ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

1

102

ACADEMIA

PRAHA

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 102 • Č. 1 • STR. 1—104 • PRAHA 14. 2. 1977

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(*Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fyziky"*)

SVAZEK 102 (1977)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd

Redakce:

Matematický ústav Československé akademie věd
115 67 Praha 1, Žitná 25

Časopis pro pěstování matematiky. Ročník *102* (1977). — Vydává Československá akademie věd v Academii, nakladatelství Československé akademie věd, Vodičkova 40, 112 29 Praha 1. Redakce: Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1. — Tiskne Polygrafia, n. p., závod 6, nositel Řádu práce, tř. Rudé Armády 171, 180 00 Praha 8. — Objednávky a předplatné přijímá PNS, administrace odborného tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Lze také objednat u každého poštovního úřadu nebo doručovatele. Vychází čtvrtletně. Roční předplatné Kčs 56,—, cena jednotlivého šešitu Kčs 14,—. (Tyto ceny jsou platné pouze pro Československo.)

Sole agents for all western countries KUBON & SAGNER, P.O.B. 68, 8000 München 34, G.F.R. Annual subscription: Vol. 102, 1977 (4 issues) DM 100,—.

Toto číslo vyšlo v únoru 1977

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 102 * PRAHA 14. 2. 1977 * ČÍSLO 1

FINITE PLANAR VERTEX-TRANSITIVE GRAPHS OF THE REGULARITY DEGREE THREE

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Received November 22, 1973)

In [1] V. G. VIZING poses some questions concerning vertex-transitive graphs. Among other problems he mentions that no complete characterization of vertex-transitive graphs of the regularity degree three have been demonstrated. Here we shall study this question in the particular case of finite planar graphs. We admit multiple edges, but not loops.

A vertex-transitive graph is a graph G such that to any two vertices x and y of G there exists an automorphism φ of G such that $\varphi(x) = y$.

Vertex-transitive graphs have been studied by various authors. Some of them, for example L. LOVÁSZ, use another terminology; they call these graphs symmetric. Here we use the term "vertex-transitive", because the term "symmetric" is often used in other senses.

Evidently every vertex-transitive graph is regular, i.e. all of its vertices have the same degree which is called the regularity degree of this graph.

Let us study finite planar vertex-transitive graphs of the regularity degree three. As we study planar graphs, we may speak about faces of a graph. First we prove a lemma.

Lemma. *A finite planar graph G can be drawn in the plane in such a way that the image of each boundary of a face in an arbitrary automorphism of G is again a boundary of a face.*

Proof. Each circuit of G which is not a boundary of any face in a drawing of G has the property that its vertex set is a separating set in G. A circuit which is a boundary of a face can have this property or not. (In 3-connected graphs it has never this property.) If it has not this property, then nor its image in any automorphism of G has this property and thus it is necessarily a boundary of some face. If a circuit C which is a boundary of a face has this property, let G' be the graph obtained from G by deleting all vertices of C and all edges incident to these vertices. It is easy to see that at drawing G we may decide freely whether some connected component of G'

will be drawn in the region bounded by C or outside of it. This holds also for each circuit which is an image of C in an automorphism of G. Thus if in a drawing of G such a circuit C is a boundary of a face and the image of C in an automorphism of G is not, we may change the drawing so that this image becomes a boundary of a face (all components mentioned are drawn outside of the region bounded by this circuit).

A connected vertex-transitive graph with at least 3 vertices cannot have the vertex connectivity degree equal to one; it would have at least one cut-vertex and, as a cut-vertex is mapped in each automorphism again onto a cut-vertex, all vertices of this graph would be cut-vertices, which is impossible in a finite graph. In any regular planar graph of the regularity degree three and of the vertex connectivity degree at least two each vertex belongs exactly to three faces f_1, f_2, f_3. Let the degree of the face f_i for $i = 1, 2, 3$ be d_i. (The degree of a face is the number of edges belonging to the boundary of this face.) If such a graph G is vertex-transitive, then, according to Lemma, it can be drawn in the plane so that at each vertex of this graph the degrees of the faces containing this vertex are d_1, d_2, d_3. Let us distinguish three cases (without loss of generality):

(α) $d_1 = d_2 = d_3$;

(β) $d_1 = d_2 \neq d_3$;

(γ) $d_1 \neq d_2 \neq d_3 \neq d_1$.

In the case (α) each vertex belongs to three faces of the same degree. It is easy to prove that then all faces of such a graph have equal degrees. The list of such finite planar graphs is well-known. It consists of the following graphs: the graph consisting of two vertices joined by three edges; the complete graph with four vertices (the graph of the regular tetrahedron); the graph of the (three-dimensional) cube; the graph of the regular dodecahedron. All of these graphs are vertex-transitive. Thus we have found all required graphs in the case (α).

Now consider the cases (β) and (γ). In both these cases d_3 is different from d_1 and d_2. This means that any two faces of degree d_3 are vertex-disjoint (and obviously also edge-disjoint). We decompose the edge set of G into two disjoint sets E_1 and E_2. The set E_1 consists of all edges which belong to the boundary of a face of degree d_3 and $E_2 = E - E_1$, where E is the edge set of G. Now we construct the graph $F(G)$ whose vertex set is the set of all faces of G of degree d_3 and in which two distinct vertices are joined by as many edges, as many are the edges in G joining a vertex of the face corresponding to one vertex with a vertex of the face corresponding to the other vertex. The transformation of G into $F(G)$ can be shown using the drawing of G in the plane. In this drawing the edges of G are represented by arcs of simple curves, faces of G are simply connected regions. In each face of G of degree d_3 we choose an inner point and we continue each edge of E_2 to these points in the faces to which its end vertices belong. Then we omit all edges of E_1. The resulting drawing is the drawing of $F(G)$. We see that $F(G)$ is a planar regular graph of the regularity degree d_3. If $d_1 = d_2$, then all faces of $F(G)$ have the degree $\frac{1}{2}d_1$. If $d_1 \neq d_2$, then each face of $F(G)$ has the degree either $\frac{1}{2}d_1$ or $\frac{1}{2}d_2$. In this case each edge of $F(G)$ belongs exactly to one face of degree $\frac{1}{2}d_1$ and exactly to one face of degree $\frac{1}{2}d_2$. In the first case (which is the case (β)) the graph $F(G)$ is a regular planar graph in which all faces have the same degree. The list of such graphs is well-known; it consists of the graphs listed when investigating the case (α) and, moreover, of the graphs consisting of two vertices joined by an arbitrary number of edges greater than or equal to two, of all circuits, of the graph of the regular octahedron and of the graph of the regular icosahedron. Now we shall make the list of all planar regular graphs in which the degrees of faces can have exactly two values and each edge belongs to two faces of different degrees. Let the possible values of degrees be denoted by d'_1 and d'_2. We see that the number of faces of degree d'_1 containing a vertex v of such a graph must be equal to the number of faces of degree d'_2 containing v; therefore the regularity degree of such a graph must be even. First consider graphs without multiple edges. In this case the regularity degree of a planar graph cannot be greater than five. We have only two possibilities: two or four. But a graph of the regularity degree two is a circuit and has only two faces, both with the same degree. Thus the regularity degree of the required graph must be four. If n is the number of its vertices, then the number of its edges is $2n$. As each edge belongs exactly to one face of degree d'_1, the number of faces of degree d'_1 is $2n/d'_1$. Analogously the number of

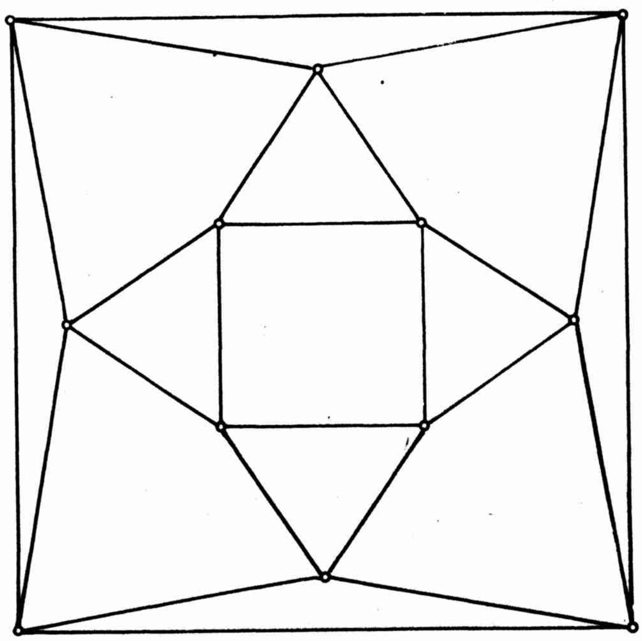

Fig. 1.

faces of degree d'_2 is $2n/d'_2$ and the total number of faces is $2n/d'_1 + 2n/d'_2$. Substituting into Euler's formula for planar graphs we obtain

$$n + 2n/d'_1 + 2n/d'_2 - 2n = 2\,.$$

This implies

$$n = 2d'_1d'_2/(2d'_1 + 2d'_2 - d'_1d'_2)\,.$$

In a finite planar graph of the regularity degree four at least one face must have a degree less than six. Without loss of generality let $d'_1 < d'_2$; then $d'_1 < 6$. Obviously $d'_1 \geqq 3$, because $F(G)$ contains no loops and no multiple edges. For $d'_1 = 3$ we obtain $n = 6d'_2(6 - d'_2)$. The possible values of d'_2 are 4 and 5; for greater values od d'_2 the number n would be undefined or negative. If $d'_2 = 4$, then $n = 12$. The graph satisfying these conditions is in Fig. 1; we can easily see that it is the uniqe graph satisfying them. If $d'_2 = 5$, then $n = 30$ and we have also a unique possible graph satisfying this in Fig. 2. For $d'_1 = 4$ we obtain $n = 4d'_2/(4 - d'_2)$; for $d'_1 = 5$ we have $n = 10d'_2/(10 - 3d'_2)$. For each $d'_2 > d'_1$ these expressions are negative; the required graphs do not exist.

Now consider graphs with multiple edges. Then $d'_1 = 2$ and such a graph is obtained by doubling all edges of a regular planar graph in which all faces have equal degrees different from two; these graphs were listed above.

We see that $F(G)$ must be isomorphic to some of the above described graphs. To any of these graphs H we construct $F^{-1}(H)$ by the operation which is inverse to F; we shall not describe it in words; it is shown in Fig. 3. If we consider H a graph of a polyhedron, we can imagine F^{-1} as "cutting off all angles".

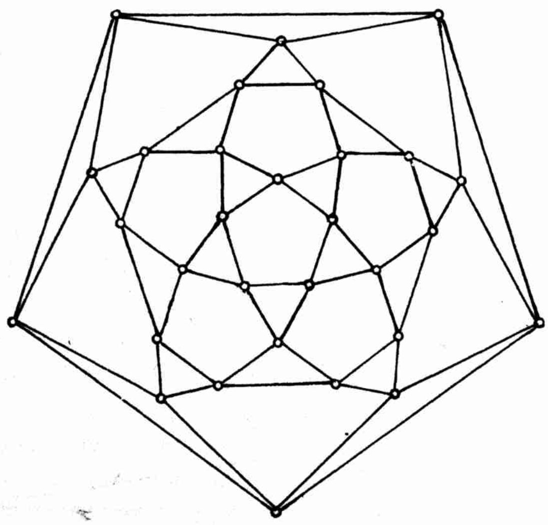

Fig. 2.

All the finite planar connected vertex-transitive graphs of the regularity degree three in the cases (β) and (γ) must be among these graphs $F^{-1}(H)$ and, as we easily see, any of these graphs $F^{-1}(H)$ has the required properties. Therefore in the cases

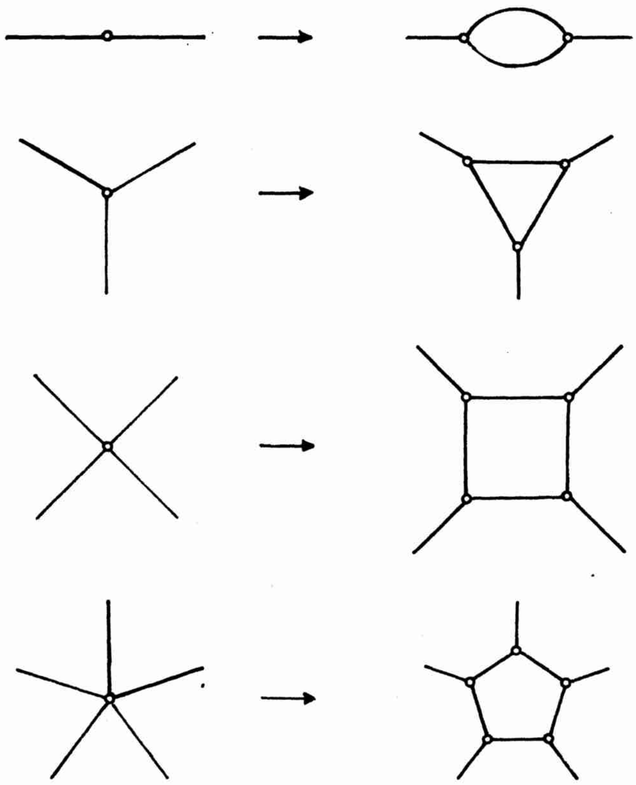

Fig. 3.

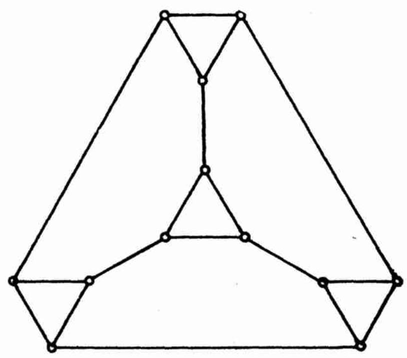

Fig. 4.

(β) and (γ) the finite planar connected vertex-transitive graphs of the regularity degree three are the graphs of n-side prismata for all positive integers $n \geqq 2$ and the graphs in Figs. 4–11. We have proved a theorem.

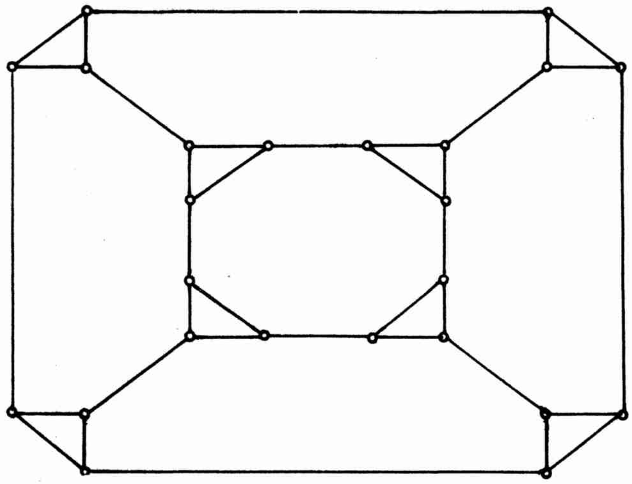

Fig. 5.

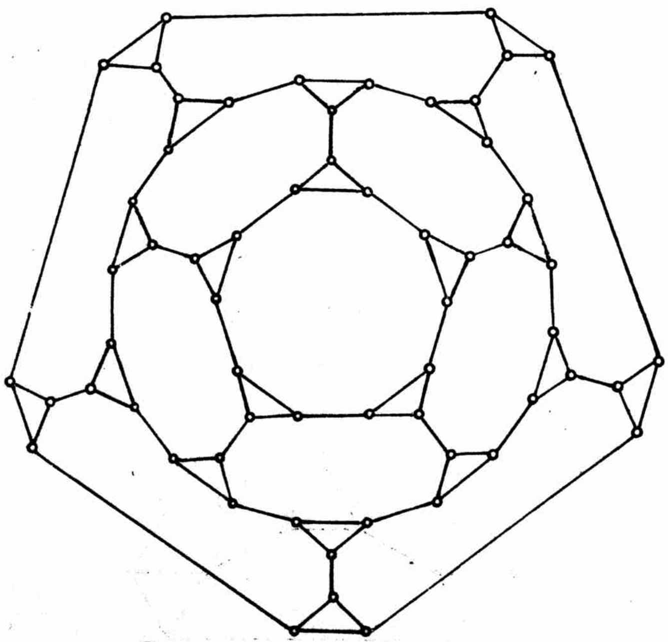

Fig. 6.

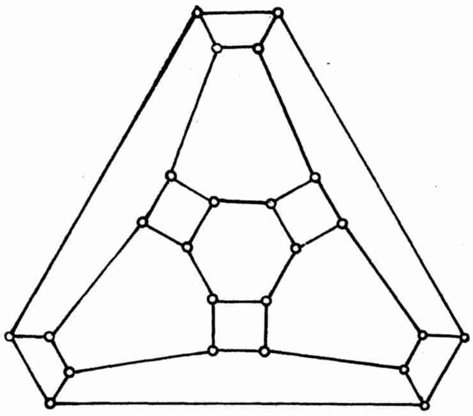

Fig. 7.

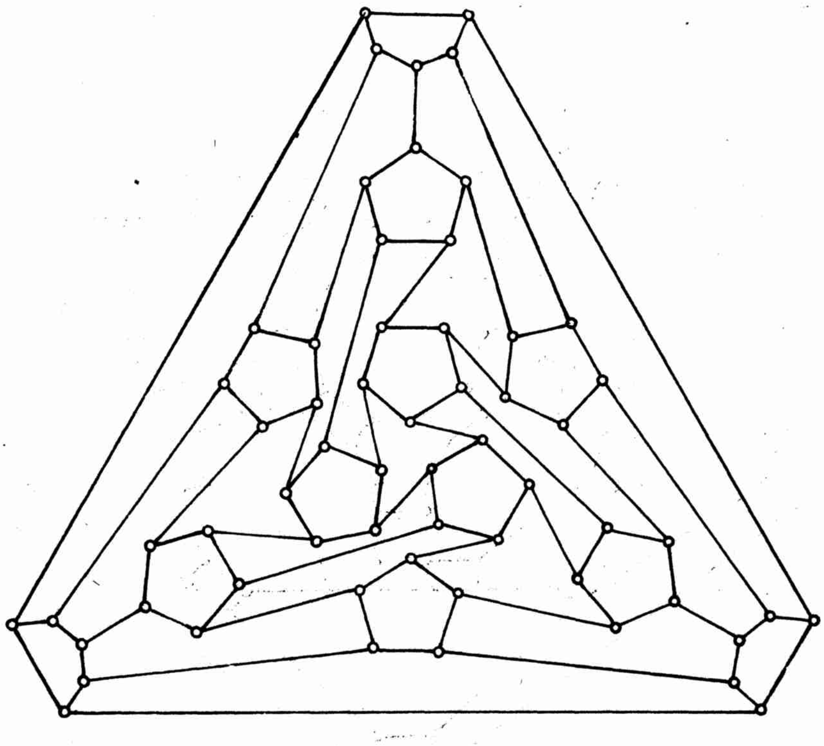

Fig. 8.

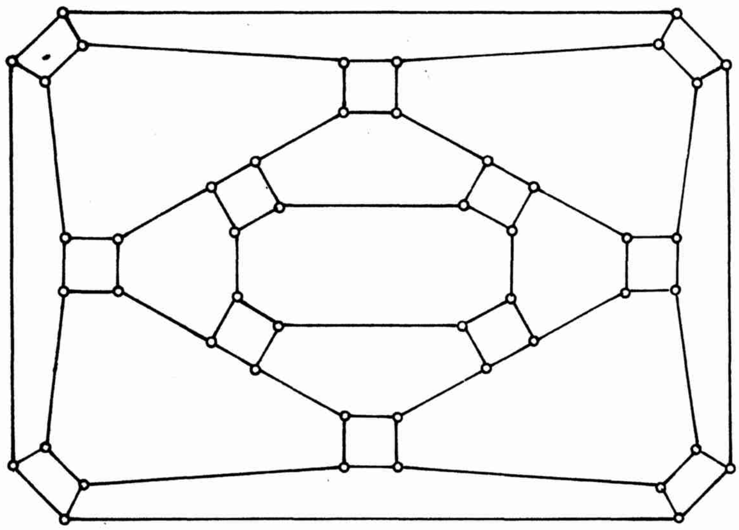

Fig. 9.

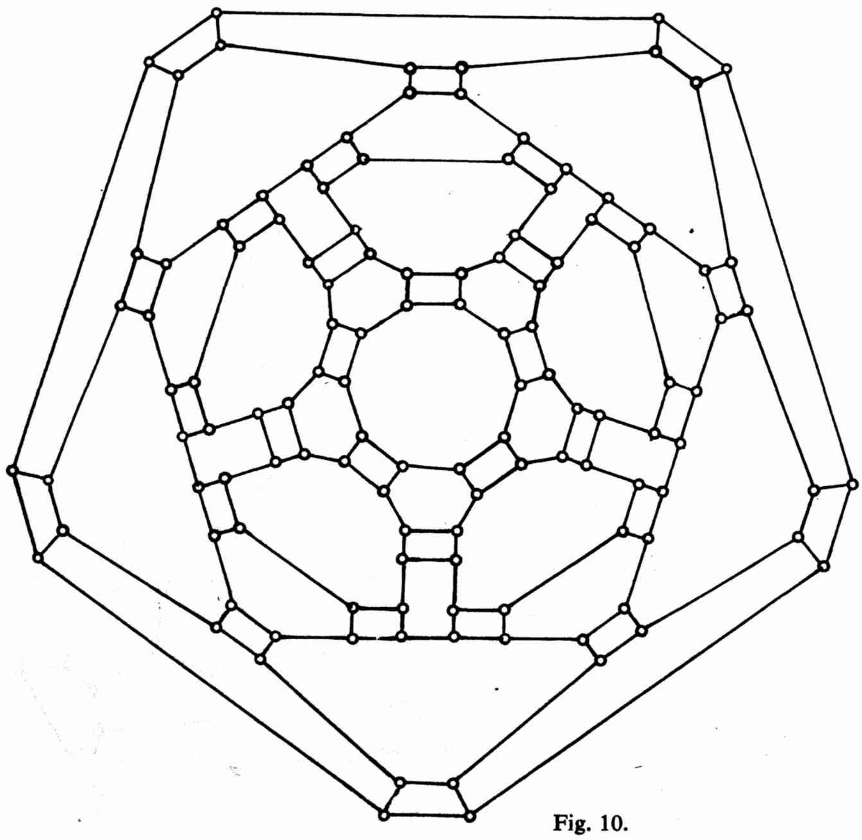

Fig. 10.

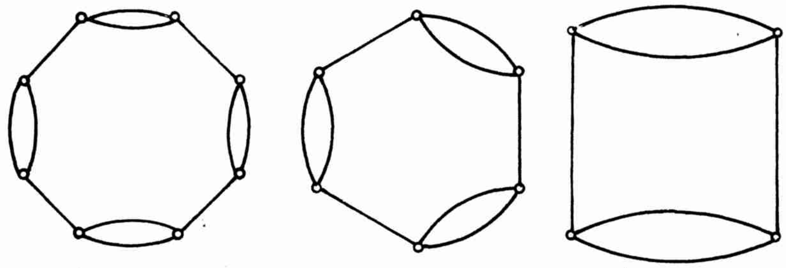

Fig. 11.

Theorem. *Let G be a finite planar connected vertex-transitive graph of the regularity degree three. Then G is isomorphic to one of the following graphs: the graph consisting of two vertices joined by three edges; the graph of the regular tetrahedron; the graph of the regular dodecahedron; the graph of an n-side prisma for* $n \geqq 2$; *some of the graphs in Figs.* 4–11.

Reference

[1] *В. Г. Визинг:* Некоторые нерешенные задачи в теории графов. Успехи мат. наук *23* (1968), 117–134.

Author's address: 461 17 Liberec 1; Komenského 2 (katedra matematiky VŠST).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

LATTICES OF TOLERANCES

IVAN CHAJDA, Přerov, and BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Received January 17, 1975)

In the paper [12] the concept of a tolerance is introduced. The tolerance relation (more briefly tolerance) is a reflexive and symmetric binary relation on a given set. Compatible tolerances are defined on algebras; they are a generalization of congruences. The concept of the compatible tolerance was introduced first for graphs in [13], later it was defined for arbitrary algebraic structures in [14] and [15]. The papers [7], [9], [10], [13], [14], [15] concern the investigation of the existence of compatible tolerances on various algebras. Although the conditions of the existence of compatible relations on algebras were investigated in some papers, there are still very few results on the set of all compatible tolerances on a given algebra. Only in the paper [7] it was proved that the set of all compatible tolerances on a given algebra forms a lattice with respect to the set inclusion. The aim of this paper is to find further properties which characterize this lattice.

1. LATTICE OPERATIONS IN $LT(\mathfrak{A})$

By the symbol $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ we denote an algebra $\mathfrak{A}$ with the support A and with the set $\mathscr{F}$ of fundamental operations. A tolerance on a non-empty set M is a reflexive and symmetric binary relation on M. A binary relation R on the set A is called compatible with $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$, if for any n-ary operation $f \in \mathscr{F}$, where n is a positive integer, and for arbitrary elements $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ of A fulfilling $a_i \, R \, b_i$ for $i = 1, \ldots, n$ we have $f(a_1, \ldots, a_n) \, R \, f(b_1, \ldots, b_n)$. If R is moreover a tolerance on A, we say that it is a compatible tolerance on $\mathfrak{A}$. By the symbol $LT(\mathfrak{A})$ we denote the set of all compatible tolerances on $\mathfrak{A}$. Evidently $LT(\mathfrak{A}) \neq \emptyset$ for every $\mathfrak{A}$, because the identity relation I (such that $x \, I \, y \Leftrightarrow x = y$) and the universal relation U (such that $x \, U \, y$ for each x and each y) are compatible tolerances on $\mathfrak{A}$. Further, each congruence on $\mathfrak{A}$ is a compatible tolerance on $\mathfrak{A}$.

Theorem 1. *Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ be an algebra. Then $LT(\mathfrak{A})$ is a complete lattice with the least element I and the greatest element U with respect to the set inclusion. The meet in $LT(\mathfrak{A})$ is equal to the set intersection.*

Proof follows immediately from Theorem 17 in [11].

It is evident (see [7]) that in general $LT(\mathfrak{A})$ is not a sublattice of the lattice of all tolerances on the support A. The join in the lattice $LT(\mathfrak{A})$ need not be equal to the set union, because the set union of some compatible tolerances on A need not be compatible with $\mathfrak{A}$. Nevertheless, $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma \subseteq \bigvee_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma$.

In the sequel we shall use the concept of a polynomial on an algebra, as was defined by GRÄTZER [5]. If a polynomial p on an algebra $\mathfrak{A}$ contains variables $x_1, \ldots, x_n$ and no other variables, then it is denoted by $p(x_1, \ldots, x_n)$. Let $a_1, \ldots, a_n$ be elements of A. If we substitute for each x_i the element a_i (for $i = 1, \ldots, n$) wherever x_i occurs in the polynomial $p(x_1, \ldots, x_n)$, then we obtain an element of A which will be denoted by $p(a_1, \ldots, a_n)$.

Theorem 2. *Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F}\rangle$ be an algebra and let $T_\gamma \in LT(\mathfrak{A})$ for each γ from a subscript set Γ. Let T be a binary relation on A defined so that $a\,T\,b$ if and only if there exist elements $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ of Γ and elements $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_m$ of A, where m is a positive integer, and there exists a polynomial $p(x_1, \ldots, x_m)$ on $\mathfrak{A}$ such that $a_i\, T_{\gamma_i}\, b_i$ for $i = 1, \ldots, m$ and $p(a_1, \ldots, a_m) = a$, $p(b_1, \ldots, b_m) = b$. Then $T = \bigvee_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma$.*

Proof. Evidently $T_\gamma \subseteq T$ for each $\gamma \in \Gamma$; it suffices to choose $m = 1$, $a_1 = a$, $b_1 = b$, $p(x_1) = x_1$. This implies the reflexivity of T. The symmetry of T is evident from its definition, therefore T is a tolerance on A. Now let $c_1, \ldots, c_n$, $d_1, \ldots, d_n$ be elements of A such that $c_i\, T\, d_i$ for $i = 1, \ldots, n$ and let $f \in \mathscr{F}$ be an n-ary operation. Then there exist elements $c_{i1}, \ldots, c_{im_i}$, $d_{i1}, \ldots, d_{im_i}$ of A and elements $\gamma_{i1}, \ldots, \gamma_{im_i}$ of Γ such that $c_{ij}\, T_{\gamma_{ij}}\, d_{ij}$ for each $i = 1, \ldots, n$ and $j = 1, \ldots, m_i$ (where m_i is a positive integer dependent on i). Further, there exist polynomials $p_i(x_1, \ldots, x_{m_i})$ of $\mathfrak{A}$ such that $c_i = p_i(c_{i1}, \ldots, c_{im_i})$, $d_i = p_i(d_{i1}, \ldots, d_{im_i})$ for $i = 1, \ldots, n$. According to the definition of a polynomial, $f(p_1, \ldots, p_n)$ is again a polynomial on $\mathfrak{A}$ and

$$f(c_1, \ldots, c_n) = f(p_1(c_{11}, \ldots, c_{1m_1}), \ldots, p_n(c_{n1}, \ldots, c_{nm_n}))\,,$$
$$f(d_1, \ldots, d_n) = f(p_1(d_{11}, \ldots, d_{1m_1}), \ldots, p_n(d_{n1}, \ldots, d_{nm_n}))\,,$$

therefore $c_{ij}\, T_{\gamma_{ij}}\, d_{ij}$ implies $f(c_1, \ldots, c_n)\, T f(d_1, \ldots, d_n)$, which means that $T \in LT(\mathfrak{A})$. The tolerance T is compatible with $\mathfrak{A}$ and contains T_γ for all $\gamma \in \Gamma$, therefore $\bigvee_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma \subseteq$ $\subseteq T$. Let $a \in A$, $b \in A$ and $a\,T\,b$. Then there exist elements $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ of A and elements $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ of Γ and a polynomial $p(x_1, \ldots, x_n)$ on $\mathfrak{A}$ so that $a_i\, T_{\gamma_i}\, b_i$ for $i = 1, \ldots, n$, $p(a_1, \ldots, a_n) = a$, $p(b_1, \ldots, b_n) = b$. Then $a_i\, (\bigcup_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma)\, b_i$ and also a_i $(\bigvee_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma)\, b_i$. But $\bigvee_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma \in LT(\mathfrak{A})$, therefore for each n-ary operation $f \in \mathscr{F}$ we have $f(a_1, \ldots, a_n)\, (\bigvee_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma)\, f(b_1, \ldots, b_n)$ and the compatibility of $\bigvee_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma$ implies

$$a = p(a_1, \ldots, a_n)\ (\bigvee_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma)\ p(b_1, \ldots, b_n) = b\,.$$

As a and b were chosen arbitrarily, we have $T \subseteq \bigvee_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma$ and thus $T = \bigvee_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma$.

Now we shall study some interrelations between the lattice $LT(\mathfrak{A})$ and congruences on the algebra $\mathfrak{A}$.

Definition 1. Let T_γ be a tolerance on a set M for each $\gamma \in \Gamma$, where Γ is a subscript set. The least (with respect to the set inclusion) equivalence E on M such that $T_\gamma \subseteq E$ for each $\gamma \in \Gamma$ will be called the transitive hull of the tolerances T_γ for $\gamma \in \Gamma$.

Thus for $|\Gamma| = 1$ we obtain that the transitive hull of a tolerance T on M is the least equivalence E on M such that $T \subseteq E$. If T is an equivalence, then $T = E$.

The following three propositions are evidently true.

Proposition 1. *If $R_1, \ldots, R_n$ are binary relations compatible with $\mathfrak{A}$ (where n is a positive integer), then also $R_1 R_2 \ldots R_n$ is a binary relation compatible with $\mathfrak{A}$.*

Proposition 2. *If $\{R_i\}_{i \in I}$ (where $I \neq \emptyset$) is a system of binary relations compatible with $\mathfrak{A}$, which is directed upwards with respect to the set inclusion, then also $\bigcup_{i \in I} R_i$ is a relation compatible with $\mathfrak{A}$.*

Proposition 3. *If $T_i \in LT(\mathfrak{A})$ for each i from a non-empty subcsript set I, then the transitive hull C of the tolerances T_i is the relation $\bigcup T_{i_1} T_{i_2} \ldots T_{i_n}$, where the union is taken over all positive integers n and all subscripts $i_1, i_2, \ldots, i_n$ from I. C is thus expressed as a union of a system of relations which is directed upwards.*

Now we shall present some theorems.

Theorem 3. *Let A be a set, let T_γ be a tolerance on A for each $\gamma \in \Gamma$ (where Γ is a subscript set). Let C_γ be the transitive hull of T_γ and let C be the transitive hull of all C_γ for $\gamma \in \Gamma$. Then C is the transitive hull of all T_γ for $\gamma \in \Gamma$.*

Proof follows from Propositions 1, 2, 3.

Theorem 4. *Let $T_\gamma \in LT(\mathfrak{A})$ for $\gamma \in \Gamma$ and let C be the transitive hull of the tolerances T_γ for $\gamma \in \Gamma$. Then C is a congruence on $\mathfrak{A}$.*

Proof. By Proposition 3 the relation C is the union of a system of products of elements of $\{T\}_{\gamma \in \Gamma}$ which is directed upwards. By Proposition 1 each of these products is compatible with $\mathfrak{A}$, by Proposition 2 the union of this system is compatible with $\mathfrak{A}$. Thus C is compatible with $\mathfrak{A}$. As C is an equivalence on the support of $\mathfrak{A}$, it is a congruence on $\mathfrak{A}$.

Corollary 1. *Let $T_\gamma \in LT(\mathfrak{A})$ for $\gamma \in \Gamma$ and let C be the transitive hull of T_γ for $\gamma \in \Gamma$. Then $C \in LT(\mathfrak{A})$ and $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma \subseteq C$.*

Definition 2. Let L be a lattice. A mapping t of L into itself is called a closure operation on L, if for any $a \in L$, $b \in L$ the following three conditions are satisfied:

(i) $a \leq t(a)$;

(ii) $t(t(a)) = t(a)$;

(iii) $t(a) \vee t(b) \leq t(a \vee b)$.

Theorem 5. *Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ be an algebra, let $LT(\mathfrak{A})$ be the lattice of all compatible tolerances on $\mathfrak{A}$. For each $T \in LT(\mathfrak{A})$ let $t(T)$ be the transitive hull of T. Then t is a closure operation on $LT(\mathfrak{A})$.*

Proof. The conditions (i) and (ii) follow from the definition of the transitive hull. Further, the same definition implies also the implication $T_1 \subseteq T_2 \Rightarrow t(T_1) \subseteq t(T_2)$ and we have $t(T') \subseteq t(T' \vee T'')$, $t(T'') \subseteq t(T' \vee T'')$, which means $t(T') \vee t(T'') \subseteq \subseteq t(T' \vee T'')$ for any $T' \in LT(A)$, $T'' \in LT(\mathfrak{A})$, which means (iii).

Now we shall add some remarks concerning graphs of tolerances. If T is a tolerance on a set M, then the undirected graph $G(T)$ whose vertex set is M and in which two vertices x, y are adjacent if and only if $x \, T \, y$ is called the graph of T.

Theorem 6. *Let T be a tolerance on a set M, let $G(T)$ be the graph of T. Let E be the transitive hull of T. Then each equivalence class of E is the vertex set of a connected component of $G(T)$ and vice versa.*

This assertion is evident.

Theorem 7. *Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ be an algebra. For each tolerance $T \in LT(\mathfrak{A})$ which is not a congruence choose a partition $P(T)$ of A with these properties:*

(i) *$P(T)$ is a refinement of the partition of A into equivalence classes of the transitive hull $C(T)$ of T;*

(ii) *if K_1, K_2 are two distinct classes of $P(T)$ which are subsets of the same equivalence class of $C(T)$, then there exist elements $k_1 \in K_1$, $k_2 \in K_2$ such that $k_1 \, T k_2$.*

Let $E(T)$ be the equivalence on A whose equivalence classes form the partition $P(T)$, let C be a congruence on $\mathfrak{A}$ which contains all $E(T)$ for all tolerances $T \in \in LT(\mathfrak{A})$ which are not congruences. Then each tolerance compatible with the factor-algebra $\mathfrak{A}/C$ is a congruence.

Proof. Let T_1 be a tolerance compatible with $\mathfrak{A}/C$. Let χ be the natural homomorphism of $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{A}/C$. Let T_2 be a tolerance on A defined so that $a \; T_2 \; b$, if and only if $\chi(a) \; T_1 \; \chi(b)$. It is easy to prove that T_2 is a tolerance compatible with $\mathfrak{A}$. Suppose that T_1 is not a congruence. Then neither T_2 is a congruence. Thus the partition $P(T_2)$ was chosen in accordance with the assumptions of the theorem and there exists an equivalence $E(T_2)$ corresponding to it. We have $E(T_2) \subseteq C$. Let x, y be two elements of A for which $x \; C(T_2) \; y$, where $C(T_2)$ is the transitive hull of T, but not $x \; T_2 \; y$; as T_2 is not a congruence, such a pair of elements must exist. If $x \; C \; y$, then $\chi(x) = \chi(y)$ and $\chi(x) \; T_1 \; \chi(y)$, because T_1 is reflexive. But from the definition of T_2 we have $x \; T_2 \; y$, which is a contradiction. If x and y are not in C, then neither x nor y are in $E(T_2)$. But, as they are in $C(T_2)$, there exist elements x', y' such that $x \; E(T_2) \; x'$, $y \; E(T_2) \; y'$, $x' \; T_2 \; y'$. As $x \; E(T_2) \; x'$ and $E(T_2) \subseteq C$, we have $x \; C \; x'$ and analogously $y \; C \; y'$. This means $\chi(x) = \chi(x')$, $\chi(y) = \chi(y')$. But by the definition of T_2, from $x' \; T_2 \; y'$ we have $\chi(x') \; T_1 \; \chi(y')$, which means $\chi(x) \; T_1 \; \chi(y)$ and this implies $x \; T_2 \; y$, which is again a contradiction.

An admissible colouring of a graph G is a partition of the vertex set of G such that no two distinct vertices of the same class of this partition are joined by an edge. If it has the minimal possible number of classes (colours), it is called a minimal admissible colouring of G. If K_1, K_2 are two distinct classes of a minimal admissible colouring of a connected graph G, then there exists a vertex $k_1 \in K_1$ and a vertex $k_2 \in K_2$ such that k_1 and k_2 are joined by an edge (otherwise we could substitute K_1 and K_2 by their union and we should obtain in this way an admissible colouring with a smaller number of classes). Thus we have a corollary.

Corollary 2. *Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ be an algebra. For each tolerance T compatible with $\mathfrak{A}$ choose a partition $P(T)$ such that the restriction of $P(T)$ onto any equivalence class of $C(T)$, where $C(T)$ is the transitive hull of T, is a minimal admissible colouring of the corresponding connected component of $G(T)$. Let $E(T)$ be the equivalence on A whose equivalence classes form the partition $P(T)$, let C be a congruence on $\mathfrak{A}$ which contains all $E(T)$ for all tolerances $T \in LT(\mathfrak{A})$ which are not congruences. Then each tolerance compatible with the factor-algebra $\mathfrak{A}/C$ is a congruence.*

We have still another corollary.

Corollary 3. *Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ be an algebra. For each tolerance T compatible with $\mathfrak{A}$ which is not a congruence let $E(T)$ be the least equivalence containing $C(T) - T$, where $C(T)$ is the transitive hull of T. Then each tolerance compatible with the factor-algebra $\mathfrak{A}/C$ is a congruence.*

If T_1 and T_2 are two tolerances compatible with $\mathfrak{A}$ with the same transitive hull, then evidently also their join has the same transitive hull. For their meet this need not hold. The subset of $LT(\mathfrak{A})$ consisting of all tolerances with the given transitive hull is an upper subsemilattice of $LT(\mathfrak{A})$, but it may have more than one minimal element.

If T_0 is a tolerance on A and T is the least tolerance from $LT(\mathfrak{A})$ which contains T_0, we say that T is generated by T_0.

Theorem 8. *Let C be a congruence on an algebra $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$, let $S(C)$ be the set of all tolerances from $LT(\mathfrak{A})$ whose transitive hull is C. Let T be a minimal element from $S(C)$. Then T is generated by a tolerance T_0 on A such that its graph $G(T_0)$ is a forest and the vertex set of each connected component of $G(T_0)$ is an equivalence class of C.*

Proof. By Theorem 7 the vertex set of each connected component of $G(T)$ is an equivalence class of C. In each of these connected components we choose a spanning tree; these spanning trees of all connected components of $G(T)$ form a forest F. Define a tolerance T_0 on A so that $x\ T_0\ y$ if and only if $x = y$ or x and y are joined by an edge in F. Then $F = G(T_0)$ and $T_0 \subseteq T$. Suppose that there exists $T_1 \in LT(\mathfrak{A})$ such that $T_0 \subseteq T_1 \subset T$ (therefore $T_1 \neq T$). Let $C(T)$, $C(T_0)$, $C(T_1)$ denote the transitive hulls of T, T_0, T_1 respectively. As $T_0 \subseteq T$, any connected component of T_0 must be contained in a connected component of T_1 and thus $C = C(T_0) \subseteq C(T_1)$. As $T_1 \subset T$, we obtain analogously $C(T_1) \subseteq C(T) = C$, thus $C \subseteq C(T_1) \subseteq C$ and $C(T_1) = C$. But this is a contradiction with the minimality of T.

