamma \mid 0 \leqq \gamma \leqq \bar{\delta}\}) = \\ = \varkappa^2(\bar{\delta})\, \varkappa(\bar{\delta}) = \varkappa(\bar{\delta})\,.$$

Denote

$$Z = F_{\bar{\delta}} - W - W'\,. \tag{4.5}$$

Using the above estimates for $\varkappa(W)$ and $\varkappa(W')$, we obtain due to Lemma 4.2 $\varkappa(Z) = \varkappa$.

Let g be a function from Lemma 4.5. Denote $\hat{f}(\alpha, \beta) = \bar{f}(\alpha, \beta)$ for $0 \leqq \beta \leqq \alpha < \bar{\delta}$, $\hat{f}(\bar{\delta}, \beta) = g(\beta)$ for $0 \leqq \beta \leqq \bar{\delta}$. The function $\hat{f}$ is defined on $\hat{C} = \{(\alpha, \beta) \mid 0 \leqq$

$\leqq \beta \leqq \alpha < \delta + 1\}$, $\hat{f}(\alpha, \beta) \in F_\alpha$ and $\hat{f}$ fulfils (4.3) and (4.4) due to (4.1) and (4.5). Evidently $\hat{f} \in G$, $\bar{f} \leqq \hat{f}$ and $\bar{f} \neq \hat{f}$. This contradiction implies $\delta = \omega$ and Lemma 4.6 is proved.

Given $M \subset [0, 1]$, then $m^*(M)$, $m_*(M)$ stand respectively for the outer and the inner Lebesgue measure of M.

4.7. Lemma. *To every ordinal type α, $0 \leqq \alpha < \omega$ there exists a set M_α and a real number r_α such that $M_\alpha \subset [0, 1]$, $r_\alpha \in [0, 1]$, $m^*(M_\alpha) = 1$, $m_*(M_\alpha) = 0$, $\{r_\alpha \mid 0 \leqq \leqq \alpha < \omega\} = [0, 1]$ and $M_\alpha \cap M_\beta = \emptyset$, $(M_\alpha + r_\alpha) \cap (M_\beta + r_\beta) = \emptyset$ for $\alpha \neq \beta$.*

Proof. Let $\alpha \to r_\alpha$ be the mapping defined above. Since this mapping is onto $[0, 1]$ we have $\{r_\alpha \mid 0 \leqq \alpha < \omega\} = [0, 1]$. Put $M_\beta = \{f(\alpha, \beta) \mid \beta \leqq \alpha < \omega\}$ where f is the function from Lemma 4.6. Obviously $M_\beta \subset [0, 1]$ and the last two disjointness properties follow from (4.3) and (4.4), respectively.

We shall prove $m^*(M_\beta) = 1$. Let β be a given ordinal type, $\beta < \omega$, and assume $m^*(M_\beta) < 1$. Then there exists an open set U, $M_\beta \subset U$, $m(U) < 1$. Denote $F^{(+)} = = [0, 1] - U$. Obviously $m(F^{(+)}) > 0$. Put $F^{(\lambda)} = F^{(+)} \cap [0, \lambda]$ and $m(\lambda) = = m(F^{(\lambda)})$. Then $m(\lambda)$ is a continuous function, $m(0) = 0$, $m(1) > 0$. Let $0 < \xi \leqq \leqq m(1)$. Define $\lambda(\xi) = \min\{\lambda \mid m(\lambda) = \xi\}$. Evidently $\lambda(\xi) \in F^{(+)}$ for every $\xi \in \in (0, m(1)]$ and $\lambda(\xi_1) \neq \lambda(\xi_2)$ for $\xi_1 \neq \xi_2$. Denote $\Lambda = \{\lambda(\xi) \mid \xi \in (0, m(1)]\}$. Evidently $\varkappa(\Lambda) = \varkappa$ and $\varkappa(\{\gamma \mid 0 \leqq \gamma < \beta\}) = \varkappa(\beta) < \varkappa(\omega) = \varkappa$. Hence there exists a couple μ, δ such that $\mu \in \Lambda$, δ is an ordinal type, $\beta \leqq \delta < \omega$ and $F^{(\mu)} = F_\delta$. Thus the set $F^{(\mu)}$ contains the point $f(\delta, \beta)$ and consequently $F^{(\mu)} \cap M_\beta \neq \emptyset$, i.e. $F^{(+)} \cap M_\beta \neq \emptyset$.

We conclude $M_\beta \not\subset U$. This contradiction proves $m^*(M_\beta) = 1$. Since M_β are disjoint we obtain

$$m_*(M_\beta) = 1 - m^*([0, 1] - M_\beta) \leqq 1 - m^*(M_\sigma) = 0\,, \quad \sigma \neq \beta\,.$$

Since the mapping $\beta \to r_\beta$ is one-to-one and onto $[0, 1]$ there exists to every r, $0 \leqq r \leqq 1$ an ordinal type $\beta < \omega$ such that $r = r_\beta$. Put $M_r = M_\beta$. Using this new notation, Lemma 4.7 can be reformulated.

4.8. Lemma. *To every r, $0 \leqq r \leqq 1$ there exists a set M_r such that $M_r \subset [0, 1]$, $m^*(M_r) = 1$, $m_*(M_r) = 0$, $M_r \cap M_g = \emptyset$, $(M_r + r) \cap (M_g + g) = \emptyset$ for $r \neq g$.*

4.9. Theorem. *There exists a set S in $[0, 1] \times R$ such that*

(4.6) $\quad \{x \mid (t, x) \in S\}$ *contains at most one point for every t*,

(4.7) $\quad \{t \mid (t, x) \in S\}$ *contains at most one point for every x*,

(4.8) $\quad m^*\{t \mid (t, t + x) \in S\} = 1\,, \quad m_*\{t \mid (t, t + x) \in S\} = 0$ *for every* x,

$$0 \leqq x \leqq 1\,.$$

Proof. Denote $S_x = \{(t, t + x) \mid t \in M_x\}$ for a given x and

$$S = \bigcup_x S_x = \bigcup_x \{(t, t + x) \mid t \in M_x\}\,.$$

Since $(t, x) \in S$ if and only if $t \in M_{x-t}$ and M_r, $0 \leqq r \leqq 1$ are disjoint sets, it is evident that to a given t there is at most one x such that $(t, x) \in S$.

Denote by $P : R^2 \to R$ the projection $P(t, x) = x$. Since $P(S_x) = M_x + x$ and the sets $M_r + r$ are disjoint, we conclude again that to a given x there is at most one t such that $(t, x) \in S$.

Finally, $\{t \mid (t, t + x) \in S\} = \{t \mid t \in M_x\}$ for a given x, $0 \leqq x \leqq 1$. Hence $m^*\{t \mid (t, t + x) \in S\} = m^*(M_x) = 1$ and $m_*\{t \mid (t, t + x) \in S\} = m_*(M_x) = 0$.

Let $F(t, x)$ be defined by

$$F(t, x) = \{0\} \quad \text{for} \quad (t, x) \notin S\,,$$
$$F(t, x) = [0, 1] \quad \text{for} \quad (t, x) \in S\,.$$

Then (4.6) to (4.8) imply (0.13) to (0.15).

References

[1] *J. L. Davy:* Properties of the solution set of a generalized differential equation. Bull. Austral. Math. Soc. *6* (1972), No. 3, pp. 372—398.

[2] *G. Scorza-Dragoni:* Una applicazione della quasicontinuità semiregolare delle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile. Atti Acc. Naz. Lincei *XII* (1952), 1, pp. 55—61.

[3] *J. Jarník - J. Kurzweil:* Extension of a theorem by Scorza-Dragoni to differential relations and functional differential relations. To appear in Comment. Math. (special issue to the honour of Wl. Orlicz).

[4] *E. Čech:* Point Sets. Academia, Prague 1969.

Authors' address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

CATEGORIAL APPROACH TO GLOBAL TRANSFORMATIONS OF THE n-TH ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

FRANTIŠEK NEUMAN, Brno

(Received April 16, 1977)

1. INTRODUCTION

Investigations on linear differential equations started in the middle of the last century. They were connected with the names of E. E. KUMMER [4], E. LAGUERRE [5], F. BRIOSCHI, G. H. HALPHEN, A. R. FORSYTH, P. STÄCKEL [13], S. LIE, E. J. WILCZYNSKI [15] and others. Their results, however, were of local character. The global study began with second order equations about 25 years ago by O. BORŮVKA [1], [2], and results of algebraic character form the essential part of his theory.

Here we describe algebraically the global structure of n-th order linear differential equations ($n \geqq 2$). The geometric approach was given in [6] and the importance of global transformations for studying and understanding asymptotic behavior, periodicity, boundedness, zeros, oscillatory behavior, disconjugacy and other global properties of solutions essentially connected with the whole interval of definition was demonstrated in [6], [8], [9], [10], [11].

2. GLOBAL TRANSFORMATIONS

Let $C^s(I, \mathbf{R}^k)$ denote the set of all (column) vector functions $\mathbf{u} : I \to \mathbf{R}^k$ with continuous derivatives up to and including the order s, $s \geqq 0$, let I be an open interval of $\mathbf{R}$, $k \geqq 1$, let $\mathbf{u}^T$ denote the transpose of $\mathbf{u}$. Coefficients of linear homogeneous differential equations of the n-th order are supposed to be real and continuous on the corresponding open (bounded or unbounded) intervals of definition. For $n \geqq 2$, P. STÄCKEL [13] in 1891 derived the most general pointwise transformation that converts any linear homogeneous differential equation of the n-th order into an equation of the same type. This transformation consists in changing the independent variable ($x \mapsto h(t)$) and multiplying the dependent variable by a factor $f(t)$, i.e. $y \mapsto f(t)\, y$.

With respect to this result we say that an n-th order linear homogeneous differential equation $\mathscr{L}$ on I with n linearly independent solutions $y_1, \ldots, y_n$ on I is globally transformable into an equation $\mathscr{Q}$ of the same type on J admitting n linearly independent solutions $z_1, \ldots, z_n$ if

$$\mathbf{z}(t) = A \,.\, f(t) \,.\, \mathbf{y}(h(t)) \tag{1}$$

for a real regular n by n matrix A, $f \in C^n(J, \mathbf{R})$, $h \in C^n(J, I)$, $f(t) \,.\, \mathrm{d}h(t)/\mathrm{d}t \neq 0$ on J, and $h(J) = I$, where $(y_1, \ldots, y_n)^T$ is denoted by $\mathbf{y}$ and called a fundamental solution of the corresponding equation $\mathscr{L}$. Similarly $\mathbf{z}$ is a fundamental solution of $\mathscr{Q}$.

The global transformation (1) can be expressed as $\mathscr{L} * \alpha = \mathscr{Q}$, where α is called the *transformation* of $\mathscr{L}$ into $\mathscr{Q}$. Since every fundamental solution of $\mathscr{L}$ is of the form $C\mathbf{y}$, C being an arbitrary regular n by n matrix, the transformation α essentially depends on f, called *multiplier*, and h, *parametrization*.. We shall write $\alpha = \langle f, h \rangle_{\mathscr{L}}$.

Let us note that the global character of transformations is achieved by $h(J) = I$, and linear independency of coordinates of $\mathbf{z}$ in (1) is guaranteed by the conditions on A, f, h, and $\mathbf{y}$. For more detail see [7].

Since global transformations form a reflexive, symmetric and transitive relation, the set of all n-th order linear homogeneous differential equations $(n \geqq 2)$ is decomposed into classes of globally transformable equations. Denote by $\mathbf{\Delta}$ the decomposition.

3. STATIONARY GROUPS

Proposition 1. *Let $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ be a class of globally equivalent differential equations. The set of all global transformations, $\mathfrak{B}(\Delta)$, between every pair of equations from Δ together with the composition rule form a Brandt groupoid.*

Proof. A Brandt groupoid is a category each element of which is invertible, and such that if α and γ are its elements, there exists β for which $\alpha\beta\gamma$ is defined, see [3], p. 81–83.

Let $\mathscr{L}, \mathscr{P}, \mathscr{Q}$ be equations from Δ and let I, J, K denote the corresponding intervals of definitions. Let $\mathscr{L} * \alpha = \mathscr{P}$, $\mathscr{P} * \beta = \mathscr{Q}$, $\alpha \in \mathfrak{B}(\Delta)$, $\beta \in \mathfrak{B}(\Delta)$. Define $\alpha\beta \in \mathfrak{B}(\Delta)$ by $(\mathscr{L} * \alpha) * \beta = \mathscr{L} * (\alpha\beta)$. Evidently ${}_{\alpha}\varepsilon = \langle 1_I, \mathrm{id}_I \rangle_{\mathscr{L}}$ is the left unit and $\varepsilon_{\alpha} = \langle 1_J, \mathrm{id}_J \rangle_{\mathscr{P}}$ is the right unit of α, where $1_I : I \to \{1\} \in \mathbf{R}$, and the associativity holds. Further, if $\alpha = \langle f, h \rangle_{\mathscr{L}}$ and $\beta = \langle g, k \rangle_{\mathscr{P}}$, then $\alpha\beta = \langle (f \circ k) \,.\, g, h \circ k \rangle_{\mathscr{L}}$ which always defined provided $\varepsilon_{\alpha} = {}_{\beta}\varepsilon$; $\circ$ denotes the composition of functions. Evidently $\alpha^{-1} = \langle 1/(f \circ h^{-1}), h^{-1} \rangle_{\mathscr{P}}$, where h^{-1} is the inverse to h. For $\gamma \in \mathfrak{B}(\Delta)$ there always exists $g \in C^n(K, \mathbf{R})$ and $k \in C^n(K, J)$ such that $g \,.\, k'(t) \neq 0$ on K, $k(K) = J$, where ${}_{\gamma}\varepsilon = \langle 1_K, \mathrm{id}_K \rangle_{\mathscr{Q}}$. Hence for $\beta := \langle g, k \rangle_{\mathscr{P}}$, $\alpha\beta\gamma$ is defined. ∎

We always consider each $\mathfrak{B}(\Delta)$ with the structure of Brandt groupoid.

For each $\mathscr{L} \in \varDelta$ define $\mathfrak{A}(\mathscr{L})$ as the set of all global transformations that transform $\mathscr{L}$ into itself, $\mathfrak{A}(\mathscr{L}) := \{\alpha \in \mathfrak{B}(\varDelta);\ \mathscr{L} \in \varDelta \text{ and } \mathscr{L} * \alpha = \mathscr{L}\}$. Evidently $\mathfrak{A}(\mathscr{L})$ is a group called the stationary group of $\mathscr{L}$. With respect to (1), $\alpha = \langle f, h\rangle_{\mathscr{L}} \in \mathfrak{A}(\mathscr{L})$ if and only if

$$(2) \qquad \mathbf{y}(t) = A \,.\, f(t) \,.\, \mathbf{y}(h(t))\,, \quad h(I) = I\,,$$

for a suitable regular n by n matrix A, where I is the interval of definition and $\mathbf{y}$ is a fundamental solution of $\mathscr{L}$.

Proposition 2. *If $\mathscr{L} \in \varDelta \in \mathbf{\Delta}$, $\mathscr{L} * \alpha = \mathscr{P}$, $\alpha \in \mathfrak{B}(\varDelta)$, then*

$$(3) \qquad \mathfrak{A}(\mathscr{P}) = \alpha^{-1}\, \mathfrak{A}(\mathscr{L})\, \alpha\,.$$

In other words: *Each two stationary groups of any pair of globally transformable differential equations are conjugate.*

Proof. For $\beta \in \mathfrak{A}(\mathscr{P})$ we have $\mathscr{L} * \alpha\beta\alpha^{-1} = (\mathscr{P} * \beta) * \alpha^{-1} = \mathscr{P} * \alpha^{-1} = \mathscr{L}$ or $\alpha\beta\alpha^{-1} \in \mathfrak{A}(\mathscr{L})$, hence $\beta \in \alpha^{-1}\, \mathfrak{A}(\mathscr{L})\, \alpha$. For $\beta \in \alpha^{-1}\, \mathfrak{A}(\mathscr{L})\, \alpha$ we have $\alpha\beta\alpha^{-1} \in \mathfrak{A}(\mathscr{L})$ or $\mathscr{L} * \alpha\beta\alpha^{-1} = \mathscr{L}$ which gives $(\mathscr{L} * \alpha) * \beta = \mathscr{L} * \alpha$, or $\mathscr{P} * \beta = \mathscr{P}$, hence $\beta \in \mathfrak{A}(\mathscr{P})$. See also [3], [14]. ■

An interesting rôle is played by sugroups $\mathfrak{A}_G(\mathscr{L})$ of $\mathfrak{A}(\mathscr{L})$, elements of which leave invariant a certain subspace of solutions of $\mathscr{L}$, G assigning the corresponding subgroups of matrices A occuring in (2). In particular, $\mathfrak{A}_{\{E\}}(\mathscr{L})$, E being the unit matrix, is characterized by the fact that each solution of $\mathscr{L}$ is transformed into itself, or

$$(4) \qquad \mathbf{y}(t) = f(t) \,.\, \mathbf{y}(h(t))\,, \quad h(I) = I\,.$$

Transformations $\alpha = \langle f, h\rangle_{\mathscr{L}}$ with increasing parametrizations $h, h' > 0$, are important for studying global properties of solutions (like periodicity, boundedness, asymptotic behavior, L^2-solutions, and others, see [6], [8], [9], [10], [11]), since they often enable us to describe the global behavior of solutions according to their local character and some information of discrete kind (e.g., conjugate points). Hence denote $\mathfrak{B}^+(\varDelta) = \{\alpha = \langle f, h\rangle_{\mathscr{L}} \in \mathfrak{B}(\varDelta);\ h' > 0\}$, and for $\mathscr{L} \in \varDelta$ also $\mathfrak{A}^+(\mathscr{L}) = \mathfrak{A}(\mathscr{L}) \cap \mathfrak{B}^+(\varDelta)$ and $\mathfrak{A}_G^+\mathscr{L} = \mathfrak{A}_G(\mathscr{L}) \cap \mathfrak{B}^+(\varDelta)$. Evidently $\mathfrak{B}^+(\varDelta)$ has the structure of Brandt groupoid, and $\mathfrak{A}^+(\mathscr{L})$, $\mathfrak{A}_G^+(\mathscr{L})$ are groups.

4. NONTRIVIAL STATIONARY GROUPS $\mathfrak{A}^+(\mathscr{L})$ AND $\mathfrak{A}^+_{\{E\}}(\mathscr{L})$

Functional equations (2) and (4) that correspond to $\mathfrak{A}(\mathscr{L})$ and $\mathfrak{A}_{\{E\}}(\mathscr{L})$ were studied in [12]. From the results obtained there we have

Theorem 1. *Let $\mathscr{L} \in \varDelta \in \mathbf{\Delta}$, I being the interval of definition of $\mathscr{L}$. If $\mathfrak{A}^+(\mathscr{L})$ is not trivial, i.e., $\alpha = \langle f, h\rangle_{\mathscr{L}} \in \mathfrak{A}^+(\mathscr{L})$, $\alpha \neq \varepsilon_\alpha$, then $\{t \in I;\ h(t) = t\}$ has no* *accumulation point in I. On each maximal subinterval $(a, b) \subset I$ where $h(t) \neq t$, the equation $\mathscr{L}$ restricted on (a, b) is globally equivalent to a differential equation with periodic coefficients on $(-\infty, \infty)$.*

Theorem 2. *If $\mathscr{L}$ is globally equivalent to a differential equation with periodic coefficients on $(-\infty, \infty)$, then its stationary group $\mathfrak{A}^+(\mathscr{L})$ is not trivial.*

Theorem 3. *Let $\mathscr{L} \in \Delta$. $\mathfrak{A}^+_{\{E\}}(\mathscr{L})$ is not trivial if and only if there exists an equation in Δ having only periodic solutions on $(-\infty, \infty)$ with the same period.*

5. PHASES AND AMPLITUDES

Let a differential equation $\mathscr{E}(\Delta) \in \Delta$ be assigned to each $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}$ (e.g., called canonical). For each $\mathscr{L} \in \Delta$ we have $\alpha \in \mathfrak{B}(\Delta)$ such that $\mathscr{E}(\Delta) * \alpha = \mathscr{L}$. The $\alpha = \langle f \,.\, h \rangle_{\mathscr{E}(\Delta)}$ is called a *shift* of $\mathscr{L}$ with respect to $\mathscr{E}(\Delta)$, its multiplier f is an *amplitude* and its parametrization, h, is a *phase* of $\mathscr{L}$ (with respect $\mathscr{E}(\Delta)$). The set of all shifts of all equations from Δ with respect to $\mathscr{E}(\Delta)$ will be denoted as $\mathfrak{S}_\Delta$. The stationary group $\mathfrak{A}(\mathscr{E}(\Delta))$ of $\mathscr{E}(\Delta)$ will be called the fundamental group and denoted by $\mathfrak{F}_\Delta$.

Theorem 4. *If $\mathscr{L} \in \Delta$, then*

$$\mathfrak{A}(\mathscr{L}) = \alpha^{-1}\mathfrak{F}_\Delta\alpha\,, \tag{5}$$

where α is a shift of $\mathscr{L}$.

Proof follows from Proposition 2. ■

Theorem 5. *Let $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}$, $\mathscr{L} \in \Delta$, $\mathscr{P} \in \Delta$, let α be a shift of $\mathscr{L}$ and β a shift of $\mathscr{P}$ (with respect to $\mathscr{E}(\Delta)$). Then $\alpha^{-1}\beta$ is a transformation of $\mathscr{L}$ into $\mathscr{P}$, i.e., $\mathscr{L} * (\alpha^{-1}\beta) = \mathscr{P}$. All transformations of $\mathscr{L}$ into $\mathscr{P}$ form the set*

$$\alpha^{-1}\mathfrak{F}_\Delta\beta = \mathfrak{A}(\mathscr{L})\,\alpha^{-1}\beta = \alpha^{-1}\beta\,\mathfrak{A}(\mathscr{P})\,. \tag{6}$$

Proof. Since $\mathscr{E}(\Delta) * \alpha = \mathscr{L}$ and $\mathscr{E}(\Delta) * \beta = \mathscr{P}$, we have $\mathscr{L} * (\alpha^{-1}\beta) = \mathscr{E}(\Delta) * \beta = \mathscr{P}$. Each γ such that $\mathscr{L} * \gamma = \mathscr{P}$ satisfies $\mathscr{L} * \gamma\beta^{-1}\alpha = \mathscr{L}$, hence $\gamma\beta^{-1}\alpha \in \mathfrak{A}(\mathscr{L})$, or $\gamma \in \mathfrak{A}(\mathscr{L})\,\alpha^{-1}\beta$. Conversely, for each $\gamma \in \mathfrak{A}(\mathscr{L})\,\alpha^{-1}\beta$ we get $\mathscr{L} * \gamma = \mathscr{P}$. Finally, using (3) or (5) we obtain (6):

$$\mathfrak{A}(\mathscr{L})\,\alpha^{-1}\beta = \alpha^{-1}\mathfrak{F}_\Delta\alpha\alpha^{-1}\beta = \alpha^{-1}\mathfrak{F}_\Delta\beta = \alpha^{-1}\beta\,\mathfrak{A}(\mathscr{P})\,\beta^{-1}\beta\,. \quad ■$$

Theorem 6. *For $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}$, $\{\mathfrak{F}_\Delta\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{S}_\Delta\}$ is a decomposition of the set $\mathfrak{S}_\Delta$ of all shifts from Δ, called the right decomposition of $\mathfrak{S}_\Delta$ with respect to the fundamental* *group $\mathfrak{F}_\Delta$ and denoted by $\mathfrak{S}_\Delta/\mathfrak{F}_\Delta$. There exists a „natural" bijection between Δ and $\mathfrak{S}_\Delta/\mathfrak{F}_\Delta$.*

Proof. The bijection can be constructed so that we assign each $\mathscr{L} \in \Delta$ all shifts of $\mathscr{L} = \mathscr{E}(\Delta) * \alpha$, that is, according to Theorem 5, exactly $\mathfrak{F}_\Delta \alpha$. ■

6. SECOND ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Let us apply the above considerations to the set Δ^* formed by all both-side oscillatory equations of the form $y'' = q(t)\, y$ on $(-\infty, \infty)$, $q \in C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, see [1], [2]. Δ^* is a subclass of the class of globally transformable second order homogeneous differential equations both-side oscillatory on arbitrary open (bounded or unbounded) intervals. If $\mathscr{E}(\Delta^*) \equiv y'' = -y$ on $(-\infty, \infty)$, then $\mathfrak{A}(\mathscr{E}(\Delta^*))$ is the fundamental group $\mathfrak{C}$, the stationary group $\mathfrak{A}(\mathscr{L})$ is the group of dispersions of the 1st kind of the equation $\mathscr{L} \in \Delta^*$ that is conjugate to the fundamental group $\mathfrak{C}$ (Theorem 4). $\mathfrak{A}^+_{\{E\}}(\mathscr{L})$ is the group of the central dispersions of the 1st kind of $\mathscr{L}$, both $\mathfrak{A}(\mathscr{L})$ and $\mathfrak{A}^+_{\{E\}}(\mathscr{L})$ being nontrivial, since each solution of $y'' = -y$ is periodic on $\mathbf{R}$, Theorems 1, 2, and 3. Each shift $\alpha \in \mathfrak{S}_{\Delta^*}$ with respect to $\mathscr{E}(\Delta^*)$ corresponds to a phase $f \in C^3(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $f'(t) \neq 0$ on $\mathbf{R}$, in the sense of formula $\alpha = \langle 1/\sqrt{|f'|}, f\rangle$, $1/\sqrt{|f'|}$ being the amplitude of α with the phase f.

We may introduce a group theoretical structure into the set $\mathfrak{S}_{\Delta^*}$ by the function composition rule for phases in distinction of the Brandt groupoid structure. This is the reason why we write $\alpha = \langle 1/\sqrt{|f'|}, f\rangle$ without the index of a specified equation. Then $\mathfrak{S}_{\Delta^*}/\mathfrak{F}_{\Delta^*} = \mathfrak{S}_{\Delta^*}/\mathfrak{C}$ is the right decomposition of the group of phases with respect to the fundamental (sub)group $\mathfrak{C}$, the elements of the decomposition being in 1-1 correspondence to the equations in Δ^* (Theorem 6). Theorem 5 describes all global Kummer transformations of an equation $(q_1) \in \Delta^*$ with a shift (phase) α into an equation $(q_2) \in \Delta^*$ with a shift (phase) β as elements of $\alpha^{-1}\mathfrak{C}\beta$.

References

[1] *O. Borůvka:* Linear differential transformations of the second order, The English Univ. Press, London 1971.

[2] *O. Borůvka:* Теория глобальных свойств обыкновенных линейных диференциальных уравнений второго порядка, Дифференциальные уравнения *12* (1976), 1347—1383.

[3] *M. Hasse & L. Michler:* Theorie der Kategorien, VEB, Berlin 1966.

[4] *E. E. Kummer:* De generali quadam aequatione differentiali tertii ordinis, Progr. Evang. Royal & State Gymnasium, reprinted in J. Reine Angew. Math. (Crelle Journal) *100* (1887), 1—10.

[5] *M. Laguerre:* Sur les équations différentielles linéaires du troisième ordere, Comptes rendus *88* (1879), 116—119.

[6] *F. Neuman:* Geometrical approach to linear differential equations of the *n*-th order, Rend. Mat. *4* (1972), 579—602.

[7] *F. Neuman:* Global transformations of linear differential equations of the n-th order, Knižnice odb. a věd. spisů VUT Brno, B-56 (1975), 165—171.
[8] *F. Neuman:* L^2-solutions of $y'' = q(t)y$ and a functional equation, Aequationes Math. *6* (1971), 162—169.
[9) *F. Neuman:* A role of Abel's equation in the stability theory of differential equations, Aequationes Math. *6* (1971), 66—70.
[10] *F. Neuman:* Distribution of zeros of solutions of $y'' = q(t)y$ in relation to their behaviour in large, Studia Sci. Math. Hungar. *8* (1973), 177—185.
[11] *F. Neuman:* On a problem of transformations between limit-circle and limit-point differential equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A. *72* (1973/74), 187—193.
[12] *F. Neuman:* On solutions of the vector functional equation $\mathrm{y}(\xi(x)) = f(x) \,.\, A \,.\, \mathrm{y}(x)$, to appear in Aequationes Math. *15* (1977).
[13] *P. Stäckel:* Über Transformationen von Differentialgleichungen, J. Reine Angew. Math. (Crelle Journal) *111* (1893), 290—302.
[14] *J. Tabor:* Characterization of subgroupoids of a given groupoid, Tensor *29* (1975), 64—68.
[15] *E. J. Wilczynski:* Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, Teubner — Leipzig 1906.

Author's address: 662 95 Brno, Janáčkovo nám. 2a (Matematický ústav ČSAV, pobočka Brno).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

PERIODIC VIBRATIONS OF AN EXTENSIBLE BEAM

MARIE KOPÁČKOVÁ AND OTTO VEJVODA, Praha

(Received May 11, 1977)

1. INTRODUCTION

In the last years both free and forced vibrations of an extensible elastic beam have been studied by several authors ([1] – [6]). Under certain conditions forced vibrations of such a beam are described by the equation

$$u_{tt}(t, x) + u_{xxxx}(t, x) + \alpha u_t(t, x) - \beta u_{xx}(t, x) \int_0^\pi u_\xi^2(t, \xi)\, d\xi = f(t, x)\,.$$

We are interested in the existence of periodic solutions to this equation. In the presence of damping ($\alpha > 0$) this problem is examined in the paper of V. LOVICAR [9]. It may be shown (correspondingly to [8]) that there exists a sequence of free vibrations of undamped beam with hinged ends. However, in the case of $f \neq 0$ we are not able to solve this problem for α large. Thus limite ourselves to looking for a solution of the equation

(1) $$z_{tt}(t, x) + z_{xxxx}(t, x) = g(t, x) + \\ + \varepsilon \left[f(t, x) + z_{xx}(t, x) \int_0^\pi z_\xi^2(t, \xi)\, d\xi + \varepsilon \tilde{F}(z)(t, x) \right]$$

with homogeneous boundary conditions

(2) $$z(t, 0) = z(t, \pi) = z_{xx}(t, 0) = z_{xx}(t, \pi) = 0$$

and the condition of periodicity

(3) $$z(t, x) = z(t + \omega, x)\,.$$

We make use of the results of the paper by N. KRYLOVÁ, O. VEJVODA [7].

2. NOTATION AND AN AUXILIARY LEMMA

Let H^m be the Hilbert space of real functions $u(x)$ on $[0, \pi]$ which have generalized square integrable derivatives $u^{(j)}(x)$, $j = 0, 1, \ldots, m$ equipped with the norm

$$|u|_{H^m}^2 = \sum_{j=0}^{m} \int_0^\pi [u^{(j)}(x)]^2 \, dx .$$

Denote by ${}^0H^{2m}$ the space of functions from H^{2m} satisfying the conditions $u^{(2j)}(0) = u^{(2j)}(\pi) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, m - 1$, with the norm $|u|_{2m} \equiv |u^{(2m)}|_{H^0}$. Denoting

$$u_k = (2/\pi)^{1/2} \int_0^\pi u(x) \sin kx \, dx ,$$

let h^m be the space of real sequences $\{u_k;\ k = 1, 2, \ldots\})$ in the sequel, we write $u \equiv \{u_k\}$) for which $|u|_m^2 \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k^{2m} u_k^2 < +\infty$. The spaces ${}^0H^{2m}$ and h^{2m} are isometric and isomorphic.

The solution of the equation (1) will be sought in the space $\mathscr{U} = \{u \in C(R, {}^0H^4) \cap C^1(R, {}^0H^2) \cap C^2(R, H^0);\ u(t + \omega) = u(t),\ t \in R\}$ with the norm

$$|u|_{\mathscr{U}} \equiv \max_t |u(t)|_4 + \max_t |u_t(t)|_2 + \max_t |u_{tt}(t)|_0 =$$

$$= \max_t \big(\sum_{k=1}^{\infty} [k^4\, u_k(t)]^2\big)^{1/2} + \max_t \big[\sum_{k=1}^{\infty} (k^2\, u_k'(t))^2\big]^{1/2} + \max_t \big[\sum_{k=1}^{\infty} (u_k''(t))^2\big]^{1/2} .$$

Then $z \in \mathscr{U}$ satisfies the equation (1) in the sence of H^0 for all $t \in R$. The right hand sides of (1) will be elements of the space $\mathscr{G} \equiv \{u \in C(R, {}^0H^2);\ u(t + \omega) = u(t),\ t \in R$ with the norm $|u|_{\mathscr{G}} \equiv \max_t |u(t)|_2 = \max_t \big(\sum_{k=1}^{\infty} k^4\, u_k^2(t)\big)^{1/2}\}$.

For a while, let us investigate the limit problem given by (1), (2), (3) with $\varepsilon = 0$ and $g \in \mathscr{G}$. Looking for a solution z in the form $z(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \sin kx$ we find easily that $z_k(t)$ must satisfy the equation

$$z_k''(t) + k^4\, z_k(t) = g_k(t) , \tag{4}$$

for $k = 1, 2, \ldots$. By a well-known theorem from the theory of ordinary differential equations this equation has an ω-periodic solution if and only if g is orthogonal to the every ω-periodic solution to the corresponding homogeneous equation.

