ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

1

101

ACADEMIA

PRAHA

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 101 • Č. 1 • STR. 1—110 • PRAHA 14. 2. 1976

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(*Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fyziky“*)

SVAZEK 101 (1976)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd

Redakce:

Matematický ústav Československé akademie věd
115 67 Praha 1, Žitná 25

Časopis pro pěstování matematiky. Ročník *101* (1976). — Vydává Československá akademie věd v Academii, nakladatelství Československé akademie věd, Vodičkova 40, 112 29 Praha 1. Redakce: Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1. — Tiskne Polygrafia, n. p., závod 6, nositel Řádu práce, tř. Rudé Armády 171, 180 00 Praha 8. — Objednávky a předplatné přijímá PNS, administrace odborného tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Lze také objednat u každého poštovního úřadu nebo doručovatele. Vychází čtvrtletně. Roční předplatné Kčs 56,—, cena jednotlivého sešitu Kčs 14,—. (Tyto ceny jsou platné pouze pro Československo.)

Sole agents for all western countries KUBON & SAGNER, P.O.B. 68, 8000 München 34, G.F.R. Annual subscription: Vol. 101, 1976 (4 issues) DM 90,—.

Toto číslo vyšlo v únoru 1976

Tímto číslem vstupuje Časopis pro pěstování matematiky do svého stoprvého ročníku. Počátek druhé stovky svazků skýtá příležitost k tomu, abychom se poohlédli zpět, připomněli si začátky Časopisu a uvědomili si změny, k nimž během uplynulých 103 let[1]) *došlo v obsahu i poslání Časopisu i v celém matematickém dění u nás.*

V prvních letech po svém vzniku r. 1872 plnil Časopis pro pěstování matematiky a fysiky[2]) *především velmi významnou úlohu publikačního fora sloužícího k pěstování matematiky a fysiky na vysokoškolské a badatelské úrovni* v českém jazyce. *Podobně jako dnes přinášel vedle původních odborných prací také obsáhlé statě informativní a metodické, přehledné články o v té době aktuálních směrech matematického a fysikálního výzkumu, články o životě a díle vynikajících vědců, např. českého matematika S. Vydry (vůbec první článek prvního čísla prvního ročníku), M. Koprníka, B. Bolzana, seriál článků o pracích K. B. Gausse, atd., ale také úlohy k řešení, recense knih a zprávy o akcích Jednoty českých matematiků a fysiků.*

Vedle šíření odborných znalostí — a potírání neznalosti[3]) — *přispěl Časopis nemalou měrou též k upevňování české matematické terminologie, které Jednota českých matematiků a fysiků věnovala tehdy, stejně jako dnes, zaslouženou pozornost.*[4])

Některé funkce Časopisu později zčásti nebo úplně převzala jiná periodika: oddělily se zvláštní časopisy pro fysiku, pro středoškoláky je vydáván časopis Rozhledy matematicko-přírodovědné, funkci členského časopisu JČSMF *plní dnes Pokroky matematiky, fysiky a astronomie; prudký vzrůst počtu původních vědeckých prací si vyžádal vydělení časopisu Czechoslovak Mathematical Journal (který dodnes číslováním svazků zdůrazňuje kontinuitu s Časopisem pro pěstování matematiky) a vznik nového časopisu Aplikace matematiky.*

Podmínky ve vydávání české matematické literatury se během uplynulé doby podstatně změnily ku prospěchu naší vědy a přinesly řadu nových úkolů. I dnešní redakce Časopisu pro pěstování matematiky si však váží více než stoleté tradice jednoho z našich nejstarších vědeckých časopisů a chce ji dále tvořivě rozvíjet.

---

[1]) Za druhé světové války bylo vydávání Časopisu hitlerovskými okupanty dočasně zastaveno.

[2]) Ke změně názvu došlo r. 1951 při reorganisaci matematických a fysikálních časopisů vydávaných v ČSAV.

[3]) Již v prvním čísle prvního ročníku je otištěn článek prof. F. J. Studničky o kvadratuře kruhu, s bohužel dodnes aktuální poznámkou pod čarou:

„Článek tento uveřejňujeme za tou příčinou, abychom mohli k němu poukázati, když nám někdo, jakž často se děje, oznámí, že se mu pomocí boží podařilo nalézti kvadraturu kruhu."

[4]) V této souvislosti stojí za připomenutí dopis, který v r. 1823 poslal P. J. Šafařík, ředitel škol v Novém Sadu, profesoru J. V. Sedláčkovi, autoru učebnice „Základové měřictví, čili geometrie", přetištěný v článku F. J. Studničky: „O rozvojí naší literatury fysikální za posledních padesáte let" v 5. svazku Časopisu (1876) na str. 243—245.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

GROUPS AND POLAR GRAPHS

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Received December 19, 1973)

In this paper the results of [2] will be transferred to polar graphs. A polar graph was defined by F. ZÍTEK [1] at the Czechoslovak Conference on Graph Theory at Štiřín in May 1972. Their properties are studied in the papers [3]–[9].

A polar graph is an ordered quintuple $\langle V, E, P, \varkappa, \lambda \rangle$, where V, E, P are sets, $\varkappa$ and λ are mappings of the set V and E respectively into the set of unordered pairs of distinct elements of P and the following conditions are satisfied:

(1) For each $u \in V$, $v \in V$, $u \neq v$, we have $\varkappa(u) \cap \varkappa(v) = \emptyset$.

(2) For each $e \in E, f \in E$, $e \neq f$, we have $\lambda(e) \neq \lambda(f)$.

(3) For each $p \in P$ there exists $v \in V$ so that $p \in \varkappa(v)$.

The elements of the sets V, E, P are called respectively vertices, edges and poles. If $p \in P$, $v \in V$, $p \in \varkappa(v)$, we say that the pole p belongs to the vertex v. If $p \in P$, $e \in E$ and $p \in \lambda(e)$, we say that the edge e is incident with the pole p. If an edge e is incident with a pole p which belongs to a vertex v, we say that e is incident with v.

Let $\mathfrak{G}$ be a group, A its subset. The polar graph $PG(\mathfrak{G}, A)$ is defined as follows: Its vertex set V is the support of $\mathfrak{G}$, its pole set P is the disjoint union of two sets P_1, P_2 such that there exist bijections $p_1 : \mathfrak{G} \to P_1$ and $p_2 : \mathfrak{G} \to P_2$. The edge set E of $PG(\mathfrak{G}, A)$ consists of the edges joining $p_1(x)$ with $p_2(y)$ for such x and y of $\mathfrak{G}$ that $x^{-1}y \in A$. (An edge e joins two poles p_1, p_2 of a polar graph, if it is incident with both of them.)

This is an analogue of a directed graph studied in [2]. In that graph there was a directed edge from x into y if and only if $x^{-1}y \in A$.

A polar graph is called vertex-transitive, if and only if to any two vertices u, v of this graph there exists an automorphism φ of this graph such that $\varphi(u) = v$.

An isomorphism of a polar graph $G_1 = \langle V_1, E_1, P_1, \varkappa_1, \lambda_1 \rangle$ onto a polar graph $G_2 = \langle V_2, E_2, P_2, \varkappa_2, \lambda_2 \rangle$ is a one-to-one mapping $\varphi : V_1 \cup E_1 \cup P_1 \to V_2 \cup E_2 \cup \cup P_2$ such that $\varphi(V_1) = V_2$, $\varphi(E_1) = E_2$, $\varphi(P_1) = P_2$, $\varkappa_2 \varphi(v) = \varphi \varkappa_1(v)$ for each $v \in V_1$, $\lambda_2 \varphi(e) = \varphi \lambda_1(e)$ for each $e \in E_1$. An isomorphism of a polar graph G onto itself is called an automorphism of G.

(For the vertex-transitive graph – in the non-polar case – in [2] we have used the term "symmetric". Here we prefer the term "vertex-transitive", because the term "symmetric graph" is used by other authors in different senses.)

Now we shall define a homogeneous polar graph in accordance with the similar concept for non-polar graphs. A polar graph G is called homogeneous if and only if the following conditions are satisfied:

(α) To any two poles p_1, p_2 of G there exists an automorphism φ of G such that $\varphi(p_1) = p_2$.

(β) For any pole p of G and any permutation π of the set of edges incident with p there exists an automorphism ψ_π of G such that $\psi_\pi(p) = p$ and the permutation π is induced by ψ_π.

It is easy to see that every homogeneous polar graph is also vertex-transitive.

Now we shall prove some theorems analogous to those of [2].

Theorem 1. *For every group $\mathfrak{G}$ and any one of its subsets A the polar graph $PG(\mathfrak{G}, A)$ is vertex-transitive.*

Proof. If u, v are two vertices of $PG(\mathfrak{G}, A)$, we take a mapping $\varphi_{vu^{-1}}$ such that $\varphi_{vu^{-1}}(a) = vu^{-1}a$ for any $a \in \mathfrak{G}$; this is a one-to-one mapping, because $\mathfrak{G}$ is a group. For the poles $p_1(a)$, $p_2(a)$ of the vertex a we put $\varphi_{vu^{-1}}(p_1(a)) = p_1(vu^{-1}a)$, $\varphi_{vu^{-1}}(p_2(a)) = p_2(vu^{-1}a)$. Now the mapping $\varphi_{vu^{-1}}$ can be naturally extended also to the edges of $PG(\mathfrak{G}, A)$. If x, y are two vertices of $PG(\mathfrak{G}, A)$, then $p_1(x)$ and $p_2(y)$ are joined by an edge if and only if $x^{-1}y \in A$. The images of the poles $p_1(x)$, $p_2(y)$ in $\varphi_{vu^{-1}}$ are $p_1(vu^{-1}x)$, $p_2(vu^{-1}y)$. We have

$$(vu^{-1}x)^{-1}\,(vu^{-1}x) = x^{-1}uv^{-1}vu^{-1}y = x^{-1}y\,.$$

Thus the poles $\varphi_{vu^{-1}}(p_1(x))$, $\varphi_{vu^{-1}}(p_2(y))$ are joined by an edge if and only if $p_1(x)$, $p_2(y)$ are joined by an edge. The pairs $p_1(x)$, $p_1(y)$ or $p_2(x)$, $p_2(y)$ are never joined by an edge. Therefore $\varphi_{uv^{-1}}$ is an automorphism of $PG(\mathfrak{G}, A)$. Further we have $\varphi_{uv^{-1}}(u) = v$. Therefore $PG(\mathfrak{G}, A)$ is vertex-transitive.

Theorem 2. *Let $\mathfrak{G}$ be a group, A its subset. Let φ be an automorphism of the group $\mathfrak{G}$ such that either $\varphi(A) = A$ or $\varphi(A) = \bar{A}$, where $\bar{A} = \{y \in \mathfrak{G} \mid y = x^{-1}, x \in A\}$. Then φ is induced on the vertex set of $PG(\mathfrak{G}, A)$ by an automorphism of $PG(\mathfrak{G}, A)$.*

Proof. Let $\varphi(A) = A$. Let x, y be two vertices of $PG(\mathfrak{G}, A)$. The poles $p_1(x)$, $p_2(y)$ are joined by an edge if and only if $x^{-1}y \in A$. Let φ^* be a mapping such that $\varphi^*(v) = \varphi(v)$ for each $v \in V$, $\varphi^*(p_1(v)) = p_1(\varphi(v))$, $\varphi^*(p_2(v)) = p_2(\varphi(v))$. We have $[\varphi(x)]^{-1}\,\varphi(y) = \varphi(x^{-1}y)$, because φ is an automorphism of $\mathfrak{G}$. Thus the poles $p_1(\varphi(x)) = \varphi^*(p_1(x))$, $p_2(\varphi(y)) = \varphi^*(p_2(y))$ are joined by an edge if and only if $\varphi(x^{-1}y) \in A$. However, as $\varphi(A) = A$ and φ is one-to-one, this is so if and only if

$x^{-1}y \in A$, i.e., if $p_1(x)$ and $p_2(y)$ are joined by an edge in $PG(\mathfrak{G}, A)$. Therefore φ^* is an automorphism of $PG(\mathfrak{G}, A)$. Let $\varphi(A) = \bar{A}$. We have again $[\varphi(x)]^{-1}\,\varphi(y) = \varphi(x^{-1}y)$. Let φ^{**} be a mapping such that $\varphi^*(v) = \varphi(v)$ for each $v \in V$, $\varphi^{**}(p_1(v)) = p_2(\varphi(v))$, $\varphi^{**}(p_2(v)) = p_1(\varphi(v))$. The poles $\varphi^{**}(p_1(x)) = p_2(\varphi(x))$, $\varphi^{**}(p_2(y)) = p_1(\varphi(y))$ are joined by an edge if and only if $[\varphi(y)]^{-1}\,\varphi(x) \in A$. But $[\varphi(y)]^{-1} . \varphi(x) = \varphi(y^{-1}x)$; this is in A if and only if $x^{-1}y \in \bar{A}$. Thus φ^{**} is an automorphism of $PG(\mathfrak{G}, A)$. Both φ^* and φ^{**} induce φ on the vertex set of $PG(\mathfrak{G}, A)$. (We have tacitly assumed that these mappings are naturally extended also onto the edge set.)

Theorem 3. *Let $\mathfrak{G}$ be a group, A a system of its generators, $\bar{A} = \{y \in \mathfrak{G} \mid y = x^{-1}, x \in A\}$. Let any permutation of A be induced by an automorphism of $\mathfrak{G}$ and let there exist an automorphism α of $\mathfrak{G}$ such that $\alpha(A) = \bar{A}$. Then $PG(\mathfrak{G}, A)$ is a homogeneous polar graph.*

Proof. According to Theorem 1, to any two vertices x, y of $PG(\mathfrak{G}, A)$ there exists an automorphism φ of this graph such that $\varphi(x) = y$. In the proof of Theorem 1 we have constructed an automorphism such that $\varphi(p_1(x)) = p_1(y)$, $\varphi(p_2(x)) = p_2(y)$. Now let e be the unit element of $\mathfrak{G}$. The pole $p_1(e)$ is joined with the poles $p_2(a)$, where $a \in A$, and with no other poles, the pole $p_2(e)$ is joined with the poles $p_1(b)$, where $b \in \bar{A}$, and with no other poles. According to Theorem 2 the automorphism α of $\mathfrak{G}$ is induced by the automorphism α^{**} of $PG(\mathfrak{G}, A)$ which is defined so that $\alpha^{**}(x) = \alpha(x)$, $\alpha^{**}(p_1(x)) = p_2(\alpha(x))$, $\alpha^{**}(p_2(x)) = p_1(\alpha(x))$ for each $x \in \mathfrak{G}$. We see that $\alpha^{**}(p_1(e)) = p_2(e)$, $\alpha^{**}(p_2(e)) = p_1(e)$. Now if we have two poles $p_1(x)$, $p_2(y)$, the former is mapped onto the latter by the automorphism $\varphi_y^* \alpha^{**} \varphi_{x^{-1}}^*$, where $\varphi_y^*(p_i(u)) = p_i(yu)$, $\varphi_{x^{-1}}^*(p_i(u)) = p_i(x^{-1}u)$ for each $u \in \mathfrak{G}$ and i equal to 1 or 2. Thus the condition (α) is proved. To any permutation π of the set of edges incident with $p_1(e)$ there corresponds in a one-to-one manner a permutation π' of A; for any $a \in A$ the element $\pi'(a)$ is the end vertex of the edge $\pi(h)$ which is in A, where h joins $p_1(e)$ and $p_2(a)$. Each π' is induced by an automorphism ψ_π of $\mathfrak{G}$ (according to the assumption) and this automorphism is induced by an automorphism ψ_π^* of $PG(\mathfrak{G}, A)$ (according to Theorem 2). Thus (β) holds for $p_1(e)$. Now let $x \in \mathfrak{G}$, let $p_i(x)$ be a pole of x, where $i = 1$ or $i = 2$. Let β be an automorphism of $PG(\mathfrak{G}, A)$ which maps $p_i(x)$ onto $p_1(e)$; its existence was proved above. Let ϱ be a permutation of the set of edges incident with $p_i(x)$. The mapping $\beta\varrho\beta^{-1}$ is a permutation of the set of edges incident with $p_1(e)$. To this permutation there exists an automorphism γ of $PG(\mathfrak{G}, A)$ inducing it. Then $\beta^{-1}\gamma\beta$ is the required automorphism for ϱ.