Theorem 9. *Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{F} \rangle$ be an algebra, let C be a congruence of $\mathfrak{A}$. Let $F(C)$ be the filter of $LT(\mathfrak{A})$ consisting of all elements of $LT(\mathfrak{A})$ which are greater than or equal to C. Let $\mathfrak{A}/C$ be the factor-algebra of $\mathfrak{A}$ by C. Then there exists a join-homomorphism of $F(C)$ onto $LT(\mathfrak{A}/C)$.*

Proof. Let $T \in F(C)$, this means $C \subseteq T$. Let χ be the natural homomorphism of $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{A}/C$. Define $\varphi(T)$ as a tolerance on $\mathfrak{A}/C$ such that $x\, \varphi(T)\, y$ if and only if there exist elements x', y' of A such that $\chi(x') = x$, $\chi(y') = y$, $x'\, T\, y'$. The tolerance $\varphi(T)$ is evidently compatible with $\mathfrak{A}/C$. Now let T_0 be a tolerance compatible with $\mathfrak{A}/C$. Let T_1 be a tolerance on A such that $a\, T_1\, b$ if and only if $\chi(a)\, T_0\, \chi(b)$. Again T_1 is evidently compatible with $\mathfrak{A}$. If $c\, C\, d$ for some elements c, d of A, then $\chi(c) = \chi(d)$, thus $\chi(c)\, T_1\, \chi(d)$ and this implies $c\, T_1\, d$; we have $C \subseteq T_1$ and thus $T_1 \in F(C)$. Evidently $\varphi(T_1) = T_0$. We see that φ is a surjection. Now let $T \in F(C)$, $T' \in F(C)$. Let $a\, (T \vee T')\, b$. Then there exist elements $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ of A and a polynomial $p(x_1, \ldots, x_n)$ of A such that $p(a_1, \ldots, a_n) = a$, $p(b_1, \ldots, b_n) = b$ and for each $i = 1, \ldots, n$ either $a_i\, T\, b_i$, or $a_i\, T'\, b_i$. In the polynomial $p(x_1, \ldots, x_n)$ substitute each element $c \in A$ by the element $\chi(c)$ and each operation $f \in \mathcal{F}$ by the operation on $\mathfrak{A}/C$ corresponding to f in the homomorphism χ; we obtain a polynomial $p^*(x_1, \ldots, x_n)$ of $\mathfrak{A}/C$. We have $p^*(\chi(a_1), \ldots, \chi(a_n)) = \chi(a)$, $p^*(\chi(b_1), \ldots, \chi(b_n)) = \chi(b)$ and for $i = 1, \ldots, n$ we have either $\chi(a_i)\, \varphi(T)\, \chi(b_i)$ or $\chi(a_i)\, \varphi(T')\, \chi(b_i)$. Thus $\chi(a)\, (\varphi(T) \vee \varphi(T'))\, \chi(b)$. We have proved $\varphi(T \vee T') \subseteq \varphi(T) \vee \varphi(T')$. It remains to prove that $\varphi(T) \subseteq \varphi(T \vee T')$, $\varphi(T') \subseteq \varphi(T \vee T')$. If $c\, \varphi(T)\, d$ for some elements c, d of $\mathfrak{A}/C$, then there exist elements c', d' of A such that $\chi(c') = c$, $\chi(d') = d$, $c'\, T\, d'$. Then $c'\, (T \vee T')\, d'$ and $c = \chi(c')\, \varphi(T \vee T')\, \chi(d') = d$, thus $\varphi(T) \subseteq \varphi(T \vee T')$. Analogously $\varphi(T') \subseteq \varphi(T \vee T')$. The relation $\varphi(T \vee T')$ contains both $\varphi(T)$ and $\varphi(T')$ and is contained in $\varphi(T) \vee \varphi(T')$, therefore $\varphi(T \vee T') = \varphi(T) \vee \varphi(T')$ and φ is a join-homomorphism.

We shall give an example showing that this theorem cannot be strengthened by substituting the word "join-homomorphism" by "homomorphism".

Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{F} \rangle$ be a groupoid with the support $A = \{a_1, a_2, a_3, b\}$ and with a binary operation given by the following Cayley table:

	a_1	a_2	a_3	b
a_1	a_1	a_3	a_2	a_1
a_2	a_3	a_2	a_1	a_2
a_3	a_2	a_1	a_3	a_3
b	a_1	a_2	a_3	b

Let C be an equivalence on A whose classes are $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b\}$. It is evidently a congruence on $\mathfrak{A}$. The set $F(C)$ consists of the tolerance C, T_1, T_2, T_3, U, where T_i for $i = 1, 2, 3$ is obtained from C by adding the pairs (a_i, b), (b, a_i), U is the universal relation on A. Evidently $T_1 \wedge T_2 = T_1 \wedge T_3 = T_2 \wedge T_3 = C$, $T_1 \vee T_2 = T_1 \vee T_3 = T_2 \vee T_3 = U$. The factor-algebra $\mathfrak{A}/C$ consists only of two elements, therefore there are only two tolerances on it, the identity relation I_0 and the universal relation U_0. Suppose that there exists a homomorphism φ of $F(C)$ onto $LT(\mathfrak{A}/C)$. If $\varphi(C) = U_0$, then $\varphi(T) = \varphi(T \vee C) = \varphi(T) \vee \varphi(C) = \varphi(T) \vee U_0 = U_0$ for each $T \in F(C)$ and φ is not a surjection, which is a contradiction. Thus $\varphi(C) = I_0$. Dually, if $\varphi(U) = I_0$, then $\varphi(T) = I_0$ for each $T \in F(C)$ and this is also a contradiction. Thus $\varphi(C) = I_0$, $\varphi(U) = U_0$. From the elements $\varphi(T_1)$, $\varphi(T_2)$, $\varphi(T_3)$ at least two must be equal, without loss of generality let $\varphi(T_1) = \varphi(T_2)$. Then $U_0 = \varphi(U) = \varphi(T_1 \vee T_2) = \varphi(T_1) \vee \varphi(T_2) = \varphi(T_1) = \varphi(T_1) \wedge \varphi(T_2) = \varphi(T_1 \wedge T_2) = \varphi(C) = I_0$, which is a contradiction.

Theorem 10. *Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ be an algebra, let C be a congruence of $\mathfrak{A}$. Let $F(C)$ be the filter of $LT(\mathfrak{A})$ consisting of all elements of $LT(\mathfrak{A})$ which are greater than or equal to C. Let $\mathfrak{A}/C$ be the factor-algebra of $\mathfrak{A}$ by C. Then there exists a meet-isomorphism of $LT(\mathfrak{A}/C)$ into $F(C)$.*

Proof. Let χ be the natural homomorphism of $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{A}/C$. Let $T \in LT(\mathfrak{A}/C)$. By $\psi(T)$ we denote the binary relation on A defined so that $x\, \psi(T)\, y$ for $x \in A$, $y \in A$ if and only if $\chi(x)\, T\, \chi(y)$. We have $\psi(T) \in F(C)$; the proof is left to the reader. Now let $F_0(C)$ be the set of all $\psi(T)$ for $T \in LT(\mathfrak{A}/C)$. Evidently each tolerance $T_0 \in F(C)$ has the property that for any two congruence classes K_1, K_2 of C the relation $k_1\, T_0\, k_2$ holds either for each $k_1 \in K_1$ and each $k_2 \in K_2$, or for no $k_1 \in K_1$ and no $k_2 \in K_2$; this property will be denoted by **P**. It is easy to prove that $T_1 = \psi(\varphi(T_1))$, where φ is the homomorphism defined in the proof of Theorem 9; thus $T_1 \in F_0(C)$. Thus the subset of $F(C)$ consisting of all tolerances with the property **P** coincides with $F_0(C)$. The set $F_0(C)$ is closed under meet; if $T_1 \in F_0(C)$, $T_2 \in F_0(C)$ and K_1, K_2 are two congruence classes of C, then either $k_1\, T_1\, k_2$, $k_1\, T_2\, k_2$ for each $k_1 \in K_1$ and each $k_2 \in K_2$, then $k_1\, (T_1 \wedge T_2)\, k_2$ for each $k_1 \in K_1$ and each $k_2 \in K_2$, or $k_1\, T_i\, k_2$ for some i from the numbers 1, 2 holds for no $k_1 \in K_1$, $k_2 \in K_2$, then $k_1\, (T_1 \wedge T_2)\, k_2$ holds for no $k_1 \in K_2$ and no $k_2 \in K_2$. We see that $F_0(C)$ is a lower subsemilattice of $F(C)$. If $T \in LT(\mathfrak{A}/C)$, then evidently $\varphi(\psi(T)) = T$. Since we have $\psi(\varphi(T_0)) = T_0$ for each $T_0 \in F_0(C)$, we see that ψ is a bijective mapping and so is the restriction of φ onto $F_0(C)$; this restriction is equal to ψ^{-1}. As φ is an order-preserving mapping, so is ψ. As in $F_0(C)$ to any two elements their meet exists and is equal to their meet in $LT(\mathfrak{A})$, ψ must be a meet-isomorphism of $LT(\mathfrak{A}/C)$ onto $F_0(C)$, this means into $F(C)$.

We shall give an example showing that ψ need not be an isomorphism.

Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ be the semigroup with the support $A = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2\}$, given by the following Cayley table:

	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2	d_1	d_2
a_1	a_1	a_2	b_2	b_2	c_2	c_2	d_2	d_2
a_2	a_2	a_2	b_2	b_2	c_2	c_2	d_2	d_2
b_1	b_2	b_2	b_1	b_2	d_2	d_2	d_2	d_2
b_2	b_2	b_2	b_2	b_2	d_2	d_2	d_2	d_2
c_1	c_2	c_2	d_2	d_2	c_1	c_2	d_2	d_2
c_2	c_2	c_2	d_2	d_2	c_2	c_2	d_2	d_2
d_1	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2	d_1	d_2
d_2	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2

Let C be the congruence on $\mathfrak{A}$ whose classes are $\{a_1, a_2\}$, $\{b_1, b_2\}$, $\{c_1, c_2\}$, $\{d_1, d_2\}$. Let T_1 be the congruence on $\mathfrak{A}$ whose classes are $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$, $\{c_1, c_2, d_1, d_2\}$, let T_2 be the congruence on $\mathfrak{A}$ whose classes are $\{a_1, a_2, c_1, c_2\}$, $\{b_1, b_2, d_1, d_2\}$. We have $T_1 \in F_0(C)$, $T_2 \in F_0(C)$. Let $T = T_1 \vee T_2$. Then $a_2\, T d_2$, because $a_2\, T_1\, b_2$, $a_2\, T_2\, c_2$, thus $a_2 = a_2 a_2\, T b_2\, c_2 = d_2$, but the elements a_1, d_1 are not in T. As $a_1\, C\, a_2$, $d_1\, C\, d_2$, this means that $T = T_1 \vee T_2 \notin F_0(C)$ and $F_0(C)$ is not closed under join, thus ψ is not an isomorphism of $L\,T(\mathfrak{A}/C)$ onto $F_0(C)$.

Theorem 11. *Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ be an algebra, let C be a congruence on $\mathfrak{A}$. Let $J(C)$ be the ideal of $L\,T(\mathfrak{A})$ consisting of all elements of $L\,T(\mathfrak{A})$ which are less or equal to C. Let there exist a subalgebra $\mathfrak{A}_0$ of $\mathfrak{A}$ whose support A_0 is one of the congruence classes of C. Then there exists a join-homomorphism of $L\,T(\mathfrak{A}_0)$ into $J(C)$.*

Proof. Let $T \in L\,T(\mathfrak{A}_0)$, let $\alpha(T)$ be the least compatible tolerance on $\mathfrak{A}$ which contains T. Then $\alpha(T) \subseteq C$; as C obviously contains T, this means $\alpha(T) \in J(C)$. Now if $T' \in J(C)$ and T'' is the restriction of T' onto A_0, then evidently $T'' \in L\,T(\mathfrak{A}_0)$ and $\alpha(T'') \subseteq T'$. Thus α is a mapping of $L\,T(\mathfrak{A}_0)$ into $J(C)$. Now let $T_1 \in L\,T(\mathfrak{A}_0)$, $T_2 \in L\,T(\mathfrak{A}_0)$. Then $\alpha(T_1) \vee \alpha(T_2)$ is a tolerance from $J(C)$ which contains both T_1 and T_2. As it contains T_1 and T_2 and is compatible with $\mathfrak{A}$, it must contain also $T_1 \vee T_2$, which means $\alpha(T_1 \vee T_2) \subseteq \alpha(T_1) \vee \alpha(T_2)$. But evidently $\alpha(T_1) \subseteq \alpha(T_1 \vee T_2)$, $\alpha(T_2) \subseteq \alpha(T_1 \vee T_2)$, thus $\alpha(T_1) \vee \alpha(T_2) \subseteq \alpha(T_1 \vee T_2)$ and $\alpha(T_1 \vee T_2) = \alpha(T_1) \vee \alpha(T_2)$. We see that α is a join-homomorphism of $L\,T(\mathfrak{A}_0)$ into $J(C)$.

Theorem 12. *Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ be an algebra, let C be a congruence on $\mathfrak{A}$. Let $J(C)$ be the ideal of $L\,T(\mathfrak{A})$ consisting of all elements of $L\,T(\mathfrak{A})$ which are less than or equal to C. Let there exist a subalgebra $\mathfrak{A}_0$ of $\mathfrak{A}$ whose support A_0 is one of the congruence classes of C. Then there exists a meet-homomorphism of $J(C)$ into $L\,T(\mathfrak{A}_0)$.*

Proof. Let $T \in J(C)$, let $\beta(T)$ be the restriction of T onto A_0. Then evidently $\beta(T) \in LT(\mathfrak{A}_0)$ and $\alpha(\beta(T)) \subseteq T$, where α is the join-homomorphism from the proof of Theorem 12. Let L_0 be the set of all elements of $LT(\mathfrak{A}_0)$ which are images of elements of $J(C)$ in the mapping β. Evidently an element $T \in LT(\mathfrak{A}_0)$ is in L_0 if and only if the restriction of $\alpha(T)$ onto A_0 is equal to T. Let $T_1 \in L_0$, $T_2 \in L_0$ and consider $T_1 \wedge T_2$.

For each $T \in J(C)$ the relation $\beta(T)$ is the intersection of T with the universal relation U_0 on A_0. Therefore $\beta(T_1 \wedge T_2) = T_1 \cap T_2 \cap U_0 = (T_1 \cap U_0) \cap (T_2 \cap \cap U_0) = \beta(T_1) \wedge \beta(T_2)$. Thus the mapping β is a meet-homomorphism of $J(C)$ onto L_0, this means into $LT(\mathfrak{A}_0)$.

3. COMPACTNESS ON THE LATTICE $LT(\mathfrak{A})$

Definition 3. An element c of a complete lattice L is called compact, if for each subset M of L such that $c \leqq \bigvee_{x \in M} x$ there exists a finite subset N of M such that $c \leqq \bigvee_{x \in N} x$. A lattice L is called compactly generated, if each element of the lattice L is a join of compact elements.

This definition is from [11], p. 65, § 25.

Definition 4. Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ be an algebra, $a \in A$, $b \in A$. By the symbol T_{ab} we denote the least (with respect to the lattice ordering) tolerance from $LT(\mathfrak{A})$ for which $a \, T_{ab} \, b$ holds.

The correctness of this definition follows from Theorem 5.

Theorem 13. *The tolerance T_{ab} is a compact element of the lattice $LT(\mathfrak{A})$ for each $a \in A$, $b \in A$, where A is the support of the algebra $\mathfrak{A}$.*

Proof. Let $T_\gamma \in LT(\mathfrak{A})$ for $\gamma \in \Gamma$, where Γ is a subscript set and $T_{ab} \subseteq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma$. Then $a \, T_{ab} \, b$ implies $a \, (\bigvee_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma) \, b$. By Theorem 2 there exist elements $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ of A, elements $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ of Γ and a polynomial $p(x_1, \ldots, x_n)$ on $\mathfrak{A}$ such that $p(a_1, \ldots, a_n) = a$, $p(b_1, \ldots, b_n) = b$ and $a_i \, T_{\gamma_i} \, b_i$ for $i = 1, \ldots, n$. Therefore also $a \, (\bigvee_{i=1}^{n} T_{\gamma_i}) \, b$. As T_{ab} is the least tolerance in $LT(\mathfrak{A})$ fulfilling $a \, T_{ab} \, b$, we have $T_{ab} \subseteq \bigvee_{i=1}^{n} T_{\gamma_i}$.

Instead of $a \, T \, b$ we shall sometimes write $(a, b) \in T$.

Theorem 14. *Let $T \in LT(\mathfrak{A})$ for an algebra $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$. Then $T = \bigvee_{(a,b) \in T} T_{ab}$.*

Proof. Let $T \in LT(\mathfrak{A})$, let $c \in A$, $d \in A$, $c \, T d$. By Theorem 14 we have $T_{cd} \in$

$\in LT(\mathfrak{A})$ and thus $c\, T_{cd}\, d$, which implies $c\,(\bigvee_{(a,b)\in T} T_{ab})\, d$; this means $T \subseteq \bigvee_{(a,b)\in T} T_{ab}$. Conversely, let $c\,(\bigvee_{(a,b)\in T} T_{ab})\, d$; then by Theorem 2 there exist elements $c_1, \ldots, c_n$, $d_1, \ldots, d_n$ of A and tolerances $T_i \in \{T_{ab};\, (a, b) \in T\}$ for $i = 1, \ldots, n$ so that $c_i\, T_i\, d_i$ and there exists a polynomial $p(x_1, \ldots, x_n)$ of the algebra $\mathfrak{A}$ so that $p(c_1, \ldots, c_n) = c$, $p(d_1, \ldots, d_n) = d$. As $T_i \in \{T_{ab};\, (a, b) \in T\}$, there exist elements $a(i)$, $b(i)$ of A such that $a(i)\, T\, b(i)$ and $T_i = T_{a(i)b(i)}$. Evidently $T_{ab} \subseteq T$ for each $a \in A$, $b \in A$, $a\, T\, b$, therefore $c_i\, T_i\, d_i$ implies $c_i\, T\, d_i$. The compatibility of T and Definition 1 imply $c = p(c_1, \ldots, c_n)\, T\, p(d_1, \ldots, d_n) = d$, therefore $\bigvee_{(a,b)\in T} T_{ab} \subseteq T$, which completes the proof.

Corollary 4. *The lattice $LT(\mathfrak{A})$ for every algebra $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F}\rangle$ is compactly generated.*

For an arbitrary $T \in LT(\mathfrak{A})$, Theorem 54 from [11] implies that the equality $T = \bigvee_{(a,b)\in T} T_{ab}$ holds. By Theorem 14 each tolerance T_{ab} is a compact element of $LT(\mathfrak{A})$, which implies the assertion.

Remark. This corollary is a generalization of an analogous theorem for lattices of congruences (see [3], Theorem 6).

4. ATOMICITY OF THE LATTICE $LT(\mathfrak{A})$

In [1] the following concept is introduced:

Definition 5. A lattice L is relatively atomic, if each interval of this lattice is an atomic sublattice of L.

In [1] it is proved that the lattice $K(\mathfrak{A})$ of all congruences on an algebra $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F}\rangle$ is relatively atomic (Theorem 67). The proof of this property is based on the fact that each congruence on $\mathfrak{A}$ determines a partition of A, which does not hold for tolerances in general. But for an idempotent algebra $\mathfrak{A}$, an analogous assertion holds on classes on A which need not be pairwise disjoint (thus they need not form a partition).

The following theorem shows that this property is sufficient for the validity of an analogous theorem for $LT(\mathfrak{A})$, if also the lattice of subalgebras of $\mathfrak{A}$ is relatively atomic.

Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F}\rangle$ be an algebra. By $\mathscr{P}(\mathfrak{A})$ we denote the set of all subalgebras of the algebra $\mathfrak{A}$. If $\bigcap_{\mathfrak{A}'\in\mathscr{P}(\mathfrak{A})} \mathfrak{A}' \neq \emptyset$, denote $\mathscr{S}(\mathfrak{A}) = \mathscr{P}(\mathfrak{A})$, in the opposite case denote $\mathscr{S}(\mathfrak{A}) = \mathscr{P}(\mathfrak{A}) \cup \{\emptyset\}$. Then we define the ordering on $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$ in the following way: If $\emptyset \in \mathscr{S}(\mathfrak{A})$, then $\emptyset \leqq \mathfrak{A}'$ for each $\mathfrak{A}' \in \mathscr{S}(\mathfrak{A})$. For each $\mathfrak{A}' \in \mathscr{S}(\mathfrak{A})$ and $\mathfrak{A}'' \in \mathscr{S}(\mathfrak{A})$ we have $\mathfrak{A}' \leqq \mathfrak{A}''$ if and only if $\mathfrak{A}'$ is a subalgebra of $\mathfrak{A}''$. In [2] it is proved that $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$ is a complete lattice with the least and the greatest element with respect to the ordering $\leqq$.

An algebra $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ will be called idempotent, if for each element $a \in A$ and each n-ary operation $f \in \mathscr{F}$ we have $f(a, \ldots, a) = a$.

Theorem 15. *Let $\mathfrak{A}$ be an idempotent algebra such that $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$ is a relatively atomic lattice. Then $LT(\mathfrak{A})$ is a relatively atomic (thus also atomic) lattice.*

Proof. Let $T_1 \in LT(\mathfrak{A})$, $T_2 \in LT(\mathfrak{A})$, $T_1 \subset T_2$, $T_1 \neq T_2$. For the sake of simplicity of this proof we shall not distinguish an algebra from its support. According to Theorems 3 and 4 in [10] there exists a system $\{\mathfrak{A}_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ of subalgebras of the algebra $\mathfrak{A}$ such that $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{A}_\gamma = \mathfrak{A}$ and $x\, T_1\, y$ if and only if there exists $\gamma \in \Gamma$ such that $x \in \mathfrak{A}_\gamma$, $y \in \mathfrak{A}_\gamma$. This system has the property that if f is an n-ary operation on $\mathfrak{A}$ and $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ are elements of Γ, then there exists $\gamma_0 \in \Gamma$ such that $x_i \in \mathfrak{A}_{\gamma_i}$ for $i = 1, \ldots, n$ implies $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A}_{\gamma_0}$. Analogously there exists a system $\{\mathfrak{A}_\mu, \mu \in M\}$ of subalgebras of $\mathfrak{A}$ such that $\bigcup_{\mu \in M} \mathfrak{A}_\mu = \mathfrak{A}$ and $x\, T_2\, y$ if and only if there exists $\mu \in M$ such that $x \in \mathfrak{A}_\mu$, $y \in \mathfrak{A}_\mu$. This system has a quite analogous property to the above mentioned property of $\{\mathfrak{A}_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$. As $T_1 \subset T_2$, to each $\gamma \in \Gamma$ there exists $\mu \in M$ such that $\mathfrak{A}_\gamma$ is a subalgebra of $\mathfrak{A}_\mu$. As $T_1 \neq T_2$, there exists at least one algebra $\mathfrak{A}_{\gamma_1}$ for $\gamma_1 \in \Gamma$ and at least one algebra $\mathfrak{A}_{\mu_1}$ for $\mu_1 \in M$ such that $\mathfrak{A}_{\gamma_1}$ is a proper subalgebra of $\mathfrak{A}_{\mu_1}$. As $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$ is relatively atomic, there exists a subalgebra $\mathfrak{B}$ of the algebra $\mathfrak{A}$ which covers A_{γ_1} in the interval $\langle \mathfrak{A}_{\gamma_1}, \mathfrak{A}_{\mu_1} \rangle$ of the lattice $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$. Now let us choose a system of algebras $\mathscr{X} = \{\mathfrak{A}_\gamma, \gamma \in \Gamma - \{\gamma_0\}\} \vee \{\mathfrak{B}\}$. This system is a covering of the algebra $\mathfrak{A}$ by subalgebras, therefore it induces a tolerance T_0 (this means $x\, T_0\, y$ if and only if either $x \in \mathfrak{B}$, $y \in \mathfrak{B}$, or there exists $\gamma \in \Gamma - \{\gamma_0\}$ such that $x \in \mathfrak{A}_\gamma$, $y \in \mathfrak{A}_\gamma$). Evidently T_0 covers T_1 in the interval $\langle T_1, T_2 \rangle$ in the lattice of all tolerances on $\mathfrak{A}$. If T_0 is a tolerance compatible with $\mathfrak{A}$, then $T_0 \in LT(\mathfrak{A})$ and T_0 covers T_1 also in the interval $\langle T_1, T_2 \rangle$ of the lattice $LT(\mathfrak{A})$. If T_0 is not compatible with $\mathfrak{A}$, then let $\mathscr{C}$ be the set of all tolerances T from $LT(\mathfrak{A})$ for which $T_0 \subseteq T \subseteq T_2$ holds. Evidently $\mathscr{C} \neq \emptyset$, because $T_2 \in \mathscr{C}$. As $LT(\mathfrak{A})$ is a complete lattice, $T' = \bigwedge_{T \in \mathscr{C}} T$ is again a tolerance compatible with $\mathfrak{A}$ and $T_0 \subseteq T'$, therefore $T_1 \neq T_2$ implies $T_1 \neq T'$ and there does not exist any compatible tolerance between T_1 and T'. Therefore T' covers T_1 in the lattice $LT(\mathfrak{A})$. We have proved that $LT(\mathfrak{A})$ is relatively atomic.

5. DISTRIBUTIVITY OF THE LATTICE $LT(\mathfrak{A})$

In the paper [4] it is proved that the lattice $\mathscr{K}(\mathfrak{L})$ of all congruences on a lattice $\mathfrak{L}$ is distributive and even that $\mathscr{K}(\mathfrak{L})$ is infinitely meet-distributive. For $LT(\mathfrak{L})$ an analogous assertion can be established in the case when $\mathfrak{L}$ is distributive. In this item we shall not distinguish an algebra from its support, as is usual in the lattice theory.

Lemma 1. *Let $\mathfrak{L}$ be a lattice, let $p(x_1, \ldots, x_n)$ be a lattice polynomial. Then for each $a \in \mathfrak{L}$ the equality $p(a, \ldots, a) = a$ holds.*

This follows from Lemma 6 in [6], page 33.

Lemma 2. *Let $\mathfrak{L}$ be a distributive lattice, let $p(x_1, \ldots, x_n)$ be a lattice polynomial. Then for arbitrary elements $a, a_1, \ldots, a_n$ of $\mathfrak{L}$ the following equalities hold:*

$$p(a_1, \ldots, a_n) \wedge a = p(a_1 \wedge a, \ldots, a_n \wedge a)\,,$$

$$p(a_1, \ldots, a_n) \vee a = p(a_1 \vee a, \ldots, a_n \vee a)\,.$$

This follows from Lemma 8 in [6], page 44.

Theorem 16. *Let $\mathfrak{L}$ be a distributive lattice. Then $LT(\mathfrak{L})$ is distributive and infinitely meet-distributive.*

Proof. By Theorem 28 in [11] it is sufficient to prove that $LT(\mathfrak{L})$ is infinitely meet-distributive. In every lattice the so-called distributive inequalities (see [1]) hold, by Theorem 1 the lattice $LT(\mathfrak{L})$ is complete, therefore the inclusion

$$T \wedge \bigvee_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma \supseteq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} (T \wedge T_\gamma)$$

holds for arbitrary T_γ and T from $LT(\mathfrak{L})$. We shall prove the converse inclusion. Let $a \in \mathfrak{L}$, $b \in \mathfrak{L}$ and $a\,(T \wedge \bigvee_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma)\,b$. Then by Theorem 1 we have $a\,T\,b$, $a\,(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma)\,b$ and by Theorem 2 there exist elements $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ of $\mathfrak{L}$, elements $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ of Γ and a lattice polynomial $p(x_1, \ldots, x_n)$ such that $p(a_1, \ldots, a_n) = a$, $p(b_1, \ldots, b_n) = b$ and $a_i\,T_{\gamma_i}\,b_i$ for $i = 1, \ldots, n$. Consider the elements y_i, z_i such that

(1) $$y_i = ((a \wedge b) \vee a_i) \wedge (a \vee b)\,,$$

$$z_i = ((a \wedge b) \vee b_i) \wedge (a \vee b)\,.$$

Evidently

(2) $$a \wedge b \leqq y_i \leqq a \vee b\,, \quad a \wedge b \leqq z_i \leqq a \vee b$$

for $i = 1, \ldots, n$. Further $T \in LT(\mathfrak{L})$, thus

(3) $$a\,T\,b \Rightarrow a \wedge b\,T\,a \vee b\,.$$

This follows for example from Theorem 1 in [9]. From the quoted theorem and from (3) we obtain

(4) $$y_i\,T\,z_i$$

for $i = 1, \ldots, n$. By Lemma 1 we have $p(y_1, \ldots, y_n) = ((p(a, \ldots, a) \wedge p(b, \ldots, b)) \vee p(a_1, \ldots, a_n)) \wedge (p(a, \ldots, a) \vee p(b, \ldots, b))$ which is equal (by Lemma 1) to

(5) $$p(y_1, \ldots, y_n) = ((a \wedge b) \vee a) \wedge (a \vee b) = a\,.$$

Analogously we can prove

(6) $$p(z_1, \ldots, z_n) = b\,.$$

The compatibility of the relations T_γ and (1) implies (by Lemma 2)

$$y_i \, T_{\gamma_i} \, z_i \tag{7}$$

for $i = 1, \ldots, n$, because $a_i \, T_{\gamma_i} \, b_i$. From (4) and (7) it follows that $y_i \, (\bigvee_{\gamma \in \Gamma} (T \wedge T_\gamma)) \, z_i$ and the property $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} (T \wedge T_\gamma) \in LT(\mathfrak{L})$ implies also

$$a = p(y_1, \ldots, y_n) \, (\bigvee_{\gamma \in \Gamma} (T \wedge T_\gamma)) \, p(z_1, \ldots, z_n) = b \, .$$

Therefore we have

$$T \wedge \bigvee_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma \subseteq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} (T \wedge T_\gamma) \, ,$$

which completes the proof.

6. TOLERANCES ON A SET

Let A be a non-empty set. In the paper [11] it is proved that the set of all equivalences on A is a complete relatively complemented semimodular atomic lattice. Let $\mathscr{T}(A)$ denote the set of all tolerances on the set A and let us investigate the structural properties of $\mathscr{T}(A)$. The following theorem shows that the structure of the lattice $\mathscr{T}(A)$ is much simpler than that of the lattice of all equivalences on A. This is a difference in comparison with the case of the lattices $LT(\mathfrak{A})$ and $\mathscr{K}(\mathfrak{A})$ of an algebra $\mathfrak{A}$.

Theorem 17. *Let A be a non-empty set. Then $\mathscr{T}(A)$ is a complete atomic Boolean algebra, the operation $\wedge$ is equal to the set intersection, the operation $\vee$ is equal to the set union.*

Proof. It is evident that if $T_\gamma \in \mathscr{T}(A)$ for each γ from a subscript set Γ, then $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma$ and $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma$ are again tolerances on A; thus $\vee$ is equal to the set union and $\wedge$ is equal to the set intersection. Further, the identity relation I (or the universal relation U) is the least (or greatest, respectively) element of $\mathscr{T}(A)$. The lattice $\mathscr{T}(A)$ is a sublattice of the lattice of all binary relations on the set A, i.e. of the lattice $\mathscr{P}(A \times A)$ of all subsets of the Cartesian product $A \times A$. But $\mathscr{P}(A \times A)$ is a complete Boolean algebra, the distributivity is a hereditary property, therefore $\mathscr{T}(A)$ is a complete distributive lattice with both the least and the greatest element. Let a, b be two distinct elements of A. By T_{ab} we denote the tolerance on A such that $x \, T y$ if and only if $x = y$, or $x = a$, $y = b$, or $x = b$, $y = a$. The tolerances T_{ab} for all pairs of distinct elements a, b of A are evidently atoms of $\mathscr{T}(A)$. If a tolerance on A is different from the identity relation, there exist at least two distinct elements a, b of A which are in this tolerance and thus this tolerance contains the atom T_{ab} of $\mathscr{T}(A)$. Therefore $\mathscr{T}(A)$ is atomic. It remains to prove the complementarity. Let $T \in \mathscr{T}(A)$. Then $T = I \cup S$, where S is a symmetric irreflexive binary relation. Evidently $U = I \cup S_U$, where S_U is the relation of inequality (this means that $a \, S_U \, b$ if and only if $a \in A$, $b \in A$, $a \neq b$). Denote $S' = S_U - S$. Evidently S' is again a symmetric irreflexive relation and thus $T' = I \cup S'$ is a tolerance on A. Then

$$T \cap T' = (I \cup S) \cap (I \cup S') = I \cup (S \cap S') = I \cup I = I\,,$$
$$T \cup T' = (I \cup S) \cup (I \cup S') = I \cup S \cup S' = I \cup S_U = U\,.$$

This means that T' is a complement to T, which completes the proof.

In [10] a τ-covering of a set M was defined as a covering $\mathfrak{M} = \{M_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ of M by subsets for which the following conditions hold:

(i) if $\gamma_0 \in \Gamma$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, then

$$M_{\gamma_0} \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} M_\gamma \Rightarrow \bigcap_{\gamma \in \Gamma_0} M_\gamma \subseteq M_{\gamma_0}\,,$$

(ii) if $N \subseteq M$ and N is contained in no set from $\mathfrak{M}$, then N contains a two-element subset with the same property.

In [10] it was proved that there is a one-to-one correspondence between tolerances on M and τ-coverings of M such that if a τ-covering $\mathfrak{M}_T$ corresponds to a tolerance T, then $\mathfrak{M}_T$ consists of the maximal subsets of M with the property that any two elements of such a subset are in the relation T. If T is an equivalence, then $\mathfrak{M}_T$ is the partition of M into equivalence classes of T.

Now let $\mathfrak{M}$ be a τ-covering of a set M, let $\mathfrak{P}$ be a partition of M. The partition $\mathfrak{P}$ will be called the partition hull of $\mathfrak{M}$, if $\mathfrak{P}$ is the least partition of M such that each set of $\mathfrak{M}$ is contained in a certain class of $\mathfrak{P}$.

If two sets of $\mathfrak{M}$ have a non-empty intersection, then they must be contained in the same class of $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$, where $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$ is the partition hull of $\mathfrak{M}$; otherwise $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$ would contain two distinct classes having a non-empty intersection, which is impossible. If $M_1, \ldots, M_n$ are sets of $\mathfrak{M}$ such that $M_i \cap M_{i+1} \neq \emptyset$ for $i = 1, \ldots, n-1$, then M_i and M_{i+1} are contained in the same class of $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$; as to each set of $\mathfrak{M}$ exactly one class of $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$ containing it can exist, all sets $M_1, \ldots, M_n$ are contained in the same class of $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$. Thus we may consider a tolerance $\mathcal{N}$ on $\mathfrak{M}$ such that $(M, M') \in \mathcal{N}$ if and only if $M \cap M' \neq \emptyset$. Let $\mathscr{C}(\mathcal{N})$ be the transitive hull of $\mathcal{N}$. Then the union of all sets belonging to a class of $\mathscr{C}(\mathcal{N})$ must be contained in a class of $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$. On the other hand, these unions form a partition of M with the property that each set of $\mathfrak{M}$ is contained in a certain class of this partition. Thus $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$ is a partition, each of whose classes is the union of all sets belonging to a certain equivalence class of $\mathscr{C}(\mathcal{N})$.

Theorem 18. *Let T be a tolerance on a set M, let $C(T)$ be its transitive hull. Let $\mathfrak{M}_T$ be the τ-covering of M corresponding to T, let $\mathfrak{P}$ be the partition of M into the equivalence classes of $C(T)$. Then $\mathfrak{P}$ is the partition hull of $\mathfrak{M}_T$.*

Proof. Let $a \in M$, $b \in M$, $a\, C(T)\, b$. This means that there exist elements $x_1, \ldots, x_n$ of M such that $x_1 = a$, $x_n = b$, $x_i T x_{i+1}$ for $i = 1, \ldots, n$. Then for each i from the numbers $1, \ldots, n-1$ there exists a set $M_i \in \mathfrak{M}_T$ such that $x_i \in M_i$, $x_{i+1} \in M_i$. We have $x_{i+1} \in M_i$, $x_{i+1} \in M_{i+1}$, thus $M_i \cap M_{i+1} \neq \emptyset$, which means $(M_i, M_{i+1}) \in \mathscr{N}$, where $\mathscr{N}$ is the tolerance on $\mathfrak{M}_T$ defined above, for $i = 1, \ldots, n - 1$. This means that $(M_1, M_n) \in \mathscr{C}(\mathscr{N})$ and the sets M_1, M_{n-1} are contained in the same class of the partition hull of $\mathfrak{M}_T$. As $a = x_1 \in M_1$, $b = x_n \in M_{n-1}$, the elements a, b are in the same class of the partition hull of $\mathfrak{M}_T$. As a and b were chosen arbitrarily, each equivalence class of $C(T)$ is contained in a class of the partition hull of $\mathfrak{M}_T$. Now let $c \in M$, $d \in M$ and let c and d be contained in the same class of the partition hull of $\mathfrak{M}_T$. Then there exist sets $M'_1, \ldots, M'_n$ of $\mathfrak{M}_T$ such that $c \in M'_1$, $d \in M'_n$ and $M'_i \cap M'_{i+1} \neq \emptyset$ for $i = 1, \ldots, n - 1$. For each i from the numbers $1, \ldots, n - 1$ we choose an element $y_i \in M'_i \cap M'_{i+1}$. We have $c\,T\,y_1$, $y_n\,T\,d$ and $y_i\,T\,y_{i+1}$ for $i = 1, \ldots, n - 1$. Thus $c\;C(T)\;d$. As c and d were chosen arbitrarily, each class of the partition hull of $\mathfrak{M}_T$ is contained in an equivalence class of $C(T)$. The assertion is proved.

References

[1] *G. Birkhoff:* Lattice Theory, Amer. Math. Soc. New York 1940.

[2] *G. Birkhoff:* On the structure of abstract algebras. Proc. Cambridge Phil. Soc. *31* (1935), 433—454.

[3] *G. Birkhoff* and *J. Frink:* Representation of lattices by sets. Trans. Amer. Math. Soc. *64* (1948), 299—316.

[4] *N. Funayama* and *T. Nakayama:* On the distributivity of a lattice of lattice-congruences. Proc. Imp. Acad. Tokyo *18* (1942), 553—554.

[5] *G. Grätzer:* Universal Algebra, Van Nostrand Co., London 1968.

[6] *G. Grätzer:* Lattice Theory First Concepts and Distributive Lattices, Freeman and Co., San Francisco 1971.

[7] *I. Chajda* and *B. Zelinka:* Tolerance relations on lattices. Čas. pěstov. mat. *99* (1974), 394—399.

[8] *I. Chajda* and *B. Zelinka:* Compatible relations on algebras. Čas. pěstov. mat. *100* (1975), 355—360.

[9] *I. Chajda* and *B. Zelinka:* Weakly associative lattices and tolerance relations. Czech. Math. J. *26* (1976), 259—269.

[10] *I. Chajda, J. Niederle* and *B. Zelinka:* On existence conditions for compatible tolerances, Czech. Math. J. *26* (1976), 304—311.

[11] *G. Szász:* Introduction to Lattice Theory. Akadémiai Kiadó Budapest 1963.

[12] *E. C. Zeeman:* The topology of the brain and visual perception. In: The Topology of 3-Manifolds, ed. by M. K. Fort, pp. 240—256.

[13] *B. Zelinka:* Tolerance graphs. Comment. Math. Univ. Carol. *9* (1968), 121—131.

[14] *B. Zelinka:* Tolerance in algebraic structures. Czech. Math. J. *20* (1970), 179—183.

[15] *B. Zelinka:* Tolerance in algebraic structures II. Czech. Math. J. *25* (1975), 175—178.

Authors' addresses: I. Chajda, 750 00 Přerov, Tř. Lidových milicí 290; B. Zelinka, 461 17 Liberec, Komenského 2 (Katedra matematiky a deskriptivní geometrie VŠST).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

EXCEPTIONAL VALUES OF LINEAR COMBINATIONS OF THE DERIVATIVES OF A MEROMORPHIC FUNCTION

H. S. GOPALAKRISHNA and SUBHAS S. BHOOSNURMATH*), Dharwar

(Received April 16, 1975)

We denote by C the set of all finite complex numbers and by $\bar{C}$ the extended complex plane consisting of all (finite) complex numbers and ∞. By a meromorphic function we shall always mean a transcendental meromorphic function in the plane. We use the usual notations of the Nevanlinna theory of meromorphic functions as explained in [2] and [4].

If f is a meromorphic function we denote by $S(r, f)$ any quantity satisfying

$$\int_{r_0}^{r} \frac{S(x, f)}{x^{1+\lambda}} \, dx = O\left(\int_{r_0}^{r} \frac{\log T(x, f)}{x^{1+\lambda}}\right) \tag{1}$$

as $r \to \infty$, whenever $\lambda > 0$ and

$$S(r, f) = o(T(r, f)) \tag{2}$$

as $r \to \infty$, through all values if f is of finite order and outside a set of finite linear measure if f is of infinite order.

If f is a meromorphic function, then we have the following fundamental results of NEVANLINNA [3, page 63].

$$m(r, f'/f) = S(r, f)$$

and

$$(q - 2)\, T(r, f) \leqq \sum_{i=1}^{q} N(r, a_i, f) - N_1(r) + S(r, f)$$

whenever $a_1, \ldots, a_q$ are distinct elements of $\bar{C}$, where

$$N_1(r) = 2\, N(r, f) - N(r, f') + N(r, 1/f') .$$

Generalisations and extensions of these results have been obtained by MILLOUX, HAYMAN and others and most of them are found in [2]. In [2], Hayman denotes

*) Research of the second author is supported by the Department of Atomic Energy, Bombay.

by $S(r,f)$ any quantity satisfying (2) above. However, since all the results are obtained from the fundamental results of Nevanlinna it is easy to see that the theorems in [2] are valid with $S(r,f)$ satisfying (1) and (2) also.

In particular, we have [2, Theorem 3.1], for a meromorphic function f,

$$m(r, f^{(k)}/f) \doteq S(r,f) \tag{3}$$

for each integer $k \geqq 1$.

If f is a meromorphic function of order ϱ, $0 \leqq \varrho \leqq \infty$ and $a \in \bar{C}$, we define

$$\varrho(a,f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ n(r,a,f)}{\log r} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ N(r,a,f)}{\log r},$$

$$\bar{\varrho}(a,f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ \bar{n}(r,a,f)}{\log r} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ \bar{N}(r,a,f)}{\log r}$$

and we call a

(i) an evB (exceptional value in the sense of Borel) for f if $\varrho(a,f) < \varrho$,

(ii) an evB for f for distinct zeros if $\bar{\varrho}(a,f) < \varrho$, and

(iii) an evP (exceptional value in the sense of Picard) for f if f assumes the value a only a finite number of times or, equivalently, if $n(r,a,f) = O(1)$.

If $\varrho > 0$ and a is an evP for f then a is clearly an evB for f whereas if $\varrho = 0$ then, trivially, f has no evB in $\bar{C}$.

In [1] Hayman proved the following theorem [2, Theorem 3.5, Corollary].

