Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

SUR LES DOMAINES DES VALEURS DES OPÉRATEURS NON-LINÉAIRES

Jiří Jarušek et Jindřich Nečas, Praha

(Reçu le 2. décembre 1975)

Introduction. L'object de ce travail est d'étudier la question des domaines des valeurs des opérateurs non-linéaires de la forme $A + B$, où A est un opérateur linéaire et B un opérateur non-linéaire. Nous ne supposerons pas que l'opérateur non-linéaire soit complètement continu, comme c'est usuel dans la plupart des travaux analogues (par ex. [2], [4], [5], [8], [9], [10]), mais au lieu de cela, nous exigerons que A et $A + B$ satisfassent à la condition (S) (voir la définition 1) pour l'opérateur A ainsi que pour l'opérateur entier $A + B$. Cette condition nous permettra d'utiliser la méthode d'approximation de Galerkin par des espaces de dimension finie. Pour simplifier nos explications, nous supposons que l'opérateur B est globalement borné. Le cas où B n'est pas globalement borné, mais satisfait à quelque condition du croissement à l'infini, nous l'expliquerons dans un article indépendant. A la fin du travail, nous allons appliquer cette théorie générale à un exemple de la théorie des équations elliptiques. L'avantage de la méthode présentée dans ce travail consiste dans le fait, qu'elle permet, pour les théorèmes d'existence, de supposer, que l'opérateur non-linéaire, qui figure dans le premier membre d'une équation, soit dépendant aussi par rapport aux dérivées de l'ordre maximal.

Notation. Dans ce travail nous désignons le domaine d'un opérateur F par $D(F)$ et le domaine des valeurs par $\mathrm{Im}\,(F)$. Si F est un opérateur linéaire, les symbols $\mathrm{Ker}\,F$ et $\mathrm{Coker}\,F$ ont leur signification habituelle. Si F est un opérateur linéaire autoadjoint qui applique un espace de Hilbert dans lui-même, alors $\mathrm{Ker}\,F = \mathrm{Coker}\,F$. Si M est un sous-ensemble d'un espace de Banach, nous désignons par $\overline{M}$ la fermeture par rapport à la topologie définie par la norme et par $\overline{M}^w$ la fermeture faible de cet ensemble. Si $\{u_n\}$ est une suite et u un élément de cet espace, alors „$u_n \to u$" désigne la convergence par rapport à la topologie définie par la norme et „$u_n \rightharpoonup u$" la convergence faible. Autrement, nous utilisons des symbols habituels dans la litérature fondamentale (par ex. [1], [11]). De même des citations des théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionelle (le théorème de Mackey, de Kaplanski) tirent son origine de cette litérature.

Quand nous allons extraire une sous-suite convenable de la suite $\{u_n\}$, nous allons désigner cette sous-suite de nouveau par $\{u_n\}$.

D'abord nous rappelons quelques notions:

Définition 1. Soit X un espace linéaire normé et soit F une application de X dans son dual X^*. Alors nous disons que F a la propriété (S) (où F satisfait à la condition (S)), si pour chaque suite $\{u_n\} \subset X$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ et $\lim_{n\to\infty} (Fu_n, u_n - u) = 0$ on a $u_n \to u$, où $(.,.)$ signifie la dualité de X et X^*.

Définition 2. Soient X et Y deux espaces linéaires normés et soit A une application linéaire de X dans Y. Alors nous disons que A est *fredholmienne*, si la dimension $\dim \operatorname{Ker} A < +\infty$, $\operatorname{Im}(A)$ est un sous-espace fermé dans Y et $\dim \operatorname{Coker} A < +\infty$.

Pour les démonstrations ultérieures, le lemme suivant, provenant de P. HESS (voir [3]), sera de grande utilité:

Lemme. *Soit X un espace de Banach réflexif et soit A une application linéaire continue de X dans son dual, qui satisfait à la condition* (S). *Alors A est fredholmienne. En plus, si nous définissons l'index de l'application A par* $\operatorname{ind} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A$, *alors* $\operatorname{ind} A = 0$.

Maintenant nous démontrons deux lemmes qui nous permettront d'utiliser l'approximation de Galerkin:

Lemme 1. *Soit X un espace de Banach réflexif et soit A une application continue linéaire de X dans X^* ayant la propriété* (S). *Supposons que $K = \operatorname{Ker} A$ et soit $X = K \oplus Y$ (somme directe). Soit $\mathscr{S} = \{X_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ un filtre de sous-espaces de dimension finie qui contiennent K (le filtre est dirigé par l'inclusion). Soit i_α l'injection de l'espace X_α dans X, soit i_α^* l'application duale de i_α et soit $A_\alpha = i_\alpha^* A i_\alpha$. Soit enfin $Y_\alpha = X_\alpha \cap Y$. Alors*

$$\liminf_{\alpha\in\mathfrak{A}} \Big(\min_{\substack{\|x\|=1\\ x\in Y_\alpha}} \|A_\alpha(x)\| \Big) = \varepsilon > 0 \, .$$

Démonstration. Il est évident qu'il suffit de démontrer l'existence d'un nombre $\eta > 0$ et l'existence d'un $F \in \mathscr{S}$ tels que pour une suite arbitraire $\{X_n\} \subset \mathscr{S}$ où $F \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots$ ait lieu $\liminf_{n\to+\infty} \big(\min_{\|x\|=1, x\in Y_n} \|A_n(x)\| \big) = \eta > 0$.

