Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

KONFIGURACE BODŮ ROVINNÉ KUBIKY III

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

(Došlo dne 18. března 1976)

V článcích [1] a [2] jsme převedli hledání konfigurací bodů rovinné kubiky na určování podgrup grupy G – tj. grupy bodů rovinné kubiky. Odvodili jsme, že existují podgrupy řádu $9.2^n, 2^{n+1}, 2^{n+2}$, 3.2^n pro kubiku rodu 1 a 2.2^n, 3.2^n pro kubiku s bodem uzlovým. V tomto článku dokážeme daleko obecnější větu.

Věta 1. *Grupa G bodů rovinné kubiky, která má aspoň tři inflexní body, má podgrupy všech konečných řádů.*

Poznámka 1. V dalším budeme písmenem G označovat grupu z věty 1 a operaci této grupy nazývejme násobení – abychom v dalším mohli použít mocnin a odmocnin.

Věta 2. *Každý prvek grupy G je jistá n-tá odmocnina z jednotkového prvku. Existují n-té odmocniny z jednotkového prvku pro každé přirozené n.*

Důkaz. Nechť inflexní bod J je jednotkový prvek a X je libovolný bod uvažované kubiky $(X \neq J)$. Konstruujme mocniny bodu X. Tečnový bod bodu X je $1/X^2$ (body označujeme pomocí symbolů pro násobení). Třetí průsečík kubiky s přímkou $J(1/X^2)$ je X^2. Třetí průsečík přímky XX^2 s kubikou je $1/X^3$. Na přímce $J(1/X^3)$ leží bod X^3 atd. Je zřejmé, že uvažované přímky vytvářejí jednak svazek přímek se středem v J a jednak svazek přímek se středem v X. Nyní může nastat:

1) Přímka XX^k je tečnou v bodě X^k, potom je $X^k = 1/X^{k+1}$ a tedy $X^{2k+1} = J$.

2) Přímka $J(1/X^k)$ je tečnou v bodě $1/X^k$, potom je $X^k = 1/X^k$ a tedy $X^{2k} = J$.

Jeden z těchto případů musí nastat (jak X, tak i J jsou tečnové body), protože postup při konstruování bodu X můžeme algebraicky zapsat, navíc můžeme dát podmínku, aby $X^k = 1/X^{k+1}$ resp. $X^k = 1/X^k$ pro libovolné k. Vyjdeme-li např. od bodu $X = (x_1, x_2, 1)$ (nevlastní body $(y_1, y_2, 0)$ jsou jenom tři a pro tyto body můžeme naši úvahu provést speciálně) povede předcházející podmínka k soustavě dvou rovnic o dvou neznámých (např. $1/X^{k+1} = (x'_1, x'_2, 1)$, tj. $x_1 = x'_1$, $x'_2 = x_2$) a protože uvažujeme kubiku v projektivní rovině rozšířené o komplexní elementy, má tato soustava vždy řešení.

Poznámka 2. Zřejmě body, které mají za svůj tečnový bod, bod J, jsou druhé odmocniny z J. Inflexní body jsou třetí odmocniny z J. Body, které mají za svůj tečnový bod některý inflexní bod jsou šesté odmocniny z J. Podobně body, které mají za svůj tečnový bod druhou odmocninu z J jsou čtvrté odmocniny z J, atd.

Poznámka 3. Z předcházejícího je vidět, jestliže G je grupa bodů kubiky s bodem uzlovým, existují právě dvě $\sqrt{J}$, tři $\sqrt[3]{J}$, čtyři $\sqrt[4]{J}$ a šest $\sqrt[6]{J}$. Je-li G grupa bodů kubiky bez singulárního bodu, existují čtyři $\sqrt{J}$, devět $\sqrt[3]{J}$, šestnáct $\sqrt[4]{J}$ a třicetšest $\sqrt[6]{J}$. Pravděpodobně platí, že pro kubiku s bodem uzlovým existuje právě n n-tých odmocnin z J a pro kubiku bez singulárního bodu existuje právě n^2 n-tých odmocnin z J. Toto bychom dokázali podrobnějším zkoumáním algebraického vyjádření v důkaze věty 2. Pro naše další úvahy stačí dokázat, že těchto $\sqrt{J}$ je aspoň n a těchto n n -tých odmocnin určuje podgrupu grupy G. Uvědomíme si, že o uvažovaných prvcích grupy G platí všechny výsledky, které platí o n-tých odmocninách z jedné v tělese komplexních čísel tj. o komplexních jednotkách. Pro každé přirozené n existuje tzv. primitivní n-tá odmocnina z jedné a v našem případě existuje tedy primitivní n-tá odmocnina z J a cyklická podgrupa určená touto primitivní odmocninou je podgrupa splňující větu 1. Věta 1 je tedy dokázaná.

Užitím věty 2 z článku [1] a věty 1 dostáváme:

Věta 3. *Existuje konfigurace bodů rovinné kubiky, která má aspoň tři inflexní body, typu:* $(3n_n, n^2_3)$, *přičemž* n *je přirozené číslo větší než* 2.

V článcích [1] a [2] jsme mimo základních typů konfigurací (jako v předcházející větě 3) dostávali další konfigurace tím, že jsme podrobně zkoumali podgrupy grupy G (vynecháním bodů resp. přímek jsme dostávali další typy). V této práci si všimneme podrobněji podgrup pro případ kdy n je prvočíslo větší než tři.

Věta 4. *Nechť* p *je prvočíslo větší než tři. V podgrupě* $G_p \subset G$ *platí:*

1) *Každý bod grupy* G_p *je tečnovým bodem bodu grupy* G_p.
2) *Body grupy* G_p *různé od* J (*J je inflexní a jednotkový*) *lze rozdělit do disjunktních dvojic, přičemž spojnice bodů každé dvojice prochází bodem* J.
3) *Každým bodem* $T \in G_p$ $(T \neq J)$ *prochází právě* $(p - 3)/2$ *přímek na nichž leží právě tři vesměs různé body grupy* G_p.

Důkaz. Podle předcházejícího je každý bod ležící v G_p tzv. primitivní $\sqrt[n]{J}$ a každé dvě primitivní $\sqrt[n]{J}$ mají různé druhé mocniny (tečnový bod každého bodu leží také v G_p) a z toho vyplývá tvrzení 1). Dvojice bodů z tvrzení dvě jsou navzájem inverzní body. Každý bod T má v G_p jednak svůj jediný tečnový bod T' a jednak je tečnovým