Theorem A. *If f is a meromorphic function and m is a positive integer, then either f has no evP in C or $f^{(m)}$ has no evP in C except possibly zero.*

In this paper we extend this theorem to certain linear combinations in the successive derivatives of f.

We first prove the following lemma.

Lemma 1. *Let f be a meromorphic function and $\psi_f = a_1 f^{(1)} + \dots + a_{k-2} f^{(k-2)} + a_k f^{(k)}$ with $k \geqq 3$, where $a_1, \dots, a_{k-2}, a_k \in C$ and $a_k \neq 0$. If ψ_f is not a constant, then*

$$2\,N_1(r,f) \leqq \bar{N}(r,f) + \bar{N}(r, 1/(\psi_f - 1)) + \bar{N}_0(r, 1/\psi'_f) + S(r,f)\,, \tag{4}$$

where $N_1(r,f)$ is obtained by considering only the simple poles of f and in $\bar{N}_0(r, 1/\psi'_f)$ only distinct zeros of ψ'_f which are not zeros of $\psi_f - 1$ are to be considered.

Proof. Let

$$g(z) = \frac{\{\psi'_f(z)\}^{k+1}}{\{1 - \psi_f(z)\}^{k+2}}.$$

Let a be a simple pole of f. Then in a neighbourhood of a we have

$$f(z) = \frac{b}{z-a} + h(z)$$

where $b \in C$, $b \neq 0$ and $h(z)$ is analytic.

Thus,

$$1 - \psi_f(z) = 1 + \frac{(-1)^{k+1}\, k!\, a_k b}{(z-a)^{k+1}} - \sum_{i=1}^{k-2} \frac{(-1)^i\, i!\, a_i b}{(z-a)^{i+1}} - \phi(z)$$

where

$$\phi(z) = \sum_{i=1}^{k-2} a_i\, h^{(i)}(z) + a_k\, h^{(k)}(z)\,.$$

Hence,

$$1 - \psi_f(z) = \frac{1}{(z-a)^{k+1}} \{(-1)^{k+1}\, k!\, a_k b + (z-a)^2\, u(z)\}\,,$$

where

$$u(z) = (z-a)^{k-1}\,(1 - \phi(z)) - \sum_{i=1}^{k-2} (-1)^i\, i!\, a_i b (z-a)^{k-2-i}$$

is analytic.

Also,

$$\psi_f'(z) = \frac{1}{(z-a)^{k+2}} \{(-1)^{k+1}\,(k+1)!\, a_k b + (z-a)^2\, v(z)\}$$

where

$$v(z) = (z-a)^k\, \phi'(z) + \sum_{i=1}^{k-2} (-1)^{i+1}\,(i+1)!\, a_i b (z-a)^{k-2-i}$$

is analytic.

Therefore, in a neighbourhood of a,

(5)
$$g(z) = \frac{[(-1)^{k+1}\,(k+1)!\, a_k b + (z-a)^2\, v(z)]^{k+1}}{[(-1)^{k+1}\, k!\, a_k b + (z-a)^2\, u(z)]^{k+2}}\,.$$

Hence

$$g(a) = \frac{(-1)^{k+1}\,(k+1)^{k+1}}{k!\, a_k b} \neq 0\,, \quad \neq \infty\,.$$

Thus, a is neither a zero nor a pole of g.

On the other hand, it is easily verified from (5) that a is a zero of g'.

Hence $N_1(r, f) \leqq \bar{N}_0(r, 1/g')$, where, in $\bar{N}_0(r, 1/g')$ only distinct zeros of g' which are not zeros of g are to be considered.

Thus,

$$N_1(r, f) \leqq \bar{N}_0(r, 1/g') = \bar{N}(r, g/g') \leqq T(r, g/g') =$$
$$= T(r, g'/g) + O(1) = N(r, g'/g) + S(r, g)$$

Hence,

(6)
$$N_1(r, f) \leqq \bar{N}(r, g) + \bar{N}(r, 1/g) + S(r, g)\,.$$

Clearly zeros and poles of g can occur only at multiple poles of f or zeros of $\psi_f - 1$ or zeros of ψ'_f other than the zeros of $\psi_f - 1$.

Thus,

$$\overline{N}(r, g) + \overline{N}(r, 1/g) \leqq \overline{N}(r, f) - N_1(r, f) + \\ + \overline{N}(r, 1/(\psi_f - 1)) + \overline{N}_0(r, 1/\psi'_f) . \tag{7}$$

From (6) and (7) we obtain (4), since it is easy to see that $S(r, g) = S(r, \psi)$ and $S(r, \psi) = S(r, f)$.

Theorem 1. *Let f be a meromorphic function and ψ_f be as in Lemma 1. If ψ_f is not a constant, then*

$$T(r, f) < 3\, N(r, 1/f) + 4\, \overline{N}(r, 1/(\psi_f - 1)) + S(r, f) . \tag{8}$$

Proof. By [2, Theorem 3.2] we have

$$T(r, f) < \overline{N}(r, f) + N(r, 1/f) + \overline{N}(r, 1/(\psi_f - 1)) - \\ - N_0(r, 1/\psi'_f) + S(r, f) , \tag{9}$$

where in $N_0(r, 1/\psi'_f)$ only zeros of ψ'_f which are not zeros of $\psi_f - 1$ are to be considered.

Now

$$2\, \overline{N}(r, f) \leqq N(r, f) + N_1(r, f) \leqq T(r, f) + N_1(r, f)$$

Hence, from (4) and (9),

$$\overline{N}(r, f) < 2\, N(r, 1/f) + 3\, \overline{N}(r, 1/(\psi_f - 1)) - 2\, N_0(r, 1/\psi'_f) + \\ + \overline{N}_0(r, 1/\psi'_f) + S(r, f) .$$

Using this in (9) we obtain

$$T(r, f) < 3\, N(r, 1/f) + 4\, \overline{N}(r, 1/(\psi_f - 1)) - 3\, N_0(r, 1/\psi'_f) + \\ + \overline{N}_0(r, 1/\psi'_f) + S(r, f)$$

which yields (8) since $\overline{N}_0(r, 1/\psi'_f) \leqq N_0(r, 1/\psi'_f)$.

The following theorem is an extension of Theorem A of Hayman mentioned earlier.

Theorem 2. *Let f be a meromorphic function and $\psi_f = a_1 f^{(1)} + \ldots + a_{k-2} f^{(k-2)} + a_k f^{(k)}$ with $k \geqq 3$, where $a_1, \ldots, a_{k-2}$, $a_k \in C$ and $a_k \neq 0$. If ψ_f is not a constant then*

(i) *either f has no evP in C or ψ_f has no evP in C except possibly zero, and*

(ii) *either f has no evB in C or ψ_f has no evB for distinct zeros in C except possibly zero.*

Note. It is easy to see that the order of $\psi_f \leqq$ the order of f. When the order of ψ_f is positive, (ii) implies (i).

Proof. Let $w_1, w_2 \in C$ and $w_2 \neq 0$. Define F by

$$F(z) = \frac{f(z) - w_1}{w_2} .$$

Then $T(r, F) = T(r, f) + O(1)$ and $S(r, F) = S(r, f)$.

If ψ_F denotes $a_1 F^{(1)} + \ldots + a_{k-2} F^{(k-2)} + a_k F^{(k)}$, then $\psi_F = \psi_f / w_2$.

Applying Theorem 1 to F, we obtain

$$(10)\qquad T(r,f) = T(r,F) + O(1) < 3\,N(r,1/F) + 4\,\overline{N}(r,1/(\psi_F - 1)) + S(r,F) = \\ = 3\,N(r,1/(f - w_1)) + 4\,\overline{N}(r,1/(\psi_f - w_2)) + S(r,f)\,.$$

If $f - w_1$ and $\psi_f - w_2$ have both only a finite number of zeros it follows from (10) and (2) that

$$\{1 + o(1)\}\ T(r,f) = O(\log r)$$

as $r \to \infty$ outside a set of finite measure.

This implies that

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r,f)}{\log r} < \infty\,,$$

so that f is a rational function contrary to our hypothesis that f is transcendental. This proves (i).

On the other hand, if w_1 is an evB for f and w_2 is an evB for ψ_f for distinct zeros then we can choose a positive number $\lambda < \varrho$, where ϱ is the order of f, such that

$$N(r,1/(f - w_1)) = O(r^\lambda) \quad \text{and} \quad \overline{N}(r,1/(\psi_f - w_2)) = O(r^\lambda)\,.$$

Choosing μ such that $\lambda < \mu < \varrho$, we then have

$$(11)\qquad \int_{r_0}^{\infty} \frac{N(x,1/(f - w_1))}{x^{1+\mu}}\,dx < \infty \quad \text{and} \quad \int_{r_0}^{\infty} \frac{\overline{N}(x,1/(\psi_f - w_2))}{x^{1+\mu}}\,dx < \infty\,.$$

Also, by (1),

$$\int_{r_0}^{r} \frac{S(x,f)}{x^{1+\mu}}\,dx = o\left(\int_{r_0}^{r} \frac{T(x,f)}{x^{1+\mu}}\,dx\right).$$

Hence, by (10),

$$\{1 + o(1)\}\int_{r_0}^{r} \frac{T(x,f)}{x^{1+\mu}}\,dx \leqq 3\int_{r_0}^{r} \frac{N(x,1/(f - w_1))}{x^{1+\mu}}\,dx + 4\int_{r_0}^{r} \frac{\overline{N}(x,1/(\psi_f - w_2))}{x^{1+\mu}}\,dx\,,$$

whence it follows by (11) that

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{T(x,f)}{x^{1+\mu}}\,dx < \infty\,.$$

This implies that $\varrho =$ the order of $f \leqq \mu$, which is a contradiction. This proves (ii) and completes the proof of Theorem 2.

References

[1] *Hayman, W. K.:* Picard values of meromorphic functions and their derivatives, Ann. of Math., *70* (1959), 9–42.

[2] *Hayman, W. K.:* Meromorphic Functions, Oxford University Press, (1964).

[3] *Nevanlinna, R.:* Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris, (1929).

[4] *Singh, S. K.* and *Gopalakrishna, H. S.:* Exceptional values of meromorphic functions, Math. Ann. *191* (1971), 121–142.

Authors' address: Department of Mathematics, Karnatak University, Dharwar, India.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

THE EXISTENCE AND THE UNIQUENESS OF DISTRIBUTIONAL SOLUTIONS OF SOME SYSTEMS OF NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

JAN LIGĘZA, Katowice

(Received July 17, 1975)

1. INTRODUCTION

Let f_i $(i = 1, \ldots, n)$ be operations defined for every system of real functions $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ of locally bounded variation in the interval $(a, b) \subseteq R^1$. Moreover, let $f_i(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ be a measure in (a, b) (i.e. $f_i(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ is the first distributional derivative of a real function of locally bounded variation in (a, b)). In this paper we consider the following system of equations

$$(*) \qquad y_i'(t) = f_i(y_1(t), \ldots, y_n(t)) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

where the derivative is understood in the distributional sense. By a solution of the system $(*)$ we understand every system of real functions $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ of locally bounded variation in the interval (a, b), which satisfies equation $(*)$. This class will be denoted by $V^n_{(a,b)}$. We prove some theorems on the existence and the uniqueness of solutions of the system $(*)$. Our results generalize some theorems for linear and non-linear differential systems (see [6], [9], [10], [12], [13]). The sequential theory of distributions will be used (see [4]).

2. THE PRINCIPAL RESULTS

First we introduce some notations.

A sequence of smooth, non-negative functions $\{\delta_k(t)\}$ satisfying: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_k(t)\,\mathrm{d}t = 1$, $\delta_k(t) = \delta_k(-t)$, $\delta_k(t) = 0$ for $|t| \geqq \alpha_k$, where $\{\alpha_k\}$ is a sequence of positive numbers with $\alpha_k \to 0$ as $k \to \infty$ is called a δ-sequence.

We understand the product, the mean value and the modulus of distributions as generalized operations (see [2], [3], [4]).

One may prove that if P is a function of locally bounded variation in the interval (a, b), then for every $t_0 \in (a, b)$ the mean value $P^*(t_0)$ of P at the point t_0 exists and

$$P^*(t_0) = \frac{P(t_0+) + P(t_0-)}{2}, \tag{2.1}$$

where $P(t_0+)$ $(P(t_0-))$ denote the right (resp. left) hand side limits of the function P at the point t_0 (see [3]).

Let p be a measure defined in the interval (a, b) $((-\infty, \infty))$. Then we put

$$\int_c^d p(t)\,\mathrm{d}t = P^*(d) - P^*(c)\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{d\to\infty \\ c\to-\infty}} \int_c^d p(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{2.2}$$

where $P' = p$ and $c, d \in (a, b)$.

In the case when P is a function of locally bounded variation in the interval (a, b) and q is a measure (in (a, b)), then it has been proved in [11] that

$$\left|\int_c^d P(t)\, q(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqq \left|\int_c^d |P|\,(t)\,|q|\,(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqq \sup_{t\in[c,d]} |P|^*(t) \left|\int_c^d |q|\,(t)\,\mathrm{d}t\right|. \tag{2.3}$$

Now we shall introduce two hypotheses.

Hypothesis $\mathbf{H}_1$. 1. *Let f_i $(i = 1, \ldots, n)$ be operations defined for every system of functions $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ of locally bounded variation in R^1. Moreover, let $f_i(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ be measures in R^1.*

2. *There exist non-negative measures $L_{ij}(t)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ defined in R^1 such that for two arbitrary systems of functions $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ and $(\bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t))$ of locally bounded variation in R^1 we have*

$$|f_i(y_1(t), \ldots, y_n(t)) - f_i(\bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t))| \leqq \sum_{j=1}^{n} L_{ij}(t)\,|y_j(t) - \bar{y}_j(t)|\,, \tag{2.4}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} L_{ij}(t)\,\mathrm{d}t < 1\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f_i(t_1, \ldots, t_n)|\,\mathrm{d}t < \infty\,, \tag{2.5}$$

where $t_1, \ldots, t_n$ denote constant functions[1]*.*

Hypothesis $\mathbf{H}_2$. 1. *Let f_i $(i = 1, \ldots, n)$ be operations defined for every system of functions $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ of locally bounded variation in the interval $(a, b) \subseteq R^1$ and such that $f_i(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ is a measure.*

2. *There exist non-negative measures $L_{ij}(t)$ defined in the interval (a, b) such that for arbitrary two systems of functions $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ and $(\bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t))$ of locally bounded variation in the interval (a, b), inequality (2.4) holds.*

Example 1. Let $L(t)$ and $g(t)$ be measures defined in R^1 and such that $\int_{-\infty}^{\infty} |L|\,(t)\,\mathrm{d}t < 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} |g|\,(t)\,\mathrm{d}t < \infty$. Moreover, let h be a constant and let $y(t)$ be a function of locally bounded variation in R^1. Then it is not difficult to check that the operation f defined by

$$f(y(t)) = L(t)\frac{1}{1 + y^2(t + h)} + g(t) \tag{2.6}$$

satisfies the hypotheses H_1 and H_2.

---

[1]) The inequality between two distributions is understood as in [2].

Theorem 2.1. *Let hypothesis H_1 be fulfilled. Moreover, let h be a constant. Then the problem*

$$(2.7)\qquad \begin{cases} y_i'(t) = f_i(y_1(t+h), \dots, y_n(t+h)) \\ y_i^*(t_0) = y_i^0\,, \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

has exactly one bounded solution in the class $V^n_{(-\infty,\infty)}$.

Remark 1. We understand that two systems of functions from the class $V^n_{(a,b)}$ are equal, if they are equal in the distributional sense.

Remark 2. The assumptions (2.5) in Theorem 2.1 is essential. This can be observed from the following

Example 2.

$$(2.8)\qquad \begin{cases} y'(t) = 2\,\delta(t)\,y(t) \\ y^*(-1) = 0\,, \end{cases}$$

where δ denotes Dirac's delta distribution. In fact, let H denote Heaviside's function and let c denote a constant. From the equality

$$(2.9)\qquad H\delta = \tfrac{1}{2}\delta \quad (\text{see } [14])$$

it is not difficult to show that the distribution $y = cH$ is a solution of the problem (2.8).

Let all elements of the matrix $L = (L_{ij})$ $(i, j = 1, \dots, n)$ be measures defined in the interval $(a, b) \subseteq R^1$. We say that the matrix L has the property (P) in the interval (a, b) if for every $t_0 \in (a, b)$ there exists a number $\varepsilon > 0$ such that

$$(2.10)\qquad [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset (a, b) \quad \text{and} \quad \sum_{i,j=1}^{n} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} |L_{ij}|\,(t)\,\mathrm{d}t < 1\,.$$

It is easy to verify that every locally integrable function in the interval (a, b) has the property (P). There exists a matrix of measures, which has not the property (P). In fact, let us put $L(t) = 2\,\delta(t)$, $a = -\infty$, $b = \infty$ and $t_0 = 0$.

Theorem 2.2. *Let hypothesis H_2 be satisfied. Moreover, let the matrix $L = (L_{ij})$ have the property (P) in the interval (a, b). Then the problem*

$$(2.11)\qquad \begin{cases} y_i'(t) = f_i(y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ y_i^*(t_0) = y_i^0\,, \quad t_0 \in (a, b)\,, \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

has exactly one solution in the class $V^n_{(a,b)}$.

Remark 3. Let $\bar{f}_i(t, v_1, \dots, v_n)$ $(i = 1, \dots, n)$ be real functions defined in the set

$$\mathrm{D}\colon a < t < b\,, \quad -\infty < v_1, \dots, v_n < \infty\,.$$

Moreover, let us assume that:

1. The functions $\bar{f}_i(t, v_1, \dots, v_n)$ are measurable with respect to t for every system $(v_1, \dots, v_n)$.

2. The functions $\bar{f}_i(t, v_1, \ldots, v_n)$ are continuous with respect to $(v_1, \ldots, v_n)$ for every $t \in (a, b)$.
3. There exist non-negative, locally integrable functions (in the interval (a, b)) $L_{ij}(t)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ and $u(t)$ such that

$$|\bar{f}_i(t, v_1, \ldots, v_n) - \bar{f}_i(t, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)| \leqq \sum_{j=1}^{n} L_{ij}(t) \, |v_j - \bar{v}_j| \,, \tag{2.12}$$

$$|\bar{f}_i(t, 0, \ldots, 0)| \leqq u(t) \,. \tag{2.13}$$

Then the problem

$$\begin{cases} y_i'(t) = \bar{f}_i(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \\ y_i(t_0) = y_i^0 \,, \quad t_0 \in (a, b) \,, \quad i = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{2.14}$$

has exactly one solution in the Carathéodory sense in the interval (a, b) (see [5]). It is easy to verify that the right-hand side of the system (2.14) satisfies hypothesis H_2, too. Thus in this case Theorem 2.2 generalizes the classical Carathéodory's result.

Remark 4. Non-continuous solutions of ordinary differential equations have been considered either by means of integral equations with generalized Stieltjes integral (see [7], [8], [15], [16]) or by means of theory of distributions (see [6], [9], [10], [12], [13]). The distributional solutions of non-linear differential equations have not been sufficiently studied. In [6], [9] and [10] the authors give theorems on the distributional solutions of some linear differential equations, but the product of two distributions is understood more generally in our paper than by those authors. More precisely, the existence of the product of a measure and a continuous function or a function of locally bounded variation does not result in general from the definition given in [6]. Hence our results may be applied even to some types of linear differential equations in the case when the theorems from [6], [9] and [10] cannot be used.

3. PROOFS

Proof of Theorem 2.1. We shall apply the method of successive approximations. Thus we consider the sequence of functions $\{g_{i\nu}\}$ defined as follows

$$g_{i0}(t) = y_i^0 \,, \quad g_{i\nu}(t) = y_i^0 + \int_{t_0}^{t} f_i(g_{1\nu-1}(s + h), \ldots, g_{n\nu-1}(s + h)) \, ds \,, \tag{3.1}$$

$$i = 1, \ldots, n \,, \quad \nu = 1, 2, \ldots \,, \quad t \in R^1 \,.$$

We put

$$\tilde{L}_i = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} L_{ij}(t) \, dt \,, \quad M_i = \int_{-\infty}^{\infty} |f_i(y_1^0, \ldots, y_n^0)| \, dt \,. \tag{3.2}$$

In view of (2.3) and (2.4), we have

$$|g^*_{iv}(t) - g^*_{iv-1}(t)| \leqq M_i \bar{L}_i^{v-1} \quad \text{for every} \quad t \in (-\infty, \infty). \tag{3.3}$$

Hence we infer that the sequence of functions $\{g^*_{iv}(t)\}$ is uniformly convergent to a function $g_i \in V^1_{(-\infty,\infty)}$ as $v \to \infty$. In fact, the inequality (3.3) implies

$$|g_{iv}|^* (t) \leqq |y_i^0| + \frac{M_i}{1 - \bar{L}_i}. \tag{3.4}$$

Thus g_i is a bounded function in R^1. We consider a finite sequence of numbers $\{t_i\}$ such that $t_1 \leqq t_2 \leqq \ldots \leqq t_\iota$. Since

$$\sum_{r=1}^{\iota} |g^*_{iv}(t_r) - g^*_{iv}(t_{r-1})| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f_i(y_1^0, \ldots, y_n^0)| \, dt + \tag{3.5}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} L_{ij}(t) \, |g_{jv-1}(t + h) - y_j^0| \, dt \leqq M_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} L_{ij}(t) \left(|y_j^0| + \frac{M_j}{1 - \bar{L}_j} \right) dt + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} |y_j^0| \, L_{ij}(t) \, dt,$$

g_i is a function of locally bounded variation in R^1. Taking into account that by (3.3) the sequence of functions $\{g^*_{iv}(t)\}$ is uniformly convergent, we obtain

$$g_i(t_0+) = y_i^0 + \lim_{t \to t_0^+} \lim_{v \to \infty} (F^*_{iv}(t) - F^*_{iv}(t_0)) = \tag{3.6}$$

$$= y_i^0 + \lim_{v \to \infty} \lim_{t \to t_0^+} (F^*_{iv}(t) - F^*_{iv}(t_0)) = y_i^0 + \tfrac{1}{2} \lim_{v \to \infty} (F_{iv}(t_0+) - F_{iv}(t_0-)),$$

where $F'_{iv}(t) = f_i(g_{1v}(t + h), \ldots, g_{nv}(t + h))$. Similarly

$$g_i(t_0-) = y_i^0 + \lim_{t \to t_0^-} \lim_{v \to \infty} (F^*_{iv}(t) - F^*_{iv}(t_0)) = \tag{3.7}$$

$$= y_i^0 + \lim_{v \to \infty} \lim_{t \to t_0^-} (F^*_{iv}(t) - F^*_{iv}(t_0)) = y_i^0 - \tfrac{1}{2} \lim_{v \to \infty} (F_{iv}(t_0+) - F_{iv}(t_0-)).$$

Hence $g_i^*(t_0) = y_i^0$. Next, by (2.3) and (2.4) we conclude that

$$\left| \int_{t_0}^{t} [f_i(g_1(s + h), \ldots, g_n(s + h)) - f_i(g_{1v}(s + h), \ldots, g_{nv}(s + h))] \, ds \right| \leqq \tag{3.8}$$

$$\leqq \bar{L}_i \Big(\sum_{j=1}^{n} \sup_{t \in R^1} |g_j - g_{jv}|^* (t) \Big).$$

Thus the system of the functions $(g_1(t), \ldots, g_n(t))$ is a solution of the problem (2.7). It remains to prove the uniqueness of the solution. Let $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_n$ be bounded functions of locally bounded variation in R^1 such that $g_i^*(t_0) = y_i^0$, $(g_1(t), \ldots, g_n(t)) \neq (\bar{g}_1(t), \ldots, \bar{g}_n(t))$ $(i = 1, \ldots, n)$. Moreover, let the system of the functions $(\bar{g}_1(t), \ldots, \bar{g}_n(t))$ satisfy the system (2.7). Then the inequality (2.4) yields

$$K \leqq K \Big(\sum_{i,j=1} \int_{-\infty}^{\infty} L_{ij}(t) \, dt \Big), \tag{3.9}$$

where $K = \sum_{i=1}^{n} \sup_{t\in R^1} |g_i - \bar{g}_i|^* (t)$. The last inequality contradicts (2.5), which implies our assertion.

Proof of Theorem 2.2. Let (a_1, b_1) and (a_2, b_2) be two intervals such that $(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) \neq \emptyset$, $[a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \subset (a, b)$ and $\sum_{i,j=1}^{n} \int_{a_r}^{b_r} L_{ij}(t)\, dt < 1$ for $r = 1, 2$. Moreover, let $\beta > 0$ and $a_1 + \beta,\ b_1 - \beta \in (a_1, b_1)$, $a_2 + \beta,\ b_2 - \beta \in (a_2, b_2)$, $(a_1 + \beta,\ b_1 - \beta) \cap (a_2 + \beta,\ b_2 - \beta) \neq \emptyset$ and $t_0 \in (a_1 + \beta,\ b_1 - \beta)$. We consider the sequence $\{g_{iv}\}$ defined as follows

$$(3.10) \qquad g_{i0}(t) = y_i^0 , \quad g_{iv}(t) = y_i^0 + \int_{t_0}^{t} f_i(g_{1v-1}(s), \ldots, g_{nv-1}(s))\, ds ,$$
$$i = 1, \ldots, n , \quad v = 1, \ldots , \quad t \in (a, b) .$$

It is not difficult to verify that the sequence of functions $\{g_{iv}^*(t)\}$ is uniformly convergent to a function g_i $(i = 1, \ldots, n)$ of bounded variation in the interval $[a_1 + \beta,\ b_1 - \beta]$. Moreover, the system of functions $(g_1(t), \ldots, g_n(t))$ is the unique solution of the problem (2.11) in the class $V^n_{(a_1+\beta, b_1-\beta)}$. Applying the property (P) we can extend uniquely the local solution to the whole interval (a, b), which completes the proof of Theorem 2.2.

References

[1] *P. Antosik:* Order with respect to measure and its application in investigation of product generalized function (in Russian), Studia Math., *26* (1966), 247—261.

[2] *P. Antosik:* On the modulus of distribution, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. math. astr. et phys. *15* (1967), 717—722.

[3] *P. Antosik:* The symetric value of a distribution at a point, Proceedings of the Scientific Research Centre at Zabrze, Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warsaw 1973.

[4] *P. Antosik, J. Mikusiński, R. Sikorski:* Theory of distributions. The sequential approach, Amsterdam—Warsaw 1973.

[5] *E. A. Coddington, N. Levinson:* Theory of ordinary differential equations, New—York—Toronto—London 1955.

[6] *V. Doležal:* Dynamics of linear systems, Praha 1964.

[7] *T. H. Hildebrandt:* On systems of linear differentio - Stieltjes integral equations, Illinois J. Math., *3* (1959), 352—373.

[8] *J. Kurzweil:* Generalized ordinary differential equations, Czech. Math. J., *8* (*83*) (1958), 360—389.

[9] *J. Kurzweil:* Linear differential equations with distributions as coefficients, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. math. astr. et phys., *7* (1959), 557—560.

[10] *A. Lasota, J. Traple:* Nicoletti boundary value problem for systems of linear differential equations with distributional perturbations, Zeszyty Naukowe U.J., Prace Matematyczne, *15* (1971), 103—108.

[11] *J. Ligęza:* On generalized solutions of ordinary differential equations (in Polish), Doctoral dissertation, Biblioteka Główna Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach 1974.

[12] *J. Ligęza:* On generalized solutions of some systems of non-linear differential equation, Prace Matematyczne Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, *5* (1974), 25—31.
[13] *J. Ligęza:* Cauchy's problem for systems of linear differential equations with distributiona coefficients, Colloquium Math., *33* (1975), 295—303.
[14] *J. Ligęza:* On the existence of the product of a measure and a function of locally bounded variation, (to appear), Studia Math.
[15] *Š. Schwabik:* Verallgemeinerte lineare Differentialgleichungssysteme, Čas. pěst. mat. *96* (1971), 183—211.
[16] *Š. Schwabik, M. Tvrdý:* On the generalized linear ordinary differential equations, ibidem *2* (1973), 206—211.

Author's address: Mathematics Institute, Silesian University, 40 007 Katowice, Poland.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

ON DISTRIBUTIONAL SOLUTIONS OF SOME SYSTEMS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

JAN LIGĘZA, Katowice

(Received July 17, 1975)

1. INTRODUCTION

Let $A(t) = (a_{ij}(t))$ be a matrix such that $a_{ij}(t)$ is a measure in the interval $(a, b) \subseteq \subseteq R^1$ for $i, j = 1, \ldots, n$, and let $f(t)$ be a vector whose all components $f_i(t)$ are also measures (defined in (a, b)). In this note we consider the system of equations

$$(*) \qquad y'(t) = A(t)\, y(t) + f(t)\,,$$

where y is an unknown vector. The derivative is understood in the distributional sense. Our result generalizes some theorems for linear differential equations (see [1], [2], [3], [6]).

2. THE PRINCIPAL RESULT

First we introduce some notations.

Let $A(t) = (a_{ij}(t))$ be a matrix whose all elements $a_{ij}(t)$ are measures defined in the interval (a, b) $(i, j = 1, \ldots, n)$, and let $\hat{A}(t) = (\hat{a}_{ij}(t))$ be a matrix whose all elements $\hat{a}_{ij}$ are functions such that $a_{ij} = [\hat{a}_{ij}]'$. We put $\Delta\, \hat{A}(t) = \hat{A}(t+) - \hat{A}(t-)$, $\|A\|\,(t) = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|\,(t)$, $y_0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0)$, $|y_0| = \sum_{i=1}^{n} |y_i^0|$, $y^*(t) = (y_1^*(t), \ldots, y_n^*(t))$, $|y|^*\,(t) = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^*\,(t)$, where $t \in (a, b)$, $\hat{A}(t+) = (\hat{a}_{ij}(t+))$, $\hat{A}(t-) = (\hat{a}_{ij}(t-))$ and $y_i^0 \in R^1$. The remaining notations in this paper are taken from [5].

Theorem 2.1. *We assume that $a_{ij}(t)$ and $f_i(t)$ are measures defined in the interval (a, b) for $i, j = 1, \ldots, n$. Moreover, for every $t \in (a, b)$*

$$(2.1) \qquad \det(2I - \Delta\, \hat{A}(t)) \neq 0 \quad \text{and} \quad \det(2I + \Delta\, \hat{A}(t)) \neq 0\,,$$

where I denotes the identity matrix. Then the problem

$$(2.2)\qquad \begin{cases} y'(t) = A(t)\,y(t) + f(t) \\ y^*(t_0) = y_0 \end{cases}$$

has exactly one solution in the class $V^n_{(a,b)}$ *for every* $t_0 \in (a, b)$.

Remark 1. The assumption 2.1 in Theorem 2.1 is essential. This can be observed from the following

Example .

$$(2.3)\qquad \begin{cases} y'(t) = 2\,\delta(t)\,y(t) \\ y^*(-1) = 0\,, \end{cases}$$

$$(2.4)\qquad \begin{cases} z'(t) = -2\,\delta(t)\,z(t) \\ z^*(1) = 0 \end{cases}$$

(δ denotes Dirac's delta distribution). In fact, let H denote Heaviside's function and let c be a constant. From the equality

$$(2.5)\qquad H\delta = \tfrac{1}{2}\delta \quad \text{(see [4])}$$

it is not difficult to show that the distributions $y = cH$ and $z = c(H - 1)$ are solutions of the problem (2.3) and (2.4), respectively.

3. PROOFS

Before giving the proof of Theorem 2.1 we shall prove some lemmas.

Lemma 3.1. *We assume that* $P_1, P_2 \in V^1_{(a,b)}$ *and* $\lim_{t\to r} P^*_1(t) = \lim_{t\to r} P^*_2(t)$. *Moreover, let*

$$(3.1)\qquad p_1(t) + c_1\,\delta(t - r) = p_2(t) + c_2\,\delta(t - r)\,,$$

where $P'_1 = p_1$, $P'_2 = p_2$, $r \in (a, b)$ *and* c_1, c_2 *are constants. Then* $c_1 = c_2$.

This fact follows easily from the equality

$$(3.2)\qquad \int_r^t p_1(s)\,ds + c_1\int_r^t \delta(s - r)\,ds = \int_r^t p_2(s)\,ds + c_2\int_r^t \delta(s - r)\,ds\,.$$

Lemma 3.2. *Let* $a_{ij}(t)$ *and* $f_i(t)$ *be measures defined in the interval* (a, b) $(i, j = 1, \ldots, n)$, $t_0 \in (a, b)$. *Then there exists a number* $r > 0$ *such that*:

1. $a < t_0 - r < t_0 + r < b$,
2. *the problem* (2.2) *has exactly one solution* $y(t)$ *in the class*

$$V^n_{(t_0-r,\,t_0+r)}\,,$$

3. *there exist finite limits* $\lim_{t\to t_0-r+} y^*(t)$, $\lim_{t\to t_0+r-} y^*(t)$.

Proof. If there exists a number $r > 0$ such that

$$\int_{t_0-r}^{t_0+r} \|A\| (t) \, \mathrm{d}t < 1 , \tag{3.3}$$

then in view of [5] the problem (2.2) has exactly one solution in the class $V^n_{(t_0-r,t_0+r)}$. In the opposite case we consider matrices $\hat{A}_1(t, t_0)$ and $\hat{A}_2(t, t_0)$ defined as follows:

$$\hat{A}_1(t, t_0) = \begin{cases} \hat{A}(t) , & \text{for} \quad a < t < t_0 \\ \hat{A}(t_0-) , & \text{for} \quad t_0 \leqq t < b , \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\hat{A}_2(t, t_0) = \begin{cases} \hat{A}(t_0+) , & \text{for} \quad a < t \leqq t_0 \\ \hat{A}(t) , & \text{for} \quad t_0 < t < b . \end{cases} \tag{3.5}$$

Hence, we have

$$\hat{A}(t) = \hat{A}_1(t, t_0) + \hat{A}_2(t, t_0) - H(t - t_0) \hat{A}(t_0-) - H(t_0 - t) \hat{A}(t_0+) \tag{3.6}$$

and

$$y'(t) = U(t, t_0) \, y(t) + \delta(t - t_0) \left(\Delta \hat{A}(t_0)\right) y^*(t_0) + f(t) , \tag{3.7}$$

where $U(t, t_0) = A_1(t, t_0) + A_2(t, t_0)$, $A_1(t, t_0) = (\hat{A}_1(t, t_0))'$ and $A_2(t, t_0) = (\hat{A}_2(t, t_0))'$. Moreover, there exists a number $r_1 > 0$ such that

$$\int_{t_0-r_1}^{t_0+r_1} \|U\| (t, t_0) \, \mathrm{d}t < 1 . \tag{3.8}$$

Taking into account [5], we infer that the system (2.2) has exactly one solution $y(t)$ in the class V^n_I, where $I = (t_0 - r_1, t_0 + r_1)$. We claim that $\sup_{t \in I} |y|^* (t) < \infty$. Indeed, let us put

$$\tilde{f} = \delta(t - t_0) \left(\Delta \hat{A}(t_0)\right) y^*(t_0) + f , \quad K = 1 - \int_{t_0-r_1}^{t_0+r_1} \|U\| (t, t_0) \, \mathrm{d}t , \tag{3.9}$$

$$M_i = \left| \int_{t_0-r_1}^{t_0+r_1} \tilde{f}_i(t) \, \mathrm{d}t \right| , \quad M = \sum_{i=1}^{n} M_i , \quad \varepsilon > 0 , \quad J = [t_0 - r_1 + \varepsilon, \, t_0 + r_1 - \varepsilon]$$

$$(a < t_0 - r_1 + \varepsilon < t_0 + r_1 - \varepsilon < b) .$$

Then the relation (2.2) and [5] imply

$$\sup_{t \in J} |y|^* (t) \leqq |y_0| + \sup_{t \in J} |y|^* (t) \int_J \|U\| (t, t_0) \, \mathrm{d}t + M \tag{3.10}$$

and

$$\sup_{t \in I} |y|^* (t) \leqq K^{-1}(|y_0| + M) . \tag{3.11}$$

Now we consider an arbitrary sequence $\{t_k\}$ such that $t_k \in I$ $(k = 1, 2, \ldots)$ and $t_k \to t_0 + r_1 -$. Using (2.2), [5] and (3.11), we have

(3.12) $$|y_i^*(t_k) - y_i^*(t_m)| \leqq \sup_{t\in I} |y|^* (t) \left|\int_{t_m}^{t_k} \|U\| (t, t_0) \, \mathrm{d}t\right| + \left|\int_{t_m}^{t_k} \tilde{f}_i(t) \, \mathrm{d}t\right| \leqq$$
$$\leqq K^{-1}(|y_0| + M)| Z^*(t_k) - Z^*(t_m)| + |G_i^*(t_k) - G_i^*(t_m)| ,$$
where $Z' = \|U\|$, $G_i' = \tilde{f}_i$ and $i = 1, \ldots, n$. Similarly we prove that there exists a finite limit $\lim_{t\to t_0 - r_1 +} y^*(t)$. Thus our assertion follows.

Lemma 3.3. *Let the assumptions of Theorem* 2.1 *be fulfilled and let $y(t)$ be a solution of the problem* (2.2) *in the class $V_{(a,b)}^n$. Then for every $t \in (a, b)$*

(3.13) $$y(t+) = (2I - \Delta\, \hat{A}(t))^{-1} \, [(2I + \Delta\, \hat{A}(t)) \, y(t-) + 2\Delta\, F(t)]$$

and

(3.14) $$y(t-) = (2I + \Delta\, \hat{A}(t))^{-1} \, [(2I - \Delta\, \hat{A}(t)) \, y(t+) - 2\Delta\, F(t)] ,$$

where $F' = f$ and $\Delta\, F(t) = F(t+) - F(t-)$.

Proof. Let $y(t)$ be a solution of the problem (2.2). We consider vectors $\tilde{y}(t)$ and $\bar{y}(t)$ defined as follows:

(3.15) $$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t) , & \text{for } \; a < t < t_1 \\ y(t_1-) , & \text{for } \; t_1 \leqq t < b , \end{cases}$$

(3.16) $$\bar{y}(t) = \begin{cases} y(t_1+) , & \text{for } \; a < t \leqq t_1 \\ y(t) , & \text{for } \; t_1 < t < b . \end{cases}$$

Then

(3.17) $$y(t) = \tilde{y}(t) + \bar{y}(t) - H(t - t_1) \, y(t_1-) - H(t_1 - t) \, y(t_1+)$$

and

(3.18) $$y'(t) = \tilde{y}'(t) + \bar{y}'(t) + \delta(t - t_1) \, (\Delta\, y(t_1)) .$$

On the other hand,

(3.19) $$y'(t) = U(t, t_1) \, y(t) + \delta(t - t_1) \, (\Delta\, \hat{A}(t_1)) \, y^*(t_1) + \tilde{f}(t) + \bar{f}(t) +$$
$$+ \delta(t - t_1) \, (\Delta\, F(t_1)) ,$$

where $\tilde{f} = \tilde{F}'$, $\bar{f} = \bar{F}'$ and

(3.20) $$\tilde{F}(t) = \begin{cases} F(t) , & \text{for } \; a < t < t_1 \\ F(t_1-) , & \text{for } \; t_1 \leqq t < b , \end{cases}$$

(3.21) $$\bar{F}(t) = \begin{cases} F(t_1+) , & \text{for } \; a < t \leqq t_1 \\ F(t) , & \text{for } \; t_1 < t < b . \end{cases}$$

Applying (3.17), (3.18), (3.19), (3.20) and (3.21), we obtain

$$(3.22) \qquad \tilde{y}'(t) + \bar{y}'(t) + \delta(t - t_1)(\Delta\, y(t_1)) = U(t, t_1)(\tilde{y}(t) + \bar{y}(t)) + $$
$$+ U(t, t_1)[-H(t - t_1)\, y(t_1 -) - H(t_1 - t)\, y(t_1 +)] +$$
$$+ \delta(t - t_1)(\Delta\, \hat{A}(t_1))\, y^*(t_1) + \tilde{f}(t) + \bar{f}(t) + \delta(t - t_1)(\Delta\, F(t_1)) .$$

Using Lemma 3.1 and (3.22), we infer that

$$(3.23) \qquad \Delta\, y(t_1) = (\Delta\, \hat{A}(t_1))\, y^*(t_1) + \Delta\, F(t_1) .$$

An application of condition (2.1) completes the proof of Lemma 3.3.

Proof of Theorem 2.1. We consider an arbitrary interval $[c, d]$ such that $c, d \in (a, b)$. Let $r_0 = \min(t_1 - a,\ b - t_1)$, where $t_1 \in [c, d]$. Then the properties of functions of locally bounded variation yield that the set of all points t_1 such that

$$(3.24) \qquad \int_{t_1 - r}^{t_1 + r} \|A\|\,(t)\, \mathrm{d}t > 1 ,$$

for every $0 < r < r_0$ is finite. Thus, applying (3.13), (3.14) and Lemma 3.2 we can extend uniquely the local solution in the whole interval (a, b) and this completes the proof of the theorem.

Remark 2. Let the assumptions of Theorem 2.1 be satisfied. Then by Lemma 3.3 and Theorem 2.1 it is not difficult to show that the system $(*)$ with the initial condition $y(t_0 +) = y_0$ $(y(t_0 -) = y_0)$ has exactly one solution in the class $V^n_{(a,b)}$.

References

[1] *V. Doležal:* Dynamics of linear systems, Praha 1964.

[2] *J. Kurzweil:* Linear differential equations with distributions as coefficients, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. math. astr. et phys., *7* (1959), 557—560.

[3] *A. Lasota, J. Traple:* Nicoletti boundary value problem for systems of linear differential equations with distributional perturbations, Zeszyty Naukowe U. J., Prace Matematyczne, *15* (1971), 103—108.

[4] *J. Ligęza:* On the existence of the product of a measure and a function of locally bounded variation, (to appear), Studia Math..

[5] *J. Ligęza:* The existence and the uniqueness of distributional solutions of some systems of non-linear differential equations, Čas. pěst. mat. *102* (1977), 30—36.

[6] *J. Ligęza:* Cauchy's problem for systems of linear differential equations with distributional coefficients, Colloquium Math., *33* (1975), 295—303.

Author's address: Mathematics Institute, Silesian University, 40 007 Katowice, Poland.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

ON A CLASS OF ARITHMETICAL SETS

H. G. MEIJER, Delft and TIBOR ŠALÁT, Bratislava

(Received August 8, 1975)

Infinite subsets of the set N of all natural numbers will be called arithmetical sets. In the paper [1] P. Erdös studied the arithmetical sets $A = \{a_1 < a_2 < \ldots\}$ with the property (P): If $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$ is an arbitrary finite sequence of indices, then $a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_s}$ does not belong to the set A. Denote by T^* the system of all arithmetical sets having the property (P).