If k satisfies the relation $k^2\omega = 2\pi n$ (n integer) then the homogeneous equation (4) has two linearly independent ω-periodic solutions $\cos k^2 t$, $\sin k^2 t$. Denote by S the set of such k. For the other k there exists no ω-periodic solution. Hence, the orthogonality conditions read

$$\int_0^\omega g_k(t) \cos k^2 t \, dt = 0 , \quad \int_0^\omega g_k(t) \sin k^2 t \, dt = 0 , \quad k \in S . \tag{5}$$

Clearly, if $\nu \equiv 2\pi\omega^{-1}$ is rational the set S is infinite. On the other hand, if ν is irrational the set S is empty, but we can not study this case in the sequel, because by the theorem 6.4.1 from [1] the nonlinearity in (1) includes derivatives of too high order. If these conditions are fulfilled the ω-periodic solution of (4) is of the form

$$z_k(t) = a_k \cos k^2 t + b_k \sin k^2 t + k^{-2} \int_0^t g_k(\tau) \sin k^2(t - \tau)\, d\tau \tag{6}$$

$(k = 1, 2, \ldots)$, where $a_k, b_k, \sum k^8 a_k^2 + \sum k^8 b_k^2 < \infty$ are arbitrary for $k \in S$ and

$$a_k = [2k^2 \sin(k^2 \tfrac{1}{2}\omega)]^{-1} \int_0^\omega g_k(\tau) \cos k^2(\tfrac{1}{2}\omega - \tau)\, d\tau\,,$$

$$b_k = -[2k^2 \sin(k^2 \tfrac{1}{2}\omega)]^{-1} \int_0^\omega g_k(\tau) \sin k^2(\tfrac{1}{2}\omega - \tau)\, d\tau$$

for $k \bar{\in} S$.

Let $g \in \mathscr{G}$, satisfy (5) for $k \in S$ and let $z^0(t, x)$ be the solution to (1), (2), (3) for $\varepsilon = 0$ of the form $z^0(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k^0(t) \sin kx$, where $z_k^0(t)$ is given by (6) with $a_k = b_k = 0$ for $k \in S$. Then the problem (1), (2), (3) may be reduced to that of finding a function u satisfying the equation

$$u_{tt} + u_{xxxx} = \varepsilon F(u) \tag{1'}$$

and the conditions (2), (3), where

$$F(u)(t, x) \equiv (z^0 + u)_{xx}(t, x) \int_0^\pi (z^0 + u)_\xi^2 (t, \xi)\, d\xi + \tag{7}$$

$$+ f(t, x) + \varepsilon \bar{F}(z^0 + u)(t, x)\,, \quad z = u + z^0\,.$$

Hence we have easily

Lemma 1. *Let* $F(u) : \mathscr{U} \to \mathscr{G}$, $F(u)(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(u)(t) \sin kx$, $u \in \mathscr{U}$, $u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx$. *Then* $u(t, x)$ *is a solution of* (1'), (2), (3) *if and only if there exist* $a, b \in h^4$ *such that*

$$G(u, a, b, \varepsilon) = 0\,, \tag{8}$$

where

$$G = (G_1, G_2, G_3)\,,$$

$$G_{1k}(u, a, b, \varepsilon)(t) \equiv -u_k(t) + a_k \cos k^2 t + b_k \sin k^2 t + \tag{9}$$

$$+ \varepsilon k^{-2} \int_0^t F_k(u)(\tau) \sin k^2(t - \tau)\, d\tau\,, \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots\,,$$

$$(10)\qquad G_{2k}(u, a, b, \varepsilon) \equiv -a_k + \varepsilon(2k^2 \sin(k^2 \tfrac{1}{2}\omega))^{-1} \int_0^\omega F_k(u)(\tau) \cos k^2(\tfrac{1}{2}\omega - \tau)\, d\tau\,,$$

$$G_{3k}(u, a, b, \varepsilon) \equiv b_k + \varepsilon(2k^2 \sin(k^2 \tfrac{1}{2}\omega))^{-1} \int_0^\omega F_k(u)(\tau) \sin k^2(\tfrac{1}{2}\omega - \tau)\, d\tau\,,$$

for $k \bar{\in} S$,

$$(11)\qquad G_{2k}(u, a. b, \varepsilon) \equiv k^{-2} \int_0^\omega F_k(u)(\tau) \cos(k^2\tau)\, d\tau\,,$$

$$G_{3k}(u, a, b, \varepsilon) \equiv k^{-2} \int_0^\omega F_k(u)(\tau) \sin(k^2\tau)\, d\tau\,,$$

for $k \in S$.

Note, that

$$u(0, x) = (2/\pi)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx,\quad u_t(0, x) = (2/\pi)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k \sin kx\,.$$

These equation will be solved by means of the following implicit function theorem

Theorem 1. *Let the following assumptions be fulfilled:*

(a) *$G(v, \varepsilon)$ is a mapping from Banach space $B_1 \times [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ into Banach space B_2;*

(b) *the equation $G(v, 0) = 0$ has a solution $v_0 \in B_1$;*

(c) *the mapping $G(v, \varepsilon)$ is continuous in ε and has G-derivative $G'_v(v, \varepsilon)$ continuous in v, ε for $|v - v_0|_{B_1} \leqq K$, $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_1$;*

(d) *$[G'_v(v_0, 0]^{-1}$ exists, is bounded and maps B_2 on B_1.*

Then there exists $\varepsilon_0 > 0$ such that the equation $G(v, \varepsilon) = 0$ has a unique solution $v(\varepsilon) \in B_1$ for $\varepsilon \in -[\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ which is continuous in ε and such that $v(0) = v_0$.

3. MAIN RESULTS

For the sake of simplicity of calculations we shall find solution to the problem (1), (2), (3) only for g of the form

$$(12)\qquad g(t, x) = \cos(\nu k_0 t)\{g_1[1 - (\nu k_0^2)] \sin x + g_3[3^4 - (\nu k_0^2)] \sin 3x\}\,,$$

where k_0 is a positive integer such that $\nu k_0 \neq 3$ if $1 \in S$, $\nu k_0 \neq 5$ if 1 or $3 \in S$, $\nu k_0 \neq 4$ if 1 or 2 or $3 \in S$. In that case

$$(13)\qquad z^0(t, x) = \cos(\nu k_0 t)(g_1 \sin x + g_3 \sin 3x)\,.$$

We prove the following

Theorem 2. *Let g be of the form (12), $f \in \mathscr{G}$, $|f|_{\mathscr{G}} + |g|_{\mathscr{G}} > 0$, ω rational. Let $F(u) : \mathscr{U} \to \mathscr{G}$ have a continuous G-derivative in $\mathscr{U}$.*

Then there exists $\varepsilon_0 > 0$, $u^0 \in \mathscr{U}$ *such that the problem* (1), (2), (3) *has a unique solution* $z(\varepsilon) \in \mathscr{U}$ *for* $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ *which is continuous in* ε *and such that* $z(0) = = z^0 + u^0$, $\bar{a}^0$ *is a solution of the equation* $G(u, a, b, 0) = 0$,

$$u^0(t, x) = \sum_{k \in S} [a_k^0 \cos(k^2 t) + b_k^0 \sin(k^2 t)] \sin kx . \tag{14}$$

First, we shall prove two lemmas.

Lemma 2. *Let* $\sigma \geqq 0$, $\sigma_k \geqq 0$, $\sigma_k = 0$ *for* $k \neq 1, 3$, $\sum_{k \in S} k^8(p_k^2 + q_k^2) < +\infty$. *Then the system of algebraic equations*

$$\begin{aligned} a_k[k^2(a_k^2 + b_k^2) + 2(\sigma + \sigma_k)] &= p_k , \\ b_k[k^2(a_k^2 + b_k^2) + 2(\sigma + \sigma_k)] &= q_k \end{aligned} \tag{15}$$

has a unique solution $a_k(\sigma)$, $b_k(\sigma)$, $k \in S$, $\sum_{k \in S} k^8[a_k^2(\sigma) + b_k^2(\sigma)] < +\infty$ *for* $\sigma > 0$, *the function* $A(\sigma) \equiv \sum_{k \in S} k^2[a_k^2(\sigma) + b_k^2(\sigma)]$ *is strictly decreasing on* $(0, +\infty)$, $0 < A(0) < +\infty$ *and* $\lim_{\sigma \to \infty} A(\sigma) = 0$.

Proof. The equations (15) imply

$$a_k = 0 \Leftrightarrow p_k = 0 , \quad b_k = 0 \Leftrightarrow q_k = 0 .$$

Hence we may suppose $p_k^2 + q_k^2 > 0$. Substituting $a_k = p_k y_k$, $b_k = q_k y_k$, $k \in S$ into (15), these equations reduce to the equations

$$y_k^3 + y_k . [2(\sigma + \sigma_k) k^{-2}(p_k^2 + q_k^2)^{-1}] - k^{-2}(p_k^2 + q_k^2)^{-1} = 0 , \quad k \in S$$

for y_k, which have a unique real root for every $k \in S$, namely

$$\begin{aligned} y_k(\sigma) = B_k\{&[(1 + (4B_k(\sigma + \sigma_k)/3)^3)^{1/2} + 1]^{1/3} - \\ &- [(1 + (4B_k(\sigma + \sigma_k)/3)^3)^{1/2} - 1]^{1/3}\} \quad \text{where} \quad B_k = [2k^2(p_k^2 + q_k^2)]^{-1/3} . \end{aligned}$$

As $y_k(\sigma) \leqq 3[2(\sigma + \sigma_k)]^{-1}$ the following estimate holds

$$a_k^2 + b_k^2 \leqq 9[2(\sigma + \sigma_k)]^{-2} (p_k^2 + q_k^2) \text{ which implies}$$

$$\sum_{k \in S} k^8(a_k^2 + b_k^2) \leqq C\sigma^{-2} \sum_{k \in S} k^8(p_k^2 + q_k^2) .$$

Since $y_k'(\sigma) < 0$ for $\sigma > 0$, $y_k(\sigma)$ is strictly decreasing on $(0, +\infty)$ for $k \in S$ and so is $A(\sigma)$. As $y_k(0) = 2B_k$ for $k \neq 1, 3$ and

$$y_k(0) = B_k\{[(1 + (4B_k\sigma_k/3)^3)^{1/2} + 1]^{1/3} - [(1 + (4B_k\sigma_k/3)^3)^{1/2} - 1]^{1/3}$$

for $k = 1, 3$, we have $0 < A(0) < C[\sum_{k\in S} k^8(p_k^2 + q_k^2)]^{1/3} < +\infty$. Finally, the inequality $A(\sigma) \leqq C\sigma^{-2} \sum k^2(p_k^2 + q_k^2)$ implies $\lim A(\sigma) = 0$ if $\sigma \to \infty$.

Lemma 3. *Let $\sum k^8(r_k^2 + s_k^2) < +\infty$, $D_k \equiv 2(\sigma + \sigma_k) + k^2(a_k^2 + b_k^2)$, $a_k, b_k, \sigma, \sigma_k$ be from Lemma 2. Then the system of linear equations for c_k, d_k, $k \in S$*

$$D_k c_k + [2 \sum_{j\in S} j^2(a_j c_j + b_j d_j) + k^2(a_k c_k + b_k d_k)]\, a_k = r_k \tag{16}$$

$$D_k d_k + [2 \sum_{j\in S} j^2(a_j c_j + b_j d_j) + k^2(a_k c_k + b_k d_k)]\, b_k = s_k\,, \quad k \in S$$

has a unique solution c_k, d_k, $k \in S$ and the following estimate holds

$$\sum_{k\in S} k^8(c_k^2 + d_k^2) \leqq C \sum_{k\in S} k^8(r_k^2 + s_k^2)\,. \tag{17}$$

Proof. If $a_k = b_k = 0$ then

$$c_k^2 + d_k^2 = D_k^{-2}(r_k^2 + s_k^2)$$

Now, let $a_k^2 + b_k^2 > 0$. Multiplying the first equation of (16) by a_k, the second by b_k, multiplying the first equation of (16) by b_k and second by a_k we get an equivalent system to (16)

$$[D_k + 2k^2(a_k^2 + b_k^2)]\,(a_k c_k + b_k d_k) + 4(a_k^2 + b_k^2)\,\sigma' = r_k a_k + s_k b_k\,, \tag{18}$$

$$D_k(b_k c_k - a_k d_k) = r_k b_k - s_k a_k\,, \quad k \in S$$

where $\sigma' = \sum_{j\in S} j^2(a_j c_j + b_j d_j)$.

Multiplying the first equation by $k^2[D_k + 2k^2(a_k^2 + b_k^2)]^{-1}$ and summing it for $k \in S$ we have

$$\sigma' = \sum_{k\in S} k^2(r_k a_k + s_k b_k)\,[D_k + 2k^2(a_k^2 + b_k^2)]^{-1}\,.$$

$$.\,\{1 + 4 \sum_{k\in S} k^2(a_k^2 + b_k^2)\,[D_k + 2k^2(a_k^2 + b_k^2)]^{-1}\}^{-1}$$

which implies the following estimate (using the Hölder inequality)

$$|\sigma'|^2 \leqq c \sum k^2(r_k^2 + s_k^2)\,. \tag{19}$$

Further, from (18) we get

$$(a_k^2 + b_k^2)(c_k^2 + d_k^2) = (r_k b_k - s_k a_k)^2\, D_k^{-2} +$$

$$+ [r_k a_k + s_k b_k - 4(a_k^2 + b_k^2)\,\sigma']^2\, [D_k + 2k^2(a_k^2 + b_k^2)]^{-2}\,,$$

from which follows

$$k^8(c_k^2 + d_k^2) \leqq [r_k^2 + s_k^2 + 16(a_k^2 + b_k^2)(\sigma')^2]\, D_k^{-2}\,.$$

This estimate together with (19) imply (17).

Proof of Theorem 2. It suffices to show that the operator G defined by (9), (10), (11) satisfies the assumptions of Theorem 1 with $B_1 = B_2 = \mathscr{U} \times h^4 \times h^4$. The assumptions (a) and (c) are fulfilled in virtue of Lemma 1 and of the assumptions of Theorem 2. To verify the assumption (b) requires to show that the system

$$(20) \qquad -u_k + a_k \cos k^2 t + b_k \sin k^2 t = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$a_k = 0\,,$$

$$b_k = 0\,, \quad k \in S\,.$$

$$(21) \qquad k^{-2} \int_0^\omega F_k(u, 0)\,(\tau,) \cos k^2 \tau \,\mathrm{d}\tau = 0\,,$$

$$k^{-2} \int_0^\omega F_k(u, 0)\,(\tau,) \sin k^2 \tau \,\mathrm{d}\tau = 0\,, \quad k \in S$$

has a unique solution $(u^0, a^0, b^0) \in \mathscr{U} \times h^4 \times h^4$, which means, in fact, that the equations (21) have a solutions $a_k^0, b_k^0, k \in S, \sum_{k \in S} k^8[(a_k^0)^2 + (b_k^0)^2] < +\infty$. Inserting (7), (20) into (21) we get after some calculation the equations

$$(22) \quad a_k[g_1^2 + 9g_3^2 + \sum_{j \in S} j^2(a_j^2 + b_j^2) + k^2(a_k^2 + b_k^2) + \sigma_k] = f_k^c\,,$$

$$b_k[g_1^2 + 9g_3^2 + \sum_{j \in S} j^2(a_j^2 + b_j^2) + k^2(a_k^2 + b_k^2) + \sigma_k] = f_k^s\,, \quad k \in S\,,$$

where

$$f_k^c = 2(\pi k^2)^{-1} \int_0^\omega \int_0^\pi f(t, x) \cos k^2 t \sin kx \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t\,,$$

$$f_k^s = 2(\pi k^2)^{-1} \int_0^\omega \int_0^\pi f(t, x) \sin k^2 t \sin kx \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t\,,$$

$$\sigma_k = k^2 g_k \quad \text{for} \quad k = 1, 3\,, \quad \sigma_k = 0 \quad \text{for} \quad k \neq 1, 3\,.$$

In the case of more general function $g(t, x)$ the equation (22) will be more complicated.

By Lemma 2 (putting $p_k = f_k^c$, $g_k = f_k^s$, $\sigma = g_1^2 + 9g_3^2 + \sum_{j \in S} j^2(a_j^2 + b_j^2)$) this system has a solution if and only if the equation

$$\sigma = g_1^2 + 9g_3^2 + A(\sigma)$$

has a real solution $\sigma_0 > 0$. However this is an immidiate consequence of Lemma 2. Thus $a_k^0 = a_k(\sigma_0)$, $b_k^0 = b_k(\sigma_0)$, $k \in S$ from Lemma 2 are the solutions to (22). By Lemma 2 $\sum k^8.\ [(a_k^0)^2 + (b_k^0)^2]$ is finite for $f \in \mathscr{G}$ and hence $a^0, b^0 = \{a_k^0, b_k^0$, for $k \in S$ $a_k^0 = b_k^0 = 0$, for $k \bar{\in} S\}$ and u^0 are the solutions of (20), (21), $a^0, b^0 \in h^4$ and u^0 is of the form (14).

To prove (d) let us show that the system

$$G'_{(u,a,b)}(u^0, a^0, b^0, 0)\,(\bar{u}, \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{f}, \bar{p}, \bar{q})$$

i.e.

$$-\bar{u}_k(t) + \bar{a}_k \cos k^2 t + \bar{b}_k \sin k^2 t = \bar{f}_k\,, \quad \bar{a}_k = \bar{p}_k\,, \quad \bar{b}_k = \bar{q}_k\,, \quad k \in S\,,$$

$$\int_0^\omega \{\bar{u}_k(t) \sum_{j\in S} j^2(z_j^0(t) + u_j^0(t))^2 + 2(z_k^0(t) + u_k^0(t))\,.$$

$$.\sum_{j\in S} j^2(z_j^0(t) + u_j^0(t))\,\bar{u}_j(t)\} \cos k^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\,\bar{p}_k\,, \quad k \in S$$

$$\int_0^\omega \{\bar{u}_k(t) \sum_{j\in S} j^2(z_j^0(t) + u_j^0(t))^2 + 2(z_k^0(t) + u_k^0(t)) +$$

$$+ \sum_{j\in S} j^2(z_j^0(t) + u_j^0(t))\,\bar{u}_j(t)\} \sin k^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\,\bar{q}_k\,, \quad k \in S$$

has a unique solution for every $(\bar{f}, \bar{p}, \bar{q}) \in \mathcal{U} \times h^4 \times h^4$ satisfying

$$|\bar{u}|_4 + |\bar{a}|_{h^4} + |\bar{b}|_{h^4} \leqq C(|\bar{f}|_4 + |\bar{p}|_{h^4} + |\bar{q}|_{h^4})\,. \tag{23}$$

Obviously, it is sufficient to prove this assertion only for the last two equations and $\bar{a}_k$, $\bar{b}_k$, $k \in S$. Integrating we obtain equations (16) with

$$\bar{r}_k = 2\bar{p}_k\,, \quad \bar{s}_k = 2\bar{q}_k\,, \quad c_k = \bar{a}_k\,, \quad d_k = \bar{b}_k\,, \quad \sigma_k = k^2 g_k^2 \quad \text{for} \quad k = 1, 3\,, \quad \sigma_k = 0$$

for $k \neq 1, 3$,

From Lemma 3 it follows the existence and uniqueness of such $\bar{a}_k$, $\bar{b}_k$ and the estimate (23), which completes the proof.

References

[1] *S. Woinowsky-Krieger:* The effect of an axial force on the vibration of hinged bars. Journ. of Appl. Mech., *17* (1950), p. 35—36.

[2] *J. G. Eisley:* Nonlinear vibration of beams and rectangular plates. ZAMP, *15* (1964), p. 167—175.

[3] *J. M. Ball:* Initial-boundary value problems for an extensible beam. Journ. of Math. Anal. Appl. *42* (1973), p. 61—90.

[4] *J. M. Ball:* Stability theory for an extensible beam. Journ. of Diff. Eq. *14* (1973), p. 399—418.

[5] *R. van Dooren:* Two mode sub-harmonic vibrations of order 1/9 of a nonlinear beam forced by a two mode harmonic load. Journ. of Sound and Vibr. *41* (2), (1975), p. 133—142.

[6] *R. van Dooren, R. Bouc:* Two mode sub-harmonic and harmonic vibrations of a nonlinear beam forced by a two mode harmonic load. Int. J. Non-Linear Mech., *10*, (1975) p. 271—280.

[7] *N. Krylová, O. Vejvoda:* A linear and weakly nonlinear equation of a beam. Czech. Math. J. vol. *21* (*96*), (1971), p. 535—566.

[8] *S. Fučík, V. Lovicar:* Periodic solutions of the equation $x''(t) + g(x(t)) = p(t)$. Čas. pro pěst. mat., roč. *100* (1975), 160—175.

[9] *V. Lovicar:* Periodic solutions of nonlinear abstract second order equations with a dissipative term. (to appear).

Authors' address: **115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).**

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

PERIODIC SOLUTIONS OF NONLINEAR ABSTRACT SECOND ORDER EQUATIONS WITH DISSIPATIVE TERMS

VLADIMÍR LOVICAR, Praha

(Received May 27, 1977)

1. INTRODUCTION

Notation used in this paper is clear. In particular, R denotes the real line, $D(A)$ denotes the domain of an operator A and $x_n \rightharpoonup x$ or $x_n \overset{B}{\rightharpoonup} x$ means that a sequence x_n converges weakly to the element x in a Banach space B.

Let H_0 be a separable Hilbert space (with an inner product denoted by $(\cdot,\cdot)_0$ and the corresponding norm denoted by $|\cdot|_0$ and let A be a positive definite selfadjoint operator in H_0. For $\alpha > 0$ we shall denote by A^α the positive α-th power of A and by H_α the (separable) Hilbert space $D(A^\alpha)$ (with the inner product $(x, y)_\alpha = (A^\alpha x, A^\alpha y)_0$ $(x, y \in D(A^\alpha))$ and the corresponding norm $|\cdot|_\alpha$). Further, let F be a continuous operator on on $R \times H_1 \times H_0$ into H_0. Under the (generalized) solution of the equation

$$u''(t) + A^2 u(t) = F(t, u(t), u'(t)) \tag{1}$$

on an interval $[a, b] \subseteq R$ we understand a function $u \in C^1([a, b]; H_0) \cap C([a, b]; H_1)$ for which

$$u(t) = \cos A(t-a)\, u(a) + A^{-1} \sin A(t-a)\, u'(a) + \int_a^t A^{-1} \sin A(t-s)\, F(s, u(s), u'(s))\, ds \tag{2}$$

holds for $t \in [a, b]$.

Remark 1. It may be easily verified that if $u \in C^2([a, b]; H_0) \cap C^1([a, b]; H_1) \cap C([a, b]; H_2)$ satisfies the equation (1) in the classical sense then it is a (generalized) solution of (1). (More about (generalized) solutions of the equation (1) is found e.g. in [3] (putting $\gamma = 0$ in the notation of the paper [3]).)

Remark 2. If u is a solution of (1) on $[a, b]$ then

$$u'(t) = -A \sin A(t - a)\, u(a) + \cos A(t - a)\, u'(a) + \\ + \int_a^t \cos A(t - s)\, F(s, u(s), u'(s))\, ds \tag{3}$$

holds for $t \in [a, b]$.

Remark 3. If $u \in C([a, b]; H_1)$ and $v \in C([a, b]; H_0)$ are such that $u(t) = \cos A(t - a)\, u(a) + A^{-1} \sin A(t - a)\, v(a) + \int_a^t A^{-1} \sin A(t - s)\, F(s, u(s), v(s))\, ds$ and $v(t) = -A \sin A(t - a)\, u(a) + \cos A(t - a)\, v(a) + \int_a^t \cos A(t - s)\, F(s, u(s), v(s))\, ds$ hold for $t \in [a, b]$ then u is a solution of (1) on $[a, b]$ and $u' = v$.

The aim of this paper is to find assumptions on the operator F under which there exists at least one ω-periodic (generalized) solution of (1), i.e. such a solution u on the interval $[0, \omega]$ for which $u(0) = u(\omega)$ and $u'(0) = u'(\omega)$. The basic tool for obtaining this result is the following well known fixed point theorem which is a cosequence of the Schauder-Tichonov Fixed Point Theorem (see e.g. [1], p. 456):

Proposition. *Let B be a separable reflexive Banach space, K a nonempty closed bounded convex subset of B and T a weakly continuous operator on K into K (i.e. $x_n \in K$ and $x_n \rightharpoonup x$ implies $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$). Then T has at least one fixed point in K, i.e. there exists $x_0 \in K$ such that $T(x_0) = x_0$.*

To prove the existence of an ω-periodic solution of (1) we shall show that there exists a nonempty closed bounded convex set $K \subseteq H_1 \times H_0$ such that to any $(x, y) \in K$ there exists a unique solution u of (1) on $[0, \omega]$ with initial values (x, y) (i.e. $u(0) = x$, $u'(0) = y$). Further, the operator T defined by $T(x, y) = (u(\omega), u'(\omega))$ is a weakly continuous operator on K and maps K into K. Thus according to Proposition, T has at least one fixed point which will prove the main result. This method was used in fact e.g. in [4].

The assumptions on F and the main theorem are stated in Section 2. In Section 3 some Lemmas are given from which the main theorem immediately follows. An example showing the applicability of the main theorem is given in Section 4. (This example deals with the equation of an extensible beam, see e.g. [5].)

2. MAIN THEOREM

We shall suppose that the right hand side of the equation (1) satisfies the following assumptions:

(4) F is continuous operator on $R \times H_1 \times H_0$ into H_0; to any $r > 0$ there exists a constant $c(r)$ such that

$$|F(t, x_1, y_1) - F(t, x_2, y_2)|_0 \leqq c(r)(|x_1 - x_2|_1 + |y_1 - y_2|_0)$$

holds for $t \in R$, $x_j \in H_1$, $|x_j|_1 \leqq r$, $y_j \in H_0$, $|y_j|_0 \leqq r$ $(j = 1, 2)$.

(5) There exist G, g, d, p, β_0 and r_0 such that

(5a) G is a continuous operator on H_1 into H_0;

(5b) g is a continuous convex real functional on H_1;

(5c) g is Gateaux differentiable on H_1 and $g'(x)(y) = 2\,\mathrm{Re}\,(G(x), y)_0$ holds for any $x, y \in H_1$;

(5d) $d = \min\{|x|_1^2 + g(x);\ x \in H_1\}$;

(5e) p is a real nondecreasing continuous function on $[d, \infty)$ which is locally Lipschitzian on (d, ∞);

(5f) $2\,\mathrm{Re}\,(F(t, x, y) + G(x) + 2\beta_0 y + \beta_0^2 x, y + \beta_0 x)_0 + 2\beta_0\, g(x) - - 2\beta_0(G(x), x)_0 \leqq p(|x|_1^2 + |y + \beta_0 x|_0^2 + g(x))$ holds for $t \in R$, $x \in H_1$ and $y \in H_0$;

(5g) $r_0 > d$ and $-2\beta_0 r_0 + p(r_0) \leqq 0$.

(6) If $x_n \in H_1$, $x_n \overset{H_1}{\rightharpoonup} x$, $y_n \in H_0$, $y_n \overset{H_0}{\rightharpoonup} y$ then $F(t, x_n, y_n) \overset{H_0}{\rightharpoonup} F(t, x, y)$ for all $t \in R$.

Theorem. *Let $\omega > 0$. Let H_0 be a separable Hilbert space, A a positive definite selfadjoint operator in H_0, $H_1 = D(A)$ and let F be an operator on $R \times H_1 \times H_0$ into H_0 which satisfies the assumptions (4), (5) and (6). Then there exists an ω-periodic solution of the equation (1).*

The proof of Theorem follows immediately from Lemmas 5 and 6 (see next section) and from the above Proposition.

Remark 4. Obviously, it suffices to suppose that F is defined only on $[0, \omega] \times \times H_1 \times H_0$. We shall use this fact in Section 4.

3. AUXILIARY LEMMAS

Lemma 1. *Let F satisfy the assumption (4). Then to any $r > 0$ and $a, b \in R$ there exists $\delta > 0$ such that for $(x, y) \in H_1 \times H_0$ with $|x|_1 \leqq r$, $|y|_0 \leqq r$ and $t_0 \in [a, b]$ there exists a solution u of (1) on the interval $[t_0, t_0 + \delta]$ with $u(t_0) = x$ and $u'(t_0) = y$.*

Lemma 2. *Let F satisfy the assumption (4) and let u_1, u_2 be solutions of (1) on an interval $[a, b] \subseteq R$ with $u_1(a) = u_2(a)$ and $u_1'(a) = u_2'(a)$. Then $u_1 = u_2$.*

The above assertions may be proved in the same way as the analogous results from the theory of ordinary differential equations (the essential means being Banach Contraction Principle and Gronwall's Lemma). Therefore their proofs are omitted.

Lemma 3. *Let u be a solution of the equation*

$$u''(t) + A^2 u(t) = f(t) \tag{7}$$

on an interval $[a, b] \subseteq R$ where $f \in C([a, b]; H_0)$. Then

$$|u(t)|_1^2 + |u'(t) + \beta u(t)|_0^2 = e^{-2\beta(t-a)}(|u(a)|_1^2 + |u'(a) + \beta u(a)|_0^2) + \tag{8}$$

$$+ 2\int_a^t e^{-2\beta(t-s)} \operatorname{Re}(f(s) + 2\beta u'(s) + \beta^2 u(s), u'(s) + \beta u(s))_0 \, ds$$

holds for any $\beta \in R$ and $t \in [a, b]$.

Proof. The proof of (8) may proceed in the same way as that for the usual energy equality. If $u \in C^2([a, b]; H_0) \cap C^1([a, b]; H_1) \cap C([a, b]; H_2)$, then denoting $z(s) = |u(s)|_1^2 + |u'(s) + \beta u(s)|_0^2$ one immediately verifies that $z'(s) + 2\beta z(s) = 2 \operatorname{Re}(f(s) + 2\beta u'(s) + \beta^2 u(s), u'(s) + \beta u(s))_0$ holds for any $\beta \in R$ and $s \in [a, b]$. Multiplying this equality by $e^{-2\beta(t-s)}$ and integrating over $[a, t]$ we obtain (8). The validity of (8) for any solution u is obtained by the usual approximation process.

Lemma 4. *Let F satisfy the assumption* (4) *and let G, g satisfy the assumptions* (5a), (5b) *and* (5c). *Then for any solution u of* (1) *on an interval $[a, b] \subseteq R$ we have*

$$|u(t)|_1^2 + |u'(t) + \beta u(t)|_0^2 + g(u(t)) = \tag{9}$$

$$= e^{-2\beta(t-a)}(|u(a)|_1^2 + |u'(a) + \beta u(a)|_0^2 + g(u(a))) +$$

$$+ 2\int_a^t e^{-2\beta(t-s)}[\operatorname{Re}(F(s, u(s), u'(s)) + G(u(s)) + 2\beta u'(s) +$$

$$+ \beta^2 u(s), u'(s) + \beta u(s))_0 + \beta g(u(s)) - \beta(G(u(s)), u(s))_0] \, ds$$

for any $\beta \in R$ and $t \in [a, b]$.

Proof. It is easy to see that the function $s \to g(u(s))$ is continuously differentiable on $[a, b]$ and $g(u(\cdot))'(s) = 2 \operatorname{Re}(G(u(s)), u'(s))_0$. The relation (9) follows now immediately from (8).

Lemma 5. *Let F satisfy the assumptions* (4) *and* (5) *and let us denote*

$$K = \{(x, y) \in H_1 \times H_0;\ |x|_1^2 + |y + \beta_0 x|_0^2 + g(x) \leq r_0\}. \tag{10}$$

Then

1. *K is a nonempty closed bounded convex subset of $H_1 \times H_0$;*
2. *to any $(x, y) \in K$ there exists a solution u of* (1) *on the interval $[0, \omega]$ with initial values (x, y). Moreover, $(u(t), u'(t)) \in K$ for $t \in [0, \omega]$.*

Proof. It is easy to verify 1. To prove 2 it is sufficient to show, with respect to Lemma 1, that if u is a solution of (1) on $[0, \omega]$ with $(u(0), u'(0)) \in K$ then $(u(t), u'(t)) \in \in K$ for $t \in [0, \omega]$. For $t \in [0, \omega]$ let us denote $z(t) = |u(t)|_1^2 + |u'(t) + \beta_0 u(t)|_0^2 + g(u(t))$, $q(t) = z(0) e^{-2\beta_0(t-s)} p(z(s)) ds$. Clearly $z \in C([0, \omega])$ and $q \in C^1([0, \omega])$. With respect to (5f) and Lemma 4 $z(t) \leqq q(t)$ holds for $t \in [0, \omega]$. Since p is non-decreasing, $q'(t) = -2\beta_0 q(t) + p(z(t)) \leqq -2\beta_0 q(t) + p(q(t))$ holds for $t \in [0, \omega]$. The assumption (5g) implies that $z(t) \leqq q(t) \leqq r_0$ or, in other words, $(u(t), u'(t)) \in K$ for $t \in [0, \omega]$.

For $(x, y) \in K$ let us define

$$T(x, y) = (u(\omega), u'(\omega)) \tag{11}$$

where u is a solution of (1) on $[0, \omega]$ with initial values (x, y). Lemmas 5 and 2 imply that T is a single-valued operator which maps K into K.

Lemma 6. *Let F satisfy the assumptions* (4), (5) *and* (6) *and let K and T be defined by* (10) *and* (11). *Then T is a weakly continuous operator.*

Proof. Let $(x_n, y_n) \in K$ $(x_n, y_n) \rightharpoonup (x, y)$. First let us notice that it is sufficient to show that there exists a subsequence (x_{k_n}, y_{k_n}) such that $T(x_{k_n}, y_{k_n}) \rightharpoonup T(x, y)$. Let u_n be solutions of (1) on $[0, \omega]$ with initial values (x_n, y_n). It is easy to see from the expressions (2) and (3) that for any $z \in H_1$ $(z \in H_0)$ the functions $t \to (u_n(t), z)_1$ . . $(t \to (u_n'(t), z)_0)$ are equicontinuous on $[0, \omega]$. Hence (with respect to the separability of the spaces H_1, H_0 and using Cantor's diagonal method) we obtain that there exists a subsequence u_k such that

$$u_{k_n}(t) \overset{H_1}{\rightharpoonup} u(t)\,, \quad u_{k_n}'(t) \overset{H_0}{\rightharpoonup} v(t) \quad (t \in [0, \omega])\,. \tag{12}$$

The assumption (6) implies (with respect to theorems of Pettis and of Bochner — see e.g. [2] p. 131 and 133) that the function $t \to F(t, u(t), v(t))$ belongs to $L_1(0, \omega; H_0)$ and that the relations $u(t) = \cos At\, x + A^{-1} \sin At\, y + \int_0^t A^{-1} \sin A(t-s)\,.\, F(s, u(s), v(s))\, ds$, $v(t) = -A \sin At\, x + \cos At\, y + \int_0^t \cos A(t-s)\, F(s, u(s), v(s))\,.\, ds$ hold for $t \in [0, \omega]$. Hence, by Remark 3, the function u is a solution of (1) on $[0, \omega]$ with initial values (x, y) and $u' = v$. The relation (12) for $t = \omega$ says in other words that $T(x_{k_n}, y_{k_n}) \rightharpoonup T(x, y)$.

