Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

VERALLGEMEINERTE HILL'SCHE DIFFERENTIALGLEICHUNG

Jiří Hnilica, Praha

(Eingegangen am 4. Januar 1976)

In dieser Arbeit untersuchen wir die lineare homogene verallgemeinerte Differentialgleichung (siehe [1], [2])

$$\text{(H)} \qquad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}[A(s)]\, x\,,$$

wobei $x = (x_1, x_2)^*$ ein 2-dimensionaler Vektor und $A(s)$ eine 2×2-Matrix der Form

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0, & s \\ -\Phi(s), & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Sei ferner Φ eine reelle Funktion mit endlicher Variation im Interval $[a, a + \omega]$, wobei $\omega > 0$ und a eine beliebige reelle Zahl ist. Unter einer Lösung von (H) in einem Interval $[T_1, T_2]$ verstehen wir soeine Funktion $x(\tau) = (x_1(\tau), x_2(\tau)) : [T_1, T_2] \to E_2$, für welche die Gleichung $x(\tau_2) = x(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}[A(t)]\, x(t)$ für $\tau_1, \tau_2 \in [T_1, T_2]$ gilt, wobei das Integral in der letzten Gleichung das Perron-Stieltjessche oder äquivalent das Kurzweilsche Integral ist (siehe [2]).

Setzen wir noch voraus, dass

$$A(t + \omega) - A(t) = C$$

für alle $t \in (-\infty, +\infty)$ gilt, wobei $\omega > 0$ und C eine konstante 2×2-Matrix ist (d. h. das System (H) ist das verallgemeinerte periodische System). Das so definierte System (H) ist eine Verallgemeinerung der Hill'schen Gleichung $\ddot{x} + p(t)\, x = 0$ (siehe [4]), wobei $p(t)$ eine in E_1 definierte ω-periodische, integrierbare Funktion ist. Wenn man $\Phi(s) = \int_a^s p(t)\, \mathrm{d}t$ setzt, $a \in E_1$, dann ist die Gleichung (H) mit der entsprechenden Matrix $A(s)$ der Hill'schen Differentialgleichung $\ddot{x} + p(t)\, x = 0$ äquivalent.

Wenn wir mit E die identische 2×2-Matrix bezeichnen, dann sind die Matrixen $(E + \Delta^+ A(t))$ und $(E - \Delta^- A(t))$ für alle $t \in (-\infty, +\infty)$ regular, denn es ist offenbar

$$\Delta^{\pm} A(s) = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ \Delta^{\pm} \Phi(s), & 0 \end{pmatrix}$$

und also $\det(E \pm \Delta^{\pm} A(s)) = 1$ für jedes $s \in E_1$, wobei $\Delta^{+} A(t) = A(t_{+}) - A(t)$, $\Delta^{-} A(t) = A(t) - A(t_{-})$. Aus dieser Tatsache folgt (siehe [1]), dass das System (H) die Existenzbedingungen und die Eindeutigkeitsbedingungen im ganzen Interval $(-\infty, +\infty)$ erfüllt.

Für das System (H) gilt auch die Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Floquettheorie (siehe [3]), der im klassichen Fall gut bekannt ist (siehe [4]).

In dieser Arbeit zeigen wir hinreichende Bedingungen die zufolge haben, dass alle Lösungen des Systems (H) im ganzen Interval $(-\infty, +\infty)$ begrenzt sind. Es handelt sich um eine Verallgemeinerung der Borg'schen Bedingung (siehe [4]). Zuerst beweisen wir einige Behauptungen.

Sei $A(t)$ für $t \in (-\infty, +\infty)$ eine $n \times n$-Matrix, deren Elemente $a_{ij}(t)$ reelle Funktionen sind. Setzen wir vouraus, dass

$$A(t + \omega) - A(t) = C \quad \text{für alle} \quad t \in (-\infty, +\infty) \quad \text{ist}\,.$$

Sei weiter $\det(E \pm \Delta^{\pm} A(t)) \neq 0$ für alle $t \in [0, \omega]$ und $\operatorname{var}_0^{\omega} A < +\infty$. Dann gilt für das verallgemeinerte periodische System

$$\text{(P)} \qquad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}[A(s)]\, x\,,$$

wobei $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^*$ eine n-dimensionale Vektorfunktion ist, folgendes.