Let k be a natural number, $k \geqq 2$. Denote by T_k the system of all arithmetical sets $A = \{a_1 < a_2 < \ldots\}$ with the following property (P_k): If $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ is an arbitrary sequence of indices with k terms, then the number $a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots$ $\ldots + a_{i_k}$ does not belong to the set A. Put $T_k^* = \bigcap_{j=2}^{k} T_j$ (for $k \geqq 2$) and $T = \bigcup_{j=2}^{\infty} T_j$. We have obviously

$$T^* = \bigcap_{k=2}^{\infty} T_k^* = \bigcap_{k=2}^{\infty} T_k \quad \text{and} \quad T_2^* \supset T_3^* \supset \ldots \supset T_k^* \supset T_{k+1}^* \supset \ldots .$$

It is clear that if $A \in T_k$ or $A \in T_k^*$ and B is an arithmetical set, $B \subset A$, then $B \in T_k$ and $B \in T_k^*$, respectively. Further, it is easy to check that

$$B_1 = \{1, 3, \ldots, 2k - 1, \ldots\} \in T_2 - T_3$$

and

$$B_2 = \{1, 2, 3, 10, 10^2, \ldots, 10^n, \ldots\} \in T_3 - T_2 .$$

Hence none of the inclusions $T_2 \subset T_3$, $T_3 \subset T_2$ is valid.

If

$$A \subset N = \{1, 2, \ldots\} ,$$

then we put

$$A(n) = \sum_{a \leqq n, a \in A} 1 , \quad \delta_1(A) = \liminf_{n \to \infty} \frac{A(n)}{n} , \quad \delta_2(A) = \limsup_{n \to \infty} \frac{A(n)}{n}$$

and $\delta(A) = \lim_{n \to \infty} (A(n)/n)$ (if the limit of the right-hand side exists). It is proved in [1] that the asymptotic density $\delta(A)$ of each arithmetical set A having the property (P) is zero.

With each set $A \subset N$ we can associate a real number $\varrho(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j 2^{-j}$, where $\varepsilon_j = 1$ if $j \in A$ and $\varepsilon_j = 0$ otherwise (see [2], p. 17). The number $\varrho(A)$ will be called the dyadic value of the set A. If S is a system of sets $A \subset N$, then $\varrho(S)$ denotes the set of all numbers $\varrho(A)$, $A \in S$. Obviously we have $\varrho(S) \subset \langle 0, 1 \rangle$ and $\varrho(S)$ provides a tool for measuring the size of the system S.

The purpose of this paper is to illustrate from both the metric and the topological point of view the structure of the systems T, T^*, T_k, T_k^* in terms of the just defined dyadic values of sets $A \subset N$.

1. METRIC PROPERTIES OF SETS $\varrho(T)$, $\varrho(T^*)$, $\varrho(T_k)$, $\varrho(T_k^*)$

In the following, we denote by $|M|$ and $|M|^*$ the Lebesgue measure and the outer Lebesgue measure of the set M, respectively, and by dim M the Hausdorff dimension of the set $M \subset (-\infty, +\infty)$.

We mention the following simple fact which is well-known in the theory of dyadic expansions of real numbers: If m is any natural number then the interval $(0, 1\rangle$ is a union of pairwise disjoint intervals of the form

$$I = \left(\frac{s}{2^m}, \frac{s+1}{2^m}\right\rangle \quad (0 \leqq s \leqq 2^m - 1).$$

Each interval I is associated with a sequence $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots, \varepsilon_m^0$ of numbers 0 and 1 in such a way that for the dyadic expansion $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x)\, 2^{-k}$ ($\varepsilon_k(x) = 0$ or 1 and for an infinite number of k's we have $\varepsilon_k(x) = 1$)) of any number x belonging to I the equalities $\varepsilon_k(x) = \varepsilon_k^0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ hold.

In the following, the interval $(0, 1\rangle$ is regarded as a metric space with the Euclidean metric.

The proof of the main part of the following theorem is based on this lemma.

Lemma 1,1. *Let a be a fixed natural number. Put*

$$H(a) = \{x \in (0, 1\rangle\, ;\ \forall_{j>a}\, \varepsilon_j(x)\, \varepsilon_{j+a}(x) = 0\}\,.$$

Then $|H(a)| = 0$.

Proof. Let $t \geqq 1$ be an arbitrary natural number. The set $H(a)$ is contained in the union of all such intervals

$$\left(\frac{s}{2^{(2t+1)a}}, \frac{s+1}{2^{(2t+1)a}}\right\rangle \quad (0 \leqq s \leqq 2^{(2t+1)a} - 1)$$

which are associated with the sequences

$$(1) \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{(2t+1)a}$$

of 0's and 1's having the following properties: each of the numbers $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_a$ is 0 or 1, and

$$(2) \qquad 0 = \varepsilon_{a+1} \cdot \varepsilon_{2a+1} = \varepsilon_{a+2} \cdot \varepsilon_{2a+2} = \ldots = \varepsilon_{2a} \cdot \varepsilon_{3a} =$$
$$= \varepsilon_{3a+1} \cdot \varepsilon_{4a+1} = \ldots = \varepsilon_{4a} \cdot \varepsilon_{5a} = \ldots = \varepsilon_{(2t-1)a+1} \cdot \varepsilon_{2ta+1} = \ldots$$
$$\ldots = \varepsilon_{2ta} \cdot \varepsilon_{(2t+1)a} .$$

It is easy to check that the number of sequences (1) satisfying (2) is $2^a \,.\, 3^{at}$. Therefore

$$|H(a)|^* \leqq \frac{2^a \,.\, 3^{at}}{2^{(2t+1)a}} = \left(\frac{3^a}{4^a}\right)^t .$$

Hence we conclude $|H(a)| = 0$ since t is arbitrarily large.

Theorem 1,1. *Each of the sets* $\varrho(T_k)\,(k = 2, 3, \ldots)$ *is a* G_δ*-set* (*in* $(0,1\rangle$) *and* $|\varrho(T_k)| = 0 \; (k = 2, 3, \ldots)$.

Corollary. $|\varrho(T)| = |\varrho(T^*)| = 0$, $|\varrho(T_k^*)| = 0 \; (k = 2, 3, \ldots)$.

Proof. Let $k \geqq 2$. Denote by I_m the union of all intervals

$$\left(\frac{s}{2^m}, \frac{s+1}{2^m}\right\rangle \quad (0 \leqq s \leqq 2^m - 1),$$

which are associated with such sequences $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ that if $1 = \varepsilon_{i_1} = \varepsilon_{i_2} = \ldots \ldots = \varepsilon_{i_k}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $i_1 + i_2 + \ldots + i_k \leqq m$, then $\varepsilon_{i_1 + i_2 + \ldots + i_k} = 0$. We shall prove that

$$(3) \qquad \varrho(T_k) = \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m .$$

If $x \in \varrho(T_k)$, then $x = \varrho(A)$, $A \in T_k$, $x = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j(x)\, 2^{-j}$ (the dyadic expansion of x). It follows from the definition of the system T_k that $\varepsilon_{i_1 + i_2 + \ldots + i_k}(x) = 0$, $i_1 < i_2 < \ldots \ldots < i_k$ if $\varepsilon_{i_l}(x) = 1$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$. Therefore $x \in I_m$ for each $m = 1, 2, \ldots$.

Let $x \in (0, 1\rangle$, $x = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j(x)\, 2^{-j}$, $x \notin \varrho(T_k)$. Denote U the system of all arithmetical sets. Then $\varrho(U) = (0, 1\rangle$ and $\varrho : U \to (0, 1\rangle$ is a one-to-one mapping (cf. [2], p. 18). Hence $(0, 1\rangle = \varrho(T_k) \cup \varrho(U - T_k)$, the sets on the right-hand side being disjoint. Hence $x \in \varrho(U - T_k)$, $x = \varrho(A)$, $A \in U - T_k$. Since $A \notin T_k$, there exists such a sequence $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ of natural numbers that $\varepsilon_{i_l}(x) = 1$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$ and $\varepsilon_{i_1 + i_2 + \ldots + i_k}(x) = 1$. Hence $x \notin I_p$, where $p = i_1 + i_2 + \ldots + i_k$, therefore $x \notin \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$. The equality (3) is proved.

From (3) it follows immediately that $\varrho(T_k)$ is a G_δ-set in $(0, 1\rangle$.

Let $k \geqq 2$, let

(4) $$a_1^0 < a_2^0 < \ldots < a_{k-1}^0$$

be a sequence of natural numbers. Denote by $T_k(a_1^0, \ldots, a_{k-1}^0)$ the system of all sets $A \in T_k$ of the form

$$A = \{a_1^0 < a_2^0 < \ldots < a_{k-1}^0 < a_k < a_{k+1} < \ldots\}.$$

Then

$$\varrho(T_k) = \bigcap \varrho(T_k(a_1^0, \ldots, a_{k-1}^0)),$$

the union on the right-hand side being taken over all finite sequences of the form (4). Hence it suffices to prove that

(5) $$|\varrho(T_k(a_1^0, \ldots, a_{k-1}^0))| = 0$$

for each sequence (4).

In the notation used in Lemma 1,1 we have obviously

$$\varrho(T_k(a_1^0, \ldots, a_{k-1}^0)) \subset H(a),$$

where $a = a_1^0 + \ldots + a_{k-1}^0$. Hence (5) follows from Lemma 1,1. The proof of Theorem 1,1 is complete.

The proof of the following lemma is based on an idea from [1]. The lemma will be useful in the proof of Theorem 1,2.

Lemma 1,2. *If $A \in T_m^*$ $(m \geqq 2)$, then $\delta_2(A) \leqq 1/m$. Moreover, there is an $A \in T_m^*$ such that $\delta(A) = 1/m$.*

Proof. Let $A = \{a_1 < a_2 < \ldots\} \in T_m^*$. Since $A \in T_m^*$ $(m \geqq 2)$, the elements of the sets $P_1, P_2, \ldots, P_m$ do not belong to the set A, where

$$\begin{aligned} P_1 &= \{a_1 + a_2,\ a_1 + a_3,\ \ldots,\ a_1 + a_j,\ \ldots\}, \\ P_2 &= \{(a_1 + a_2) + a_3,\ (a_1 + a_2) + a_4,\ \ldots,\ (a_1 + a_2) + a_j,\ \ldots\}, \\ &\vdots \\ P_m &= \{(a_1 + \ldots + a_m) + a_{m+1},\ (a_1 + \ldots + a_m) + a_{m+2},\ \ldots \\ &\quad \ldots,\ (a_1 + \ldots + a_m) + a_{m+j},\ \ldots\}. \end{aligned}$$

The sets $P_1, P_2, \ldots, P_m$ are pairwise disjoint. Indeed, if $P_i \cap P_l \neq \emptyset$ for $i \neq l$, $i, l \leqq m$, then there exist such numbers s, d, $s \geqq i + 1$, $d \geqq l + 1$ that

$$(a_1 + \ldots + a_i) + a_s = (a_1 + \ldots + a_l) + a_d.$$

Let $i < l$. Then

(6) $$a_s = a_{i+1} + \ldots + a_l + a_d$$

and the number of summands on the right-hand side of (6) is equal to $l - i + 1 \leqq m$. Hence (6) contradicts the assumption $A \in T_m^*$.

Let $n > a_1 + \ldots + a_m + m$. The number of elements of the set P_1 lying in the interval $\langle 1, n \rangle$ is obviously equal to $A(n - a_1) - 1$, similarly the number of elements of the set P_2 lying in that interval is equal to $A(n - (a_1 + a_2)) - 2$, etc. Since the sets P_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ are pairwise disjoint, we obtain

$$(7) \qquad (A(n - a_1) - 1) + (A(n - (a_1 + a_2)) - 2) + \ldots \\ + (A(n - (a_1 + \ldots + a_m)) - m) \leqq n\,.$$

A simple estimation yields

$$(8) \qquad \begin{aligned} A(n - a_1) &\geqq A(n) - a_1\,, \\ A(n - (a_1 + a_2)) &\geqq A(n) - (a_1 + a_2)\,, \\ &\vdots \\ A(n - (a_1 + \ldots + a_m)) &\geqq A(n) - (a_1 + \ldots + a_m)\,. \end{aligned}$$

From (7), (8) we get

$$\frac{A(n)}{n} \leqq \frac{b_m + c_m}{nm} + \frac{1}{m}\,,$$

where

$$b_m = \frac{m(m + 1)}{2}\,, \quad c_m = a_1 + (a_1 + a_2) + \ldots + (a_1 + \ldots + a_m)\,.$$

The inequality $\delta_2(A) \leqq 1/m$ follows now immediately.

Further, the set $A = \{1, m + 1, 2m + 1, \ldots, jm + 1, \ldots\}$ belongs to the system T_m^* and $\delta(A) = 1/m$. The proof is complete.

Since $|\varrho(T^*)| = 0$, $|\varrho(T_k^*)| = 0$ $(k = 2, 3, \ldots)$ the question of the Hausdorff dimension of the sets $\varrho(T^*)$, $\varrho(T_k^*)$ $(k \geqq 2)$ arises. In what follows we give upper and lower estimates for $\dim \varrho(T_k^*)$ and the precise value of $\dim \varrho(T^*)$.

Denote by d the function defined on the interval $\langle 0, 1\rangle$ in the following way: $d(0) = d(1) = 0$ and

$$d(\zeta) = \frac{\zeta \log \zeta + (1 - \zeta) \log (1 - \zeta)}{\log \frac{1}{2}}$$

for $\zeta \in (0, 1)$.

It is easy to see that

$$(9) \qquad \lim_{\zeta \to 0+} d(\zeta) = 0\,.$$

Theorem 1,2. (i) For each $k \geqq 2$, the inequality $\dim \varrho(T_k^*) \geqq 1/k$ holds.

(ii) For each $k \geqq 2$, the inequality $\dim \varrho(T_k^*) \leqq d(1/k)$ holds.

(iii) $\dim \varrho(T^*) = 0$.

Remark. The estimate for $k = 2$ in (ii) is trivial since $d(\frac{1}{2}) = 1$.

Proof. (i) Put (for $k \geqq 2$)

$$C_k = \{1,\ k + 1,\ 2\,.\,k + 1,\ \ldots,\ lk + 1,\ \ldots\}\,.$$

Evidently $C_k \in T_k^*$. Denote by S_k the system of all arithmetical sets which are subsets of the set C_k. Then $S_k \subset T_k^*$ and so

$$\varrho(S_k) \subset \varrho(T_k^*)\,. \tag{10}$$

Denote by 2^{C_k} the system of all subsets of the set C_k. Then it is easy to see that the set $\varrho(2^{C_k}) - \varrho(S_k)$ is countable, hence

$$\dim \varrho(2^{C_k}) = \dim \varrho(S_k)\,. \tag{11}$$

But $\varrho(2^{C_k})$ is equal to the set of all such real numbers $x = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \,.\, 2^{-j}$ that $\varepsilon_j = 0$ for $j \neq lk + 1$ $(l = 0, 1, \ldots)$ and $\varepsilon_{lk+1} = 0$ or 1 $(l = 0, 1, \ldots)$.

The Hausdorff dimension of the set $\varrho(2^{C_k})$ can be established by virtue of Theorem 2,7 from [3]. The following special result is a consequence of this theorem:

Let P be a set of natural numbers, let $\{\varepsilon_j^0\}$, $j \in P$ be a sequence of numbers 0 and 1. Denote by

$$Z = Z(P; \{\varepsilon_j^0\}, j \in P)$$

the set of all such $x = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \,.\, 2^{-j}$ that $\varepsilon_j = \varepsilon_j^0$ for $j \in P$ and $\varepsilon_j = 0$ or 1 for $j \in N - P$.

Then

$$\dim Z = \liminf_{n \to \infty} \frac{\log \prod_{j \leqq n, j \in N - P} 2}{n \log 2}\,.$$

Put $P = N - C_k$, $\varepsilon_j^0 = 0$ for $j \in P$. Then we get

$$\dim \varrho(2^{C_k}) = \liminf_{n \to \infty} \frac{\log \prod_{j \leqq n, j \in C_k} 2}{n \log 2} = \tag{12}$$

$$= \liminf_{n \to \infty} \frac{\log 2^{[(n-1)/k]}}{n \log 2} = \liminf_{n \to \infty} \frac{[(n-1)/k]}{n} = \frac{1}{k}\,.$$

($[u]$ denotes the integer which satisfies $[u] \leqq u < [u] + 1$). From (10), (11) and (12) we obtain $\dim \varrho(T_k^*) \geqq 1/k$.

(ii) Denote by Z_k the system of all arithmetical sets A with $\delta_2(A) \leqq 1/k$. Then on account of Lemma 1,2 we have $T_k^* \subset Z_k$. It is well-known that $\dim \varrho(Z_k) = d(1/k)$ (cf. [2], p. 195 or [5], Theorem 51). From these facts we get $\dim \varrho(T_k^*) \leqq d(1/k)$.

(iii) We shall give two proofs for (iii).

Proof I. Since $T^* \subset T_k^*$ $(k = 2, 3, \ldots)$ according to (ii) we have

$$\dim \varrho(T^*) \leqq d\left(\frac{1}{k}\right) \quad (k = 2, 3, \ldots)$$

and so (see (8))

$$\dim \varrho(T^*) \leqq \lim_{k \to \infty} d\left(\frac{1}{k}\right) = 0\,.$$

Proof II. Denote by W_0 the system of all arithmetical sets A with $\delta_1(A) = 0$. Then

$$\dim \varrho(W_0) = 0 \tag{13}$$

(see [2], p. 195). We have mentioned already that if $A \in T^*$, then $\delta(A) = 0$ (cf. [1]). Hence

$$T^* \subset W_0 . \tag{14}$$

From (13), (14) we get $\dim \varrho(T^*) = 0$. The proof is complete.

2. TOPOLOGICAL PROPERTIES OF SETS $\varrho(T_k)$, $\varrho(T_k^*)$, $\varrho(T)$, $\varrho(T^*)$

In this part of the paper we shall complete the first part by proving some further properties of the sets $\varrho(T_k)$, $\varrho(T_k^*)$, $\varrho(T)$, $\varrho(T^*)$. These sets are viewed as subsets of the metric space $(0, 1\rangle$ with the usual Euclidean metric.

It was already proved in the first part of the paper that the sets $\varrho(T_k)$ $(k \geqq 2)$ are G_δ-sets. This fact implies easily

Theorem 2,1. *The sets $\varrho(T^*)$, $\varrho(T_k^*)$ $(k \geqq 2)$ are G_δ-sets, $\varrho(T)$ is a $G_{\delta\sigma}$-set in $(0, 1\rangle$.*

Proof. Theorem 2,1 follows at once from Theorem 1,1 and from the equalities

$$\varrho(T_k^*) = \bigcap_{j=2}^{k} \varrho(T_j)\,, \quad \varrho(T^*) = \bigcap_{k=2}^{\infty} \varrho(T_k^*)\,, \quad \varrho(T) = \bigcup_{k=2}^{\infty} \varrho(T_k)\,. \tag{15}$$

Finally, we shall show that the sets studied in this part of the paper are poor from the topological point of view.

Theorem 2,2. (i) *The sets $\varrho(T^*)$, $\varrho(T_k^*)$, $\varrho(T_k)$ $(k \geqq 2)$ are nowhere-dense sets in $(0, 1\rangle$.*

(ii) *The set $\varrho(T)$ is a set of the first Baire category in $(0, 1\rangle$.*

Proof. Part (ii) follows from (i) in virtue of (15). Further,

$$\varrho(T^*) \subset \varrho(T_k^*) \subset \varrho(T_k) \quad (k = 2, 3, \ldots)\,,$$

hence it suffices to prove that $\varrho(T_k)$ $(k \geqq 2)$ is a nowhere-dense set in $(0, 1\rangle$.

Let $k \geqq 2$. On account of the well-known criterion of the nowhere-density of sets in metric spaces it is sufficient to prove that each open interval $I \subset (0, 1\rangle$ contains an interval J which is disjoint with the set $\varrho(T_k)$ (cf. [4], p. 74).

Let $I \subset (0, 1\rangle$ be an open interval. Choose a natural number m such that for a suitable s, $0 \leqq s \leqq 2^m - 1$, we have

$$I_1 = \left(\frac{s}{2^m}, \frac{s+1}{2^m}\right) \subset I\,.$$

Let I_1 be associated with the sequence $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots, \varepsilon_m^0$. Put

$$v = km + \frac{k(k+1)}{2}, \quad \varepsilon_{m+i}^0 = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Let

$$J = \left\langle \frac{l}{2^v}, \frac{l+1}{2^v} \right\rangle \quad (0 \leqq l \leqq 2^v - 1)$$

be an interval which is associated with the sequence $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots, \varepsilon_v^0$. Then obviously $J \subset I_1 \subset I$. If A is an arithmetical set such that $\varrho(A) \in J$, then

$$m + i \in A \ (i = 1, 2, \ldots, k), \quad \sum_{i=1}^{k} (m + i) = km + \frac{k(k+1)}{2} = v \in A$$

and hence $A \notin T_k$. Therefore $J \cap \varrho(T_k) = \emptyset$. This completes the proof.

Remark. Using the method of the proof of part (ii) of Theorem 2,2 we can show that also the set $H(a)$ (see Lemma 1,1) is a nowhere-dense set in $(0, 1\rangle$. The proof of this fact can be left to the reader.

References

[1] *P. Erdös:* Remarks on number theory III (Hungarian), Mat. Lap. *XII* (1962), 28—38.

[2] *H. H. Ostmann:* Additive Zahlentheorie I, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1956.

[3] *T. Šalát:* Über die Cantorschen Reihen, Czechosl. Math. J. *18 (93)*, (1968), 25—56.

[4] *G. F. Simmons:* Introduction to Topology and Modern Analysis, Mc Graw-Hill, New York—San Francisco—Toronto—London, 1963.

[5] *B. Volkmann:* Über Klassen von Mengen natürlicher Zahlen, J. rein. angew. Math. *190* (1952), 199—230.

Addresses of authors: H. G. Meijer, Technische Hogeschool, Delft, Netherlands, T. Šalát, 816 31 Bratislava, Mlynská dolina, Pavilón matematiky.

HARMONIC FUNCTIONS ON CONVEX SETS AND SINGLE LAYER POTENTIALS

EVA POKORNÁ, Praha

(Received December 2, 1975)

Introduction. Consider a domain G in the m-dimensional euclidean space R^m $(m > 2)$. A class of harmonic functions on G is formed by restricting Newtonian potentials associated with signed measures on ∂G. The problem that we are going to investigate here, can be formulated as follows: Given a harmonic function h on G, does there exist a signed measure μ with support in ∂G such that h coincides on G with the Newtonian potential of μ? If it were not the case, the question arises how to characterize the class $\mathscr{P}_m(G)$ consisting of all harmonic functions on $G \subset R^m$ which are representable by means of potentials mentioned above. This class of functions occurs in a natural way in connection with the Neumann and Robin problems treated by the method of integral equations.

An analogous question may be, of course, formulated also for plane domains. In this case Newtonian potentials are replaced by logarithmic potentials. In [3], Chap. IV, G. C. EVANS characterizes the system $\mathscr{P}_2(G)$ for $G = U_r$ where U_r denotes a circle with a radius r. His proof depends on the complex functions theory and Herglotz's theorem. The plane case is also investigated in [16]. DE LA VALLÉ POUSSIN gives in § 2, Chap. 9, sufficient conditions (see Théorème 260) for $h \in \mathscr{P}_2(U_r)$.

The results of Evans were extended by G. A. GARRETT in [4]. In addition to the above mentioned representation he investigated also a representation by means of double layer potentials. (Compare [15] where some other kinds of representations of harmonic functions in R^3 can be found as well.) In [4] the system $\mathscr{P}_3(G)$ is studied for G with a very smooth boundary (it is assumed that the normal satisfies a Lipschitz condition). In this connection a system of special sets $G_\alpha \subset G$ which exhaust G in an exactly determined sense is introduced and functions $h \in \mathscr{P}_3(G)$ are characterized in terms of a growth condition imposed on the total variation of the flow of grad h on G_α. To prove these facts, Garrett makes essential use of smoothness of the boundary in order to get information about the kernel of the corresponding integral equations.

Methods introduced in [4] are not applicable even for sets with boundaries of the class C^1. In particular, they give no results for such simple geometric bodies as cubes, cylindres, cones etc.

For an investigation of the above mentioned problem, it is convenient to apply methods developed for solving the boundary value problems in potential theory by J. KRÁL. We make essential use of the results connected with the Neumann problem obtained in [8], [13] and [14].

We shall prove a characterization of $\mathscr{P}_m(G)$ in the case that G is an open bounded *convex* set. The main result is presented by Theorem 10. The example given in Sec. 16 shows that there are "many" harmonic functions not contained in $\mathscr{P}_m(G)$.

The problem studied in this paper can be also understood as an inverse problem in potential theory. The case when $R^m \setminus G$ is a k-manifold is investigated in [2]. It should be noted here that a characterization of an essentially different type is given by I. N. KARCIVADZE (compare [7]).

1. Notation. Throughout this paper $m > 2$ will be a fixed integer. The closure of a set $M \subset R^m$ is denoted by $\overline{M}$, its boundary by ∂M and its interior by $\operatorname{int} M$. We shall write $\Omega_r(x)$ for $\{z \in R^m; |z - x| < r\}$. For each positive integer k and $M \subset R^m$, $H_k M$ will denote the outer Hausdorff k-dimensional measure on R^m defined by

$$H_k M = 2^{-k} \alpha_k \lim_{\varepsilon \to 0+} \inf \sum (\operatorname{diam} M_n)^k$$

where α_k is the volume of the unit k-ball and the infimum is taken over all sequences $\{M_n\}$ of sets M_n with $\bigcup\limits_n M_n = M$ such that $\operatorname{diam} M_n \leqq \varepsilon$ for all n. H_m thus coincides with the Lebesgue measure in R^m (see [9]). If K is a compact subset of R^m, we shall write $C = C(K)$ for the Banach space of all continuous functions on K. The dual space of C is denoted by $C' = C'(K)$; the elements of C' are called Radon measures on K. For a Radon measure $\nu \in C'$ and $f \in C$ we shall sometimes write $\int_K f \, d\nu$ instead of $\nu(f)$. If $A \subset K$ is measurable and χ_A is its characteristic function, then we write $\nu(A)$ instead of $\nu(\chi_A)$.

For $\nu \in C'$ we shall consider its potential

$$U\nu : x \mapsto \int_K p(x - y) \, d\nu(y)$$

corresponding to the Newtonian kernel $p(z) = |z|^{2-m}/(m - 2)$. For a positive super-harmonic function v and a set $A \subset R^m$, $\hat{R}_v^A$ will denote the balayage of v relative to A in R^m (for the definition see [5]).

2. Lemma. *Let G be a convex subset of R^m with a nonempty interior. Then for any $x_0 \in R^m$ there exists an m-dimensional density*

$$d_G(x_0) = \lim_{r \to 0+} \frac{H_m(\Omega_r(x_0) \cap G)}{H_m(\Omega_r(x_0))}$$

and $d_G(x_0) > 0$ for all $x_0 \in \overline{G}$.

Proof. Obviously, $d_G(x_0) = 0$ for each $x_0 \in R^m \setminus \bar{G}$, $d_G(x_0) = 1$ for $x_0 \in \operatorname{int} G$. Consider now $x_0 \in \partial G$. Without loss of generality we can assume $x_0 = 0$.

Let $0 < r_1 < r_2$ and let φ be defined by

$$\varphi : x \longmapsto (r_1/r_2)\, x\,, \quad x \in R^m\,.$$

Then $\varphi(G) \subset \bar{G}$ and $\varphi(\Omega_{r_2}(0)) = \Omega_{r_1}(0)$. Using the fact that $H_m(\bar{G} \setminus G) = 0$, we obtain

$$\frac{H_m(\Omega_{r_1}(0) \cap G)}{H_m(\Omega_{r_1}(0))} = \frac{H_m(\Omega_{r_1}(0) \cap \bar{G})}{H_m(\Omega_{r_1}(0))} \geqq \frac{H_m(\Omega_{r_1}(0) \cap \varphi(G))}{H_m(\Omega_{r_1}(0))} =$$

$$= \frac{r_1^m}{r_2^m} \cdot \frac{H_m(\Omega_{r_2}(0) \cap G)}{H_m(\Omega_1(0)) \cdot r_1^m} = \frac{H_m(\Omega_{r_2}(0) \cap G)}{H_m(\Omega_{r_2}(0))} > 0\,.$$

It follows that there exists a positive

$$\lim_{r \to 0+} \frac{H_m(\Omega_r(x_0) \cap G)}{H_m(\Omega_r(x_0))}\,.$$

3. Lemma. *Let G be a bounded convex subset of R^m with a nonempty interior and let s be a non-negative continuous superharmonic function on R^m. Then $\hat{R}_s^G$ is a continuous potential of a positive Radon measure.*

Proof. The only fact which should be verified here is that $\hat{R}_s^G$ is continuous. According to Lemma 2, G is not thin at any of its boundary points. This can be shown in a similar way as in [5] (see Corollary 10.5). Consequently, we have $\hat{R}_s^G = s$ on $\bar{G}$. (See Theorem 10.7 in [5].)

Since $\hat{R}_s^G$ is harmonic on $R^m \setminus \bar{G}$, it follows from the Riesz decomposition theorem and Theorem 6.9 in [5] that $\hat{R}_s^G$ is a potential of a positive Radon measure $\mu \in C'(\bar{G})$. Now we can apply Evans-Vasilesco's theorem to obtain continuity of $\hat{R}_s^G$ on R^m.

4. Remark. It should be noted that in our special case $\hat{R}_s^G$ coincides with the réduite R_s^G.

In view of the introductory remarks we shall suppose troughout this note that G is a fixed open bounded convex subset of R^m. We shall investigate the system $\mathscr{P}_m(G)$ defined in the introduction.

Without loss of generality we suppose $0 \in G$ and for $\varrho > 0$ we define

$$G_\varrho = \{\varrho x;\, x \in G\}\,.$$

In what follows we shall write C and C' instead of $C(\partial G)$ and $C'(\partial G)$, respectively.

5. Proposition. *Let h be harmonic on a neighborhood of $\bar{G}$. Then there is a constant $c > 0$ and a positive Radon measure $\mu \in C'$ such that $h + c = U\mu$ on G and $U\mu$ is a continuous potential.*

Proof. Since h is harmonic on a neighborhood of a compact set $\bar{G}$, there is $\varrho > 1$ such that h is harmonic on a neighborhood of $\bar{G}_\varrho$. Choose $\alpha_1 > \sup h(\partial G)$, $\alpha_2 <$

$< \inf h(\partial G_\varrho)$ and let u be the capacitary potential for $\bar{G}$. Since $0 \leqq u \leqq 1$ on R^m and $\lim\limits_{\|y\| \to \infty} u(y) = 0$, we have by the maximum principle

$$u(x) - 1 \leqq \beta < 0 \quad \text{on} \quad \partial G_\varrho \,.$$

It follows that there is $\gamma > 0$, $\gamma > \alpha_1$ such that

$$\gamma(u(x) - 1) \leqq \alpha_2 - \alpha_1$$

whenever $x \in \partial G_\varrho$.

Put $q = \gamma u$. Obviously, q is a potential. It follows from Lemma 3 that $q = \gamma$ on $\bar{G}$ and q is a continuous potential on R^m. Let $c = \gamma - \alpha_1$. Then

$$q(x) - c = \alpha_1 > h(x) \quad \text{on} \quad \partial G \,, \tag{1}$$

$$q(x) - c \leqq \alpha_2 < h(x) \quad \text{on} \quad \partial G_\varrho \,. \tag{2}$$

Define a function p on R^m as follows:

$$p = \begin{cases} h + c & \text{on} \quad \bar{G} \\ \inf(h + c, q) & \text{on} \quad G_\varrho \setminus \bar{G} \\ q & \text{on} \quad R^m \setminus G_\varrho \,. \end{cases}$$

We shall prove that p is the potential of a positive Radon measure. According to the Riesz decomposition theorem, it is sufficient to show that p is a non-negative superharmonic function dominated by a potential. It follows from the continuity of q and h and from (1) that for each $x \in \partial G$ there is a neighborhood $V(x)$ such that

$$p(y) = h(y) + c \quad \text{for all} \quad y \in V(x) \,.$$

Analogously for each $x \in \partial G_\varrho$ there is a neighborhood $W(x)$ such that

$$p(y) = q(y) \quad \text{on} \quad W(x) \,.$$

Continuity of p on $R^m \setminus (\partial G_\varrho \cup \partial G)$ is clear from the definition of p. Therefore p is a continuous superharmonic function on R^m. Applying the minimum principle to p, which is non-negative on ∂G_ϱ, we obtain that $p \geqq 0$ on G_ϱ and hence $p \geqq 0$ on R^m (note that $p = q$ on $R^m \setminus G_\varrho$).

Since p is dominated by the potential q, it follows that p is a continuous potential. By the Riesz decomposition theorem there is a measure μ such that $U\mu = \hat{R}^G_p$.

Since $U\mu$ is harmonic on $R^m \setminus \partial G$, it follows from Theorem 6.9 of [5] that $\mu \in C'$. By Lemma 3, $U\mu = \hat{R}^G_p$ is a continuous potential on R^m and

$$U\mu = \hat{R}^G_p = p = h + c \quad \text{on} \quad G \,.$$

6. Remark. It should be noted that it is an easy consequence of Theorem 5.2.2 (Fortsetzungssatz) in [1] that there are continuous potentials p, q which are harmonic on G and

$$h = p - q \quad \text{on} \quad G \,.$$

7. Definition. A unit vector Θ is called the exterior normal of a Borel set $M \subset R^m$ at $y \in R^m$ in the sense of Federer provided the symmetric difference of the sets M and the half-space $\{x \in R^m;\ (x - y)\,\Theta < 0\}$ has the m-dimensional density 0 at y. In what follows we shall put $n_M(y) = \Theta$ if Θ is the exterior normal of M in the sense of Federer and we denote by $n_M(y)$ the zero vector if there is no exterior normal Θ at y in the above mentioned sense. (See [8], where relevant references can be found.) If f is of the class C^1 on a neighborhood of $\overline{M}$, we define

$$\frac{\partial f}{\partial n_M}(y) = n_M(y)\,\mathrm{grad}\, f(y)\,; \quad y \in \overline{M}\,.$$

Finally, for $M = G_\varrho$ we shall write $n_\varrho(y)$ instead of $n_M(y)$.

8. Remark. The normal in the above mentioned sense is obviously uniquely determined and it is easily seen that

$$n_\varrho(t) = n_G(t/\varrho)\,, \quad t \in R^m\,.$$

Relations between the "classical" normal and the normal in the sense of Federer are studied e.g. in [10].

9. Lemma. *Let h be harmonic on G. For $\varrho \in (0, 1)$ and $y \in \overline{G}$ put $h_\varrho(y) = h(\varrho y)$. Define*

$$\tilde{K} = \sup_{\varrho \in (0,1)} \int_{\partial G} \left| \frac{\partial h_\varrho}{\partial n_G}(x) \right| \mathrm{d}H_{m-1}(x)\,,$$

$$K = \sup_{\varrho \in (0,1)} \int_{\partial G_\varrho} \left| \frac{\partial h}{\partial n_\varrho}(x) \right| \mathrm{d}H_{m-1}(x)\,.$$

Then $\tilde{K} < \infty$ if and only if $K < \infty$.

Proof. Fix $\varrho \in (0, 1)$. Then

$$\int_{\partial G} \left| \frac{\partial h_\varrho}{\partial n_G}(x) \right| \mathrm{d}H_{m-1}(x) = \varrho \int_{\partial G} |\mathrm{grad}\, h(\varrho x)\, n_G(x)|\, \mathrm{d}H_{m-1}(x) =$$

$$= \frac{1}{\varrho^{m-2}} \int_{\partial G_\varrho} |\mathrm{grad}\, h(t)\, n_G(t/\varrho)|\, \mathrm{d}H_{m-1}(t) = \frac{1}{\varrho^{m-2}} \int_{\partial G_\varrho} \left| \frac{\partial h}{\partial n_\varrho}(x) \right| \mathrm{d}H_{m-1}(x)\,.$$

Since h is harmonic on G, there is $c > 0$ such that

$$|\mathrm{grad}\, h_\varrho(x)| = |\varrho\, \mathrm{grad}\, h(\varrho x)| < c$$

for each $\varrho \in (0, \frac{1}{2}\rangle$ and each $x \in \partial G$. We see that there is $d > 0$ such that

$$\sup_{\varrho \in (0,1/2\rangle} \sup_{\partial G_\varrho} |\mathrm{grad}\, h(x)| < d\,.$$

We can therefore limit ourselves to $\varrho \in (\frac{1}{2}, 1)$. The equality proved above now implies easily that $K < \infty$ if and only if $\tilde{K} < \infty$.

10. Theorem. *Let G be an open bounded convex subset of R^m, $m > 2$, $0 \in G$ and let h be a harmonic function on G. Then the following conditions are equivalent:*

(i) *There exists a Radon measure $\mu \in C'(\partial G)$ such that $h = U\mu$ on G.*

(ii)

$$K = \sup_{\varrho \in (0,1)} \int_{\partial G_\varrho} \left| \frac{\partial h}{\partial n_\varrho}(x) \right| \mathrm{d}H_{m-1}(x) < +\infty .$$

Proof of implication (i) $\Rightarrow$ (ii). The converse will be proved later (see Sec. 12).

Choose $\varrho \in (0, 1)$. The mapping grad $U\mu$ is continuous on a neighborhood of the compact set ∂G_ϱ so that

$$\operatorname{grad} U\, \mu(x) = - \int_{\partial G} \frac{(x-y)}{|x-y|^m} \, \mathrm{d}\mu(y)\,, \quad x \in \partial G_\varrho\,.$$

Hence for each $x \in \partial G_\varrho$

$$\frac{\partial U\mu}{\partial n_\varrho}(x) = - \int_{\partial G} \frac{n_\varrho(x) \,.\, (x-y)}{|x-y|^m} \, \mathrm{d}\mu(y)\,.$$

Applying Fubini's theorem and substituting $x = \varrho t$, we have

$$K_\varrho := \int_{\partial G_\varrho} \left| \frac{\partial U\, \mu(x)}{\partial n_\varrho} \right| \mathrm{d}H_{m-1}(x) \leqq \int_{\partial G_\varrho} \int_{\partial G} \frac{|n_\varrho(x)\,(x-y)|}{|x-y|^m} \, \mathrm{d}|\mu|\,(y)\, \mathrm{d}H_{m-1}(x) =$$

$$= \int_{\partial G} \left(\int_{\partial G_\varrho} \frac{|n_\varrho(x)\,(x-y)|}{|x-y|^m} \, \mathrm{d}H_{m-1}(x) \right) \mathrm{d}|\mu|\,(y) =$$

$$= \int_{\partial G} \left(\int_{\partial G} \frac{|n_\varrho(\varrho t)\,(t - y/\varrho)|}{|t - y/\varrho|^m} \, \mathrm{d}H_{m-1}(t) \right) \mathrm{d}|\mu|\,(y)\,.$$

Here, as usual, $|\mu|$ stands for an indefinite variation of μ. Using the equality $n_\varrho(\varrho t) = n_G(t)$ we get

$$K_\varrho \leqq \int_{\partial G} v_\infty^G(y/\varrho)\, \mathrm{d}|\mu|\,(y) \leqq (\sup_{z \in R^m} v_\infty^G(z))\, \|\mu\| \tag{3}$$

where $v_\infty^M(z)$ is the quantity introduced in [8] as follows: Let $0 \neq M \subset R^m$ be an open set with a compact boundary. We call x a hit of a half-line $S \subset R^m$ on M provided $x \in S$ and each ball $\Omega_r(x)$ meets both $S \cap G$ and $S \setminus G$ in a set of positive linear measure. Given $y \in R^m$, $\Theta \in \Gamma = \partial\Omega_1(0)$, consider the total number $n_\infty^M(\Theta, y)$ $(0 \leqq n_\infty^M(\Theta, y) \leqq \infty)$ of all hits of the half-line $\{y + \varrho\Theta;\ \varrho > 0\}$ on M. For fixed y, $n_\infty^M(\Theta, y)$ is a Baire function of the variable $\Theta \in \Gamma$ and we may put

$$v_\infty^M(y) = \int_\Gamma n_\infty^M(\Theta, y)\, \mathrm{d}H_{m-1}(\Theta)\,.$$

In particular, since G is a convex set, then for each $z \in R^m$ obviously $n_\infty^G(\Theta, z) \leqq 2$, so that

(4) $$\sup_{z \in R^m} v_\infty^G(z) \leqq 2H_{m-1}(\Gamma) .$$

By Proposition 2.10 and Lemma 2.12 in [8]

$$v_\infty^G(z) = \int_{\partial G} \frac{|n_G(y)(y - z)|}{|y - z|^m} \, \mathrm{d}H_{m-1}(y) .$$

According to (3),

$$K = \sup_{\varrho \in (0,1)} K_\varrho \leqq (\sup_{z \in R^m} v_\infty^G(z)) \|\mu\| \leqq 2H_{m-1}(\Gamma) \|\mu\| < \infty .$$

This completes the proof of (i) $\Rightarrow$ (ii).

11. Notation. For each $\mu \in C'$ we shall define a functional $\mathcal{T}_\mu$ on the space $\mathcal{D}$ of all infinitely differentiable functions φ with compact support in R^m as follows:

$$\langle \varphi, \mathcal{T}_\mu \rangle = \int_G \operatorname{grad} \varphi \, . \, \operatorname{grad} U\mu \, \mathrm{d}H_m .$$

The distribution $\mathcal{T}_\mu$ is a weak characterization of the normal derivative of $U\mu$ (see [8]).

Since for any convex set $\sup_{y \in \partial G} v_\infty^G(y) < \infty$ (see (4)), by Theorem 1.13 in [8] it is possible for each $\mu \in C'$ to identify the functional $\mathcal{T}_\mu$ with a unique Radon measure which will be denoted by $\mathcal{T}\mu$. The mapping $\mathcal{T} : \mu \longmapsto \mathcal{T}\mu$ is a bounded operator on C'. Since G is convex, a result of [14] shows that the hypotheses of Theorem 28 of [13] are fulfilled. Consequently, the range of the operator $\mathcal{T}$ is equal to

$$C'_0 := \{\nu \in C';\ \nu(\partial G) = 0\} .$$

It is easily seen that $C'_0 \subset C'$ is a Banach space.