Theorem 4. *Let $\mathfrak{G}$ be an Abelian group, A a system of its generators. Let any permutation of A be induced by an automorphism of $\mathfrak{G}$. Then $PG(\mathfrak{G}, A)$ is a homogeneous polar graph.*

Proof. As $\mathfrak{G}$ is Abelian, there exists an automorphism α of $\mathfrak{G}$ such that $\alpha(x) = x^{-1}$ for any $x \in \mathfrak{G}$. This automorphism maps A onto $\bar{A}$. Therefore according to Theorem 3 the graph $PG(\mathfrak{G}, A)$ is a homogeneous polar graph.

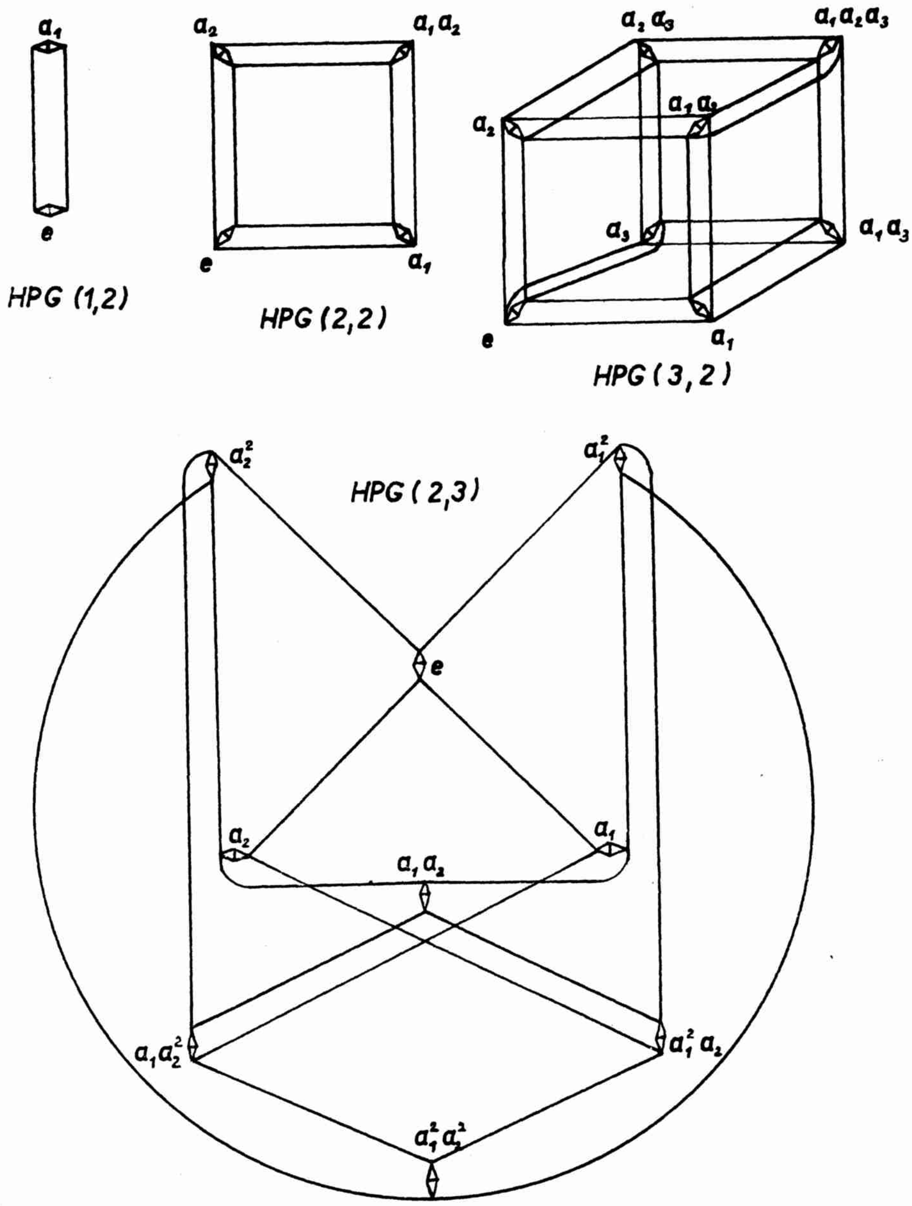


Fig. 1.

Analogously as in [2] we shall construct a certain class of homogeneous polar graphs. Let $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ be cyclic groups of the same order r, let a_i be the generator of $\mathfrak{A}_i$ for $i = 1, \ldots, k$. Let $\mathfrak{G}$ be the direct product of $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$, let $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$. The graph $PG(\mathfrak{G}, A)$ is evidently homogeneous and we denote it by $HPG(k, r)$. We have obviously $r \geqq 2$. Some of these graphs are in Fig. 1. They can be generalized also to the case when k is an infinite cardinal number or $r = \aleph_0$. The graph $HPG(2, \aleph_0)$ is in Fig. 2. A vertex is drawn as a magnetic needle; the poles of this needle are the poles of the vertex.

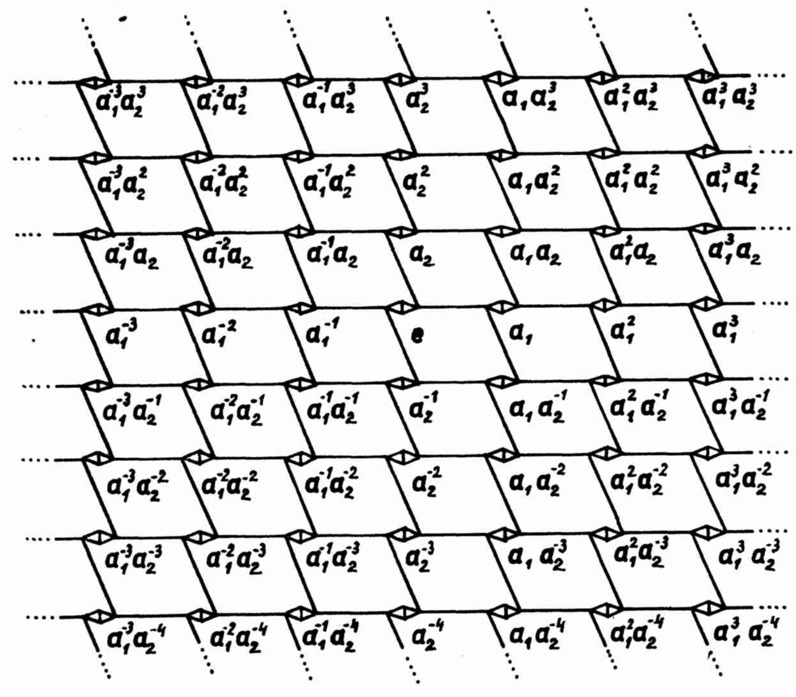


Fig. 2.

References

[1] *F. Zítek:* Polarisované grafy. (Polarized graphs.) Lecture at the Czechoslovak Conference on Graph Theory at Štiřín in May 1972.

[2] *B. Zelinka:* Groups and homogeneous graphs. Czech. Math. J. *21* (1971), 653—660.

[3] *B. Zelinka:* Isomorphisms of polar and polarized graphs. Czech. Math. J. (to appear).

[4] *B. Zelinka:* Analoga of Menger's theorem for polar and polarized graphs. Czech. Math. J. (to appear).

[5] *B. Zelinka:* Eulerian polar graphs. Czech. Math. J. (to appear).

[6] *B. Zelinka:* Polarization of graphs. Czech. Math. J. (to appear).

[7] *B. Zelinka:* Selbstkomplementäre polare und polarisierte Graphen. Czech. Math. J. (to appear).

[8] *B. Zelinka:* Self-derived polar graphs. Czech. Math. J. (to appear).

[9] *B. Zelinka:* Polar graphs and railway traffic. Aplikace mat. *19* (1974), 169—176.

Author's address: 460 01 Liberec 1, Komenského 2 (Katedra matematiky Vysoké školy strojní a textilní).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

POZNÁMKA K APLIKACÍM LAPLACEOVY TRANSFORMACE NA ABSTRAKTNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PARABOLICKÉHO TYPU

ALEXANDER DOKTOR, JINDŘICH NEČAS, RUDOLF ŠVARC, Praha

(Došlo dne 27. prosince 1973)

ÚVOD

O Laplaceově transformaci reálných funkcí již byla napsána řada publikací a učebnic, např. [1], [2], [3], [4], [5] popřípadě [6], kde lze nalézt odkazy na další literaturu. Použití Laplaceovy transformace při řešení diferenciálních rovnic je poměrně jednoduché a často se dobře hodí i v praktických úlohách techniky a při konkrétních výpočtech. Přitom, jak ukážeme v dalším textu, má Laplaceova transformace blízký vztah k definici slabého řešení parciálních diferenciálních rovnic, se kterou pracují moderní metody.

Laplaceovu transformaci lze dále přirozeným způsobem rozšířit na funkce s hodnotami v Hilbertově prostoru. Při řešení evolučních rovnic (např. rovnice parabolické) je pak možné pomocí tohoto zobecnění výhodně používat známé věty z funkcionální analýzy, nebo teorie diferenciálních rovnic eliptického typu. Výsledky dosažené touto metodou přitom odpovídají výsledkům dosaženým jiným způsobem, např. pomocí teorie analytických pologrup.

Přes uvedené výhody ustoupila Laplaceova transformace v poslední době do pozadí a proto si dovolujeme v této poznámce předložit čtenáři několik příkladů na její použití. Zároveň zde stručně vybudujeme již zmíněné zobecnění Laplaceovy transformace, které sice není složité, ale běžná dostupná literatura se o něm nezmiňuje.

LAPLACEOVA TRANSFORMACE ABSTRAKTNÍCH FUNKCÍ

Laplaceova transformace $\hat{u}$ reálné funkce $u \in L_{1,\mathrm{loc}}\langle 0, \infty)$ je definována integrálem

$$\hat{u}(p) \equiv \int_0^\infty e^{-pt} u(t) \,\mathrm{d}t \equiv \lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-pt} u(t) \,\mathrm{d}t \tag{1}$$

a lze ji výhodně použít při řešení některých úloh pro diferenciální rovnice (viz např.

[2], [3]). Například úloha

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = h(t)$$

má řešení

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \hat{h}(p) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{(p)} \,.\, x}{\operatorname{sh} \sqrt{p}} e^{pt} \, \mathrm{d}p, \quad \sigma > 0.$$

Přirozeným zobecněním je definice Laplaceovy transformace pro abstraktní funkci u (tj. zobrazení s hodnotami v Hilbertově prostoru) a její použití na řešení abstraktní diferenciální rovnice, která zahrnuje jako speciální případ např. parabolické rovnice ve více proměnných.

Mějme tedy komplexní Hilbertův prostor H se skalárním součinem $(.\,, .)$ a normou $\|\cdot\|$ a dále abstraktní funkci $u : (0, \infty) \mapsto H$ takovou, že $u \in L_2(0, \infty; H)$, tj. takovou že $\int_0^\infty \|u(t)\|^2 \, \mathrm{d}t < \infty$.

Pro $p \in \mathbb{C}$, Re $p > 0$ pak Laplaceovu transformaci $\hat{u}$ funkce u definujeme vztahem (1), kde ovšem nyní všechny integrály bereme v Bochnerově smyslu. Připomeňme proto nejprve stručně definici a základní vlastnosti Bochnerova integrálu (viz např. [7], [8]).

Je-li $f : (a, b) \mapsto H$ jednoduchá funkce, tj. funkce tvaru $f(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(t) \,.\, c_i$, kde $c_1, \ldots, c_n \in H$ a $B_i \subset (a, b)$ jsou měřitelné navzájem disjunktní množiny konečné Lebesgueovy míry, definujeme její Bochnerův integrál vztahem

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \equiv \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \,.\, c_i \in H$$

(μ budiž Lebesgueova míra v $\mathbb{R}$).

Zobrazení $f : (a, b) \mapsto H$ se nazývá silně měřitelná funkce, jestliže existuje posloupnost $\{f_n\}$ jednoduchých funkcí taková, že $\lim_{n \to \infty} \|f_n(t) - f(t)\| = 0$ pro skoro všechna t. Je-li f silně měřitelná funkce, je reálná funkce $\|f(\cdot)\|$ lebesgueovsky měřitelná. Platí-li pro silně měřitelnou funkci dále $\lim_{n \to \infty} \int_a^b \|f_n(s) - f(s)\| \, \mathrm{d}s = 0$, existuje $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t) \, \mathrm{d}t$ a je nezávislá na volbě posloupnosti $\{f_n\}$. Můžeme pak definovat Bochnerův integrál funkce f vztahem

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \equiv \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t) \, \mathrm{d}t,$$

kde f_n jsou příslušné jednoduché funkce. Takto zavedený Bochnerův integrál je tedy prvkem prostoru H a platí pro něj důležitá Bochnerova věta:

Věta (Bochnerova). *Silně měřitelná funkce $f : (a, b) \mapsto H$ má Bochnerův integrál právě když reálná funkce $\|f(\cdot)\|$ má konečný Lebesgueův integrál. Pak navíc platí*

$$\left\| \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \right\| \leqq \int_a^b \|f(t)\|\, \mathrm{d}t .$$

Nyní tedy už máme výrazu (1) připsán smysl i pro funkci u s hodnotami v prostoru H a díky omezení na $u \in L_2(0, \infty; H)$ příslušné integrály konvergují (pro $\operatorname{Re} p > 0$); tedy $\hat{u}$ je zobrazení

$$\hat{u} : \{p \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} p > 0\} \mapsto H .$$

Zřejmě $\hat{u}$ je holomorfní funkce, tj. pro každé $v \in H$ je funkce $(\hat{u}(\cdot), v)$ holomorfní v běžném smyslu.