Pour démontrer l'existence de cet espace, nous procéderons par contradiction. Supposons donc que pour tout $G \in \mathscr{S}$ il existe une suite d'espaces $\{X_n\} = \{X_n^G\} \subset \mathscr{S}$ telle que $G \subset X_1^G \subset X_2^G \subset \dots$ et pour laquelle on ait

$$\liminf_{n\to+\infty} \Big(\min_{\substack{\|x\|=1\\ x\in Y_n{}^G}} \|A_n^G(x)\| \Big) = 0 \, ,$$

où $A_n^G = (i_n^G)^* A i_n^G$ et où i_n^G est l'injection de X_n^G dans X. On peut donc choisir $u_n \in Y_n^G$ de telle manière que $\|u_n\| = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \|A_n^G(u_n)\| = 0$. D'après le théorème de Kaplanski, il est possible de choisir dans la suite $\{u_n\}$ une telle sous-suite (désignons la de nouveau par $\{u_n\}$) que $u_n \rightharpoonup u$. Il est évident que $u \in Y$, mais $(i_m^G)^* Au_n \to (i_m^G)^* Au$ (il s'agit de la convergence faible dans un espace de dimension finie) et $\|(i_m^G)^* Au\| \leqq \leqq \|A_n^G(u_n)\|$ pour $m \leqq n$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|(i_m^G)^* Au_n\| = 0$ pour tout nombre naturel, c'est-à-dire que Au est une application nulle sur $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} X_i^G$; ainsi que sur $X_G = \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} X_i^G}$. Autrement dit, $A_G(u) = 0$, où $A_G = i_G^* A i_G$ et où i_G est l'injection X_G dans X.

Alors si pour un espace $G \in \mathscr{S}$ qui est arbitraire mais fixe et dont la dimension est finie, nous définissons la famille

$$M_G = \{u \in X,\ \|u\| = 1,\ \exists X_G \Subset X,\ G \subset X_G = \overline{X}_G,\ u \in Y_G,\ i_G^* A(u) = 0\}\,,$$

où le symbol „$\Subset$" signifie que X_G est un sous-espace de l'espace X, il est évident que $M_G \neq \emptyset$. Le système $\{M_G, G \in \mathscr{S}\}$ jouit évidemment de la propriété des intersections finies, parce que $M_G \cap M_{G'} \supset M_{\mathrm{sp}(G,G')}$ (par „sp" on désigne ici l'enveloppe linéaire). Donc, grâce à la précompactivité faible de la sphère, il existe $\bar{u} \in \bigcap\limits_{G \in \mathscr{S}} (\overline{M}_G^w)$ et il est évident que $\bar{u} \in Y$. Nous montrerons que $\|\bar{u}\| = 1$. En effet, soit $E = \mathrm{sp}\,(\bar{u}, \operatorname{Ker} A)$, $\bar{u} \in \overline{M}_E^w$. Donc il existe une suite $\{v_n\} \subset M_E$, pour laquelle $v_n \rightharpoonup \bar{u}$. Soient $v_n \in X_E^{(n)}$ où $X_E^{(n)}$ sont des espaces convenablement choisis d'après la définition des éléments $v_n \in M_E$. Puisque $v_n - \bar{u} \in X_E^{(n)}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (Av_n, v_n - u) = 0$. Donc $v_n \to \bar{u}$, $\|\bar{u}\| = 1$.

Nous avons donc démontré que $\bar{u} \in Y$, $\|\bar{u}\| = 1$. Donc, s'il doit être $A\bar{u} \neq 0$, il doit exister nécessairement au moins un élément $w \in X$ tel que $(A\bar{u}, w) \neq 0$. Soit $J = \mathrm{sp}\,(\bar{u}, w, \operatorname{Ker} A)$. Alors $\bar{u} \in \overline{M}_J^w$ et il existe une suite $\{w_n\} \subset M_J$ pour laquelle $w_n \rightharpoonup \bar{u}$. Mais $(Aw_n, w) = 0$ pour un naturel n arbitraire, donc, grâce à la continuité faible de A, on a $(A\bar{u}, w) = 0$ ce qui est une contradiction. Le lemme 1 est démontré.

Lemme 2. *Soit W une application demicontinue qui applique un espace de Banach réflexif X dans son dual et supposons que W jouit de la propriété* (S). *Soit $\{X_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ le filtre de tous les sous-espaces de dimension finie de l'espace X, soient i_α, i_α^* les mêmes applications comme dans le lemme 1. Supposons qu'il existe une sous-famille confinale $\mathfrak{P}$ (nous disons qu'une sous-famille $\mathfrak{P}$ du filtre $\mathfrak{A}$ est confinale, si pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$ il existe un $\beta \in \mathfrak{P}$, $\beta > \alpha$) et qu'il existe une constante positive k de manière que pour tout $\beta \in \mathfrak{P}$ il existe au moins une solution x_β de l'équation $i_\beta^* W i_\beta x = 0$ et que pour cette solution a lieu l'estimation $\|x_\beta\| \leqq k$ qui est indépendante de β. Alors il existe une solution de l'équation $Wx = 0$ et de plus, il existe une suite $\{x_n\} \subset M = \{x_\beta, \beta \in \mathfrak{P}\}$ telle que $x_n \to x$.*

Démonstration. Définissons des familles $\mathfrak{M}_\alpha = \overline{\{x \in M,\ i_\alpha^* Wx = 0\}}^w$. Grâce à la confinalité de la famille $\mathfrak{P}$, le système $\{\mathfrak{M}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ est évidemment un système de familles non-vides, faiblement fermées uniformément bornées, un système ayant la propriété des intersections finies. Donc, grâce au théorème de Mackey, il existe un $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{M}_\alpha$. Nous allons montrer que cet x_0 est une solution de l'équation $Wx = 0$. Nous montrerons que $(Wx_0, y) = 0$ pour tout $y \in X$:

Définissons $X_{\alpha_0} = \text{sp}(x_0, y)$ et une suite $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}_{\alpha_0} \cap M$, $x_n \rightharpoonup x_0$. Par définition on a: $(Wx_n, x_n - x_0) = 0$ d'où il s'ensuit que $\lim_{n \to +\infty} (Wx_n, x_n - x_0) = 0$. Grâce à la condition (S), on a $x_n \to x_0$, c'est-à-dire que x_0 est en effet la limite d'une suite d'éléments de M. Grâce à la demi-continuité de W $(Wx_n, y) \to (Wx_0, y)$ a lieu. En même temps, par définition, on a $(Wx_n, y) = 0$ d'où il s'ensuit que $(Wx_0, y) = 0$.