Thus we know that for each $\nu \in C'_0$ there is $\mu \in C'$ such that

$$\mathcal{T}\mu = \nu .$$

Denote

$$\tilde{\mu} = \mu - \frac{\mu(\partial G)}{\varkappa(\partial G)} \varkappa$$

where $\varkappa \in C'$ is the capacitary distribution for $\bar{G}$. Note that $\varkappa(\partial G) \neq 0$ and $\mathcal{T}\varkappa = 0$, because $U\varkappa$ is constant on G. Obviously $\tilde{\mu} \in C'_0$ and

$$\mathcal{T}\tilde{\mu} = \mathcal{T}\mu - \frac{\mu(\partial G)}{\varkappa(\partial G)} \mathcal{T}\varkappa = \mathcal{T}\mu .$$

We see that $\mathscr{T}(C_0') = C_0'$. Now we shall show that the restriction $\mathscr{T}_0$ of the operator $\mathscr{T}$ to C_0' is injective.

With regard to the fact that $\mathscr{T}_0$ is a linear operator, it is sufficient to prove that $\mathscr{T}_0 \nu = 0$ for a $\nu \in C_0'$ implies $\nu = 0$. By the results of [12]–[14], Theorem 26 of [13] is applicable. Therefore $\mathscr{T}\nu = 0$ implies that there exists $c \in R^1$ such that $U\nu = c$ on G.

We first show that $\nu = c\varkappa$. Indeed, since for $\nu^* = \nu - c\varkappa$ we have $\mathscr{T}\nu^* = 0$ and $U\nu^* = 0$ on G, we conclude again by Theorem 26 in [13] that $\nu^* = \nu - c\varkappa = 0$. Hence $0 = \nu(\partial G) = c\,\varkappa(\partial G)$ and $c = 0$ (recall that $\varkappa(\partial G) \neq 0$). We see that $U\nu = 0$ and again from Theorem 26 of [13] we get $\nu = 0$.

Since $\mathscr{T}_0$ is an injective and continuous linear operator mapping C_0' onto C_0' the inverse $\mathscr{T}_0^{-1}$ is a bounded linear operator on C_0' by the open mapping theorem.

Our next objective is

12. Proof of implication (ii) $\Rightarrow$ (i) **of Theorem 10.** For an arbitrary $\varrho \in (0, 1)$ we define a Radon measure ν_ϱ by

$$\nu_\varrho : f \longmapsto \int_{\partial G} f \frac{\partial h_\varrho}{\partial n_G} \, \mathrm{d}H_{m-1}\,, \quad f \in C\,.$$

By Lemma 9 we have

$$\|\nu_\varrho\| = \int_{\partial G} \left| \frac{\partial h_\varrho}{\partial n_G}(x) \right| \mathrm{d}H_{m-1}(x) \leqq \tilde{K} < \infty\,.$$

Obviously there is a function φ infinitely differentiable with compact support in R^m such that $\varphi = h_\varrho$ on a neighborhood of $\bar{G}$. Applying the Gauss-Green theorem (compare e.g. Remark 2.11 in [8], where the corresponding references can be found), we get

$$\int_{\partial G} n_G(x) \operatorname{grad} \varphi(x) \, \mathrm{d}H_{m-1}(x) = \int_G \Delta\varphi(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

so that

$$\nu_\varrho(\partial G) = \int_{\partial G} \frac{\partial h_\varrho}{\partial n_G}(x) \, \mathrm{d}H_{m-1}(x) = 0\,.$$

This shows that $\nu_\varrho \in C_0'$.

Let $\tilde{\mu}_\varrho \in C_0'$ be chosen such that

$$\mathscr{T}_0 \tilde{\mu}_\varrho = \nu_\varrho\,.$$

(We know that $\tilde{\mu}_\varrho$ is uniquely determined.) Then

$$\|\tilde{\mu}_\varrho\| \leqq \tilde{K} \|\mathscr{T}_0^{-1}\|\,.$$

By Alaoglu's theorem it is possible to choose a sequence $\{\varrho_n\}$, $\varrho_n \nearrow 1$ and $\tilde{\mu} \in C'$ such that for $\tilde{\mu}_n = \tilde{\mu}_{\varrho_n}$ we have

$$w^* - \lim \tilde{\mu}_n = \tilde{\mu}$$

where w^* refers to the w^*-topology on C'. Since $0 \in G$ and $x \mapsto 1/(m-2) \,.\, 1/|x|^{m-2}$ is a continuous function on ∂G, $U\,\tilde{\mu}_n(0) \to U\,\tilde{\mu}(0)$.

Put for $\varrho \in (0, 1)$

$$\mu_\varrho = \tilde{\mu}_\varrho + [h(0) - U\,\tilde{\mu}_\varrho(0)]\,\varkappa\,, \quad \mu_n = \mu_{\varrho_n}$$

where $\varkappa$ as above denotes the capacitary distribution for $\bar{G}$. Recalling that $\mathcal{T}\varkappa = 0$, we have

$$\mathcal{T}\mu_\varrho = \mathcal{T}\tilde{\mu}_\varrho = \nu_\varrho\,.$$

For $\varrho \in (0, 1)$ the equalities

$$U\,\mu_\varrho(0) = h(0) = h_\varrho(0) \tag{5}$$

hold. In order to show that $U\mu_\varrho = h_\varrho$ on G we apply Proposition 5. Hence for each $\varrho \in (0, 1)$ there is $c_\varrho > 0$ and a Radon measure $\bar{\mu}_\varrho \in C'$ such that

$$U\bar{\mu}_\varrho = h_\varrho + c_\varrho \quad \text{on} \quad G\,. \tag{6}$$

It is easily seen that $\mathcal{T}\,\bar{\mu}_\varrho(\psi) = \nu_\varrho(\psi)$ for all $\psi \in \mathcal{D}$. It follows

$$\mathcal{T}\bar{\mu}_\varrho = \mathcal{T}\tilde{\mu}_\varrho = \mathcal{T}\mu_\varrho\,.$$

Using Theorem 26 of [13], we establish the existence of $\tilde{c}_\varrho$ such that

$$U\bar{\mu}_\varrho = U\mu_\varrho + \tilde{c}_\varrho \quad \text{on} \quad G$$

and according to (5) and (6),

$$U\mu_\varrho = h_\varrho \quad \text{on} \quad G\,.$$

Setting

$$\mu_n = \tilde{\mu}_n + [h(0) - U\,\tilde{\mu}(0)]\,\varkappa\,,$$

from

$$w^* - \lim \tilde{\mu}_n = \tilde{\mu}\,, \quad h(0) - U\,\tilde{\mu}_n(0) \to h(0) - U\,\tilde{\mu}(0)$$

we obtain

$$w^* - \lim \mu_n = \tilde{\mu} + [h(0) - U\,\tilde{\mu}(0)]\,\varkappa\,.$$

Denote

$$\mu = \tilde{\mu} + [h(0) - U\,\tilde{\mu}(0)]\,\varkappa$$

and fix $y \in G$. Then the function $x \mapsto 1/(m-2) \,.\, 1/|x-y|^{m-2}$ is continuous on ∂G so that

$$h(\varrho_n y) = h_{\varrho_n}(y) = U\,\mu_n(y) \to U\mu(y)\,.$$

This together with the fact that $h(\varrho_n y) \to h(y)$ establishes the equality

$$U\mu = h \quad \text{on} \quad G\,.$$

13. Remark. If for a harmonic function h and a set G the assumptions of Theorem 10 are satisfied and condition (ii) holds, the corresponding Radon measure μ is uniquely determined. Indeed, suppose that there are $\mu_1, \mu_2 \in C'$ such that $U\mu_1 = U\mu_2 = h$ on G. Then for $\mu = \mu_1 - \mu_2$ $\mathscr{T}\mu = 0$, $U\mu = 0$ on G and by Theorem 26 of [13] $\mu = 0$, i.e. $\mu_1 = \mu_2$.

14. Corollary. *If h is a function harmonic on G and satisfying a Lipschitz condition, then there exists $\mu \in C'$ such that $h = U\mu$ on G.*

Proof. Note that $|\mathrm{grad}\, h|$ is bounded on G, so that condition (ii) of Theorem 10 is satisfied.

15. Corollary. *If h is harmonic and bounded on G and* (ii) *from Theorem* 10 *is fulfilled, it follows that*

$$\int_G \mathrm{grad}^2 h \, \mathrm{d}H_m < \infty .$$

Proof. Choose $\varrho \in (0, 1)$. Then by the Gauss-Green theorem (compare [8], Remark 2.11)

$$\int_{G_\varrho} \mathrm{grad}\, h \,.\, \mathrm{grad}\, h \, \mathrm{d}H_m = \left| \int_{\partial G_\varrho} h \frac{\partial h}{\partial n_\varrho} \mathrm{d}H_{m-1} - \int_G h \, \Delta h \, \mathrm{d}H_m \right| \leqq$$

$$\leqq \tilde{K} \sup |h(G)| < \infty \; ; \quad B := \tilde{K} \sup |h(G)| \, .$$

For $\varrho \nearrow 1$ we obtain

$$\int_G \mathrm{grad}^2 h \, \mathrm{d}H_m \leqq B \, .$$

In the following example, $G \neq \emptyset$ is an arbitrary bounded convex set. We are going to construct a harmonic function h, which does not satisfy the condition (ii) of Theorem 10.

16. Example. Let $x_0 \in \partial G$. By [6], Lemma 3.7, there is a continuous function h on $\bar{G} \setminus \{x_0\}$ which is strictly positive and harmonic on G and $h = 0$ on $\partial G \setminus \{x_0\}$. We shall prove that for such an h the condition (ii) does not hold.

Suppose on the contrary that (ii) holds and so Theorem 10 yields a Radon measure $v \in C'$ such that

$$Uv = h \quad \text{on} \quad G \, .$$

Since $h = 0$ on $\partial G \setminus \{x_0\}$, we can show as in the proof of Theorem 26 in [13] that $v = 0$. But this is a contradiction with the fact that $h > 0$ on G.

References

[1] *H. Bauer:* Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, Springer Verlag, Berlin, 1966.

[2] *S. Dümmel:* On inverse problems for k-dimensional potentials, Nonlinear evolution equations and potential theory (pp. 73—93), Academia, Praha, 1975.

[3] *G. C. Evans:* The logarithmic potential (Discontinuous Dirichlet and Neumann problems), AMM Colloquium Publications, VI, New York, 1927.

[4] *G. A. Garrett:* Necessary and sufficient conditions for potentials of single and double layers, Amer. J. Math. *58* (1936), 95—129.

[5] *L. L. Helms:* Introduction to potential theory, Wiley-Interscience, New York, 1969.

[6] *R. A. Hunt* and *R. L. Wheeden:* Positive harmonic functions on Lipschitz domains, Trans. Amer. Math. Soc. *147* (1970), 507—527.

[7] *D. V. Kapànadze* and *I. N. Karcivadze:* Potentials in a domain with noncompact boundary (Russian), Thbilis. Sahelmc. Univ. Gamoqeneb. Math. Inst. Šrom. *2* (1969), 13—19.

[8] *J. Král:* The Fredholm method in potential theory, Trans. Amer. Math. Soc. *125* (1966), 511—547.

[9] *J. Král* and *J. Mařík:* Integration with respect to the Hausdorff measure over a smooth surface (Czech), Časopis Pěst. Mat. *89* (1964), 433—448.

[10] *J. Matyska:* Approximate differential and Federer normal, Czech. Math. J. *17* (*92*) (1967), 97—107.

[11] *I. Netuka:* Generalized Robin problem in potential theory, Czech. Math. J. *22* (*97*) (1972), 312—324.

[12] *I. Netuka:* An operator connected with the third boundary value problem in potential theory, Czech. Math. J. *22* (*97*) (1972), 462—489.

[13] *I. Netuka:* The third boundary value problem in potential theory, Czech. Math. J. *22* (*97*) (1972), 554—580.

[14] *I. Netuka:* Fredholm radius of a potential theoretic operator for convex sets, Časopis Pěst. Mat. *100* (1975), 374—383.

[15] *E. D. Solomencev:* Harmonic functions representable by Green's type integrals II (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. *31* (1967), 834—854.

[16] *Ch. de la Vallé Poussin:* Le potential logarithmique, Gauthier-Villars, Paris, 1949.

Author's address: 186 00 Praha 8, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

SUR LES DOMAINES DES VALEURS DES OPÉRATEURS NON-LINÉAIRES

JIŘÍ JARUŠEK et JINDŘICH NEČAS, Praha

(Reçu le 2. décembre 1975)

Introduction. L'object de ce travail est d'étudier la question des domaines des valeurs des opérateurs non-linéaires de la forme $A + B$, où A est un opérateur linéaire et B un opérateur non-linéaire. Nous ne supposerons pas que l'opérateur non-linéaire soit complètement continu, comme c'est usuel dans la plupart des travaux analogues (par ex. [2], [4], [5], [8], [9], [10]), mais au lieu de cela, nous exigerons que A et $A + B$ satisfassent à la condition (S) (voir la définition 1) pour l'opérateur A ainsi que pour l'opérateur entier $A + B$. Cette condition nous permettra d'utiliser la méthode d'approximation de Galerkin par des espaces de dimension finie. Pour simplifier nos explications, nous supposons que l'opérateur B est globalement borné. Le cas où B n'est pas globalement borné, mais satisfait à quelque condition du croissement à l'infini, nous l'expliquerons dans un article indépendant. A la fin du travail, nous allons appliquer cette théorie générale à un exemple de la théorie des équations elliptiques. L'avantage de la méthode présentée dans ce travail consiste dans le fait, qu'elle permet, pour les théorèmes d'existence, de supposer, que l'opérateur non-linéaire, qui figure dans le premier membre d'une équation, soit dépendant aussi par rapport aux dérivées de l'ordre maximal.

Notation. Dans ce travail nous désignons le domaine d'un opérateur F par $D(F)$ et le domaine des valeurs par Im (F). Si F est un opérateur linéaire, les symbols Ker F et Coker F ont leur signification habituelle. Si F est un opérateur linéaire autoadjoint qui applique un espace de Hilbert dans lui-même, alors $\operatorname{Ker} F = \operatorname{Coker} F$. Si M est un sous-ensemble d'un espace de Banach, nous désignons par $\overline{M}$ la fermeture par rapport à la topologie définie par la norme et par $\overline{M}^w$ la fermeture faible de cet ensemble. Si $\{u_n\}$ est une suite et u un élément de cet espace, alors „$u_n \to u$" désigne la convergence par rapport à la topologie définie par la norme et „$u_n \rightharpoonup u$" la convergence faible. Autrement, nous utilisons des symbols habituels dans la litérature fondamentale (par ex. [1], [11]). De même des citations des théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionelle (le théorème de Mackey, de Kaplanski) tirent son origine de cette litérature.

Quand nous allons extraire une sous-suite convenable de la suite $\{u_n\}$, nous allons désigner cette sous-suite de nouveau par $\{u_n\}$.

D'abord nous rappelons quelques notions:

Définition 1. Soit X un espace linéaire normé et soit F une application de X dans son dual X^*. Alors nous disons que F a la propriété (S) (où F satisfait à la condition (S)), si pour chaque suite $\{u_n\} \subset X$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ et $\lim_{n\to\infty} (Fu_n, u_n - u) = 0$ on a $u_n \to u$, où $(.,.)$ signifie la dualité de X et X^*.

Définition 2. Soient X et Y deux espaces linéaires normés et soit A une application linéaire de X dans Y. Alors nous disons que A est *fredholmienne*, si la dimension dim Ker $A < +\infty$, Im (A) est un sous-espace fermé dans Y et dim Coker $A < +\infty$.

Pour les démonstrations ultérieures, le lemme suivant, provenant de P. Hess (voir [3]), sera de grande utilité:

Lemme. *Soit X un espace de Banach réflexif et soit A une application linéaire continue de X dans son dual, qui satisfait à la condition* (S). *Alors A est fredholmienne. En plus, si nous définissons l'index de l'application A par* ind A = dim Ker A − dim Coker A, *alors* ind $A = 0$.

Maintenant nous démontrons deux lemmes qui nous permettront d'utiliser l'approximation de Galerkin:

Lemme 1. *Soit X un espace de Banach réflexif et soit A une application continue linéaire de X dans X^* ayant la propriété* (S). *Supposons que K =* Ker A *et soit $X = K \oplus Y$ (somme directe). Soit $\mathscr{S} = \{X_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ un filtre de sous-espaces de dimension finie qui contiennent K (le filtre est dirigé par l'inclusion). Soit i_α l'injection de l'espace X_α dans X, soit i_α^* l'application duale de i_α et soit $A_\alpha = i_\alpha^* A i_\alpha$. Soit enfin $Y_\alpha = X_\alpha \cap Y$. Alors*

$$\liminf_{\alpha\in\mathfrak{A}} \Big(\min_{\substack{\|x\|=1\\ x\in Y_\alpha}} \|A_\alpha(x)\|\Big) = \varepsilon > 0\,.$$

Démonstration. Il est évident qu'il suffit de démontrer l'existence d'un nombre $\eta > 0$ et l'existence d'un $F \in \mathscr{S}$ tels que pour une suite arbitraire $\{X_n\} \subset \mathscr{S}$ où $F \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ ait lieu $\liminf_{n\to+\infty} \Big(\min_{\|x\|=1, x\in Y_n} \|A_n(x)\|\Big) = \eta > 0.$

Pour démontrer l'existence de cet espace, nous procéderons par contradiction. Supposons donc que pour tout $G \in \mathscr{S}$ il existe une suite d'espaces $\{X_n\} = \{X_n^G\} \subset \mathscr{S}$ telle que $G \subset X_1^G \subset X_2^G \subset \ldots$ et pour laquelle on ait

$$\liminf_{n\to+\infty} \Big(\min_{\substack{\|x\|=1\\ x\in Y_n{}^G}} \|A_n^G(x)\|\Big) = 0\,,$$

où $A_n^G = (i_n^G)^* A i_n^G$ et où i_n^G est l'injection de X_n^G dans X. On peut donc choisir $u_n \in Y_n^G$ de telle manière que $\|u_n\| = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \|A_n^G(u_n)\| = 0$. D'après le théorème de Kaplanski, il est possible de choisir dans la suite $\{u_n\}$ une telle sous-suite (désignons la de nouveau par $\{u_n\}$) que $u_n \rightharpoonup u$. Il est évident que $u \in Y$, mais $(i_m^G)^* Au_n \to (i_m^G)^* Au$ (il s'agit de la convergence faible dans un espace de dimension finie) et $\|(i_m^G)^* Au\| \leqq \leqq \|A_n^G(u_n)\|$ pour $m \leqq n$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \|(i_m^G)^* Au_n\| = 0$ pour tout nombre naturel, c'est-à-dire que Au est une application nulle sur $\bigcup_{i=1}^{+\infty} X_i^G$; ainsi que sur $X_G = \overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty} X_i^G}$. Autrement dit, $A_G(u) = 0$, où $A_G = i_G^* A i_G$ et où i_G est l'injection X_G dans X.

Alors si pour un espace $G \in \mathscr{S}$ qui est arbitraire mais fixe et dont la dimension est finie, nous définissons la famille

$$M_G = \{u \in X,\ \|u\| = 1,\ \exists X_G \Subset X,\ G \subset X_G = \overline{X}_G,\ u \in Y_G,\ i_G^* A(u) = 0\}\,,$$

où le symbol „$\Subset$" signifie que X_G est un sous-espace de l'espace X, il est évident que $M_G \neq \emptyset$. Le système $\{M_G, G \in \mathscr{S}\}$ jouit évidemment de la propriété des intersections finies, parce que $M_G \cap M_{G'} \supset M_{\mathrm{sp}(G,G')}$ (par „sp" on désigne ici l'enveloppe linéaire). Donc, grâce à la précompactivité faible de la sphère, il existe $\bar{u} \in \bigcap_{G\in\mathscr{S}} (\overline{M}_G^w)$ et il est évident que $\bar{u} \in Y$. Nous montrerons que $\|\bar{u}\| = 1$. En effet, soit $E = \mathrm{sp}\,(\bar{u}, \mathrm{Ker}\, A)$, $\bar{u} \in \overline{M}_E^w$. Donc il existe une suite $\{v_n\} \subset M_E$, pour laquelle $v_n \rightharpoonup \bar{u}$. Soient $v_n \in X_E^{(n)}$ où $X_E^{(n)}$ sont des espaces convenablement choisis d'après la définition des éléments $v_n \in M_E$. Puisque $v_n - \bar{u} \in X_E^{(n)}$, on a $\lim_{n\to+\infty} (Av_n, v_n - u) = 0$. Donc $v_n \to \bar{u}$, $\|\bar{u}\| = 1$.

Nous avons donc démontré que $\bar{u} \in Y$, $\|\bar{u}\| = 1$. Donc, s'il doit être $A\bar{u} \neq 0$, il doit exister nécessairement au moins un élément $w \in X$ tel que $(A\bar{u}, w) \neq 0$. Soit $J = \mathrm{sp}\,(\bar{u}, w, \mathrm{Ker}\, A)$. Alors $\bar{u} \in \overline{M}_J^w$ et il existe une suite $\{w_n\} \subset M_J$ pour laquelle $w_n \rightharpoonup \bar{u}$. Mais $(Aw_n, w) = 0$ pour un naturel n arbitraire, donc, grâce à la continuité faible de A, on a $(A\bar{u}, w) = 0$ ce qui est une contradiction. Le lemme 1 est démontré.

Lemme 2. *Soit W une application demicontinue qui applique un espace de Banach réflexif X dans son dual et supposons que W jouit de la propriété* (S). *Soit $\{X_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ le filtre de tous les sous-espaces de dimension finie de l'espace X, soient i_α, i_α^* les mêmes applications comme dans le lemme 1. Supposons qu'il existe une sous-famille confinale $\mathfrak{P}$ (nous disons qu'une sous-famille $\mathfrak{P}$ du filtre $\mathfrak{A}$ est confinale, si pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$ il existe un $\beta \in \mathfrak{P}$, $\beta > \alpha$) et qu'il existe une constante positive k de manière que pour tout $\beta \in \mathfrak{P}$ il existe au moins une solution x_β de l'équation $i_\beta^* W i_\beta x = 0$ et que pour cette solution a lieu l'estimation $\|x_\beta\| \leqq k$ qui est indépendante de β. Alors il existe une solution de l'équation $Wx = 0$ et de plus, il existe une suite $\{x_n\} \subset M = \{x_\beta, \beta \in \mathfrak{P}\}$ telle que $x_n \to x$.*

Démonstration. Définissons des familles $\mathfrak{M}_\alpha = \overline{\{x \in M,\ i_\alpha^* Wx = 0\}}^w$. Grâce à la confinalité de la famille $\mathfrak{P}$, le système $\{\mathfrak{M}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ est évidemment un système de familles non-vides, faiblement fermées uniformément bornées, un système ayant la propriété des intersections finies. Donc, grâce au théorème de Mackey, il existe un $x_0 \in \bigcap_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathfrak{M}_\alpha$. Nous allons montrer que cet x_0 est une solution de l'équation $Wx = 0$. Nous montrerons que $(Wx_0, y) = 0$ pour tout $y \in X$:

Définissons $X_{\alpha_0} = \text{sp}(x_0, y)$ et une suite $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}_{\alpha_0} \cap M$, $x_n \rightharpoonup x_0$. Par définition on a: $(Wx_n, x_n - x_0) = 0$ d'où il s'ensuit que $\lim_{n \to +\infty} (Wx_n, x_n - x_0) = 0$. Grâce à la condition (S), on a $x_n \to x_0$, c'est-à-dire que x_0 est en effet la limite d'une suite d'éléments de M. Grâce à la demi-continuité de W $(Wx_n, y) \to (Wx_0, y)$ a lieu. En même temps, par définition, on a $(Wx_n, y) = 0$ d'où il s'ensuit que $(Wx_0, y) = 0$.

Maintenant nous démontrerons le théorème principal de ce travail.

Théorème 1. (i) *Soit A un opérateur linéaire continu, autoadjoint, qui applique un espace de Hilbert H dans lui-même, dont le* Ker A *est non-trivial, et qui satisfait à la condition* (S).

(ii) *Soit B un opérateur demi-continu qui applique cet espace H dans lui-même. Soit B en plus uniformément borné sur H — cela signifie qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour un élément arbitraire $x \in H$ ait lieu $\|Bx\| < c$. Supposons que B a une asymptote faible à l'égrad des demi-droites de $K = \text{Ker}\, A$ — cela signifie qu'il existe une fonction réelle l définie sur la sphère unitaire dans l'espace $K = \text{Ker}\, A$ telle que $\lim_{t \to +\infty} (B(u + tw), w) = l(w)$ uniformément pour $w \in \text{Ker}\, A$, $\|w\| = 1$ et $u \in H$ borné (on entend par là que pour tout $d > 0$ la convergence est uniforme indépendamment de u par $\|u\| \leqq d$).*

(iii) *Soit donné $A + B$ satisfaisant à la condition* (S). *Alors pour $h \in H$ satisfaisant à l'une des conditions suivantes* (∗) *respectivement* (∗∗), *où*

(∗) *pour tout* $w \in K$ $\|w\| = 1$ *il est* $(h, w) > l(w)$

(∗∗) *pour tout* $w \in K$ $\|w\| = 1$ *il est* $(h, w) < l(w)$

il existe au moins une solution de l'équation (1):

$$Ax + Bx = h. \tag{1}$$

Démonstration. I. Soit $K = \text{Ker}\, A$ et Y son complément orthogonal ($Y = \text{Im}\, A$). Définissons la projection orthogonale P de l'espace H sur l'espace K et la projection orthogonale Q de l'espace H sur l'espace Y. Grâce au lemme 1, nous choisissons l'espace Z tel que

$$\inf \{ \min_{\substack{\|x\| = 1 \\ x \in H_\alpha}} \|A_\alpha(x)\|;\ H_\alpha \supset Z,\ H_\alpha \Subset H \text{ et } \dim H_\alpha < +\infty \} \geqq \frac{\eta}{2} > 0\,.$$

Définissons encore le filtre $T = \{H_\alpha \Subset H,\ \dim H_\alpha < +\infty,\ H_\alpha \supset Z\}$ — pour simplifier écrivons aussi $T = \{H_\beta, \beta \in \mathfrak{P}\}$. Ce filtre est donc un sous-filtre confinal du filtre de tous les sous-espaces de dimension finie de H. Nous pouvons énoncer les deux propositions suivantes, concernant les éléments du filtre T:

(A) Soient A_β les opérateurs définis comme dans le lemme 1. En posant $K_\beta = \text{Ker}\, A_\beta$, $\beta \in \mathfrak{P}$, on a $K_\beta = K$ et alors $P_\beta = P/H_\beta$ est la projection orthogonale de H_β sur Ker A_β et $Y_\beta = Y \cap H_\beta$ est le complément orthogonal de Ker A_β et aussi le domaine des valeurs de l'opérateur A_β. Enfin $Q_\beta = Q/H_\beta$ est la projection orthogonale de H_β sur Y_β.

(B) Soit S_β l'application réciproque de l'opérateur A_β, c'est-à-dire l'application, pour laquelle $D(S_\beta) = Y_\beta = \text{Im}(A_\beta)$ et pour laquelle $S_\beta A_\beta Q_\beta = Q_\beta$ et $A_\beta S_\beta Q_\beta = Q_\beta$ sur H_β. J'affirme que $\|S_\beta\| \leqq 2/\eta$ pour tout $\beta \in \mathfrak{P}$. En effet, supposons au contraire qu'il existe un $\beta \in \mathfrak{P}$ pour lequel $\|S_\beta\| > 2/\eta$. Il existe donc un $x \in Y_\beta$, $\|x\| = 1$ tel que $\|S_\beta(x)\| > 2/\eta$. Mais $\|A_\beta(S_\beta(x)/\|S_\beta(x)\|)\| = \|x\|/\|S_\beta(x)\| < \eta/2$, ce qui est en contradiction avec le choix de l'espace Z et du filtre T.

II. Maintenant nous allons chercher des solutions x_β des équations (1^β)

$$(1^\beta) \qquad A_\beta x + B_\beta x = i_\beta^* h = h_\beta$$

dans les espaces H_β, $\beta \in \mathfrak{P}$. Pour démontrer l'existence d'une solution de l'équation (1) pour $h \in H$ arbitraire, il suffit, d'après le lemme 2, de trouver un système $\{x_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{P}}$ des solutions des équations (1^β) telles que $\|x_\beta\| \leqq k$, où $k > 0$ est une constante indépendante de $\beta \in \mathfrak{P}$. Définissons l'application $C_\beta^{(\varepsilon)} : H_\beta \to H_\beta$ par l'équation:

$$C_\beta^{(\varepsilon)}(x) = C_\beta^{(\varepsilon)}(u + w) = u^*(x) + w^*(x)\,,$$

$$\text{où} \quad u^* = u^*(x) = S_\beta Q_\beta(h_\beta - B_\beta x)\,, \quad w^* = w^*(x) = w - P_\beta(h_\beta - B_\beta x)\,\varepsilon$$

en supposant que $x \in H_\beta$, $x = u + w$, $u = Q_\beta x$, $w = P_\beta x$, ε est un nombre positif. En considérant l'espace H_β de la forme $Y_\beta \times K$ on a $C_\beta^{(\varepsilon)}[u, w] \to [u^*, w^*]$.

J'affirme que $x_\beta = [u, w]$ est un point fixe de l'application $C_\beta^{(\varepsilon)}$ si et seulement si x_β est une solution de l'équation (1^β). En effet, soit x_β un point fixe de l'application $C_\beta^{(\varepsilon)}$. Alors $0 = w - w^* = P_\beta(h_\beta - B_\beta x_\beta)\,\varepsilon$. Donc $Q_\beta(h_\beta - B_\beta x_\beta) = h_\beta - B_\beta x_\beta$ et enfin $u = S_\beta(h_\beta - B_\beta x_\beta)$. En effectuant l'application A_β sur la dernière égalité, on obtient: $A_\beta x_\beta = A_\beta u = h_\beta - B_\beta x_\beta$.

Si au contraire $A_\beta x_\beta + B_\beta x_\beta = h_\beta$, alors $h_\beta - B_\beta x_\beta \in \text{Im}\, A_\beta$ et donc $0 = P_\beta(h_\beta - B_\beta x_\beta)\,.\,\varepsilon = w - w^*$. Mais en même temps $h_\beta - B_\beta x_\beta = Q_\beta(h_\beta - B_\beta x_\beta)$. Donc $A_\beta x_\beta = A_\beta Q_\beta x_\beta = Q_\beta(h_\beta - B_\beta x_\beta)$ et en appliquant l'opérateur S_β à cette dernière équation, on voit que x_β est un point fixe de l'application $C_\beta^{(\varepsilon)}$.

Pour démontrer notre théorème, il suffit de trouver un ensemble $U \subset H$ convexe, borné, fermé, $0 \in \text{Int}\, U$ et tel que dans $U_\beta = U \cap H_\beta$, $\beta \in \mathfrak{P}$ l'application $C_\beta^{(\varepsilon)}$ ait un point fixe (on doit vérifier cela pour chaque $\beta \in \mathfrak{P}$). Pour démontrer l'existence de ces points fixes il suffit, en vertu du théorème de Brouwer, de démontrer que $C_\beta^{(\varepsilon)}$ appliquent ces U_β dans eux-mêmes. Nous allons chercher U:

Parce que nous supposons (voir la supposition (ii) de notre théorème) que $\|Bx\| < c$ pour tout $x \in H$ et donc aussi $\|B_\beta x\| < c$ pour tout $x \in H_\beta$, alors pour chaque $\beta \in \mathfrak{P}$ arbitraire, $x \in H_\beta$, $x = u + w$, $u = Q_\beta x$ et $w = P_\beta x$ ont lieu les inégalités: $\|u^*(x)\| \leqq \|S_\beta\|\,\|Q_\beta\|\,\|h_\beta - B_\beta x\| \leqq \|Q\|\,(c + \|h\|)\,(2/\eta)$. Posons, pour abréger, $q = \|Q\|\,.\,(c + \|h\|)\,(2/\eta)$. Supposons maintenant que $x = u + w$, $\|u\| \leqq q$. Nous estimons $w^*(x)$ de la manière suivante: $\|w^*(x)\|^2 = (w - \varepsilon P_\beta(h_\beta - B_\beta x),\, w - \varepsilon \cdot P_\beta(h_\beta - B_\beta x)) = \|w\|^2 + \varepsilon^2 \|P_\beta(h_\beta - B_\beta x)\|^2 - 2 \cdot \varepsilon(P_\beta(h_\beta - B_\beta x), w)$. Comme $w \in K \subset H_\beta$, nous avons $(P_\beta(h_\beta - B_\beta x), w) = (h_\beta - B_\beta x, w) = (h - Bx, w) = (h - B(u + w), w)$. Ensuite $(h - B(u + w), w) = \varrho(h - B(u + (w/\varrho)\,\varrho), w/\varrho)$ et simultanément

$(B(u + t(w/\varrho), w/\varrho) \to l(w/\varrho)$ uniformément au sens de la supposition (ii) du théorème 1. Si nous définissons $\alpha(w, \varrho) = (h - B(u + w/\varrho), w/\varrho)$, alors en vertu de la condition $(*)$ pour $h \in H$, nous pouvons déterminer des nombres ϱ_0, α_0 tels que $\alpha(w, \varrho) \geqq \geqq \alpha_0 > 0$ pour $\varrho \geqq \varrho_0/2 > 0$. Nous avons: $\|w^*(x)\|^2 \leqq \|w\|^2 + \varepsilon^2\|P\|^2 (c + \|h\|)^2 - - 2\varrho\alpha(w, \varrho)\cdot\varepsilon$, car $\|P_\beta(h_\beta - B_\beta x)\|^2 \leqq \|P\|^2 \|h_\beta - B_\beta x\|^2 \leqq \|P\|^2 (c + \|h\|)^2$, où c'est défini dans la supposition (ii). Alors pour $\varepsilon \leqq \varepsilon_1 = \alpha_0\varrho_0\|P\|^{-2} (c + \|h\|)^{-2}$ et $\|w\| = \varrho \in \langle\frac{1}{2}\varrho_0, \varrho_0\rangle$ nous avons $\|w^*(x)\|^2 \leqq \|w\|^2 = \varrho^2 \leqq \varrho_0^2$.

Mais pour $\|w\| = \varrho \in \langle 0, \frac{1}{2}\varrho_0\rangle$ et $\varepsilon \leqq \varepsilon_2 = \varrho_0(2\|P\| (c + \|h\|)^{-1}$ nous avons aussi $\|w^*(x)\|^2 \leqq \varrho_0^2$, donc pour $\varepsilon \leqq \varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ l'opérateur $C_\beta^{(\varepsilon)}$ applique la famille $U_\beta = \{x \in H_\beta, \|P_\beta(x)\| \leqq \varrho_0, \|Q_\beta x\| \leqq q\}$ dans elle-même.

Il est nécessaire de remarquer que toutes ces estimations ne dépendent pas de l'index $\beta \in \mathfrak{P}$. Si nous posons $U = \{x \in H, \|Px\| \leqq \varrho_0, \|Qx\| \leqq q\}$, nous trouvons de cette façon une solution pour toute équation (1^β) dans U et donc, en vertu du lemme 2, nous trouvons dans cette famille au moins une solution de l'équation (1). Le cas $(**)$ peut être ramené au cas $(*)$ par la multiplication de l'équation (1) par le nombre -1.

Remarque 1. Si $\{w_1, \ldots, w_n\}$ est une base orthonormale de l'espace $K = \operatorname{Ker} A$ et si $\operatorname{Im} B \subset Y \times \operatorname{sp}\{w_1, \ldots, w_k\}$, $k < n$, on a évidemment $l(w_j) = 0$ pour $j = = k + 1, \ldots, n$ et aucune des conditions $(*)$, $(**)$ n'est remplie pour aucun $h \in H$. Or, en envisageant l'espace $H' = Y \times \operatorname{sp}\{w_1, \ldots, w_k\}$, les restrictions des opérateurs $A, B, A + B$ à l'espace H' ont les propriétés (i)–(iii) du théorème. Si $h \in H'$ satisfait à une des conditions $(*)$, $(**)$ pour $l' = l/H'$, l'equation (1) $Ax + Bx = h$ a pour cette h au moins une solution dans l'espace H. Dans le cas spécial, où $R(B) \subset R(A)$, nous posons $H' = Y = R(A)$ et le problème a d'après la remarque suivante (rem. 3) une solution pour tout $h \in H$.

Remarque 2. *On conserve les hypothèses du théorème* 1. *Soit donnée pour chaque* $u \in H$ *et* $w \in K = \operatorname{Ker} A$, $\|w\| = 1$ *l'inégalité* $(Bu, w) > l(w)$ (*resp. l'inégalité* $(Bu, w) < l(w)$. *Alors l'inégalité* $(*)$ (*resp.* $(**)$) *du théorème est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe pour* $h \in H$ *une solution de l'équation* (1).

Démonstration. La suffisance de ces conditions est exprimée par le théorème 1. Nécessité pour $(*)$: Soit $Au + Bu = h$ pour quelque $h \in H$, alors $(Au, w) + (Bu, w) = = (u, Aw) + (Bu, w) = (Bu, w) = h(w) > l(w)$ pour chacun $w \in K$, $\|w\| = 1$. Le cas $(**)$ est analogue.

Remarque 3. *Le cas de la trivialité de* $\operatorname{Ker} A$: *Supposons que les hypothèses* (i)–(iii) *du théorème* 1. *soient remplies à l'exception de la non-trivialité de* $\operatorname{Ker} A$ (*et donc à l'exception de l'existence d'une asymptote faible*). *Supposons en plus que* $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. *Alors l'équation* (1) $Ax + Bx = h$ *a une solution pour chaque* $h \in H$.

Démonstration. Nous allons résoudre de nouveau les équations (1^α) $A_\alpha x + + B_\alpha x = h_\alpha = i_\alpha^* h$ dans un sous-espace arbitraire H_α de dimension finie de l'espace H.

Si nous choisissons l'espace Z de la même manière que dans la démonstration du théorème 1 et si nous bornons aux X_α pour lesquels $X_\alpha \supset Z$, alors les opérateurs A_α sont bijectifs. Donc les équations (1^α) sont équivalentes aux équations (2^α)

$$(2^\alpha) \qquad x + A_\alpha^{-1} B_\alpha x = A_\alpha^{-1} h_\alpha .$$

Il suffit donc de chercher des points fixes de l'application $- A_\alpha^{-1}(B_\alpha - h_\alpha)$. On a $\|A_\alpha^{-1}(B_\alpha x - h_\alpha)\| \leqq \|A_\alpha^{-1}\| \, (c + \|h\|) \leqq (2/\eta)(c + \|h\|)$, où les nombres η et c ont le même sens comme dans la démonstration du théorème 1. Donc, si nous choisissons $\varrho_0 = (2/\eta)(c + \|h\|)$, l'opérateur $A_\alpha^{-1}(B_\alpha - h_\alpha)$ applique l'ensemble convexe $B_\alpha(0, \varrho_0) = \{x \in H_\alpha, \ \|x\| \leqq \varrho_0\}$ dans lui-même et par l'application du théorème de Brouwer et grâce à l'approximation de Galerkin, nous obtenons dans $B(0, \varrho_0) = \{x \in H, \ \|x\| \leqq \varrho_0\}$ au moins une solution de l'équation (1).

APPLICATIONS

Nous allons appliquer la théorie donnée à un exemple de la théorie des équations elliptiques. La non-nécessité de la supposition de la continuité totale de l'opérateur non-linéaire B nous donne la possibilité de supposer dans le théorème suivant que cet opérateur dépend aussi des dérivées d'ordre maximal.

Théorème 2. *Soit Ω un ouvert borné de R^n ayant une frontière lipschitzienne Γ. Soit donnée l'équation* (3)

$$(3) \qquad \sum_{|i|,|j| \leqq k} \int_\Omega a_{ij}(x) \, D^i u \, D^j v \, dx + \sum_{|i|,|j| < k} \int_\Gamma A_{ij}(x) \, D^i u \, . \, D^j v \, ds + \sum_{|i| \leqq k} \int_\Omega D^i v \, g_i(x, D^i u, \eta_i(u)) \, dx + \sum_{|i| < k} \int_\Gamma D^i v \, . \, G_i(x, D^i u, \eta_i(u)) \, ds = \int_\Omega v f \, dx + \int_\Gamma v F \, ds ,$$

où $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ pour $|i| \leqq k$, $|j| \leqq k$, $A_{ij} \in L^\infty(\Gamma)$ pour $|i| < k$, $|j| < k$, $g_i(\cdot, \xi_i, \eta_i)$ (resp. $G_i(\cdot, \xi_i, \eta_i)$) sont élements de l'espace $L^2(\Omega)$ (resp. $L^2(\Gamma)$), $g_i(x, \cdot, \cdot)$ sont des fonctions continues par rapport à toutes les variables ξ_i, η_i, $|i| \leqq k$ pour presque tous $x \in \Omega$, $G_i(x, \cdot, \cdot)$ sont des fonctions continues par rapport à toutes les variables ξ_i, η_i, $|i| < k$ pour presque tous $x \in \Gamma$, où $\eta_i(u)$ signifie toutes les dérivées de la fonction u d'ordre différent de i. Imposons les hypothèses suivantes (i)–(v):

(i) *On suppose l'existence des fonctions $a_i^\pm \in L^2(\Omega)$, $A_i^\pm \in L^2(\Gamma)$ telles que*

(4) $\lim_{\xi_i \to \pm\infty} g_i(x, \xi_i, \eta_i) = a_i^\pm(x)$ *uniformément par rapport à η_i pour presque tous $x \in \Omega$, où $x \in \Omega$ est un point fixe,*

(5) $\lim_{\xi_i \to \pm\infty} G_i(x, \xi_i, \eta_i) = A_i^{\pm}(x)$ *uniformément par rapport à* η_i *pour presque tous* $x \in \Gamma$.