Lemma 1. *Sei λ der Multiplikator des Systems* (P). *Dann existiert eine nichttriviale Lösung $x(t)$ des Systems* (P), *sodass*

$$x(t + \omega) = \lambda\, x(t) \quad \text{für alle} \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

gilt.

Beweis. Sei $X(t)$ die Fundamentalmatrix des Systems (P). Da λ Multiplikator des Systems (P) ist, gilt $(X(\omega)\, x_0 - \lambda x_0) = 0$, wobei x_0 der Eigenvektor der Monodromiematrix $X(\omega)$ ist. Definieren wir die Lösung $x(t)$ des Systems (P) durch $x(t) = X(t)\, x_0$. In [3] wurde bewiesen, dass die Matrix $X(t + \omega)$ auch eine Fundamentalmatrix ist. Demzufolge existiert eine konstante Matrix C, so dass $X(t + \omega) = X(t)\, C$ für alle $t \in E_1$ ist. Die Eindeutigkeit gibt $C = X(\omega)$. Also es gilt

$$x(t + \omega) = X(t)\, X(\omega)\, x_0 = X(t)\, \lambda x_0 = \lambda\, X(t)\, x_0 = \lambda\, x(t)\,,$$

das Lemma ist bewiesen.

Lemma 2. *Sei $X(t)$ die Fundamentalmatrix des Systems* (H). *Dann ist* $\det X(t) = 1$ *für alle* $t \in (-\infty, +\infty)$.

Beweis. Sei $X(t) = (x_{ij}(t))_{i,j=1,2}$. Dann gilt

$$x_{11}(t) = 1 + \int_0^t x_{21}(s)\,ds\,, \quad x_{12}(t) = \int_0^t x_{22}(s)\,ds\,, \tag{1.1}$$

$$x_{21}(t) = -\int_0^t x_{11}(s)\,d\Phi(s)\,, \quad x_{22}(t) = 1 - \int_0^t x_{12}(s)\,d\Phi(s)\,.$$

Von der Definition der Determinante ergibt sich

$$\det X(t) = 1 - \int_0^t x_{12}(s)\,d\Phi(s) + \int_0^t x_{21}(s)\,ds - \tag{1.2}$$

$$- \int_0^t x_{21}(s)\,ds\,.\int_0^t x_{12}(s)\,d\Phi(s) + \int_0^t x_{22}(s)\,ds\,.\int_0^t x_{11}(s)\,d\Phi(s)\,.$$

Wir bezeichnen

$$R(t) = \int_0^t x_{21}(s)\,ds\,.\int_0^t x_{12}(s)\,d\Phi(s)\,,$$

$$S(t) = \int_0^t x_{22}(s)\,ds\,.\int_0^t x_{11}(s)\,d\Phi(s)\,.$$

Dann gilt

$$\det X(t) = 1 - \int_0^t x_{12}(s)\,d\Phi s + \int_0^t x_{21}(s)\,ds - R(t) + S(t)\,. \tag{1.3}$$

Bezeichnen wir weiter $F(t) = \int_0^t x_{21}(s)\,ds$, $G(t) = \int_0^t x_{12}(s)\,d\Phi(s)$, dann gibt die Integration per-partes und der Substitutionsatz (siehe [1])

$$R(t) = \int_0^t \left(\int_0^s x_{21}(\tau)\,d\tau\right) x_{12}(s)\,d\Phi(s) + \int_0^t \left(\int_0^s x_{12}(\tau)\,d\Phi(\tau)\right) x_{21}(s)\,ds\,. \tag{1.4}$$

Nach (1.1) und (1.4) ist ferner

$$R(t) = \int_0^t x_{11}(s)\,x_{12}(s)\,d\Phi(s) - \int_0^t x_{12}(s)\,d\Phi(s) + \tag{1.5}$$

$$+ \int_0^t x_{21}(s)\,ds - \int_0^t x_{22}(s)\,x_{21}(s)\,ds\,.$$

Ganz analogisch bekommen wir

$$S(t) = \int_0^t x_{12}(s)\,x_{11}(s)\,d\Phi(s) - \int_0^t x_{21}(s)\,x_{22}(s)\,ds\,. \tag{1.6}$$

Nach (1.3), (1.5) und (1.6) ist $\det X(t) = 1$; Lemma 2 ist bewiesen.