Maintenant nous démontrerons le théorème principal de ce travail.

Théorème 1. (i) *Soit A un opérateur linéaire continu, autoadjoint, qui applique un espace de Hilbert H dans lui-même, dont le* Ker A *est non-trivial, et qui satisfait à la condition* (S).

(ii) *Soit B un opérateur demi-continu qui applique cet espace H dans lui-même. Soit B en plus uniformément borné sur H — cela signifie qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour un élément arbitraire $x \in H$ ait lieu $\|Bx\| < c$. Supposons que B a une asymptote faible à l'égrad des demi-droites de $K = \text{Ker}\, A$ — cela signifie qu'il existe une fonction réelle l définie sur la sphère unitaire dans l'espace $K = \text{Ker}\, A$ telle que $\lim_{t \to +\infty} (B(u + tw), w) = l(w)$ uniformément pour $w \in \text{Ker}\, A$, $\|w\| = 1$ et $u \in H$ borné (on entend par là que pour tout $d > 0$ la convergence est uniforme indépendamment de u par $\|u\| \leqq d$).*

(iii) *Soit donné $A + B$ satisfaisant à la condition* (S). *Alors pour $h \in H$ satisfaisant à l'une des conditions suivantes* (*) *respectivement* (**), *où*

(*) *pour tout $w \in K$ $\|w\| = 1$ il est $(h, w) > l(w)$*

(**) *pour tout $w \in K$ $\|w\| = 1$ il est $(h, w) < l(w)$*

il existe au moins une solution de l'équation (1):

$$Ax + Bx = h\,. \tag{1}$$

Démonstration. I. Soit $K = \text{Ker}\, A$ et Y son complément orthogonal ($Y = \text{Im}\, A$). Définissons la projection orthogonale P de l'espace H sur l'espace K et la projection orthogonale Q de l'espace H sur l'espace Y. Grâce au lemme 1, nous choisissons l'espace Z tel que

$$\inf\{\min_{\substack{\|x\|=1\\ x \in H_\alpha}} \|A_\alpha(x)\|;\ H_\alpha \supset Z,\ H_\alpha \Subset H \text{ et } \dim H_\alpha < +\infty\} \geqq \frac{\eta}{2} > 0\,.$$

Définissons encore le filtre $T = \{H_\alpha \Subset H,\ \dim H_\alpha < +\infty,\ H_\alpha \supset Z\}$ — pour simplifier écrivons aussi $T = \{H_\beta, \beta \in \mathfrak{P}\}$. Ce filtre est donc un sous-filtre confinal du filtre de tous les sous-espaces de dimension finie de H. Nous pouvons énoncer les deux propositions suivantes, concernant les éléments du filtre T:

(A) Soient A_β les opérateurs définis comme dans le lemme 1. En posant $K_\beta = \text{Ker}\, A_\beta$, $\beta \in \mathfrak{P}$, on a $K_\beta = K$ et alors $P_\beta = P/H_\beta$ est la projection orthogonale de H_β sur $\text{Ker}\, A_\beta$ et $Y_\beta = Y \cap H_\beta$ est le complément orthogonal de $\text{Ker}\, A_\beta$ et aussi le domaine des valeurs de l'opérateur A_β. Enfin $Q_\beta = Q/H_\beta$ est la projection orthogonale de H_β sur Y_β.

(B) Soit S_β l'application réciproque de l'opérateur A_β, c'est-à-dire l'application, pour laquelle $D(S_\beta) = Y_\beta = \mathrm{Im}\,(A_\beta)$ et pour laquelle $S_\beta A_\beta Q_\beta = Q_\beta$ et $A_\beta S_\beta Q_\beta = Q_\beta$ sur H_β. J'affirme que $\|S_\beta\| \leqq 2/\eta$ pour tout $\beta \in \mathfrak{P}$. En effet, supposons au contraire qu'il existe un $\beta \in \mathfrak{P}$ pour lequel $\|S_\beta\| > 2/\eta$. Il existe donc un $x \in Y_\beta$, $\|x\| = 1$ tel que $\|S_\beta(x)\| > 2/\eta$. Mais $\|A_\beta(S_\beta(x)/\|S_\beta(x)\|)\| = \|x\|/\|S_\beta(x)\| < \eta/2$, ce qui est en contradiction avec le choix de l'espace Z et du filtre T.

II. Maintenant nous allons chercher des solutions x_β des équations (1^β)

$$(1^\beta) \qquad A_\beta x + B_\beta x = i_\beta^* h = h_\beta$$

dans les espaces H_β, $\beta \in \mathfrak{P}$. Pour démontrer l'existence d'une solution de l'équation (1) pour $h \in H$ arbitraire, il suffit, d'après le lemme 2, de trouver un système $\{x_\beta\}_{\beta\in\mathfrak{P}}$ des solutions des équations (1^β) telles que $\|x_\beta\| \leqq k$, où $k > 0$ est une constante indépendante de $\beta \in \mathfrak{P}$. Définissons l'application $C_\beta^{(\varepsilon)} : H_\beta \to H_\beta$ par l'équation:

$$C_\beta^{(\varepsilon)}(x) = C_\beta^{(\varepsilon)}(u + w) = u^*(x) + w^*(x)\,,$$

$$\text{où} \quad u^* = u^*(x) = S_\beta Q_\beta(h_\beta - B_\beta x)\,, \quad w^* = w^*(x) = w - P_\beta(h_\beta - B_\beta x)\,\varepsilon$$

en supposant que $x \in H_\beta$, $x = u + w$, $u = Q_\beta x$, $w = P_\beta x$, ε est un nombre positif. En considérant l'espace H_β de la forme $Y_\beta \times K$ on a $C_\beta^{(\varepsilon)}[u, w] \to [u^*, w^*]$.