(ii) *On suppose l'existence des fonctions* $b_i \in L^2(\Omega)$ *et* $B_i \in L^2(\Gamma)$ *telles que*

$|g_i(x, \xi_i, \eta_i)| \leqq b_i(x)$ *presque partout dans* Ω *pour* ξ_i, η_i *arbitraire,*

$|G_i(x, \xi_i, \eta_i)| \leqq B_i(x)$ *presque partout dans* Γ *pour* ξ_i, η_i *arbitraire.*

(iii) *L'ellipticité uniforme de l'opérateur différentiel linéaire: On suppose qu'il existe une constante* $c > 0$ *telle que*

$$\sum_{|i|,|j|=k} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j > c \sum_{|i|=k} |\xi_i|^2 \text{ pour tout } x \in \Omega \text{ et pour tout } \xi = (\xi_i),\ |i| = k\,.$$

(iv) *La symétrie de l'opérateur linéaire:*

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad \text{pour tous} \quad x \in \Omega\,, \quad |i| \leqq k\,, \quad |j| \leqq k$$

$$A_{ij}(x) = A_{ji}(x) \quad \text{pour tous} \quad x \in \Gamma\,, \quad |i| < k\,, \quad |j| < k\,.$$

(v) *La monotonie en dérivées d'ordre maximal de l'opérateur non-linéaire: Supposons que l'inégalité* $[g_i(x, \xi_i^{(1)}, \eta_i) - g_i(x, \xi_i^{(2)}, \eta_i)]\,[\xi_i^{(1)} - \xi_i^{(2)}] \geqq 0$ *ait lieu pour tout* $|i| = k$, *pour tout* $x \in \Omega$ *et pour un couple arbitraire des nombres réels* $\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}$ *et pour* η_i *arbitraire de l'espace euclidien de dimension adéquate.*

Supposons que les fonctions $f \in L^2(\Omega)$, $F \in L^2(\Gamma)$ *remplissent l'inégalité* (6):

$$(6) \quad \int_\Omega fw\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma Fw\,\mathrm{d}s > \sum_{|i| \leqq k} \left[\int_{\Omega_i^+} a_i^+(x)\, D^i w\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_i^-} a_i^-(x)\, D^i w\,\mathrm{d}s\right] + \sum_{|i|<k} \left[\int_{\Gamma_i^+} A_i^+(x)\, D^i w\,\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_i^-} A_i^-(x)\, D^i w\,\mathrm{d}s\right]$$

pour tous w *de l'espace de Sobolev* $W_{k,2}(\Omega)$ *qui sont les solutions de l'équation linéaire*

$$\sum_{|i|,|j| \leqq k} \int_\Omega a_{ij}(x)\, D^i w\, D^j u\,\mathrm{d}x + \sum_{|i|,|j|<k} \int_\Gamma A_{ij}(x)\, D^i w\, D^j u\,\mathrm{d}s = 0\,,$$

où les familles $\Omega_i^{\pm}, \Gamma_i^{\pm}$ *qui dépendent de la fonction* w *sont définies de manière que* $\Omega_i^+ = \{x \in \Omega,\ D^i w(x) > 0\}$, $\Omega_i^- = \{x \in \Omega,\ D^i w(x) < 0\}$, *analogue* $\Gamma_i^+ = \{x \in \Gamma,\ D^i w(x) > 0\}$, $\Gamma_i^- = \{x \in \Gamma,\ D^i w(x) < 0\}$, *et* u *est un élément arbitraire de l'espace* $W_{k,2}(\Omega)$.

Alors pour telles fonctions f, F *il existe au moins une solution de l'équation* (3) *dans l'espace* $W_{k,2}(\Omega)$.

Démonstration. Définissons les opérateurs A, B qui appliquent l'espace $W_{k,2}(\Omega)$ dans lui-même par les équations

$$(Au, v) = \sum_{|i|,|j| \leqq k} \int_\Omega a_{ij}(x)\, D^i u\, D^j v + \sum_{|i|,|j|<k} \int_\Gamma A_{ij}(x)\, D^i u\, D^j v\,\mathrm{d}s$$

$$(Bu, v) = \sum_{|i| \leq k} \int_\Omega g_i(x, D^i u, \eta_i(u))\, D^i v \,\mathrm{d}x + \sum_{|i|<k} \int_\Gamma D^i v\, G_i(x, D^i u, \eta_i(u))\,\mathrm{d}s\,,$$

où u, v sont deux éléments de l'espace $W_{k,2}(\Omega)$.

Nous montrerons maintenant, que ces opérateurs vérifient les hypothèses du théorème 1:

I. L'opérateur A a la propriété (S): Soit $\{u_n\}$ une suite dans $W_{k,2}(\Omega)$ et soit u sa limite faible dans cet espace. Grâce au théorème de la continuité totale de l'injection canonique de l'espace $W_{1,2}(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$, on voit que la suite $\{u_n\}$ est précompacte dans $W_{k-1,2}(\Omega)$. Alors en extrayant de chaque sous-suite de la suite $\{u_n\}$ une nouvelle sous-suite convergente, celle-ci a naturellement pour limite l'élément u considéré. Donc $u_n \to u$ dans $W_{k-1,2}(\Omega)$ et, grâce au théorème des traces (tous les opérateurs des traces sont aussi totalement continus), il suffit de démontrer que la supposition de la condition (S) implique $D^i u_n \to D^i u$ dans $L^2(\Omega)$ pour $|i| = k$. Mais de la forme de l'opérateur et de la convergence intégrale des traces et des dérivées d'ordre plus petit que k il s'ensuit:

$$\sum_{|i|,|j|=k} \int_\Omega a_{ij}\, D^i(u_n - u)\, D^j(u_n - u)\,\mathrm{d}x \to 0\,,$$

alors, grâce à l'ellipticité uniforme, nous obtenons

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{|i|=k} \int_\Omega D^i(u_n - u)^2\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

II. L'opérateur $A + B$ remplit la condition (S): Comme on le voit dans la partie I., il suffit de vérifier la convergence des dérivées d'ordre maximal, mais de la supposition de la condition (S) et de la convergence des autres dérivées et des traces on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{|i|,|j|=k} \int_\Omega a_{ij}\, D^i(u_n - u)\, D^j(u_n - u)\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \sum_{|i|=k} \int_\Omega D^i(u_n - u)\,[g_i(x, D^i u_n, \eta_i(u_n)) - g_i(x, D^i u, \eta_i(u))]\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

De l'ellipticité uniforme de l'opérateur A et de la monotonie de l'opérateur B on déduit que les deux sommes dans cette dernière expression sont des nombres non-négatifs. Donc la limite de chacune de ces expressions est 0 et en utilisant l'ellitpticité on déduit notre assertion comme dans la partie I.

III. Nous montrerons l'existence d'une asymptote faible de l'opérateur B. Définissons pour $w \in \operatorname{Ker} A$:

$$l(w) = \sum_{|i|\leq k} \int_{\Omega_i{}^+} D^i w\, a_i^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_i{}^-} D^i w\, a_i^-(x)\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \sum_{|i|<k} \int_{\Gamma_i{}^+} D^i w\, A_i^+(x)\,\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_i{}^-} D_i w\, A_i^-(x)\,\mathrm{d}s\,.$$

Nous affirmons que $l(w)$ est une asymptote faible de l'opérateur B au sens du théorème 1.

Supposons au contraire l'existence des suites $\{t_n\}$, $\{w_n\}$, $\{u_n\}$ telles que $t_n \nearrow +\infty$, $w_n \rightarrow w$, $u_n \rightharpoonup u$ et telles que $|(Bu_n + t_n w_n), w_n) - l(w_n)| > \eta > 0$ pour chaque n. Alors un des deux cas doit avoir lieu.

a) Il existe $\gamma > 0$ tel qu'on peut déterminer $|i| \leqq k$ et qu'on peut extraire des sous-suites (nous les notons de nouveau $\{t_n\}$, $\{w_n\}$, $\{u_n\}$ de manière que

$$\Big|\int_\Omega D^i w_n\, g_i(x, D^i u_n + t_n\, D^i w_n, D^\alpha u_n + t_n\, D^\alpha w_n)\, dx -$$

$$- \int_{\Omega_{in}+} D^i w_n a_i^+(x)\, dx - \int_{\Omega_{in}-} D^i w_n\, a_i^-(x)\, dx\Big| \geqq \gamma$$

(pour tout n), où $\Omega_{in}^+ = \{x \in \Omega,\ D^i w_n(x) > 0\}$, $\Omega_{in}^- = \{x \in \Omega,\ D^i w_n(x) < 0\}$.

b) Il existe $\gamma > 0$ tel qu'on peut déterminer $|i| < k$ et qu'on peut extraire des sous-suites de manière que

$$\Big|\int_\Gamma D^i w_n\, G_i(x, D^i u_n + t_n\, D^i w_n, D^\alpha u_n + t_n\, D^\alpha w_n)\, ds -$$

$$- \int_{\Gamma_{in}^+} D^i w_n\, A_i^+(x)\, ds - \int_{\Gamma_{in}^-} D^i w_n\, A_i^-(x)\, ds\Big| > \gamma$$

(pour tout n), où $\Gamma_{in}^+ = \{x \in \Gamma,\ D^i w_n(x) > 0\}$, $\Gamma_{in}^- = \{x \in \Gamma,\ D^i w_n(x) < 0\}$.

Grâce à l'analogie des cas a), b), nous pouvons nous occuper seulement du cas a). Supposons donc que le cas a) ait lieu pour quelque valeur de l'index i. Grâce au théorème de Jegorov, il existe un ensemble $\Omega' \subset \Omega$ tel que mes $(\Omega \setminus \Omega') < \delta$ où δ est un nombre arbitraire positif choisi d'avance de sorte que la convergence vers la limite (4) (voir la supposition (i) de ce théorème) est uniforme aussi par rapport à la variable x, où $x \in \Omega'$. Alors nous avons:

(A)
$$\Big|\int_{\Omega\setminus\Omega'} D^i w_n\, g_i(x, D^i u_n + t_n D^i w_n,\ D^\alpha u_n + t_n D^\alpha w_n)\, dx -$$

$$- \int_{\Omega_{in}^+\setminus\Omega'} D^i w_n\, a_i^+(x)\, dx - \int_{\Omega_{in}^-\setminus\Omega'} D^i w_n\, a_i^-(x)\, dx\Big| \leqq$$

$$\leqq \left(\int_{\Omega\setminus\Omega'} (b_i(x) + |a_i^+(x)| + |a_i^-(x)|)^2\, dx\right)^{1/2}$$

grâce au fait que $\|w_n\| = 1$.

En vertu de la continuité en mesure de la dernière expression, on peut choisir Ω' de telle manière que cette expression est plus petite que $\frac{1}{4}\gamma$. Alors:

$$\Big|\int_{\Omega'} D^i w_n\, g_i(x, D^i u_n + t_n\, D^i w_n,\ D^\alpha u_n + t_n\, D^\alpha w_n)\, dx -$$

$$-\int_{\Omega_{in}^{+\prime}} D^i w_n\, a_i^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_{in}^{-\prime}} D^i w_n\, a_i^-(x)\,\mathrm{d}x \Big| \geqq \frac{3}{4}\gamma\,.$$

Pour simplifier nous allons désigner les ensembles Ω', $\Omega_{in}^{\pm\prime} = \Omega_{in}^{\pm} \cap \Omega'$ par Ω, $\Omega_{in}^{\pm}$.

Définissons $m(c) = \sup_{n \in \mathbf{N}} \operatorname{mes} \{x \in \Omega,\ |D^i u_n(x)| \geqq c\}$ où $\mathbf{N}$ est l'ensemble de tous les nombres naturels. Grâce au fait que la suite $\{u_n\}$ est bornée, nous obtenons: $\lim_{c \to +\infty} m(c) = 0$. Définissons des familles M_n^c:

$$M_n^c = \{x \in \Omega,\ D^i u_n(x) \geqq c\}\,.$$

En utilisant la continuité absolue du second membre de l'inégalité (A), nous choisissons $c_0 > 0$ de manière qu'ait lieu l'estimation (B):

(B)
$$\Big|\int_{M_n^{c_0}} D^i w_n\, g_i(x, D^i u_n + t_n D^i w_n, D^\alpha u_n + t_n D^\alpha w_n)\,\mathrm{d}x -$$
$$- \int_{\Omega_{in}^+ \cap M_n^{c_0}} D^i w_n\, a_i^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_{in}^- \cap M_n^{c_0}} D^i w_n\, a_i^-(x)\,\mathrm{d}x \Big| \leqq \frac{\gamma}{4}\,.$$

Définissons encore pour chaque $n \in \mathbf{N}$ et $\vartheta > 0$ des familles

$$W_n^\vartheta = \{x \in \Omega,\ |D^i w_n(x)| < \vartheta\}\,.$$

Alors

(C)
$$\Big|\int_{W_n^\vartheta} D^i w_n g_i(x, D^i u_n + t_n w_n, D^\alpha u_n + t_n D^\alpha w_n)\,\mathrm{d}x -$$
$$- \int_{\Omega_{in}^+ \cap W_n^\vartheta} D^i w_n\, a_i^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_{in}^- \cap W_n^\vartheta} D^i w_n\, a_i^-(x)\,\mathrm{d}x \Big| \leqq$$
$$\leqq \left(\int_{W_n^\vartheta} |D^i w_n|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_\Omega (b_i(x) + |a_i^+(x)| + |a_i^-(x)|)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqq$$
$$\leqq \vartheta (\operatorname{mes}\Omega)^{1/2}\, \|b_i + |a_i^+| + |a_i^-|\,\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Cette dernière expression est plus petite que $\frac{1}{4}\gamma$, si $\vartheta > 0$ est suffisamment petit. On a donc (D):

(D)
$$\Big|\int_{\Omega \setminus M_n^{c_0} \setminus W_n^\vartheta} D^i w_n\, g_i(x, D^i u_n + t_n D^i w_n, D^\alpha u_n + t_n D^\alpha w_n)\,\mathrm{d}x -$$
$$- \int_{\Omega_{in}^+ \setminus M_n^{c_0} \setminus W_n^\vartheta} D^i w_n\, a_i^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_{in}^- \setminus M_n^{c_0} \setminus W_n^\vartheta} D^i w_n\, a_i^-(x)\,\mathrm{d}x \Big| \geqq \frac{\gamma}{4}\,.$$

Définissons maintenant des fonctions:

$$\Theta_i^\pm(\xi) = \sup \{|g_i(x, \xi_i, \eta_i) - a_i^\pm(x)|,\ x \in \Omega,\ \xi_i \in \langle \xi; \pm\infty),\ \eta_i \in R^d\}\,,$$

où $d = n(n^k - 1)/(n - 1)$; le symbole $\langle a, -\infty)$, où a est un nombre réel, désigne naturellement l'intervalle $(-\infty, a\rangle$. Alors nous estimons l'expression dans le premier membre de l'inégalité (D) par l'expression (7):

$$(7) \qquad (\text{mes } \Omega)^{1/2} \left[\Theta_i^+(-c_0 + t_n\vartheta) + \Theta_i^-(c_0 - t_n\vartheta)\right].$$

Mais grâce à l'uniformité de la limite (4), nous obtenons $\lim_{\xi \to \pm\infty} \Theta_i^{\pm}(\xi) = 0$. Parce que c et ϑ sont des constantes positives fixes et $t_n \to +\infty$, la limite de l'expression (7) est zéro ce qui est en contradiction avec l'inégalité (D). L'existence de l'asymptote faible est donc démontrée.

Les autres conditions du théorème 1 excepté la non-trivialité de Ker A suivent facilement des suppositions du théorème 2. Donc, dans le cas où Ker $A \neq \{0\}$, l'existence d'une solution de l'équation (3) est démontrée. Dans le cas où Ker $A = \{0\}$, nous démontrons l'existence d'une solution de l'équation (3) pour chaque deuxième membre en utilisant la remarque 3.

Références

[1] *Dunford N., Schwartz J. T.:* Nonlinear operators, New York, Interscience Publishers, 1958.

[2] *Fučík S.:* Nonlinear equations with noninvertible linear part, Czech. Math. Jour. *24* (1974), 467—495.

[3] *Hess P.:* On the Fredholm alternative for nonlinear functional equations in Banach-spaces, Proc. Amer. Math. Soc. *33* (1972) I, 55—62.

[4] *Hess P.:* On a theorem by Landesman and Lazer, Indiana Univ. Math. J., *23* (1973/74), 827—29.

[5] *Landesman E. A., Lazer A. C.:* Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance, Jour. Math. Mech. *19* (1970), 609—623.

[6] *Lions J. L.:* Quelques méthodes de la résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod Gauthier-Villars, Paris 1969.

[7] *Mawhin J.:* Equivalence theorems for nonlinear operator equations and coincidence degree theory for some mappings in locally convex topological vector spaces, J. Differential Equations *12* (1972), 610—636.

[8] *Nečas J.:* On the range of nonlinear operators with linear asymptotes which are not invertible, Comm. Math. Univ. Carolinae *14*, 1 (1973), 63—72.

[9] *Nečas J.:* Remark on the Fredholm alternative for nonlinear operators with application to nonlinear integral equations of generalised Hammerstein type, Comm. Math. Univ. Carolinae *13*, 1 (1972), 109—120.

[10] *Williams S. A.:* A sharp sufficient condition for solution of a nonlinear elliptic boundary value problem, J. Differential Equations *8* (1970), 580—586.

[11] *Yosida K.:* Functional analysis, Berlin, Springer Verlag, 1971.

[12] *Fučík S., Kučera M., Nečas J.:* Ranges of nonlinear asymptotically linear operators, J. Differential Equations *17* (1975), 375—394.

Les adresses des auteurs: Jiří Jarušek, Výzkumný ústav strojírenské technologie a ekonomiky, 160 00 Praha 6, Velflíkova 4, Jindřich Nečas, Matematický ústav ČSAV, 115 67 Praha 1, Žitná 25.

Časopis pro pěstování matemasiky, roč. 102 (1977), Praha

INTERIOR REGULARITY OF SOLUTIONS TO SYSTEMS OF VARIATIONAL INEQUALITIES

MILAN KUČERA and JINDŘICH NEČAS, Praha

(Received December 4, 1975)

Let Ω be a domain in an N-dimensional Euclidean space R^N with a Lipschitzian boundary. We shall denote by $W_k^2(\Omega)$ the well-known Sobolev space with the norm

$$\|u\|_{W_2{}^k(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqq k} |D^\alpha u|^2 \, dx\right)^{1/2}.$$

Further, let m be a positive integer. Denote by $[W_2^k(\Omega)]^m$ the Cartesian product of $W_2^k(\Omega)$ (m times) with the usual norm, which we shall denote by $\|\cdot\|_{2,k,\Omega}$.

The elements of $[W_2^k(\Omega)]^m$ will be denoted by $u = [u_1, \ldots, u_m]$ ($u_i \in W_2^k(\Omega)$, $i = 1, \ldots, m$).

Let Γ be a given subset of the boundary of Ω. Denote $V = [W_2^1(\Omega)]^m$, $V_\Gamma = \{v \in V;\ v = 0 \text{ on } \Gamma\}$. (We write $v = 0$ if $v_i = 0$ in the sense of traces for $i = 1, \ldots, m$.)

Let $a_t(\xi_1, \ldots, \xi_\varkappa)$ ($t = 1, \ldots, \varkappa$) be real functions of $\varkappa$ variables. Suppose that these functions have measurable bounded derivatives $\partial a_t / \partial \xi_s$ ($t, s = 1, \ldots, \varkappa$). Further, let N_t ($t = 1, \ldots, \varkappa$) be differential operators defined on $[W_2^1(\Omega)]^m$ by the formulas

$$N_t(u) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N c_{i,j}^t \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j},$$

where $c_{i,j}^t$ ($i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, N$, $t = 1, \ldots, \varkappa$) are constants. We shall suppose that the following conditions are fulfilled (with $C > 0$):

$$(1) \qquad \sum_{t,s=1}^{\varkappa} \frac{\partial a_t}{\partial \xi_s}(\eta)\, \xi_t \xi_s \geqq C \sum_{t=1}^{\varkappa} \xi_t^2 \quad \text{for each } \xi, \quad \eta \in R^\varkappa;$$

$$(2) \qquad \int_\Omega \sum_{t=1}^{\varkappa} (N_t(v))^2 \, dx \geqq C \|v\|_{2,1,\Omega}^2 \quad \text{for each} \quad v \in V_\Gamma.$$

The condition (1) is the usual ellipticity, the condition (2) is an inequality of Korn's type (cf. [2]).

Define an operator $A : V \to V^*$ *) by

(3) $$\langle Au, v\rangle = \sum_{t=1}^{\varkappa} a_t(N_\tau(u))\, N_t(v)\, \mathrm{d}x\,.$$

Consider given elements $u_0, \psi \in V$, $u_0 \geqq \psi$ on Ω. (We write $u \geqq \psi$ on Ω if $u_i \geqq \psi_i$ almost everywhere on Ω, $i = 1, \ldots, m$.) Denote

$$K = \{v \in V;\ v - u_0 \in V_\Gamma,\ v \geqq \psi \text{ on } \Omega\}\,.$$

For a given element $f = [f_1, \ldots, f_m] \in [L_2(\Omega)]^m$ we shall seek an element u such that

(4) $$u \in K\,,$$

(5) $$\int_\Omega \sum_{t=1}^{\varkappa} a_t(N_\tau(u))\, N_t(v - u)\, \mathrm{d}x \geqq \int_\Omega \sum_{r=1}^{m} f_r(v_r - u_r)\, \mathrm{d}x \quad \text{for each} \quad v \in K\,.$$

The last condition can be writen as

(6) $$\langle Au, v - u\rangle \geqq \langle f^*, v - u\rangle \quad \text{for all} \quad v \in K\,,$$

where the functional $f^* \in V^*$ is defined by $\langle f^*, v\rangle = \int_\Omega \sum_{r=1}^{m} f_r v_r\, \mathrm{d}x$.

It is easy to show that the set K is convex and closed in V and that the operator A is bounded, continuous, strictly monotone on K (i.e. $\langle Au - Av, u - v\rangle > 0$ for $u, v \in K$, $u \neq v$) and coercive on K (i.e. $\lim\limits_{\substack{\|u\| \to \infty \\ u \in K}} (\langle Au, u - v_0\rangle / \|u\|_{2,1,\Omega}) = +\infty$ for a certain $v_0 \in K$). This follows from the assumptions (1), (2).) Hence, the existence and unicity of the solution of our problem follows from the general theory of variational inequalities which is developed for example in the book [3]. Here we shall deal with the interior regularity of the solution. Namely, we shall prove the following result:

Theorem. *Suppose $\psi \in [W_2^3(\Omega)]^m$. Let u be a solution of the problem* (4), (5), *let Ω' be a subdomain of Ω such that $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. Then $u \in [W_2^2(\Omega')]^m$.*

This result was proved by J. Frehse in [1] for a special class of operators N_t and for $u_0 = 0$. We shall present here another proof, which is based on penalty method and applies to the general case.

Let us consider a continuous, bounded and monotone operator $\beta : V \to V^*$ such that $\beta(v) = 0$ if and only if $v \in K$, i.e. the so called penalty operator correspond-

*) We denote by V^* the dual space to V; the duality between V and V^* is denoted by $\langle .,. \rangle$.

ing to the set K. Then for each positive ε and $f \in V^*$ there exists a unique solution $u^\varepsilon \in V$ of the equation*)

$$(7) \qquad Au^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \beta u^\varepsilon = f$$

and, moreover, $u^\varepsilon \rightharpoonup u$ (if $\varepsilon \to 0+$), where u is a solution of the problem (4), (6) ($\rightharpoonup$ denotes the weak convergence). Especially, u^ε are bounded in the norm of V and $(1/\varepsilon)\, \beta u^\varepsilon$ are bounded in the norm of V^*. This holds for a general Banach space V, a convex closed set $K \subset V$ and a bounded, continuous, strictly monotone and coercive (on K) operator $A : V \to V^*$ (see [3]).

In our special case, it is not convenient to introduce the penalty operator with respect to K directly in the space V. But if we set $K_0 = \{v \in V_\Gamma;\ v + u_0 \in K\}$ and write $w = u - u_0$, then the conditions (4), (6) are equivalent to

$$(8) \qquad w \in K_0\,,$$

$$(9) \qquad \langle A(u_0 + w), v - w \rangle \geqq \langle f, v - w \rangle \quad \text{for each} \quad v \in K_0\,.$$

Define an operator $\beta : V_\Gamma \to V_\Gamma^*$ by

$$\langle \beta(w), v \rangle = -\int_\Omega \sum_{r=1}^m (u_{0,r} + w_r - \psi_r)^- \, v_r \, dx \quad \text{for} \quad u, v \in V_\Gamma\,.$$

It is easy to verify that β has all the properties declared above (for V_Γ instead of V and K_0 instead of K).

We can write an operator $A_{u_0} : V_\Gamma \to V_\Gamma^*$ (defined by $A_{u_0}(v) = A(u_0 + v)$) instead of A in (9). Hence we obtain from the above that for each $\varepsilon > 0$ there exists $w^\varepsilon \in V_\Gamma$ such that

$$A(u_0 + w^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \beta(w^\varepsilon) = f\,.$$

This means (by setting $u^\varepsilon = u_0 + w^\varepsilon$) that there exists $u^\varepsilon \in V$ such that

$$(10) \qquad A(u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \beta(u^\varepsilon - u_0) = f$$

in the space V_Γ^*, i.e.

$$(11) \quad \int_\Omega \sum_{t=1}^{\varkappa} a_t(N_\tau(u^\varepsilon))\, N_t(v)\, dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \sum_{r=1}^m (u_r^\varepsilon - \psi_r)^- \, v_r \, dx = \int_\Omega \sum_{r=1}^m f_r v_r \, dx$$

for each $v \in V_\Gamma$. Moreover, u^ε are bounded in V, $(1/\varepsilon)\, \beta(u^\varepsilon - u_0)$ are bounded in V_Γ^* (but need not be bounded in V^*!).

---

*) The so called equation with the penalty corresponding to the problem (4), (6).

In the sequel we shall use the following notation: Let e be a vector in the direction of the i-th coordinate axis in R^N, $\|e\|_{R^N} = 1$; if v is a real or vector function, $h \neq 0$ a real number, then v_h denotes the function defined by $v_h(x) = v(x - he)$. Moreover, we set

$$\Delta_h(v) = \frac{v_h - v}{h}.$$

Proof of Theorem. Let u^ε be a solution of the equation (10). Consider an arbitrary element $v \in V$ such that $\operatorname{supp} v \subset \Omega'$ (i.e. v lies in the closure of $[\mathscr{D}(\Omega')]^m$ in V). Then we have $v \in V_\Gamma$ and for h sufficiently small also $v_{-h} \in V_\Gamma$. Hence (11) holds for v as well as for v_{-h} instead of v. Thus

$$(12)\quad \int_\Omega \sum_{t=1}^{\varkappa} a_t(N_\tau(u^\varepsilon))\, N_t(v_{-h} - v)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \sum_{r=1}^{m} (u_r^\varepsilon - \psi_r)^- \,(v_{r,-h} - v_r)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_\Omega \sum_{r=1}^{m} f_r(v_{r,-h} - v_r)\,\mathrm{d}x\,.$$

The same equality holds for $v - v_h$ (instead of $v_{-h} - v$) and by a translation of h

$$(13)\quad \int_\Omega \sum_{t=1}^{\varkappa} a_t(N_\tau(u^\varepsilon_{-h}))\, N_t(v_{-h} - v)\,\mathrm{d}x -$$

$$- \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \sum_{r=1}^{m} (u^\varepsilon_{r,-h} - \psi_{r,-h})^- \,(v_{r,-h} - v_r)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_\Omega \sum_{r=1}^{m} f_{r,-h}(v_{r,-h} - v_r)\,\mathrm{d}x\,.$$

By adding the two equalities we obtain

$$(14)\quad \int_\Omega \sum_{t=1}^{\varkappa} [a_t(N_\tau(u^\varepsilon_{-h})) - a_t(N_\tau(u^\varepsilon))]\,.\, N_t(v_{-h} - v)\,\mathrm{d}x -$$

$$- \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \sum_{r=1}^{m} (u^\varepsilon_{r,-h} - \psi_{r,-h})^- - (u_r^\varepsilon - \psi_r)^- \,(v_{r,-h} - v_r)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_\Omega \sum_{r=1}^{m} (f_{r,-h} - f_r)\,(v_{r,-h} - v_r)\,\mathrm{d}x\,.$$

Further, we shall consider a domain Ω^* such that $\bar{\Omega}' \subset \Omega^*$, $\bar{\Omega}^* \subset \Omega$. There exists a real function $\Phi \in \mathscr{D}(\Omega^*)$ such that $\Phi \equiv 1$ on Ω'. We shall set $v = \Phi^2 \,.\, u^\varepsilon$ in (14). Now, we obtain from (14)

$$(15)\quad \langle A(u^\varepsilon_{-h}) - A(u^\varepsilon),\, (\Phi^2 u^\varepsilon)_{-h} - \Phi^2 u^\varepsilon \rangle -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \sum_{r=1}^m [(u^\varepsilon_{r,-h} - \psi_{r,-h})^- - (u^\varepsilon_r - \psi_r)^-] \cdot ((\Phi^2 u^\varepsilon_r)_{-h} - \Phi^2 u^\varepsilon_r)\,dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_{r=1}^m (f_{r,-h} - f_r)((\Phi^2 u^\varepsilon_r)_{-h} - \Phi^2 u^\varepsilon_r)\,dx\,.$$

We shall show that there exist constants C_1, C_2, C_3 such that $C_1 > 0$ and

$$C_1 \|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\,\Phi\|^2_{2,1,\Omega} \leqq C_2 \|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\,\Phi\|_{2,1,\Omega} + C_3\,. \tag{16}$$

It will be clear from here that the norms $\|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\,.\,\Phi\|_{2,1,\Omega}$ are bounded, especially, the norms $\|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\|_{2,1,\Omega'}$ are bounded (independently of ε, h). We have $\Delta_{-h}(u^\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0+}{\rightharpoonup} \Delta_{-h}(u)$ in V for each fixed positive h and therefore the norms $\|\Delta_{-h}(u)\|_{2,1,\Omega'}$ $(h > 0)$ are bounded, too. That means that there exists a weakly convergent sequence $\Delta_{-h_n}(u)$ $(h_n \to 0)$. Simultaneously, $\Delta_{-h}(u) \rightharpoonup \partial u/\partial x_i$ (if $h \to 0$) in $[L_2(\Omega)]^m$, because $u \in [W^1_2(\Omega)]^m$. This implies $\Delta_{-h_n}(u) \rightharpoonup \partial u/\partial x_i$ in $[W^1_2(\Omega')]^m$. In particular, $\partial u/\partial x_i \in$ $\in [W^1_2(\Omega')]^m$, i.e. $u \in [W^2_2(\Omega')]^m$ (because the index i was arbitrary). Hence it is sufficient for the proof of Theorem to show that (16) holds.

First, we shall estimate the left hand side in (15). By using the identity $\Delta_{-h}(\Phi^2 u^\varepsilon) =$ $= \Phi^2\,\Delta_{-h}(u^\varepsilon) + u^\varepsilon_{-h}\,\Delta_{-h}(\Phi^2)$ we obtain

$$\frac{1}{h^2}\langle A(u^\varepsilon_{-h}) - A(u^\varepsilon), (\Phi^2 u^\varepsilon)_{-h} - \Phi^2 u^\varepsilon\rangle = \tag{17}$$

$$= \int_\Omega \sum_{t,s=1}^{\varkappa} \int_0^1 \frac{\partial a_t}{\partial \xi_s}(N_\tau(u^\varepsilon) + \varrho(N_\tau(u^\varepsilon_{-h}) -$$

$$- N_\tau(u^\varepsilon)))\,d\varrho\, N_s(\Delta_{-h}(u^\varepsilon))\, N_t[\Delta_{-h}(\Phi^2 u^\varepsilon)]\,dx = I_1 + I_2\,,$$

where

$$I_1 = \int_\Omega \int_0^1 \sum_{t,s=1}^{\varkappa} \frac{\partial a_t}{\partial \xi_s} N_s(\Delta_{-h}(u^\varepsilon))\,.\,N_t(\Phi^2\,\Delta_{-h}(u^\varepsilon))\,d\varrho\,dx\,,$$

$$I_2 = \int_\Omega \int_0^1 \sum_{s,t=1}^{\varkappa} \frac{\partial a_t}{\partial \xi_s} N_s(\Delta_{-h}(u^\varepsilon))\, N_t(u^\varepsilon_{-h}\,\Delta_{-h}(\Phi^2))\,d\varrho\,dx\,.$$

(We do not write the arguments of the functions $\partial a_t/\partial \xi_s$ depending on ϱ; it is the same as in (17).) By using the formulas

$$N_t(\Phi^2\,\Delta_{-h}(u^\varepsilon)) = \Phi\, N_t(\Phi\,\Delta_{-h}(u^\varepsilon)) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N c^t_{i,j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\,\Phi\,\Delta_{-h}(u^\varepsilon_i)\,, \tag{18}$$

$$N_s(\Delta_{-h}(u^\varepsilon))\,\Phi = N_s(\Phi\,\Delta_{-h}(u^\varepsilon)) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N c^s_{i,j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\,\Delta_{-h}(u^\varepsilon_i) \tag{19}$$

we obtain

$$
(20) \qquad I_1 = \int_\Omega \int_0^1 \sum_{t,s=1}^{\varkappa} \frac{\partial a_t}{\partial \xi_s} N_s(\Phi\, \Delta_{-h}(u^\varepsilon))\, N_t(\Phi\, \Delta_{-h}(u^\varepsilon))\, d\varrho\, dx -
$$

$$
- \int_\Omega \int_0^1 \sum_{t,s=1}^{\varkappa} \frac{\partial a_t}{\partial \xi_s} N_t(\Phi\, \Delta_{-h}(u^\varepsilon)) \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} c^s_{i,j}\, \Delta_{-h}(u^\varepsilon_i) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right] d\varrho\, dx +
$$

$$
+ \int_\Omega \int_0^1 \sum_{t,s=1}^{\varkappa} \frac{\partial a_t}{\partial \xi_s} N_s(\Delta_{-h}(u^\varepsilon))\, \Phi \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} c^t_{i,j}\, \Delta_{-h}(u^\varepsilon_i) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right] d\varrho\, dx\,.
$$

By the assumptions (1), (2) the first integral is not less than $c_1 \|\Phi\, \Delta_{-h}(u))\|^2_{2,1,\Omega}$. Let us estimate the second integral. The functions $\partial a_t/\partial \xi_s$, $\partial \Phi/\partial x_j$ are bounded. Hence, we obtain by virtue of the Hölder inequality and the inequality $2ab \leqq \delta a^2 + \delta^{-1} b^2$ (holding for arbitrary real a, b and $\delta > 0$) that the second integral is not greater in the absolute value than

$$
c_2 \|\Phi\, \Delta_{-h}(u^\varepsilon))\|_{2,1,\Omega}\, \|\Delta_{-h}(u^\varepsilon))\|_{2,\Omega^*} \leqq
$$

$$
\leqq c_2^2 (\delta \|\Phi\, \Delta_{-h}(u^\varepsilon))\|^2_{2,1,\Omega} + \delta^{-1} \|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\|^2_{2,\Omega^*})\,,
$$

where we denote by $\|\cdot\|_{2,\Omega}$ the norm in the space $[L_2(\Omega)]^m$. Let us estimate the last integral in (20). This integral can be rewritten as

$$
\int_\Omega \int_0^1 \sum_{t,s=1}^{\varkappa} \frac{\partial a_t}{\partial \xi_s} N_s(\Phi\, \Delta_{-h}(u^\varepsilon)) \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} c^t_{i,j}\, \Delta_{-h}(u^\varepsilon_i) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right] d\varrho\, dx -
$$

$$
- \int_\Omega \int_0^1 \sum_{t,s=1}^{\varkappa} \frac{\partial a_t}{\partial \xi_s} \left[\sum_{i,j=1}^{N} c^s_{i,j}\, \Delta_{-h}(u^\varepsilon_i) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right] \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} c^t_{i,j}\, \Delta_{-h}(u^\varepsilon_i) \frac{\partial \Phi}{x_j} \right] d\varrho\, dx\,.
$$

The first expression can be estimated in the same way as the second integral in (20), the second is not greater than $c_3 \|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\|^2_{2,\Omega^*}$. Hence we obtain

$$
(21) \qquad I_1 \geqq c_1 \|\Phi\, \Delta_{-h}(u^\varepsilon)\|^2_{2,1,\Omega} - c_4\, \delta \|\Phi\, \Delta_{-h}(u^\varepsilon)\|^2_{2,1,\Omega} -
$$

$$
- c_5 (\delta^{-1} + 1) \|\, \Delta_{-h}(u^\varepsilon)\|^2_{2,\Omega^*}\,.
$$

Now we shall estimate the integral I_2. It is easy to see that

$$
\Delta_{-h}(\Phi^2) = \Delta_{-h}(\Phi)\, (\Phi + \Phi_{-h})\,,
$$

$$
N_s[\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\, (\Phi + \Phi_{-h})] =
$$

$$
= N_s[\Delta_{-h}(u^\varepsilon)]\, (\Phi + \Phi_{-h}) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} c^s_{i,j}\, \Delta_{-h}(u^\varepsilon_i) \frac{\partial}{\partial x_j} (\Phi + \Phi_{-h})\,,
$$

$$N_t[u^\varepsilon_{-h}\,\Delta_{-h}(\Phi^2)] = N_t(u^\varepsilon_{-h})\,\Delta_{-h}(\Phi^2) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} c^t_{i,j} u^\varepsilon_{i,-h} \frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta_{-h}\Phi^2).$$

By an easy calculation we obtain from here

$$(22)\qquad I_2 = \int_\Omega\int_0^1 \sum_{t,s=1}^{\varkappa} \frac{\partial a_t}{\partial \xi_s} N_s[\Delta_{-h}(u^\varepsilon)(\Phi + \Phi_{-h})]\, N_t[u^\varepsilon_{-h}\,\Delta_{-h}(\Phi)]\, d\varrho\, dx -$$

$$- \int_\Omega\int_0^1 \sum_{t,s=1}^{\varkappa} \frac{\partial a_t}{\partial \xi_s} N_s[\Delta_{-h}(u^\varepsilon)(\Phi + \Phi_{-h})] \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} c^t_{i,j} u^\varepsilon_{i,-h} \frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta_{-h}(\Phi))\right] d\varrho\, dx -$$

$$- \int_\Omega\int_0^1 \sum_{t,s=1}^{\varkappa} \frac{\partial a_t}{\partial \xi_s}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} c^s_{i,j}\,\Delta_{-h}(u^\varepsilon_i) \frac{\partial}{\partial x_j}(\Phi + \Phi_{-h})\right] N_t(u^\varepsilon_{-h}\,\Delta_{-h}(\Phi))\, d\varrho\, dx +$$

$$+ \int_\Omega\int_0^1 \sum_{t,s=1}^{\varkappa} \frac{\partial a_t}{\partial \xi_s}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} c^s_{i,j}\,\Delta_{-h}(u^\varepsilon_i) \frac{\partial}{\partial x_j}(\Phi + \Phi_{-h})\right] \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} c^t_{i,j} u^\varepsilon_{i,-h} \frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta_{-h}(\Phi))\right] d\varrho\, dx +$$

$$+ \int_\Omega\int_0^1 \sum_{t,s=1}^{\varkappa} \frac{\partial a_t}{\partial \xi_s} N_s(\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} c^t_{i,j} u^\varepsilon_{i,-h} \frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta_{-h}(\Phi^2))\right] d\varrho\, dx\,.$$

The functions $\partial a_t/\partial \xi_s$, $\Delta_{-h}(\Phi)$ are bounded. Hence we can use the same argument to estimate the first integral in (22) as in the case of the second integral in (20). Moreover, if we use the identity $\Delta_{-h}(u^\varepsilon)(\Phi + \Phi_{-h}) = 2\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\,\Phi + (u^\varepsilon_{-h} - u^\varepsilon)\,\Delta_{-h}(\Phi)$, we obtain that the first integral is not greater (in the absolute value) than

$$c_7\|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)(\Phi + \Phi_{-h})\|_{2,1,\Omega^*}\,\|u^\varepsilon_{-h}\|_{2,1,\Omega^*} \leqq$$
$$\leqq c_7^2\delta\|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)(\Phi + \Phi_{-h})\|^2_{2,1,\Omega} + c_7^2\delta^{-1}\|u^\varepsilon_{-h}\|^2_{2,1,\Omega^*} \leqq$$
$$c_8\delta\|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\,\Phi\|^2_{2,1,\Omega} + c_8\delta^{-1}\|u^\varepsilon\|^2_{2,1,\Omega}\,.$$

The second integral can be estimated in the same way. The third integral is not greater than

$$c_9\|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\|^2_{2,\Omega^*} + c_9\|u^\varepsilon\|^2_{2,1,\Omega}\,,$$

the fourth integral is not greater than

$$c_{10}\|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\|^2_{2,\Omega^*} + c_{10}\|u^\varepsilon\|^2_{2,\Omega}\,.$$

In the case of the last integral, we come back to an expression without any derivatives of the functions a_t. We have

$$(23)\qquad \int_\Omega \int_0^1 \sum_{t,s=1}^{\varkappa} \frac{\partial a_t}{\partial \xi_s} N_s(\Delta_{-h}(u^\varepsilon)) \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N c_{i,j}^t u_{i,-h}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta_{-h}(\Phi^2)\right] \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{h} \int_\Omega \sum_{t=1}^{\varkappa} [a_t(N_\tau(u_{-h}^\varepsilon)) - a_t(N_\tau(u^\varepsilon))] \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N c_{i,j}^t u_{i,-h}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta_{-h}(\Phi^2)) \right] \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{h} \int_\Omega \sum_{t=1}^{\varkappa} a_t(N_\tau(u^\varepsilon)) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N c_{i,j}^t \left[u_i^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta_{-h}(\Phi_h^2)) - u_{i,-h}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta_{-h}(\Phi^2)) \right] \mathrm{d}x \,.$$

Further,

$$(24)\qquad u_i^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta_{-h}(\Phi_h^2)) - u_{i,-h}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta_{-h}(\Phi^2)) =$$

$$= (u_i^\varepsilon - u_{i,-h}^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta_{-h}(\Phi_h^2) + u_{i,-h}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} [\Delta_{-h}(\Phi_h^2 - \Phi^2)] \,.$$

It is easy to see that the functions $(\partial/\partial x_j)(\Delta_{-h}(\Phi_h^2))$ and $(1/h)\,\Delta_{-h}(\Phi_h^2 - \Phi^2)$ are bounded. Moreover, we have $|a_t(\xi)| \leqq c\|\xi\|_{R^N}$ (for $\xi \in R^N$, $\|\xi\|_{R^N}$ denotes the usual Euclidean norm). This follows from the assumption that the derivatives $\partial a_t/\partial \xi_s$ are bounded. Hence we obtain from (23) and (24) that the last integral in (22) is not greater in absolute value than

$$c_{11}\|u^\varepsilon\|_{2,1,\Omega} (\|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\|_{2,\Omega^*} + \|u^\varepsilon\|_{2,\Omega}) \leqq$$
$$\leqq c_{12}(\|u^\varepsilon\|_{2,1,\Omega}^2 + \|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\|_{2,\Omega^*}^2 + \|u^\varepsilon\|_{2,\Omega}^2) \,.$$

This together with the previous yields

$$(25)\qquad |I_2| \leqq c_{13}\,\delta \|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\,\Phi\|_{2,1,\Omega}^2 + c_{14}(\|u^\varepsilon\|_{2,1,\Omega}^2 + \|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\|_{2,\Omega^*}^2) \,,$$

where $c_{13} > 0$ and c_{14} depends on the choice of δ.