4. EXAMPLE

On $[0, \omega] \times J$ $(J = [0, 1])$ let us consider an equation

$$u_{tt}(t, x) + a\, u_t(t, x) + u_{xxxx}(t, x) - b\left(\int_0^1 |u_x(t, \xi)|^2 \, d\xi\right) u_{xx}(t, x) = f(t, x) \tag{13}$$

with boundary conditions

$$(14) \qquad u(t, 0) = u(t, 1) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = 0 \quad (t \in [0, \omega]),$$

where $a > 0$ and $b \geqq 0$.

Solutions of (13), (14) may be defined as solutions of an equation of the form (1) where we set $H_0 = L_2(J)$, $D(A) = W_2^2(J) \cap \mathring{W}_2^1(J)$, $Au = -u_{xx}$, $F(t, u, v) = -av - b|A^{1/2}u|_0^2 Au + h(t)$ $(h(t)(x) = f(t, x)$ for $x \in J)$. If $h \in C(J; H_0)$ then it is easy to see that F satisfies the assumptions (4) and (6). To verify the assumption (5) we put $G(u) = b|A^{1/2}u|_0^2 Au$, $g(u) = 2^{-1}b|A^{1/2}u|_0^4$, $d = 0$. Then it is easy to see that (5a), (5b), (5c) and (5d) are satisfied. Moreover, $g(u) - (G(u), u)_0 \leqq 0$ for $u \in H_1$. Let c be such that $|u|_0 \leqq c|u|_1$ for $u \in H_1$. Further, let β_0 be a real number satisfying $0 < \beta_0 < 2^{-1}a$, $-2 + (2a - 4\beta_0)^{-1}(a - \beta_0)^2 c^2\beta_0 + 2c^2\beta_0^2 < 0$. Define $p(r) = 2|h| r^{1/2} + ((2a - 4\beta_0)^{-1}(a - \beta_0)^2 c^2\beta_0^2 + 2c^2\beta_0^3) r$ $(r \in [0, \infty))$, where $|h|$ denotes the norm of h in $C(J; H_0)$. Then (5e) and (5f) are satisfied and (5g) also if we take r_0 sufficiently large. Theorem gives now the existence of an ω-periodic solution of (13), (14) for any right hand side f for which $h \in C(J; H_0)$.

Bibliography

[1] *Dunford N., Schwartz J. T.:* Linear operators I. (Interscience Publishers New York—London 1958.)

[2] *Yosida K.:* Functional analysis (Springer-Verlag Berlin—Heidelberg—New York 1971).

[3] *Masuda K.:* On the existence of periodic solutions of nonlinear differential equations (J. Pac. Sci. Univ. Tokyo *12* (1966), 247—257).

[4] *Biroli M.:* Sur l'équation des ondes avec un terme nonlinéaire, monotone dans la fonction inconnue (Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. Serie VIII, vol. *LIII* (1972), 359—361, 508—515).

[5] *Ball J. M.:* Stability theory of an extensible beam (Journ. Diff. Eq. 14 (1973), 399—418).

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

ISODYNAMIC SYSTEMS IN EUCLIDEAN SPACES AND AN n-DIMENSIONAL ANALOGUE OF A THEOREM BY POMPEIU

MIROSLAV FIEDLER, Praha

(Received April 29, 1977)

INTRODUCTION

Isodynamic tetrahedrons and more generally, isodynamic n-simplexes have been studied in [1], [2].

We shall investigate here isodynamic systems of points in Euclidean spaces, i.e. unordered systems of points $A_1, \ldots, A_m$ such that for some positive numbers $c_1, \ldots, c_m$,

$$\varrho(A_i, A_k) = c_i c_k \tag{1}$$

for all $i, k = 1, \ldots, m, i \neq k$. By ϱ we mean throughout the whole paper the Euclidean distance. In particular, we shall be interested in maximal isodynamic systems in an n-dimensional Euclidean space and their properties.

PRELIMINARIES

Under an $(n - 1)$-sphere we understand here and in the sequel a hypersphere in an n-dimensional Euclidean space; a generalized $(n - 1)$-sphere is either an $(n - 1)$-sphere or an $(n - 1)$-dimensional linear space. We say that, in an n-space, a generalized $(n - 1)$-sphere K_1 bisects the $(n - 1)$-sphere K_2 with centre A_2 and radius r_2 iff either $r_1^2 = \varrho^2(A_1, A_2) + r_2^2$ in the case K_1 is an $(n - 1)$-sphere with centre A_1 and radius r_1, or if K_1 contains A_2 in the case K_1 is a hyperplane. If K_1 and K_2 are two $(n - 1)$-spheres in E_n with centres A_i and radii r_i $(i = 1, 2)$ then we call (K_1, K_2)-harmonic $(n - 1)$-sphere the set $\{X;\ \varrho(X, A_1)/\varrho(X, A_2) = r_1/r_2\}$. It is thus the (generalized) sphere of Apollonius of the points A_1 and A_2 with the ratio r_1/r_2.

As usual, the power of a point X in E_n with respect to an $(n - 1)$-sphere K (in E_n) with centre A and radius r is $\varrho^2(X, A) - r^2$. If K is a hyperplane, we shall agree that any point of K has any real number as its power with respect to K, and no point outside K has a defined power with respect to K.

Two points X, Y in E_n are inverse with respect to a generalized $(n - 1)$-sphere K iff either they are symmetric with respect to K if K is a hyperplane or, in the other case, if they lie on one ray starting in the centre A of K and $\varrho(X, A) . \varrho(Y, A) = r^2$, r being the radius of K.

RESULTS

It will be useful to assign to an isodynamic system satisfying (1), a new set of numbers $t_1, \ldots, t_m$ by

$$t_i = c_i^2 , \quad i = 1, \ldots, m .$$

We shall call these numbers t_i radii of the isodynamic system corresponding to the points A_i. The following theorem is easy to prove.

Theorem 1. *Let $A_1, \ldots, A_m$, $m \geqq 3$, be points in a Euclidean space which form an isodynamic system with the corresponding radii $t_1, \ldots, t_m$, i.e.*

$$\varrho^2(A_i, A_k) = t_i t_k , \quad i \neq k , \quad i, k = 1, \ldots, m . \tag{2}$$

Then the radii t_i are uniquely determined by (2).

Another trivial observation is formulated in the following

Theorem 2. *Any subsystem of an isodynamic system of points is isodynamic as well.*

Theorem 3. *A system $\{A_1, \ldots, A_m\}$ of points is isodynamic iff any subsystem with four points is isodynamic.*

Proof. The "only if" part following from Thm. 2, assume that any subsystem with four points is isodynamic.

To prove that the given system is isodynamic, we shall use induction with respect to m. For $m \leqq 4$, the assertion is clearly true. Suppose that $m > 5$ and theassertion holds for any system with $m - 1$ points. Thus $A_1, \ldots, A_{m-1}$ is isodynamic with (uniquely determined) radii $t_1, \ldots, t_{m-1}$. Let $\tilde{t}_m$ $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3$ be radii of the isodynamic subsystem $\{A_m, A_1, A_2, A_3\}$. Since the radii of $\{A_1, A_2, A_3\}$ are uniquely determined by Thm 1, we have $\tilde{t}_i = t_i$ $i = 1, 2, 3$. Similarly, if $k > 3$, let $\hat{t}_m, \hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_k$ be radii of the subsystem $\{A_m, A_1, A_2, A_k\}$. Then $\hat{t}_m = \tilde{t}_m$, $\hat{t}_1 = t_1$, $\hat{t}_2 = t_2$, $\hat{t}_k = t_k$ so that

$$\varrho^2(A_i, A_k) = t_i t_k \quad (i \neq k)$$

is satisfied for all $i, k = 1, \ldots, m$ if $t_m = \tilde{t}_m$. This completes the proof.

Remark. It is easily seen that a quadruple $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ of points is isodynamic iff these points are mutually distinct and

$$\varrho(A_1, A_2)\, \varrho(A_3, A_4) = \varrho(A_1, A_3)\, \varrho(A_2, A_4) = \varrho(A_1, A_4)\, \varrho(A_2, A_3) .$$

To investigate existence of isodynamic systems, we recall the following theorem essentially due to MENGER [3] which is a point analogue of the well known theorem that the Gram matrix of a vector system is positive semidefinite and conversely.

Theorem 4. *Let m be a positive integer. The m^2 real numbers $e_{ij} = e_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, m$, are squares of distances of some m points $A_1, \ldots, A_m$ in a Euclidean space:*

$$\varrho^2(A_i, A_j) = e_{ij},$$

iff $e_{ii} = 0$, $i = 1, \ldots, m$, and for any real m-tuple $(x_1, \ldots, x_m)$ satisfying

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 0, \tag{3}$$

the inequality

$$\sum_{i,j=1}^{m} e_{ij} x_i x_j \leqq 0 \tag{4}$$

holds.

If this is the case, the points $A_1, \ldots, A_m$ are linearly independent iff the only m-tuple satisfying (3) for which equality in (4) is attained, is the zero m-tuple. More generally, all linear dependence relations among the points $A_1, \ldots, A_m$ are exactly those relations

$$\sum_{i=1}^{m} y_i A_i = 0$$

satisfying

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = 0,$$

for which

$$\sum_{i,j=1}^{m} e_{ij} y_i y_j = 0.$$

Now we are able to state the existence theorem on isodynamic systems.

Theorem 5. *Let $m \geqq 2$, let $t_1, \ldots, t_m$ be positive numbers. A necessary and sufficient condition that there exist in a Euclidean n-dimensional (and not $(n-1)$-dimensional) space m points $A_1, \ldots, A_m$ the mutual distances $\varrho(A_i, A_j)$ of which satisfy*

$$\varrho^2(A_i, A_j) = t_i t_j \quad (i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, m) \tag{5}$$

is : either

(i) $n = m-1$ *and*

$$(m-1) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{t_k^2} < \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{t_k} \right)^2, \tag{6}$$

or

(ii) $n = m - 2$ *and*

$$(m-1)\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{t_k^2} = \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{t_k}\right)^2. \tag{7}$$

In the second case, the only relation among the points $A_1, \ldots, A_m$ *is*

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{t_k}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{t_k} A_k - \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{t_k^2}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{t_k^2} A_k = 0\,. \tag{8}$$

Proof. Let first $A_1, \ldots, A_m$ satisfy (5). We shall show that then

$$(m-1)\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{t_k^2} \leqq \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{t_k}\right)^2. \tag{9}$$

By Thm. 4,

$$\sum_{1 \leqq i < k \leqq m} t_i t_k x_i x_k \leqq 0\,,$$

whenever $x_1, \ldots, x_m$ satisfy $\sum_{i=1}^{m} x_i = 0$. Especially, the numbers $y_1, \ldots, y_m$ where

$$y_i = \frac{1}{t_i} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{t_k^2} - \frac{1}{t_i^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{t_k}\,, \quad i = 1, \ldots, m \tag{10}$$

satisfy $\sum y_k = 0$; therefore,

$$2 \sum_{1 \leqq i < k \leqq m} t_i t_k y_i y_k \leqq 0\,. \tag{11}$$

The left hand side is equal to

$$(\sum t_i y_i)^2 - \sum t_i^2 y_i^2 = \left(m \sum \frac{1}{t_i^2} - \left(\sum \frac{1}{t_i}\right)^2\right)^2 - \left(m \left(\sum \frac{1}{t_i^2}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - 2\left(\sum \frac{1}{t_i^2}\right)\left(\sum \frac{1}{t_i}\right)^2 + \left(\sum \frac{1}{t_i^2}\right)\left(\sum \frac{1}{t_i}\right)^2\right) = \left(m \sum \frac{1}{t_i^2} - \left(\sum \frac{1}{t_i}\right)^2\right) \cdot$$
$$\cdot \left((m-1)\sum \frac{1}{t_i^2} - \left(\sum \frac{1}{t_i}\right)^2\right).$$

The first factor is by the Schwarz inequality nonnegative, and positive if not all the t_i's are equal. If the t_i's are equal, (9) is satisfied. If not, the first factor is positive and (9) is satisfied by (11).

Observe that (7) implies that for $e_{ij} = \varrho(A_i, A_j) = t_i t_j$ $(i \neq j)$ and $e_{ii} = 0$,

$$\sum_{i,j=1}^{m} e_{ij} y_i y_j = 0\,.$$

The numbers (10) are easily seen not to be all equal to zero. By Thm. 4, (7) implies that the points $A_1, \ldots, A_m$ are linearly dependent, i.e.

$$n \leqq m - 2, \tag{12}$$

and moreover, (8) holds.

This means that if $A_1, \ldots, A_m$ are linearly independent then (6) is satisfied.

Let us show now that conversely, (9) implies that there exist, in a Euclidean space, points $A_1, \ldots, A_m$ satisfying (5) and even that (6) implies that they are linearly independent.

We shall use Thm. 4 again. Let $x_1, \ldots, x_m$ be real numbers satisfying $\sum x_i = 0$. Assume first (6). Then

$$m \sum \frac{1}{t_i^2} - \left(\sum \frac{1}{t_i}\right)^2 < \frac{1}{m-1}\left(\sum \frac{1}{t_i}\right)^2$$

and we can write for $e_{ii} = 0$, $e_{ik} = e_{ki} = t_i t_k$ $(i \neq k)$:

$$\sum_{i,j=1}^{m} e_{ij} x_i x_j = \frac{1}{m}\left((m-1)\left(\sum t_i x_i\right)^2 - \left(m \sum t_i^2 x_i^2 - \left(\sum t_i x_i\right)^2\right)\right) =$$

$$= \frac{m-1}{m\left(\sum \frac{1}{t_i}\right)^2}\left(-\frac{1}{m-1}\left(\sum \frac{1}{t_i}\right)^2 \left(m \sum t_i^2 x_i^2 - \left(\sum t_i x_i\right)^2\right) + \right.$$

$$\left. + \left(m \sum x_i - \sum \frac{1}{t_i} \sum t_i x_i\right)^2\right) < \frac{m-1}{m\left(\sum \frac{1}{t_i}\right)^2}\left(\left(m \sum x_i - \sum \frac{1}{t_i} \sum t_i x_i\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \left(m \sum \frac{1}{t_i^2} - \left(\sum \frac{1}{t_i}\right)^2\right)\left(m \sum t_i^2 x_i^2 - \left(\sum t_i x_i\right)^2\right)\right) =$$

$$= \frac{m-1}{m\left(\sum \frac{1}{t_i}\right)^2}\left(\left(\sum_{i<j}\left(\frac{1}{t_i} - \frac{1}{t_j}\right)(t_i x_i - t_j x_j)\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i<j}\left(\frac{1}{t_i} - \frac{1}{t_j}\right)^2\right) \sum_{i<j} (t_i x_i - t_j x_j)^2\right) \leqq 0$$

by the Schwarz inequality. By Thm. 4, this implies the existence of linearly independent points $A_1, \ldots, A_m$ in a Euclidean space which satisfy (5). If only (9) is assumed, a similar chain of inequalities as above yields $\sum_{i,j=1}^{m} e_{ij} x_i x_j \leqq 0$ and by Thm. 4, m points $A_1, \ldots, A_m$ satisfying (5) also exist but are not necessarily linearly independent.

It remains to show that if (7) is fulfilled then $n = m - 2$. By (12), it suffices to disprove that $n < m - 2$. Suppose $n < m - 2$. Then some $n + 1$ points, say $A_1, \ldots, A_{n+1}$ of the points $A_1, \ldots, A_m$ are linearly independent and the points $A_1, \ldots$ $\ldots, A_{n+3}$ also satisfy (5). Consequently, for each k, $1 \leqq k \leqq n + 3$, the relation corresponding to (7) holds, i.e.

$$(n + 1)\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+3} \frac{1}{t_i^2} = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+3} \frac{1}{t_i}\right)^2, \tag{13}$$

since the points $A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_{n+3}$ are linearly dependent. Also

$$(n + 2)\sum_{i=1}^{n+3} \frac{1}{t_i^2} = \left(\sum_{i=1}^{n+3} \frac{1}{t_i}\right)^2 \tag{14}$$

by the same reason.

However, (13) can be rewritten in the form

$$\sum_{\substack{1 \leqq i < j \leqq n+3 \\ i \neq k \neq j}} \left(\frac{1}{t_i} - \frac{1}{t_j}\right)^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+3} \frac{1}{t_i^2}, \tag{15}$$

(14) in the form

$$\sum_{1 \leqq i < j \leqq n+3} \left(\frac{1}{t_i} - \frac{1}{t_j}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n+3} \frac{1}{t_i^2}. \tag{16}$$

Subtracting (15) from (16), we obtain

$$\sum_{i=1}^{n+3} \left(\frac{1}{t_i} - \frac{1}{t_k}\right)^2 = \frac{1}{t_k^2}, \quad k = 1, \ldots, n + 3.$$

Therefore, by summing up these equalities,

$$2 \sum_{1 \leqq i < j \leqq n+3} \left(\frac{1}{t_i} - \frac{1}{t_j}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n+3} \frac{1}{t_k^2},$$

a contradiction with (16). The proof is complete.

This theorem enables us to call complete such an isodynamic system which consists of $m \geqq 3$ points and is contained in an $(m - 2)$-dimensional Euclidean space.

Theorem 6. (i) *In a Euclidean n-dimensional space, $n \geqq 1$, the maximum number of points in an isodynamic system is $n + 2$.*

(ii) *A linearly independent isodynamic system with $m \geqq 3$ points is contained in exactly two complete isodynamic systems in the same space, with the only exception that the points $A_1, \ldots, A_m$ form vertices of a regular $(m - 1)$-simplex; in this case, there is only one complete isodynamic system in the same space in which the given system is contained. The additional point is the center of the simplex.*

(iii) *For any* $m \geqq 3$, *there exist complete isodynamic systems with* m *points.*

(iv) *Any complete isodynamic system* $\mathfrak{S}_1$ *with* $m \geqq 3$ *points in* E_{m-2} *is contained in a complete isodynamic system* $\mathfrak{S}_2$ *with* $m + 1$ *points in* E_{m-1} *(containing* E_{m-2}*).* $\mathfrak{S}_2$ *is determined in* E_{m-1} *uniquely up to congruence leaving all points of* E_{m-2} *invariant. The radius of the* $(m + 1)$*-th point is*

$$t_{m+1} = \left(\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{t_i}\right)^{-1}$$

where $t_1, \ldots, t_m$ *are the radii of the points of* $\mathfrak{S}_1$.

(v) *Any isodynamic system which contains a complete isodynamic subsystem is complete.*

(vi) *A complete isodynamic system* $\mathfrak{S}$ *contains a minimal complete isodynamic subsystem, i.e. a complete isodynamic subsystem which is contained in every complete isodynamic subsystem of* $\mathfrak{S}$*. This minimal subsystem contains exactly those points of* $\mathfrak{S}$ *whose coefficient in the (up to a factor unique) relation among the points in* $\mathfrak{S}$ *is different from zero.*

(vii) *If* $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *is a complete isodynamic system and* $\{A_1, \ldots, A_k\}$ *its minimal complete isodynamic subsystem then* $A_{k+1}, \ldots, A_m$ *are vertices of a regular simplex.*

(viii) *Any three different points in a line form a complete isodynamic system.*

Proof. (i) is a consequence of Thm. 5. To prove (ii), let $\{A_1, \ldots, A_m\}$ $(m \geqq 3)$ be a linearly independent isodynamic system so that (5) and (6) holds. Assume this system to be contained in a complete isodynamic system $\{A_1, \ldots, A_{m+1}\}$ (by (i), not more than $m + 1$ points exist). By Thm. 1, the corresponding $m + 1$ radii are unique and the first m coincide with t_i, $i = 1, \ldots, m$. Let t_{m+1} be the $(m + 1)$-th. Then, an analogous relation to (7) holds:

$$m\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{t_k^2} = \left(\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{t_k}\right)^2$$

so that

$$(m-1)\frac{1}{t_{m+1}^2} - 2\frac{1}{t_{m+1}}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{t_i} + m\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{t_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{t_i}\right)^2 = 0\,.$$

The discriminant of this quadratic equation for $1/t_{m+1}$ is easily computed to be positive by (6).

If the t_i's are not all equal, the absolute member of the equation is positive by the Schwarz inequality and the two positive roots yield two distinct complete isodynamic systems.

If all the t_i's are equal, $t_i = t$, $i = 1, \ldots, m$, i.e. if the given system is the set of the vertices of a regular $(m - 1)$-simplex (with all edges having the same length), one root of the equation is zero and there is only one positive root

$$t_{m+1} = \frac{m-1}{2m}\,t\,.$$

(iii) follows e.g. from the preceding case of the vertices and center of the regular simplex.

To prove (iv), assume $\mathfrak{S}_1$ consists of the points $A_1, \ldots, A_m$ with radii $t_1, \ldots, t_m$ so that

$$(m-1)\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{t_i^2} = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{t_i}\right)^2.$$

Assume $\mathfrak{S}_2$ arises from $\mathfrak{S}_1$ by adding a point A_{m+1} with radius t_{m+1} (the radii $t_1, \ldots, t_m$ coincide).

Then

$$m\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{t_i^2} + \frac{1}{t_{m+1}^2}\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{t_i} + \frac{1}{t_{m+1}}\right)^2$$

from which, the discriminant of the quadratic equation for $1/t_{m+1}$ being zero,

$$\frac{1}{t_{m+1}} = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{t_i}.$$

Since the converse is also true, $\mathfrak{S}_2$ exists by Thm. 5. The distances $\varrho(A_i, A_{m+1})$ are thus uniquely determined which completes the proof of (iv).

(v) follows from the fact that the assumption implies the points of the system are linearly dependent so that case (ii) of Thm. 5 occurs.

To prove (vi), we shall also use the fact that an isodynamic system is complete iff its points are linearly dependent. Thus, if the essentially unique relation among the points of $\mathfrak{S}$ has non-zero coefficients corresponding to points A_j for $j \in J$, the subsystem $\{A_j\}_{j\in J}$ is complete and every complete subsystem contains this subsystem.

Before proving (vii), we shall prove the following lemma:

Lemma. *Let k, n be integers, $2 \leqq k < n$. Let $x_1, \ldots, x_n$ be real numbers such that*

$$(k-1)\sum_{i=1}^{k} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2.$$

Then

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

iff

$$x_{k+1} = \ldots = x_n = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} x_i.$$

Proof. From the equality

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i^2 - \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \frac{1}{k-1}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2 + \frac{k-1}{k}\left(x_{k+1} - \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2$$

it follows that

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i^2 - \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right)^2 \geqq \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \frac{1}{k-1}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2 ,$$

with equality iff

$$x_{k+1} = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} x_i .$$

Thus,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geqq \ldots \geqq \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \frac{1}{k-1}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2 ,$$

with equality of the first and last member iff

$$x_{k+1} = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} x_i , \quad x_{k+2} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k+1} x_i = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} x_i , \ldots,$$

$$x_n = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} x_i = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} x_i .$$

The lemma then follows.

To prove (vii), use the lemma for $n = m$, $x_i = 1/t_i$, $i = 1, \ldots, m$.

The assertion (viii) being trivial, the proof is complete.

Remark. The two (or one) additional points in (iii) of Thm. 6 are the isodynamic centres [2] of the corresponding $(m-1)$-simplex.

In the following main theorem about complete isodynamic systems several characterizations are given.

Theorem 7. *Let $A_1, \ldots, A_{n+2}$ be different points in a Euclidean n-space E_n. Then the following conditions are equivalent:*

1° *$A_1, \ldots, A_{n+2}$ is a complete isodynamic system in E_n, i.e. there exist positive numbers $t_1, \ldots, t_{n+2}$ such that*

$$\varrho^2(A_i, A_k) = t_i t_k \quad \textit{for all} \quad i, k = 1, \ldots, n+2 , \quad i \neq k ;$$

2° *there exists a system of $n+3$ real $(n-1)$-spheres $K_0, K_1, \ldots, K_{n+2}$ such that*

21° *K_i has centre in A_i for $i = 1, \ldots, n+2$ and bisects K_0,*

22° *for each pair i, j $(i \neq j)$, $i, j = 1, \ldots, n+2$, the (K_i, K_j)-harmonic $(n-1)$-sphere K_{ij} contains all points A_k for $i \neq k \neq j$;*

3° *there exists a system of $\binom{n+2}{2}$ generalized $(n-1)$-spheres $K_{ij}(=K_{ji})$, $i, j = 1, \ldots, n+2$, $i \neq j$, such that*

31° *A_i and A_j are inverse with respect to K_{ij},*

32° *K_{ij} contains all points A_k for $i \neq k \neq j$;*

33° *there exists a point having the same negative power with respect to all $(n-1)$-spheres K_{ij}.*

4° *there exists a point R in E_n and a point $B_0 \neq R$ in a Euclidean $(n+1)$-space containing E_n, on the line perpendicular to E_n in R such that the second intersection points B_i $(i = 1, \ldots, n+2)$ of the lines A_iB_0 with the n-sphere $K = \{X; \varrho(X, R) = \varrho(B_0, R)\}$ form vertices of a regular $(n+1)$-simplex.*

5° *there exists, in a Euclidean $(n+1)$-space E_{n+1} containing E_n, a regular $(n+1)$-simplex Σ such that $A_1, \ldots, A_{n+2}$ correspond to the vertices of Σ in an inversion in E_{n+1}.*

6° *there exists, in a Euclidean $(n+1)$-space $\hat{E}_{n+1}$ a regular $(n+1)$-simplex with vertices $B_1, \ldots, B_{n+1}$ and a point X (different from all the points B_i) on its circumscribed n-sphere such that, for some $k > 0$,*

$$\varrho(A_i, A_j) = \frac{k}{\hat{\varrho}(B_i, X)\, \hat{\varrho}(B_j, X)}$$

for all $i, j = 1, \ldots, n+2$, $i \neq j$.

7° *there exists, in a Euclidean $(n+1)$-space $\hat{E}_{n+1}$, a regular $(n+1)$-simplex with vertices $B_1, \ldots, B_{n+1}$ and a point X (different from all the points B_i) such that, for some $k > 0$*

$$\varrho(A_i, A_j) = \frac{k}{\hat{\varrho}(B_i, X)\, \hat{\varrho}(B_j, X)}$$

for all $i, j = 1, \ldots, n+2$, $i \neq j$.

Proof. We shall prove the implications $1° \Rightarrow 2° \Rightarrow 3° \Rightarrow 4° \Rightarrow 5° \Rightarrow 6° \Rightarrow 7° \Rightarrow 1°$.

Assume 1°. By (iv) of Thm. 6, the system $\{A_1, \ldots, A_{n+2}\}$ is contained in a complete isodynamic system, with the additional point A_{n+3}, of an $(n+1)$-dimensional space E_{n+1} containing E_n. Define for $i = 1, \ldots, n+2$, $K_i = \{X \in E_n; \varrho^2(X, A_i) = \varrho^2(A_{n+3}, A_i)\}$. If R is the orthogonal projection of the point A_{n+3} on E_n and $r = \varrho(R, A_{n+3})$ then $K_0 = \{X \in E_n; \varrho(X, R) = r\}$ satisfies $\varrho^2(A_i, R) = \varrho^2(A_i, A_{n+3}) - r^2$ which means that K_i bisects K_0. Moreover, let $i \neq j$. The (K_1, K_2) – harmonic $(n-1)$-sphere K_{ij} is easily checked to contain the points A_k for all k, $i \neq k \neq j$. Thus $1° \Rightarrow 2°$.

To prove that 2° implies 3°, it suffices to show that the (K_i, K_j) – harmonic spheres K_{ij} satisfy 31°, 32°, 33°. 31° follows from the harmonic property of A_i, A_j and the intersection points of the line A_iA_j with K_{ij}, 32° is immediate. To prove 33°, take R as the centre of K_0 in 2°. Since K_0 is bisected by K_i and K_j, it is bisected by K_{ij} (belonging to the pencil determined by K_i and K_j) as well. Thus R has the same negative power with respect to all K_{ij}'s which are nonlinear. According to our agreement, this is also true if some – but not all – of the K_{ij}'s are linear. However, all the K_{ij}'s cannot be linear since in this case the mutual distances of $n+2$ points A_i in E_n would be equal.

Assume 3°. Let E_{n+1} be any Euclidean $(n + 1)$-space containing E_n. Let B_0 be a point on the line perpendicular to E_n passing through R, such that $\varrho^2(B_0, R) = -p$, p being the power of R with respect to all K_{ij}'s. Let $\hat{K}_{ij}$ $(i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n + 2)$ be the generalized n-sphere in E_{n+1} with the same centre and radius as K_{ij} if K_{ij} is an $(n - 1)$-sphere; if K_{ij} is linear, let $\hat{K}_{ij}$ be that n-dimensional linear space in E_{n+1} which contains K_{ij} and is orthogonal to E_n. It follows that $\hat{K}_{ij}$ contains the point B_0 for all $i, j = 1, \ldots, n + 2$, $i \neq j$. Let K be the n-sphere with centre in R and radius $\varrho(R, B_0)$, let B_i $(i = 1, \ldots, n + 2)$ be the second intersection point of the line A_iB with K. Denote by $\hat{K}$ the n-sphere with centre B_0 which bisects K. Using the well known properties of inversion, it follows that E_n corresponds to K in the inversion $\mathscr{I}$ with respect to $\hat{K}$; A_i corresponds to B_i in $\mathscr{I}$, $\hat{K}_{ij}$ corresponds to a hyperplane H_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n + 2$, $i \neq j$. Since $\hat{K}_{ij}$ is orthogonal to E_n, H_{ij} is orthogonal to K and thus contains R, as well as all the points B_k for $i \neq k \neq j$. A_i and A_j being inverse with respect to $\hat{K}_{ij}$, B_i and B_j are symmetric with respect to H_{ij} (since any sphere containing both B_i and B_j is orthogonal to H_{ij}, this being true for their transforms in $\mathscr{I}$). Consequently, $\varrho(B_i, B_k) = \varrho(B_j, B_k)$ for all i, j, k, $i \neq j \neq k \neq i$. It follows that the points B_i, $i = 1, \ldots, n + 2$, form vertices of a regular $(n + 1)$-simplex. The proof of 3° $\Rightarrow$ 4° is complete.

The implication 4° $\Rightarrow$ 5° is immediate since B_i and A_i correspond to each other in the inversion determined by the n-sphere $\hat{K}$ having the centre B_0 and bisecting K.

Assume 5°. Denote by $\mathscr{I}$ the inversion, by B_i $(i = 1, \ldots, n + 2)$ the points in E_{n+1} corresponding to A_i in $\mathscr{I}$ so that B_i are vertices of a regular $(n + 1)$-simplex Σ. Let X be the centre of the inversion $\mathscr{I}$. Thus $X \neq B_i$ for all $i = 1, \ldots, n + 2$. If C is the circumscribed n-sphere of Σ, C corresponds to E_n in $\mathscr{I}$ and thus contains X.

We have then for $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n + 2$

$$\varrho(A_i, X)\, \varrho(B_i, X) = \varrho(A_j, X)\, \varrho(B_j, X) \tag{17}$$

so that the triangles A_iA_jX and B_jB_iX are similar to each other. Thus

$$\varrho(A_i, A_j)/\varrho(A_i, X) = \varrho(B_i, B_j)/\varrho(B_j, X)$$

as well as

$$\varrho(A_i, A_j)/\varrho(A_j, X) = \varrho(B_i, B_j)/\varrho(B_i, X)\,.$$

By multiplication,

$$\begin{aligned}\varrho^2(A_i, A_j) &= \varrho^2(B_i, B_j)\, \varrho(A_i, X)\, \varrho(A_j, X)\, (\varrho(B_i, X)\, \varrho(B_j, X))^{-1} = \\ &= \sigma^2\, \varrho^2(B_i, B_j)/(\varrho^2(B_i, X)\, \varrho^2(B_j, X))\end{aligned}$$

by (17), if the common value is denoted by σ. Since $\varrho^2(B_i, B_j)$ is constant for all pairs i, j, $i \neq j$, 6° follows (where $\hat{E} = E_{n+1}$, $\hat{\varrho} = \varrho$ is taken).

The implications 6° $\Rightarrow$ 7° as well as 7° $\Rightarrow$ 1° being trivial, the proof is complete.

A well known theorem from plane geometry, sometimes called Pompeiu's theorem, states:

If $A_1A_2A_3$ is an equilateral triangle and X another point of the plane then XA_1, XA_2, XA_3 form lengths of sides of a triangle iff X does not belong to the circumscribed circle of $A_1A_2A_3$.

We shall generalize now this theorem as follows:

Theorem 8. *Let $A_1, \ldots, A_{n+1}$ be vertices of a regular n-simplex Σ in E_n. If X is a point in E_n then there exists an n-simplex with vertices $B_1, \ldots, B_{n+1}$ such that edges B_iB_k $(i \neq k,\ i, k = 1, \ldots, n + 1)$ have lengths proportional to $(\varrho(A_i, X) \,.\, \varrho(A_k, X))^{-1}$ iff X does not belong to the circumscribed $(n - 1)$-sphere of Σ.*

Proof. Assume first that X belongs to the circumscribed $(n - 1)$-sphere of Σ. If $X = A_i$ for some i, the n-simplex clearly does not exist. If $X \neq A_i$ for all $i = 1, \ldots, n + 1$, the equivalence of 7° and 1° in Thm. 7 shows that the realization of the points B_i leads to a complete isodynamic system which is linearly dependent.