Lemma 3. *Sei f eine stetige Funktion endlicher Variation im Interval $[a, b]$, $f(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Dann gilt*

$$\int_a^b g \, \mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right) = - \int_a^b \frac{g}{f^2} \, \mathrm{d}f \, .$$

Bemerkung. Offenbar ist die Funktion $1/f$ auch endlicher Variation, d. h. beide Integrale im Lemma 3 existieren (siehe [1]).

Beweis. Wir bezeichnen $U_1(\tau, t) = g(\tau)\,(1/f(t))$, $U_2(\tau, t) = -\,(g(\tau)/f^2(\tau))\,f(t)$. Dann können wir schreiben (vgl. [2])

$$\int_a^b g \, \mathrm{d}\frac{1}{f} = \int_a^b \mathrm{D}U_1 \, , \quad \int_a^b \frac{g}{f^2} \, \mathrm{d}f = \int_a^b \mathrm{D}U_2 \, .$$

Im Beweis benützen wir die Definition des verallgemeinerten Integrals durch die Begriffe der Ober- und Unterfunktionen (siehe [2]). Seien M, bzw. m eine Ober-, bzw. Unterfunktion zu der Funktion U_1. Dann gibt es eine Funktion $\delta(\tau) > 0$, $\tau \in [a, b]$, dass

$$(2.1) \qquad (\tau - \tau_0)\,(M(\tau) - M(\tau_0)) \geqq (\tau - \tau_0)\, g(\tau_0) \left(\frac{1}{f(\tau)} - \frac{1}{f(\tau_0)}\right) \geqq$$
$$\geqq (\tau - \tau_0)\,(m(\tau) - m(\tau_0)) \, ,$$

für alle τ, τ_0, $\tau - \delta(\tau) \leqq \tau_0 \leqq \tau + \delta(\tau)$, $a \leqq \tau \leqq b$ gilt. Nach der Definition des Integrals ergibt sich

$$(2.2) \qquad M(b) - M(a) \geqq \int_a^b g \, \mathrm{d}\frac{1}{f} \geqq m(b) - m(a) \, .$$

Wir zeigen, dass folgendes gilt: *Wenn M eine Oberfunktion und m eine Unterfunktion zu der Funktion U_1 sind, dann gibt es eine Konstante $K > 0$, für welche die Funktionen*

$$M(\tau) + \varepsilon K f(\tau) \, , \quad bzw. \quad m(\tau) - \varepsilon K f(\tau)$$

für alle $\varepsilon > 0$ eine Oberfunktion, bzw. eine Unterfunktion zu der Funktion U_2 ist. Es gilt

$$(2.3) \quad (\tau - \tau_0)\, g(\tau_0) \left(\frac{1}{f(\tau)} - \frac{1}{f(\tau_0)}\right) = (\tau - \tau_0) \left(- \frac{g(\tau_0)}{f^2(\tau_0)}\right) (f(\tau) - f(\tau_0)) +$$
$$+ (\tau - \tau_0) \left(- \frac{g(\tau_0)}{f(\tau_0)}\right) \left(\frac{1}{f(\tau)} - \frac{1}{f(\tau_0)}\right) (f(\tau) - f(\tau_0))) \, .$$

Nach den Voraussetzungen ist die Funktion $1/f$ im Interval $[a, b]$ gleichmässig stetig und die Funktionen $f, g, 1/f$ sind im Interval $[a, b]$ begrenzt. Es gilt also

(2.4) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\left|\frac{1}{f(\tau)} - \frac{1}{f(\tau_0)}\right| < \varepsilon \text{ für alle } \tau, \tau_0 \in [a, b], \ |\tau - \tau_0| < \delta \text{ ist.}$$

(2.5) Es gibt eine Konstante $K > 0$, so dass

$$\left|-\frac{g(\tau)}{f(\tau)}\right| < K \text{ für alle } \tau \in [a, b] \text{ gilt.}$$

Nach (2.4) und (2.5) bekommen wir

$$-K\varepsilon < -\frac{g(\tau_0)}{f(\tau_0)}\left(\frac{1}{f(\tau)} - \frac{1}{f(\tau_0)}\right) < K\varepsilon, \tag{2.6}$$

für alle $\tau, \tau_0 \in [a, b]$, $|\tau - \tau_0| < \delta$. Offenbar können wir voraussetzen, dass $\delta < \delta(\tau)$ für alle $\tau \in [a, b]$ ist, wobei $\delta(\tau)$ die Funktion aus der Definition der Ober-, bzw. Unterfunktion ist.