Let us remind that the norms $\|u^\varepsilon\|_{2,1,\Omega}^2$ are bounded. It follows from here that the norms $\|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\|_{2,\Omega^*}$ are bounded, too. Hence, if the number δ is sufficiently small, then we obtain from (21), (25)

$$(26)\qquad \frac{1}{h^2} \langle A(u_{-h}^\varepsilon) - A(u^\varepsilon), (\Phi^2 u^\varepsilon)_{-h} - \Phi^2 u \rangle = I_1 + I_2 \geqq$$
$$\geqq C_1 \|\Phi\, \Delta_{-h}(u^\varepsilon)\|_{2,1,\Omega}^2 - C_2 \,,$$

where $C_1 > 0$. (The constants C_1, C_2 depend on the choice of δ.)

Now we shall estimate the member given by the penalty operator in the equation (15). We have

$$(27)\qquad -\frac{1}{\varepsilon h^2} \int_\Omega \sum_{r=1}^m [(u_{r,-h}^\varepsilon - \psi_{r,-h})^- - (u_\varepsilon^r - \psi_r)^-] \times$$

$$\times \left[(u_r^\varepsilon \Phi^2)_{-h} - u_r^\varepsilon \Phi^2\right] \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon h^2} \int_\Omega \sum_{r=1}^m \left[(u_{r,-h}^\varepsilon - \psi_{r,-h})^- - (u_r^\varepsilon - \psi_r)^-\right] \times$$

$$\times (u_{r,-h}^\varepsilon - \psi_{r,-h} - u_r^\varepsilon + \psi_r)\, \Phi^2 \,\mathrm{d}x +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon h^2} \int_\Omega \sum_{r=1}^m \left[(u_{r,-h}^\varepsilon - \psi_{r,-h})^- - (u_r^\varepsilon - \psi_r)^-\right] \times$$

$$\times \left[-(u_r^\varepsilon \Phi^2)_{-h} + u_{r,-h}^\varepsilon \Phi^2 - \psi_{r,-h}\Phi^2 + \psi_r \Phi^2\right] \mathrm{d}x .$$

It is clear that the first expression on the right hand side is nonnegative. (This follows from the monotonicity of the negative part.) The second expression can be written as

$$\frac{1}{\varepsilon h^2} \int_\Omega \sum_{r=1}^m (u_r^\varepsilon - \psi_r)^- \left[-u_r^\varepsilon \Phi^2 + u_r^\varepsilon \Phi_h^2 - \psi_r \Phi_h^2 + \psi_{r,h}\Phi_h^2 +\right.$$

$$\left. + (u_r^\varepsilon \Phi^2)_{-h} - u_{r,-h}^\varepsilon \Phi^2 + \psi_{r,-h}\Phi^2 - \psi_r \Phi^2\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon h^2} \langle \beta(u^\varepsilon - u_0), u_{-h}^\varepsilon(\Phi_{-h}^2 - \Phi^2) + u^\varepsilon(\Phi_h^2 - \Phi^2) +$$

$$+ (\psi_{-h} - \psi)\,\Phi^2 + (\psi_h - \psi)\,\Phi_h^2\rangle =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon h^2} \langle \beta(u^\varepsilon - u_0), u_{-h}^\varepsilon[(\Phi_{-h}^2 - \Phi^2) - (\Phi^2 - \Phi_h^2)] + (u_{-h}^\varepsilon - u^\varepsilon)(\Phi^2 - \Phi_h^2) +$$

$$+ (\psi_h - \psi_r)(\Phi_h^2 - \Phi^2) + (\psi_h - 2\psi + \psi_{-h})\,\Phi^2\rangle =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \left\langle \beta(u^\varepsilon - u_0), u_{-h}^\varepsilon \frac{\Phi_{-h}^2 - 2\Phi^2 + \Phi_h^2}{h^2} + (u_{-h}^\varepsilon - u^\varepsilon) \frac{(\Phi - \Phi_h)(\Phi_h - \Phi)}{h^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{u_{-h}^\varepsilon - u^\varepsilon}{h} \frac{\Phi - \Phi_h}{h} 2\Phi + \frac{(\psi_h - \psi)}{h} \frac{(\Phi_h^2 - \Phi^2)}{h} + \frac{(\psi_h - 2\psi + \psi_{-h})}{h^2} \Phi^2 \right\rangle .$$

This expression in the absolute value is not greater than

$$c_{15}(\|u^\varepsilon\|_{2,1,\Omega} + \|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\,\Phi\|_{2,1,\Omega} + \|\Delta_h(\psi)\|_{2,1,\Omega^*} + \tag{28}$$

$$+ \frac{1}{h^2} \|\psi_h - 2\psi + \psi_{-h}\|_{2,1,\Omega^*} ,$$

because the functionals $(1/\varepsilon)\,\beta(u^\varepsilon - u_0)$ are bounded in the norm of V_Γ^* (independently of ε) and the functions $(1/h^2)(\Phi_{-h}^2 - 2\Phi^2 + \Phi_h^2)$, $(1/h^2)(\Phi - \Phi_h)^2$ $(1/h)(\Phi - \Phi_h)$ are bounded. We know that $\|u^\varepsilon\|_{2,1,\Omega}$ are bounded. Moreover, it follows from the assumption $\psi \in [W_2^3(\Omega)]^m$ that the norms $\|\Delta_h \psi\|_{2,1,\Omega^*}$, $(1/h^2)\, \|\psi_h - 2\psi - \psi_{-h}\|_{2,1,\Omega^*}$ are bounded (if $h \to 0$). Hence the expression from (28) is not less than

$$-c_{16}\|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\,\Phi\|_{2,1,\Omega} - c_{17} .$$

The right hand side in (15) can be rewritten by means of the identity

$$(\Phi^2 u^\varepsilon)_{-h} - \Phi^2 u^\varepsilon = \Phi^2_{-h}(u^\varepsilon_{-h} - u^\varepsilon) + (\Phi^2_{-h} - \Phi^2)\, u^\varepsilon = \tag{29}$$
$$= (\Phi^2_{-h} - \Phi^2)\,(u^\varepsilon_{-h} - u^\varepsilon) + \Phi^2(u^\varepsilon_{-h} - u^\varepsilon) + (\Phi^2_{-h} - \Phi^2)\, u^\varepsilon .$$

The functions $\Delta_{-h}(\Phi^2)$, Φ, Φ^2 are bounded independently of h. Moreover, it is easy to see that for $f \in [L_2(\Omega)]^m$ we have $\Delta_{-h}(f) \rightharpoonup \partial f/\partial x_i$ in the dual space $([W_2^1(\Omega^*)]^m)^*$. Especially, $\Delta_{-h}(f)$ are bounded in this space.

It follows from here and from (29) that the absolute value of the right hand side in (15) is not greater than

$$c_{17}(\|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\,\Phi\|_{2,1,\Omega} + \|u^\varepsilon\|_{2,1,\Omega})h^2 \leqq c_{18}\|\Delta_{-h}(u^\varepsilon)\,\Phi\|_{2,1,\Omega}h^2 .$$

Now all the estimates proved yield together the inequality (16). The proof of the theorem is complete.

References

[1] *J. Frehse:* On systems of second-order variational inequalities. Israel J. of Math., Vol. *15*, No. 4, 1973, 421—429.

[2] *I. Hlaváček, J. Nečas:* On inequalities of Korn's type I—II. Archive Rat. Mech. and An. *36*, 305—311, 312—334 (1970).

[3] *J. L. Lions:* Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod Paris, 1969.

Authors' address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

BOHDAN ZELINKA, Liberec: *Finite planar vertex-transitive graphs of the regularity degree three.* (Konečné rovinné uzlově transitivní grafy, jež jsou kubické.)

V článku je dán úplný výčet konečných rovinných souvislých uzlově transitivních grafů, jež jsou kubické.

IVAN CHAJDA, Přerov, BOHDAN ZELINKA, Liberec: *Lattices of tolerances.* (Svazy tolerancí.)

Tolerance kompatibilní s algebrou $\mathfrak{A}$ je binární relace na množině prvků algebry $\mathfrak{A}$, jejíž definice je podobná definici kongruence, pouze je vynechán předpoklad transitivnosti. V článku jsou vyšetřovány vlastnosti svazu $LT(\mathfrak{A})$ všech tolerancí kompatibilních s algebrou $\mathfrak{A}$.

H. S. GOPALAKRISHNA, SUBHAS S. BHOOSNURMATH, Dharwar: *Exceptional values of linear combinations of the derivatives of a meromorphic function.* (Vyjímečné hodnoty lineárních kombinací derivací meromorfní funkce.)

Je-li f transcendentní meromorfní funkce v rovině a je-li $\psi_f = a_1 f^{(1)} + \ldots + a_{k-2} f^{(k-2)} + a_k f^{(k)}$, kde $k \geqq 3$ a $a_1, \ldots, a_{k-2}, a_k$ jsou komplexní čísla, $a_k \neq 0$, potom buď f nemá žádnou konečnou Borelovu vyjímečnou hodnotu nebo jediným nulovým bodem, v němž ψ_f má konečnou Borelovu vyjímečnou hodnotu, je počátek. Tato věta je zobecněním známého Haymanova výsledku.

JAN LIGĘZA, Katowice: *The existence and the uniqueness of distributional solutions of some systems of non-linear differential equations.* (Existence a jednoznačnost distributivních řešení jistých systémů nelineárních diferenciálních rovnic.)

Autor vyšetřuje systém diferenciálních rovnic $y' = f(y)$ s použitím Mikusińského teorie distribucí.

JAN LIGĘZA, Katowice: *On distributional solutions of some systems of linear differential equations.* (O distributivním řešení jistých systémů lineárních diferenciálních rovnic.)

Autor udává podmínku pro existenci a jednoznačnost řešení systému lineárních diferenciálních rovnic ve smyslu Mikusińského teorie distribucí.

EVA POKORNÁ, Praha: *Harmonic functions on convex sets and single layer potentials.* (Harmonické funkce na konvexních množinách a potenciály jednoduché vrstvy.)

V práci je dokázána nutná a postačující podmínka k tomu, aby funkce harmonická na konvexní oblasti v euklidovském prostoru splývala s Newtonovým potenciálem náboje rozloženého na hranici uvažované oblasti.

JIŘÍ JARUŠEK, JINDŘICH NEČAS, Praha: *Sur les domaines des valeurs des opérateurs non-linéaires.* (O oblastech hodnot nelineárních operátorů.)

V tomto článku se autoři zabývají problémem existence řešení rovnice $Ax + Bx = h$, kde A a B jsou operátory zobrazující Hilbertův prostor H do H, A je spojitý lineární operátor, B je polospojitý lineární operátor se slabou asymptotou. Operátor A jakož i operátor $A + B$ splňují podmínku (S) z definice 1. Existenční věta je aplikována na případ eliptických rovnic.

MILAN KUČERA, JINDŘICH NEČAS, Praha: *Interior regularity of solutions to systems of variational inequalities.* (Vnitřní regularita řešení systémů variačních nerovností.)

Nechť Ω je oblast v R^N, Γ daná podmnožina její hranice. Položme $V = [W_2^1(\Omega)]^m$ (m-násobný kartézský součin Sobolevova prostoru) a $K = \{v = [v_1, \ldots, v_m] \in V;\ v_i = u_i^0$ na Γ, $v_i \geqq \psi_i$ na Ω, $i = 1, \ldots, m\}$, kde $u_0 = [u_1^0, \ldots, u_m^0]$, $\psi = [\psi_1, \ldots, \psi_m] \in V$ jsou dané m-tice funkcí. Nechť $a_t(\xi_1, \ldots, \xi_\varkappa)$ ($t = 1, \ldots, \varkappa$) jsou reálné funkce s omezenými měřitelnými derivacemi. V článku se dokazuje vnitřní regularita řešení $u \in K$ variační nerovnosti

$$\int_\Omega \sum_{t=1}^{\varkappa} a_t(N_\tau(u))\, N_t(v - u)\, dx \geqq \int_\Omega \sum_{r=1}^{m} f_r(v_r - u_r)\, dx$$

pro každé $v \in K$, kde

$$N_t(u) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}^t \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}$$

($c_{i,j}^t$ jsou konstanty) a $f \in [L_2(\Omega)]^m$. Přesněji, za jistých předpokladů (elipticita, platnost nerovnosti Kornova typu atd.) platí $u \in [W_2^2(\Omega')]^m$ pro libovolnou podoblast Ω' oblasti Ω, pro niž $\overline{\Omega}' \subset \Omega$.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

RECENSE

Bo Stenström: RINGS OF QUOTIENTS (An introduction to methods of ring theory), Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band 217, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1975, 309 + viii stran, cena DM 92,—.

Kniha je věnována hlavně studiu teorie podílových okruhů, poskytuje však též přehled o základních metodách a výsledcích celé teorie okruhů. V kapitole I „Modules" jsou podány základy teorie modulů s aplikacemi na některé důležité třídy okruhů (polojednoduché, regulární, koherentní okruhy). V kapitole II „Rings of fractions" jsou studovány podílové okruhy vzhledem k multiplikativně uzavřené podmnožině. Kapitoly III—V „Modular lattices", „Abelian categories", „Grothendieck categories" jsou věnovány základním nástrojům obecné teorie okruhů. Kapitola VI „Torsion theory" je uceleným přehledem vlastností různých typů torsních teorií se zvláštním zřetelem ke Gabrielovým topologiím. Klasifikace Gabrielových topologií pro některé noetherovské okruhy je podána v kapitole VII „Hereditary torsion theories for noetherian rings" a pro okruhy s vhodnými minimálními podmínkami na pravé ideály v kapitole VIII „Simple torsion theories". Centrální částí knihy je kapitola IX „Rings and modules of quotients", v níž jsou zavedeny obecné podílové okruhy a moduly. Funktor lokalizace a kategorické vlastnosti podílových modulů jsou studovány v kapitolách X „The category of modules of quotients" a XI. „Perfect localizations". Vlastnostem některých speciálních tříd okruhů v souvislosti s maximálními podílovými okruhy jsou věnovány kapitoly XII, XIII, XIV „The maximal ring of quotients of a non-singular ring", „Finiteness conditions on Mod (A, J)", „Self-injective rings". Závěrečná kapitola XV „Classical rings of quotients" se vrací ke klasickým otázkám studovaným již v kapitole II.

***Ladislav Bican*, Praha**

Rudolf Piska, Václav Medek: DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE II. Praha 1975, SNTL - Nakladatelství technické literatury, n. p. a ALFA - Vydavatel'stvo technickej a ekonomickej literatúry, n. p., 2. vyd., náklad 4700 výt., str. 400, obr. 376, cena Kčs 26,— váz.

Druhý díl učebnice po teoretickém výkladu o křivkách a některých plochách se zabývá těmi aplikacemi deskriptivní geometrie, které jsou potřebné pro stavební inženýry. Vzhledem k tomu, že nové vydání[1]), nehledí-li se k opravení několika drobných nedopatření, se liší od prvního jen v některých doplňcích, které byly zařazeny hlavně do poslední části knihy (str. 338—390), jeví se jako účelné zmínit se pouze o těchto doplňcích.

Protože v některých směrech byla rozšířena látka I. dílu učebnice, byla sem především přeřazena část týkající se osvětlení těles v základních druzích promítání. Tím však vznikl metodický nedostatek, neboť již na začátku II. dílu je prováděno osvětlení některých ploch (např. rotační kvadratické plochy) a jeho vlastní teorie se objevuje až v závěru učebnice. Dále je pak nově uvedeno tzv. technické osvětlení, kdy vržený stín na (obvykle) svislou průmětnu nahrazuje pomocný

[1]) Recenze 1. vydání byla uveřejněna v tomto časopise roč. *92* (1967), str. 363—364.

průmět (tak, jak je tomu v každém promítacím způsobu: jde tedy o kombinaci pravoúhlého a kosoúhlého promítání na touž průmětnu). Nakonec je sem zařazena kapitola o trojhranu (určená tedy studentům zeměměřického inženýrství), kdy po výkladu základních vlastností trojhranu jsou uvedeny jeho základní konstrukce z jeho stran a úhlů.

V učebnici se jedna část (celkem jen 16 stran) zabývá základy tzv. stereotomie. Dnešní projektanti však neradi navrhují zhotovení propusti v násypu, vyústění tunelu, příp. jiná větší stavební díla z kamene, neboť se domnívají, že betonové, příp. železobetonové konstrukce jsou ekonomicky výhodnější. Naproti tomu konstrukce z tesaného kamene (který bývá často těžen nedaleko stavěného díla, mnohdy i přímo v díle samém) jsou vzhledově mnohem hezčí. Tento spor nelze však řešit při recenzi uvedené učebnice, nutno však s politováním konstatovat, že na stavební fakultě ČVUT v Praze již přes 15 let se stereotomie nepřednáší z důvodů požadavků kateder předmětů inženýrské praxe. Jak ukazují závažné zprávy z jednání komisí pro reformu studia na stavebních fakultách, tento tlak kateder praxe dále sílí a povede k dalšímu omezení ve výkladu užité geometrie, jak by bylo vhodnější vzhledem k použití nazývat dosavadní deskriptivní geometrii.

Karel Drábek, Praha

I. Farkasová a *M. Farkas:* INTRODUCTION TO LINEAR ALGEBRA. Vydali Akadémiai Kiadó v Budapešti a Adam Hilger Ltd. v Londýně r. 1975. První vydání, 205 stran.

První kapitola je věnována vektorům v rovině a v trojrozměrném prostoru, skalárnímu a vektorovému součinu a na několika stránkách je pojednáno o významu pro geometrii a mechaniku. Ve druhé kapitole jsou zavedena komplexní čísla a jsou zde probrány základní vlastnosti polynomů. Po těchto pomocných partiích následuje kapitola věnovaná maticím a determinantům. Jsou zde zavedeny operace mezi maticemi, studována lineární závislost v prostoru n-tic čísel a odvozeny nejzákladnější vlastnosti determinantů. Ve čtvrté kapitole jsou probírány základy teorie soustav lineárních algebraických rovnic a lineárního programování. V páté kapitole je něco o lineárních a euklidovských prostorech, zejména Cauchyova nerovnost a souvislost transformací ortonormálních souřadnic s ortogonálními maticemi. Poslední kapitola pojednává o lineárních operátorech a jejich souvislosti s maticemi. Jsou zde zavedena vlastní čísla matice a vrchol tvoří věty o diagonální formě symetrické matice a o polárním rozkladu. Na několika stránkách je tu též zmínka o kvadratických formách.

V předmluvě je knížka určena jako učebnice pro studenty prvních ročníků fakult zaměřených na matematiku, přírodní vědy a inženýrství. Na první pohled je zřejmé, že pro studenty matematiky je příliš povrchní. Obávám se však, že příliš neprospěje ani přírodovědcům a technikům. Je napsána značně nezáživně a připomíná špatné skriptum, jehož autor byl nucen nahonem zkompilovat učební text, který by umožnil při redukovaném počtu hodin odpřednášet rozšířené množství látky. Zvláště zarážející je, že učebnice se až na malé výjimky nezmiňuje o praktických aplikacích probrané teorie a numerické aspekty jsou zcela opominuty. Vyvstává otázka, na kterých školách s anglickým vyučovacím jazykem budou podle recenzované učebnice přednášet. Z informací na záložce vysvítá, že autoři z budapešťské techniky působili též v Nigerii a to podporuje domněnku, že učebnice byla vydána pro studenty z rozvojových zemí. Obávám se však, že vzhledem k příslušným specifickým problémům je pro ně tím méně vhodná.

Antonín Vrba, Praha

R. von Randow: INTRODUCTION TO THE THEORY OF MATROIDS. Vydalo Springerovo nakladatelství, Berlin—Heidelberg—New York r. 1975 jako 109. svazek edice Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. První vydání, 102 str., cena DM 18,—.

V polovině třicátých let definoval H. Whitney matematickou strukturu „matroid". Příslušné axiomy byly zobecněním základních vlastností lineární závislosti ve vektorových prostorech.

Whitney zároveň ukázal, že těmto axiomům vyhovují též jisté podgrafy daného grafu a provedl základní výzkum na tomto poli. Asi o deset let později se ukázaly souvislosti matroidů s kombinatorickou teorií transversál a s algebraickou teorií svazů, což byl další impuls pro jejich zkoumání. Po dalších deseti letech se velmi zevrubně zabýval matroidy s hlediska teorie grafů W. T. Tutte a od šedesátých let trvá zvýšený zájem o tyto objekty. Jednotlivé směry studia jsou však navzájem značně odlehlé a monografie o matroidech (W. T. Tutte, C. P. Bruter) se omezují jen na určitý aspekt. Autor se v recenzované publikaci pokusil sestavit všeobecný úvod do teorie matroidů, aniž by preferoval některé hledisko.

V první kapitole je uvedeno pět klasických axiomatických definic matroidu (dvě pomocí hodnosti, dále pomocí závislosti, kružnic a base) a je ukázána jejich vzájemná ekvivalence. Druhá kapitola obsahuje přehled základních vlastností matroidů, zejména je probrána dualita matroidů. V další kapitole jsou uvedeny rozmanité příklady matroidů, zejména matroidy související s lineární algebrou a s teorií grafů, s obecnou kombinatorikou a binární matroidy. Čtvrtá kapitola se zabývá využitím matroidů při konstrukci extremální množiny ze souboru podmnožin konečné množiny opatřené vahou (tzv. Greedy Algorithm). V poslední kapitole jsou shrnuty některé poměrně nedávné výsledky týkající se změn base matroidu.

Materiál je vhodně vybrán i uspořádán a dobře ukazuje, jak zajímavý je unifikující pohled z hlediska bohaté obecné struktury na rozmanité matematické discipliny. Četné odkazy na více než 50 položek seznamu literatury umožňují čtenáři zorientovat se v základní literatuře. Přesto, že knížka není tištěna ze sazby, je poměrně přehledná. Bude užitečná především kombinatorikům jako kompendium a dále pak všem matematikům, kteří se chtějí seznámit s hlavními ideami této plodné teorie. Pro odborníky v matematické ekonomii a operačním výzkumu, jimž je knížka také určena (očekává se, že matroidy co nejdříve ovlivní i tato odvětví), je však styl výkladu asi přece jen příliš strohý.

Antonín Vrba, Praha

Ivar Ekeland, Roger Temam: ANALYSE CONVEXE ET PROBLÈMES VARIATIONNELS. Dunod a Gauthier-Villars, Paris—Bruxelles—Montréal 1974. XII + 340 stran. Cena 220 F.

V edici *Études mathématiques* vyšly v uplynulých letech mj. dvě znamenité publikace J.-L. Lionse, věnované problematice parciálních diferenciálních rovnic (o nelineárních okrajových úlohách a o optimální regulaci). Posuzovaná kniha, která tvoří další svazek edice, si udržela dobrou úroveň svazků předcházejících, s nimiž také tématicky úzce souvisí. Jistě není náhodou, že autoři věnovali svou knihu právě J.-L. Lionsovi.

Studium konvexních funkcí a jejich vlastností i aplikací je již po mnoho let vděčným polem působnosti; teprve v posledních letech se však — především na základě zobecňování problémů lineárního programování i na programování nelineární a díky různým dalším, i nečekaným aplikacím — zkonstituovala konvexní analýza jako samostatná oblast matematického bádání. Oba autoři chtějí ve své knize popsat některé výsledky konvexní analýzy a pojednat o jejich užití v různých problémech: v okrajových úlohách pro parciální diferenciální rovnice, v numerické analýze, v mechanice, v ekonomii. Všechny tyto aplikace lze formulovat jako variační problémy; v souladu s plány autorů je kniha rozdělena na tři části: v první části se vykládají základy konvexní analýzy, část druhá pojednává o dualitě a konvexních variačních problémech, třetí pak o relaxaci a nekonvexních variačních problémech.

První část je tvořena třemi kapitolami. Pojednává se v nich o vlastnostech konvexních funkcí (jsou míněny funkcionály nad reálným lineárním topologickým prostorem V); mj. je zaveden důležitý pojem konjugované funkce a pojem subdiferenciálu zobecňujícího pojem derivace. Dále je vyšetřován problém minimalizace konvexní funkce, tj. hledání prvku $u \in V$, pro který je $F(u) = \inf F(v)$ (existence minima, charakterizace řešení u atd.), a problém je formulován též v jazyce variačních nerovností. A konečně je zaveden důležitý pojem duálního problému: k problému

$$(\mathscr{P}) \qquad \inf_{u\in V} F(u)$$

resp. k tzv. *perturbovanému problému*

$$(\mathscr{P}_p) \qquad \inf_{u\in V} \Phi(u, p)\,,$$

kde Φ je definována na $V \times Y$ a je $\Phi(u, 0) = F(u)$, se definuje tzv. *duální problém*

$$(\mathscr{P}^*) \qquad \sup_{p^*\in Y^*} \{-\Phi^*(0, p^*)\}\,,$$

kde Φ^* je funkce konjugovaná k Φ, definovaná na $V^* \times Y^*$. Jsou vyšetřovány vztahy mezi oběma problémy a obecné úvahy jsou specifikovány, ovšem zatím stále ještě v dosti obecné rovině.

Druhá část knihy se ve čtyřech kapitolách zabývá konkrétními aplikacemi principu duality. Nejprve se na řadě konkrétních variačních problémů (jde o okrajové úlohy pro diferenciální rovnice, o úlohy z fyziky, o optimální regulace), kde V a Y jsou prostory Sobolevova typu $W^{k,p}$ s $p > 1$, charakterizuje duální problém $(\mathscr{P}^*)$ a vyšetřuje se jeho vztah k problému $(\mathscr{P})$, který má v těchto případech řešení. Dále se zkoumají problémy typu minimální plochy, vedoucí na nereflexivní prostory $W^{k,1}$. Ukazuje se, že duální problém má v tomto případě jednoznačně určené řešení a že vztahu mezi $(\mathscr{P})$ a $(\mathscr{P}^*)$ lze využít k definici zobecněného řešení původního problému $(\mathscr{P})$. Dále je pro úplnost pojednáno o principu duality přes tzv. min—max, tj. o případ, kdy $F(u) = \sup_{w\in Z} L(u, w)$ a kdy tedy u problému $(\mathscr{P})$ jde o $\inf_{u\in V} \sup_{w\in Z} L(u, w)$; duální problém se zde definuje jako problém $\sup_{w\in Z} \inf_{u\in V} L(u, w)$. Konečně v poslední kapitole této části jsou uvedeny další aplikace principu duality: v numerické analýze, kdy lze pomocí tohoto principu upravit algoritmy numerického řešení problému, v mechanice, kde lze precizovat vztahy mezi různými energetickými principy, v ekonomii, kde se duální problém formuluje v termínech cen, aj.

Poslední část pojednává ve třech kapitolách o řešení problému $(\mathscr{P})$ pro nekonvexní funkci. Nejprve je zkoumán problém existence řešení, což je ilustrováno na příkladech. Pak se zkoumá tzv. *relaxovaný problém* $(\mathscr{P}\mathscr{R})$, v němž je nekonvexní funkce Φ nahrazena — zhruba řečeno — jistou konvexní funkcí a je pak zkoumán vztah mezi problémy $(\mathscr{P})$ a $(\mathscr{P}\mathscr{R})$. Jedná se zde o problémy typu $\inf \int_\Omega f(x, u(x), p(x))\, dx$, kde p je vektorová funkce, a jsou rozlišeny případy, kdy existuje klasické řešení problému $(\mathscr{P})$ a kdy neexistuje. Výsledky jsou aplikovány na konkrétní úlohy.

Kniha je zakončena historicko-bibliografickými komentáři k jednotlivým kapitolám a seznamem literatury.

Autoři si nekladli za cíl podat ucelený a systematický výklad celé problematiky; spíše chtěli popsat některé typické metody založené na konvexní analýze, a to ilustrací na co možná konkrétních úlohách. Tento úkol se jim bezesporu podařil, a tak lze knihu jen uvítat. Jediným kazem publikace je skutečnost, že neobsahuje ani rejstřík, ani seznam označení; i když je kniha psána přehledně a nešetří se odkazy na jiné části knihy, přece jen je orientace v knize dost ztížena. Je to nedostatek, ale snad ho lze chápat jako výjimku, která potvrzuje pravidlo.

Alois Kufner, Praha

Paul R. Halmos: MEASURE THEORY. Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin 1974. XII + 304 stran. Cena DM 26,90.

V roce 1950 vydalo nakladatelství Van Nostrand v New Yorku v edici *The University series in higher mathematics* knížku, která se zakrátko stala jednou ze základních učebnic jedné matematické discipliny, učebnicí rozšířenou po celém (matematickém) světě, mj. i díky ruskému překladu z roku 1953.

Tou knížkou byla Halmosova Teorie míry. A jestliže se nakladatelství Springer rozhodlo vydat tuto knihu v roce 1974 jako 18. svazek edice *Graduate texts in mathematics*, a to bez jakékoliv změny, dokonce jako reprint původního vydání, svědčí to jen o kvalitách této publikace a o její stálé aktuálnosti.

Jistě proto není nutné psát nějakou podrobnou recenzi — byla by to vlastně recenze po 25 letech. A tak uveďme pro orientaci jen názvy jednotlivých kapitol: Sets and classes — Measures and outer measures — Extension of measures — Measurable functions — Integration — General set functions — Product spaces — Transformations and functions — Probability — Locally compact spaces — Haar measure — Measure and topology in groups.

Alois Kufner, Praha

Alexander M. Olevskii: FOURIER SERIES WITH RESPECT TO GENERAL ORTHOGONAL SYSTEMS. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1975. X + 136 stran. Cena DM 78,—.

Ačkoliv teorie Fourierových řad má již staletou tradici (v roce 1777 našel Euler vztah mezi funkcí a koeficienty jejího rozvoje v trigonometrickou řadu), je stále vděčným předmětem zkoumání. Dlouhá léta byly vyšetřovány jen trigonometrické Fourierovy řady, teprve mnohem později se ukázalo, že stejně důležité jsou i Fourierovy řady vzhledem k různým obecným ortogonálním systemům.

Útlá knížka A. Olevského je překladem z ruského originálu, o kterém se recenzentovi nepodařilo získat žádné bibliografické údaje. Publikace je věnována právě obecným *ortonormálním soustavám* (krátce ONS), tj. je vyšetřován vztah mezi řadou

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n \quad (\text{kde } \{\Phi_n\} = \Phi$$

je obecná ONS funkcí definovaných na intervalu $\langle a, b \rangle$), koeficienty c_n a případně i funkcí f definovanou na $\langle a, b \rangle$, jsou-li c_n Fourierovy koeficienty: $c_n = c_n(f) = \int_a^b f(x)\, \Phi_n(x)\, dx$. Jsou v ní obsaženy výsledky, dosažené v průběhu posledních 15 let převážně sovětskou matematickou školou; velkou část tvoří výsledky autorovy, z nichž řada je zde publikována poprvé.

Ačkoliv knížka není rozsáhlá, obsahuje mnoho výsledků, výsledků nejrůznějšího druhu a velmi zajímavých, ilustrujících možnosti, které dávají obecné ONS, a ukazujících jejich úzkou souvisvislost s klasickým trigonometrickým systémem i některé rozdíly.

V první kapitole je vyšetřována konvergence Fourierovy řady v klasickém smyslu. Ukazuje se, že tento problém úzce souvisí s chováním Lebesgueovy funkce soustavy Φ, definované vztahem

$$L_n(\Phi, x) = \int_a^b \Big| \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(x)\, \Phi_k(t) \Big|\, dt\,.$$

Výsledky zde obsažené jsou založeny především na metodě dolního odhadu částečných součtů řady $\Sigma c_n \Phi_n$ v metrice prostoru L_1, která pochází od autora a jíž je věnován první paragraf. Ukazuje se například, že nelze sestrojit *omezenou* ONS Φ (tj. takovou, že $|\Phi_n(x)| \leqq M$ pro všechna x a n), která by měla tu vlastnost, že Fourierova řada libovolné spojité funkce vzhledem k Φ konverguje všude v $\langle a, b \rangle$ (tím se na omezené ONS rozšiřuje klasický výsledek du Bois-Reymondův z teorie trigonometrických řad). Z výsledků kapitoly např. plyne, že omezená ONS nemůže tvořit bázi ani v prostoru C ani v prostoru L_1 (na rozdíl od prostoru L_p s $p > 1$, kde bázi tvoří omezený trigonometrický systém). Jsou zde vyšetřovány řady s klesajícími koeficienty a ONS s majorantou, tj. takové, že $|\Phi_n(x)| \leqq \delta(x)$ pro všechna n.

Kapitola druhá je věnována konvergenci skoro všude. Označíme-li $\mathfrak{S}(\Phi)$ třídu všech posloupností $\{c_n\}$, pro něž řada $\Sigma c_n \Phi_n$ konverguje skoro všude, pak pro trigonometrický systém τ dokázal Carleson teprve v roce 1966 Luzinovu hypotézu, že $\mathfrak{S}(\tau) \supset l_2$. V kapitole jsou popsány některé výsledky maďarské školy, týkající se třídy $\mathfrak{S}_\Omega = \bigcap \mathfrak{S}(\Phi)$, kde Φ probíhá množinu Ω všech ONS na $\langle a, b\rangle$. Dále je zde uvedena např. Garsiova věta o tom, že libovolnou řadu tvaru $\Sigma c_n \Phi_n$ s $\{c_n\} \in l_2$ lze přerovnat tak, aby konvergovala skoro všude. Je zkoumána třída $\mathfrak{S}^\Pi = \bigcup_{\Phi \in \Pi} \mathfrak{S}(\Phi)$, kde Π je množina všech úplných ONS (tj. takových, že $c_n(f) = 0$ pro všechna n jen tehdy, je-li $f = 0$) a je studován problém rozšíření posloupnosti funkcí, definovaných na podmnožině intervalu $\langle a, b\rangle$, na celý interval tak, aby výsledná soustava byla ONS.

Haarův systém χ byl první ONS, vzhledem k níž měla každá spojitá funkce konvergentní Fourierovu řadu. V kapitole třetí je podrobně studováno vyjímečné postavení ONS χ, která je v jistém smyslu nejlepší mezi všemi úplnými ONS, neboť platí-li nějaký jev týkající se divergence Fourierovy řady pro ONS χ, platí už pro každý systém $\Phi \in \Pi$. Je zde popsána metoda, která umožňuje redukovat problém týkající se soustavy $\Phi \in \Pi$ na týž problém pro Haarovu soustavu. Dále je zde studován problém uspořádání v soustavě Φ; v trigonometrické řadě i celé řadě obecných ONS je dáno přirozené uspořádání, obecně tomu však tak není. V kapitole je např. ukázáno, že pro každý úplný ONS Φ existuje funkce $f \in L_2$, jejíž Fourierova řada diverguje pro přerovnání skoro všude.

Poslední čtvrtá kapitola je věnována konvergenci skoro všude a v průměru stupně p pro funkce z L_p, především pak zvláštnostem Fourierových řad v prostoru L_p s $p < 2$. Značná část kapitoly je věnována konstrukcím ONS, které mají různé „neklasické" vlastnosti a na nichž se ukazuje široká paleta možností, které skýtají obecné ONS.

Popsali jsme zde pochopitelně jen část výsledků v knize obsažených. Výsledky jsou většinou dokazovány, je ovšem třeba říci, že důkazy jsou spíše pracné než elegantní, jak tomu už bývá, když se dochází do jemností teorie. Kniha podává dobrý přehled a vhodně doplňuje existující literaturu; je jen škoda, že obsahuje některá drobná nedopatření, která působí občas trochu rušivě a odvádějí čtenářovu pozornost od podstaty věci (mám na mysli např. některé symboly, které se jinak definují a jinak vypadají v textu, či symboly a termíny, jejichž smysl není vysvětlen). Jsou to však — jak už bylo řečeno — drobnosti, které nekazí celkový dobrý dojem z Olevského knížky. Její četbu je možno doporučit skoro všem čtenářským vrstvám; dodejme na závěr, že část knížky tvořila obsah autorovy přednášky na universitě v Szegedu ve školním roce 1970/71.

Alois Kufner, Praha

Johannes C. C. Nitsche: VORLESUNGEN ÜBER MINIMALFLÄCHEN. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1975. XIV + 776 stran, 86 obrázků. Cena DM 196,—.

Teorie minimálních ploch má své počátky v 18. století: v roce 1762 uveřejnil J. L. Lagrange pojednání věnované nové metodě variačního počtu a tuto metodu ilustroval právě na úloze najít plochu v trojrozměrném prostoru, která by byla ohraničena danou uzavřenou křivkou a měla přitom co možná nejmenší povrch. Lagrange učinil první krok, ale dalšímu studiu problému minimálních ploch se už nevěnoval; to za něj učinili v průběhu dalších desetiletí mnozí jiní matematici zvučných jmen.

Historie teorie minimálních ploch je pohnutá: byla už mnohokrát odepisována (v posuzované knize je např. citován názor, že vývoj teorie minimálních ploch je vlastně vývoj jistého geometrického problému od jeho bouřlivého mládí — čímž je míněna doba kolem roku 1865 — až do znaveného stáří — tím má být údobí kolem roku 1930), a byla odepisována neprávem, neboť J. C. C. Nitsche vypozoroval v historii této teorie několikerý zlatý věk: nejprve období let 1855 až 1890, pak periodu 1930—1940 a konečně léta současná.

Problém minimálních ploch byl zpočátku považován za problém ryze geometrický; má však úzký vztah k mnoha jiným matematickým disciplinám — k teorii funkcí komplexní proměnné, k variačnímu počtu, k parciálním diferenciálním rovnicím, ale i k topologii, k teorii míry, a aplikace má např. v teorii pružnosti, v proudění a jinde. Teorie minimálních ploch se často s různými matematickými disciplinami vzájemně ovlivňovala a tento vliv působil na obě složky stimulativně. Uveďme třeba slavný výsledek S. Bernštejna z roku 1916: *Jediná minimální plocha, definovaná na celé rovině x, y, je rovina*; jinými slovy: *Řešení $z = z(x, y)$ rovnice minimální plochy*

$$(1 + z_y^2)\, z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2)\, z_{yy} = 0$$

(indexy označují parciální derivování) *definované pro všechna x, y musí být lineární funkce.* Toto tvrzení, připomínající — nikoliv náhodou — Liouvilleovu větu o celistvých funkcích, ukazuje nejen na úzký vztah k teorii funkcí komplexní proměnné, ale charakterizuje v jistém smyslu i rozdíl mezi *lineárními* parciálními diferenciálními rovnicemi (pro něž jsou typické harmonické funkce) a rovnicemi *nelineárními.* A teprve nedávno se podařilo najít odpověď na otázku, zda Bernštejnův výsledek lze ze dvou dimenzí přenést i na vícerozměrný případ: odpověď je positivní pro dimenzi 3, 4, 5, 6 a 7 (léta 1965—1968) a negativní pro dimenzi větší než 7 (rok 1969).

Teorie minimálních ploch se od jiných matematických teorií výrazně odlišuje svým *experimentálním charakterem.* Pokusy s mýdlovými bublinami patřily k arsenálu badatelů v této disciplině již od samého počátku a dodnes patří k oblíbeným atrakcím různých technických muzeí, modely minimálních ploch lze najít ve sbírkách mnohých universit, a autor knihy uvádí mj. i seznam literatury, kde lze najít recepty pro výrobu takových modelů. Rozvinulo se experimentální odvětví této teorie (pro ilustraci název jednoho z článků: „Soap bubbles: Two years old and sixty centimeters in diameter."). Je to tedy disciplina, která rozhodně není suchopárná, kde lze rozvíjet i „kutilské schopnosti" a kde lze brousit vtip pravděpodobně více než v jiných disciplinách (uveďme na ukázku druhý titul jedné z autorových prací: „How to fashion a cheap hat for Giacometti's brother").

Jádro Nitscheho knihy pochopitelně není v takovýchto názorných aspektech teorie minimálních ploch nebo v broušení vtipu. Je to seriózní monografie, představující práci mnoha let, monografie, která chce čtenáře seznámit s rozvojem a stavem jedné bohaté teorie. S prací na rukopisu začal autor v roce 1964 a dokončil jej v roce 1972; o řadě partií přitom přednášel na universitách v Minneapolisu, Hamburku, Vídni a Puerto Ricu. V knize se omezil především na popis reálných dvourozměrných minimálních ploch v trojrozměrném eukleidovském prostoru, tedy — lze-li to tak říci — na klasickou část teorie, i když si všiml i jiných výsledků a nezapomněl ani na moderní vývoj a na souvislost s jinými matematickými disciplinami. Bylo už řečeno, že právě léta sedmdesátá jsou poznamenána dalším bouřlivým rozvojem této teorie; autor se snažil zachytit tento vývoj alespoň potud, že připojil dodatek, zachycující heslovitě stav zhruba do léta roku 1974.