Assume now that X does not belong to the circumscribed $(n - 1)$-sphere of Σ. Let $\mathcal{I}$ be any inversion with centre X. If B_i are points which correspond to the points A_i in $\mathcal{I}$, we have similarly as in the proof of 5° ⇒ 6° in Thm. 7,

$$\varrho(B_i, B_k) = k(\varrho(A_i, X)\, \varrho(A_k, X))^{-1}\,.$$

Moreover, the points B_i do not belong to a hyperplane since this would correspond in $\mathcal{I}$ to the circumscribed sphere of Σ and this would contain the centre of inversion X, a contradiction. The proof is complete.

References

[1] *N. A. Court:* Sur le tétraedre isodynamique. Mathesis *49* (1935), 345—351.

[2] *S. R. Mandan:* Isodynamic and isogonic simplexes. Annali di Matematica pura ed appl. Ser. IV., *53* (1961), 45—56.

[3] *K. Menger:* Untersuchungen über allgemeine Metrik. Math. Annalen *100* (1928), 75—163.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

SINGULAR SUPPORTS I

VLASTIMIL PTÁK, Praha, V. S. RETACH (B. C. PETAX), MOCKBA

(Received May 3, 1977)

The present paper, the first of a series, represents the first part of an investigation of abstract convolution equations. A preliminary communication [8] appeared already in the Soviet Doklady in 1974.

The aim of these investigations is to develop a functional-analytic theory of Hörmander's results on convolution equations. It is obvious that such a theory must contain two essential parts. The first task is to find a suitable abstract analogue of the notion of "singular support" of a distribution. This line of research started with the 1966 paper [5] and was pursued further in [11], [1] and [8], [8']. The second step consist in formulating criteria for $F' = (\varinjlim F \cap E_n)'$ or $F = \varinjlim F \cap E_n$ where E_n is a sequence of Fréchet spaces and $F \subset E = \lim E_n$ Results in this direction have been obtained in [9].

We shall use the following terminology and notation. An F_0 space will be a locally convex space the topology of which is given by a sequence of pseudonorms; it follows that a separated and complete F_0 space is a Fréchet space.

Given two topologies u_1 and u_2 on a set T we say that u_1 is coarser than u_2 or that u_2 is finer than u_1 if $u_1 \subset u_2$. In other words, a finer topology has more open sets and gives, accordingly, smaller closures. We shall denote by $u_1 \vee u_2$ the topology generated by the union $u_1 \cup u_2$, in other words, the coarsest topology which is finer than both u_1 and u_2.

(1,1) Lemma. *Let F be a linear space and w_1 and w_2 two convex topologies on F. Let $u = w_1 \vee w_2$. Then $(F, u)' = (F, w_1)' + (F, w_2)'$.*

Proof. The mapping $x \mapsto [x, x]$ is an algebraically and topologically isomorphic injection of $(F, w_1 \vee w_2)$ into $(F, w_1) \oplus (F, w_2)$. Its adjoint mapping takes the pair $[f_1, f_2] \in (F, w_1) \oplus (F, w_2)$ into its sum.

(1,2) Proposition. *Let (E_1, u_1), (E_2, u_2), (E_3, u_3) be three F_0 spaces. Let*

$$T\colon\ (E_1, u_1) \mapsto (E_3, u_3),$$
$$A\colon\ (E_1, u_1) \mapsto (E_2, u_2)$$

be two continuous linear mappings. Let U be a fixed closed absolutely convex neighborhood of zero in (E_1, u_1). Denote by u the topology on E_1 generated by the set U and suppose that (E_1, u) is a normed space.

Then the following conditions are equivalent

1° $A'E_2' \subset T'E_3' + (E_1, u)'$.

2° *A is continuous from $(E_1, u \vee T^{-1}u_3)$ into (E_2, u_2); in other words: if $x_n \to 0$ in (E_1, u) and $Tx_n \to 0$ then $Ax_n \to 0$.*

3° *If x_n is sequence such that x_n is Cauchy in (E_1, u) and Tx_n is Cauchy in (E_3, u_3) then there exists a sequence x_n' such that $x_n' - x_n \to 0$ in (E_1, u), $Tx_n' - Tx_n \to 0$ in (E_3, u_3) and Ax_n' is Cauchy in (E_2, u_2); furthermore, if $z_n \to 0$ in (E_1, u), $Tz_n \to 0$ in (E_3, u_3) and Az_n is Cauchy in (E_2, u_2) then $Az_n \to 0$ in (E_2, u_2).*

4° *If x_n is sequence such that x_n is Cauchy in (E_1, u) and Tx_n is Cauchy in (E_3, u_3) then there exists a sequence x_n' such that $x_n' - x_n \to 0$ in (E_1, u) and Ax_n' is Cauchy in (E_2, u_2); at the same time, if $z_n \to 0$ in (E_1, u), $Tz_n \to 0$ in (E_3, u_3) and Az_n is Cauchy in (E_2, u_2) then $Az_n \to 0$ in (E_2, u_2).*

Proof. According to lemma (1,1) we have

$$(E_1, u \vee T^{-1}u_3)' = (E_1, u)' + T'E_3' .$$

Condition 1° may thus be restated as follows: the mapping A is continuous in the weak topologies corresponding to $u \vee T^{-1}u_3$ and u_2. All spaces in question being F_0 spaces weak and strong continuity coincides. This establishes the equivalence of 1° and 2°.

For the rest of the proof, it will be convenient to introduce some notation. Let T_0 and A_0 be the mapping from (E_1, u) respectively into (E_3, u_3) and (E_2, u_2) which coincide with T and A as mappings of linear spaces, hence $T = T_0 v$ and $A = A_0 v$ where v is the injection of (E_1, u_1) into (E_1, u).

Denote by $G(T_0)$ and $G(A_0)$ their graphs in $(E_1, u) \times (E_3, u_3)$ and $(E_1, u) \times \times (E_2, u_2)$. Denote by $A^{\square}$ the mapping of $G(T_0)$ into $G(A_0)$ defined as follows

$$A^{\square}[x, Tx] = [x, Ax] .$$

We set

$$T^{\sim} = TP_1 \mid G(T_0) = P_2 T^{\square} , \quad A^{\sim} = AP_1 \mid G(T_0) = P_2 A^{\square} .$$

The implications 2° → 3° → 4° are immediate. Suppose now that condition 4° is satisfied.

Consider the set $M \subset (E, u)^{\wedge} \times E_3^{\wedge} \times E_2^{\wedge}$ defined as follows: The triple $[e_1, e_3, e_2]$ belongs to M if and only if $[e_1, e_3] \in G(T_0)^{-}$ and at the same time $[e_1, e_2] \in \in G(A_0)^{-}$. Here the closures are taken in the completions of the spaces in question. It follows from the definition of the set M that it is closed in $(E_1, u)^{\wedge} \times E_3^{\wedge} \times E_2^{\wedge}$. It follows from the second part of assumption 4° that the inclusion $[0, 0, e_2] \in M$

implies $e_2 = 0$. The set M is, therefore, the graph of a mapping from $G(T_0)^-$ into $E_2^\wedge$. Hence the mapping $A^\square$ is closable. Let us show that the domain of M is the whole of $G(T_0)^-$. Indeed, let $[e_1, e_3] \in G(T_0)^-$. It follows that there exists a sequence $x_n \in E_1$ such that $x_n \to e_1$ in $(E_1, u)^\wedge$ and $Tx_n \to e_3 \in (E_3, u_3)^\wedge$. According to 4° there exists a sequence $x_n' \in E$ such that $x_n' - x_n \to 0$ in (E_1, u) and Ax_n' is a Cauchy sequence in E_2. It follows that $x_n' \to e_1$ in (E_1, u) and $Ax_n' \to e_2$ for a suitable $e_2 \in \in (E_2, u_2)^\wedge$ so that $[e_1, e_2] \in G(A_0)^-$; hence $[e_1, e_3, e_2] \in M$. To sum up; the closure of $A^\square$ is again a mapping and is defined on the whole of $G(T_0)^\wedge$. It follows from the closed graph theorem that $A^\square$ is continuous so that $A^\sim = P_2 A^\square$ is continuous as well. We complete the proof by proving the implication 4° → 1°.

Since the mapping

$$A^\sim = P_2 A^\square : [x, Tx] \mapsto Ax$$

is continuous from $G(T_0)$ into (E_2, u_2), it follows that, for each $e_2' \in (E_2, u_2)'$ the function

$$[x, Tx] \mapsto \langle Ax, e_2' \rangle$$

is continuous on $G(T_0)$. Hence there exist two functionals $e_1' \in (E_1, u)'$ and $e_3' \in \in (E_3, u_3)'$ such that

$$\langle Ax, e_2' \rangle = \langle x, e' \rangle + \langle Tx, e_3' \rangle = \langle x, e' + T'e_3' \rangle$$

whence $A'e_2' = e' + T'e_3' \in (E_1, u)' + T'E_3'$. This proves 1°.

Conditions 3° and 4° may be restated in the form of statements about domains of definition of certain mappings. We shall use the following notation. If G is the graph of a mapping from F_1 into F_2 we shall denote by $D(G^-)$ the projection on $F_1^\wedge$ of the closure G^- in $F_1^\wedge \times F_2^\wedge$. The set $D(G^-)$ will be called *the domain of definition* of G^-; of course, in the general case, G^- need not be the graph of a mapping from $F_1^\wedge$ into $F_2^\wedge$.

First of all, let us notice that the second part of conditions 3° and 4° asserts that the mapping $A^\sim$ is closable. Using this fact, condition 3° assumes the following form
5° The mapping A is closable and

$$G(T_0)^- \subset D(G(A^\sim)^-) .$$

Since clearly $D(G(T^\sim)^-) = G(T_0)^-$, we have the following equivalent form of 3°
6° The mapping $A^\sim$ is closable and

$$D(G(T^\sim)^-) \subset D(G(A^\sim)^-) .$$

Let us turn to condition 4°. Its second part may be interpreted as the closability of $A^\square$. In view of this condition 4° may be restated in each of the two following equivalent forms
7° The mapping $A^\square$ is closable and $G(T_0)^- \subset D(G(A^\square)^-)$,

8° The mapping $A^{\square}$ is closable and

$$D(G(T_0)^-) \subset D(G(A_0)^-).$$

In the sequel we shall often identify $G(T_0)$ with the space $(E_1, \tilde{u})$ where $\tilde{u} = u \vee T^{-1}u_3$. Accordingly, $T^{\sim}$ and $A^{\sim}$ will be taken as the mappings T and A considered as mappings of $(E_1, \tilde{u})$ into (E_3, u_3) and (E_2, u_2) respectively.

(1,3) Proposition. *The following conditions are equivalent:*

1° *If $x_n \in U$ and $Tx_n \to 0$ then Ax_n tends to zero in the weak topology of E_2.*

2° *For every $\varepsilon > 0$, the set $A'E'_2$ is contained in $T'E'_3 + \varepsilon U^0$.*

3° *The mapping $A^{\sim}$ is continuous and*

$$\operatorname{Ker} T^{\sim\prime\prime} \subset \operatorname{Ker} A^{\sim\prime\prime}.$$

4° *The mapping $A^{\sim}$ is continuous and* $\operatorname{Ker} T''_0 \subset \operatorname{Ker}(T_0 \oplus A_0)''$.

5° *The mapping $A^{\sim}$ is continuous and if $\xi \in (E, u)''$ annihilates $(E, u)' \cap T'E'_3$ then ξ annihilates $(E, u)' \cap (T'E'_3 + A'E'_2)$.*

6° *The mapping $A^{\sim}$ is continuous and the subspace $(E, u)' \cap (T'E'_3 + A'_2E'_2)$ is contained in the closure of $(E, u)' \cap T'E'_3$ in the strong topology of the space $(E, u)'$.*

7° *The weak topology on E_1 generated by $A'E'_2$ is coarser than that generated by $T'E'_3$ when restricted to U; in other words*

$$\sigma(E_1, A'E'_2) \mid U \subset \sigma(E_1, T'E'_3).$$

8° *The weak topology on E_1 generated by $A'E'_2$ is coarser than the topology $T^{-1}u_3$ when restricted to U; in other words if W is an arbitrary neighbourhood of zero in the topology $\sigma(E_1, A'E'_2)$ then there exists a neighbourhood of zero U_3 in (E_3, u_3) such that*

$$U \cap T^{-1}U_3 \subset W.$$

Proof. Suppose that condition 1° is satisfied and that a positive number ε is given. Let us prove that $A'(E_2, u_2)' \subset T'(E_3, u_3)' + \varepsilon U^0$. If not, then there exists a $g'_0 \in (E_2, u_2)'$ such that, for each n, the point $A'g'_0$ lies outside the set $\varepsilon U^0 + T'W_n^0$ where W_n runs over a fundamental system of neighbourhoods of zero in (E_3, u_3). The sets $\varepsilon U^0 + T'W_n^0$ being $\sigma((E_1, u_1)', E_1)$ compact, there exists, for each natural number n, an element $x_n \in E_1$ such that $\langle x_n, \varepsilon U^0 + T'W_n^0\rangle \leqq \varepsilon$ and $\langle x_n, A'g'_0\rangle > \varepsilon$.

In particular, $\langle x_n, U^0\rangle \leqq 1$ whence $x_n \in U^{00} = U$ and $\langle Tx_n, W_n^0\rangle \leqq 1$ so that $Tx_n \in W_n$. It follows from condition 1° that Ax_n tends to zero weakly in (E_2, u_2); however, $\langle Ax_n, g'_0\rangle = \langle x_n, A'g'_0\rangle > \varepsilon$ which is a contradiction. This proves condition 2°.

Now assume condition 2°. It follows that $A'E'_2 \subset T'E'_3 + (E_1, u)' = (E_1, \tilde{u})'$ so that A is continuous as a mapping of $(E_1, \tilde{u})$ into (E_2, u_2). Suppose now that $\xi \in (E_1, \tilde{u})'' = ((E_1, \tilde{u})', \beta((E_1, \tilde{u})', E_1))'$ is given and that $T''\xi = 0$. It follows that $\langle \xi, T'(E_3, u_3)' \rangle = 0$. Now let us denote by $P\xi$ the restriction of ξ to $(E_1, u)'$. Since ξ is bounded on the polar B^0 of some set B bounded in $(E_1, \tilde{u})$, ξ is bounded on U^0 since $B \subset \lambda U$ for some λ. It follows that $P\xi$ may be considered as an element of the second dual of the normed space (E_1, u). Let β be a number greater than $|P\xi|$, the norm of $P\xi$ in $(E_1, u)''$.

Now let $g' \in (E_2, u_2)'$ and a positive ε be given. According to our assumption, there exists an $f' \in (E_3, u_3)'$ and an $x' \in (E_1, u)'$ such that $A'g' = T'f' + x'$ and $|x'| < \varepsilon\beta^{-1}$. It follows that $\langle \xi, A'g' \rangle = \langle \xi, T'f' \rangle + \langle \xi, x' \rangle = \langle P\xi, x' \rangle$ whence $|\langle \xi, A'g' \rangle| \leqq \varepsilon$. Since ε was an arbitrary positive number, we have proved that $\langle \xi, A'g' \rangle = 0$ for every $g' \in (E_2, u_2)'$ or, in other words that $\tilde{A}''\xi = 0$.

Let us prove that condition 3° implies 1°. Let $x_n \in U$ and suppose that $Tx_n \to 0$. Denote by M the set of all elements of the sequence x_n. Since M is bounded in $(E_1, \tilde{u})$ and $\tilde{A}$ is continuous, the set AM is bounded in (E_2, u_2). Let $g' \in (E_2, u_2)'$ be given and suppose that $\langle Ax_n, g' \rangle$ does not tend to zero. The sequence $\langle Ax_n, g' \rangle$ being bounded, there exists a subsequence y_n of the sequence x_n such that $\langle Ay_n, g' \rangle$ converges to a limit different from zero. Since $y_n \in M$ there exists a cluster point η of the sequence y_n in the topology $\sigma((E_1, \tilde{u})'', (E_1, \tilde{u})')$. Let us prove that $\tilde{T}''\eta = 0$. Indeed, if $f' \in (E_3, u_3)'$ is given, the product $\langle \eta, T'f' \rangle$ is cluster point of the sequence $\langle y_n, T'f' \rangle = \langle Ty_n, f' \rangle \to 0$. It follows that $\langle \eta, T'f' \rangle = 0$. Since f' was arbitrary we have $\tilde{T}''\eta = 0$. It follows from our assumption that $\tilde{A}''\eta = 0$ so that, in particular, $\langle \eta, A'g' \rangle = 0$.

Now $\langle \eta, A'g' \rangle$ is a cluster point of the sequence $\langle y_n, A'g' \rangle$ because $\tilde{A}$ is continuous. This sequence, however, tends to a limit different from zero, a contradiction. This proves condition 1° hence the equivalence of the first three conditions.

Conditions 5° and 6° are equivalent by the Hahn-Banach theorem. Let us prove the implications 2° → 5° → 1°.

Suppose 2° satisfied. It follows from Proposition (1,2) that $\tilde{A}$ is continuous. Consider a $\xi \in (E_1, u)''$ which annihilates $T'E'_3 \cap (E_1, u)'$. Suppose that $e' = T'e'_3 + A'e'_2 \in (E_1, u)'$ and let $\varepsilon > 0$ be given. According to 2°, we have a decomposition

$$A'e'_2 = T'f'_3 + g$$

where $g \in (E_1, u)'$ and $|g| < \varepsilon|\xi|^{-1}$ if $\xi \neq 0$. Hence

$$e' = T'e'_3 + T'f'_3 + g\,.$$

Since e', $g \in (E_1, u)'$, we have $T'(e'_3 + f'_3) \in (E_1, u)'$ so that, by our assumption, $\langle \xi, T'(e'_3 + f'_3) \rangle = 0$. Hence $|\langle \xi, e' \rangle| = |\langle \xi, g \rangle| \leqq |\xi|\,|g| < \varepsilon$. Since ε was an arbitrary positive number, $\langle \xi, e' \rangle = 0$ and 5° is established.

Now assume 5° satisfied and let $x_n \in U$, $Tx_n \to 0$. Let $e_2' \in (E_2, u_2)'$ be given. Since $\tilde{A}$ is continuous, there exists, by Proposition (1,2), a decomposition

$$A'e_2' = T'e_3' + f$$

with $f \in (E_1, u)'$. It follows that $f \in (A'E_2' + T'E_3') \cap (E_1, u)'$. Suppose that $\langle Ax_n, e_2' \rangle$ does not tend to zero. Then $\langle x_n, f \rangle$ does not tend to zero. Otherwise we would have $\langle Ax_n, e_2' \rangle = \langle x_n, A'e_2' \rangle = \langle x_n, T'e_3' \rangle + \langle x_n, f \rangle \to 0$ which is a contradiction. Therefore there exists a cluster point $\xi \in (E_1, u)''$ such that $\langle \xi, f \rangle \neq 0$. If $h \in T'E_3' \cap (E_1, u)'$ then $h = T'e_3'$ for a suitable $e_3' \in E_3'$.

Since $h \in (E, u)'$, the number $\langle \xi, h \rangle$ is a cluster point of the sequence $\langle x_n, T'e_3' \rangle$. We have, however, $\langle x_n, T'e_3' \rangle = \langle Tx_n, e_3' \rangle \to 0$. Since h was an arbitrary element of the intersection $T'E_3' \cap (E_1, u)'$, we see that ξ annihilates $T'E_3' \cap (E_1, u)'$. It follows from our assumption that ξ annihilates $(T'E_3' + A'E_2') \cap (E_1, u)'$, in particular, ξ annihilates f. This is a contradiction.

Clearly the conditions 5° and 6° are equivalent by the Hahn-Banach theorem.

Let us prove now the equivalence of 4° and 5°. If S is linear mapping from a locally convex space P into another locally convex space Q and if $\xi \in P''$ we write $\xi \in \operatorname{Ker} S''$ if and only if ξ annihilates the range of S'. The range of S' is the set of all $x' \in P'$ such that

$$\langle Sx, y' \rangle = \langle x, x' \rangle$$

for a suitable $y' \in Q'$ and all $x \in D(S)$. The equivalence of 4° and 5° will therefore be established if we show that

$$R(T_0') = (E_1, u)' \cap T'E_3',$$

$$R((T_0 \oplus A_0)') = (E_1, u)' \cap (T'E_3' + A'E_2').$$

First of all, $x' \in R(T_0')$ if and only if there exists an e_3' such that

$$\langle T_0 x, e_3' \rangle = \langle x, x' \rangle$$

for all $x \in E_1$; in other words if and only if $x' = T'e_3'$ or $x' \in (E_1, u)' \cap T'E_3'$. Similarly, $x' \in R((T_0 \oplus A_0)')$ if and only if there exist e_3' and e_2' such that

$$\langle T_0 x, e_3' \rangle + \langle A_0 x, e_2' \rangle = \langle x, x' \rangle$$

for all $x \in E_1$; in other words if and only if $x' = T'e_3' + A'e_2'$ or $x' \in (E_1, u)' \cap \cap (T'E_3' + A'E_2')$.

This completes the proof of the equivalence of 4° and 5°.

To complete the proof, we intend to prove the implications 2° → 7° → 8° → 1°. First of all, the inclusion

$$\sigma(E_1, T'E_3') \subset T^{-1}u_3$$

is obvious. Hence $7° \to 8°$. Also, the implication $8° \to 1°$ is immediate. It remains to prove the implication $2° \to 7°$.

Suppose that $2°$ is satisfied and let us prove the following fact. If $x_0 \in U$ and if V is a $\sigma(E, A'E_2')$ neighbourhood of x_0 then there exists a $\sigma(E, T'E_3')$ neighbourhood W of x_0 such that $W \cap U \subset V$. First of all, there exist $f_1, \ldots, f_n \in E_2'$ such that $|\langle x - x_0, A'f_j \rangle| < 1$ for $j = 1, 2, \ldots, n$ implies $x \in V$. According to $2°$, each $A'f_j$ has a decomposition of the form

$$A'f_j = T'g_j + h_j$$

where $g_j \in E_3'$ and $h_j \in \frac{1}{4}U^0$. Denote by W the set

$$W = \{x; |\langle x - x_0, T'g_j \rangle| < \tfrac{1}{2}\}.$$

If $x \in W \cap U$, we have, for each j

$$|\langle x - x_0, A'f_j| \leqq |\langle x - x_0, T'g_j \rangle| + |\langle x - x_0, h_j \rangle| < 1$$

so that $x \in V$. The proof is complete.

References

[1] *M. Dostál, M. J. Kascic:* On a class of de Wilde spaces, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège *41* (1972), 450—457.

[2] *L. Hörmander:* On the existence of real analytic solutions of partial differential equations with constant coefficients, Invent. Math. *21* (1973), 151—182.

[3] *L. Hörmander:* On the range of convolution operators, Ann. of Math. *76* (1962), 148—170.

[4] *V. Pták:* Extension of sequentially continuous functionals in inductive limits of Banach spaces, Czech. Math. Journal *95* (1962), 112—121.

[5] *V. Pták:* Some metric aspects of the open mapping and closed graph theorems, Math. Ann. *163* (1966), 95—104.

[6] *V. Pták:* Some open mapping teorems in *LF*-spaces, Math. Scand. *16* (1965), 75—93.

[7] *V. Pták:* Openness of mappings in *LF*-spaces, Czech. Math. J. *94* (1969), 547—532.

[8] *В. Ф. Птак, В. С. Ретах:* Абстрактний аналог теоремы о существовании решений уравнений в свертках, Доклады АН СССР *216* (1974), 267—269.

[8'] *V. Pták, V. S. Retah:* An abstract analog of an existence theorem for solutions of convolution equations, Soviet Math. Doklady *15* (1974), 785—788.

[9] *В. С. Ретах:* О подпространствах счетного индуктивного предела, Доклады АН СССР *196* (1970), 1277—1279.

[10] *В. С. Ретах:* Об одной теореме Эйдельгайта, Сибирский мат. журнал *17* (1976), 1367—1381.

[11] *W. Slowikowski:* On Hörmander's theorem about surjections in D', Math. Scand. *30* (1972), 267—280.

Author's address: V. Pták, 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV) В. С. Ретах, Москва, СССР.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

SHLUKOVÁ ANALYSA

ADOLF FILÁČEK, VÁCLAV KOUTNÍK a JIŘÍ VONDRÁČEK, Praha

(Došlo dne 1. června 1977)

Metody shlukové analysy (anglicky cluster analysis) se vyvinuly z potřeby analysovat a vhodně koncentrovat informaci obsaženou v mnohorozměrných údajích. Jednotlivé postupy řešící problém klasifikace údajů se objevují ve čtyřicátých a padesátých letech. Teprve v poslední době však dochází k pokusům vybudovat ucelenou teorii, která by umožňovala analysu vlastností jednotlivých postupů, jejich porovnání a posouzení, za jakých podmínek je možno je použít. Nicméně je shluková analysa stále spíše střechový název pro volný soubor heuristických postupů než ucelená disciplina aplikované matematiky.

Základní situaci při shlukové analyse můžeme popsat takto:

Je dáno N objektů. Na každém objektu je změřeno p charakteristik, takže získáváme N p-rozměrných vektorů $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Můžeme ztotožnit pozorování a příslušné objekty, takže v dalším nazýváme vektory X_i objekty. Označme X množinu všech objektů, tj. $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$. Úkolem shlukové analysy je seskupit objekty X_i do n shluků $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (tj. množina $\mathbf{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ tvoří rozklad množiny X) tak, aby si objekty patřící do téhož shluku byly v jistém smyslu podobné či blízké, kdežto od objektů patřících do různých shluků požadujeme, aby byly odlišné či vzdálené. Přitom obvykle chceme, aby počet shluků n byl podstatně menší než počet objektů N. Někdy je úloha shlukové analysy formulována obecněji v tom smyslu, že shluky nemusí být disjunktní, a cílem není rozklad, ale pokrytí množiny X jejími podmnožinami.

Podle cíle můžeme rozeznávat tři druhy úloh shlukové analysy:

1) Cílem je nalezení rozkladu $\mathbf{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$, kde počet shluků n není předem stanoven.

2) Cílem je nalezení rozkladu $\mathbf{S}$ při předem daném počtu shluků n.

3) Cílem je vytvořit tzv. hierarchický strom, tj. posloupnost rozkladů $\mathbf{S}^{(t)}$, $t = 1, 2, \ldots, K$, kde $\mathbf{S}^{(1)} = \{\{X_1\}, \{X_2\}, \ldots, \{X_N\}\}$, $\mathbf{S}^{(K)} = \{X\}$ a každý rozklad $\mathbf{S}^{(t)}$ je zjemněním rozkladu $\mathbf{S}^{(t+1)}$.

Základním předpokladem úspěšného použití shlukovacích metod je, že objekty mají tendenci seskupovat se do shluků a nemají charakter více méně homogenního chaosu. Ověření tohoto předpokladu bývá obtížné a není mu vždy věnována náležitá pozornost. Dalším důležitým problémem je volba vhodného shlukovacího postupu. Obecné pravidlo, jak zvolit pro daný problém optimální postup, neexistuje a volba bývá často subjektivní. Významnou roli zde hraje studium vlastností jednotlivých postupů a využití některých kriterií pro hodnocení získaných shluků z hlediska jejich kompaktnosti a vzájemné isolovanosti.

Problematice shlukové analysy byl věnován seminář, který probíhal v oddělení teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky Matematického ústavu ČSAV. Na seminář navázala Letní škola shlukové analysy, kterou uspořádala v roce 1976 matematická vědecká sekce Jednoty československých matematiků a fyziků a liberecká pobočka JČSMF. Letní škola ukázala, že metody shlukové analysy se v Československu na různé úrovni na řadě pracovišť používají a vedou v mnoha případech k velmi dobrým výsledkům. Současně se projevila velká nejednotnost v používané terminologii. To vyplývá ze skutečnosti, že o shlukové analyse nebyly dosud uveřejněny v české matematické literatuře žádné práce. Samotný termín cluster se vyskytuje v češtině v různých podobách jako hnízdo, shluk, svazek, trs apod. Název *shluk* se nám jevil jako nejvhodnější mimo jiné proto, že od slova shluk lze snadno tvořit slova odvozená; můžeme např. hovořit o *shlukovacích* postupech a rozklad $\mathbf{S}$ či pokrytí $\mathbf{M}$ množiny objektů nazvat *shluknutím* a jejich vytváření nazývat *shlukováním*.

Úkolem tohoto článku je přehledně zachytit základní myšlenky shlukové analysy a přispět tak k dalšímu rozšíření jejích metod, informovat o literatuře a pokusit se o sjednocení české terminologie. V první části pojednáme o mírách nepodobnosti (respektive podobnosti) objektů a shluků a funkcionálech kvality rozkladu. Druhá část se zabývá jednotlivými typy shlukovacích postupů. Část třetí je věnována vlastnostem těchto postupů.

1. MÍRY NEPODOBNOSTI A FUNKCIONÁLY KVALITY ROZKLADU

Nechť je dána množina N objektů $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$. Úkolem shlukové analysy je nalézt rozklad $\mathbf{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ množiny X do n shluků tak, aby objekty patřící do téhož shluku si byly v jistém smyslu podobné a objekty patřící do různých shluků se svými vlastnostmi co nejvíce lišily. V některých případech požadavek vzájemné disjunktnosti shluků neodpovídá skutečné situaci. Proto úlohu někdy zobecňujeme v tom smyslu, že shluky S_i se mohou vzájemně překrývat, a místo rozkladu hledáme pokrytí množiny X shluky S_i, tj. takovou množinu $\mathbf{S} = \{S_1, S_2, \ldots$ $\ldots, S_n\}$, aby $X = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$.

Podobnost či odlišnost objektů X_i posuzujeme na základě p určitých znaků, jejichž hodnoty na objektech změříme a jež jsou zvoleny podle konkrétní úlohy. Proto v dalším budeme ztotožňovat objekty X_i s vektory $(x_{i1}, \ldots, x_{ip})$, kde x_{ij} je hodnota naměřená na j-tém znaku i-tého objektu. (Pokud by na různých objektech byly naměřeny stejné vektory, mohli bychom je rozlišit třeba tak, že bychom formálně připojili další souřadnici označující index objektu.) Zpravidla lze vektory X_i považovat za prvky nějakého prostoru $\mathbf{X}$, který nazýváme základním prostorem. Často bývá $\mathbf{X}$ eukleidovský prostor $\mathscr{E}_p$ nebo alespoň lineární prostor.

Shlukovací metody jsou obvykle založeny na mírách nepodobnosti (resp. podobnosti) objektů a shluků, nebo na funkcionálech kvality rozkladu do shluků.

1.1. Míry nepodobnosti objektů. *Míra nepodobnosti* na X je nezáporná reálná funkce d definovaná na $X \times X$ taková, že $d(X_i, X_j) = d(X_j, X_i)$ pro všechna $X_i, X_j \in X$ a $d(X_i, X_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Míru nepodobnosti na X můžeme např. zavést tak, že nejprve definujeme míru nepodobnosti d na $\mathbf{X}$ a míru nepodobnosti na X definujeme jako restrikci míry nepodobnosti d na X. Tuto restrikci budeme nazývat indukovanou mírou nepodobnosti. Zřejmě každá metrika na $\mathbf{X}$ indukuje míru nepodobnosti na X.

Nechť $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ a d je míra nepodobnosti na X. Z vlastností míry nepodobnosti vyplývá, že d je jednoznačně určena svými $\binom{N}{2}$ hodnotami $d(X_i, X_j)$ pro $i < j$. Můžeme proto d považovat za prvek $\binom{N}{2}$-rozměrného eukleidovského prostoru $\mathscr{E}_{\binom{N}{2}}$. Tato representace míry nepodobnosti d je užitečná, jestliže chceme definovat vzdálenost dvou měr nepodobnosti.

Míru nepodobnosti d na X nazýváme *ultrametrickou*, jestliže d splňuje tzv. *ultrametrickou nerovnost*

$$d(X_i, X_j) \leqq \max \left[d(X_i, X_k), d(X_j, X_k)\right] \quad \text{pro každé} \quad X_i, X_j \quad \text{a} \quad X_k \in X .$$

V tabulce 1 uvádíme některé míry nepodobnosti definované na $\mathscr{E}_p$, které jsou často užívány k zavedení měr nepodobnosti na X v případě, že hodnoty znaků měřených na objektech jsou vesměs reálná čísla.

O matici $\mathbf{W}$ v míře nepodobnosti d_M předpokládáme, že je positivně definitní. $\mathbf{W}$ bývá volena jako

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' ,$$

kde $\bar{X} = (1/N) \sum_{i=1}^{N} X_i$, za předpokladu $|\mathbf{W}| \neq 0$. V takovém případě se $\mathbf{W}$ někdy nazývá matice rozsevu.

Míry nepodobnosti d_1 a d_2 jsou zvláštním případem míry d_m. Další míry nepodobnosti jsou uvedeny v [5] a [3].