Nach (2.1), (2.3) und (2.6) ergibt sich

$$\begin{aligned}(2.7)\qquad &(\tau - \tau_0)(M(\tau) - M(\tau_0) + K\varepsilon(f(\tau) - f(\tau))) \geqq \\ &\geqq (\tau - \tau_0)\left(-\frac{g(\tau_0)}{f^2(\tau_0)}\right)(f(\tau) - f(\tau_0)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2.8)\qquad &(\tau - \tau_0)(m(\tau) - m(\tau_0) - K\varepsilon(f(\tau) - f(\tau_0))) \leqq \\ &\leqq (\tau - \tau_0)\left(-\frac{g(\tau_0)}{f^2(\tau_0)}\right)(f(\tau) - f(\tau_0)).\end{aligned}$$

Von (2.7) und (2.8) folgt:

Wenn M, bzw. m eine Oberfunktion, bzw. eine Unterfunktion zu der Funktion U_1 ist, dann gibt es eine Konstante $K > 0$, so dass die Funktionen $M(\tau) + \varepsilon K f(\tau)$, bzw. $m(\tau) - \varepsilon K f(\tau)$ für alle $\varepsilon > 0$ Oberfunktion, bzw. Unterfunktion zu der Funktion U_2 sind. Nach der Definition des Integrals bekommen wir, dass für alle Oberfunktionen M, bzw. Unterfunktionen m zu der Funktion U_1

$$\begin{aligned}(2.9)\qquad &m(b) - m(a) - \varepsilon K(f(b) - f(a)) \leqq -\int_a^b \frac{g(\tau)}{f^2(\tau)}\,\mathrm{d}f(\tau) \leqq \\ &\leqq M(b) - M(a) + \varepsilon K(f(b) - f(a))\end{aligned}$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt. Von der Existenz des Integrals $\int_a^b g \,\mathrm{d}(1/f)$ folgt, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Oberfunktion M, bzw. eine Unterfunktion m so gibt, dass

$$(2.10) \qquad M(b) - M(a) - \varepsilon \leqq \int_a^b g \,\mathrm{d}\frac{1}{f} \leqq m(b) - m(a) + \varepsilon$$

ist. Von (2.9) und (2.10) folgt

$$(2.11) \qquad \int_a^b g \,\mathrm{d}\frac{1}{f} - \varepsilon - \varepsilon K(f(b) - f(a)) \leqq - \int_a^b \frac{g(\tau)}{f^2(\tau)} \,\mathrm{d}f(\tau) \leqq$$

$$\leqq \int_a^b g \, d\frac{1}{f} + \varepsilon + \varepsilon K(f(b) - f(a)),$$

für alle $\varepsilon > 0$ und ebenfalls die Behauptung des Lemmas 3 nach dem Grenzübergang $\varepsilon \to 0$.

Bemerkung. Wenn die Funktion f nicht stetig ist, dann gilt das Lemma 3 nicht. Wenn z. B. $f(t) = -1$, $t \in [-1, 0)$, $f(t) = \frac{1}{2}$, $t \in [0, 1]$ und $g(t) = 1$, $t \in [-1, 1]$ ist, dann ist $\int_{-1}^{1} g \,\mathrm{d}(1/f) = 3$ und $\int_{-1}^{1} (g/f^2) \,\mathrm{d}f = 6$.

Wir formulieren nun und beweisen hinreichende Bedingungen für die Begrenzheit aller Lösungen der Gleichung (H). Es gilt folgender

Satz. *Sei*

$$(1) \qquad \Phi(\omega) - \Phi(0) \geqq 0$$

$$(2) \qquad \omega \,.\, \mathrm{var}_0^\omega \Phi < 4\,.$$

Dann sind alle Lösungen des Systems (H) *begrenzt.*

Beweis. Die charakteristische Gleichung der Monodromiematrix hat die folgende Form

$$(3.1) \qquad \lambda^2 - 2A\lambda + 1 = 0\,, \quad \text{wobei} \quad 2A = x_{11}(\omega) + x_{22}(\omega)\,.$$

Nach Lemma 2 sind folgende Fälle möglich:

a) Für die Wurzeln λ_1, λ_2 der Gleichung (3.1) gilt $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$,

b) $\lambda_{1,2}$ ist eine zweifache Wurzel der Gleichung (3.1) und gleicht 1 oder -1,

c) es gibt zwei komplexvereinigte Wurzeln der Gleichung (3.1) λ_1, λ_2, so dass $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ ist.