J'affirme que $x_\beta = [u, w]$ est un point fixe de l'application $C_\beta^{(\varepsilon)}$ si et seulement si x_β est une solution de l'équation (1^β). En effet, soit x_β un point fixe de l'application $C_\beta^{(\varepsilon)}$. Alors $0 = w - w^* = P_\beta(h_\beta - B_\beta x_\beta)\,\varepsilon$. Donc $Q_\beta(h_\beta - B_\beta x_\beta) = h_\beta - B_\beta x_\beta$ et enfin $u = S_\beta(h_\beta - B_\beta x_\beta)$. En effectuant l'application A_β sur la dernière égalité, on obtient: $A_\beta x_\beta = A_\beta u = h_\beta - B_\beta x_\beta$.

Si au contraire $A_\beta x_\beta + B_\beta x_\beta = h_\beta$, alors $h_\beta - B_\beta x_\beta \in \mathrm{Im}\,A_\beta$ et donc $0 = P_\beta(h_\beta - B_\beta x_\beta)\,.\,\varepsilon = w - w^*$. Mais en même temps $h_\beta - B_\beta x_\beta = Q_\beta(h_\beta - B_\beta x_\beta)$. Donc $A_\beta x_\beta = A_\beta Q_\beta x_\beta = Q_\beta(h_\beta - B_\beta x_\beta)$ et en appliquant l'opérateur S_β à cette dernière équation, on voit que x_β est un point fixe de l'application $C_\beta^{(\varepsilon)}$.

Pour démontrer notre théorème, il suffit de trouver un ensemble $U \subset H$ convexe, borné, fermé, $0 \in \mathrm{Int}\,U$ et tel que dans $U_\beta = U \cap H_\beta$, $\beta \in \mathfrak{P}$ l'application $C_\beta^{(\varepsilon)}$ ait un point fixe (on doit vérifier cela pour chaque $\beta \in \mathfrak{P}$). Pour démontrer l'existence de ces points fixes il suffit, en vertu du théorème de Brouwer, de démontrer que $C_\beta^{(\varepsilon)}$ appliquent ces U_β dans eux-mêmes. Nous allons chercher U:

Parce que nous supposons (voir la supposition (ii) de notre théorème) que $\|Bx\| < c$ pour tout $x \in H$ et donc aussi $\|B_\beta x\| < c$ pour tout $x \in H_\beta$, alors pour chaque $\beta \in \mathfrak{P}$ arbitraire, $x \in H_\beta$, $x = u + w$, $u = Q_\beta x$ et $w = P_\beta x$ ont lieu les inégalités: $\|u^*(x)\| \leqq \leqq \|S_\beta\|\,\|Q_\beta\|\,\|h_\beta - B_\beta x\| \leqq \|Q\|\,(c + \|h\|)\,(2/\eta)$. Posons, pour abréger, $q = \|Q\|\,.\,(c + \|h\|)\,(2/\eta)$. Supposons maintenant que $x = u + w$, $\|u\| \leqq q$. Nous estimons $w^*(x)$ de la manière suivante: $\|w^*(x)\|^2 = (w - \varepsilon P_\beta(h_\beta - B_\beta x),\, w - \varepsilon\cdot P_\beta(h_\beta - B_\beta x)) = \|w\|^2 + \varepsilon^2\|P_\beta(h_\beta - B_\beta x)\|^2 - 2\cdot\varepsilon(P_\beta(h_\beta - B_\beta x), w)$. Comme $w \in K \subset H_\beta$, nous avons $(P_\beta(h_\beta - B_\beta x), w) = (h_\beta - B_\beta x, w) = (h - Bx, w) = (h - B(u + w), w)$. Ensuite $(h - B(u + w), w) = \varrho(h - B(u + (w/\varrho)\,\varrho), w/\varrho)$ et simultanément

$(B(u + t(w/\varrho), w/\varrho) \to l(w/\varrho)$ uniformément au sens de la supposition (ii) du théorème 1. Si nous définissons $\alpha(w, \varrho) = (h - B(u + w/\varrho), w/\varrho)$, alors en vertu de la condition $(*)$ pour $h \in H$, nous pouvons déterminer des nombres ϱ_0, α_0 tels que $\alpha(w, \varrho) \geqq \geqq \alpha_0 > 0$ pour $\varrho \geqq \varrho_0/2 > 0$. Nous avons: $\|w^*(x)\|^2 \leqq \|w\|^2 + \varepsilon^2\|P\|^2 (c + \|h\|)^2 - - 2\varrho\alpha(w, \varrho)\cdot\varepsilon$, car $\|P_\beta(h_\beta - B_\beta x)\|^2 \leqq \|P\|^2 \|h_\beta - B_\beta x\|^2 \leqq \|P\|^2 (c + \|h\|)^2$, où c'est défini dans la supposition (ii). Alors pour $\varepsilon \leqq \varepsilon_1 = \alpha_0\varrho_0\|P\|^{-2} (c + \|h\|)^{-2}$ et $\|w\| = \varrho \in \langle\frac{1}{2}\varrho_0, \varrho_0\rangle$ nous avons $\|w^*(x)\|^2 \leqq \|w\|^2 = \varrho^2 \leqq \varrho_0^2$.