Tabulka 1: Některé míry nepodobnosti

Název	Tvar
l_1-metrika	$d_1(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{p} \lvert x_{ik} - x_{jk} \rvert$
Eukleidovská metrika	$d_2(X_i, X_j) = [\sum_{k=1}^{p} (x_{ik} - x_{jk})^2]^{1/2}$
l_m-metrika	$d_m(X_i, X_j) = [\sum_{k=1}^{p} \lvert x_{ik} - x_{jk} \rvert^m]^{1/m}$
Sup-metrika	$d_\infty(X_i, X_j) = \max_k \{\lvert x_{ik} - x_{jk} \rvert\}$
Mahalanobisova zobecněná metrika	$d_M(X_i, X_j) = (X_i - X_j)' \mathbf{W}^{-1}(X_i - X_j)$
Úhel sevřený X_i a X_j	$d_s(X_i, X_j) = \arccos \frac{\sum_{k=1}^{p} x_{ik} x_{jk}}{[\sum_{k=1}^{p} x_{ik}^2 \sum_{k=1}^{p} x_{jk}^2]^{1/2}}$
Úhel sevřený $X_i - \bar{X}_i$ a $X_j - \bar{X}_j$	$d_r(X_i, X_j) = \arccos r_{ij}$, kde $r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{p} (x_{ik} - \bar{X}_i)(x_{jk} - \bar{X}_j)}{[\sum_{k=1}^{p} (x_{ik} - \bar{X}_i)^2 \sum_{k=1}^{p} (x_{jk} - \bar{X}_j)^2]^{1/2}}$, $\bar{X}_i = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} x_{ik}$

Míra nepodobnosti je někdy zaváděna pomocí tzv. potenciálové funkce $K(X_i, X_j)$ definované na $X \times X$, a to vzorcem

$$d_K(X_i, X_j) = \sqrt{(K(X_i, X_i) + K(X_j, X_j) - 2K(X_i, X_j))} .$$

Je-li $X \subset \mathscr{E}_p$ a volíme-li $K(X_i, X_j) = (X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{p} x_{ik} x_{jk}$, dostaneme míru nepodobnosti d_2. Potenciálovou funkci můžeme definovat prostřednictvím některé přirozené míry nepodobnosti d na X jako nerostoucí funkci d, např.

$$K(X_i, X_j) = e^{-\alpha d^2(X_i, X_j)}, \quad \alpha > 0 ,$$

nebo

$$K(X_i, X_j) = [1 + \alpha d^2(X_i, X_j)]^{-1}, \quad \alpha > 0 .$$

Míry nepodobnosti na X je někdy vhodné kombinovat, což můžeme provést následujícím způsobem: jsou-li $d_1, d_2, \ldots, d_k$ míry nepodobnosti na X a je-li $\mathbf{V}$ symetrická positivně semidefinitní matice typu $k \times k$, potom $d = \mathbf{d}' \mathbf{V} \mathbf{d}$ je zřejmě míra nepodobnosti na X, kde $\mathbf{d}$ je vektor $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_k)'$. Matici $\mathbf{V} = (v_{ij})$ můžeme interpretovat jako matici vah v_{ii} a podobností v_{ij} $(i \neq j)$ měr $d_1, d_2, \ldots, d_k$.

Duálním pojmem k míře nepodobnosti je *míra podobnosti*. Míra podobnosti na X je reálná funkce s na $X \times X$ taková, že $0 \leqq s(X_i, X_j) = s(X_j, X_i) \leqq 1$ pro všechna $X_i, X_j \in X$ a $s(X_i, X_i) = 1$. Každé míře podobnosti s na X je přiřazena míra nepodobnosti d_s na X vztahem $d_s(X_i, X_j) = 1 - s(X_i, X_j)$.

Míry podobnosti jsou používány ponejvíce v případě binárních znaků. Označme

$$n_{IJ} \ldots \text{ počet znaků } k, \text{ pro které } x_{ik} = x_{jk} = 1 ,$$

$$n_{ij} \ldots \text{ počet znaků } k, \text{ pro které } x_{ik} = x_{jk} = 0 ,$$

$$n_{iJ} \ldots \text{ počet znaků } k, \text{ pro které } x_{ik} = 0,\ x_{jk} = 1 ,$$

$$n_{Ij} \ldots \text{ počet znaků } k, \text{ pro které } x_{ik} = 1,\ x_{jk} = 0 ,$$

Často užívanými mírami podobnosti jsou následující míry:

$$n_{IJ}/(n_{IJ} + n_{Ij} + n_{iJ}) ,$$

$$(n_{IJ} + n_{ij})/p ,$$

$$n_{IJ}/p ,$$

$$2n_{IJ}/(2n_{IJ} + n_{Ij} + n_{iJ}) ,$$

$$2(n_{IJ} + n_{ij})/(p + n_{IJ} + n_{ij}) ,$$

$$n_{IJ}/[n_{IJ} + 2(n_{Ij} + n_{iJ})] ,$$

$$(n_{IJ} + n_{ij})/(p + n_{Ij} + n_{iJ}) .$$

Je-li s míra podobnosti a f neklesající funkce taková, že $f(0) \geqq 0, f(1) = 1$, potom $f(s)$ je zřejmě mírou podobnosti na X. Jestliže f je nerostoucí funkce a $f(1) = 0$, pak $f(s)$ je míra nepodobnosti na X.

1.2. Míry nepodobnosti shluků. Při mnohých shlukovacích metodách, převážně pak u tzv. hierarchických metod, o nichž bude pojednáno v části 2, shlukujeme objekty z X v 1. kroku shlukovacího algoritmu na základě míry nepodobnosti objektů; vytvořené shluky považujeme za nové „objekty“, které v dalších krocích opět shlukujeme na základě měr nepodobnosti shluků. Míry nepodobnosti shluků jsou obvykle definovány pomocí měr nepodobnosti objektů. Některé míry nepodobnosti shluků jsou uvedeny v tabulce 2, kde d značí míru nepodobnosti na X, a S_k, S_m jsou prvky rozkladu $\mathbf{S}$. Symbol $|S|$ značí v celém článku počet prvků množiny S.

Tabulka 2: Míry nepodobnosti shluků

Název	Tvar
Vzdálenost nejbližších prvků shluků S_k a S_m (nejbližší soused)	$\bar{d}_1(S_k, S_m) = \min\limits_{X_i \in S_k, X_j \in S_m} \{d(X_i, X_j)\}$
Vzdálenost nejvzdálenějších prvků shluků S_k a S_m (nejvzdálenější soused)	$\bar{d}_2(S_k, S_m) = \max\limits_{X_i \in S_k, X_j \in S_m} \{d(X_i, X_j)\}$
Průměrná vzdálenost prvků shluků S_k a S_m	$\bar{d}_3(S_k, S_m) = \frac{1}{\lvert S_k \rvert . \lvert S_m \rvert} \sum\limits_{X_i \in S_k} \sum\limits_{X_j \in S_m} d(X_i, X_j)$
Vzdálenost průměrů shluků (centroidní)	$\bar{d}_c(S_k, S_m) = d(\bar{S}_k, \bar{S}_m)$, kde $\bar{S}_k = \frac{1}{\lvert S_k \rvert} \sum\limits_{X_i \in S_k} X_i$
Kolmogorovova zobecněná vzdálenost	$\bar{d}^r(S_k, S_m) = \left[\frac{1}{\lvert S_k \rvert \lvert S_m \rvert} \sum\limits_{X_i \in S_k} \sum\limits_{X_j \in S_m} (d(X_i, X_j))^r \right]^{1/r}$

Míra nepodobnosti shluků $\bar{d}^r$ zahrnuje jako zvláštní případ míry nepodobnosti $\bar{d}_1$ resp. $\bar{d}_2$ resp. $\bar{d}_3$ při $r \to -\infty$ resp. $r \to +\infty$ resp. $r = 1$.

1.3. Funkcionály kvality rozkladu. Funkcionál kvality rozkladu je reálná funkce $f(\mathbf{S})$ definovaná na množině všech rozkladů $\mathbf{S}$ množiny objektů X. Úlohu shlukování pak můžeme formulovat jako úlohu nalézt extrém vhodně zvoleného funkcionálu $f(\mathbf{S})$ na množině všech rozkladů nebo na některé její podmnožině. Funkcionál kvality rozkladu by měl vystihovat naše apriorní představy o optimálním shluknutí v konkrétní situaci.

Uveďme některé běžně užívané funkcionály kvality rozkladu (d je míra nepodobnosti na X):

$$Q_1(\mathbf{S}) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{X_i \in S_m} d^2(X_i, \bar{S}_m), \quad \text{kde} \quad \bar{S}_m = (1/\lvert S_m \rvert) \sum_{X_i \in S_m} X_i,$$

$$Q_2(\mathbf{S}) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{X_i, X_j \in S_m} d^2(X_i, X_j),$$

$$Q_3(\mathbf{S}) = \det\left(\sum_{m=1}^{n} |S_m|\, \mathbf{W}_m\right), \quad \text{kde } \mathbf{W}_m \text{ je výběrová kovariační matice shluku } S_m\,,$$

$$Q_4(\mathbf{S}) = \prod_{m=1}^{n} (\det \mathbf{W}_m)^{|S_m|}\,,$$

$$Q_5(\mathbf{S}) = I_1(\mathbf{S}) + I_2(\mathbf{S})\,, \quad \text{kde} \quad I_1(\mathbf{S}) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{X_i \in S_m} d(X_i, \bar{S}_m) \quad \text{nebo} \quad I_1(\mathbf{S}) = Q_1(\mathbf{S})$$

$$\text{a} \quad I_2(\mathbf{S}) = c\,.\,n = c\,.\,|\mathbf{S}|\,, \quad \text{kde} \quad c > 0 \quad \text{je konstanta}\,.$$

Funkcionály $Q_1(\mathbf{S}) - Q_4(\mathbf{S})$ se používají při rozkladech na pevný počet shluků $n < N$ nebo pro n splňující $n_1 \leqq n \leqq n_2 < N$. Funkcionál $Q_5(\mathbf{S})$ je používán, není-li počet shluků n předem dán, a $I_2(\mathbf{S})$ hraje roli ztrátové funkce závisející na počtu shluků.

A. N. Kolmogorov předložil obecné schéma, používající dvou funkcionálů, z nichž první je mírou koncentrace objektů v rozkladu $\mathbf{S}$ a druhý střední mírou podobnosti objektů ve shlucích.

Míra koncentrace je dána vztahem

$$Z_s(\mathbf{S}) = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{v(X_i)}{N}\right)^s\right]^{1/s},$$

kde $v(X_i)$ je počet objektů ve shluku obsahujícím objekt X_i. Volba čísla s závisí na typu řešené úlohy shlukování. Pro některé hodnoty s má funkcionál $Z_s(\mathbf{S})$ tvar:

$$\log Z_0(\mathbf{S}) = \sum_{m=1}^{n} \frac{|S_m|}{N} \log \frac{|S_m|}{N}\,,$$

$$Z_{-1}(\mathbf{S}) = \frac{1}{n}\,,$$

$$Z_1(\mathbf{S}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{n} \frac{v(X_j)}{N} = \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^{n} |S_m|^2\,,$$

$$Z_{-\infty}(\mathbf{S}) = \min_{1 \leqq m \leqq n} \left(\frac{|S_m|}{N}\right),$$

$$Z_{\infty}(\mathbf{S}) = \max_{1 \leqq m \leqq n} \left(\frac{|S_m|}{N}\right).$$

Poznamenejme, že pro libovolné s má míra koncentrace minimální hodnotu $1/N$, dosaženou pro rozklad X na jednoprvkové shluky a maximální hodnotu 1, kterou nabývá při spojení všech objektů do jednoho shluku.

Střední míra podobnosti objektů uvnitř shluků je dána vztahem

$$I^r(\mathbf{S}) = \left[\frac{1}{N} \sum_{m=1}^{n} |S_m|\, (\bar{d}^r(S_m, S_m))^r\right]^{1/r},$$

kde d^r je Kolmogorovova zobecněná vzdálenost, čili

$$I^r(\mathbf{S}) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{|S(X_i)|}\sum_{X_j \in S(X_i)}(d(X_i, X_j))^r\right]^{1/r},$$

kde $S(X_i)$ je shluk obsahující objekt X_i.

Funkcionály kvality rozkladu na shluky jsou pak voleny jako funkce $f(Z_s(\mathbf{S}), I^r(\mathbf{S}))$.

Zcela obecně uveďme, že většinu funkcionálů $f(\mathbf{S})$ lze vyjádřit ve tvaru

$$f(\mathbf{S}) = f(u_1, \ldots, u_k),$$

kde $u_i = u_i(\mathbf{S})$ jsou funkcionály vyjadřující různé vlastnosti, které očekáváme od optimálního rozkladu na shluky, a charakterizující strukturu uvnitř shluků nebo mezi shluky, např.:

u_1 ... stupeň podobnosti objektů uvnitř shluků,
u_2 ... stupeň odlišnosti shluků,
u_3 ... homogenita rozložení objektů uvnitř shluků,
u_4 ... rovnoměrnost rozložení objektů do n shluků apod.

2. TYPY SHLUKOVACÍCH METOD

Mezi dosud navrženými metodami shlukování můžeme vysledovat tři základní typy metod konstrukce shluků, a to metody hierarchické, metody paralelní a metody sekvenční. Většinu známých shlukovacích metod můžeme začlenit pod některý z těchto typů.

Při *hierarchických metodách* shlukování se vytváří posloupnost $\mathbf{S}^{(t)}$ $(t = 1, 2, \ldots, K)$ rozkladů množiny objektů X taková, že rozklad $\mathbf{S}^{(t)}$ je zjemněním rozkladu $\mathbf{S}^{(t')}$ pro $t < t'$, $(t, t' = 1, 2, \ldots, K)$. Obvykle je rozklad $\mathbf{S}^{(K)}$ tvořen jediným shlukem, množinou X, a rozklad $\mathbf{S}^{(1)}$ systémem jednoprvkových množin, z nichž každá obsahuje právě jeden objekt z X. Příslušnost objektů shlukům v posloupnosti rozkladů lze vyjádřit tzv. dendrogramem. Hierarchie vytváření navzájem nepodobných skupin podobných si objektů je základním požadavkem v biologické taxonomii. Proto hierarchické shlukovací metody jsou pomocným nástrojem poznání v této disciplině a hlavním předmětem studia tzv. numerické taxonomie.

Paralelní shlukovací metody jsou nehierarchické iterační metody, které při každém iteračním kroku využívají pro konstrukci shluků všech shlukovaných objektů $X_i \in X$. Jejich cílem obvykle je určit globální nebo alespoň lokální extrém nějakého funkcionálu kvality rozkladu. Mezi paralelní metody lze např. zařadit metodu postupného přenosu objektu ze shluku do shluku a postupy založené na tzv. vzorových množinách.

Sekvenční metody jsou iterační shlukovací metody, jimiž jsou při každém iteračním kroku vytvářeny shluky na vybrané vlastní podmnožině množiny shlukovaných objektů. Výběr podmnožiny může být realizován např. náhodným výběrem prvků z X. V každém iteračním kroku je množina objektů vybraných ke shlukování rozšířením množiny objektů shlukovaných v kroku předcházejícím.

Jelikož při paralelních shlukovacích metodách je v každém iteračním kroku zpracovávána veškerá informace obsažená v měřeních na shlukovaných objektech, jsou paralelní metody při strojovém zpracování velmi náročné na kapacitu paměti a strojový čas počítačů. Tím je omezena praktická použitelnost paralelních metod, které jsou většinou aplikovány na shlukování nevelkého (vzhledem k parametrům počítače) počtu objektů. Naproti tomu jsou sekvenční metody svými vlastnostmi určeny pro shlukování velkého počtu objektů.

2.1. Hierarchické shlukovací metody. Předpokládejme, že pro objekty z X je dána míra jejich nepodobnosti d. Označme $\mathbf{C}(X)$ množinu všech měr nepodobnosti na X.

Posloupnost rozkladů $\mathbf{S}^{(1)}, \mathbf{S}^{(2)}, \ldots, \mathbf{S}^{(K)}$ množiny X nazveme hierarchickou, je-li rozklad $\mathbf{S}^{(t)}$ zjemněním rozkladu $\mathbf{S}^{(t')}$ pro $t < t'$, $(t, t' = 1, 2, \ldots, K)$.

Hierarchickou metodu můžeme chápat jako metodu přiřazení prvků množiny $\mathscr{S}(X)$ všech konečných hierarchických posloupností rozkladů množiny X měrám nepodobnosti z $\mathbf{C}(X)$. V tomto smyslu je hierarchická metoda zobrazení $\mathbf{C}(X) \to \mathscr{S}(X)$.

Rozklad množiny objektů X na disjunktní shluky je jednoznačně určen ekvivalencí na X, tj. reflexivní, symetrickou a transitivní relací r definovanou na X. Relace r je podmnožina $X \times X$. Relace je

reflexivní, jestliže $(X_i, X_i) \in r$ pro všechna $X_i \in X$,
symetrická, jestliže z $(X_i, X_j) \in r$ plyne $(X_j, X_i) \in r$,
transitivní, jestliže z $(X_i, X_j) \in r$ a $(X_j, X_k) \in r$ plyne $(X_i, X_k) \in r$.

Je-li r ekvivalence, pak množiny $S_{X_i} = \{X_j : (X_i, X_j) \in r\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, tvoří rozklad množiny X. Naopak, je-li $\mathbf{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ rozklad množiny X, je $r = \bigcup_{i=1}^{n} S_i \times S_i$ ekvivalencí na X.

Nechť $\mathbf{S}^{(1)}, \mathbf{S}^{(2)}, \ldots, \mathbf{S}^{(K)}$ je hierarchická posloupnost rozkladů. Zapišme $\mathbf{S}^{(t)}$, $t = 1, 2, \ldots, K$, ve tvaru $\mathbf{S}^{(t)} = \{S_1^{(t)}, S_2^{(t)}, \ldots, S_{n_t}^{(t)}\}$ a označme $r(\mathbf{S}^{(t)}) = \bigcup_{i=1}^{n_t} S_i^{(t)} \times S_i^{(t)}$ ekvivalenci určenou rozkladem $\mathbf{S}^{(t)}$. Zřejmě je $r(\mathbf{S}^{(t)}) \subset r(\mathbf{S}^{(t')})$, pro $t < t'$. Předpokládáme-li, že $\mathbf{S}^{(K)}$ je tvořen jediným shlukem, jímž je množina všech objektů (tj. $r(\mathbf{S}^{(K)}) = X \times X$), je možno vyjádřit hierarchickou posloupnost rozkladů tzv. dendrogramem rozkladu X.

Označme $\mathbf{E}(X)$ množinu všech ekvivalencí na X. *Dendrogram rozkladu* X je funkce $c : [0, \infty) \to \mathbf{E}(X)$, která má vlastnosti:

a) je-li $0 \leqq h < h'$, pak $c(h) \subset c(h')$,
b) existuje h tak, že $c(h) = X \times X$,
c) ke každému h existuje $\delta > 0$ tak, že $c(h + \delta) = c(h)$.

Nechť c je dendrogram. Definujme na $X \times X$ funkci U_c vztahem

$$(1) \qquad U_c(X_i, X_j) = \inf \{h : (X_i, X_j) \in c(h)\} .$$

Potom ekvivalence $c(h)$ je pro $h \in [0, \infty)$ určena vztahem

$$(2) \qquad c(h) = \{(X_i, X_j) : U_c(X_i, X_j) \leqq h\} .$$

Snadno lze dokázat, že funkce U_c je ultrametrická míra nepodobnosti na X. Množinu všech ultrametrických měr nepodobnosti na X označíme $\mathbf{U}(X)$. Platí $\mathbf{U}(X) \subset \mathbf{C}(X)$.

Z (1) a (2) plyne, že zobrazení $c \to U_c$ je jednojednoznačné. Konečné hierarchické posloupnosti rozkladů z $\mathscr{S}(X)$ jsou tudíž určeny ultrametrickými měrami nepodobnosti na X. *Hierarchickou shlukovací metodu* budeme proto definovat jako zobrazení $D : \mathbf{C}(X) \to \mathbf{U}(X)$.

Nejužívanějšími hierarchickými metodami jsou *metoda nejbližšího souseda* (D_1), *metoda nejvzdálenějšího souseda* (D_2), *metoda nevážených průměrů* (D_3) a *vážených průměrů* (D_4). Při těchto metodách je počáteční rozklad $\mathbf{S}^{(1)}$ tvořen jednoprvkovými množinami $\{X_i\}$, $X_i \in X$, $i = 1, 2, \dots, N$. Do téhož shluku rozkladu $\mathbf{S}^{(2)} = \{S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, \dots, S_{n_2}^{(2)}\}$ jsou zařazeny všechny objekty, jejichž vzájemná nepodobnost je rovna $m = \min\limits_{X_i, X_j \in X} d(X_i, X_j)$. Tedy pro $X_i \neq X_j$ a $X_i, X_j \in S_k^{(2)}$, $k = 1, 2, \dots, n_2$, platí $d(X_i, X_j) = m$. Pro takto vytvořené shluky je způsobem popsaným dále stanovena míra nepodobnosti shluků a postup se opakuje tak, že shluky považujeme za objekty při dalším kroku shlukování. Proces se ukončí, když všechny objekty X vytvoří jediný shluk.

Předpokládejme, že v t-tém kroku vytvoří shluky $S_{k_1}^{(t)}, S_{k_1}^{(t)}, \dots, S_{k_r}^{(t)}$ shluk $S_k^{(t+1)}$ a shluky $S_{m_1}^{(t)}, S_{m_2}^{(t)}, \dots, S_{m_s}^{(t)}$ shluk $S_m^{(t+1)}$. Při metodách D_1, D_2, D_3, D_4 jsou míry nepodobnosti shluků určovány takto:

$$D_1\colon\ \bar{d}_1(S_k^{(t+1)}, S_m^{(t+1)}) = \min_{(i,j)} \bar{d}_1(S_{k_i}^{(t)}, S_{m_j}^{(t)}) ,$$

$$D_2\colon\ \bar{d}_2(S_k^{(t+1)}, S_m^{(t+1)}) = \max_{(i,j)} \bar{d}_2(S_{k_i}^{(t)}, S_{m_j}^{(t)}) ,$$

$$D_3\colon\ \bar{d}_3(S_k^{(t+1)}, S_m^{(t+1)}) = r^{-1}s^{-1} \sum_i \sum_j \bar{d}_3(S_{k_i}^{(t)}, S_{m_j}^{(t)}) ,$$

$$D_4\colon\ \bar{d}_4(S_k^{(t+1)}, S_m^{(t+1)}) = |S_k^{(t+1)}|^{-1}\, |S_m^{(t+1)}|^{-1} \sum_i \sum_j |S_{k_i}^{(t)}|\, |S_{m_j}^{(t)}|\, \bar{d}_4(S_{k_i}^{(t)}, S_{m_j}^{(t)}) .$$

Míry nepodobnosti shluků pro metody D_1, D_2, D_3 jsou po řadě shodné s měrami $\bar{d}_i$ tabulky 2, $(i = 1, 2, 3)$.

Nejstarší z těchto metod, metodu nejbližšího souseda, která je někdy nazývána dendritovou metodou [7], můžeme charakterizovat následujícím způsobem. Je-li $d, d' \in \mathbf{C}(X)$, nazveme míru nepodobnosti d *dominantní* vzhledem k d' a označíme $d' \leqq d$, jestliže $d'(X_i, X_j) \leqq d(X_i, X_j)$ pro všechna $X_i, X_j \in X$. Metoda nejbližšího souseda je zobrazení $D : \mathbf{C}(X) \to \mathbf{U}(X)$, které měrám nepodobnosti $d \in \mathbf{C}(X)$ přiřazuje prvky $D(d) \in \mathbf{U}(X)$ takové, že $D(d)$ je největší prvek z $\mathbf{U}(X)$, pro který $D(d) \leqq d$.

Další hierarchickou metodou je *centroidní metoda* (D_c), při které předpokládáme, že objekty $X_i \in X$ lze representovat jako prvky $X_i \in \mathbf{X}$, kde základní prostor $\mathbf{X}$ je lineární. Nechť je na $\mathbf{X}$ dána míra nepodobnosti d, která indukuje míru nepodobnosti na X. Při centroidní metodě je míra nepodobnosti shluků volena jako míra $\tilde{d}_c$ tabulky 2.

Definici hierarchické shlukovací metody lze zobecnit tak, aby zahrnula též případ nedisjunktního pokrytí množiny objektů X jejími podmnožinami. Množinu $\mathbf{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ podmnožin $M_i \subset X$ nazveme pokrytím X, je-li $\bigcup_{i=1}^{n} M_i = X$. Konečnou posloupnost pokrytí $\mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{M}^{(2)}, \ldots, \mathbf{M}^{(K)}$ $(\mathbf{M}^{(t)} = \{M_1^{(t)}, M_2^{(t)}, \ldots, M_{n_t}^{(t)}\}$, $t = 1, 2, \ldots, K$, $M_j^{(t)} \subset X)$ nazveme hierarchickou, je-li pokrytí $M^{(t)}$ zjemněním pokrytí $\mathbf{M}^{(t')}$ pro $t < t'$, $t, t' = 1, 2, \ldots, K$.

Označíme-li $\mathcal{M}(X)$ množinu hierarchických posloupností pokrytí (jejíž prvky splňují přirozené požadavky specifikované níže), potom hierarchickou metodu můžeme v širším smyslu chápat jako zobrazení $\mathbf{C}(X) \to \mathcal{M}(X)$.

Od metody shlukování požadujeme, aby vytvářela pouze taková pokrytí, která mají rozumné vlastnosti. Z úvah budeme zřejmě chtít vyloučit např. taková zobrazení $\mathbf{C}(X) \to \mathcal{M}(X)$, která některé míře nepodobnosti $d \in \mathbf{C}(X)$ přiřazují hierarchickou posloupnost pokrytí, v níž existuje prvek $\mathbf{M}^{(t)} = \{M_1^{(t)}, M_2^{(t)}, \ldots, M_{n_t}^{(t)}\}$ a $i \neq j$ tak, že $M_i^{(t)} \subset M_j^{(t)}$. Množinu $\mathcal{M}(X)$ proto vymezíme podmínkou, aby byla tvořena jen takovými hierarchickými posloupnostmi pokrytí, jejichž prvky mají v některém smyslu dobrou strukturu překrývání.

Dobrou strukturu překrývání můžeme zavést např. pomocí tzv. maximálně vázaných množin. Nechť r je symetrická a reflexivní relace na X. Množinu $M \subset X$ nazveme *maximálně vázanou* vzhledem k relaci r, je-li $M \times M \subseteq r$ (a tedy $r \cap M \times M$ je ekvivalence na M) a jestliže pro každé $X_i \in X - M$ existuje $X_j \in M$ tak, že $(X_i, X_j) \notin r$. Každé pokrytí $\mathbf{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ množiny X určuje relaci $r(\mathbf{M}) = \bigcup_{i=1}^{n} M_i \times M_i$. Pokrytí $\mathbf{M}$ nazveme *pokrytím s dobrou strukturou překrývání*, s tliže M_i jsou maximálně vázané množiny vzhledem k relaci $r(\mathbf{M})$.

Množinu $\mathcal{M}(X)$ pak definujeme jako množinu všech hierarchických posloupností pokrytí s dobrou strukturou překrývání. V dalším předpokládáme, že $\mathcal{M}(X)$ je takto definována.

Je-li r symetrická, reflexivní relace na X, pak množina $\mathbf{M}(r) = \{M_1(r), \ldots, M_{n_r}(r)\}$ všech maximálně vázaných množin vzhledem k r tvoří pokrytí X s dobrou strukturou překrývání. Mezi reflexivními, symetrickými relacemi na X a pokrytími s dobrou strukturou překrývání je tudíž přirozený jednojednoznačný vztah. Přitom pro $r_1 \subset r_2$ platí, že pokrytí $\mathbf{M}(r_1)$ je zjemněním pokrytí $\mathbf{M}(r_2)$.

Hierarchické posloupnosti pokrytí z $\mathcal{M}(X)$ můžeme vyjádřit pomocí tzv. *funkce stratifikovaného shlukování.*

Označme $\Sigma(X)$ množinu všech reflexivních, symetrických relací na X. Funkci $c : [0, \infty) \to \Sigma(X)$, která splňuje podmínky a), b), c) požadované pro dendrogram nazýváme funkcí stratifikovaného shlukování. Funkce stratifikovaného shlukování je zobecněním dendrogramu; u dendrogramu jsou $c(h)$ ekvivalence na X, kdežto u funkce stratifikovaného shlukování jsou $c(h)$ reflexivní, symetrické relace na X.

Nechť c je funkce stratifikovaného shlukování, potom definujeme-li na $X \times X$ funkci U_c vztahem (1), je U_c míra nepodobnosti na X (tj. $U_c \in \mathbf{C}(X)$). Naopak, je-li U_c míra nepodobnosti na X, potom je vztahem

(3) $$c(h) = \{(X_i, X_j) : U_c(X_i, X_j) \leqq h\}, \quad h \in [0, \infty),$$

určena funkce stratifikovaného shlukování a tedy hierarchická posloupnost pokrytí z $\mathcal{M}(X)$.

Mezi funkcemi stratifikovaného shlukování a měrami nepodobnosti tudíž existuje přirozený jednojednoznačný vztah. Hierarchickou metodu v širším smyslu můžeme proto definovat jako zobrazení $\mathbf{C}(X) \to \mathbf{C}(X)$. Hierarchické metody v širším smyslu přiřazují měrám nepodobnosti $d \in \mathbf{C}(X)$ hierarchické posloupnosti pokrytí s dobrou strukturou překrývání. V tomto smyslu jsou hierarchické. Protože však v literatuře se hierarchickými nazývají pouze takové metody shlukování, které lze vyjádřit dendrogramem a graficky znázornit hierarchickým stromem, a tuto vlastnost hierarchické metody v širším smyslu obecně nemají, budeme je nazývat stratifikovanými metodami shlukování.

Nechť $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}(X)$, $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{C}(X)$. *Stratifikovanou metodu shlukování* definujeme jako zobrazení $D : \mathbf{A} \to \mathbf{Z}$.

Triviální metodou shlukování při $\mathbf{A} = \mathbf{Z}$ je metoda $D(d) = d$, pro $d \in \mathbf{A}$. Protože metoda shlukování objektů by měla koncentrovat informaci, která je obsažena v míře nepodobnosti $d \in \mathbf{A}$, je vhodné požadovat $\mathbf{A} \supset \mathbf{Z}$. Množina měr nepodobnosti $\mathbf{A}$ je někdy nazývána *množinou dat* a množina $\mathbf{Z}$ *cílovou množinou.*

Cílová množina $\mathbf{Z}$ může být volena tak, aby stratifikovaná metoda shlukování vytvářela pokrytí množiny X s dobrou strukturou překrývání a s některými dalšími vlastnostmi struktury překrývání. Volíme-li např. $\mathbf{Z} = \mathbf{U}(X)$, potom stratifikovaná metoda shlukování $D : \mathbf{A} \to \mathbf{U}(X)$ je hierarchickou metodou shlukování, tj. metodou vytvářející disjunktní shluky. Vzhledem k jednojednoznačnému vztahu mezi relacemi $r \in \Sigma(X)$ a pokrytími X s dobrou strukturou překrývání můžeme další vlastnosti struktury překrývání formulovat jako vlastnosti relací. Volba struktury překrývání je tak volbou podmnožiny $\Sigma^*(X) \subseteq \Sigma(X)$. Stratifikované metody shlukování, které vytvářejí pokrytí se strukturou překrývání $\Sigma^*(X)$, jsou právě takové metody, které přiřazují měrám nepodobnosti funkce stratifikovaného shlukování $c^* : [0, \infty) \to$ $\to \Sigma^*(X)$. Označme $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}^*(X)$ tu část $\mathbf{C}(X)$, která odpovídá takovým funkcím c^*. Potom každá stratifikovaná metoda shlukování, která vytváří pouze pokrytí se strukturou překrývání $\Sigma^*(X)$, je zobrazení $D : \mathbf{A} \to \mathbf{Z}^*$.

Požadujeme-li kupříkladu, aby stratifikovaná metoda shlukování vytvářela jen taková pokrytí s dobrou strukturou překrývání, jejichž množiny se překrývají nejvýše v $(k - 1)$ objektech, lze dokázat, že všechna taková pokrytí jsou právě určena množinou $\Sigma_k^*(X)$ všech tzv. slabě k-transitivních relací.

Relaci $r \in \Sigma(X)$ nazýváme *slabě k-transitivní*, jestliže z $\{\{X_i\} \times S \cup S \times S \cup S \times \{X_j\}\} \subseteq r$ plyne $(X_i, X_j) \in r$ pro všechna $X_i, X_j \in X$ a všechna $S \subset X$ taková, že $|S| = k$.

Cílová množina $\mathbf{Z}_k^* \subset \mathbf{C}(X)$, která odpovídá podmínce struktury překrývání $\Sigma_k^*(X)$, je množina všech slabých k-ultrametrických měr nepodobnosti na X.

Míru nepodobnosti $d \in \mathbf{C}(X)$ nazýváme *slabě k-ultrametrickou*, jestliže pro každé $S \subset X$, $|S| = k$ a libovolná $X_i, X_j \in X$ platí tzv. *slabě k-ultrametrická nerovnost*:

$$d(X_i, X_j) \leqq \max \{d(Y, Z) : Y \in S \cup \{X_i, X_j\},\ Z \in S\} .$$

Všechny stratifikované shlukovací metody, které vytvářejí pokrytí se strukturou překrývání $\Sigma_k^*(X)$, jsou právě všechna zobrazení $D : \mathbf{A} \to \mathbf{Z}_k^*$. Pro $k = 1$ je $\mathbf{Z}_k^* = \mathbf{U}(X)$.

V porovnání se slabou k-transitivitou je silnější podmínkou kladenou na strukturu překrývání silná k-transitivita relací ze $\Sigma(X)$.

Relaci $r \in \Sigma(X)$ nazýváme *silně k-transitivní*, jestliže z $\{\{X_i\} \times S \cup S \times \{X_j\}\} \subseteq r$ plyne $(X_i, X_j) \in r$ pro všechna $S \subset X$ a $|S| = k$, $X_i, X_j \in X$.