Von der Floquettheorie folgt, dass in den Fällen a) und b) die Gleichung (H) unendlich viele unbegrenzte Lösungen hat und dass in dem Fall c) alle Lösungen der Gleichung (H) begrenzt sind. Wir zeigen, das unter den Voraussetzungen des Satzes die Fälle a) und b) nicht eintreten können.

In beiden Fällen gibt es eine nichttriviale Lösung $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ der Gleichung (H), welche endlicher Variation im Interval $[0, \omega]$ ist und für die $x(t + \omega) = \lambda\, x(t)$ für alle $t \in (-\infty, +\infty)$ gilt. Dann ist entweder

(3.2) $x_1(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, \omega]$ oder

(3.3) es existieren a, b, $a \in [0, \omega]$, $a < b$, $b - a \leqq \omega$, so dass $x_1(a) = 0 = x_1(b)$ und $x_1(t) \neq 0$ für alle $t \in (a, b)$.

Offenbar können wir voraussetzen, dass $x_1(t) > 0$ für alle $t \in (a, b)$ ist. Im restlichen Fall $x_1(t) < 0$ ist nämlich die Beweisführung dieselbe.

Untersuchen wir zuerst den Fall (3.2). Es ist klar, dass das Integral $\int_0^\omega (\mathrm{d}x_2/x_1)$ existiert. Der Gleichung (H) zufolge ist

$$\int_0^\omega \frac{\mathrm{d}x_2(\tau)}{x_1(\tau)} = \int_0^\omega \frac{1}{x_1(\tau)} \,\mathrm{d}\left(x_2^0 - \int_0^\tau x_1(s)\,\mathrm{d}\Phi(s)\right) = -\left(\Phi(\omega) - \Phi(0)\right).$$

Daher ergibt sich

$$\int_0^\omega \frac{\mathrm{d}x_2(\tau)}{x_1(\tau)} + \left(\Phi(\omega) - \Phi(0)\right) = 0. \tag{3.2.1}$$

Zuerst zeigen wir, dass $\int_0^\omega(\mathrm{d}x_2(\tau)/x_1(\tau)) > 0$ ist. Dann folgt von (3.2.1) $\Phi(\omega) - \Phi(0) < < 0$, aber dieses widerspricht der Voraussetzung (1). Nach Lemma 3 (wir setzen $f(\tau) = x_1(\tau)$, $g(\tau) = x_2(\tau)$) gilt

$$\int_0^\omega x_2(\tau)\, d\, \frac{1}{x_1(\tau)} = -\int_0^\omega \frac{x_2(\tau)}{x_1^2(\tau)}\, \mathrm{d}x_1(\tau). \tag{3.2.2}$$

Setzen wir in (3.2.2) von der Gleichung (H) ein, bekommen wir

$$\int_0^\omega x_2(\tau)\,\mathrm{d}\,\frac{1}{x_1(\tau)} = -\int_0^\omega \frac{x_2(\tau)}{x_1^2(\tau)}\,\mathrm{d}\left(x_1^0 + \int_0^\tau x_2(s)\,\mathrm{d}s\right) = \tag{3.2.3}$$

$$= -\int_0^\omega \frac{x_2^2(\tau)}{x_1^2(\tau)}\,\mathrm{d}\tau < 0.$$

Integrieren wir $\int_0^\omega(\mathrm{d}x_2/x_1)$ per-partes und nutzen aus, dass von $x(t + \omega) = \lambda\, x(t)$ die Gleichung $x_2(\omega)/x_1(\omega) = x_2(0)/x_1(0)$ folgt, dann bekommen wir

$$\int_0^\omega \frac{\mathrm{d}x_2(\tau)}{x_1(\tau)} = -\int_0^\omega x_2(\tau)\,\mathrm{d}\,\frac{1}{x_1(\tau)}. \tag{3.2.4}$$