Mais pour $\|w\| = \varrho \in \langle 0, \frac{1}{2}\varrho_0\rangle$ et $\varepsilon \leqq \varepsilon_2 = \varrho_0(2\|P\| (c + \|h\|)^{-1}$ nous avons aussi $\|w^*(x)\|^2 \leqq \varrho_0^2$, donc pour $\varepsilon \leqq \varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ l'opérateur $C_\beta^{(\varepsilon)}$ applique la famille $U_\beta = \{x \in H_\beta, \|P_\beta(x)\| \leqq \varrho_0, \|Q_\beta x\| \leqq q\}$ dans elle-même.

Il est nécessaire de remarquer que toutes ces estimations ne dépendent pas de l'index $\beta \in \mathfrak{P}$. Si nous posons $U = \{x \in H, \|Px\| \leqq \varrho_0, \|Qx\| \leqq q\}$, nous trouvons de cette façon une solution pour toute équation (1^β) dans U et donc, en vertu du lemme 2, nous trouvons dans cette famille au moins une solution de l'équation (1). Le cas $(**)$ peut être ramené au cas $(*)$ par la multiplication de l'équation (1) par le nombre -1.

Remarque 1. Si $\{w_1, \ldots, w_n\}$ est une base orthonormale de l'espace $K = \operatorname{Ker} A$ et si $\operatorname{Im} B \subset Y \times \operatorname{sp}\{w_1, \ldots, w_k\}$, $k < n$, on a évidemment $l(w_j) = 0$ pour $j = = k + 1, \ldots, n$ et aucune des conditions $(*)$, $(**)$ n'est remplie pour aucun $h \in H$. Or, en envisageant l'espace $H' = Y \times \operatorname{sp}\{w_1, \ldots, w_k\}$, les restrictions des opérateurs A, B, $A + B$ à l'espace H' ont les propriétés (i)—(iii) du théorème. Si $h \in H'$ satisfait à une des conditions $(*)$, $(**)$ pour $l' = l/H'$, l'equation (1) $Ax + Bx = h$ a pour cette h au moins une solution dans l'espace H. Dans le cas spécial, où $R(B) \subset R(A)$, nous posons $H' = Y = R(A)$ et le problème a d'après la remarque suivante (rem. 3) une solution pour tout $h \in H$.

Remarque 2. *On conserve les hypothèses du théorème* 1. *Soit donnée pour chaque* $u \in H$ *et* $w \in K = \operatorname{Ker} A$, $\|w\| = 1$ *l'inégalité* $(Bu, w) > l(w)$ (*resp. l'inégalité* $(Bu, w) < l(w)$. *Alors l'inégalité* $(*)$ (*resp.* $(**)$) *du théorème est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe pour* $h \in H$ *une solution de l'équation* (1).

Démonstration. La suffisance de ces conditions est exprimée par le théorème 1. Nécessité pour $(*)$: Soit $Au + Bu = h$ pour quelque $h \in H$, alors $(Au, w) + (Bu, w) = = (u, Aw) + (Bu, w) = (Bu, w) = h(w) > l(w)$ pour chacun $w \in K$, $\|w\| = 1$. Le cas $(**)$ est analogue.

Remarque 3. *Le cas de la trivialité de* $\operatorname{Ker} A$: *Supposons que les hypothèses* (i)—(iii) *du théorème* 1. *soient remplies à l'exception de la non-trivialité de* $\operatorname{Ker} A$ (*et donc à l'exception de l'existence d'une asymptote faible*). *Supposons en plus que* $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. *Alors l'équation* (1) $Ax + Bx = h$ *a une solution pour chaque* $h \in H$.

Démonstration. Nous allons résoudre de nouveau les équations (1^α) $A_\alpha x + + B_\alpha x = h_\alpha = i_\alpha^* h$ dans un sous-espace arbitraire H_α de dimension finie de l'espace H.

Si nous choisissons l'espace Z de la même manière que dans la démonstration du théorème 1 et si nous bornons aux X_α pour lesquels $X_\alpha \supset Z$, alors les opérateurs A_α sont bijectifs. Donc les équations (1^α) sont équivalentes aux équations (2^α)

$$x + A_\alpha^{-1} B_\alpha x = A_\alpha^{-1} h_\alpha \,. \tag{2^α}$$

Il suffit donc de chercher des points fixes de l'application $- A_\alpha^{-1}(B_\alpha - h_\alpha)$. On a $\|A_\alpha^{-1}(B_\alpha x - h_\alpha)\| \leqq \|A_\alpha^{-1}\| (c + \|h\|) \leqq (2/\eta)(c + \|h\|)$, où les nombres η et c ont le même sens comme dans la démonstration du théorème 1. Donc, si nous choisissons $\varrho_0 = (2/\eta)(c + \|h\|)$, l'opérateur $A_\alpha^{-1}(B_\alpha - h_\alpha)$ applique l'ensemble convexe $B_\alpha(0, \varrho_0) = \{x \in H_\alpha,\ \|x\| \leqq \varrho_0\}$ dans lui-même et par l'application du théorème de Brouwer et grâce à l'approximation de Galerkin, nous obtenons dans $B(0, \varrho_0) = \{x \in H,\ \|x\| \leqq \varrho_0\}$ au moins une solution de l'équation (1).

APPLICATIONS

Nous allons appliquer la théorie donnée à un exemple de la théorie des équations elliptiques. La non-nécessité de la supposition de la continuité totale de l'opérateur non-linéaire B nous donne la possibilité de supposer dans le théorème suivant que cet opérateur dépend aussi des dérivées d'ordre maximal.