Označíme-li $\Sigma_k^{**}(X)$ množinu všech silně k-transitivních relací na X, je $\Sigma_k^{**}(X) \subset \Sigma_k^*(X)$. Všechny shlukovací metody, které vytvářejí pokrytí se strukturou překrývání $\Sigma_k^{**}(X)$, jsou všechna zobrazení typu $D : \mathbf{A} \to \mathbf{Z}_k^{**}$, kde $\mathbf{Z}_k^{**}$ je množinou všech silně k-ultrametrických měř nepodobnosti na X.

Míru nepodobnosti $d \in \mathbf{C}(X)$ nazýváme *silně k-ultrametrickou*, jestliže pro každou množinu $S \subset X$, $|S| = k$ a všechna $X_i, X_j \in X$ platí tzv. *silně k-ultrametrická nerovnost*

$$d(X_i, X_j) \leqq \max \{d(Y, Z) : Y \in \{X_i, X_j\},\ Z \in S\} .$$

Zřejmě $\mathbf{Z}_k^{**} \subset \mathbf{Z}_k^*$.

Stratifikované metody shlukování jsou oproti metodám hierarchickým lepším modelem shlukování v těch reálných situacích, kdy měření x_{ij} na objektech X_i jsou prováděna s relativně velkou chybou, která má náhodnou povahu. Tehdy je možno X_i (při $X_i \in \mathscr{E}_p$), $i = 1, 2, \ldots, N$, považovat za realizace náhodných veličin. Vzhledem k nepřesnosti měření je pak přirozenější požadovat, aby metoda shlukování vytvářela pokrytí a nikoli jen rozklady množiny objektů X. **Stratifikované metody shlukování vytvářející pokrytí se strukturou překrývání $\Sigma^*(X)$ resp. $\Sigma^{**}(X)$ jsou prvním krokem aproximace takové reálné situace. Otevřenou zůstává otázka konstrukce algoritmu těchto metod. Doposud navržené algoritmy stratifikovaných metod shlukování se strukturou překrývání $\Sigma^*(X)$ resp. $\Sigma^{**}(X)$ jsou velmi komplikované a neefektivní pro výpočet i v případě jednoduchých stratifikovaných metod [9].**

2.2. Paralelní a sekvenční shlukovací metody. Nejčastěji užívanými paralelními metodami jsou metoda vzorových množin a metoda přenosu objektu ze shluku do shluku.

Nechť $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ je množina shlukovaných objektů. Budiž $m_1, m_2, \ldots$ $\ldots, m_n$ n-tice přirozených čísel, $\sum_{i=1}^{n} m_i < N$. Systém $\mathbf{E} = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ disjunktních podmnožin $E_i \subset X$, které mají postupně mohutnosti $m_1, m_2, \ldots, m_n$, nazýváme *systémem vzorových množin*. V případě $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 1$ hovoříme o *systému vzorových bodů.*

Algoritmy *shlukování metodou vzorových* množin jsou založeny na funkcích φ, ψ. $\varphi(X_i, A)$ je funkce definovaná pro $X_i \in X$, $A \subset X$. Interpretujeme ji jako míru možnosti vyjádření objektu X_i množinou A. $\psi(X_i, A)$ je rovněž definována pro $X_i \in X$, $A \subset X$. Interpretujeme ji však jako míru možnosti vyjádření množiny A objektem X_i. Je-li d míra nepodobnosti na X, můžeme funkce φ, ψ volit např. takto:

$$\varphi(X_i, A) = \sum_{Y \in A} d(X_i, Y), \quad \psi(X_i, A) = \varphi(X_i, A).$$

Při shlukování metodou vzorových množin vyjdeme z jistým způsobem zvoleného počátečního systému vzorových množin, kterému pomocí funkce φ přiřadíme systém shluků (rozklad množiny X). Takto vzniklému systému shluků přiřadíme pomocí funkce ψ nový systém vzorových množin a postup opakujeme. Proces ukončíme, když v sousledných iteračních krocích dostaneme stejný rozklad.

Předpokládejme, že počet shluků, které má metoda vytvořit, je $\leqq n$. Nechť $\mathbf{E}^{(0)} = \{E_1^{(0)}, E_2^{(0)}, \ldots, E_n^{(0)}\}$ je počáteční systém vzorových množin. Systému $\mathbf{E}^{(0)}$ přiřadíme rozklad $\mathbf{S}^{(0)} = \mathbf{S}(\mathbf{E}^{(0)}) = \{S_1(\mathbf{E}^{(0)}), S_2(\mathbf{E}^{(0)}), \ldots, S_n(\mathbf{E}^{(0)})\}$ množiny objektů X, pomocí funkce φ, vztahem

$$S_i^{(0)} = S_i(\mathbf{E}^{(0)}) = \{Y \in X : \varphi(Y, E_i^{(0)}) < \varphi(Y, E_j^{(0)})\,; \quad i \neq j, j = 1, 2, \ldots, n\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Do $S_i^{(0)}$ jsou tedy zařazovány ty objekty, které jsou nejlépe representovány množinou $E_j^{(0)}$. Jestliže pro některá i, j, $i \neq j$ a $Y \in X$ je $\min_k \varphi(Y, E_k^{(0)}) = \varphi(Y, E_i^{(0)}) = \varphi(Y, E_j^{(0)})$, zařazujeme prvek Y do shluku s nejmenší hodnotou indexu.

K $\mathbf{S}^{(0)}$ přiřadíme pomocí funkce ψ systém vzorových množin $\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}(\mathbf{S}^{(0)}) = \{E_1(\mathbf{S}^{(0)}), E_2(\mathbf{S}^{(0)}), \ldots, E_{n_1}(\mathbf{S}^{(0)})\}$. Nechť $F_i(\mathbf{S}^{(0)}) = \{Y \in X : \psi(Y, S_i^{(0)}) < \psi(Y, S_j^{(0)})$; $i \neq j, j = 1, 2, \ldots, n\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. V případě rovnosti zařazujeme Y do množiny s nejmenší hodnotou indexu. Je-li $|F_i(\mathbf{S}^{(0)})| \leqq m_i$, položíme $E_i^{(1)} = E_i(\mathbf{S}^{(0)}) = F_i(\mathbf{S}^{(0)})$. Je-li $|F_i(\mathbf{S}^{(0)})| > m_i$, zařadíme do $E_i(\mathbf{S}^{(0)})$ m_i objektů $Y \in F_i(\mathbf{S}^{(0)})$ s nejmenšími hodnotami funkce $\psi(Y, S_i^{(0)})$.

Postup opakujeme a ukončíme v t-tém kroku, jestliže $\mathbf{E}^{(t)} = \mathbf{E}^{(t-1)}$, tj. $\mathbf{S}^{(t)} = \mathbf{S}^{(t-1)}$.

Konvergence metody a vlastnosti rozkladu, který metodou získáme, zřejmě závisí na volbě funkcí φ, ψ. Nechť $\mathbf{E}, \tilde{\mathbf{E}}$ jsou dva systémy vzorových množin a $\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{E}})$ rozklad přiřazený pravidlem (4) systému vzorových množin $\tilde{\mathbf{E}}$. Označme $\psi(E_{\pi_i}, S_i(\tilde{\mathbf{E}}))$ součet $\sum_{Y \in E_{\pi_i}} \psi(Y, S_i(\tilde{\mathbf{E}}))$, kde $\pi = (\pi_i)$ je permutace množiny indexů $1, 2, \ldots, n$. $\psi(E_{\pi_i}, S_i(\tilde{\mathbf{E}}))$ je mírou možnosti vyjádření vzorové množiny E_{π_i} množinou $S_i(\tilde{\mathbf{E}})$.

Potom

$$\Delta(\mathbf{E}, \tilde{\mathbf{E}}) = \min_{\pi} \sum_{i} \psi(E_{\pi_i}, S_i(\tilde{\mathbf{E}}))$$

je globální mírou možnosti vyjádření systému vzorových množin $\mathbf{E}$ rozkladem $\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{E}})$.

Vyjadřuje-li rozklad $\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{E}})$ nějaký systém vzorových množin $\mathbf{E}$ lépe než systém $\tilde{\mathbf{E}}$, z kterého vznikl, je přirozené požadovat, aby $\mathbf{E}$ bylo vyjádřeno shluky $\mathbf{S}(\mathbf{E})$ lépe než shluky $\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{E}})$.

Proto požadujeme, aby funkce φ, ψ splňovaly podmínku

$$\text{(5)} \qquad \text{z} \quad \Delta(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{E}}) > \Delta(\mathbf{E}, \tilde{\mathbf{E}}) \quad \text{plyne} \quad \Delta(\mathbf{E}, \tilde{\mathbf{E}}) > \Delta(\mathbf{E}, \mathbf{E}) .$$

Systém vzorových množin $\mathbf{E} = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ je *lokálně optimální*, jestliže pro všechna $Y \in X - E_i$, $Z \in E_i$ platí

$$\psi(Y, S_i(\mathbf{E})) \geqq \psi(Z, S_i(\mathbf{E})) \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Jestliže funkce φ, ψ splňují podmínku (5) a funkce φ je taková, že

$$\text{(6)} \qquad \varphi(X_i, S) \neq \varphi(X_i, S') \quad \text{pro} \quad S, S' \subset X , \quad S \cap S' = \emptyset \quad \text{a všechna} \quad X_i \in X ,$$

potom $\mathbf{E}^{(t)} \to \bar{\mathbf{E}}$, kde $\bar{\mathbf{E}}$ je lokálně optimální systém vzorových množin [4]. Podmínka (5) je zřejmě splněna např. pro $\psi = \varphi$.

Budiž $\mathbf{E}$ systém vzorových množin. Položme $\psi = \varphi$, kde φ splňuje (6), a definujme

$$Q(S_i) = \sum_{Y \in E_i} \varphi(Y, S_i) , \quad i = 1, 2, \ldots, n ,$$

kde $S_i = \{Y \in X : \varphi(Y, E_i) < \varphi(Y, E_j); j \neq i, j = 1, 2, \ldots, n\}$.

Potom $H(\mathbf{S}(\mathbf{E})) = \sum_i Q(S_i)$ můžeme považovat za hodnotu funkcionálu kvality rozkladu $\mathbf{S}(\mathbf{E})$; v dalším značíme $H(\mathbf{E}) = H(\mathbf{S}(\mathbf{E}))$. V tomto případě $\mathbf{E}^{(t)} \to \bar{\mathbf{E}}$ a $H(\bar{\mathbf{E}})$ je lokální minimum funkcionálu $H(\mathbf{E})$. Ve speciálním případě, kdy $\mathbf{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ je množina[1]) vzorových bodů, lze při volbě funkce $\varphi = d^2(X_j, e_i)$, $X_j \in X$, $e_i \in \mathbf{E}$, kde d je míra nepodobnosti na X, funkcionál $H(\mathbf{E})$ psát ve tvaru $H_1(\mathbf{E}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{X_j \in S_i} d^2(X_j, e_i)$. Je-li míra nepodobnosti d na X taková, že $d(X_i, X_j) = 0$ právě

[1]) Pro zjednodušení zápisu ztotožníme zde i v dalším jednobodové množiny $\{e_i\}$ s body $e_i \in X$.

tehdy, když $X_i = X_j$ a dále, že pro $(X_i, X_j) \neq (Y_i, Y_j)$, $X_i \neq X_j$ platí $d(X_i, X_j) \neq d(Y_i, Y_j)$, potom paralelní postup založený na systému vzorových bodů vede k lokální minimalizaci funkcionálu $H_1(\mathbf{E})$.

Poznamenejme ještě, že postup lze zobecnit na případ volby prvků vzorových množin ze základního prostoru $\mathbf{X}$. Je-li $\mathbf{X}$ lineární prostor, pak můžeme např. volit $\varphi(X_i, A) = d(X_i, \bar{X}(A))$, kde $\bar{X}(A) = (1/|A|) \sum_{X_i \in A} X_i$.

Někdy je též vhodné definovat funkci ψ, kterou jsou přiřazovány systémy vzorových množin $\mathbf{E}^{(t)}$ rozkladům $\mathbf{S}^{(t)}$, indukcí tak, aby závisela na systému vzorových množin $\mathbf{E}^{(t-1)}$, z něhož shluky $S_j^{(t)}$ vznikly, tj. $\psi = \psi(X_i, S_j^{(t)}(\mathbf{E}^{(t-1)}))$.

Příkladem je funkce

$$\psi(X_i, S_j(\mathbf{E})) = \frac{\varphi(X_i, S_j(\mathbf{E}))\, \varphi(X_i, E_j)}{(\sum_k \varphi(X_i, E_k))^2},$$

kde $\mathbf{E}$ je systém vzorových množin a $\mathbf{S}(\mathbf{E}) = \{S_1(\mathbf{E}), S_2(\mathbf{E}), \ldots, S_n(\mathbf{E})\}$ rozklad tomuto systému přiřazený pravidlem (4).

Paralelní postup shlukování se obvykle aplikuje na několik počátečních systémů vzorových množin a z výsledných rozkladů se vybírá ten, který má v jistém smyslu nejlepší strukturu. Je-li struktura např. charakterizována funkcionálem, vybereme ten rozklad, pro který je hodnota funkcionálu kvality rozkladu největší (resp. nejmenší).

Postup lze zobecnit na případ, kdy počet shluků ve vytvářených rozkladech není omezen číslem $n < N$. V tomto případě se postupuje tak, že v prvním kroku algoritmu:

1) Určí se n_0, $0 < n_0 < N$, přirozená čísla $m_1, m_2, \ldots, m_{n_0}$ a počáteční systém vzorových množin $\mathbf{E}^{(0)} = \{E_1^{(0)}, E_2^{(0)}, \ldots, E_{n_0}^{(0)}\}$, kde $|E_i^{(0)}| = m_i$.

2) Dále se zvolí tzv. prahová hodnota φ_0 funkce φ. Pomocí funkce $\varphi(X_i, A)$ se systému vzorových množin $\mathbf{E}^{(0)}$ přiřadí rozklad, jehož prvky tvoří množiny

$$(7) \qquad \begin{aligned} S_i^{(0)} &= \{Y \in X : \varphi(Y, E_i^{(0)}) < \varphi(Y, E_j^{(0)});\ j \neq i,\ j = 1, 2, \ldots, n_0\} \cap \\ &\cap \{Y \in X : \varphi(Y, E_i^{(0)}) \leqq \varphi_0\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n_0, \end{aligned}$$

a dále jednoprvkové množiny $\{X_k\}$, kde X_k jsou objekty, které nejsou vztahem (7) zařazeny do množin $S_i^{(0)}$.

3) Vytvořené shluky postupně spojujeme pomocí funkce $\tilde{\psi}(S_i, S_j)$, která je mírou podobnosti shluků S_i, S_j a může být volena např. takto:

$$\tilde{\psi}(S_i, S_j) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{|S_i|} \sum_{Y \in S_i} \psi(Y, S_j) + \frac{1}{|S_j|} \sum_{Y \in S_j} \psi(Y, S_i)\right].$$

Zvolíme prahovou hodnotu $\tilde{\psi}_0$ funkce $\tilde{\psi}(S_i, S_j)$ a spojíme shluky, pro které $\tilde{\psi}(S_i, S_j)$ je minimální a menší než $\tilde{\psi}_0$. Postup spojování shluků opakujeme a ukončíme, když pro všechny dvojice shluků v rozkladu je funkce $\tilde{\psi} \geqq \tilde{\psi}_0$.

Postup spojování zřejmě nemusí být jednoznačný. Naznačme, jak shlukům vytvořeným spojením dvou shluků přiřazujeme vzorové množiny: jednobodové shluky

$\{X_k\}$ považujeme za shluky vytvořené jednobodovou vzorovou množinou X_k a spojení $S_i \cup S_j$ shluků S_i, S_j, které byly vytvořeny vzorovými množinami E_i, E_j, přiřadíme vzorovou množinou E_{ij}, do níž zařadíme $m_{ij} = \max(|E_i|, |E_j|)$ prvků $Y \in X$, na kterých nabývá funkce $\psi(Y, S_i \cup S_j)$ nejmenších hodnot. Tak vznikne systém vzorových množin $\mathbf{E}^{(1)}$ pro další iterační krok algoritmu.

Metody shlukování založené na vzorových bodech může být v některých případech užito k lokální optimalizaci funkcionálů kvality rozkladu (např. funkcionálů typu $H(\mathbf{E})$).

Metodou, která je užívána výhradně k optimalizaci funkcionálů kvality rozkladu, je *metoda přenosu* objektu ze shluku do shluku. Při této metodě předpokládáme, že objekty z X jsou uspořádány v posloupnost $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Metoda je založena na iteračním algoritmu. V prvním kroku vycházíme z počátečního rozkladu $\mathbf{S}^{(0)} = \{S_1^{(0)}, S_2^{(0)}, \ldots, S_n^{(0)}\}$ a bod X_1 se postupně přenáší do všech shluků. Vzniknou tak rozklady $\mathbf{S}_{1i}^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Z nich vybereme rozklad $\mathbf{S}_1^{(0)}$, pro který je hodnota $Q(\mathbf{S}_{1i}^{(0)})$ daného funkcionálu $Q(\mathbf{S})$ minimální. V rozkladu $\mathbf{S}_1^{(0)}$ přenášíme bod X_2 ze shluku do shluku a ze vzniklých rozkladů vybereme rozklad $\mathbf{S}_2^{(0)}$ s minimální hodnotou funkcionálu Q, atd. První krok algoritmu uzavře přenášení bodu X_N, které vede k výběru rozkladu $\mathbf{S}^{(1)} = \mathbf{S}_N^{(0)}$, který je výchozím rozkladem dalšího kroku algoritmu.

Metoda zřejmě závisí na počátečním rozkladu $\mathbf{S}^{(0)}$ a na uspořádání množiny objektů X v posloupnost.

S paralelní metodou shlukování založenou na vzorových množinách je příbuzná sekvenční *metoda průměrů*.

Předpokládejme $X_i \in \mathscr{E}_p$. Metoda průměrů vytváří postupně systém n vzorových bodů $\mathbf{E}^{(t)} = \{e_1^{(t)}, e_2^{(t)}, \ldots, e_n^{(t)}\}$, kterému je funkcí $\varphi(X_i, A)$ přiřazován rozklad $\mathbf{S}^{(t)} = \mathbf{S}(\mathbf{E}^{(t)})$ pravidlem (4). Poznamenejme, že pro aplikaci pravidla (4) v případě vesměs jednobodových vzorových množin stačí funkci φ definovat jen pro jednobodové množiny $A \subset X$. Nechť je míra nepodobnosti d' na X indukována mírou nepodobnosti d na $\mathscr{E}_p$. Položme $\varphi(X_i, Y) = d(X_i, Y)$ pro $X_i \in X$, $Y \in \mathscr{E}_p$.

Metoda průměrů vychází z počátečního systému vzorových množin $\mathbf{E}^{(0)} = \{e_1^{(0)}, e_2^{(0)}, \ldots, e_n^{(0)}\}$, kterým jsou přiřazeny váhy $v_1^{(0)} = v_2^{(0)} = \ldots = v_n^{(0)} = 1$. Nechť $\mathbf{E}^{(t-1)} = \{e_1^{(t-1)}, e_2^{(t-1)}, \ldots, e_n^{(t-1)}\}$ je systém vzorových množin vytvořený v $(t-1)$ kroku a označme $v_1^{(t-1)}, v_2^{(t-1)}, \ldots, v_n^{(t-1)}$ postupně váhy vzorových bodů $e_1^{(t-1)}, e_2^{(t-1)}, \ldots, e_n^{(t-1)}$. V t-tém kroku vybereme (např. náhodně) z množiny X objekt X_t. Nechť $e_i^{(t-1)}$ je vzorový bod z $\mathbf{E}^{(t-1)}$, pro který $d(X_t, e_i^{(t-1)}) = \min_j d(X_t, e_j^{(t-1)})$. Potom $\mathbf{E}^{(t)} = \{e_j^{(t)}\}_{j=1}^n$ s váhami $\{v_j^{(t)}\}_{j=1}^n$, kde

$$e_i^{(t)} = \frac{e_i^{(t-1)} + X_t}{v_i^{(t-1)} + 1}, \quad v_i^{(t)} = v_i^{(t-1)} + 1$$

a

$$e_j^{(t)} = e_j^{(t-1)}, \quad v_j^{(t)} = v_j^{(t-1)} \quad \text{pro} \quad j \neq i, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Počáteční systém vzorových množin $\mathbf{E}^{(0)}$ se někdy vytváří náhodným výběrem bez vracení na X. Vlastnosti metody průměrů lze v případě $\varphi = d(X_i, e_i) = \varrho(X_i, e_i)$, kde ϱ je eukleidovská metrika na $\mathscr{E}_p$, charakterizovat pravděpodobnostně.

Předpokládejme, že $\mathscr{X}$ je p-rozměrná spojitá náhodná veličina a nechť jí indukovaná pravděpodobnostní míra P na $\mathscr{E}_p$ má vlastnost, že existuje uzavřená, omezená a konvexní množina $U^* \subset \mathscr{E}_p$, pro kterou $P(U^*) = \int_{U^*} \mathrm{d}P = 1$ a pro jejíž každou otevřenou podmnožinu $U \subset U^*$ s positivní lebesgueovskou mírou je $P(U) > 0$.

Nechť $S \subset \mathscr{E}_p$ a $P(S) > 0$. Označme $\mu(S) = (1/P(S)) \int_S Y \mathrm{d}P(Y)$ podmíněnou střední hodnotu veličiny $\mathscr{X}$ za podmínky S. Je-li $\mathbf{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ rozklad prostoru $\mathscr{E}_p$ takový, že $P(S_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, označíme

$$\boldsymbol{\mu}[\mathbf{S}] = (\mu(S_1), \mu(S_2), \ldots, \mu(S_n))$$

vektor podmíněných středních hodnot veličiny $\mathscr{X}$ vzhledem ke shlukům $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Budiž $\mathbf{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ systém vzorových bodů a $\mathbf{S}(\mathbf{E}) = \{S_1(\mathbf{E}), S_2(\mathbf{E}), \ldots$ $\ldots, S_n(\mathbf{E})\}$ rozklad prostoru $\mathscr{E}_p$ přiřazený systému $\mathbf{E}$ užitím pravidla (4) pro $Y \in \mathscr{E}_p$. Poznamenejme, že vzhledem ke spojitosti veličiny $\mathscr{X}$ má množina, na které je rozklad nejednoznačný, nulovou pravděpodobnost.

Množinu vzorových bodů nazýváme *nestrannou*, jestliže $\boldsymbol{\mu}[\mathbf{S}(\mathbf{E})] = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Položme

$$Q_1(\mathbf{E}) = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i(\mathbf{E})} \varrho^2(Y, \mu(S_i(\mathbf{E})))\, P(\mathrm{d}Y)$$

a

$$\tilde{Q}_1(\mathbf{E}) = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i(\mathbf{E})} \varrho^2(Y, e_i)\, P(\mathrm{d}Y)\,.$$

Funkcionály $Q_1(\mathbf{E})$ a $\tilde{Q}_1(\mathbf{E})$ jsou funkcionály kvality rozkladu prostoru $\mathscr{E}_p$ a jsou zobecněním funkcionálu $Q_1(\mathbf{S})$. Funkcionál $\tilde{Q}_1(\mathbf{E})$ je zobecnění funkcionálu $H_1(\mathbf{E})$.

Nechť $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, které mají rozložení pravděpodobnosti shodné s rozložením náhodné veličiny $\mathscr{X}$. Nechť při metodě průměrů je $\mathbf{E}^{(0)} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ a $X_t = Y_{n+t}$, $t = 1, 2, \ldots$. Veličina X_t má význam náhodného výběru objektu v t-tém kroku algoritmu.

Za těchto předpokladů s pravděpodobností 1 platí

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s + 1} \sum_{t=0}^{s} \sum_{i=1}^{n} P(S_i^{(t)})\, \varrho(\mu(S_i^{(t)}), e_i^{(t)}) = 0\,.$$

Dále platí [12], že posloupnost náhodných veličin $\tilde{Q}_1(\mathbf{E}^{(t)})$ konverguje skoro všude a s pravděpodobností 1 je $\lim_{t \to \infty} \tilde{Q}_1(\mathbf{E}^{(t)}) = Q_1(\mathbf{E})$, kde $\mathbf{E}$ je nějakou nestrannou množinou vzorových bodů.

3. VLASTNOSTI SHLUKOVACÍCH POSTUPŮ

Z předchozí části vyplývá, že pro řešení dané úlohy shlukové analysy máme k disposici velké množství shlukovacích postupů. Stojíme tedy před problémem, který postup zvolit. Jak již bylo řečeno, ve shlukové analyse nejsou známa pravidla, která by umožňovala zvolit pro danou úlohu v jistém smyslu nejlepší shlukovací postup. K usnadnění volby shlukovacího postupu se definují různé žádoucí vlastnosti, které by rozumné shlukovací postupy měly mít, a pak se zkoumá, které shlukovací postupy tyto vlastnosti mají. Takové postupy se někdy nazývají přípustné shlukovací postupy vzhledem k dané vlastnosti ([6]). Budeme tohoto názvu používat, i když není zcela vhodný. Mohl by totiž svádět k domněnce, že nepřípustnost shlukovacího postupu značí jeho nevhodnost pro aplikace. Spíše však jde o to uvědomit si, jaké přednosti a nedostatky daný shlukovací postup má a zda jeho vlastnosti odpovídají požadavkům kladeným na řešení konkrétní úlohy shlukování. Přípustné shlukovací postupy můžeme definovat dvojím způsobem. V prvém případě klademe podmínky přímo na shlukovací postup. Často však nejprve definujeme přípustné rozklady a požadujeme, aby daný postup vytvářel pouze přípustné rozklady.

Je zcela přirozené požadovat, aby shlukovací postup použitý na množinu objektů, která má výraznou strukturu, tuto strukturu odhalil. Rozeznáváme tři druhy dobré struktury objektů. Objekty $X_1, X_2, \ldots, X_N$ mají *dokonalou strukturu*, jestliže existují shluky $S_1, S_2, \ldots, S_n$ a čísla $d_1 < d_2$ tak, že pro $X_i \in S_l$ a $X_j \in S_m$ platí $d(X_i, X_j) = d_1$ pro $l = m$ a $d(X_i, X_j) = d_2$ pro $l \neq m$, l, $m = 1, 2, \ldots, n$. Objekty $X_1, X_2, \ldots, X_N$ mají *dobrou n-strukturu*, jestliže existují shluky $S_1, S_2, \ldots, S_n$ tak, že $\max \{d(X_i, X_j) : X_i \in S_l,\ X_j \in S_l,\ l = 1, 2, \ldots, n\} < \min \{d(X_i, X_j) : X_i \in S_l, X_j \in S_m,\ j \neq m\}$. Konečně objekty $X_1, X_2, \ldots, X_N$ mají *přesnou strukturu dendrogramu*, jestliže míra nepodobnosti d splňuje ultrametrickou nerovnost, tj. $d \in \boldsymbol{U}(X)$. Shlukovací postup je *přípustný vzhledem k dokonalé struktuře*, respektive *vzhledem k dobré n-struktuře*, jestliže při použití na objekty s dokonalou, respektive dobrou n-strukturou vede k vytvoření příslušných shluků $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Hierarchický shlukovací postup je *přípustný vzhledem k přesné struktuře dendrogramu*, jestliže při použití na objekty s přesnou strukturou dendrogramu vytvoří příslušný dendrogram. Pro stratifikované shlukovací postupy se zavádí vlastnost *přiměřenosti*. Postup $D : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{Z}$ je *přiměřeně přípustný*, jestliže $\emptyset \neq \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{A}$ a $D : \boldsymbol{Z} = \mathrm{id}$, kde id je identické zobrazení $\boldsymbol{Z}$ na sebe. V případě, že $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{U}(X)$, je hierarchický shlukovací postup přiměřeně přípustný právě tehdy, když je přípustný vzhledem k přesné struktuře dendrogramu. Z hierarchických postupů jsou metoda nejbližšího souseda a metoda nejvzdálenějšího souseda přípustné jak vzhledem k dobré n-struktuře, tak vzhledem k přesné struktuře dendrogramu. Naproti tomu metoda centroidní je sice přípustná vzhledem k dobré n-struktuře, avšak není přípustná vzhledem k přesné struktuře dendrogramu. Ani metoda nejmenších čtverců ani metoda přenosu nejsou přípustné vzhledem k dobré n-struktuře. Zde i v dalším metodou nejmenších čtverců rozumíme nalezení globálního minima funkcionálu $Q_1(\boldsymbol{S}) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{X_i \in S_l} d^2(X_i, \bar{S}_l))$. U metody přenosu pak uvažujeme pouze speciální případ, kdy metodou přenosu hledáme lokální minimum téhož funkcionálu $Q_1(\mathbf{S})$.

Další skupina vlastností vychází z požadavku, aby při vynechání objektů či shluků nebo při jejich zdvojení vedl shlukovací postup ke stejnému výsledku. Nechť jsou dány objekty $X_1, X_2, \ldots, X_N$ a nechť shlukovací postup vytváří shluky $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Některé objekty X_i vezmeme vícekrát a dostaneme tak objekty $Y_1, Y_2, \ldots, Y_M$; přitom počet opakování může být pro různé objekty různý. Shlukovací postup je *přípustný vzhledem ke zdvojování bodů*, jestliže při použití na objekty $Y_1, Y_2, \ldots, Y_M$ dostaneme stejné shluky jako pro objekty $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Slabší podmínkou je *zdvojení shluků*, kdy postupujeme jako v předchozím případě, avšak počet opakování musí být pro všechny objekty v určitém shluku S_i stejný. Obě tyto vlastnosti jsou významné v případě že geometrický tvar shluků je důležitější než hustota objektů ve shlucích. Metoda nejbližšího souseda a metoda nejvzdálenějšího souseda jsou přípustné jak vzhledem ke zdvojování objektů tak vzhledem ke zdvojování shluků, kdežto metoda nejmenších čtverců a metoda přenosu nejsou přípustné vzhledem ani k jedné z těchto vlastností. Metoda centroidní je přípustná vzhledem ke zdvojování shluků, ale není přípustná vzhledem k zdvojování objektů.

Při *vynechání shluků* požadujeme, aby shlukovací postup, který pro objekty $X_1, X_2, \ldots, X_N$ vedl ke shlukům $S_1, S_2, \ldots, S_n$, vedl při použití na objekty z množiny $X - S_i$ k vytvoření shluků $S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_n$. Metoda nejbližšího souseda, metoda nejvzdálenějšího souseda, centroidní metoda i metoda nejmenších čtverců jsou všechny přípustné vzhledem k vynechání shluků. Podobně lze definovat *přípustnou vzhledem k vynechání objektů*. Při tom požadujeme aby shlukovací postup který v množině objektů X vytvořil shluky S_1 S_2 ... S_n, vytvořil při použití na objekty z množiny $X - Y$ kde $Y \subset X$, shluky $S'_1, S'_2, \ldots, S'_m$ tak, že ke každému $j = 1, 2, \ldots, m$ existuje i_j takové, že $S'_j \subset S_{i_j}$, tj. vynechání některých objektů může nejvýše způsobit rozdělení původních shluků na shluky menší, nikoliv však jejich spojení či prolínání.

Velmi žádoucím se jeví požadavek, aby nebylo možno dosáhnout lepšího výsledku tím, že objekty jinak uspořádáme. Nechř $\mathbf{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ je rozklad množiny objektů $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ a nechť $\pi : X \to X$ je permutace množiny objektů X. Definujme $\pi(\mathbf{S}) = \{\pi[S_1], \pi[S_2], \ldots, \pi[S_n]\}$. Rozklad $\mathbf{S}$ je *přípustný vzhledem k permutacím*, jestliže neexistuje permutace π tak, že rozklad $\pi(\mathbf{S})$ je stejnoměrně lepší v tomto smyslu: pro libovolné $X_i \in S_l$ a $X_j \in S_m$ platí $d(\pi(X_i), \pi(X_j)) \leqq d(X_i, X_j)$ pro $l = m$ a $d(\pi(X_i), \pi(X_j)) \geqq d(X_i, X_j)$ pro $l \neq m$ a přitom alespoň pro jednu dvojici indexů (i, j) platí ostrá nerovnost. Metoda nejbližšího souseda, metoda nejvzdálenějšího souseda a metoda nejmenších čtverců jsou všechny přípustné vzhledem k permutacím, kdežto metoda přenosu přípustná vzhledem k permutacím není. Obecně nelze očekávat, že lokální optimalizační postupy založené na počáteční volbě určitého rozkladu by byly přípustné vzhledem k permutacím.

V případě, že objekty jsou prvky lineárního prostoru, můžeme definovat konvexní přípustnost. Rozklad $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ je *konvexně přípustný*, jestliže $C(S_i) \cap C(S_j) =$

$= \emptyset$, kde $C(S_i)$ je konvexní obal shluku S_i. Mezi konvexně přípustné postupy patří metoda nejmenších čtverců a metoda přenosu, zatímco metoda nejbližšího souseda, metoda nejvzdálenějšího souseda a centroidní metoda nejsou konvexně přípustné. Konvexní přípustnost je motivována požadavkem, aby shluky byly jasně odděleny a nebyly do sebe zaklíněny. U této přípustnosti je dobře vidět, že není tak zcela jednoduché říci, které vlastnosti shlukových postupů jsou žádoucí. Požadavek, ze kterého definice vychází, je zcela přirozený. Na druhé straně mohou být objekty, které mají tendenci vytvářet shluky, jejichž konvexní obaly nejsou disjunktní. Pro takové objekty se konvexně přípustné shlukovací postupy naopak nehodí, protože shluky, které vytvářejí, jsou vždy konvexně přípustné.

Ve specielním případě, kdy objekty leží v rovině, můžeme podmínku konvexní připustnosti oslabit. Nechť je dán rozklad $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$. Na množině S_i sestrojíme strom nejmenší možné délky (tj. s nejmenším součtem délek hran) a vzniklou souvislou množinu úseček označíme L_{S_i}. Postupujeme při tom tak, že objekty množiny S_i spojujeme metodou nejbližšího souseda. Rozklad $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ je *souvisle přípustný*, když $L_{S_i} \cap L_{S_j} = \emptyset$ pro $i \neq j$. Kromě metody nejmenších čtverců a metody přenosu je souvisle přípustná i metoda nejbližšího souseda. Metoda nejvzdálenějšího souseda a centroidní metoda však souvisle přípustné nejsou.