Takto zavedená Laplaceova transformace má známý algebraický vztah k derivaci:

Tvrzení 1. *Nechť funkce $u \in L_2(0, \infty; H)$ má slabou derivaci u' (tj. existuje funkce $u' \in L_{1,\mathrm{loc}}(0, \infty; H)$ taková, že*

$$\int_a^b u'(t)\, \mathrm{d}t = u(b) - u(a)$$

pro každé $0 < a < b$). Buď také $u' \in L_2(0, \infty; H)$. Pak platí

$$\widehat{u'}(p) = p\, \hat{u}(p) - u(0) . \tag{2}$$

(*Hodnota $u(0)$ má zde smysl, protože v našem případě je i $u \in C(\langle 0, \infty); H)$; je totiž zřejmě*

$$\|u(t) - u(s)\| \leqq \left| \int_s^t \|u'(\tau)\|\, \mathrm{d}\tau \right| \leqq |t - s|^{1/2} \left(\int_0^\infty \|u'(\tau)\|^2\, \mathrm{d}\tau \right)^{1/2} .)$$

Dále platí rovnost

$$\frac{1}{2\pi} \sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{u}(\sigma + i\tau)\|^2\, \mathrm{d}\tau = \int_0^\infty \|u(t)\|^2\, \mathrm{d}t , \tag{3}$$

vztah pro inverzní transformaci

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} \frac{\hat{u}(p)}{p} e^{pt}\, \mathrm{d}p = \int_0^t u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \quad \text{pro} \quad t \geqq 0 , \tag{4}$$
$$= 0 \quad \text{pro} \quad t < 0$$

a následující tvrzení o reprezentaci pro Laplaceovu transformaci:

Věta 2. *Buď* $U \in \{p \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Re} p > 0\} \mapsto H$. *Pak nutná a postačující podmínka pro to, aby* U *byla Laplaceovou transformací originálu* $u \in L_2(0, \infty; H)$ *je, aby* U *byla holomorfní a*

$$\sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|U(\sigma + i\tau)\|^2 \,\mathrm{d}\tau < \infty\,.$$

APLIKACE LAPLACEOVY TRANSFORMACE NA ABSTRAKTNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Uvažujme nyní dva komplexní Hilbertovy prostory V, H takové, že $V \subset H$ algebraicky a topologicky (tj. existuje konstanta $c_1 > 0$ taková, že $\|v\|_H \leqq c_1 \|v\|_V$ pro každé $v \in V$) a přitom V je hustý v H ($\bar{V} = H$). Označme $\tilde{V}$ prostor všech funkcionálů na V které jsou spojité a antilineární, tj. pro $\phi \in \tilde{V}$ platí $\langle \phi, v + w \rangle = \langle \phi, v \rangle + \langle \phi, w \rangle$, $\langle \phi, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle \phi, v \rangle$, $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ($\langle \phi, v \rangle$ značíme hodnotu funkcionálu ϕ na prvku v).

Laplaceovy transformace použijeme k řešení této abstraktní diferenciální rovnice

(5)
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = f(t)\,, \quad t > 0$$

s počáteční podmínkou

(6)
$$u(0) = u_0\,,$$

kde $f : (0, \infty) \mapsto H$ a $A : V \mapsto \tilde{V}$ je omezený lineární operátor ($A \in \mathscr{L}(V, \tilde{V})$).

Jako model k tomuto abstraktnímu případu si můžeme představovat tuto smíšenou úlohu pro parabolickou rovnici druhého řádu: pro omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ volíme $H = L_2(\Omega)$, $V = W_0^{1,2}(\Omega)$ (prostor $W_0^{1,2}(\Omega)$ je definován jako uzávěr množiny $\mathscr{D}(\Omega)$ v prostoru $W^{1,2}(\Omega)$, tj. v normě $\|f\|_{1,2} \equiv \|f\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial f / \partial x_i\|_{L_2(\Omega)}$). Pro funkce $a_{i,j} \in L_\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \ldots, N$ pak operátor A definujeme předpisem

(7)
$$\langle Aw, v \rangle \equiv \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad w, v \in W_0^{1,2}(\Omega)\,.$$

($\bar{v}$ označujeme funkci komplexně sdruženou k v). Pak abstraktní úloha (5), (6) neznamená nic jiného než hledání tzv. slabého nebo zobecněného řešení úlohy

(8)
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f(x, t)\,, \quad x \in \Omega\,, \quad t > 0\,,$$

(9)
$$u(x, 0) = u_0(x)\,, \quad x \in \Omega,$$

(10)
$$u(x, t) = 0\,, \quad x \in \partial\Omega\,, \quad t > 0\,.$$

Zobecněným řešením úlohy (8)–(10) ve smyslu testovacích funkcí rozumíme funkci $u \in L_2(0, \infty; W_0^{1,2}(\Omega))$ takovou, že je splněna integrální identita

$$(11)\qquad \int_0^\infty \int_\Omega \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t - \int_\Omega u_0(x) \, \varphi(x, 0) \, \mathrm{d}x = = \int_0^\infty \int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

pro všechny tzv. testovací funkce φ z nějakého prostoru V, jehož volba zaručuje, že pro klasické řešení (tj. $u \in C^2(\bar{\Omega} \times \langle 0, \infty))$) úlohy (8)–(10) platí (11) a naopak pro dosti hladké zobecněné řešení jsou splněny rovnice (8)–(10).

Vraťme se k abstraktní úloze (5), (6). Formální použití Laplaceovy transformace na funkci $u : \langle 0, \infty) \mapsto V$ nám rovnici (5) a počáteční podmínku (6) převede na rovnici

$$(12)\qquad p \, \hat{u}(p) - u_0 + A \, \hat{u}(p) = \hat{f}(p) \, .$$

Tohoto vztahu také použijeme k definici slabého řešení ve smyslu Laplaceovy transformace:

Definice 3. Buď $f \in L_2(0, \infty; H)$, $u_0 = 0$. Řekneme, že úloha (5), (6) má slabé řešení, jestliže existuje funkce $U : \{p \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} p > 0\} \mapsto V$, která je holomorfní a taková, že platí

$$(13)\qquad (p \, U(p), v)_H + \langle A \, U(p), v \rangle = (\hat{f}(p), v)_H \quad \text{pro} \quad v \in V \, ,$$

$$(14)\qquad \sup_{\sigma > 0} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \|U(\sigma + i\tau)\|_V^2 \, \mathrm{d}\tau < \infty \, .$$

Nerovnost (14) nám zaručuje existenci funkce $u \in L_2(0, \infty; V)$ takové, že $\hat{u}(p) = U(p)$. Tímto u pak rozumíme slabé řešení.

Poznámka 4. Uvědomíme-li si význam rovnice (13) a definici Laplaceovy transformace např. ve speciálním případě (8)–(10), vidíme, že použití Laplaceovy transformace lze chápat jako použití speciálních testovacích funkcí tvaru $\varphi(x, t) = e^{-pt} \, v(x)$, $v \in V$ při definici zobecněného řešení ve smyslu testovacích funkcí.

Definice 3 nám umožnila se zbavit derivace a další výsledky lze očekávat od podrobnějšího zkoumání operátoru A, tj. v podstatě od řešení eliptických diferenciálních rovnic.

Věta 5. *Nechť platí*

$$(15)\qquad \exists c_2 > 0 \quad \forall u \in V : \operatorname{Re} \langle Au, u \rangle \geqq c_2 \|u\|_V^2 \, ,$$

a buď $u_0 = 0$. Potom existuje právě jedno slabé řešení úlohy (5), (6).

Důkaz. Z (15) (tzv. V-elipticita operátoru A) snadno dostaneme

$$\left|(pu, u)_H + \langle Au, u\rangle\right| \geqq c_2 \|u\|_V^2, \quad u \in V, \quad \operatorname{Re} p > 0 .$$

Můžeme tedy použít Laxovu-Milgramovu větu (viz např. [8]):

Věta (Laxova-Milgramova). *Budiž $S(u, v)$ sesquilineární forma definovaná na Hilbertově prostoru H (tj. zobrazení $S : H \times H \mapsto \mathbb{C}$ lineární v první a antilineární ve druhé proměnné: $S(u, v + w) = S(u, v) + S(u, w)$, $S(u, \lambda v) = \bar{\lambda}\, S(u, v)$), která je spojitá a splňuje podmínku*

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall v \in H : \left|S(v, v)\right| \geqq \alpha \|v\|_H^2 .$$

Pak ke každému spojitému lineárnímu funkcionálu ϕ na H existuje právě jeden prvek $u \in H$ tak, že platí

$$\phi(v) = S(v, u), \quad \forall v \in H ,$$

přičemž $\|u\|_H \leqq (1/\alpha) \|\phi\|_{H^*}$.

Podle této věty pro každé $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > 0$ existuje $U(p) \in V$ jež je řešením rovnice (13) a zároveň je vidět jednoznačnost řešení.

Zbylé vlastnosti funkce U pak plynou z toho, že rezolventa

$$R(p) \equiv (pI - A)^{-1} : \tilde{V} \mapsto V$$

je holomorfní operátorová funkce, $\|R(p)\| \leqq 1/c_2$.

Poznámka 7. Podmínka (15) je ve speciální úloze (8)–(10) splněna, požadujeme-li elipticitu koeficientů a_{ij}, tj. platí-li:

$$\exists c_3 > 0 \ \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{C}^N \ \forall \text{s.v. } x \in \Omega : \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\, \xi_i \bar{\xi}_j \geqq c_3 \sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^2 .$$

Poznámka 8 (o regularitě „v prostoru"). Máme-li ještě další dva Hilbertovy prostory $H_1 \subset V$, $H_2 \subset V$ a zjistíme-li, že rezolventa $R(p)$ jako operátor z H_2 do H_1 je holomorfní zobrazení omezené pro $\operatorname{Re} p > 0$, můžeme ve vztahu (14) uvažovat normu v H_1 a dostaneme řešení $u \in L_2(0, \infty; H_1)$.

V našem konkrétním modelu (8)–(10) můžeme např. brát $H_2 = L_2(\Omega)$, $H_1 = W^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$, v případě hladké oblasti a koeficientů vidíme, že jde o regularitu eliptické diferenciální rovnice.

Poznámka 9 (o regularitě v čase). Máme-li navíc $f' \in L_2(0, \infty; H_2)$, $f(0) = 0$, je

$$\sup_{\operatorname{Re} p > 0} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |p|^2) \|\hat{f}(\sigma + i\tau)\|_{H_2}^2 \, d\tau < \infty ,$$

odkud

$$\sup_{\operatorname{Re} p > 0} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |p|^2) \, \|\hat{u}(\sigma + i\tau)\|_{H_1}^2 \, d\tau < \infty ,$$

takže je $u' \in L_2(0, \infty; H_1)$, tedy také $u \in C(\langle 0, \infty); H_1)$, má smysl $u(0)$ a je $u(0) = u_0 = 0$.

Podobně můžeme uvažovat vyšší derivace.

Poznámka 10 (o splnění původní rovnice). Předpokládejme, že o operátoru A dále platí

$$\operatorname{Im} \langle Au, u \rangle \leqq c_4 \|u\|_H^2 \quad \forall u \in V . \tag{16}$$

Dosadíme-li do (13) speciálně $v = \hat{u}(p)$, dostaneme

$$\sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |p|^2) \, \|\hat{u}(\sigma + i\tau)\|_H^2 \, d\tau \leqq c \sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{f}(p)\|_H^2 \, dp .$$

Odtud $u' \in L_2(0, \infty; H)$ $(u(0) = 0)$, takže $u' \in L_2(0, \infty; \tilde{V})$, a tedy pro s.v. $t \in (0, \infty)$ je ve smyslu $\tilde{V}$ splněna původní rovnice (5).

Doposud jsme se zabývali případem $A \in \mathscr{L}(V; \tilde{V})$. Uvažujme nyní operátor

$$B : \mathbb{D}(B) \subset V \to H$$

obecně neomezený, ale uzavřený s hustým definičním oborem $(\overline{\mathbb{D}(B)} = H)$.

Na $\mathbb{D}(B)$ zavádíme normu grafu, indukovanou skalárním součinem

$$(u, v)_{\mathbb{D}(B)} = (u, v)_V + (Bu, Bv)_H , \quad u, v \in V ,$$

při které je $\mathbb{D}(B)$ díky uzavřenosti B úplný.

Modifikujme nyní pro tento případ definici řešení:

Definice 11. Buď $f \in L_2(0, \infty; H)$, $u_0 \in \mathbb{D}(B)$. Řekneme, že úloha $u' + Bu = f$, $u(0) = u_0$ má slabé řešení ve smyslu Laplaceovy transformace, jestliže existuje funkce $U : \{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} p > 0\} \mapsto U(p) \in \mathbb{D}(B)$ holomorfní pro $\operatorname{Re} p > 0$ taková, že

$$p\, U(p) - u_0 + B\, U(p) = \hat{f}(p) , \quad \forall \operatorname{Re} p > 0 , \tag{17}$$

$$\sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|U(\sigma + i\tau)\|_{\mathbb{D}(B)}^2 \, d\tau < \infty . \tag{18}$$

Existuje tedy $u \in L_2(0, \infty; \mathbb{D}(B))$ taková, že $\hat{u}(p) = U(p)$; slabým řešením míníme tuto funkci u.

Nyní dostaneme větu (s jistou modifikací) jako v [6]:

Věta 12. *Nechť platí*

(19) $$\exists c_5 > 0 \, \forall \operatorname{Re} p > 0 : \|(pI + B)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H;H)} \leqq \frac{c_5}{1 + |p|} .$$

Potom pro každé $u_0 \in \mathbb{D}(B)$ existuje právě jedno slabé řešení úlohy $u' + Bu = f$, $u(0) = u_0$.

Důkaz. Nerovnost (19) zaručuje, že

$$\|(pI + B)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H;\mathbb{D}(B))} \leqq c .$$

Položíme-li v případě $u_0 = 0$

$$U(p) = (pI + B)^{-1} \hat{f}(p) ,$$

dostaneme z předchozí nerovnosti příslušné vlastnosti U. Pro $u_0 \neq 0$, $u_0 \in \mathbb{D}(B)$ pak stačí využít toho, že funkce $u_0 e^{-t}$ je partikulární řešení.

Poznámka 13. Podmínka (19) je splněna např. platí-li: B je samoadjungovaný a

$$\exists c_6 > 0 \ \forall u \in \mathbb{D}(B) : (Bu, u)_H \geqq c_6 \|u\|_H^2 .$$

Nerovnost (19) s $c_5 \leqq 1$, uvažovaná jen pro p přirozená, je podle Hilleho-Yosidovy věty (viz [8]) nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby operátor $-B$ byl infinitesimálním generátorem pologrupy neexpanzivních operátorů $\{T(t)\}_{t \geqq 0} \subset \mathscr{L}(H; H)$. (Pak pro každé $u_0 \in \mathbb{D}(B)$ je funkce $u(t) = T(t) u_0$ $C^{(1)}$ – řešením úlohy $u' + Bu = 0$, $u(0) = u_0$.)

Platnost (19) pro $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > 0$ (s obecnou konstantou c_5) pak zaručuje dokonce existenci holomorfní operátorové pologrupy s infinitesimálním generátorem $-B$.