Hiervon und von (3.2.3) folgt $\int_0^\omega(\mathrm{d}x_2(\tau)/x_1(\tau)) > 0$. Dadurch kann der Fall (3.2) ausgeschlossen werden. Wir zeigen, dass wir in dem Fall (3.3) auch einen Widerspruch bekommen. Wählen wir a', b', $a < a' < b' < b$. Dann ist $x_1(t) \neq 0$ für alle $t \in [a', b']$. Es existiert also das Integral

$$\int_{a'}^{b'} \frac{1}{x_1(\tau)}\,\mathrm{d}\,\mathrm{var}_0^\tau\, x_2. \tag{3.3.1}$$

Wir zeigen, dass die Ungleichung

(3.3.2)
$$\int_{a'}^{b'} \frac{1}{x_1(\tau)} \, \mathrm{d} \operatorname{var}_0^\tau x_2 \leqq \operatorname{var}_{a'}^{b'} \Phi$$

gilt. Seien $t, \tau \in [a', b']$, $t > \tau$, dann ist

$$\frac{1}{x_1(\tau)} (\operatorname{var}_0^t x_2 - \operatorname{var}_0^\tau x_2) = \frac{1}{x_1(\tau)} \operatorname{var}_\tau^t x_2 .$$

Offenbar gilt

(3.3.3)
$$|x_2(\tau_2) - x_2(\tau_1)| = \left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} x_1(s) \, \mathrm{d}\Phi(s) \right| \leqq \sup_{[\tau_1, \tau_2]} |x_1(s)| \operatorname{var}_{\tau_1}^{\tau_2} \Phi$$

für alle $\tau_1, \tau_2 \in [\tau, t]$, $\tau_2 > \tau_1$. Von (3.3.3) folgt unmittelbar

(3.3.4)
$$\operatorname{var}_\tau^t x_2 \leqq \sup_{[\tau, t]} x_1(s) \operatorname{var}_\tau^t \Phi$$

und daher auch

(3.3.5)
$$\frac{1}{x_1(\tau)} (\operatorname{var}_0^t x_2 - \operatorname{var}_0^\tau x_2) \leqq \frac{1}{x_1(\tau)} \sup_{[\tau, t]} x_1(s) (\operatorname{var}_0^t \Phi - \operatorname{var}_0^\tau \Phi) .$$

Es ist leicht festzustellen, dass

(3.3.6)
$$\frac{1}{x_1(\tau)} \sup_{[\tau, t]} x_1(s) = 1 + \sup_{s \in [\tau, t]} \frac{x_1(s) - x_1(\tau)}{x_1(\tau)}$$

ist. Die Funktion $1/x_1(\tau)$ ist im Interval $[a', b']$ gleichmässig stetig und beschränkt. Weiter gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass $0 < C < x_1(\tau)$ für alle $\tau \in [a', b']$ ist. Es gilt also, dass zu jedem $\eta > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ so existiert, dass die Ungleichung $|x_1(s) - x_1(\tau)| < C_\eta$ für alle s, τ, $|s - \tau| < \delta$ gilt. Wählen wir $\eta > 0$ und $\tau, t \in [a', b']$, $|\tau - t| < \delta$. Dann gibt (3.3.6) die Beziehung

(3.3.7)
$$\frac{1}{x_1(\tau)} \sup_{[\tau, t]} x_1(s) \leqq 1 + \eta .$$

Von (3.3.5) und (3.3.7) folgt

(3.3.8)
$$\frac{1}{x_1(\tau)} (\operatorname{var}_0^t x_2 - \operatorname{var}_0^\tau x_2) \leqq (1 + \eta) (\operatorname{var}_0^t \Phi - \operatorname{var}_0^\tau \Phi) .$$

für alle $\tau, t \in [a', b']$, $|\tau - t| < \delta$. Nach dem Satz für die Abschätzung des Integrals (siehe [1]) ergibt sich

(3.3.9)
$$\int_{a'}^{b'} \frac{1}{x_1(\tau)} \, \mathrm{d} \operatorname{var}_0^\tau x_2 \leqq \int_{a'}^{b'} (1 + \eta) \, \mathrm{d} \operatorname{var}_0^\tau \Phi = (1 + \eta) \operatorname{var}_{a'}^{b'} \Phi .$$