V případech, kdy se nemůžeme zcela spolehnout na velikost hodnot míry nepodobnosti a významné je spíše pořadí velikostí hodnot než hodnoty samy, je důležitý požadavek, aby výsledek shlukovacího postupu nezávisel na monotonní transformaci hodnot míry nepodobnosti. Nechť shlukovací postup použitý na objekty s mírou nepodobnosti d vede k rozkladu $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ a nechť $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ je rostoucí funkce taková, že $f(0) = 0$. Shlukovací postup se nazývá *monotónně přípustný*, jestliže jeho použití na stejné objekty s mírou nepodobnosti $f(d)$ vede k témuž rozkladu $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$. Metoda nejbližšího souseda a metoda nejvzdálenějšího souseda jsou monotónně přípustné, kdežto centroidní metoda, metoda nejmenších čtverců a metoda přenosu nejsou monotonně přípustné. Slabší podmínku dostaneme, když uvažujeme pouze funkci $f(x) = ax$, kde $a > 0$. V tomto případě si zajistíme invariantnost vzhledem k lineární změně měřítka a shlukovací postup nazýváme *přípustným vzhledem k lineární změně měřítka.*

Konečně uvedeme některé definice přípustnosti pro stratifikované postupy. Nechť $D : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{Z}$ je stratifikovaný shlukovací postup a nechť platí: jestliže $d \in \boldsymbol{A}$, pak existuje $d' \in \boldsymbol{Z}$ tak, že $d' \leqq d$. Postup D je *přípustný vzhledem k zachovávání shluků*, jestliže platí: je-li M maximálně vázaná množina na úrovni h pro d (tj. maximálně vázaná vzhledem k relaci $\{(X_i, X_j) : d(X_i, X_j) \leqq h\}$), potom existuje maximálně vázaná množina M' na úrovni h pro $D(d)$ tak, že $M \subset M'$. Jinými slovy, maximálně vázané množiny na úrovni h na vstupu D zůstanou na úrovni h na výstupu D pohromadě. Formálně lze tento požadavek zapsat: $D(d) \leqq d$ pro všechny $d \in \boldsymbol{A}$.

Nechť $D : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{Z}$ a předpokládejme, že platí: je-li $\boldsymbol{Y}$ omezená podmnožina $\boldsymbol{Z}$, potom $\sup \boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{Z}$. Postup D je *optimálně přípustný*, jestliže platí: je-li $d' \in \boldsymbol{Z}$ a $D(d) \leqq d' \leqq d$, potom $D(d) = d'$. Vlastnost optimality zajišťuje, že ke koncentraci informace dochází jen v nezbytně nutné míře a nejsou vytvářeny zbytečně velké shluky.

Zásadní důležitost má vlastnost spojitosti. Postup D je *spojitě přípustný*, jestliže zobrazení $D : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{Z}$ je spojité, chápeme-li množiny $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{Z}$ jako podmnožiny prostoru $\mathscr{E}_{\binom{N}{2}}$. Význam této podmínky spočívá v tom, že v jistém smyslu charakterisuje lokální stabilitu metody. Jde o to, aby malé změny v hodnotách míry nepodobnosti objektů vedly k malým změnám na výstupu shlukovacího postupu. Nemá-li shlukovací postup tuto vlastnost, pak je velmi citlivý na chyby měření znaků, které se odrážejí při stanovení hodnot míry nepodobnosti i na chyby způsobené zaokrouhlováním při výpočtech. Metoda nejbližšího souseda je spojitě přípustná avšak metoda nejvzdálenějšího souseda nikoliv.

Závěrem uveďme, že otevřenou otázkou zůstává hodnocení provedeného rozkladu. Skutečnost, že některý funkcionál kvality rozkladu nabývá pro získaný rozklad extrémní hodnoty zaručuje pouze, že rozklad množiny objektů X je vzhledem k námi volenému funkcionálu optimální, ale neříká nic o tom, zda se podařilo najít „skutečné" shluky, které v množině objektů X přirozeně existují. Intuitivně je zřejmé, že „skutečné" shluky by měly být pokud možno kompaktní a navzájem relativně izolované. Oba tyto požadavky zřejmě výrazně splňují objekty $X_1, X_2, \ldots, X_N$ s dobrou n-strukturou, pro které existuje rozklad $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ takový, že $\max\{d(X_i, X_j) : X_i \in S_l,\ X_j \in S_l,\ l = 1, 2, \ldots, n\} < \min\{d(X_i, X_j) : X_i \in S_l,\ X_j \in S_m,\ l \neq m\}$. Obecná kriteria, která by kompaktnost a relativní isolovanost shluků posoudila, zatím neexistují. Pro metodu nejbližšího souseda jsou známy některé výsledky na základě pravděpodobnostního přístupu ([11]). U hierarchických postupů metoda nejvzdálenějšího souseda minimalizuje maximální průměr shluků, kdežto metoda nejbližšího souseda maximalizuje minimální vzdálenost mezi shluky. Jestliže použití obou postupů vede k různým dendrogramům, pak zřejmě nelze splnit zároveň oba požadavky kompaktnosti a relativní isolovanosti shluků. Obecně se dá říci, že vedou-li různé hierarchické postupy k různým dendrogramům, je otázkou, zda se objekty hodí ke zpracování hierarchickým postupem.

Literatura

Problémům shlukování objektů bylo během posledních třiceti let věnováno mnoho prací publikovaných v řadě časopisů. V současnosti se projevuje snaha o syntézu výsledků a objevují se publikace knižní. Uveďme několik stručných poznámek ke čtyřem z nich.

Kniha [1] pojednává obecně o klasifikaci vícerozměrných pozorování. Třetí kapitola (59 stran) je věnována metodám shlukování objektů.

Publikace [2] podává dobrý přehled o problematice shlukové analýzy od klasifikace proměnných až po vyhodnocování shlukovacích metod. V rozsáhlé příloze (119 stran) autor uvádí řadu programů v jazyce FORTRAN IV.

Přehledná monografie [5] je psána heslovitým způsobem. Je věnována především hierarchickým metodám bez snahy o obecnější nadhled.

V knize [9] jsou zkoumány metody kondensace údajů, které se uplatňují především v problémech taxonomické klasifikace. Druhá část knihy (85 stran) je věnována hierarchickým a stratifikovaným metodám shlukové analysy; přitom důraz je kladen na přesné zavedení pojmů a matematickou teorii.

Všechny čtyři publikace obsahují obšírný seznam literatury; zejména v [5] nalezneme 409 položek.

[1] *С. А. Айвазян, З. И. Бежаева, О. В. Староверов:* Классификация многомерных наблюдений. Статистика, Москва, 1974. (240 stran).

[2] *M. R. Anderberg:* Cluster analysis for applications. Academic Press, New Nork, 1973. (359 stran).

[3] *R. M. Cormack:* A review of classification (with discussion). J. Royal Stat. Soc. Series A *134* (1971), 321—367.

[4] *E. Diday:* Une nouvelle méthode en classification automatique et reconnaissance des formes. La méthode des nuées dynamiques. Rev. Statist. Appl. *19* (1971), 19—34.

[5] *B. S. Duran, P. L. Odell:* Cluster analysis. A survey. Springer-Verlag, Berlin, 1974. (137 stran).

[6] *L. Fisher, J. W. van Ness:* Admissible clustering procedures. Biometrika *58* (1971), 91—104.

[7] *K. Florek, J. Łukaszewicz, H. Perkal, H. Steinhaus, S. Zubrzycki:* Sur la liaison et la division des points d'un ensemble fini. Coll. Math. *2* (1951), 282—285.

[8] *J. A. Hartigan:* Clustering algorithms. J. Wiley, New York, 1975.

[9] *N. Jardine, R. Sibson:* Mathematical taxonomy. J. Wiley, London, 1971. (286 stran).

[10] *M. G. Kendall:* Cluster analysis. In: Frontiers of pattern recognition. Academic Press, New York, 1972, 291—309.

[11] *R. F. Ling:* A probability theory of cluster analysis. J. Amer. Statist. Assoc. *68* (1973), 159—164.

[12] *J. MacQueen:* Some methods for classification and analysis of multivariate observation. Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob., (1) 1967, 281—297.

Adresa autorů: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Summary

CLUSTER ANALYSIS

ADOLF FILÁČEK, VÁCLAV KOUTNÍK, JIŘÍ VONDRÁČEK, Praha

This expository paper presents a survey of some methods of cluster analysis. The first part introduces dissimilarity measures for objects and clusters. In the second part hierarchical, parallel and sequential methods are discussed. The third part deals with the assessment of performance for clustering methods.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

ON IDEMPOTENT FILTERS

MIROSLAV KATĚTOV, Praha

(Received May 27, 1977)

In [3], the problem of the existence of idempotent filters was posed, i.e. filters $\mathscr{F}$ isomorphic to the product $\mathscr{F} \cdot \mathscr{F}$. In what follows, a very simple existence proof is given, and a rather complicated construction is described.

1.1. We use the standard terminology and notation, with slight modifications. An ordered pair consisting of x and y will be denoted by $\langle x, y\rangle$. If M is a set, we put $\exp M = \{X : X \subset M\}$, $\mathrm{e}M = \{X : X \subset M,\ X \text{ is finite}\}$. Letters k, m, n, p, q stand for natural numbers, letters ϑ, δ (possibly with subscripts, etc.) for a natural number or for the ordinal ω. Sequence (on a set M) means a finite or an infinite sequence (of elements of M). A finite sequence will be called *a string* or *a word*. The void string will be denoted by $\emptyset$. The concatenation $\xi \cdot \eta$ of two sequences ξ, η is defined if ξ is finite; in addition, for formal reasons, we put $\xi \cdot \emptyset = \xi$ for any sequence ξ. Given a set M, the set of all strings on M will be denoted by $\mathrm{w}M$.

1.2. Let M, S be classes. If a binary operation $\sigma : D \to S$, where $D \subset M \times M$, is given, we introduce the following binary operations σ' on $\exp M$ and σ'' on $\exp\exp M$. If $X, Y \in \exp M$, then $\sigma'\langle X, Y\rangle = \{\sigma\langle x, y\rangle : x \in X,\ y \in Y\}$; if $\mathscr{X}, \mathscr{Y} \in \exp\exp M$, then $\sigma''\langle \mathscr{X}, \mathscr{Y}\rangle = \{\bigcup(\sigma'\langle\{x\}, fx\rangle : x \in X) : X \in \mathscr{X}, f \in \mathscr{Y}^X\}$.

1.3. The operations just introduced will be used below in two cases: (1) M is a class of sequences and $\sigma\langle \xi, \eta\rangle = \xi \cdot \eta$ is the concatenation; in this case, we shall often write $X \cdot Y$ instead of $\sigma'\langle X, Y\rangle$ and $\mathscr{X} \odot \mathscr{Y}$ instead of $\sigma''\langle \mathscr{X}, \mathscr{Y}\rangle$; (2) M is the universal class and $\sigma\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle$; in this case the standard notation, $X \times Y$, will be used for $\sigma'\langle X, Y\rangle$, and $\sigma''\langle \mathscr{X}, \mathscr{Y}\rangle$ will be denoted by $\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y}$.

1.4. In the case (2) just mentioned, $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$ is a base of a filter (on $A \times B$) whenever $\mathscr{F}$ and $\mathscr{G}$ are filters (on A and B, respectively). The filter generated by $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$ is the product of filters $\mathscr{F}$ and $\mathscr{G}$, which will be denoted by $\mathscr{F} \cdot \mathscr{G}$ as usual (see e.g. [1], § 7; a different notation was used in [2], where the multiplication of filters was introduced apparently for the first time).

1.5. If $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ are collections of sets, $A = \bigcup\mathscr{X}$, $B = \bigcup\mathscr{Y}$ and there exists a bijective $f : A \to B$ such that $f[\mathscr{X}] = \mathscr{Y}$, then $\mathscr{X}$ is said to be *isomorphic to* $\mathscr{Y}$ (this includes, as a special case, the isomorphism of filters).

2.1. Theorem. *Let $\mathscr{G}$ be a filter on a set A. Assume that $\mu : A \times A \to A$ is bijective and $\mathscr{G} \subset \mu[\mathscr{G} \cdot \mathscr{G}]$. Then there exists exactly one filter $\mathscr{F}$ on A such that (1) $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$, (2) $\mu[\mathscr{F} \cdot \mathscr{F}] = \mathscr{F}$, (3) if $\mathscr{H}$ is a filter on A, $\mathscr{G} \subset \mathscr{H}$, $\mu[\mathscr{H} \cdot \mathscr{H}] = \mathscr{H}$, then $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}$.*

Proof. Put $\mathscr{G}_0 = \mathscr{G}$. If α is an ordinal, $\alpha > 0$, put $\mathscr{G}_\alpha = \mu[\mathscr{G}_\beta \cdot \mathscr{G}_\beta]$ if $\alpha = \beta + 1$, $\mathscr{G}_\alpha = \bigcup(\mathscr{G}_\beta : \beta < \alpha)$ if α is a limit ordinal. It is easy to see that, for every ordinal α, $\mathscr{G}_\alpha$ is a filter and $\mathscr{G}_\alpha \subset \mathscr{G}_\beta$ whenever $\alpha < \beta$. Hence, $\mathscr{G}_\alpha = \mathscr{G}_{\alpha+1}$ for some α. Put $\mathscr{F} = \mathscr{G}_\alpha$. Then $\mu[\mathscr{F} \cdot \mathscr{F}] = \mathscr{F}$. If $\mathscr{H}$ is as in (3), then we get $\mathscr{G}_\alpha \subset \mathscr{H}$ for all α, hence $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}$.

2.2. Theorem. *On every infinite set, there exists an idempotent filter.*

Proof. If A is infinite, put $\mathscr{G} = \{A - X : X \text{ finite}\}$. Let $\mu : A \times A \to A$ be bijective. Clearly $\mathscr{G} \subset \mu[\mathscr{G} \cdot \mathscr{G}]$. Now apply the theorem above.

2.3. An explicit description of an idempotent filter is far more complicated than the existence proof. It is necessarily so, for an idempotent filter cannot be analytic (Souslin), cf. [3]. On the other hand, an explicit construction may provide more insight into properties of such filters.

3.1. The class of all dense linearly ordered sets with a first and no last element will be denoted by $\mathfrak{A}$. As a rule, letters A, B, C, possibly with subscripts, will stand for ordered sets in $\mathfrak{A}$. A set of the form $\{t : t \in A,\ a \leqq t\}$ or $\{t : t \in A,\ a \leqq t < b\}$ will be called an *interval of* A. The set of all nonvoid intervals of A will be denoted by $\mathrm{i}(A)$. We put $\mathrm{i}_0(A) = \mathrm{i}(A) \cup \{\emptyset\}$.

3.2. A pair $\langle B, C\rangle \in \mathrm{i}(A) \times \mathrm{i}(A)$ will be called a *decomposition of* A if $B \cup C = A$ and $x < y$ whenever $x \in B$, $y \in C$. If $\langle B, C\rangle$ is a decomposition of A, we write $B + C = A$.

3.3. A pair $x = \langle T, v\rangle$, where $T \in \mathrm{i}(A)$, $v \subset T$ is finite nonvoid, will be called a *labeled interval* of A. The set of all labeled intervals of A will be denoted by $\mathrm{li}(A)$. If $x = \langle T, v\rangle \in \mathrm{li}(A)$, we put $|x| = T$, $Lx = v$.

3.4. If $\xi = (x_n : n < \vartheta)$ is a sequence on $\mathrm{li}(A)$, we put $|\xi| = \bigcup(|x_n| : n < \vartheta)$, $L\xi = \bigcup(Lx_n : n < \vartheta)$, $\Sigma\xi = \langle|\xi|, L\xi\rangle$. If e.g. $\xi = (x, y)$, we also write $x + y$ instead of $\Sigma\xi$, etc. Clearly, if $\xi \in \mathrm{wli}(A)$ and $|\xi| \in \mathrm{i}(A)$, then $\Sigma\xi \in \mathrm{li}(A)$.

3.5. If $X \subset \text{wli}(A)$, we put $LX = \{L\xi : \xi \in X\}$. If $\mathfrak{X} \subset \exp \text{wli}(A)$, we put $L\mathfrak{X} = \{LX : X \in \mathfrak{X}\}$.

3.6. An idempotent filter may be constructed, roughly speaking, in the following way. Suppose there is defined, for every $A \in \mathfrak{A}$, a collection $\mathscr{K}(A) \subset \exp \text{wli}(A)$ such that (1) if A is isomorphic to B, then $\mathscr{K}(A)$ is isomorphic to $\mathscr{K}(B)$, (2) $L\mathscr{K}(A)$ is a base of a filter, (3) if $B + C = A$, then $\mathscr{K}(B) \odot \mathscr{K}(C) \subset \mathscr{K}(A)$. It may be expected that if A, B, C are mutually isomorphic, then the filter generated by $L\mathscr{K}(A)$ is idempotent, since it is isomorphic to the product of filters generated by $L\mathscr{K}(B)$, $L\mathscr{K}(C)$.

4.1. We are going to construct certain collections with the properties mentioned in 3.6. We shall need a few auxiliary definitions and a number of simple facts concerning subsets of $\text{wli}(A)$, etc.

4.2. A sequence $\xi = (x_n : n < \vartheta)$ on $\text{li}(A)$ will be called *regular* if (1) either $\xi = \emptyset$ or $\min A \in |x_0|$, (2) the sets $|x_n|$ are disjoint, (3) $|(x_n : n \leqq m)| \in \text{i}(A)$ for every $m < \vartheta$. The set of all regular $\xi \in \text{wli}(A)$ will be denoted by $\text{rwli}(A)$.

4.3. Let φ, ψ be mappings of $\text{rwli}(A)$ into $\text{i}_0(A)$. Then we put $\psi \leqq \varphi$ iff $\psi(\xi) \subset \varphi(\xi)$ for all $\xi \in \text{rwli}(A)$, and we define $\varphi \wedge \psi$ by putting $(\varphi \wedge \psi)(\xi) = \varphi(\xi) \cap \psi(\xi)$.

4.4. For any $\varphi : \text{rwli}(A) \to \text{i}_0(A)$, $R(\varphi)$ will denote the set of all sequences $\xi = (x_n : n < \vartheta)$ on $\text{li}(A)$ such that $|x_n| = \varphi(x_k : k < n)$ for every $n < \vartheta$. We put $S(\varphi) = \{\xi : \xi \in R(\varphi),\ \xi \text{ is finite},\ |\xi| = A\}$.

4.5. A mapping $\varphi : \text{rwli}(A) \to \text{i}_0(A)$ will be called a *transition rule* (*on* A) if (1) $\min A \in \varphi(\emptyset)$, (2) for any $\xi \in \text{rwli}(A)$, $|\xi| = A$ implies $\varphi(\xi) = \emptyset$, $|\xi| \neq A$ implies $\varphi(\xi) \neq \emptyset$, $|\xi| \cap \varphi(\xi) = \emptyset$, $|\xi| \cup \varphi(\xi) \in \text{i}(A)$. The set of all transition rules on A will be denoted by $\text{tr}(A)$.

4.6. If $\xi = (x_n : n < \vartheta)$ is a regular sequence on $\text{li}(A)$ and $\varphi \in \text{tr}(A)$, then, clearly, there exists exactly one $\eta = (y_k : k < \delta) \in R(\varphi)$ such that (1) every y_k is of the form $\Sigma(x_n : m < n < p)$, (2) if $\eta' = (y'_k : k < \delta')$ satisfies (1), then $\delta' \leqq \delta$, $y'_k = y_k$ for $k < \delta'$. We shall say that η is the *φ-reduction of* ξ. The sequence ζ such that $\xi = \alpha \cdot \zeta$, $|\alpha| = |\eta|$, will be called the *φ-remainder of* ξ. If $|\eta| = |\xi|$, then the φ-reduction of ξ will be called *exact*.

4.7. A transition rule φ on A will be called *regular* if, for any $\xi \in \text{rwli}(A)$ such that $|\xi|$ is a proper subset of $|\eta| \cup \varphi(\eta)$ where η is the φ-reduction of ξ, we have $\varphi(\xi) = \varphi(\eta) - |\xi|$. The set of all regular $\varphi \in \text{tr}(A)$ will be denoted by $\text{rtr}(A)$.

4.8. Put $\varphi_0(\xi) = A - |\xi|$ for every $\xi \in \mathrm{rwli}(A)$. Then $\varphi_0 \in \mathrm{rtr}(A)$ (and even $\varphi_0 \in \mathrm{ntr}(A)$, see 5.1 below).

4.9. Let $\varphi \in \mathrm{rtr}(A)$, $\xi \in R(\varphi)$. Then ξ is regular; if $\xi \cdot \zeta \in \mathrm{rwli}(A)$, $|\zeta| \subset \varphi(\xi)$, $|\zeta| \neq \varphi(\xi)$, then ξ is the φ-reduction of $\xi \cdot \zeta$, hence $\varphi(\xi \cdot \zeta) = \varphi(\xi) - |\zeta|$.

4.10. *Let* $\varphi \in \mathrm{rtr}(A)$, $\psi \in \mathrm{tr}(A)$, $\psi \leqq \varphi$, $\xi \in R(\psi)$. *Let* η *and* ζ *be, respectively, the* φ*-reduction and the* φ*-remainder of* ξ. *Then there occurs exactly one of the following cases*: (1) η *is exact*, $\zeta = \emptyset$; (2) η *is not exact*, ζ *is finite*, $|\zeta|$ *is a proper subset of* $\varphi(\eta)$, $\varphi(\xi) = \varphi(\eta) - |\xi|$; (3) η *is not exact*, ζ *is infinite*, $|\zeta| \subset \varphi(\eta)$. *If* ξ *is finite, then* $|\xi| \cup \varphi(\xi) = |\eta| \cup \varphi(\eta)$. *If* $\xi \in S(\psi)$, *then* $\eta \in S(\varphi)$, $L\xi = L\eta \in LS(\varphi)$.

Proof. Assume that η is not exact. Let $\zeta = (x_m, \ldots)$. By definition (4.6), $|(x_m, \ldots \ldots, x_n)| = \varphi(\eta)$ for no n. Suppose $|(x_m, \ldots, x_n)| \supset \varphi(\eta)$ for some n. Choose the last p such that $\varphi(\eta) - |(x_n : m \leqq n < p)| \neq \emptyset$. Since φ is regular, we have $\varphi(x_n : n < p) = = \varphi(\eta) - |(x_n : n < p)|$, hence, due to $\psi \leqq \varphi$, we get $|x_p| = \psi(x_n : n < p) \subset \varphi(\eta)$, $|(x_n : m \leqq n < p + 1)| \subset \varphi(\eta)$, which is a contradiction.

We have shown that every $|(x_m, \ldots, x_n)|$ is a proper subset of $\varphi(\eta)$. The rest of the proof may be omitted.

4.11. Proposition. *If* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{rtr}(A)$, *then* $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \mathrm{rtr}(A)$.

Proof. Put $\psi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Clearly, $\psi \in \mathrm{tr}(A)$. Let $\xi \in \mathrm{rwli}(A)$, let η denote the ψ-reduction of ξ and let $|\xi| \subset |\eta| \cup \varphi(\eta)$, $|\xi| \neq |\eta| \cup \varphi(\eta)$. We are going to prove that $\psi(\xi) = \psi(\eta) - |\xi|$. Let η_i, $i = 1, 2$, be the φ_i-reduction of η. Clearly, η_i is also the φ_i-reduction of ξ. By 4.10, we have

$$|\eta| \cup \varphi_i(\eta) = |\eta_i| \cup \varphi_i(\eta_i)\,, \tag{1}$$

hence

$$|\eta| \cup \psi(\eta) \subset |\eta_i| \cup \varphi_i(\eta_i)\,. \tag{2}$$

This implies

$$\xi \text{ is a proper subset of } |\eta_i| \cup \varphi_i(\eta_i)\,. \tag{3}$$

Since φ_i are regular, we have

$$|\xi| \cup \varphi_i(\xi) = |\eta_i| \cup \varphi_i(\eta_i)\,, \tag{4}$$

hence, by (1),

$$|\xi| \cup \varphi_i(\xi) = |\eta| \cup \varphi_i(\eta)\,. \tag{5}$$

This proves that $|\xi| \cup \psi(\xi) = |\eta| \cup \psi(\eta)$, hence $\psi(\xi) = \psi(\eta) - |\xi|$.

4.12. *If* $\varphi \in \mathrm{rtr}(A)$, $\xi \in S(\varphi)$, $\eta \in S(\varphi)$, $L\xi = L\eta$, *then* $\xi = \eta$.

Proof. Put $\xi = (x_n : n < p)$, $\eta = (y_k : k < q)$. Clearly, $|x_0| = |y_0|$. Since $L\xi = L\eta$, we get $Lx_0 = Ly_0$, $x_0 = y_0$. The proof proceeds by induction.

5.1. A regular transition rule φ on A will be called *normal* if every $\xi \in R(\varphi)$ is finite. The set of all normal $\varphi \in \mathrm{rtr}(A)$ will be denoted by $\mathrm{ntr}(A)$. The collection of all $S(\varphi)$, $\varphi \in \mathrm{ntr}(A)$, will be denoted by $\mathscr{S}(A)$.

5.2. Proposition. *If* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{ntr}(A)$, *then* $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \mathrm{ntr}(A)$.

Proof. Put $\psi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$. By 4.11, $\psi \in \mathrm{rtr}(A)$. Suppose that $\xi = (x_n : n < \omega) \in R(\psi)$. For $i = 1, 2$, let η_i and ζ_i be the φ_i-reduction and the φ_i-remainder of ξ, respectively. Since no $\eta \in R(\varphi_i)$ is infinite, 4.10 implies that, for $i = 1, 2$, η_i is not exact, ζ_i is infinite, $|\zeta_i| \subset \varphi_i(\eta_i)$. We may assume $|\eta_1| \subset |\eta_2|$. Let $\beta = (x_0, \ldots, x_p)$, $|\beta| = |\eta_2|$. Then, for $i = 1, 2$, $|\beta| \cup \varphi_i(\beta) = |\eta_i| \cup \varphi(\eta_i) \supset |\xi|$, hence $|\beta| \cup \psi(\beta) \supset |\xi|$, $|(x_0, \ldots, x_p, x_{p+1})| \supset |\xi|$, which is a contradiction.

5.3. Proposition. *If* $\varphi \in \mathrm{ntr}(A)$, *then* $S(\varphi) \neq \emptyset$.

Proof. Choose a mapping f of the set $\{\xi : \xi \in \mathrm{rwli}(A), |\xi| \neq A\}$ into $\mathrm{li}(A)$ such that $|f(\xi)| = \varphi(\xi)$. Define a sequence $\zeta = (z_n)$ as follows: $z_n = f(z_k : k < n)$ provided $|(z_k : k < n)| \neq A$; if $|(z_0, \ldots, z_p)| = A$, then $\zeta = (z_0, \ldots, z_p)$. Clearly, $\zeta \in R(\varphi)$, hence ζ is finite, $|\zeta| = A$.

5.4. Proposition. *For any* $A \in \mathfrak{A}$, $L\mathscr{S}(A)$ (see 5.1, 3.5) *is a base of a filter.*
This follows at once from 4.8, 5.3, 5.2, 4.10 (last assertion).

5.5. If $A \in \mathfrak{A}$, then the filter on eA (see 1.1) generated by $L\mathscr{S}(A)$ will be denoted by $\mathscr{F}(A)$.

6.1. Let $B + C = A \in \mathfrak{A}$ (see 3.2). Let $\varphi : \mathrm{rwli}(B) \to \mathrm{i}_0(B)$ and, for every $\xi \in S(\varphi)$, let $\psi_\xi : \mathrm{rwli}(C) \to \mathrm{i}_0(C)$. For every $\xi = (x_n : n < p) \in \mathrm{rwli}(A)$ define $\tau(\xi)$ as follows: (1) if $B - |\xi| \neq \emptyset$, put $\tau(\xi) = \varphi(\xi)$; (2) if $|\xi| \supset B$ and, for some η, ζ, we have $|\zeta| = B$, $\xi = \eta \cdot \zeta$, put $\tau(\xi) = \psi_\eta(\zeta)$; (3) if $|\xi| \supset B$ and $B = |(x_n : n < m)|$ for no m, put $\tau(\xi) = A - |\xi|$. Then τ is a mapping of $\mathrm{rwli}(A)$ into $\mathrm{i}_0(A)$, which will be denoted by $\varphi * (\psi_\xi)$.

6.2. *Let* $B + C = A \in \mathfrak{A}$. *Let* $\varphi \in \mathrm{tr}(B)$ *and, for every* $\xi \in S(\varphi)$, *let* $\psi_\xi \in \mathrm{tr}(C)$. *Put* $\tau = \varphi * (\psi_\xi)$. *Then* (1) $\tau \in \mathrm{tr}(A)$; (2) *if* φ, ψ_ξ *are regular* (*normal*), *then so is* τ; (3) *if* $\xi \in S(\varphi)$, $\eta \in R(\psi_\xi)$, *then* $\xi \cdot \eta \in R(\tau)$; (4) if $\zeta \in R(\tau)$, $|\zeta| - B \neq \emptyset$, *then* $\zeta = \xi \cdot \eta$, *where* $\xi \in S(\varphi)$, $\eta \in R(\psi_\xi)$.

Proof. We omit the straightforward proof of (1)–(3) and prove (4) only. Put $\zeta = (z_n : n < \vartheta)$ and consider the last p such that $|z_p| \subset B$. Then $|(z_0, \ldots, z_p)| = B$, for otherwise we should have $z_{p+1} = \varphi(z_n : n \leqq p)$, hence $|z_{p+1}| \subset B$. Put $\xi = (z_0, \ldots, z_p)$, $\eta = (z_{p+1}, \ldots)$.

6.3. *Let $\langle B, C\rangle$ be a decomposition of $A \in \mathfrak{A}$. Then* (1) $\mathscr{S}(B) \odot \mathscr{S}(C)$ (see 1.3) *is equal to the collection of all $S(\tau)$ where $\tau = \varphi * (\psi_\xi)$, $\varphi \in \mathrm{ntr}(B)$, $\psi_\xi \in \mathrm{ntr}(C)$ for every $\xi \in S(\varphi)$;* (2) $\mathscr{S}(B) \odot \mathscr{S}(C) \subset \mathscr{S}(A)$.

Proof. Let $X \in \mathscr{S}(B) \odot \mathscr{S}(C)$. Then there exists a transition rule $\varphi \in \mathrm{ntr}(B)$ and a mapping $g : S(\varphi) \to \mathrm{ntr}(C)$ such that X consists of all $\xi \cdot \eta$ where $\xi \in S(\varphi)$, $\eta \in S(g\xi)$. Put $\psi_\xi = g\xi$, $\tau = \varphi * (\psi_\xi)$. Then, by 6.2, $X = S(\tau)$. Since, by 6.2, $\tau \in \mathrm{ntr}(A)$, we have $\mathscr{S}(B) \odot \mathscr{S}(C) \subset \mathscr{S}(A)$.

6.4. For any collections V, W, Z of sets such that $v \cup w \in Z$ whenever $v \in V$, $w \in W$, we denote by u the mapping $u : V \times W \to Z$ defined by $u\langle v, w\rangle = v \cup w$.

6.5. Proposition. *Let $\langle B, C\rangle$ be a decomposition of $A \in \mathfrak{A}$. Then $u[L\mathscr{S}(B) \otimes L\mathscr{S}(C)] = L[\mathscr{S}(B) \odot \mathscr{S}(C)]$.*

Proof. I. Let $X \in \mathscr{S}(B) \odot \mathscr{S}(C)$. Let φ, g, ψ_ξ be as in the proof of 6.3. Then, clearly, $LX = \{L\xi \cup L\eta : \xi \in S(\varphi), \eta \in S(\psi_\xi)\}$. For every $x \in LS(\varphi)$ there is, by 4.12, exactly one $\xi \in S(\varphi)$ such that $L\xi = x$; put $\xi = fx$. Then $LX = u\{\langle x, y\rangle : x \in LS(\varphi), y \in LS(\psi_{fx})\}$, hence $LX \in u[L\mathscr{S}(B) \otimes L\mathscr{S}(C)]$. – II. If $Z \in u[L\mathscr{S}(B) \otimes L\mathscr{S}(C)]$, then, clearly, there is a $\varphi \in \mathrm{ntr}(B)$ and a mapping $g : LS(\varphi) \to L\mathscr{S}(C)$ such that $Z = \{x \cup y : x \in LS(\varphi), y \in g(x)\} = \{L\xi \cup L\eta : \xi \in S(\varphi), \eta \in S(\psi_\xi)\}$ where $LS(\psi_\xi) = g(L\xi)$. Hence $Z = \{L(\xi \cdot \eta) : \xi \in S(\varphi), \eta \in S(\psi_\xi)\}$ and therefore $Z \in L[\mathscr{S}(B) \odot \mathscr{S}(C)]$. This proves the proposition.