DODATEK

Důkaz tvrzení 1. Jelikož $du/dt = u'$ s.v. v $(0, \infty)$, plyne vztah (2) z věty o integraci per partes (vzhledem k předpokladům je funkce u absolutně spojitá).

Důkaz rovnosti (3). Pro funkci $g \in L_2(\mathbb{R}, H)$ můžeme běžným způsobem zavést její Fourierovu transformaci $\tilde{g} \in L_2(\mathbb{R}, H)$; pro $g \in L_2(\mathbb{R}, H) \cap L_1(\mathbb{R}, H)$ je definována předpisem

$$\tilde{g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\tau} g(t)\,\mathrm{d}t\,;$$

protože $L_2(\mathbb{R}, H) \cap L_1(\mathbb{R}, H)$ je hustý v $L_2(\mathbb{R}, H)$ a platí Parsevalova rovnost, lze tento předpis rozšířit na $L_2(\mathbb{R}, H)$. Důkaz Parsevalovy rovnosti pro reálné funkce je uveden např. v [4], [9] a lze jej snadno zobecnit na náš případ. Platí tedy: Jsou-li $g, h \in L_2(\mathbb{R}, H)$, pak

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{g}(t), \tilde{h}(t))\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} (g(t), h(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

Položme nyní $u(t) = 0$ pro $t < 0$. Pak se snadno ověří, že

$$\hat{u}(\sigma + i\tau) = \widetilde{(e^{-\sigma t}\,u(t))}\,(\tau)$$

pro $\sigma > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$. Nyní podle Parsevalovy rovnosti

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{u}(\sigma + i\tau)\|^2\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{\infty} \|e^{-\sigma t}\,u(t)\|^2\,\mathrm{d}t\,,$$

tedy stačí dokázat, že

$$\sup_{\sigma > 0}\int_0^{\infty} \|e^{-\sigma t}\,u(t)\|^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \|u(t)\|^2\,\mathrm{d}t\,,$$

avšak k tomu zřejmě stačí, aby

$$\lim_{\sigma\to 0+}\int_0^{\infty} e^{-2\sigma t}\|u(t)\|^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \|u(t)\|^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Tato rovnost ale vyplývá z věty o Lebesgueově integrálu závislém na parametru, jejíž předpoklady lze snadno ověřit (za integrabilní majorantu lze vzít přímo $\|u(t)\|^2$).

Důkaz věty 2 pro reálné funkce je uveden např. v [4], důkaz dodatku v [2]. Nechť $\sup_{\sigma>0}\int_{-\infty}^{\infty} \|U(\sigma + i\tau)\|^2\,\mathrm{d}\tau = A < +\infty$. Nejprve potřebujeme dokázat, že pro každé $\delta > 0$ je U omezená na množině $\{p \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} p \geqq \delta\}$. Zvolme tedy takové δ. Nechť $0 < \varrho < \delta$. Pak pro $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p \geqq \delta$ je podle Cauchyovy věty, jejíž platnost pro holomorfní funkce s hodnotami v Hilbertově prostoru H lze snadno ověřit,

$$U(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varrho(p)} \frac{U(z)}{z - p}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(p + \varrho e^{i\varphi})\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

tedy

$$\tfrac{1}{2}\delta^2\|U(p)\| = \left(\int_0^\delta \varrho \, d\varrho\right)\|U(p)\| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 0,2\pi\rangle \times \langle 0,\delta\rangle} \|U(p + \varrho e^{i\varphi})\| \, \varrho \, d\varphi \, d\varrho =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|\sigma + i\tau - p| \leqq \delta} \|U(\sigma + i\tau)\| \, d\sigma \, d\tau \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{|\sigma - \mathrm{Re}\,p| \leqq \delta}\left(\int_{|\tau - \mathrm{Im}\,p| \leqq \delta} \|U(\sigma + i\tau)\| \, d\tau\right) d\sigma \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{|\sigma - \mathrm{Re}\,p| \leqq \delta}\left(\int_{|\tau - \mathrm{Im}\,p| \leqq \delta} \|U(\sigma + i\tau)\|^2 \, d\tau \int_{|\tau - \mathrm{Im}\,p \leqq \delta|} d\tau\right)^{1/2} d\sigma \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{|\sigma - \mathrm{Re}\,p| \leqq \delta} (A \,.\, 2\delta)^{1/2} \, d\sigma = \frac{(A \,.\, 2\delta)^{1/2} \,.\, 2\delta}{2\pi},$$

odkud

$$\|U(p)\| \leqq \frac{2}{\pi}\left(\frac{2A}{\delta}\right)^{1/2}.$$

Položme pro $x \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$$\phi(x, \sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\sigma + i\tau) \frac{1}{(\sigma + i\tau)^2} e^{(\sigma + i\tau)x} \, d\tau \,. \tag{20}$$

Zvolme pevně $x \in \mathbb{R}$. Nechť $\sigma > 0$, $\vartheta > \sigma$. Ukážeme, že $\phi(x, \sigma) = \phi(x, \vartheta)$. Pro každé $a > 0$ definujeme

$$K_a = \{p;\ \mathrm{Re}\,p \in \langle\sigma, \vartheta\rangle,\ \mathrm{Im}\,p = a \text{ nebo } \mathrm{Im}\,p = -a\},$$

$$M_a = \{p;\ \mathrm{Re}\,p = \sigma \text{ nebo } \mathrm{Re}\,p = \vartheta,\ \mathrm{Im}\,p \in \langle -a, a\rangle\},$$

zorientujeme-li nyní křivku $\Gamma_a = K_a \cup M_a$, je

$$\int_{\Gamma_a} U(p) \, p^{-2} e^{px} \, dp = 0$$

neboť Γ_a je uzavřená křivka a integrand je holomorfní v $\{p;\ \mathrm{Re}\,p > 0\}$. Podle předchozího existuje $B > 0$ tak, že $\|U(p)\| \leqq B$ na $\{p;\ \mathrm{Re}\,p \geqq \sigma\}$. Dále

$$\|\phi(x, \vartheta) - \phi(x, \sigma)\| \leqq \lim_{a \to \infty} \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{K_a} U(p) \, p^{-2} e^{px} \, dp\right\| \leqq$$

$$\leqq \frac{B}{2\pi} \,.\, \lim_{a \to \infty} \int_{K_a} |p^{-2} e^{px}| \, dp \leqq \frac{B}{2\pi}(e^{\sigma x} + e^{\vartheta x}) \lim_{a \to \infty} \int_\sigma^\vartheta \frac{1}{\lambda^2 + a^2} \, d\lambda \leqq$$

$$\leqq \frac{B}{2\pi}(e^{\sigma x} + e^{\vartheta x}) \,.\, \lim_{a \to \infty} \frac{\pi}{a} = 0 \,.$$

Je tedy $\phi(x, \sigma)$ konstantní podle σ a lze psát $\phi(x, \sigma) = \phi(x)$. Nechť $x < 0$, $\sigma > 0$, $a > 0$, $\|U\| \leqq B$ pro $\operatorname{Re} p > \sigma$. Pak podle Cauchyovy věty

$$\left\| \int_{\sigma - ia}^{\sigma + ia} U(p)\, p^{-2} e^{px}\, \mathrm{d}p \right\| = \frac{1}{r} \left\| \int_{-\theta}^{\theta} U(re^{i\varphi}) \exp(xre^{i\varphi} - i\varphi)\, \mathrm{d}\varphi \right\| \leqq$$

$$\leqq \frac{B}{r} \int_{-\theta}^{\theta} \exp(xr \cos \varphi)\, \mathrm{d}\varphi \leqq \frac{B\pi}{r},$$

integrovali jsme po křivce $p = re^{i\varphi}$, $\operatorname{Re} p > \sigma$, $r^2 = \sigma^2 + a^2$, $|\varphi| \leqq \theta < \pi$. Odtud

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} U(p)\, p^{-2} e^{px}\, \mathrm{d}p = 0,$$

tedy $\phi(x) = 0$ pro $x < 0$.

Pro $\sigma > 0$ je podle Hölderovy nerovnosti $U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-1} \in L_1(\mathbb{R})$. (20) lze zřejmě derivovat a derivace je záměnná s integrálem, takže

(21) $$\phi'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-1} e^{(\sigma + i\tau)x}\, \mathrm{d}\tau.$$

Funkce ϕ' je spojitá v $\mathbb{R}$ a podle předchozího je $\phi'(x) = 0$ pro $x < 0$, tedy $\phi'(x) = 0$ pro $x \leqq 0$. (21) lze opět derivovat a

$$\phi''(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sigma + i\tau)\, e^{(\sigma + i\tau)x}\, \mathrm{d}\tau$$

je spojitá na $\mathbb{R}$, tedy $\phi'' \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Dále

(22) $$\phi(x) = \int_0^x \left(\int_0^y \phi''(z)\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y.$$

Pro $\sigma > 0$ je z (20)

$$e^{-\sigma x} \phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-2} e^{i\tau x}\, \mathrm{d}\tau.$$

Protože $U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-2} \in L_2(\mathbb{R})$, je

$$\lim_{a \to \infty} \left\| \int_{-a}^{a} e^{-\sigma x} \phi(x)\, e^{-i\tau x}\, \mathrm{d}x - U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-2} \right\|_{L_2} = 0$$

(podle věty o inverzní Fourierově transformaci). Integrál určující $\hat{\Phi}(\sigma + i\tau)$ konverguje, tedy $\hat{\Phi}(\sigma + i\tau) = U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-2}$ a jako v důkazu (2) je

$$\int_0^\infty \phi''(x)\, e^{-px}\, \mathrm{d}x = p^2\, \hat{\Phi}(p) = p^2\, U(p)\, p^{-2} = U(p)\,.$$

Dokážeme-li, že $\phi'' \in L_2(\mathbb{R})$, je ϕ'' podle předchozího hledanou funkcí a $U(p) = \widehat{\phi''}(p)$, Re $p > 0$. Dokázali jsme, že $\phi'' \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, ale z věty o integraci per partes je

$$\int_0^\infty \phi''(x)\, e^{-\sigma x}\, \mathrm{d}x = \sigma \int_0^\infty \phi'(x)\, e^{-\sigma x}\, \mathrm{d}x\,,$$

neboť ϕ' je z $L_1(\mathbb{R})$ a je spojitá, takže $\phi'' \in L_1(\mathbb{R})$ a podle Parsevalovy rovnosti

$$\text{(23)} \qquad \int_{-\infty}^\infty \|U(\sigma + i\tau)\|^2\, \mathrm{d}\tau = 2\pi \int_{-\infty}^\infty \|\widehat{(\phi''(x)\, e^{-\sigma x})}(\tau)\|^2\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^\infty \|\phi''(x)\|^2\, e^{-2\sigma x}\, \mathrm{d}x\,,$$

z toho ovšem vyplývá, že $\phi'' \in L_2(\mathbb{R})$.

Nechť $u \in L_2(0, \infty; H)$, $\sigma > 0$. Položme $u(x) = 0$ pro $x < 0$. Pak

$$\int_0^\infty \|u(x)\|\, e^{-\sigma x}\, \mathrm{d}x \leqq \left(\int_0^\infty \|u(x)\|^2\, \mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty e^{-2\sigma x}\, \mathrm{d}x\right)^{1/2} < +\infty\,,$$

takže

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma + i\tau)x}\, u(x)\, \mathrm{d}x$$

je absolutně konvergentní v $\sigma + i\tau$ pro všechna $\tau \in \mathbb{R}$ a $\hat{u}$ je holomorfní na $\{p \in \mathbb{C}$, Re $p > 0\}$. Obdobně jako v (23)

$$\sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^\infty \|\hat{u}(\sigma + i\tau)\|^2\, \mathrm{d}\tau = \sup_{\sigma > 0} 2\pi \int_{-\infty}^\infty \|u(x)\|^2\, e^{-2\sigma x}\, \mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^\infty \|u(x)\|^2\, \mathrm{d}x < +\infty\,.$$

V první části jsme ukázali, že

$$\phi'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-1}\, e^{(\sigma + i\tau)x}\, \mathrm{d}\tau\,,$$

ale $\phi''(x) = u(x)$, neboť z (3) plyne: $\hat{u} = 0 \Rightarrow u = 0$ s. v. Tedy platí dodatek.

Literatura

[1] *S. Bochner, K. Chandrasekharan:* Fourier Transforms. Princeton 1949.
[2] *G. Doetsch:* Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Springer-Berlin 1937.
[3] *J. J. Tranter:* Integral transforms in mathematical physics. (Ruský překlad: Moskva 1956)
[4] *J. Kučera, Š. Schwabik:* Integrální transformace. (Skripta.) Praha 1969.
[5] В. И. Кузнецов, В. А. Диткии: Справочник по операционному исчислению. Основы теории и таблицы формул. Москва 1951.
[6] *J. L. Lions, E. Magenes:* Problémes aux limites non homogénes et applications II. Paris 1968.
[7] *S. Fučík, O. John, A. Kufner:* Prostory funkcí I. (Integrovatelné funkce.) (Skripta.) Praha 1974.
[8] *K. Yosida:* Functional Analysis. Springer 1965.
[9] *S. Bochner:* Vorlesungen über Fourierische Integrale. Leipzig 1932.

Adresy autorů: A. Doktor, 113 82 Praha 1, Jungmanovo nám. 8 (Výzkumný ústav mechanizace, automatizace a technologie výroby stavebních dílců), J. Nečas a R. Švarc, 118 00 Praha 1, Malostranské n. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

Summary

A REMARK TO APPLICATIONS OF THE LAPLACE TRANSFORM TO ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE

ALEXANDER DOKTOR, JINDŘICH NEČAS, RUDOLF ŠVARC, Praha

The solution of abstract linear differential equation $du/dt + Au(t) = f(t)$ with initial condition $u(0) = u_0$ is obtained by means of the Laplace transform of functions with values in Hilbert spaces. This generalization of the Laplace transform is briefly built up in the Appendix. Existence theorems proved by this method correspond to those obtained by another methods, e.g. by means of theory of analytic semigroups.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

O JEDNOM MODELU $2k$-ROZMĚRNÉHO AFINNÍHO PROSTORU

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

(Došlo dne 8. ledna 1974)

Úvod. V tomto článku nejdříve vytvoříme pomocí prostoru A_k (afinní bodový prostor, jehož zaměření je vektorový prostor dimenze k nad tělesem reálných čísel) jistý model prostoru A_{2k}. Potom ukážeme, že každou regulární afinitu v A_k lze studovat jako podprostor prostoru A_{2k} a dále odvodíme konfigurace v A_{2k} pomocí konfigurací v A_k.