Théorème 2. *Soit Ω un ouvert borné de R^n ayant une frontière lipschitzienne Γ. Soit donnée l'équation* (3)

$$\begin{aligned}\sum_{|i|,|j| \leqq k} \int_\Omega a_{ij}(x)\, D^i u\, D^j v \,\mathrm{d}x + \sum_{|i|,|j| < k} \int_\Gamma A_{ij}(x)\, D^i u \,. \\ . D^j v \,\mathrm{d}s + \sum_{|i| \leqq k} \int_\Omega D^i v\, g_i(x, D^i u, \eta_i(u)) \,\mathrm{d}x + \sum_{|i| < k} \int_\Gamma D^i v \,. \\ . G_i(x, D^i u, \eta_i(u)) \,\mathrm{d}s = \int_\Omega v f \,\mathrm{d}x + \int_\Gamma v F \,\mathrm{d}s \,,\end{aligned} \tag{3}$$

où $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ pour $|i| \leqq k$, $|j| \leqq k$, $A_{ij} \in L^\infty(\Gamma)$ pour $|i| < k$, $|j| < k$, $g_i(\cdot, \xi_i, \eta_i)$ (resp. $G_i(\cdot, \xi_i, \eta_i)$) sont élements de l'espace $L^2(\Omega)$ (resp. $L^2(\Gamma)$), $g_i(x, \cdot, \cdot)$ sont des fonctions continues par rapport à toutes les variables ξ_i, η_i, $|i| \leqq k$ pour presque tous $x \in \Omega$, $G_i(x, \cdot, \cdot)$ sont des fonctions continues par rapport à toutes les variables ξ_i, η_i, $|i| < k$ pour presque tous $x \in \Gamma$, où $\eta_i(u)$ signifie toutes les dérivées de la fonction u d'ordre différent de i. Imposons les hypothèses suivantes (i)–(v):

(i) *On suppose l'existence des fonctions $a_i^\pm \in L^2(\Omega)$, $A_i^\pm \in L^2(\Gamma)$ telles que*

(4) $\lim\limits_{\xi_i \to \pm\infty} g_i(x, \xi_i, \eta_i) = a_i^\pm(x)$ *uniformément par rapport à η_i pour presque tous $x \in \Omega$, où $x \in \Omega$ est un point fixe,*

(5) $\lim_{\xi_i \to \pm\infty} G_i(x, \xi_i, \eta_i) = A_i^{\pm}(x)$ *uniformément par rapport à* η_i *pour presque tous* $x \in \Gamma$.

(ii) *On suppose l'existence des fonctions* $b_i \in L^2(\Omega)$ *et* $B_i \in L^2(\Gamma)$ *telles que*

$|g_i(x, \xi_i, \eta_i)| \leqq b_i(x)$ *presque partout dans* Ω *pour* ξ_i, η_i *arbitraire,*

$|G_i(x, \xi_i, \eta_i)| \leqq B_i(x)$ *presque partout dans* Γ *pour* ξ_i, η_i *arbitraire.*

(iii) *L'ellipticité uniforme de l'opérateur différentiel linéaire: On suppose qu'il existe une constante* $c > 0$ *telle que*

$$\sum_{|i|,|j|=k} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j > c \sum_{|i|=k} |\xi_i|^2 \text{ pour tout } x \in \Omega \text{ et pour tout } \xi = (\xi_i),\ |i| = k.$$

(iv) *La symétrie de l'opérateur linéaire:*

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad \text{pour tous} \quad x \in \Omega, \quad |i| \leqq k, \quad |j| \leqq k$$

$$A_{ij}(x) = A_{ji}(x) \quad \text{pour tous} \quad x \in \Gamma, \quad |i| < k, \quad |j| < k.$$

(v) *La monotonie en dérivées d'ordre maximal de l'opérateur non-linéaire: Supposons que l'inégalité* $[g_i(x, \xi_i^{(1)}, \eta_i) - g_i(x, \xi_i^{(2)}, \eta_i)]\,[\xi_i^{(1)} - \xi_i^{(2)}] \geqq 0$ *ait lieu pour tout* $|i| = k$, *pour tout* $x \in \Omega$ *et pour un couple arbitraire des nombres réels* $\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}$ *et pour* η_i *arbitraire de l'espace euclidien de dimension adéquate.*

Supposons que les fonctions $f \in L^2(\Omega)$, $F \in L^2(\Gamma)$ *remplissent l'inégalité* (6):

$$(6) \quad \int_\Omega fw\, dx + \int_\Gamma Fw\, ds > \sum_{|i| \leqq k} \left[\int_{\Omega_i^+} a_i^+(x)\, D^i w\, dx + \int_{\Omega_i^-} a_i^-(x)\, D^i w\, ds\right] + \\ + \sum_{|i|<k} \left[\int_{\Gamma_i^+} A_i^+(x)\, D^i w\, ds + \int_{\Gamma_i^-} A_i^-(x)\, D^i w\, ds\right]$$

pour tous w *de l'espace de Sobolev* $W_{k,2}(\Omega)$ *qui sont les solutions de l'équation linéaire*

$$\sum_{|i|,|j| \leqq k} \int_\Omega a_{ij}(x)\, D^i w\, D^j u\, dx + \sum_{|i|,|j|<k} \int_\Gamma A_{ij}(x)\, D^i w\, D^j u\, ds = 0,$$

où les familles $\Omega_i^{\pm}, \Gamma_i^{\pm}$ *qui dépendent de la fonction* w *sont définies de manière que* $\Omega_i^+ = \{x \in \Omega,\ D^i w(x) > 0\}$, $\Omega_i^- = \{x \in \Omega,\ D^i w(x) < 0\}$, *analogue* $\Gamma_i^+ = \{x \in \Gamma,\ D^i w(x) > 0\}$, $\Gamma_i^- = \{x \in \Gamma,\ D^i w(x) < 0\}$, *et* u *est un élément arbitraire de l'espace* $W_{k,2}(\Omega)$.