6.6. *Let $B + C = A \in \mathfrak{A}$, $\tau \in \mathrm{rtr}(A)$. Define τ' as follows: for $\xi = (x_n : n < p) \in \mathrm{rwli}(A)$ put $\tau'(\xi) = \tau(\xi)$ if $B \cap \tau(\xi) = \emptyset$, $\tau'(\xi) = B \cap \tau(\xi)$ if $B \cap \tau(\xi) \neq \emptyset$. Then* (1) *$\tau' \in \mathrm{rtr}(A)$;* (2) *if $\xi \in \mathrm{rwli}(B)$, $|\xi| \neq B$, then $\tau'(\xi) \subset B$;* (3) *every finite $\xi \in R(\tau')$ is of the form $\xi = \eta \cdot \zeta$ where $|\eta| \subset B$, $|\zeta| \subset C$;* (4) *if $\xi = (x_n : n < \vartheta) \in R(\tau')$, then either $\xi \in R(\tau)$ or, for some m, $|x_{m-1}| \subset B$, $|x_m| \subset C$, $(x_0, \ldots, x_{m-1} + x_m, \ldots) \in R(\tau)$;* (5) *$LS(\tau') \subset LS(\tau)$;* (6) *if τ is normal, then so is τ',* (7) *$\tau' = \varphi * (\psi_\xi)$, for some $\varphi \in \mathrm{ntr}(B)$, $\psi_\xi \in \mathrm{ntr}(C)$.*

The proof is straightforward and may be omitted.

6.7. Proposition. *Let $\langle B, C\rangle$ be a decomposition of $A \in \mathfrak{A}$. Then for every $\tau \in \mathrm{ntr}(A)$ there exists a set $X \in \mathscr{S}(B) \odot \mathscr{S}(C)$ such that $LX \subset LS(\tau)$.*

Proof. Let τ' be as in 6.6. Put $X = S(\tau')$. Then, by 6.6, $LX \subset LS(\tau)$. By 6.6, (7), we have $S(\tau') \in \mathscr{S}(B) \odot \mathscr{S}(C)$.

7.1. Proposition. *If $\langle B, C \rangle$ is decomposition of $A \in \mathfrak{A}$, then $u[\mathscr{F}(B) \cdot \mathscr{F}(C)] = \mathscr{F}(A)$, hence $\mathscr{F}(B) \cdot \mathscr{F}(C)$ is isomorphic to $\mathscr{F}(A)$.*

Proof. I. By definition (5.5), $L\mathscr{S}(B)$ and $L\mathscr{S}(C)$ generate the filters $\mathscr{F}(B)$ and $\mathscr{F}(C)$, respectively. Hence $L\mathscr{S}(B) \otimes L\mathscr{S}(C)$ generates $\mathscr{F}(B) \cdot \mathscr{F}(C)$. By 6.5, $u[L\mathscr{S}(B) \otimes L\mathscr{S}(C)] = L[\mathscr{S}(B) \odot \mathscr{S}(C)]$. By 6.3, $L[\mathscr{S}(B) \odot \mathscr{S}(C)] \subset L\mathscr{S}(A)$. Hence $L[\mathscr{S}(B) \odot \mathscr{S}(C)]$ generates $u[\mathscr{F}(B) \cdot \mathscr{F}(C)]$, and $u[\mathscr{F}(B) \cdot \mathscr{F}(C)] \subset \mathscr{F}(A)$. II. By 6.7, for every $P \in L\mathscr{S}(A)$ there exists a set $Q \in L[\mathscr{S}(B) \odot \mathscr{S}(C)]$ such that $Q \subset P$. Hence, for every $P \in \mathscr{F}(A)$ there exists a set $Q \in u[L\mathscr{S}(B) \otimes L\mathscr{S}(C)] \subset u[\mathscr{F}(B) \cdot \mathscr{F}(C)]$ such that $Q \subset P$. This implies $\mathscr{F}(A) \subset u[\mathscr{F}(B) \cdot \mathscr{F}(C)]$, which proves the proposition.

7.2. Theorem. *There exists a mapping $\mathscr{F}$ of the class $\mathfrak{A}$ of all dense linearly ordered sets with a first and with no last element into the class of all filters such that (1) $\mathscr{F}(A)$ is a filter on eA, (2) if $\langle B, C \rangle$ is a decomposition of A, then $\mathscr{F}(B) \cdot \mathscr{F}(C)$ is isomorphic to $\mathscr{F}(A)$, (3) if A_1 is isomorphic (as an ordered set) to A_2, then the filters $\mathscr{F}(A_1)$, $\mathscr{F}(A_2)$ are isomorphic. If $A \in \mathfrak{A}$ has a decomposition $\langle B, C \rangle$ such that A, B, C are mutually isomorphic, then $\mathscr{F}(A)$ is an idempotent filter.*

This follows at once from 7.1.

References

[1] *W. W. Comfort, S. Negrepontis:* The theory of ultrafilters, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1974.

[2] *G. Grimeisen:* Gefilterte Summation von Filtern und iterierte Grenzprozesse I, Math. Ann. *141* (1960), 318—342.

[3] *M. Katětov:* On descriptive classification of functions, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra III (Proc. 1971 Prague Topological Symposium), pp. 235—242. Academia, Prague, 1972.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

FUNDAMENTAL VECTOR FIELDS ON ASSOCIATED FIBER BUNDLES

IVAN KOLÁŘ, Brno

(Received February 18, 1977)

If G is a Lie groupoid and Y is a fiber bundle associated with G, then every section of the Lie algebroid LG of G determines a vector field on Y, which we call *a fundamental vector field on Y.* After deducing certain basic properties, we study the prolongations of the fundamental vector fields in connection with the general prolongation theory of projectable vector fields on arbitrary fibered manifolds, [2], [4], and with the prolongation theory of Lie algebroids, [5], [6]. We also develop a general point of view to Lie differentiation. Our consideration is in the category C^∞.

1. Given two manifolds M, N and diffeomorphisms $\varphi : M \to M$, $\psi : N \to N$, we define an induced diffeomorphism $(\varphi, \psi)^r$ on the space $J^r(M, N)$ of all r-jets of M into N by

$$j^r_x f \mapsto j^r_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) . \tag{1}$$

If ξ is a vector field on M, η is a vector field on N and ξ_t, η_t are the corresponding flows, then $(\xi_t, \eta_t)^r$ is a one-parameter family of diffeomorphisms of $J^r(M, N)$. This determines a vector field $(\xi, \eta)^r$ on $J^r(M, N)$ called the r-th prolongation of the pair (ξ, η). In coordinates, if $\xi \equiv \xi^k(u)\,(\partial/\partial u^k)$ and $\eta \equiv \eta^s(v)\,(\partial/\partial v^s)$, then

$$(\xi, \eta)^1 \equiv \xi^k \frac{\partial}{\partial u^k} + \eta^s \frac{\partial}{\partial v^s} + \left(\frac{\partial \eta^s}{\partial v^t} v^t_k - \frac{\partial \xi^l}{\partial u^k} v^s_l\right)\frac{\partial}{\partial v^s_k}, \tag{2}$$

where $v^s_k = \partial v^s/\partial u^k$ are the additional coordinates on $J^1(M, N)$, $k, l = 1, \ldots, \dim M$, $s, t = 1, \ldots, \dim N$. (In principle, the coordinate formula for $(\xi, \eta)^r$ can be deduced by iterating (2) and by the standard inclusions of the theory of non-holonomic jets.)

Consider further a fibered manifold $\pi : Y \to X$. Let ξ be a projectable vector field on Y, i.e. there is a unique vector field ξ_0 on X that is π-related with ξ. The space J^rY of all r-jets of the local sections of Y is a subset of $J^r(X, Y)$ invariant with respect to $(\xi_0, \xi)^r$. The restriction $p^r\xi$ of $(\xi_0, \xi)^r$ to J^rY is the r-th prolongation of ξ in the sense of [2], [4]. Let

$$x^i,\ y^p;\ i, j, \ldots = 1, \ldots, n = \dim X\,, \quad p, q, \ldots = 1, \ldots, \dim Y - \dim X\,,$$

be local fiber coordinates on Y and $\xi \equiv \xi^i(x)\,(\partial/\partial x^i) + \xi^p(x, y)\,(\partial/\partial y^p)$. Specializing (2), we obtain

$$p^1\xi \equiv \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^p \frac{\partial}{\partial y^p} + \left(\frac{\partial \xi^p}{\partial x^i} + \frac{\partial \xi^p}{\partial y^q} y^q_i - \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} y^p_j\right) \frac{\partial}{\partial y^p_i}\,, \tag{3}$$

where $y^p_i = \partial y^p/\partial x^i$, cf. [4].

2. Let G be a Lie groupoid over X with source projection a and target projection b. Denote by LG the vector bundle (over X) of all a-vertical tangent vectors on G at the units, i.e. every element of $(LG)_x$, $x \in X$, is of the form $j^1_0\,\gamma(t)$, where $\gamma(t)$ is a curve on G satisfying $a\,\gamma(t) = x$ for all t and $\gamma(0) = e_x =$ the unit over x. Assume further that G acts on the left on a fibered manifold $\pi : Y \to X$ (in other words, Y is a fiber bundle associated with G), [9]. Every section $\varrho : X \to LG$ determines a vector field ϱ_Y on Y by

$$\varrho_Y(z) = j^1_0(\gamma(t)\,.\,z)\,, \tag{4}$$

$\pi(z) = x$, $\varrho(x) = j^1_0\,\gamma(t)$, which will be called *the fundamental field* (or *G*-field) *on Y determined by* ϱ.

Example 1. Let $E \to X$ be a vector bundle and G the groupoid of all linear isomorphisms between the fibers of E. A G-field on E will be called *a linear vector field.* In linear fiber coordinates on E, the coordinate form of a linear vector field is

$$\xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^p_q(x)\, y^q \frac{\partial}{\partial y^p}\,. \tag{5}$$

Example 2. Similarly one introduces the affine vector fields on affine bundles. In particular, it is well-known that $J^1Y \to Y$ is an affine bundle for any fibered manifold Y.

Proposition 1. *The first prolongation* $p^1\xi$ *of any projectable vector field* ξ *on* Y *is an affine vector field on* $J^1Y \to Y$.

Proof is straightforward.

The target projection of G determines a fibered mahifold $G_b := (b : G \to X)$ and G acts on G_b by the left multiplication. The fundamental field on G_b defined by a section $\varrho : X \to LG$ will be denoted by ϱ_G. Such a field is characterized by the property that it is both a-vertical and right-invariant (i.e. every $g \in G$, $ag = x$, $bg = y$ determines a mapping $a^{-1}(y) \to a^{-1}(x)$, $g' \mapsto g'\,.\,g$ and ϱ_G is invariant with respect to all these mappings). If $\tau : X \to LG$ is another section, then the bracket $[\varrho_G, \tau_G]$ is also both a-vertical and right-invariant, so that there is a unique section $\{\varrho, \tau\} : X \to LG$ satisfying $\{\varrho, \tau\}_G = [\varrho_G, \tau_G]$. This endows LG with a Lie algebroid structure, [7].

Proposition 2. *If Y is a fiber bundle associated with G and ϱ, τ are two sections of LG, then the corresponding G-fields on Y satisfy*

$$[\varrho_Y, \tau_Y] = \{\varrho, \tau\}_Y . \tag{6}$$

Proof. The source projection defines another fibered manifold $G_a := (a : G \to X)$ and the action of G on Y is a mapping $\varkappa : G_a \oplus Y \to Y$, where $\oplus$ means the fiber product over X. The zero vector field 0_Y of Y and ϱ_G determine a vector field $\varrho_G \oplus 0_Y$ on $G_a \oplus Y$. According to (4), $\varrho_G \oplus 0_Y$ is $\varkappa$-related with ϱ_Y, which proves Proposition 2.

Locally, G is isomorphic to $R^n \times H \times R^n$, where H is a Lie group and the multiplication is given by

$$(x_3, h_2, x_2) \, . \, (x_2, h_1, x_1) = (x_3, h_2 h_1, x_1) , \tag{7}$$

the product $h_2 h_1$ being defined in H. Further, Y is locally of the form $R^n \times F$, where F is a left H-space and the action of G on Y is given by

$$(x_2, h, x_1) \, . \, (x_1, y) = (x_2, hy) , \tag{8}$$

the latter product being determined by the action of H on F. Let

$$h^\alpha , \quad \alpha, \beta, \ldots = 1, \ldots, \dim H ,$$

be local coordinates on H in a neighbourhood of the unit and let e_α be the induced basis of the Lie algebra of H. Then a section ϱ of LG can be locally written as

$$\varrho \equiv \varrho^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \varrho^\alpha(x) \, e_\alpha \tag{9}$$

and the coordinate formula for $\{\varrho, \tau\}$ is

$$\{\varrho, \tau\} \equiv \left(\varrho^j \frac{\partial \tau^i}{\partial x^j} - \tau^j \frac{\partial \varrho^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(\varrho^i \frac{\partial \tau^\alpha}{\partial x^i} - \tau^i \frac{\partial \varrho^\alpha}{\partial x^i} + c^\alpha_{\beta\gamma} \varrho^\beta \tau^\gamma \right) e_\alpha , \tag{10}$$

provided $-c^\alpha_{\beta\gamma}$ are the structure constants of H, [8]. Further, let $A^p_\alpha(y) \, \partial/\partial y^p$ be the vector fields on F determined by e_α, [3]. Then we deduce by (8) the coordinate formula of ϱ_Y

$$\varrho_Y \equiv \varrho^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + A^p_\alpha(y) \, \varrho^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial y^p} . \tag{11}$$

By Proposition 2 and (11), we conclude that the mapping $\varrho \mapsto \varrho_Y$ is a Lie algebroid homomorphism of LG into the Lie algebroid of all projectable vector fields on Y.

3. Denote by $\Gamma(g, t)$ the flow of the vector field ϱ_G and set $\gamma(x, t) = \Gamma(e_x, t)$. Since Γ is also right-invariant, we have

$$(12) \qquad \Gamma(g, t) = \gamma(bg, t) \, . \, g \, ,$$

i.e. Γ is determined by the values at the units of G.

The r-th prolongation G^r of G is a Lie groupoid over X defined as follows. The underlying set of G^r is the subset of all elements $A \in J^r G_a$ ($=$ the r-th jet prolongation of fibered manifold $a : G \to X$) such that bA is an invertible r-jet of X into X, while the multiplication in G^r is given by

$$(13) \qquad j^r_x \, g(u) \, . \, j^r_y \, h(v) = j^r_y[g(b \, h(v)) \, . \, h(v)] \, ,$$

provided $b \, h(y) = x$, [1]. As ϱ_G is a-vertical, it is a-related with the zero vector field of X and we can construct its r-th prolongation $p^r\varrho_G$ on $J^r G_a$. Obviously, G^r is an invariant subspace of $p^r\varrho_G$.

Proposition 3. *The restriction $p^r\varrho_G \mid G^r$ is a fundamental field on G^r, i.e. there exists a unique section $\varrho^r : X \to LG^r$ such that $\varrho^r_{G^r} = p^r\varrho_G \mid G^r$.*

Proof. According to (12), the flow Γ^r induced by Γ on G^r is given by

$$(14) \qquad \Gamma^r(j^r_x \, g(u), t) = j^r_x[\gamma(b \, g(u), t) \, . \, g(u)] \, .$$

Multiplying on the right by $j^r_y \, h(v)$, we obtain

$$(15) \qquad j^r_y[\gamma(bg(b \, h(v)), t) \, . \, g(b \, h(v)) \, . \, h(v)] \, .$$

Using (13) we prove that Γ^r is a right-invariant flow, so that $p^r\varrho_G \mid G^r$ is a right-invariant vector field. Clearly, $p^r\varrho_G \mid G^r$ is also vertical with respect to the source projection of G^r, QED.

In the above construction, $\varrho^r(x)$ is fully determined by $j^r_x\varrho \in J^r(LG)$. This defines an identification $J^r(LG) \approx LG^r$; a detailed proof can be found in [6].

On the other hand, G^r acts on $J^r Y$ by

$$(16) \qquad j^r_x \, g(u) \, . \, j^r_x \, \sigma(u) = j^r_y[g((bg)^{-1}(v)) \, . \, \sigma((bg)^{-1}(v))] \, ,$$

where $y = b \, g(x)$ and $(bg)^{-1}$ means the inverse map of a local diffeomorphism $u \mapsto b \, g(u)$ of X into itself, [1]. Hence ϱ^r induces a G^r-field $\varrho^r_{J^r Y}$ on $J^r Y$.

Proposition 4. *The latter field coincides with the r-th prolongation of ϱ_Y, i.e.*

$$(17) \qquad p^r(\varrho_Y) = \varrho^r_{J^r Y} \, .$$

Proof consists in comparing (1), (4), (14), (16), QED.

For $r = 1$, we now deduce the coordinate expressions. Locally, we have $G^1_n = R^n \times H^1_n \times R^n$, [1], and the underlying manifold of H^1_n is the product of $T^1_n H$

(= the space of all n^1-velocities on H) and $L_n^1 = GL(n, R)$. The induced coordinates h^α, $h_i^\alpha = \partial h^\alpha/\partial x^i$ on $T_n^1 H$ and the canonical coordinates on L_n^1 determine a basis e_α, e_α^i, e_j^i of the Lie algebra of H_n^1. Using (3) and Proposition 3, we find the following coordinate expression of $\varrho^1 : X \to LG^1$

$$\varrho^1 \equiv \varrho^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \varrho^\alpha e_\alpha + \frac{\partial \varrho^\alpha}{\partial x^i} e_\alpha^i + \frac{\partial \varrho^j}{\partial x^i} e_j^i . \tag{18}$$

On the other hand, $J^1 Y$ is locally of the form $R^n \times T_n^1 F$, [1]. According to [3], the vector fields on $T_n^1 F$ corresponding to e_α, e_α^i, e_j^i are

$$A_\alpha^p \frac{\partial}{\partial y^p} + \frac{\partial A_\alpha^p}{\partial y^q} y_i^q \frac{\partial}{\partial y_i^p}, \quad A_\alpha^p \frac{\partial}{\partial y_i^p}, \quad -y_j^p \frac{\partial}{\partial y_i^p},$$

provided y_i^p are the additional coordinates on $T_n^1 F$. Hence the coordinate form of $\varrho_{J^1 Y}^1$ is

$$\varrho_{J^1 Y}^1 \equiv \varrho^i \frac{\partial}{\partial x^i} + A_\alpha^p \varrho^\alpha \frac{\partial}{\partial y^p} + \left(\frac{\partial A_\alpha^p}{\partial y^q} y_i^q \varrho^\alpha + A_\alpha^p \frac{\partial \varrho^\alpha}{\partial x^i} - y_j^p \frac{\partial \varrho^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial y_i^p} . \tag{19}$$

On the other hand, we also obtain this formula by applying (3) to (11), which yields another proof of Proposition 4.

4. First we introduce a general concept needed in Proposition 5. Let M be a manifold and $p_M : TM \to M$ the tangent bundle of M. There are two natural projections of TTM into TM, namely the bundle projection p_{TM} and the tangent map Tp_M. Consider further the canonical involution i of TTM. Let $A, B \in TTM$ satisfy $p_{TM}(A) = Tp_M(B)$ and $Tp_M(A) = p_{TM}(B)$. Then iB lies in $T_v TM$, $v = p_{TM}(A)$, and one verifies directly that the difference $A - iB$ belongs to the tangent space of the vector space $T_x M$, $x = p_M(v)$. Hence $A - iB$ is identified with an element of $T_x M$, which will be called the strong difference of A and B and denoted by $A \dot{-} B$. In coordinates, if x^i, $X^i = \mathrm{d}x^i$ are local coordinates on TM and $A \equiv (x^i, X^i, \mathrm{d}x^i, \mathrm{d}X^i = a^i)$, $B \equiv (x^i, \mathrm{d}x^i, X^i, \mathrm{d}X^i = b^i)$, then

$$A \dot{-} B \equiv (x^i, a^i - b^i) . \tag{20}$$

Consider now a projectable vector field ξ on $Y \to X$ over ξ_0 and a section σ of Y. Taking into account the corresponding flows φ_t and φ_{0t}, we construct a curve

$$t \mapsto \varphi_t^{-1}(\sigma(\varphi_{0t}(x))) \tag{21}$$

in the fiber Y_x, whose tangent vector $(L_\xi \sigma)(x) \in T_{\sigma(x)}(Y_x)$ will be called the Lie derivative of σ with respect to ξ at x. Evaluating (21), we find

$$L_\xi \sigma = \sigma_* \xi_0 - \xi \circ \sigma , \tag{22}$$

where $\sigma_* \xi_0$ is the image of ξ_0 by the differential of σ. In coordinates, if $\xi \equiv \xi^i(x) \cdot (\partial/\partial x^i) + \xi^p(x, y)(\partial/\partial y^p)$ and $\sigma \equiv \sigma^p(x)$, then

$$L_\xi \sigma \equiv \frac{\partial \sigma^p}{\partial x^i} \xi^i(x) - \xi^p(x, \sigma(x)) . \tag{23}$$

In particular, if Y is a fiber bundle associated with a Lie groupoid G and ϱ is a section of LG, then we write $L_\varrho \sigma$ instead of $L_{\varrho_Y} \sigma$. Geometrically, $(L_\varrho \sigma)(x)$ is the tangent vector to the curve $\gamma^{-1}(x, t) . \sigma(b\, \gamma(x, t))$, where γ has the same meaning as in (12). In coordinates,

$$L_\varrho \sigma \equiv \frac{\partial \sigma^p}{\partial x^i} \varrho^i(x) - A^p_\alpha(\sigma(x))\, \varrho^\alpha(x) . \tag{24}$$

Let $T(Y/X)$ be the bundle of all vertical tangent vectors on Y. This is a vector bundle over Y, but it can be also considered as a fibered manifold over X. Similarly to § 1, every projectable vector field ξ on Y is prolonged into a projectable vector field $\bar{\xi}$ on $T(Y/X) \to X$. Taking into account the inclusion $TY \subset J^1(R, Y)$, we deduce by (2) (with zero vector field on R) that

$$\bar{\xi} \equiv \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^p \frac{\partial}{\partial y^p} + \frac{\partial \xi^p}{\partial y^q} Y^q \frac{\partial}{\partial Y^p} , \tag{25}$$

provided $Y^p = \mathrm{d}y^p$. Consider another projectable vector field η on Y. Since $L_\xi \sigma$ is a section of $T(Y/X) \to X$, we have defined the Lie derivative $L_{\bar{\eta}}(L_\xi \sigma)$. If we construct conversely $L_{\bar{\xi}}(L_\eta \sigma)$, then the vectors $L_{\bar{\eta}}(L_\xi \sigma)(x)$, $L_{\bar{\xi}}(L_\eta \sigma)(x) \in T\,T(Y_x)$ satisfy the conditions of the definition of the strong difference. By direct evaluation, we prove

Proposition 5. *It holds*

$$L_{\bar{\xi}}(L_\eta \sigma) \dot{-} L_{\bar{\eta}}(L_\xi \sigma) = L_{[\xi, \eta]} \sigma . \tag{26}$$

Given a vector bundle $E \to X$, every element $A \in T(E_x)$ is identified with a vector $tA \in E_x$. In particular, $tL_\xi \sigma$ is now a section of E as well. Moreover, if ξ and η are linear vector fields on E, then (5), (25) and (26) imply

$$tL_\xi(tL_\eta \sigma) - tL_\eta(tL_\xi \sigma) = tL_{[\xi, \eta]} \sigma . \tag{27}$$

This formula generalizes a result by Que, [8], and includes the classical case of the first order tensor bundles. However, we underline that (27) does not hold for general projectable vector fields on E.

5. The product $X \times X$ with the trivial partial composition $(x_3, x_2) . (x_2, x_1) = (x_3, x_1)$ is a special Lie groupoid over X. The r-th prolongation of $X \times X$ is the groupoid $\Pi^r X$ of all invertible r-jets of X into X. The Lie algebroid $L(X \times X)$

coincides with TX. Hence every vector field ξ on X is prolonged into a section $\xi^r : X \to L(\Pi^r X)$. If $e_j^i, \ldots, e_j^{i_1 \ldots i_r}$ is the canonical basis of the r-th differential group L_n^r and $\xi \equiv \xi^i(x) (\partial/\partial x^i)$, then we find by iterating (18)

$$\xi^r \equiv \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} e_j^i + \ldots + \frac{\partial^r \xi^j}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_r}} e_j^{i_1 \ldots i_r} . \tag{28}$$

Further, let Y be a fibered manifold associated with $\Pi^r X$ and σ a section of Y. Then $L_{\xi^r}\sigma =: L_\xi \sigma$ is called the Lie derivative of σ with respect to ξ. Moreover, if $A_j^{pi}(y), \ldots$ $\ldots, A_j^{pi_1 \ldots i_r}(y)$ are the vector fields on the standard fiber F of Y corresponding to $e_j^i, \ldots, e_j^{i_1 \ldots i_r}$, then we obtain by (24) and (28)

$$L_\xi \sigma \equiv \frac{\partial \sigma^p}{\partial x^i} \xi^i - A_j^{pi}(\sigma) \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} - \ldots - A_j^{pi_1 \ldots i_r}(\sigma) \frac{\partial^r \xi^j}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_r}} . \tag{29}$$

This formula covers the classical cases of Lie differentiation.

References

[1] *C. Ehresmann:* Les prolongements d'un espace fibré différentiable, C. R. Acad. Sci. Paris, *240* (1955), 1755—1757.

[2] *H. Goldschmidt, S. Sternberg:* The Hamilton formalism in the calculus of variations, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), *23* (1973), 203—267.

[3] *I. Kolář:* On the prolongations of geometric object fields, An. Sti. Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, *17* (1971), 437—446.

[4] *D. Krupka:* A geometric theory of ordinary first order variational problems in fibered manifolds, I., J. Math. Anal. Appl., *49* (1975), 180—206.

[5] *A. Kumpera, D. Spencer:* Lie equations, I., Annals of Mathematics Studies 73, Princeton 1972.

[6] *A. Kumpera:* Invariants différentiels d'un pseudogroupe de Lie., I., J. Differential Geometry, *10* (1975), 289—345.

[7] *J. Pradines:* Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Calcul différentiel dans la catégorie des groupoïdes infinitésimaux, C. R. Acad. Sci. Paris *264* (1967) A, 245—248.

[8] *Ngo van Que:* Sur l'espace de prolongement différentiable, J. Differential Geometry, *2* (1968), 33—40.

[9] *Ngo van Que:* Nonabelian Spencer cohomology and deformation theory, J. Differential Geometry, *3* (1969), 165—211.

Author's address: 662 95 Brno, Janáčkovo nám. 2a (Matematický ústav ČSAV, pobočka Brno).

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

JIŘÍ JARNÍK, JAROSLAV KURZWEIL, Praha: *On conditions on right hand sides of differential relations.* (O podmínkách na pravé strany diferenciálních relací.)

Nechť pravá strana diferenciální relace (1) $\dot{x} \in F(t, x)$ je mnohoznačná funkce s kompaktními konvexními hodnotami. Nechť F je shora polospojitá vzhledem k x; o závislosti F na t se nepředpokládá nic. Dokazuje se, že existuje mnohoznačná funkce Q taková, že (i) Q je v jistém smyslu regulární vzhledem k dvojici proměnných (t, x); (ii) $Q(t, x) \subset F(t, x)$ pro všechna (t, x); (iii) každé ešení (1) je současně řešením relace $\dot{x} \in Q(t, x)$.

FRANTIŠEK NEUMAN, Brno: *Categorial approach to global transformations of the n-th order linear differential equations.* (Globální transformace lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu s hlediska teorie kategorií.)

V práci jsou algebraickými prostředky studovány globální (tj. na celém definičním intervalu) transformace lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu ($n \geqq 2$) na rozdíl od klasického vyšetřování Kummera, Laguerra, Brioschi, Halphena, Forsytha a dalších, započatého v polovině minulého století a zabývajícího se lokálními transformacemi. Globální transformace jsou důležité pro vystižení asymptotického chování, periodičnosti, ohraničenosti, kořenů, oscilace, diskonjugovanosti a jiných globálních vlastností řešení podstatně svázaných s celým definičním intervalem. Práce navazuje na výsledky O. Borůvky pro oscilatorické rovnice 2. řádu na $(-\infty, \infty)$.

MARIE KOPÁČKOVÁ, OTTO VEJVODA, Praha: *Periodic vibrations of an extensible beam.* (Periodické slabě nelineární kmity tyče.)

Článek pojednává o periodických kmitech tyče délky π, která je na obou koncích upevněná, přičemž se bere v úvahu též její prodloužení. Předpokládá se, že kmity jsou popsány rovnicí $u_{tt} + u_{xxxx} - \varepsilon u_{xx} \int_0^\pi u_x(t, \zeta)\, d\zeta = g + \varepsilon^2 F(u)$, okrajovými podmínkami $u^{(2j)}(t, 0) = u^{(2j)}(t, \pi) = 0, j = 0, 1$ a podmínkami periodicity $u(t + \omega, x) = u(t, x)$. Za předpokladu, že g má speciální tvar, je dokázáno, že existuje takové řešení $u_0(t, x)$ výše uvedené úlohy pro $\varepsilon = 0$, že v jistém okolí tohoto řešení a pro dost malá ε má slabě nelineární úloha jediné řešení $u_\varepsilon(t, x)$ spojité v ε a $u_\varepsilon \to u_0$ pro $\varepsilon \to 0$.

VLADIMÍR LOVICAR, Praha: *Periodic solutions of nonlinear abstract second order equations with dissipative terms.* (Periodická řešení lineárních abstraktních rovnic druhého řádu s disipativním členem.)

V článku je dokázána existence ω-periodických řešení rovnice $u''(t) + A^2 u(t) = F(t, u(t), u'(t))$. A je samoadjungovaný operátor v Hilbertově prostoru H_0 a F je operátor na $R \times D(A) \times H_0 \to H_0$, splňující některé další předpoklady.

MIROSLAV FIEDLER, Praha: *Isodynamic systems in Euclidean spaces and an n-dimensional analogue of a theorem by Pompeiu.* (Izodynamické soustavy bodů v euklidovských prostorech a n-rozměrná analogie jedné Pompeiovy věty.)

Vyšetřují se maximální množiny bodů $\{A_i\}$ v euklidovském prostoru, které splňují $\varrho(A_i, A_j) = c_i c_j$ $(i \neq j)$.

VLASTIMIL PTÁK, Praha, V. S. RETACH (В. С. РЕТАХ), Москва: *Singular supports,* I. (Singulární nosiče, I).

Autoři podávají teorii abstraktního zobecnění pojmu singulárního nosiče distribuce, která tvoří základ k řadě sdělení věnovaných obecné teorii rovnic tvaru $P'\eta = \zeta$, $\eta \in F'$, $\zeta \in E'$, kde E a F jsou induktivní limity Fréchetových prostorů a $P : E \to F$ je spojité lineární zobrazení.

MIROSLAV KATĚTOV, Praha: *On idempotent filters.* (O idempotentních filtrech.)

V článku se dokazuje, že existují idempotentní filtry, tj. filtry $\mathscr{F}$ isomorfní se součinem $\mathscr{F} . \mathscr{F}$. Je popsán explicitní způsob konstrukce idempotentních filtrů.

IVAN KOLÁŘ, Brno: *Fundamental vector fields on associated fiber bundles.* (Fundamentální vektorová pole na asociovaných fibrovaných prostorech.)

Jestliže Lieův grupoid G operuje na fibrované varietě Y, pak každý řez jeho Lieova algebroidu určuje tzv. fundamentální vektorové pole na varietě Y. Studují se prolongace takovýchto polí a podává se s nimi spojená obecná teorie Lieovského derivování pro fibrované variety.

RECENSE

N. Bourbaki: FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE. (Funkce jedné reálné proměnné.) Nouvelle édition Hermann, Paris 1976, 326 stran, cena 180 F.

O sérii Éléments de mathématique, do níž patří tato kniha, bylo již mnoho napsáno a nebudeme zde rozmnožovat řadu komentářů k celkové koncepci této série. Nové vydání vychází v trochu větším formátu, úhledně vázané, úprava zůstává tradiční, včetně značek pro „tournant dangereux". Stránkování jednotlivých kapitol je vedeno nezávisle, což ještě dále zdůrazňuje příslušnost k rozsáhlé stavbě celých základů. Z celé série je tato kniha nejblíže k onomu oboru matematiky, které mu se tradičně říká klasická analýza. Tomu nasvědčují i názvy jednotlivých kapitol: 1. Derivace. 2. Primitivní funkce a integrály. 3. Elementární funkce. 4. Diferenciální rovnice. 5. Lokální vlastnosti funkcí. 6. Zobecněné Taylorovy rozvoje. 7. Funkce gamma.

Vzhledem k celkovému záměru, sledovanému Základy, uvádějí se výsledky i definice v co možná nejobecnější formě, což je někdy nezvyklé, je však v plném souladu s celkovou koncepcí díla.

Kniha je zajímavá i pro toho, kdo se s látkou obeznámil odjinud. Podání je tradičně netradiční a obsahuje řadu originálních přístupů a pohledů. Zajímavé jsou též Notes historiques.

Vlastimil Pták, Praha

Konrad Jörgens, Franz Rellich: EIGENWERTTHEORIE GEWÖHNLICHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN. Bearbeitet von J. Weidmann. Hochschultext. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1976, IX + 227 str., cena DM 28,—.

Svazek obsahuje přepracovanou a doplněnou verzi první části Rellichovy přednášky o teorii vlastních čísel parciálních diferenciálních rovnic z roku 1952—53 v Göttingen. Je rozdělen do tří kapitol. V první je vyložena teorie lineárních operátorů v Hilbertově prostoru. Druhá se zabývá spektrálním rozkladem symetrických operátorů. Vyvrcholením textu je třetí kapitola věnovaná Weylově teorii singulárních diferenciálních rovnic druhého řádu.

Od vzniku původního Rellichova textu uplynulo dost času a tak současný stav poznání vynutil jeho aktualizaci. Zpracovatelé, K. Jörgens a po jeho úmrtí J. Weidmann, usilovali o zachování původní, z pedagogického hlediska velmi zdařilé, koncepce výkladu. Nové pojmy a výsledky zahrnuli proto do dodatků a úloh na konci prvních dvou kapitol.

Text je velmi dobrý úvod do nejdůležitějších partií teorie symetrických samoadjungovaných operátorů v Hilbertově prostoru a podává ve třetí kapitole úplný výklad spektrální teorie singulárních Sturmových-Liouvilleových operátorů.

Štefan Schwabik, Praha