Model A_{2k}. Nechť $A_k = \{A, Z_k, \varepsilon\}$ je model afinního bodového prostoru k (A je neprázdná množina, Z_k je vektorový prostor dimenze k a ε přiřazení, které musí existovat mezi A a Z_k). Uvažujme kartézský součin $A \times A = A'$, tj. množinu všech uspořádaných dvojic prvků množiny A. Stručně naznačíme základní myšlenky důkazu, že množina těchto dvojic je při vhodně zavedených operacích modelem afinního prostoru dimenze $2k$. Nejdříve zavedeme označení: $\boldsymbol{B} = [M, N]$ a $\mathcal{U} = (\mathcal{M}, \mathcal{N})$, kde $\boldsymbol{B} \in A'$, $M \in A$, $N \in A$, $\mathcal{U} \in Z_k \times Z_k$, $\mathcal{M} \in Z_k$, $\mathcal{N} \in Z_k$. M budeme nazývat první obraz bodu $\boldsymbol{B}$, N je druhý obraz bodu $\boldsymbol{B}$, $\mathcal{M}$ je první vektoru $\mathcal{U}$ a $\mathcal{N}$ je druhý obraz vektoru $\mathcal{U}$. V A_k zvolíme uspořádanou dvojici bází: $\{\bar{O}_1 = \{O_1, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_k\}, \bar{O}_2 = \{O_2, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_k\}\}$. Bodu $X = [C, D]$ přiřadíme $2k$-tici čísel tak, že prvých k čísel jsou souřadnice bodu C v $\bar{O}_1$ a zbývající čísla jsou souřadnice bodu D v $\bar{O}_2$. Každé uspořádané $2k$-tici čísel (reálných) přiřadíme bod, jehož obraz má za souřadnice v $\bar{O}_1$ prvých k čísel a druhý obraz má za souřadnice v O_2 zbývající čísla. Existuje tedy prosté zobrazení mezi množinou A' a množinou všech uspořádaných $2k$-tic čísel — označme ji P_{2k}. Víme, že množinu P_{2k} můžeme při vhodném zavedení příslušných operací uvažovat jako aritmetický model afinního prostoru dimenze $2k$, tj. A_{2k}. Nyní zavedeme, že vektory sčítáme tak, že sečteme příslušné obrazy a podobně bod a vektor sečteme tak, že sečteme příslušné obrazy. Je zřejmé, že uvažované prosté zobrazení mezi A' a P_{2k} takto zavedené operace zachovává, a je tedy izomorfní. Lze tedy A' uvažovat jako model bodového prostoru dimenze $2k$, jehož zaměření je vektorový prostor dimenze $2k$ nad tělesem reálných čísel. Označíme: $A_{2k} = \{A' = A_k \times A_k, Z_k \times Z_k, \varepsilon\}$ a také stručněji $A_{2k} = A_k \times A_k$.

Nyní uvážíme co vyplní resp. jak se interpretují podprostory prostoru A_{2k}. Platí zřejmě, že každý podprostor prostoru A_{2k} je uspořádaná dvojice množin prostoru A_k

(první množinu tvoří první obrazy a druhou množinu druhé obrazy). Přenecháme čtenáři, aby dokázal, že zřejmě uvažované množiny jsou podprostory prostoru A_k. Označíme: $\boldsymbol{A}_s = [A_i, A_j]$, kde $\boldsymbol{A}_s$ je podprostor prostoru A_{2k} a A_i, A_j jsou podprostory prostoru A_k.

Věta 1. *Nechť $A_{2k} = A_k \times A_k$. Pro každý s-rozměrný $(s = 0, 1, \ldots, 2k)$ podprostor $\boldsymbol{A}_s \subseteq A_{2k}$ platí:*

1. $\boldsymbol{A}_s = [A_i, A_j]$, *přičemž* $A_i \subseteq A_k$, $A_j \subseteq A_k$, $i = 0, 1, \ldots, \min(s, k)$, $j = 0, 1, \ldots$ $\ldots, \min(s, k)$ *a* $s \leqq i + j \leqq 2s$.

2. *Nechť* $\boldsymbol{B} = [M, N] \in \boldsymbol{A}_s$, *potom bod* $[M, X] \in \boldsymbol{A}_s$ *právě když bod* $X \in A_{s-i}$ *a podobně bod* $[Y, N] \in \boldsymbol{A}_s$ *právě když* $Y \in A_{s-j}$, *přičemž* A_{s-i}, A_{s-j} *jsou jisté podprostory příslušných dimenzí prostoru* A_k.

Důkaz. Nechť $A'_s = \{B', \mathcal{U}'_1, \mathcal{U}'_2, \ldots, \mathcal{U}'_s\}$ je podprostor prostoru P_{2k} a nechť v uvažovaném izomorfismu mezi P_{2k} a A' odpovídá tomuto A'_s podprostor $\boldsymbol{A}_s$, jehož interpretaci hledáme. Označme (M) matici, jejíž řádky jsou souřadnice vektorů $\mathcal{U}'_1, \mathcal{U}'_2, \ldots, \mathcal{U}'_s$. Nechť (M_1) je matice určená prvními k sloupci matice (M) a (M_2) matice určená zbývajícími sloupci matice (M). Nechť matice (M_1) má hodnost i a matice (M_2) hodnost j. Je známo, že můžeme matici (M) upravit na (M') se stejnou hodností tak, aby (M'_1) měla právě i nenulových řádků a obdobně (M'_2) bude mít právě j nenulových řádků. Vektory, jejichž souřadnice jsou v řádcích matice (M'_1), zřejmě určují zaměření prostoru A_i a právě tak zaměření prostoru A_j určují vektory, jejichž souřadnice jsou v řádcích matice (M'_2). Zřejmě je $s \leqq i + j \leqq 2s$, neboť v opačném případě hodnost matice (M) je větší resp. menší než s. Matice (M_1) a (M_2) mají s řádků a k sloupců. Dokázali jsme tedy tvrzení 1. naší věty.

Uvažujme v (M') řádky, které mají na prvých k místech číslo 0. Těchto řádků je $s - i$ a každá lineární kombinace těchto řádků resp. vektor v Z_{2k} má prvních k souřadnic nulových a tedy odpovídající vektor v $Z_k \times Z_k$ má vždy za první obraz nulový vektor a druhé obrazy jsou vektory vektorového prostoru dimenze $s - i$. Přičteme-li tento vektor k bodu podprostoru $\boldsymbol{A}_s$ dostaneme bod téhož podprostoru, přičemž však první obraz je pro všechny takové body stejný a druhý obraz je bod jistého podprostoru $A_{s-i} \subset A_k$. Tím je dokázáno prvé tvrzení ad 2). Druhé tvrzení se dokáže zcela obdobně a nebudeme ho dokazovat.

Afinita v k-rozměrném prostoru. Uvažujme regulární afinitu F v prostotu A_k. Každému bodu $A \in A_k$ odpovídá jediný bod $A' = F(A) \in A_k$. Nechť $\boldsymbol{X} = [A, F(A)]$, tj. nechť první obraz bodu $\boldsymbol{X}$ je bod A a nechť druhý obraz bodu $\boldsymbol{X}$ je obraz bodu A v afinitě F. Co vytvoří všechny takové body X? Bezprostředním důsledkem věty 1) je, že body $\boldsymbol{X}$ mohou vytvořit jedině $\boldsymbol{A}_k = [A_k, A_k]$.

Věta 2. *Každou uspořádanou dvojici podprostorů* $[A_i, A_j]$ $(A_i, A_j \subseteq A_k)$ *můžeme uvažovat jako podprostor* $\boldsymbol{A}_s \subseteq A_{2k}$ $(\boldsymbol{A}_s = [A_i, A_j])$, *přičemž platí* $\max(i, j) \leqq$ $\leqq s \leqq i + j$.

Důkaz. Zvolíme bázi zaměření podprostoru A_i vektory $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2, \ldots, \mathscr{U}_i$ a bázi zaměření podprostoru A_j vektory $\mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2, \ldots, \mathscr{V}_j$. Zaměření A_s je určeno bází: $\{(\mathscr{U}_1, \emptyset), (\mathscr{U}_2, \emptyset), \ldots, (\mathscr{U}_{s-j}, \emptyset), (\mathscr{U}_{s-j+1}, \mathscr{V}_1), \ldots, (\mathscr{U}_i, \mathscr{V}_{j-s+i}), (\emptyset, \mathscr{V}_{j-s+i+1}), \ldots$ $\ldots, (\emptyset, \mathscr{V}_j)\}$.

Z předcházejícího a věty 2 dostáváme:

Věta 3. *Každý podprostor $\boldsymbol{F}_k = [A_k, A_k]$ prostoru $A_{2k} = A_k \times A_k$ můžeme uvažovat jako regulární afinitu v prostoru A_k.*

Poznámka. Vícerozměrnou geometrií je připravena klasifikace afinit podle samodružných bodů a vektorů. Identita $\boldsymbol{I}_k$ je afinita $[A_k, A_k]$, pro jejíž všechny body $X = [X_1, X_2]$ platí $X_1 = X_2$. Hledání samodružných bodů a vektorů dané afinity F je tedy převedeno na hledání společných bodů a vektorů dvou k-rozměrných podprostorů a sice $\boldsymbol{F}_k$ a $\boldsymbol{I}_k$ v prostoru A_{2k}. Z předcházejícího plyne důkaz známé věty o tom, že v A_k existuje $2k + 1$ různých typů afinit.

Konfigurace v A_{2k} odvozené pomocí konfigurací v A_k. r-rozměrná konfigurace je množina, jejíž prvky jsou vlastní podprostory daného prostoru a pro něž platí tato podmínka: Každý s-rozměrný podprostor je incidentní vždy s týmž počtem k-rozměrných podprostorů (podrobněji např. v lit. [1]). Nechť v A_k je dána konfigurace K typu:

$$
(1) \qquad \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0k} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \ldots & a_{k-1,k-1} \end{pmatrix}.
$$

Body konfigurace K označme B_i, $i = 1, 2, \ldots, a_{00}$. V $A_{2k} = A_k \times A_k$ uvažujme a_{00}^2 bodů $\boldsymbol{B} = [B_i, B_j]$, kde i a j je rovno $1, 2, \ldots, a_{00}$. Nyní uvažujme v $A_{2k} = A_k \times A_k$ podprostory $\boldsymbol{P}_h$, přičemž $\boldsymbol{P}_h$ je:

1. $[P_h, B_i]$ nebo $[B_i, P_h]$ (zřejmě toto nastane, jestliže $h \leqq k$),

2. $[A_k, P_{h-k}]$ nebo $[P_{h-k}, A_k]$ $(h > k)$, přičemž P_h i P_{h-k} jsou prvky konfigurace K – označme tyto $\boldsymbol{P}_h$ přípustné podprostory.

Věta 4. 1. *Nechť $0 < h < k$; potom počet přípustných podprostorů $\boldsymbol{P}_h$ je $2a_{00}a_{hh}$.*

2. *Nechť $k \leqq h \leqq 2k - 1$; potom existuje $2a_{h-k,h-k}$ přípustných podprostorů $\boldsymbol{P}_h$.*

Důkaz. 1. Počet P_h v K je a_{hh}. Každý bod $B_i \in K$ může být první nebo druhý obraz $\boldsymbol{P}_h$, a tedy počet $\boldsymbol{P}_h$ je $2a_{00}a_{hh}$.

2. Jestliže $h \geqq k$, potom počet prostorů P_{h-k} v K je právě $a_{h-k,h-k}$ a každý z nich může být prvním nebo druhým obrazem $\boldsymbol{P}_h$; přípustných $\boldsymbol{P}_h$ je tedy $2a_{h-k,h-k}$.

Věta 5. *Nechť $s < h$. Počet přípustných podprostorů $\boldsymbol{P}_s$ obsažených v přípustném $\boldsymbol{P}_h$ je:*

1. a_{hs}, *jestliže je* $h < k$,
2. a_{ss} *pro* $h = k$,
3. $a_{h-k,0}a_{00}$ *pro* $h > k$ *a* $s = 0$,
4. $a_{ss}a_{h-k,0} + a_{h-k,s}a_{00}$ *pro* $h - k > s > 0$,
5. $a_{ss}a_{h-k,0} + a_{00}$ *pro* $h - k = s > 0$,
6. $a_{ss}a_{h-k,0}$ *pro* $h - k < s < k$ $(h > k)$,
7. $a_{h-k,s-k}$ *pro* $s \geqq k$ *(zřejmě* $h - k > s - k$).

Důkaz 1. Jestliže $h < k$, potom jeden obraz $\boldsymbol{P}_h$ je bod a druhý obraz je podprostor P_h náležející konfiguraci K. Nechť je tedy daný $P_h = [B_1, P_h]$. $\boldsymbol{P}_s \subset \boldsymbol{P}_h$, jestliže je $\boldsymbol{P}_s = [B_1, P_s]$ a $P_s \subset P_h$. V konfiguraci K je počet $P_s \subset P_h$ právě a_{hs} a toto číslo zřejmě udává počet $\boldsymbol{P}_s$ ležících v daném $\boldsymbol{P}_h$.

2. Zde je $\boldsymbol{P}_k = [B_1, A_k]$ a zřejmě počet hledaných $\boldsymbol{P}_s$ je počet všech P_s konfigurace K, tj. a_{ss}.

3. Nechť $\boldsymbol{P}_h = [A_k, P_{h-k}]$. Bod $\boldsymbol{B} = [B_i, B_j] \in \boldsymbol{P}_h$, jestliže $B_i \in A_k$ a $B_j \in P_{h-k}$. Počet bodů konfigurace K je a_{00} a v prostoru P_{h-k} leží $a_{h-k,0}$ bodů; číslo $a_{h-k,0}a_{00}$ zřejmě udává počet uvažovaných bodů ležících v daném $\boldsymbol{P}_h$.

4. Nechť opět je $\boldsymbol{P}_h = [A_k, P_{h-k}]$. V tomto $\boldsymbol{P}_h$ leží všechny $\boldsymbol{P}_s = [P_s, B_i]$, kde P_s je každý podprostor dimenze s náležející konfiguraci K a B_i je bod podprostoru P_{h-k}. Těchto $\boldsymbol{P}_s$ je zřejmě $a_{ss}a_{h-k,0}$. Dále v daném $\boldsymbol{P}_h$ leží všechny $P_s = [B_i, P_s]$, přičemž B_i je každý bod konfigurace K a P_s je podprostor dimenze s, který leží v daném P_{h-k}. Těchto $\boldsymbol{P}_s$ je zřejmě $a_{h-k,s}a_{00}$.

5. Jestliže v případě 4, je $P_s = P_{h-k}$, potom je zřejmě počet prostorů $\boldsymbol{P}_s = [B_i, P_s]$ právě a_{00}.

6. V tomto případě neexistuje prostor $\boldsymbol{P}_s = [B_i, P_s]$ (z případu 4)).

7. Nechť je $\boldsymbol{P}_h = [A_k, P_{h-k}]$. V tomto $\boldsymbol{P}_h$ leží $\boldsymbol{P}_s = [A_k, P_{s-k}]$ a $P_{s-k} \subset P_{h-k}$. Počet hledaných $\boldsymbol{P}_s$ je tedy roven počtu prostorů P_{s-k} ležících v P_{h-k} a těch je $a_{h-k,s-k}$.