Alors pour telles fonctions f, F *il existe au moins une solution de l'équation* (3) *dans l'espace* $W_{k,2}(\Omega)$.

Démonstration. Définissons les opérateurs A, B qui appliquent l'espace $W_{k,2}(\Omega)$ dans lui-même par les équations

$$(Au, v) = \sum_{|i|,|j| \leqq k} \int_\Omega a_{ij}(x)\, D^i u\, D^j v + \sum_{|i|,|j|<k} \int_\Gamma A_{ij}(x)\, D^i u\, D^j v\, ds$$

$$(Bu, v) = \sum_{|i| \leq k} \int_\Omega g_i(x, D^i u, \eta_i(u))\, D^i v \,\mathrm{d}x + \sum_{|i|<k} \int_\Gamma D^i v\, G_i(x, D^i u, \eta_i(u))\,\mathrm{d}s\,,$$

où u, v sont deux éléments de l'espace $W_{k,2}(\Omega)$.

Nous montrerons maintenant, que ces opérateurs vérifient les hypothèses du théorème 1:

I. L'opérateur A a la propriété (S): Soit $\{u_n\}$ une suite dans $W_{k,2}(\Omega)$ et soit u sa limite faible dans cet espace. Grâce au théorème de la continuité totale de l'injection canonique de l'espace $W_{1,2}(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$, on voit que la suite $\{u_n\}$ est précompacte dans $W_{k-1,2}(\Omega)$. Alors en extrayant de chaque sous-suite de la suite $\{u_n\}$ une nouvelle sous-suite convergente, celle-ci a naturellement pour limite l'élément u considéré. Donc $u_n \to u$ dans $W_{k-1,2}(\Omega)$ et, grâce au théorème des traces (tous les opérateurs des traces sont aussi totalement continus), il suffit de démontrer que la supposition de la condition (S) implique $D^i u_n \to D^i u$ dans $L^2(\Omega)$ pour $|i| = k$. Mais de la forme de l'opérateur et de la convergence intégrale des traces et des dérivées d'ordre plus petit que k il s'ensuit:

$$\sum_{|i|,|j|=k} \int_\Omega a_{ij}\, D^i(u_n - u)\, D^j(u_n - u)\,\mathrm{d}x \to 0\,,$$

alors, grâce à l'ellipticité uniforme, nous obtenons

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{|i|=k} \int_\Omega D^i(u_n - u)^2\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

II. L'opérateur $A + B$ remplit la condition (S): Comme on le voit dans la partie I., il suffit de vérifier la convergence des dérivées d'ordre maximal, mais de la supposition de la condition (S) et de la convergence des autres dérivées et des traces on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{|i|,|j|=k} \int_\Omega a_{ij}\, D^i(u_n - u)\, D^j(u_n - u)\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \sum_{|i|=k} \int_\Omega D^i(u_n - u)\,[g_i(x, D^i u_n, \eta_i(u_n)) - g_i(x, D^i u, \eta_i(u))]\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

De l'ellipticité uniforme de l'opérateur A et de la monotonie de l'opérateur B on déduit que les deux sommes dans cette dernière expression sont des nombres non-négatifs. Donc la limite de chacune de ces expressions est 0 et en utilisant l'ellitpticité on déduit notre assertion comme dans la partie I.

III. Nous montrerons l'existence d'une asymptote faible de l'opérateur B. Définissons pour $w \in \operatorname{Ker} A$:

$$l(w) = \sum_{|i|\leq k} \int_{\Omega_{i^+}} D^i w\, a_i^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_{i^-}} D^i w\, a_i^-(x)\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \sum_{|i|<k} \int_{\Gamma_{i^+}} D^i w\, A_i^+(x)\,\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_{i^-}} D_i w\, A_i^-(x)\,\mathrm{d}s\,.$$

Nous affirmons que $l(w)$ est une asymptote faible de l'opérateur B au sens du théorème 1.

Supposons au contraire l'existence des suites $\{t_n\}$, $\{w_n\}$, $\{u_n\}$ telles que $t_n \nearrow +\infty$, $w_n \to w$, $u_n \rightharpoonup u$ et telles que $|(Bu_n + t_n w_n), w_n) - l(w_n)| > \eta > 0$ pour chaque n. Alors un des deux cas doit avoir lieu.

a) Il existe $\gamma > 0$ tel qu'on peut déterminer $|i| \leqq k$ et qu'on peut extraire des sous-suites (nous les notons de nouveau $\{t_n\}$, $\{w_n\}$, $\{u_n\}$ de manière que

$$\left|\int_\Omega D^i w_n \, g_i(x, D^i u_n + t_n D^i w_n, D^\alpha u_n + t_n D^\alpha w_n) \, dx - \right.$$
$$\left. - \int_{\Omega_{in}+} D^i w_n a_i^+(x) \, dx - \int_{\Omega_{in}^-} D^i w_n \, a_i^-(x) \, dx \right| \geqq \gamma$$

(pour tout n), où $\Omega_{in}^+ = \{x \in \Omega, D^i w_n(x) > 0\}$, $\Omega_{in}^- = \{x \in \Omega, D^i w_n(x) < 0\}$.

b) Il existe $\gamma > 0$ tel qu'on peut déterminer $|i| < k$ et qu'on peut extraire des sous-suites de manière que

$$\left|\int_\Gamma D^i w_n \, G_i(x, D^i u_n + t_n D^i w_n, D^\alpha u_n + t_n D^\alpha w_n) \, ds - \right.$$
$$\left. - \int_{\Gamma_{in}^+} D^i w_n \, A_i^+(x) \, ds - \int_{\Gamma_{in}^-} D^i w_n \, A_i^-(x) \, ds \right| > \gamma$$

(pour tout n), où $\Gamma_{in}^+ = \{x \in \Gamma, D^i w_n(x) > 0\}$, $\Gamma_{in}^- = \{x \in \Gamma, D^i w_n(x) < 0\}$.