Knihu tvoří devět kapitol a už zmíněný dodatek. Jednotlivé kapitoly nesou tyto názvy: I — Úvod; II — Křivky a plochy; III — Konformní zobrazení minimálních ploch; IV — Pomocné věty z analýzy; V — Problémový okruh Plateauova problému; VI — Obecnější okrajové úlohy; VII — Rovnice minimální plochy; VIII — Úplné minimální plochy; IX — Věty a úlohy. Celý text je členěn do paragrafů, které jsou číslovány průběžně a jichž je celkem 968. Jádro knihy tvoří skoro dvousetstránková kapitola pátá; ke kapitole deváté dodejme, že obsahuje jednak řadu poznámek, tvrzení a doplňků, které nebyly zařazeny do předchozího textu (a které jsou často jen citovány nebo doprovázeny náznakem důkazu), jednak pak seznam neřešených problémů a zajímavých úloh; obě části kapitoly doplňují kapitoly předcházející, zpracované podstatně podrobněji.

Autor psal knihu pro odborníky, kteří se chtějí seznámit se současným stavem problému a případně i se zjednodušeními či zobecněními známých výsledků, ale kniha je vhodná i pro úvod do teorie minimálních ploch a poslouží velmi dobře i nespecialistům (je to vidět konec konců i z názvů některých kapitol). Monografie je zpracována velmi poctivě a svědomitě, lze se v ní díky členění na paragrafy dobře orientovat; velmi užitečný je i seznam literatury, který obsahuje více než 1200 citací, ačkoliv do něj autor zařadil jen ty práce, které v textu skutečně užívá nebo které cituje. Seznam literatury je oproti běžným zvyklostem doplněn vždy údajem o stránce, na níž je daná práce citována; je to velmi užitečný počin, který by si zasloužil všeobecného rozšíření. K čtivosti textu přispívají i četné názorné obrázky, zčásti i barevné, zachycující fotografie modelů různých minimálních ploch.

A tak lze konstatovat, že jde o dílo velmi zdařilé, na němž snad vadí jen jeho enormní rozměr, ztěžující manipulaci a bránící tomu, aby se z monografie stala skutečně příručka (zdá se, že k rozměrnosti publikace přispívá i typ písma, který je asi větší než běžně užívaný). Rozhodně lze knihu doporučit všem skupinám čtenářů: poslouží stejně dobře tomu, kde se chce orientovat v teorii minimálních ploch, i tomu, kdo ji chce podrobně studovat.

Alois Kufner, Praha

S. M. Nikol'skii: APPROXIMATION OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES AND IMBEDDING THEOREMS. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1976. VIII + 418 stran. Cena DM 108,—.

V klasifikaci časopisu *Mathematical Reviews* patří studium prostorů funkcí do oddílu Funkcionální analýza, dalo by se však říci, že teorie těchto prostorů tvoří dnes již zcela samostatný oddíl matematiky. Základ k tomuto oddílu položil ve třicátých letech tohoto století S. L. SOBOLEV, když zavedl prostory $W_p^k(\Omega)$, které nesou jeho jméno. Tyto prostory jsou definovány (pro přirozené k, pro $p \geqq 1$ a pro oblast Ω v n-rozměrném euklidovském prostoru) jako množina těch funkcí na Ω, jejichž derivace (ve smyslu distribucí) až do k-tého řádu včetně jsou integrovatelné v p-té mocnině přes Ω. Studium těchto prostorů, tak důležitých v teorii parciálních diferenciálních rovnic, se brzy rozvinulo, a *věty o vnoření* se staly pojmem. V těchto větách jde — zhruba řečeno — o bližší charakterizaci funkce $u \in W_p^k(\Omega)$ resp. jisté zobecněné restrikce $u|_\omega$ této funkce (tzv. *stopy* funkce u na ω, kde ω je m-rozměrná varieta obsažená v $\bar{\Omega}$, $1 \leqq m < n$); tato charakterizace se opírá o hodnoty parametrů k, p, n a m a také o geometrické vlastnosti oblasti Ω.

Počátkem padesátých let zavedl S. M. NIKOLSKIJ prostory $H_p^k(\Omega)$ definované (opět zhruba řečeno) jako množiny funkcí na Ω, jejichž některé parciální derivace splňují Hölderovu podmínku v metrice prostoru $L_p(\Omega)$. Tyto prostory měly velmi podobné vlastnosti jako prostory Sobolevovy, platily pro ně analogické věty o vnoření, měly ovšem tu velkou výhodu, že je bylo lze definovat i pro *necelé* hodnoty parametru k a dokonce pro případ, kdy k byl *vektor* (to byly tzv. *anisotropní* prostory). Koncem padesátých let pak O. V. BESOV zavedl prostory $B_{p,\theta}^k(\Omega)$, které zobecňovaly prostory Nikolského: je $H_p^k = B_{p,\infty}^k$. Studium vlastností prostorů H a B bylo — na rozdíl od prostorů Sobolevových — založeno na výsledcích teorie aproximací.

Příbuznost prostorů Nikolského a prostorů Besovových se Sobolevovými prostory vedla ke snaze zavést prostory W_p^k pro obecné kladné k, případně i pro k vektorové. Jednu z možností poskytovaly prostory B, avšak později byly zavedeny tzv. liouvilleovské prostory $L_p^k(R^n)$, založené na zobecnění pojmu derivace pro libovolný reálný řád a na Fourierově transformaci. Tyto prostory jsou přirozenějším „rozšířením" Sobolevových prostorů na případ obecného k, je u nich ovšem podstatné, že funkce jsou definovány na celém prostoru, tj. že $\Omega = R^n$.

O všech těchto prostorech a o dalších modifikacích existuje dnes už nepřehledná řada článků, ale knižního zpracování se ujal teprve S. M. Nikolskij, který v roce 1969 vydal v Moskvě knížku, jejíž překlad je zde posuzován. Protože autor sám přišel k prostorům funkcí prostřednictvím teorie aproximací, zůstal tomuto přístupu věren i ve způsobu zpracování a odráží se to i v názvu knihy. První tři kapitoly mají přípravný charakter: V první jsou nutné informace z funkcionální analýzy, v dalších dvou je pojednáno o trigonometrických polynomech a o celistvých funkcích exponenciálního typu, neboť právě aproximace pomocí funkcí těchto dvou tříd byly podkladem pro studium prostorů H a B. Kapitola čtvrtá, nazvaná „*Třídy funkcí W, H, B*", přináší základní informace o prostorech Sobolevových, Nikolského a Besovových; tyto prostory jsou definovány pro obecnou oblast Ω, ale většina výsledků je v dalším odvozena pro případ $\Omega = R^n$. Kapitola pátá je věnována studiu aproximace funkcí ze zmíněných prostorů a odvození vztahů, které budou potřebné v dalším; kapitola nese název „*Přímé a obrácené věty teorie aproximace. Ekvivalentní normy*" a jde v ní především o odvození vět Bernštejnova a Jacksonova typu. Obsah kapitoly šesté tvoří věty o vnoření pro různé metriky a různé dimenze, kapitola sedmá se zabývá tranzitivností vět o vnoření a nemožností jejich zlepšení a jsou zde uvedena kritéria kompaktnosti. Osmá kapitola je věnována studiu Besselových-MacDonaldových jader, s jejichž pomocí se zde pojednává o isomorfnosti isotropních prostorů. Tato jádra jsou také podstatná při zavedení prostorů L_p^k, jimž je věnována kapitola poslední — devátá. Kniha je doplněna dosti podrobným poznámkovým aparátem, v němž je mj. pojednáno i o problému přenesení výsledků, dokázaných v knize pro případ $\Omega = R^n$, na případ obecné oblasti. Výsledky jsou zde uvedeny bez důkazu a je třeba říci, že problém je podstatně složitější než v případě celého prostoru R^n a vyžaduje nových postupů. Proto je asi vhodné poznamenat, že v roce 1975 vyšla v nakladatelství Nauka v Moskvě kniha O. V. Besova, V. P. Iljina a S. M. Nikolského, věnovaná právě těmto problémům a doplňující tak posuzovanou knihu Nikolského; kniha nese název „*Integrální reprezentace funkcí a věty o vnoření*".

Nikolského kniha je velmi užitečná a obsahuje velké množství materiálu, důležitého jak pro teorii aproximace, tak pro teorii funkcí reálné proměnné a pro teorii parciálních diferenciálních rovnic. Je ovšem třeba říci, že orientace v knize není právě snadná a že se v ní někdy potřebné údaje dosti obtížně hledají. Ale to tkví ve velké míře v podstatě samotné teorie, která je komplikovaná a u níž je přehledné zpracování zvláště obtížné.

Jak už zde bylo řečeno, vyšel ruský originál v roce 1969 a je pravděpodobně většině odborníků a interesentů u nás dobře znám, takže pro naši matematickou obec asi nebude překlad do angličtiny tak důležitý. Pro odborníky ve světě, kteří mají potíže se studiem ruského textu, je ovšem překlad velmi užitečný, a proto lze jeho uskutečnění jen uvítat. Kvalitu překladu nemohu posuzovat, nemohu se však ubránit dojmu, že překladatel (jímž je J. M. Danskin) mohl být možná někdy trochu důslednější. Ne vždy totiž odpovídá anglický termín či název odstavce ruskému originálu (např. termín *boundary function* — v originále крайняя функция — není nejšťastnější). Nebo seznam literatury: podle mého názoru by měl být zpracován tak, aby umožnil studium právě tomu čtenáři, který má k disposici především anglicky psanou literaturu; překladatel nejen že někdy necituje existující anglický překlad ruské učebnice, nýbrž ruský originál, ale ve dvou případech dokonce cituje *ruský* překlad *anglického* textu, aniž by připojil údaj o tom, kde byl otištěn text původní. V překladu se čtenář také může dozvědět, že *celé číslo* lze anglicky vyjádřit termínem *whole number* (str. 156).

Nemohu odolat, abych na závěr neocitoval komplimenty, které si autor a překladatel vyměňují v úvodu publikace: Autor říká o překladateli: „... he has showed high qualifications ... as a translator of Russian, which is considered by many to be a very difficult language." Překladatel pak děkuje autorovi, jehož „knowledge of English, which is considered by many to be a very difficult language, is excellent."

Alois Kufner, Praha

L. Collatz, W. Wetterling: OPTIMIZATION PROBLEMS, Translated by P. Wadsacké Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin 1975, X + 356 str., cena DM 33,80.

Překlad knihy, která vyšla pod názvem Optimierungsaufgaben poprvé v roce 1966. Její druh. vydání vyšlo v roce 1971.

Kniha se systematicky zabývá úlohami optimalizace, je v jistém smyslu přehledem hlavních směrů této široké oblasti matematiky, přičemž se v ní klade důraz na jednotící hlediska a vzájemné souvislosti jednotlivých disciplín. Je rozdělena do pěti kapitol. První tři kapitoly jsou věnovány po řadě lineární, konvexní a kvadratické optimalizaci. Čtvrtá kapitola se zabývá Čebyševovskou aproximací a optimalizací a pátá je věnována základům teorie her.

V prvních třech kapitolách jde o minimalizaci funkce $F(x)$, když mají být splněny podmínky $f_j(x) \leqq 0, j = 1, \ldots, m, x \leqq 0$, kde $x \in R^n$. (Relace $\leqq$ mezi prvky z R^n znamená, že platí tato nerovnost mezi všemi jejich složkami.) Jednotlivé úlohy jsou pojmenovány podle charakteru funkcí $F(x), f_j(x), j = 1, \ldots, m$. Podmínky $f_j(x) \leqq 0$ mohou být nahrazeny podmínkami typu $f_j(x) = 0$. Pro úlohy výše popsaného typu jsou uvedeny základní výsledky (simplexová metoda, duální úlohy, charakterizace minimálních řešení, Kuhnova-Tuckerova věta pro kvadratické úlohy apod.). Vše je zpracováno s velkou péčí a důkladně. Numerické aspekty jednotlivých úloh tvoří nedílnou součást jednotlivých kapitol.

Ve čtvrté kapitole je vyložen přístup k aproximačním úlohám jako k úlohám optimalizace, pátá kapitola pojednává o maticových hrách dvou hráčů s nulovým součtem a o hrách n hráčů. Tyto poslední dvě kapitoly mají informační charakter, nejsou tak vyčerpávající jako předchozí. V dodatku je připojena věta o oddělování konvexních množin v R^n a věta o existenci řešení kvadratické optimalizační úlohy. Pozoruhodné je velké množství příkladů z různých oblastí, které velmi vhodně motivují výklad. Jsou to často úlohy, které byly řešeny a použity v praxi (např. optimální využití produkce mléka v Holandsku).

Štefan Schwabik, Praha

Günter Pickert: PROJEKTIVE EBENEN, 2. vydání, Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1975, 371 stran, 67 obrázků, cena DM 98,—.

Jde o druhé vydání díla, vyšlého poprvé v roce 1955, v období, kdy docházelo k prvým završujícím ohraničením tehdy nové discipliny, teorie projektivních rovin. Od té doby došlo k značnému rozvoji této discipliny, v němž též jmenované prvé vydání sehrálo důležitou úlohu jako základní monografie. Nelze ale říci, že by tuto úlohu nemohlo plnit dále, což byl asi také jeden z důvodů druhého vydání. Vzhledem ke kompaktnímu způsobu výkladu látky nebylo autorovi dobře možno činit nějaké obšírnější změny textu; to by pak asi bylo nutno psát novou knihu. Proto se autor zaměřil pouze na zásahy tam, kde pro to byly příčiny věcné či kde se autorem zavedená terminologie z prvého vydání neujala. V případě věcných úprav a doplňků mezer jde především o velmi delikátní záležitosti, jež by zajímaly spíše specialisty oboru (o velikosti autorovy osobnosti svědčí, že i drobná nedopatření z prvého vydání byla podnětem k řadě časopiseckých prací jiných autorů; a to nemluvím o tom, ke kolika pracím vedly přímé podněty autorovy). A tak autor doplnil text k němu se vztahujícími odkazy na literaturu z období po roce 1955 (obšírnější souhrn novější literatury by byl příliš obsáhlý a vzhledem k výběru látky v knize by ani nebyl vhodný) a v závěrečné nečíslované kapitole (Anhang) připojil tři nové paragrafy: o Hughesově koordinatisaci, o Lenzově-Barlottiho klasifikaci projektivních rovin a paragraf s názvem „Ergänzungen", dotýkající se právě některých delikátních záležitostí zmíněných nahoře. Rád bych uzavřel tím, že se teorie projektivních rovin a příbuzných oblastí dnes pěstuje především v USA, NSR, Kanadě, Anglii a Itálii, ale i v řadě zemí dalších; též u nás se touto disciplinou zabývá řada pracovníků a snaží se svými výsledky podpořit její rozvoj.

Václav Havel, Brno

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

ZPRÁVY

ZA VLADIMÍREM MAHELEM

KAREL HAVLÍČEK, Praha

Odejde-li náhle člověk uprostřed nejlepšího rozmachu svých tvůrčích sil, pak to nelze vystihnout jinými slovy, nežli že padl bojovník. Je to v duchu známé naší lidové písně „Neumrem na slámě...". A to je právě případ předčasně zesnulého přítele Doc. RNDr. VLADIMÍRA MAHELA, CSc.

Vladimír Mahel se narodil 27. 8. 1924 ve Valašském Meziříčí. Ve čtyřech letech ztratil matku; o jeho výchovu a vzdělání se potom staral ovdovělý otec s nejbližšími příbuznými. Válečná léta zastihla Vladimíra již jako studenta reálného gymnasia v jeho rodišti, kde maturoval v roce 1943. V rámci válečného nasazení pracoval pak až do konce války jako pomocný dělník v blízké Jablůnce nad Bečvou.

Na Karlově universitě začal studovat hned v prvním poválečném semestru. Tehdy byla u nás vedle pedagogické větve jen jediná specialisace, a to pojišťovací matematika a matematická statistika. Vladimír si zvolil učitelskou kombinaci matematiky – deskriptivní geometrie; v té době jsme se spolu seznámili. Přírodovědeckou (dnešní matematicko-fyzikální) fakultu KU absolvoval velmi úspěšně v nejkratší možné době, druhou státní zkoušku složil v prosinci 1948. Během studií pracoval již jako výpomocný asistent u prof. F. Vyčichla na stavební fakultě ČVUT, později u prof. Kounovského na tehdejší strojní a elektrotechnické fakultě ČVUT. Po rozdělení této fakulty na dvě, přešel na elektrotechnickou fakultu, které zůstal věrný až do smrti, pracoval tam pochopitelně na katedře matematiky. Mezitím v roce 1949 vyučoval přechodně na dělnické přípravce na Hrubé Skále u Turnova.

Nezanedbával při tom ani svoji rodinu. Již v roce 1951 se oženil s Věrou Streitbergovou a společně pak řádně vychovali dvě děti.

Při své učitelské činnosti se Vladimír Mahel nikdy nepřestal zajímat o vědeckou práci. Pod vedením prof. B. Bydžovského vypracoval disertační práci a dosáhl tak v roce 1953 titulu RNDr. Externí aspirantura pod vedením školitele prof. A. Urbana umožnila jeho další vědecký růst; v roce 1964 dosáhl hodnosti kandidáta fyzikálně-matematických věd. Neúnavně se pak až do konce svého života účastnil prací v několika seminářích.

Vyvrcholením Mahelovy dráhy byla jeho habilitace. Ve své skromnosti by snad sám ani přihlášku k habilitačnímu řízení nepodal. Přesto jeho habilitační práce „*Konfigurace spojené s analagmatickými sextikami*" skládající se ze dvou částí (viz seznam publikací č. [10] a [13]) byla velmi úspěšně obhájena na MFF KU dne 17. 10. 1974. Docentem matematiky na FEL ČVUT byl pak ustanoven dekretem ministra školství dnem 1. 10. 1975. Nebylo třeba, aby se v této nové funkci zapracovával, vykonával ji prakticky už dávno před tím; žel, z tohoto oficiálního uznání své činnosti se nakonec těšil necelý rok. Vladimír Mahel zemřel náhle v Praze dne 8. 6. 1976 uprostřed činorodé práce pro celou naši společnost. Nedožil se ani celých 52 let.

Seznam Mahelových vědeckých publikací svědčí o jeho širokém rozhledu po geometrii. Jeho původní práce obsahují tématiku z algebraické, diferenciální, kinematické a kombinatorické geometrie; ve dvou případech obrátil svůj zájem i k dějinám kinematické geometrie v českých zemích. Nejzajímavější však je, jak se v Mahelově práci spojuje klasická algebraická geometrie s dnešní kombinatorickou geometrií. Plným právem se mohl pokládat za žáka akademika B. Bydžovského, který svým zájmem o geometrické konfigurace byl vlastně jediným, kdo u nás připravil půdu ke studiu konečných rovin a konečných geometrií vůbec. Vladimír Mahel brzy pochopil aktuálnost této problematiky, která je v posledních letech vlivem rozvoje samočinných počítačů v popředí zájmu světových odborníků a věnoval se jí s plným elánem. V souvislosti s tím byl zřejmě naším nejlepším znalcem současného stavu teorie latinských čtverců. O kombinatorické geometrii přednášel na řadě vědeckých konferencí doma i v cizině a na letních školách JČSMF. Dvakrát byl pozván k samostatným přednáškám do Drážďan; na Technické universitě tam přednášel v roce

1972 o užití latinských čtverců v konečných rovinách a na Vysoké škole pedagogické v roce 1975 o systémech ortogonálních latinských čtverců. V posledních letech ho zaujaly konstrukce oválů v konečných rovinách. Na III. vědecké konferenci ČVUT v září 1975 přednesl své výsledky o konstrukci oválu v rovině řádu 9; poslední konference, které se zúčastnil, byla v říjnu 1975 v Bad Stuer (NDR), kde přednášel o konfiguracích v projektivní rovině.

Vladimír Mahel se zapojil i do práce na úkolech základního výzkumu. V letech 1972 – 1975 vedl fakultní výzkumný úkol z kombinatorické geometrie na FEL ČVUT, který skončil úspěšnou obhajobou. Tato práce pokračuje dále v rámci státního plánu základního výzkumu na léta 1976 – 1980, kde jedním z odpovědných řešitelů dílčího úkolu „Incidenční struktury" byl původně jmenován právě Vladimír Mahel; nebude jednoduché, najít za něho náhradu.

Jako rozený učitel nezapomínal Vladimír Mahel ani na své studenty. Ve spolupráci s dalšími autory vydal několik skript z deskriptivní geometrie a z lineární algebry a analytické geometrie. O úspěšnosti těchto skript svědčí okolnost, že většina z nich vycházela po několik let každoročně v dotiscích.

Učitelská povaha jej přivedla i k popularisaci vědy a tedy i k práci v Socialistické akademii; jako lektor této společnosti přednášel řadu let deskriptivní geometrii v kursech Lidové university v Praze. Pro SNTL sepsal řadu encyklopedických hesel z geometrie. Nepřekvapuje už, že pomáhal i při školení vybraných účastníků domácí i mezinárodní Matematické olympiády. V posledním roce přednášel na vyšší úrovni algebru v postgraduálním kursu určeném aspirantům FEL.

Za tak bohatou činnost vděčil Vladimír Mahel také svým mimořádným organisačním schopnostem. Uveďme například, že v seminářích z kombinatorické geometrie na FEL a MFF vedl v posledních pěti letech dokumentaci studovaného oboru, čítající dnes přes 3000 titulů; samozřejmě mu přitom pomáhali jeho kolegové, protože na tak velkou práci by žádný jedinec nestačil.

Své organizační schopnosti uplatňoval i mimo rámec své odborné činnosti. Mnoho zkušeností po této stránce získal v Revolučním odborovém hnutí, v němž pracoval od svých studentských let. Zastával řadu odborářských funkcí, od úsekového důvěrníka přes člena revisní komise a předsedu studijně-pedagogické komise až k dlouholetému členství v celozávodním výboru ROH na jeho pracovišti; i tuto práci ukončila smrt.

Čestné diplomy a řadu pochvalných uznání dostal od řady institucí, v nichž pracoval, např. od ÚV Socialistické akademie a od ÚV Matematické olympiády.

Čtenář snad namítne, že zde přeháním. Ale pravý opak je pravdou. Podávám jen neúplný výčet Vladimírovy mnohotvárné činnosti.

Ale to ještě není všechno! Nelze pomlčet o další činnosti, která vedle matematiky nás oba plných 30 let k sobě poutala. Nestydím se za to, že to byla šachová hra. Vladimír byl silným hráčem jak v praktické hře, tak zvláště v korespondenčním šachu, ale především vykonával organizátorskou práci, za níž byl rovněž několikrát vyznamenán, mj. Veřejným uznáním II. stupně za zásluhy o rozvoj československé tělesné výchovy. Byl dlouholetým předsedou šachového oddílu TJ Slavia VŠ v Praze a pracoval též na úseku vysokoškolského šachu. Zemřel jako člen předsednictva výboru šachového svazu ČÚV ČSTV.

Bylo to mnoho radostných chvil — a jiné vlastně nebyly — které jsme spolu prožili ať už při práci nebo na matematických vědeckých konferencích a seminářích nebo na šachových turnajích či na společných výletech.

Jak dokreslit lidský profil Vladimírovy osobnosti? Byl především pečlivým otcem. Nikdo nenahradí tuto ztrátu jeho rodině. Ale jeho odchodem vzniká citelná mezera i jinde. Škoda, že teprve tehdy, když někoho ztrácíme, poznáváme jeho pravou cenu. „Teď se teprve uvidí, kde všude bude Vladimír chybět", to byl hlas, který jsem zaslechl při jeho pohřbu. Jako správný učitel šel svou činností a veřejnou angažovaností svým žákům příkladem napřed. Nikdy netrpěl žárlivostí ani v matematice ani v šachu, měl vždycky radost z úspěchu svých svěřenců a rád se i od nich přiučil.

Dobře víme, že Vladimíra Mahela dnes nenahradí žádný jedinec; bude třeba spojeného úsilí více lidí k pokračování v jeho činnosti. Podaří se to? Ale jeho neúnavná práce nás k tomu zavazuje. A z toho důvodu jsem záměrně zvolil nadpis tohoto nekrologu.

SEZNAM PRACÍ DOC. VL. MAHELA

Vědecké a odborné práce

[1] Konstrukce středů hyperoskulačních kružnic elipsy. Rozhledy matematicko-přírodovědecké *26* (1946), 122—123.

[2] Sextiky invariantní vůči jedné nebo více kvadratickým inversím. Disertační práce k získání titulu RNDr. na KU (1953).

[3] Sextiky invariantní vůči kvadratickým inversím s třemi body hlavními. Čas. pěst. mat. *80* (1955), 284—298.

[4] Vývoj kinematické geometrie v českých zemích. Sborník prací FEL ČVUT, referáty z 5. vědecké konference (1960), 11—16.

[5] Soupis literatury z kinematické geometrie. (Spoluautoři J. Adam, V. Jurák, V. Matějková.) Práce katedry matem. a deskr. geometrie FEL ČVUT, II, (1962), 1—28.

[6] Kinematická geometrie v pracích českých autorů. Práce ČVUT, řada IV, (1963), 35—43.

[7] Poznámka k eliptickému pohybu. (Spoluautoři K. Drábek, M. Pišl). Práce ČVUT, řada IV. (1963), 25—33.

[8] Komplexní symbolika v rovinné kinematice. Práce katedry matem. a deskr. geometrie FEL ČVUT, III, (1963), 1—25.

[9] Křivosti průmětu křivky. Kandidátská práce k dosažení hodnosti kandidáta fyzikálně-matematických věd, FSI ČVUT, (1964).

[10] Zajímavá grupa transformací. Čas. pěst. mat., *95* (1970), 76—85. (První část habilitační práce.)

[11] Zobecnění Peaucellierova vzorce. Acta polytechnika, práce ČVUT, *IV*, (1973), 69—72.

[12] Verallgemeinerung einer Formel von Peaucellier. Čas. pěst. mat., *98*, (1973), 145—161.

[13] Über gewisses Netz von ebener Kurven 6. Ordnung. Čas. pěst. mat., *98*, (1973), 162—172. (Druhá část habilitační práce.)

[14] Eine Bemerkung zur Konstruktion der Paare von orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung 10. Wissenschaftliche Haupttagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR in Halle (1974): Hauptvorträge, Vortragsauszüge, 316—317.

[15] Oborová encyklopedie Aplikovaná matematika, hesla z geometrie. SNTL Praha, v tisku.

Skripta

[1] Doplňky z deskriptivní geometrie. (Spoluautor Vl. Jalůvka.) Ústav DS při FSI ČVUT, 1954.

[2] Cvičení z deskriptivní geometrie pro dálkové studium strojního a elektrotechnického inženýrství. (Spoluautor Vl. Jalůvka.) SNTL, I. díl 1955, II. díl 1956.

[3] Deskriptivní geometrie. (S kolektivem spoluautorů.) SNTL, 1966.

[4] Sbírka příkladů z deskritivní geometrie. (S kolektivem spoluautorů.) SNTL, 1. vydání 1966, 2. vydání 1967.

[5] Sbírka příkladů z lineární algebry a analytické geometrie. (Spolu s dalšími šesti autory.) Vyd. ČVUT, 1. vydání 1971, 2. přepracované vydání 1975.

V tomto seznamu nejsou uvedeny recense odborných knih a prací v domácím tisku a v časopise Zentralblatt für Mathematik (Berlín) a příležitostné a jubilejní články.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

ČTVRTÉ PRAŽSKÉ TOPOLOGICKÉ SYMPOSIUM

Ve dnech 23. až 27. srpna 1976 se konalo v Praze již čtvrté Symposium o obecné topologii a jejích vztazích k moderní analyse a algebře. Symposium uspořádal Matematický ústav ČSAV ve spolupráci s Matematickým ústavem SAV, matematicko-fysikální fakultou University Karlovy a Jednotou československých matematiků a fysiků. Přípravou symposia byl pověřen organisační výbor ve složení Z. Frolík, J. Hejcman, M. Hušek, M. Katětov, V. Koutník, J. Novák (předseda), V. Pták, A. Rázek, M. Sekanina, Š. Schwarz a V. Trnková.

Symposium se konalo v budově elektrotechnické fakulty Českého vysokého učení technického a zúčastnilo se ho 217 matematiků ze 24 zemí, z toho 53 z Československa a 164 z těchto států: USA (30), Polsko (29), SSSR (12), Maďarsko (10), NDR (9), Řecko (9), Velká Británie (8), Holandsko (7), Kanada (6), Belgie (5), Bulharsko (5), Jugoslávie (5), NSR (5), Západní Berlín (5), Indie (4), Japonsko (4), Itálie (3), Rakousko (2), Švýcarsko (2), Egypt (1), Irán (1), Nový Zéland (1), Španělsko (1). Kromě toho bylo přítomno 39 doprovázejících osob.

Vědecký program symposia připravila programová komise ve složení Z. Frolík (předseda), M. Katětov, J. Novák a V. Pták. Na symposiu bylo předneseno 29 hlavních přednášek pozvaných matematiků. Těžištěm symposia bylo 7 čtyřicetiminutových přednášek v plénu o hlavních směrech obecné topologie. Tyto přednášky byly doplněny čtyřmi třicetiminutovými plenárními přednáškami a 18 přednáškami ve dvou souběžných sekcích. Na přednášky navazovalo 136 čtvrthodinových sdělení účastníků symposia ve třech až čtyřech sekcích. Na symposiu byly předneseny tyto přednášky:

1. Čtyřicetiminutové přednášky v plénu:

R. D. Anderson: *Group actions on Hilbert cube manifolds*
W. W. Comfort: *Some recent applications of ultrafilters to topology*
Z. Frolík: *Recent development of theory of uniform spaces*
S. Mardešić: *Recent development of shape theory*
J. Nagata: *On rings of continuous functions*
M. E. Rudinová: *Set theoretic problems in topology*
Ju. M. Smirnov: *Some topological aspects in the theory of topological transformation groups*

2. Třicetiminutové přednášky v plénu:

A. V. Archangelskij: *Some recent results on cardinal-valued invariants of bicompact Hausdorff spaces*
T. A. Chapman: *Homotopy conditions which characterize simple homotopy equivalences*
K. Kuratowski: *σ-algebra generated by analytic sets and applications*
A. H. Stone: *Measure-preserving maps*

3. Čtyřicetiminutové přednášky v sekcích:

M. Hušek a V. Trnková: *Categorial aspects are useful in topology*
B. Sz.-Nagy: *Some properties of the function algebra H^∞*

4. Třicetiminutové přednášky v sekcích:

C. BESSAGA a T. DOBROWOLSKI: *Deleting formulas for topological vector spaces and groups* (přednesl C. BESSAGA)
E. BINZ: *On an extension of Pontryagin's duality*
Á. CSÁSZÁR: *Some problems concerning C(X)*
J. FLACHSMEYER: *Topologization of Boolean algebras*
P. HILTON: *On generalizations of shape theory*
V. A. JEFREMOVIČ a A. G. VAJNŠTEJN: *Novyje rezultaty v ravnoměrnoj topologii* (přednesl O. V. LOKUCIEVSKIJ)
B. E. JOHNSON: *Perturbations of Banach algebras*
I. JUHÁSZ: *On the number of open sets*
S. NEGREPONTIS: *Applications of Erdös-Rado intersection relations in the embedding of* $l_1(\gamma)$ *to Banach spaces*
J. PELANT: *Combinatorial properties of uniformities*
A. PIETSCH: *Entropy numbers of operators in Banach spaces*
V. PTÁK: *Nondiscrete mathematical induction*
M. RAJAGOPALAN: *The V-process and a problem of V. Kannan and A. V. Arhangelskii on compact c-spaces*
J. R. RINGROSE: *Derivations of quotients of von Neumann algebras*
D. STONEOVÁ: *Measure, category and Boolean spaces*
E. V. ŠČEPIN: *On uncountable inverse spectra*

Vědecká úroveň symposia byla vysoká. Podařilo se sestavit vyvážený program, kde byly zastoupeny všechny směry obecné topologie, v nichž se dnes intensivně pracuje. Důležitou součástí symposia byla řada přednášek o aplikacích topologie, tematicky zaměřená především na teorii algeber a teorii míry. Symposium mělo výrazně pracovní charakter; během symposia se konala řada neformálních seminářů. Potěšitelným rysem symposia byla velká účast velmi mladých matematiků, z nichž mnozí již dosáhli vynikajících výsledků; dva z nich měli na symposiu hlavní přednášky.

Čtvrtého symposia se zúčastnilo přibližně o polovinu více zahraničních účastníků než tomu bylo u symposií předešlých. Tato skutečnost je důsledkem prudkého rozvoje obecné topologie v uplynulých 15 letech zejména v důsledku využívání topologických metod v řadě matematických disciplin a přinesla s sebou též nemalé problémy. Přes pečlivou přípravu programu se nepodařilo zabránit tomu, že při čtyřech souběžných sekcích se účastníci často obtížně rozhodovali, která sdělení vynechat. V budoucnu by proto bylo účelné prodloužit symposium o dva pracovní dny.

Pro účastníky symposia a doprovázející osoby byl připraven bohatý společenský program. V úterý byl pro doprovázející osoby a hosty symposia uspořádán přátelský večer v sále restaurace U Fleků. Ve středu odpoledne si účastníci symposia prohlédli Prahu. V pátek bylo symposium zakončeno závěrečnou večeří a v sobotu byl uspořádán celodenní výlet do jižních Čech. Pro doprovázející osoby připravil Čedok kromě prohlídky Prahy a sobotního výletu ještě další vycházky po Praze.

Po vědecké stránce bylo symposium velmi úspěšné. Přispělo k rozvoji vědecké spolupráce a poskytlo přehled o současném stavu a vývojových tendencích obecné topologie a jejích aplikací. Ukazuje se, že pražská topologická symposia, k nimž dal podnět EDUARD ČECH, mají stále větší význam pro rozvoj této discipliny a stala se postupně nejvýznamnější topologickou konferencí ve světovém měřítku. Svědčí o tom hodnocení předních zahraničních badatelů. Profesor R. D. ANDERSON v závěrečném projevu konstatoval: „*This Fourth Symposium has been noteworthy not only for its unusually large number of interesting research papers contributed by topologists and* *other mathematicians from many areas of the world but also by the several survey talks which have focused attention on current trends in general topology, on many important open questions, and on various facets of topology's apparently growing involvement with other areas of mathematics as well as with its applications to other disciplines*".

Akademik K. KURATOWSKI v dopise předsedovi organizačního výboru píše: „*This Symposium was certainly a great success and an important mathematical event*".

Z dopisu profesora W. W. COMFORTA uveďme: „*I think it may be said correctly by now that, with the possible exception of the worldwide meeting sponsored every four years by IMU, the Prague Symposia have become the most important single international gathering of point-set topologists. Certainly in the past decade there has been no gathering equal in international talent and scientific productivity to the Prague Symposia of 1971 and 1976*".

Rovněž společenský program symposia vyzněl dobře. Zejména příznivě zapůsobilo přijetí významných účastníků symposia u předsedy Československé akademie věd akademika J. KOŽEŠNÍKA, který seznámil účastníky setkání s organizací vědeckého života v Československu. Přítomní zvláště uvítali, že v závěru předseda ČSAV vyjádřil přesvědčení, že se opět setkají za pět let na pátém pražském topologickém symposiu.

Václav Koutník, Praha

LETNÍ ŠKOLA JČSMF

Matematická vědecká sekce JČSMF a liberecká pobočka JČSMF uspořádaly ve dnech 6.—10. září 1976 v Harrachově letní školu shlukové analysy. Hlavním cílem letní školy bylo umožnit všem zájemcům o tuto poměrně mladou disciplínu aplikované matematiky, aby se seznámili se základními myšlenkami, směry a tendencemi shlukové analysy, vyměnili si zkušenosti s praktickými aplikacemi shlukovacích metod v různých oborech a presentovali své nové teoretické výsledky.

Letní školy se zúčastnilo celkem 50 odborníků z 32 výzkumných pracovišť a vysokých škol. Byli mezi nimi nejen matematikové, ale také ekonomové, biologové, psychologové, paleontologové i pracovníci technických oborů — vznikla tak příležitost k velmi zajímavé výměně názorů. Na škole bylo předneseno 23 referátů a sdělení:

Z. ŠIDÁK: *Základní orientace o shlukové analyse*
A. FILÁČEK: *Míry vzdálenosti a podobnosti mezi objekty a shluky*
P. KRATOCHVÍL: *Funkcionální kriteria shlukové analysy*
A. FILÁČEK: *Shlukovací metody založené na euklidovské metrice*
K. SELUCKÝ: *Srovnání vážené a nevážené metody*
T. HAVRÁNEK: *Programy pro shlukovou analysu v systému BMDP a jejich aplikace*
B. BŘICHÁČEK: *Užití shlukové analysy v psychologickém výzkumu*
J. LAUBER: *Jedna přibližná nehierarchická metoda shlukové analysy*
J. VONDRÁČEK: *Paralelní a sekvenční shlukovací postupy*
B. RŮŽIČKA, A. LUKASOVÁ: *Použití shlukovacích metod při řešení taxonomických otázek v paleontologii*
S. HOJEK: *Použití hierarchických shlukovacích procedur*
E. BRABEC: *Meze použití shlukovacích metod*
J. HUSTÝ: *Representace matic podobnosti pomocí stromů*
Z. SKYVA: *Kritérium separace shluků v metodě dendrogramu*
J. PERNICA: *Dekomposice na grafech*
K. PICEK: *Použití analysy shluků v průmyslovém podniku*
P. KRATOCHVÍL: *Užití metod matematického programování v analyse shluků*

F. ZÍTEK: *Uplatnění metody SEP ve shlukové analyse*
Z. ŠIDÁK: *Shlukovací metody založené na odhadech hustot*
V. KOUTNÍK: *Přípustnost shlukovacích metod*
O. SOUDSKÝ: *Typy proměnných a jejich konverse*
J. PÍŠOVÁ, K. BENEDIK: *Využití vícenásobné diskriminační analysy pro studium vlivu volatilních látek na růst obilek žita*
J. TOŠOVSKÝ: *Aplikace diskriminační analysy pro více souborů a komponentní analysy na shlukování skupin jednotek měření*

Jak je i ze seznamu vidět, byly tu zastoupeny jak delší přednášky přinášející přehled metod a procedur shlukové analysy, včetně pokusů o uplatnění jednotících hledisek, tak také podrobnější studie jednotlivých problémů a sdělení o konkrétních aplikacích. Nechyběly ani kritické hlasy, zvláště v souvislosti s principiálními otázkami použití metod shlukové analysy v praxi přírodovědních, technických i společenskovědních oborů. Všechny přednášky i diskusní večer zařazený do programu školy se těšily velkému zájmu účastníků; z toho je vidět, že uspořádání školy bylo užitečné a odpovídalo současným potřebám.

Vcelku lze konstatovat, že letní škola proběhla úspěšně a přispěla k rozvoji a většímu uplatnění shlukové analysy u nás. Účastníci měli možnost získat slušný přehled o tom, kde, jak a v jaké hloubce se u nás v oblasti shlukové analysy pracuje; navázání osobních kontaktů mezi odborníky z různých pracovišť patřilo k cenným přínosům školy. Letní škola pomohla též k progresivní stabilisaci české terminologie v této oblasti.

K úspěchu školy přispělo rovněž půvabné prostředí krkonošské přírody, jejíž krásy mohli účastníci školy vychutnat na vycházkách do okolí Harrachova.

František Zítek, Praha

MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

V pořadí již osmnáctá mezinárodní matematická olympiáda se konala ve dnech 7.—21. července 1976 v Rakousku. Zúčastnily se jí delegace z devatenácti zemí: Bulharska, Československa, Finska, Francie, Holandska, Jugoslávie, Kuby, Maďarska, NDR, NSR, Polska, Rakouska, Rumunska, Řecka, SSSR, Švédska, USA, Velké Británie a Vietnamu.

Olympiáda probíhala podle osvědčeného tradičního programu. Vlastní soutěž se konala ve východotyrolském městě Lienz, závěr pak byl ve Vídni. Soutěžní úlohy byly tentokrát spíše obtížnější, takže jen jeden ze soutěžících, L. PIERRE z Francie, získal plný počet bodů. Výrazného úspěchu na olympiádě dosáhli žáci ze SSSR, kteří získali čtyři z devíti udělených prvních cen. Naši representanti si vedli slušně a získali jednu druhou cenu (J. KRATOCHVÍL z Pardubic) a tři třetí ceny (M. ŠEDIVÝ z Jevíčka, J. NAVRÁTIL z Olomouce a P. TAKÁČ ze Šafárikova).

Podrobnější zpráva o 18. MMO bude otištěna v časopise Rozhledy a v brožuře o XXV. ročníku MO, kterou vydá SPN.

František Zítek, Praha

OBHAJOBY A DISERTAČNÍ PRÁCE DOKTORŮ A KANDIDÁTŮ VĚD

Před *komisí pro obhajoby doktorských disertačních prací* obhájil dne 28. 1. 1976 doc. RNDr. IVAN KOLÁŘ, CSc., práci na téma: „Některé obecné problémy diferenciální geometrie vyššího řádu".

Před *komisemi pro obhajoby kandidátských disertačních prací* obhájili dne 27. listopadu 1975 JIŘÍ MICHÁLEK práci na téma: „Statistické lineární prostory", dne 21. ledna 1976 JOZEF MALIGDA práci na téma: „Obecná zárezová metóda zostrojovania lineárnych obrazov", dne 16. března 1976 RNDr. JOZEF ANTONI práci na téma: „Niektore otázky sumarovatel'nosti postupností", dne 18. března 1976 Ing. JAROSLAV HYLÁN práci na téma: „Rozvoj funkcií v rady funkcií, ktoré netvoria orthogonální sústavu" a RNDr. KRISTÍNA SMÍTALOVÁ práci na téma: „O úplných riešeniach diferenciálnych rovníc s oneskorením", dne 24. března 1976 RNDr. MILAN KUČERA práci na téma: „Morseova-Sardova věta a její užití na odhad množiny kritických hladin funkcionálů v Banachových prostorech", dne 25. března 1976 MOHAMED ABDEL HAMID AHMED NASR práci na téma: „Semimarkovovské procesy", dne 1. dubna 1976 RNDr. ARNOLD DÁVID práci na téma: „Riešenie niektorých kvaziparabolických rovníc variačnými metódami", dne 12. dubna 1976 JAROSLAV KOUŘIL práci na téma: „Problémy vyučování stereometrii" a RNDr. OLDŘICH ODVÁRKO práci na téma: „O některých způsobech zavedení Booleových algeber ve středoškolské matematice", dne 6. května 1976 RNDr. PAVEL KRŠŇÁK práci na téma: „O niektorých dvojiciach plôch súvisiacích s danou plochou v E_4" a dne 6. července 1976 RNDr. JOZEF DRAVECKÝ práci na téma: „Meratel'né funkcie a súčinové priestory".

Redakce