Věta 6. *Nechť $s > h$. Počet přípustných podprostorů $\boldsymbol{P}_s$ obsahujících přípustný $\boldsymbol{P}_h$ je:*

1. $2a_0$ *pro* $s < k$ *a* $h = 0$,
2. a_{hs} *pro* $s < k$ *a* $h > 0$,
3. 2 *pro* $s = k$ *a* $h = 0$,
4. 1 *pro* $s = k$ *a* $h > 0$,
5. $2a_{0,s-k}$ *pro* $s > k$ *a* $h = 0$,

6. $a_{0,s-k} + a_{h,s-k}$ *pro* $s - k > h > 0$,

7. $a_{0,s-k} + 1$ *pro* $s - k = h > 0$,

8. $a_{0,s-k}$ *pro* $s - k < h < k$,

9. $a_{h-k,s-k}$ *pro* $s > h \geqq k$.

Důkaz. 1. Nechť $\boldsymbol{B} = [B_1, B_2]$, přičemž B_1 i B_2 jsou body K. Bodem $B_i \in K$ prochází a_{0s} s-rozměrných prostorů P_s konfigurace K. Bodem $\boldsymbol{B}$ prochází tedy a_{0s} prostorů $\boldsymbol{P}_s = [P_s, B_2]$ a právě tak a_{0s} podprostorů $\boldsymbol{P}_s = [B_1, P_s]$.

2. Nechť $\boldsymbol{P}_h = [B_i, P_h]$. Tento $\boldsymbol{P}_h$ obsahuje $\boldsymbol{P}_s = [B_i, P_s]$ a P_s obsahuje P_h. Počet $\boldsymbol{P}_s$ obsahující daný $\boldsymbol{P}_h$ je tedy zřejmě roven počtu P_s obsahujících P_h, tj. a_{hs}.

3. A_k je v A_k jediný a proto každým bodem $\boldsymbol{B} = [B_1, B_2]$ procházejí jedině tyto dva podprostory: $[B_1, A_k]$ a $[A_k, B_2]$.

4. Podprostor $\boldsymbol{P}_h = [B_1, P_h]$ je obsažen jedině v prostoru $[B_1, A_k]$.

5. Bodem $\boldsymbol{B} = [B_1, B_2]$ prochází $a_{0,s-k}$ podprostorů $\boldsymbol{P}_s = [P_{s-k}, A_k]$, přičemž B_1 leží v P_{s-k}. Právě tak bodem $\boldsymbol{B}$ prochází ještě $a_{0,s-k}$ podprostorů $[A_k, P_{s-k}]$.

6. Nechť $\boldsymbol{P}_h = [B_1, P_h]$. Tímto $\boldsymbol{P}_h$ prochází zřejmě $a_{0,s-k}$ prostorů $\boldsymbol{P}_s = [P_{s-k}, A_k]$ (je to počet P_{s-k} procházejících bodem B_1) a $a_{h,s-k}$ prostorů $\boldsymbol{P}_s = [A_k, P_{s-k}]$ (je to počet P_{s-k} procházejících daným P_h).

7. Prvé číslo, tj. $a_{0,s-k}$, dostaneme jako v případě 6, a dále existuje jediný prostor $\boldsymbol{P}_s = [A_k, P_h]$ obsahující prostor $\boldsymbol{P}_h = [B_1, P_h]$.

8. Tento případ je opět speciálním případem 6, s tím, že neexistuje $\boldsymbol{P}_s = [A_k, P_{s-k}]$ obsahující $\boldsymbol{P}_h = [B_1, P_h]$, jestliže je $s - k < h$.

9. Nechť $\boldsymbol{P}_h = [P_{h-k}, A_k]$. Tento $\boldsymbol{P}_h$ je obsažen v $\boldsymbol{P}_s = [P_{s-k}, A_k]$ a zřejmě počet těchto $\boldsymbol{P}_s$ je roven počtu P_{s-k} procházejících daným P_{h-k} v konfiguraci K, tj. $a_{h-k,s-k}$.

Uvažujme nyní za přípustné tyto podprostory:

a) $\boldsymbol{P}_h = [P_{h/2}, L_{h/2}]$, kde h je číslo sudé a $P_{h/2}$ i $L_{h/2}$ jsou podprostory dimenze $h/2$ a patří konfiguraci K.

b) $\boldsymbol{P}_h = [P_{(h-1)/2}, L_{(h+1)/2}]$ nebo $\boldsymbol{P}_h = [P_{(h+1)/2}, L_{(h-1)/2}]$, kde h je liché číslo a prostory P i L (příslušných dimenzí) patří konfiguraci K. V obou případech počítejme s možností prostoru dimenze 0, tj. bodu — musíme však pokládat nulu za sudé číslo.

Věta 7. 1. *Nechť h je číslo sudé, potom počet přípustných podprostorů $\boldsymbol{P}_h$ je* $a^2_{h/2,h/2}$

2. *Nechť h je číslo liché a menší než $2k - 1$, potom počet přípustných podprostorů $\boldsymbol{P}_h$ je* $2a_{(h-1)/2,(h-1)/2}a_{(h+1)/2,(h+1)/2}$.

3. *Počet přípustných nadrovin je* $2a_{k-1,k-1}$.

Důkaz. 1. Počet všech podprostorů dimenze $h/2$ konfigurace K je právě $a_{h/2,h/2}$. Každá dvojice těchto podprostorů je jediným prostorem $\boldsymbol{P}_h$, a tedy jejich počet je $a^2_{h/2,h/2}$.

2. V K existuje právě $a_{(h-1)/2,(h-1)/2}$ prostorů dimenze $(h-1)/2$ a $a_{(h+1)/2,(h+1)/2}$ prostorů dimenze $(h+1)/2$. Dostáváme celkem $a_{(h-1)/2,(h-1)/2}a_{(h+1)/2,(h+1)/2}$ dvojic těchto podprostorů, kde prostor dimenze $(h-1)/2$ je prvním prvkem této dvojice. Dále dostáváme stejný počet dvojic, kde prostor dimenze $(h-1)/2$ je druhým prvkem této dvojice. Je tedy počet všech těchto dvojic resp. prostorů $\boldsymbol{P}_h$ právě $2a_{(h-1)/2,(h-1)/2}a_{(h+1)/2,(h+1)/2}$.

3. Počet $\boldsymbol{P}_{2k-1} = [P_{k-1}, A_k]$ je právě $a_{k-1,k-1}$, tj. počet nadrovin konfigurace K, a právě tak existuje $a_{k-1,k-1}$ prostorů $\boldsymbol{P}_{2k-1} = [A_k, P_{k-1}]$.

Věta 8. *Nechť $s < h$. Počet přípustných podprostorů $\boldsymbol{P}_s$ obsažených v přípustném $\boldsymbol{P}_h$ je:*

1. $a^2_{h/2,s/2}$ *pro h i s sudé,*
2. $2a_{h/2,(s-1)/2}a_{h/2,(s+1)/2}$ *pro h sudé a s liché,*
3. $a_{(h-1)/2,s/2}a_{(h+1)/2,s/2}$ *pro s sudé, h liché a menší než $2k-1$,*
4. $a_{(h-1)/2,(s-1)/2}a_{(h+1)/2,(s+1)/2} + a_{(h-1)/2,(s+1)/2}a_{(h+1)/2,(s-1)/2}$ *pro h i s liché a $h < 2k-1$,*
5. $a_{k-1,s/2}a_{s/2,s/2}$ *pro $h = 2k-1$ a s sudé,*
6. $a_{k-1,(s-1)/2}a_{(s+1)/2,(s+1)/2} + a_{k-1,(s+1)/2}a_{(s-1)/2,(s-1)/2}$ *pro $h = 2k-1$ a s liché.*

Důkaz. 1. Nechť $\boldsymbol{P}_h = [P_{h/2}, L_{h/2}]$ a $\boldsymbol{P}_s = [P_{s/2}, L_{s/2}]$. $\boldsymbol{P}_s \subset \boldsymbol{P}_h$, jestliže $P_{s/2} \subset P_{h/2}$ a $L_{s/2} \subset L_{h/2}$. Počet prostorů $P_{s/2}$ obsažených v $P_{h/2}$ je $a_{h/2,s/2}$. Právě tak počet $L_{s/2}$ obsažených v $L_{h/2}$ je $a_{h/2,s/2}$. Počet dvojic těchto prostorů resp. počet $\boldsymbol{P}_s$ je tedy $a^2_{h/2,s/2}$.

2. $\boldsymbol{P}_h = [P_{h/2}, L_{h/2}]$ a $\boldsymbol{P}_s = [P_{(s-1)/2}, L_{(s+1)/2}]$ nebo $[P_{(s+1)/2}, L_{(s-1)/2}]$. Počet $P_{(s-1)/2} \subset P_{h/2}$ je $a_{h/2,(s-1)/2}$ a počet $L_{(s+1)/2} \subset L_{h/2}$ je $a_{h/2,(s+1)/2}$. Každá dvojice $[P_{(s-1)/2}, L_{(s+1)/2}]$ je hledaný $\boldsymbol{P}_s \subset \boldsymbol{P}_h$ a těchto $\boldsymbol{P}_s$ je tedy $a_{h/2,(s-1)/2}a_{h/2,(s+1)/2}$. Existuje ještě stejný počet $\boldsymbol{P}_s = [P_{(s+1)/2}, L_{(s-1)/2}]$, a tedy celkový počet hledaných $\boldsymbol{P}_s$ je $2a_{h/2,(s-1)/2}a_{h/2,(s+1)/2}$.

3. Nechť $\boldsymbol{P}_h = [P_{(h-1)/2}, L_{(h+1)/2}]$ a $\boldsymbol{P}_s = [P_{s/2}, L_{s/2}]$. V K existuje $a_{(h-1)/2,s/2}$ prostorů $P_{s/2} \subset P_{(h-1)/2}$ a $a_{(h+1)/2,s/2}$ prostorů $L_{s/2} \subset L_{(h+1)/2}$. Číslo $a_{(h-1)/2,s/2} \cdot a_{(h+1)/2,s/2}$ je tedy počet všech dvojic $[P_{s/2}, L_{s/2}]$.

4. Nechť $\boldsymbol{P}_h = [P_{(h-1)/2}, L_{(h+1)/2}]$ a $\boldsymbol{P}_s = [P_{(s-1)/2}, L_{(s+1)/2}]$ nebo $[P_{(s+1)/2}, L_{(s-1)/2}]$. Z předcházejících úvah je zřejmé, že číslo $a_{(h-1)/2,(s-1)/2}a_{(h+1)/2,(s+1)/2}$ udává počet $\boldsymbol{P}_s = [P_{(s-1)/2}, L_{(s+1)/2}] \subset \boldsymbol{P}_h$ a číslo $a_{(h-1)/2,(s+1)/2}a_{(h+1)/2,(s-1)/2}$ je počet $\boldsymbol{P}_s = [P_{(s+1)/2}, L_{(s-1)/2}] \subset \boldsymbol{P}_h$.

5. Kdybychom v případě 3, nekladli omezení $h < 2k-1$, potom pro $h = 2k-1$ je $a_{(h-1)/2,s/2} = a_{k,s/2}$ a takto indexované číslo v matici konfigurace K není. Význam tohoto čísla však zůstává a sice počet všech $P_{s/2}$ v A_k – v konfiguraci K je tento počet vyjádřen číslem $a_{s/2,s/2}$.

6. Tento případ dostaneme, jestliže v 4. nahradíme číslo $a_{(h+1)/2,(s-1)/2}$ číslem $a_{(s+1)/2,(s+1)/2}$ a číslo $a_{(h+1)/2,(s-1)/2}$ číslem $a_{(s-1)/2,(s-1)/2}$.

Věta 9. *Nechť $s > h$. Počet přípustných podprostorů P_s obsahujících přípustný P_h je:*

1. $a^2_{h/2,s/2}$ *pro h i s sudé,*

2. $2a_{h/2,(s-1)/2}a_{h/2,(s+1)/2}$ *pro h sudé, s liché a menší než* $2k - 1$,

3. $a_{(h-1)/2,s/2}a_{(h+1)/2,s/2}$ *pro h liché a s sudé,*

4. $a_{(h-1)/2,(s-1)/2}a_{(h+1)/2,(s-1)/2} + a_{(h+1)/2,(s-1)/2}a_{(h-1)/2,(s+1)/2}$ *pro h liché, s sudé a menší než* $2k - 1$,

6. $a_{(h-1)/2,k-1} + a_{(h+1)/2,k-1}$ *pro liché a* $s = 2k - 1$.

Důkaz. V případech 1), 2), 3) a 4) jsou uvedená čísla formálně stejná jako ve větě 8. Rozdíl je však ten, že zde je $s > h$ a uvedená čísla a_{hs} udávají počet prostorů P_s obsahujících P_h. Ve větě 8 tato čísla udávala počet P_s obsažených v P_h. Jinak je důkaz těchto čtyř případů zcela obdobný předcházejícímu důkazu a proto jej nebudeme provádět.

5. Tento případ dostaneme z 2., jestliže číslo $a_{h/2,k}$ bude počet prostorů A_k obsahujících $P_{s/2}$ – prostor A_k je však jediný.

6. Podobně v 4. je $a_{(h+1)/2,k} = 1$ a $a_{(h-1)/2,k} = 1$.

Z předcházejícího snadno dokážeme tuto zajímavou a důležitou větu:

Věta 10. *Nechť v A_k (afinní bodový prostor, jehož zaměření je vektorový prostor nad tělesem reálných čísel dimenze k) existuje konfigurace K daná maticí (1). Potom v A_{2k} existuje konfigurace K_1 typu:*

$$(2)\quad \left(\begin{array}{lll}
a^2_{00} & 2a_{01} & \dots \\
a_{10} & 2a_{00}a_{11} & \dots \\
\dots & \dots & \dots \\
a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \dots \\
a_{00} & a_{11} & \dots \\
a_{10}a_{00} & a_{11}a_{10} + a_{00} & \dots \\
\dots & \dots & \dots \\
a_{k-1,0}a_{00} & a_{11}a_{k-1,0} + a_{k-1,1}a_{00} & \dots
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{lllll}
\dots\ 2a_{0,k-1} & 2 & 2a_{01} & \dots & 2a_{0,k-1} \\
\dots\ a_{1,k-1} & 1 & a_{01} + 1 & \dots & a_{0,k-1} + a_{1,k-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots\ 2a_{00}a_{k-1,k-1} & 1 & a_{01} & \dots & a_{0,k-1} \\
\dots\ a_{k-1,k-1} & 2a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0,k-1} \\
\dots\ a_{k-1,k-1}a_{10} & a_{10} & 2a_{11} & \dots & a_{1,k-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots\ a_{k-1,k-1}a_{k-1,0} + a_{00} & a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \dots & 2a_{k-1,k-1}
\end{array}\right)$$

a konfigurace K_2 typu:

$$(3)\quad \left(\begin{array}{lll}
a_{00}^2 & 2a_{00}a_{01} & \dots \\
a_{00}a_{10} & 2a_{00}a_{11} & \dots \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots \\
a_{k-2,0}a_{k-1,0} & a_{k-2,0}a_{k-1,1} + a_{k-2,1}a_{k-1,0} & \dots \\
a_{k-1,0}^2 & 2a_{k-1,0}a_{k-1,1} & \dots \\
a_{k-1,0}a_{00} & a_{k-1,0}a_{11} + a_{k-1,1}a_{00} & \dots
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{lll}
\dots & a_{0,k-1}^2 & 2a_{0,k-1} \\
\dots & a_{0,k-1}a_{1,k-1} & a_{0,k-1} + a_{1,k-1} \\
\dots & \dots\dots & \dots\dots \\
\dots & a_{k-2,k-1}a_{k-1,k-1} & a_{k-2,k-1}a_{k-1,k-1} \\
\dots & a_{k-1,k-1}^2 & 2a_{k-1,k-1} \\
\dots & a_{k-1,k-1}^2 & 2a_{k-1,k-1}
\end{array}\right).$$

Důkaz. Konfigurace K_1 a K_2 existují v modelu $A_{2k} = A_k \times A_k$ — to je zřejmé z vět 4 až 9. Čísla na hlavní diagonále matice (2) dostaneme podle věty 4, pod hlavní diagonálou podle věty 5 a čísla nad hlavní diagonálou jsou určeny větou 6. Podobně čísla na hlavní diagonále matice (3) jsou určeny větou 7, pod hlavní diagonálou větou 8 a nad hlavní diagonálou větou 9. Protože v konfiguraci se jedná jenom o incidenci podprostorů a tato vlastnost je afinní invariant a naše věta platí pro jeden model, potom platí i v obecném resp. abstraktním prostoru A_{2k}.