Da $\eta > 0$ beliebig gewählt wurde, folgt von (3.3.9)

(3.3.10) $$\int_{a'}^{b'} \frac{1}{x_1(\tau)} \, \mathrm{d} \operatorname{var}_0^\tau x_2 \leqq \operatorname{var}_{a'}^{b'} \Phi .$$

Nach (3.3.10) ist also

(3.3.11) $$\int_{a'}^{b'} \frac{1}{x_1(\tau)} \, \mathrm{d} \operatorname{var}_0^\tau x_2 \leqq \operatorname{var}_0^\omega \Phi$$

für alle a', b', $a < a' < b' < b$. Die Funktion $x_1(t)$ ist im Interval $[a, b]$ stetig. Es existiert also soein c, $a < c < b$, dass $x_1(c) = x_0 = \max_{t \in [a,b]} x_1(t)$ ist. Dann aber gilt

(3.3.12) $$\int_{a'}^{b'} \frac{1}{x_1(\tau)} \, \mathrm{d} \operatorname{var}_0^\tau x_2 \geqq \frac{1}{x_0} \int_{a'}^{b'} \mathrm{d} \operatorname{var}_0^\tau x_2 = \frac{1}{x_0} \operatorname{var}_{a'}^{b'} x_2 .$$

Es ist leicht zu zeigen, dass die Funktion $F(\tau) = \int_c^\tau (1/x_1(s)) \, \mathrm{d} \operatorname{var}_0^s x_2$ nicht fallend und beschränkt ist. Es existieren also die einseitige Limes $\lim_{\tau \to b_-} F(\tau)$ und $\lim_{\tau \to a_+} F(\tau)$ und sind endlich. Definieren wir die Funktion $\bar{x}_2(t)$ durch die folgende Vorschrift

$$\bar{x}_2(t) = x_2(t) , \quad t \in (a, b) , \quad \bar{x}_2(t) = x_2(b_-) , \quad t = b , \quad \bar{x}_2(t) = x_2(a_+) , \quad t = a .$$

Es gilt offenbar

(3.3.13) $$\int_a^b x_2(s) \, \mathrm{d}s = \int_a^b \bar{x}_2(s) \, \mathrm{d}s$$

$$\operatorname{var}_a^b \bar{x}_2 = \lim_{\substack{t \to b_- \\ \tau \to a_+}} \operatorname{var}_\tau^t x_2 = \operatorname{var}_{a_+}^{b_-} x_2 .$$

Nach dem Grenzübergang $a' \to a_+$, $b' \to b_-$ in (3.3.12) und nach (3.3.13) ergibt sich

(3.3.14) $$\int_{a_+}^{b_-} \frac{1}{x_1(\tau)} \, \mathrm{d} \operatorname{var}_0^\tau x_2 \geqq \frac{1}{x_0} \operatorname{var}_a^b \bar{x}_2 .$$

Für jede A, B, $\inf_{[a,b]} \bar{x}_2 \leqq A, B \leqq \sup_{[a,b]} \bar{x}_2$ gilt

(3.3.15) $$|A - B| \leqq \sup_{[a,b]} \bar{x}_2 - \inf_{[a,b]} \bar{x}_2 \leqq \operatorname{var}_a^b \bar{x}_2 .$$

Sei $c \in (a, b)$, $\max_{t \in [a,b]} x_1(t) = x_0 = x_1(c)$. Die Gleichung (H) gibt

(3.3.16) $$x_1(c) = x_0 = x_1(a) + \int_a^c x_2(s) \, \mathrm{d}s = \int_a^c \bar{x}_2(s) \, \mathrm{d}s$$

$$x_1(c) = x_0 = x_1(b) - \int_c^b x_2(s) \, \mathrm{d}s = - \int_c^b \bar{x}_2(s) \, \mathrm{d}s .$$

Mit Hilfe des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung erhalten wir, dass Zahlen A und B existieren, so dass

(3.3.17) $$x_0 = \int_a^c \bar{x}_2(s) \, \mathrm{d}s = A(c - a) , \quad \text{wobei} \quad \inf_{[a,c]} \bar{x}_2 \leqq A \leqq \sup_{[a,c]} \bar{x}_2 \quad \text{und}$$