Grâce à l'analogie des cas a), b), nous pouvons nous occuper seulement du cas a). Supposons donc que le cas a) ait lieu pour quelque valeur de l'index i. Grâce au théorème de Jegorov, il existe un ensemble $\Omega' \subset \Omega$ tel que mes $(\Omega \setminus \Omega') < \delta$ où δ est un nombre arbitraire positif choisi d'avance de sorte que la convergence vers la limite (4) (voir la supposition (i) de ce théorème) est uniforme aussi par rapport à la variable x, où $x \in \Omega'$. Alors nous avons:

$$\text{(A)} \qquad \left|\int_{\Omega \setminus \Omega'} D^i w_n \, g_i(x, D^i u_n + t_n D^i w_n, D^\alpha u_n + t_n D^\alpha w_n) \, dx - \right.$$
$$\left. - \int_{\Omega_{in}^+ \setminus \Omega'} D^i w_n \, a_i^+(x) \, dx - \int_{\Omega_{in}^- \setminus \Omega'} D^i w_n \, a_i^-(x) \, dx \right| \leqq$$
$$\leqq \left(\int_{\Omega \setminus \Omega'} (b_i(x) + |a_i^+(x)| + |a_i^-(x)|)^2 \, dx\right)^{1/2}$$

grâce au fait que $\|w_n\| = 1$.

En vertu de la continuité en mesure de la dernière expression, on peut choisir Ω' de telle manière que cette expression est plus petite que $\frac{1}{4}\gamma$. Alors:

$$\left|\int_{\Omega'} D^i w_n \, g_i(x, D^i u_n + t_n D^i w_n, D^\alpha u_n + t_n D^\alpha w_n) \, dx - \right.$$

$$-\int_{\Omega_{in}^{+\prime}} D^i w_n\, a_i^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_{in}^{-\prime}} D^i w_n\, a_i^-(x)\,\mathrm{d}x\Big| \geqq \frac{3}{4}\gamma\,.$$

Pour simplifier nous allons désigner les ensembles Ω', $\Omega_{in}^{\pm\prime} = \Omega_{in}^{\pm} \cap \Omega'$ par Ω, $\Omega_{in}^{\pm}$.

Définissons $m(c) = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} \operatorname{mes}\{x \in \Omega,\ |D^i u_n(x)| \geqq c\}$ où $\mathbf{N}$ est l'ensemble de tous les nombres naturels. Grâce au fait que la suite $\{u_n\}$ est bornée, nous obtenons: $\lim\limits_{c\to+\infty} m(c) = 0$. Définissons des familles M_n^c:

$$M_n^c = \{x \in \Omega,\ D^i u_n(x) \geqq c\}\,.$$

En utilisant la continuité absolue du second membre de l'inégalité (A), nous choisissons $c_0 > 0$ de manière qu'ait lieu l'estimation (B):

(B) $$\Big|\int_{M_n^{c_0}} D^i w_n\, g_i(x, D^i u_n + t_n D^i w_n, D^\alpha u_n + t_n D^\alpha w_n)\,\mathrm{d}x -$$

$$- \int_{\Omega_{in}^+ \cap M_n^{c_0}} D^i w_n\, a_i^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_{in}^- \cap M_n^{c_0}} D^i w_n\, a_i^-(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leqq \frac{\gamma}{4}\,.$$

Définissons encore pour chaque $n \in \mathbf{N}$ et $\vartheta > 0$ des familles

$$W_n^\vartheta = \{x \in \Omega,\ |D^i w_n(x)| < \vartheta\}\,.$$

Alors

(C) $$\Big|\int_{W_n^\vartheta} D^i w_n g_i(x, D^i u_n + t_n w_n, D^\alpha u_n + t_n D^\alpha w_n)\,\mathrm{d}x -$$

$$- \int_{\Omega_{in}^+ \cap W_n^\vartheta} D^i w_n\, a_i^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_{in}^- \cap W_n^\vartheta} D^i w_n\, a_i^-(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leqq$$

$$\leqq \left(\int_{W_n^\vartheta} |D^i w_n|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_\Omega (b_i(x) + |a_i^+(x)| + |a_i^-(x)|)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \vartheta(\operatorname{mes}\Omega)^{1/2}\,\|b_i + |a_i^+| + |a_i^-|\,\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Cette dernière expression est plus petite que $\frac{1}{4}\gamma$, si $\vartheta > 0$ est suffisamment petit. On a donc (D):

(D) $$\Big|\int_{\Omega\setminus M_n^{c_0}\setminus W_n^\vartheta} D^i w_n\, g_i(x, D^i u_n + t_n D^i w_n, D^\alpha u_n + t_n D^\alpha w_n)\,\mathrm{d}x -$$

$$- \int_{\Omega_{in}^+\setminus M_n^{c_0}\setminus W_n^\vartheta} D^i w_n\, a_i^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_{in}^-\setminus M_n^{c_0}\setminus W_n^\vartheta} D^i w_n\, a_i^-(x)\,\mathrm{d}x\Big| \geqq \frac{\gamma}{4}\,.$$

Définissons maintenant des fonctions:

$$\Theta_i^\pm(\xi) = \sup\{|g_i(x, \xi_i, \eta_i) - a_i^\pm(x)|,\ x \in \Omega,\ \xi_i \in \langle\xi; \pm\infty),\ \eta_i \in R^d\}\,,$$