Literatura:

[1] *Jaromír Krys:* r-rozměrné konfigurace, Časopis pro pěstování matematiky roč. *96*, (1971), str. 339—345.

Adresa autora: 501 91 Hradec Králové, Orlické nábř. 1 (katedra matematiky PF).

Zusamenfassung

ÜBER EIN MODELL DES $2k$-DIMENSIONALEN AFFINEN RAUMES

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

In der Arbeit werden Konfigurationen in A_{2k} mit Hilfe der Konfiguration in A_k konstruiert. Der Verfasser benützt dabei ein spezielles Modell von A_{2k}, dessen Konstruktion am Anfang der Arbeit beschrieben ist.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

A NOTE ON A HEAT POTENTIAL AND THE PARABOLIC VARIATION

MIROSLAV DONT, Praha

(Received January 24, 1974)

INTRODUCTION

Let R^n stand for the n-dimensional Euclidean space (n positive integer). We shall deal with the plane R^2 in the sequel. Further let $^*R^1$ be the real axis together with the points $+\infty$ and $-\infty$. Whenever we say f is a function on a set M we mean f is a mapping from M into $^*R^1$; a real function on M is a mapping from M into R^1. If we speak about a continuous function we always consider a real function. Given I a compact interval in R^1, $\mathscr{C}(I)$ is defined to be the space of all continuous functions on I. We consider $\mathscr{C}(I)$ endowed with the supremum norm topology.

Let $\langle a, b\rangle$ be a compact interval in R^1 and let φ be a continuous function of bounded variation on $\langle a, b\rangle$. Conformably to [1] we shall introduce some notations. For any point $[x, t] \in R^2$ such that $t > a$ we define a function $\alpha_{x,t}$ on the interval $\langle a, \min\{t, b\})$ by

$$\alpha_{x,t}(\tau) = \frac{x - \varphi(\tau)}{2\sqrt{(t - \tau)}}\,.$$

$\alpha_{x,t}$ is always a continuous function of locally bounded variation on the interval $\langle a, \min\{t, b\})$. Further we define for each continuous function f on $\langle a, b\rangle$

$$Tf(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^{\min\{t,b\}} f(\tau) \exp\left(-\alpha_{x,t}^2(\tau)\right) \mathrm{d}\alpha_{x,t}(\tau) \tag{0.1}$$

whenever $[x, t] \in R^2$, $t > a$ and the integral on the right hand side of (0.1) exists in the sense of the Lebesgue-Stieltjes integral and is finite. If $t \leqq a$ then we put $Tf(x, t) = 0$.

It turns out useful to investigate Tf considered as a function on $R^2 - \{[\varphi(t), t];\ t \in \langle a, b\rangle\}$ for a fixed f in connection with the boundary value problem of the heat equation in R^2, especially with the Fourier problem (see [1]).

A theorem concerning the limit value of Tf on the set $K = \{[\varphi(t), t];\ t \in \langle a, b\rangle\}$ has been proved in [1]. In this paper we shall show some complementary results on that matter and on the parabolic variation. The parabolic variation of the curve φ was defined in [1] and played the main role in the investigation of the potential Tf. In the same way as in [1] we define the so-called parabolic variation with a weight Q. Let Q be a nonnegative, lower-semicontinuous and bounded function on the interval $\langle a, b\rangle$. Let $[x, t] \in R^2$. For $\alpha, r > 0$, $\alpha < +\infty$ put

$$n^Q_{x,t}(r, \alpha) = \sum_\tau Q(\tau)\,, \tag{0.2}$$

where the sum on the right hand side is taken over all $\tau \in \langle a, b\rangle$ such that $0 < < t - \tau < r$ and

$$t - \tau = \left(\frac{x - \varphi(\tau)}{2\alpha}\right)^2.$$

The parabolic variation with the weight Q and the radius r of the curve φ at the point $[x, t]$ is defined by

$$V^Q_K(r; x, t) = \int_0^\infty e^{-\alpha^2}\, n^Q_{x,t}(r, \alpha)\, \mathrm{d}\alpha \tag{0.3}$$

(see [1], Definition 1.1). Further we denote

$$V^Q_K(\infty; x, t) = V^Q_K(x, t)\,, \quad V^1_K(r; x, t) = V_K(r; x, t)\,,$$
$$V^1_K(x, t) = V_K(x, t) \quad ([x, t] \in R^2)\,.$$

The function $V^Q_K(r; \cdot)$ (as a function on R^2) is a nonnegative lower-semicontinuous function on R^2 and is finite on $R^2 - K$ (see [1], Lemma 1.2). Further, it holds for each $r > 0$, $x \in R^1$, $t \in R^1$, $a < t < b + r$ that

$$V^Q_K(r; x, t) = \int_{\max\{a, t-r\}}^{\min\{t, b\}} Q(\tau) \exp\left(-\alpha^2_{x,t}(\tau)\right) \mathrm{d} \operatorname{var} \alpha_{x,t}(\tau) \tag{0.4}$$

(see [1], Lemma 1.1). If $t \leqq a$ or $t \geqq b + r$ then $V^Q_K(r; x, t) = 0$.

The parabolic variation is analogous to the cyclic variation introduced in [4] (or [3]). It has been found in [6] that there is a smooth curve which has infinite cyclic variation at its every point. Now an analogous question arises: is there a continuous function φ of bounded variation on $\langle a, b\rangle$ such that $V_K(x, t) = \infty$ for every point $[x, t] \in \{[\varphi(\tau), \tau];\ \tau \in (a, b\rangle\}$? This question is investigated in the second part of this paper.

1.

In this part of the present note we shall show some simple assertions concerning the parabolic variation and some complementary assertions concerning limits of the potential Tf on the curve φ.

Let φ be a continuous function of bounded variation on a compact interval $\langle a, b\rangle \subset R^1$ and let Q be a nonnegative, lower-semicontinuous, bounded function on the interval $\langle a, b\rangle$. Let the symbols $\alpha_{x,t}$, $n^Q_{x,t}$, Tf, K, V^Q_K, V_K denote the same as in the introduction.

By the assumptions there is a constant $c \in R^1$ such that $Q \leqq c$ on $\langle a, b\rangle$. It is seen from the definition of the parabolic variation that

$$V^Q_K(r; x, t) \leqq c\, V_K(r; x, t)$$

for every $[x, t] \in R^2$, $r > 0$. In particular,

$$V_K(r; x, t) < \infty \quad \text{iff} \quad V^Q_K(r; x, t) < \infty\,.$$

Similarly if

$$\sup_{[x,t]\in M} V_K(r; x, t) < \infty \quad \text{then} \quad \sup_{[x,t]\in M} V^Q_K(r; x, t) < \infty$$

for any nonvoid set $M \subset R^2$. The converse statement is not valid. Nevertheless, one may formulate the following assertion:

Let $t_0 \in \langle a, b\rangle$ and suppose that $Q(t_0) > 0$. Then

$$V_K(r; \varphi(t_0), t_0) < \infty \quad \text{iff} \quad V^Q_K(r; \varphi(t_0), t_0) < \infty$$

for any $r > 0$. There is, in addition, an interval $I \subset \langle a, b\rangle$ which is open in $\langle a, b\rangle$ such that $t_0 \in I$ and

$$\sup_{t\in I} V_K(r; \varphi(t), t) < \infty \Leftrightarrow \sup_{t\in I} V^Q_K(r; \varphi(t), t) < \infty\,.$$

One may prove this assertion by means of the equality (0.4) regarding the fact that the function Q is lower-semicontinuous.

Lemma 1.1. *Let $t_0 \in (a, b\rangle$, $x_0 = \varphi(t_0)$ and suppose that*

$$\limsup_{t\to t_0} \frac{|x - \varphi(t)|}{\sqrt{(t_0 - t)}} < \infty\,. \tag{1.1}$$

Then $V^Q_K(x_0, t_0) < \infty$ if and only if

$$\int_a^{t_0} Q(\tau)\,\mathrm{d}\,\mathrm{var}_\tau \left[\frac{x_0 - \varphi(\tau)}{\sqrt{(t_0 - \tau)}}\right] < \infty\,. \tag{1.2}$$

Particularly: $V_K(x_0, t_0) < \infty$ *if and only if*

$$\mathrm{var}_\tau \left[\frac{x_0 - \varphi(\tau)}{\sqrt{(t_0 - \tau)}};\ \langle a, t_0)\right] < \infty\,. \tag{1.3}$$

Proof. If (1.2) holds then surely $V_K^Q(x_0, t_0) < \infty$ since

$$V_K^Q(x_0, t_0) \leqq \int_a^{t_0} Q(\tau) \,\mathrm{d}\, \operatorname{var} \alpha_{x_0, t_0}(\tau)$$

according to (0.4).

Suppose now that $V_K^Q(x_0, t_0) < \infty$. It is seen from (1.1) that

$$c_0 = \inf \left\{ \exp\left(- \frac{(x_0 - \varphi(\tau))^2}{4(t_0 - \tau)} \right); \quad \tau \in \langle a, t_0) \right\} > 0$$

so that

$$V_K^Q(x_0, t_0) = \int_a^{t_0} Q(\tau) \exp\left(-\alpha_{x_0, t_0}^2(\tau)\right) \mathrm{d}\, \operatorname{var} \alpha_{x_0, t_0}(\tau) \geqq c_0 \int_a^{t_0} Q(\tau) \,\mathrm{d}\, \operatorname{var} \alpha_{x_0, t_0}(\tau)$$

and thus (1.2) holds.

Now it suffices to note that if Q is the function which assumes the constant value 1 on $\langle a, b \rangle$ then the terms in (1.2) and (1.3) are equal.

In the same way as we defined the parabolic variation we may define a function $W_K^Q(r; \cdot)$ on R^2 putting

$$W_K^Q(r; x, t) = \int_0^\infty n_{x,t}^Q(r, \alpha) \,\mathrm{d}\alpha \tag{1.4}$$

$(r > 0)$. Similarly we define W_K^Q, $W_K(r; \cdot)$ and W_K.

In the same way as (0.4) has been proved (see [1]) one may prove that

$$W_K^Q(r; x, t) = \int_{\max\{a, t-r\}}^{\min\{t, b\}} Q(\tau) \,\mathrm{d}\, \operatorname{var} \alpha_{x,t}(\tau)$$

for any $r > 0$, $[x, t] \in R^2$ with $a < t < b + r$; particularly

$$W_K(x, t) = \tfrac{1}{2} \operatorname{var}_\tau \left[\frac{x - \varphi(\tau)}{\sqrt{(t - \tau)}}; \quad \langle a, \min\{t, b\}) \right],$$

whenever $[x, t] \in R^2$, $t > a$.

It follows from Lemma 1.1 that if φ is moreover $\frac{1}{2}$-Hölder on $\langle a, b \rangle$ then it holds

$$V_K^Q(x, t) < \infty \quad \text{iff} \quad W_K^Q(x, t) < \infty$$

for any point $[x, t] \in K$.

Lemma 1.2. *Let the function φ be $\frac{1}{2}$-Hölder on the interval $\langle a, b \rangle$. Then*

$$\sup\{V_K^Q(x, t); [x, t] \in K\} < \infty \tag{1.5}$$

if and only if

$$\sup \{W_K^Q(x, t);\ [x, t] \in K\} < \infty . \tag{1.6}$$

Proof. There is a constant $k \in R^1$ such that

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqq k \sqrt{|t_1 - t_2|}$$

for each pair of points $t_1, t_2 \in \langle a, b\rangle$. It is seen from this and from the form of the function $\alpha_{x,t}$ that there is a $c_1 > 0$ such that

$$e^{-\alpha^2{}_{x,t}(\tau)} \geqq c_1$$

for every $[x, t] \in K$, $t > a$, $\tau \in \langle a, t)$. Hence

$$V_K^Q(x, t) \geqq c_1 \int_a^t Q(\tau) \,\mathrm{d} \operatorname{var} \alpha_{x,t}(\tau) = c_1\, W_K^Q(x, t) . \tag{1.7}$$

If $c \in R^1$ is a constant such that $Q \leqq c$ on $\langle a, b\rangle$, then

$$V_K^Q(x, t) \leqq c\, W_K^Q(x, t) .$$

From this and from (1.7) the assertion now follows.

Lemma 1.3. *Given $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1\rangle$, $t \in (a, b\rangle$ suppose that*

$$\limsup_{\tau \to t-} \frac{|\varphi(t) - \varphi(\tau)|}{(t - \tau)^\alpha} < \infty .$$

Then $V_K^Q(\varphi(t), t) < \infty$ if and only if

$$\int_a^t \frac{Q(\tau)}{\sqrt{(t - \tau)}} \,\mathrm{d} \operatorname{var} \varphi(\tau) < \infty . \tag{1.8}$$

If φ is even α-Hölder on the interval $\langle a, b\rangle$, then

$$\sup \{V_K^Q(x, t);\ [x, t] \in K\} < \infty \tag{1.9}$$

if and only if

$$\sup \left\{ \int_a^t \frac{Q(\tau)}{\sqrt{(t - \tau)}} \,\mathrm{d} \operatorname{var} \varphi(\tau);\ t \in (a, b\rangle \right\} < \infty . \tag{1.10}$$

Particularly: if φ is a Lipschitz function on $\langle a, b\rangle$ then (1.9) holds.

Proof. Suppose that

$$|\varphi(t) - \varphi(t')| \leqq k(t - t')^\alpha$$

(where k is a suitable real constant) for each $t' \in \langle a, t)$.

Then we have

$$W_K^Q(\varphi(t), t) = \int_a^t Q(\tau)\, \mathrm{d}\, \mathrm{var}_\tau \left[\frac{\varphi(t) - \varphi(\tau)}{2\sqrt{(t-\tau)}}\right] \leqq$$

$$\leqq \int_a^t \frac{Q(\tau)}{2\sqrt{(t-\tau)}}\, \mathrm{d}\, \mathrm{var}_\tau\, (\varphi(t) - \varphi(\tau)) + \int_a^t Q(\tau)\, |\varphi(t) - \varphi(\tau)|\, \mathrm{d}\, \mathrm{var}_\tau \left[\frac{1}{2\sqrt{(t-\tau)}}\right] =$$

$$= \int_a^t \frac{Q(\tau)}{2\sqrt{(t-\tau)}}\, \mathrm{d}\, \mathrm{var}\, \varphi(\tau) + \int_a^t \frac{|\varphi(t) - \varphi(\tau)|}{4(t-\tau)^{3/2}}\, Q(\tau)\, \mathrm{d}\tau \leqq$$

$$\leqq \int_a^t \frac{Q(\tau)}{2\sqrt{(t-\tau)}}\, \mathrm{d}\, \mathrm{var}\, \varphi(\tau) + \int_a^t \frac{k}{4(t-\tau)^{3/2-\alpha}}\, Q(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Since Q is a bounded function and $\alpha > \frac{1}{2}$ by the assumption, the last integral is finite. Hence (1.8) implies $W_K^Q(\varphi(t), t)$ is finite (and $V_K^Q(\varphi(t), t)$ is finite, too).

In a similar way we obtain the following estimate:

$$\int_a^t \frac{Q(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)}}\, \mathrm{d}\, \mathrm{var}\, \varphi(\tau) \leqq \int_a^t \frac{Q(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)}} \sqrt{(t-\tau)}\, \mathrm{d}\, \mathrm{var}_\tau \left[\frac{\varphi(t) - \varphi(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)}}\right] +$$

$$+ \int_a^t \frac{Q(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)}} \frac{|\varphi(t) - \varphi(\tau)|}{\sqrt{(t-\tau)}}\, \mathrm{d}\, \mathrm{var}_\tau \sqrt{(t-\tau)} = 2W_K^Q(\varphi(t), t) +$$

$$+ \int_a^t \frac{|\varphi(t) - \varphi(\tau)|}{2(t-\tau)^{3/2}}\, Q(\tau)\, \mathrm{d}\tau \leqq 2\, W_K^Q(\varphi(t), t) + \int_a^t \frac{k\, Q(\tau)}{2(t-\tau)^{3/2-\alpha}}\, \mathrm{d}\tau\,.$$

The last integral is finite.

We obtain together that (1.8) is valid if and only if $W_K^Q(\varphi(t), t) < \infty$ but this is equivalent with $V_K^Q(\varphi(t), t) < \infty$ in our case (see Lemma 1.1).

One may prove the second part of the assertion by analogous estimates.

Now let φ be a Lipschitz function on $\langle a, b\rangle$ – suppose that

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqq k|t_1 - t_2|$$

for any $t_1, t_2 \in \langle a, b\rangle$. Let $t \in (a, b\rangle$. Then

$$\int_a^t \frac{1}{\sqrt{(t-\tau)}}\, \mathrm{d}\, \mathrm{var}\, \varphi(\tau) = \int_a^t \frac{|\varphi'(\tau)|}{\sqrt{(t-\tau)}}\, \mathrm{d}\tau \leqq k \int_a^t \frac{1}{\sqrt{(t-\tau)}}\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= 2k\sqrt{(t-a)} \leqq 2k\sqrt{(b-a)}\,.$$

Thus the condition (1.8) with $Q = 1$ on $\langle a, b\rangle$ is fulfilled and, in fact, (1.9) is valid. This completes the proof.

Let us now define the space $\mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$ in the same way as in [1]. Let Q be always a nonnegative lower-semicontinuous and bounded function on the interval $\langle a, b\rangle$.

The space $\mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$ is defined to be the space of all functions $f \in \mathscr{C}(\langle a, b\rangle)$ for which there is a real constant c (dependent on the function f) such that

$$|f| \leqq cQ$$

on the interval $\langle a, b\rangle$ and with the property that

$$|f(t_0) - f(t)| = o(Q(t))$$

for every point $t_0 \in \langle a, b\rangle$. We endow the space $\mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$ with the norm defined by

$$\|f\|_Q = \inf\{c \in R^1;\ |f| \leqq cQ \text{ on } \langle a, b\rangle\}$$

($f \in \mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$). Then the space $\mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$ is a Banach space (see [1]).

In [1] we have shown an assertion concerning the limits of the form

$$\lim_{\substack{[x,t]\to[x_0,t_0]\\ [x,t]\in M}} Tf(x, t)\,, \tag{1.11}$$

where M was a set in R^2 such that $[x_0, t_0] \in K \subset \overline{M}$ and either $M \subset \{[x, t];\ t \in \langle a, b\rangle,\ x > \varphi(t)\}$ or $M \subset \{[x, t];\ t \in \langle a, b\rangle,\ x < \varphi(t)\}$. Provided $Q(a) = 0$ it was proved that the limit (1.11) exists and is finite for each $f \in \mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$ if and only if

$$\limsup_{\substack{[x,t]\to[x_0,t_0]\\ [x,t]\in M}} V_K^Q(x, t) < \infty\,. \tag{1.12}$$

The condition (1.12) is fulfilled, for instance, when there is a $\delta > 0$ such that

$$\sup\{V_K^Q(x, t);\ [x, t] \in K,\ t \in \langle a, b\rangle \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)\} < \infty\,.$$

Let us now consider the case when the condition $Q(a) = 0$ is not supposed.

Proposition 1.1. *Let us suppose that*

$$\lim_{t\to a+} \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{\sqrt{(t - a)}} = 0\,. \tag{1.13}$$

Let β be a continuous function on $\langle a, b\rangle$ such that $\beta(a) = 0$ and

$$|\varphi(t) - \varphi(a)| < \beta(t)\sqrt{(t - a)}$$

for all $t \in (a\ b\rangle$ (according to (1.13) such a function β exists). Put

$$M_1 = \{[x, t];\ t \in (a, b\rangle,\ \varphi(t) < x < \varphi(a) + \beta(t)\sqrt{(t - a)}\}\,,$$
$$M_2 = \{[x, t];\ t \in (a, b\rangle,\ \varphi(a) - \beta(t)\sqrt{(t - a)} < x < \varphi(t)\}\,.$$

Then there are finite limits

$$\lim_{\substack{[x,t]\to[\varphi(a),a]\\ [x,t]\in M_1}} Tf(x,t)\,, \tag{1.14}$$

$$\lim_{\substack{[x,t]\to[\varphi(a),a]\\ [x,t]\in M_2}} Tf(x,t) \tag{1.15}$$

for each function $f \in \mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$ *if and only if there is a* $\delta > 0$ *such that*

$$\sup\{V_K^Q(\varphi(t), t);\ t \in (a, a + \delta)\} < \infty\,. \tag{1.16}$$

Proof. One can prove the necessity of the condition (1.16) for the existence of the limits (1.14), (1.15) in the same way as Lemma 2.1 in [1] and Theorem 2.1 in [1] were proved.

Assume now that the condition (1.16) is fulfilled and let a function $f \in \mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$ be given.

In the case $f(a) = 0$ the existence of limits (1.14), (1.15) may be proved in exactly the same way as in [1] (making use, of course, of Theorem 1.1 in [1]). In that case even

$$\lim_{[x,t]\to[\varphi(a),a]} Tf(x,t) = 0\,.$$

Now it suffices to show that the limits (1.14), (1.15) exist for any constant function f. That may be proved even if we assume nothing about the parabolic variation. It holds namely for $t \in (a, b\rangle$, $x > \varphi(t)$ that

$$T1(x,t) = 2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,G\left(\frac{x-\varphi(a)}{2\sqrt{(t-a)}}\right)$$

(where G is the function on $*R^1$ defined in [1], i.e. $G(-\infty) = 0$,

$$G(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2}\,dx\,,\quad t > -\infty)\,.$$

Consequently, for $[x, t] \in M_1$ it holds (for G is increasing)

$$2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,G\left(\frac{\varphi(a) + \beta(t)\sqrt{(t-a)} - \varphi(a)}{2\sqrt{(t-a)}}\right) = 2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,G(\tfrac{1}{2}\,\beta(t)) <$$

$$< T1(x,t) < 2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,G\left(\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{2\sqrt{(t-a)}}\right).$$

Since

$$\lim_{t\to a+} \tfrac{1}{2}\,\beta(t) = \lim_{t\to a+} \frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{2\sqrt{(t-a)}} = 0$$

we obtain immediately that

$$\lim_{\substack{[x,t]\to[\varphi(a),a]\\ [x,t]\in M_1}} T1(x,t) = 1 .$$

Similarly for the limit (1.15). The proof is complete .

Now let us present an assertion concerning limits of the form

$$\lim_{x\to\varphi(t)+} Tf(x,t) \quad \text{or} \quad \lim_{x\to\varphi(t)-} Tf(x,t),$$

where t is a fixed point of the interval $(a, b\rangle$.

Theorem 1.1. *Given* $t \in (a, b\rangle$ *suppose that*

$$\limsup_{\tau\to t-} \frac{|\varphi(t) - \varphi(\tau)|}{\sqrt{(t-\tau)}} < \infty . \tag{1.17}$$

Then there are finite limits

$$\lim_{x\to\varphi(t)+} Tf(x,t), \tag{1.18}$$

$$\lim_{x\to\varphi(t)-} Tf(x,t) \tag{1.19}$$

for each function $f \in \mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$ *if and only if*

$$V_K^Q(\varphi(t), t) < \infty .$$

Proof. If there is, for example, a finite limit (1.18) for each $f \in \mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$ then

$$\limsup_{x\to\varphi(t)+} V_K^Q(x,t) < \infty .$$

Since the function V_K^Q is a lower-semicontinuous function on R^2, this implies that $V_K^Q(\varphi(t), t) < \infty$.

Let $V_K^Q(\varphi(t), t) < \infty$. It is sufficient to show that

$$\limsup_{x\to\varphi(t)+} V_K^Q(x,t) < \infty \tag{1.20}$$

and

$$\limsup_{x\to\varphi(t)-} V_K^Q(x,t) < \infty . \tag{1.21}$$

For every $x \in R^1$ we have

$$V_K^Q(x,t) = \sup\left\{\int_a^t f(\tau)\exp\left(-\alpha_{x,t}^2(\tau)\right) \mathrm{d}\alpha_{x,t}(\tau);\ f \in \mathscr{C}_Q,\ \|f\|_Q \leqq 1\right\}.$$

Then it suffices to prove that there are $c \in R^1$, $\delta > 0$ such that

$$(1.22) \qquad \left| \int_a^t f(\tau) \exp\left(-\alpha_{x,t}^2(\tau)\right) \mathrm{d}\alpha_{x,t}(\tau) - \int_a^t f(\tau) \exp\left(-\alpha_{x,t}^2(\tau)\right) \mathrm{d}\alpha_{\varphi(t),t}(\tau) \right| \leqq c$$

for each $x \in (\varphi(t) - \delta, \varphi(t) + \delta)$ and for each function $f \in \mathscr{C}(\langle a, b \rangle)$ with $|f| \leqq Q$ on $\langle a, b \rangle$. Since φ is a continuous function by assumption it follows from the condition (1.17) that there is a constant $k \in R^1$ such that

$$|\varphi(t) - \varphi(\tau)| \leqq k \sqrt{(t - \tau)}$$

for each $\tau \in \langle a, t)$. Let $r > 0$ such that

$$t - \left(\frac{r}{2k}\right)^2 > a .$$

Putting $x = \varphi(t) + r$ and considering a function $f \in \mathscr{C}(\langle a, b \rangle)$ with $|f| \leqq Q$ we have

$$\begin{aligned}
(1.23) \quad & \left| \int_a^t f(\tau) \exp\left(-\alpha_{x,t}^2(\tau)\right) \mathrm{d}\alpha_{x,t}(\tau) - \int_a^t f(\tau) \exp\left(-\alpha_{\varphi(t),t}^2(\tau)\right) \mathrm{d}\alpha_{\varphi(t),t}(\tau) \right| \leqq \\
& \leqq \left| \int_a^t f(\tau) \exp\left(-\alpha_{x,t}^2(\tau)\right) \mathrm{d}\alpha_{x,t}(\tau) - \int_a^t f(\tau) \exp\left(-\alpha_{x,t}^2(\tau)\right) \mathrm{d}\alpha_{\varphi(t),t}(\tau) \right| + \\
& + \left| \int_a^t f(\tau) \exp\left(-\alpha_{x,t}^2(\tau)\right) \mathrm{d}\alpha_{\varphi(t),t}(\tau) - \int_a^t f(\tau) \exp\left(-\alpha_{\varphi(t),t}^2(\tau)\right) \mathrm{d}\alpha_{\varphi(t),t}(\tau) \right| = \\
& = \left| \int_a^t f(\tau) \exp\left(-\alpha_{x,t}^2(\tau)\right) \mathrm{d}\left(\alpha_{x,t}(\tau) - \alpha_{\varphi(t),t}(\tau)\right) \right| + \\
& + \left| \int_a^t f(\tau) \left(\exp\left(-\alpha_{x,t}^2(\tau)\right) - \exp\left(-\alpha_{\varphi(t),t}^2(\tau)\right)\right) \mathrm{d}\alpha_{\varphi(t),t}(\tau) \right| \leqq \\
& \leqq \int_a^t f(\tau) \exp\left(-\alpha_{x,t}^2(\tau)\right) \mathrm{d}_\tau \left(\frac{\varphi(t) + r - \varphi(\tau)}{2\sqrt{(t - \tau)}} - \frac{\varphi(t) - \varphi(\tau)}{2\sqrt{(t - \tau)}} \right) + \\
& + \int_a^t |f(\tau)| \left|\exp\left(-\alpha_{x,t}^2(\tau)\right) - \exp\left(\alpha_{\varphi(t),t}^2(\tau)\right)\right| \mathrm{d}\operatorname{var} \alpha_{\varphi(t),t}(\tau) \leqq \\
& \leqq c_0 \frac{r}{4} \int_a^t \frac{1}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left(-\alpha_{x,t}^2(\tau)\right) \mathrm{d}\tau + \int_a^t Q(\tau) \, \mathrm{d}\operatorname{var} \alpha_{\varphi(t),t}(\tau) ,
\end{aligned}$$

where c_0 is a finite constant such that $Q \leqq c_0$ on $\langle a, b \rangle$. Since the condition (1.17) is fulfilled it follows from Lemma 1.1 that

$$(1.24) \qquad \int_a^t Q(\tau) \, \mathrm{d}\operatorname{var} \alpha_{\varphi(t),t}(\tau) < \infty .$$

It holds for each $\tau \in (t - (r/2k)^2, t)$ that

$$|\varphi(t) - \varphi(\tau)| \leqq k\sqrt{(t-\tau)} \leqq \frac{r}{2},$$

that is

$$|\varphi(t) + r - \varphi(\tau)| \geqq \frac{r}{2}$$

for this τ. Thus

$$\begin{aligned}(1.25)\qquad & \frac{r}{4}\int_a^t \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\alpha_{x,t}^2(\tau)\right) \mathrm{d}\tau = \frac{r}{4}\int_a^{t-(r/2k)^2} \frac{\mathrm{d}\tau}{(t-\tau)^{3/2}} + \\ & + \frac{r}{4}\int_{t-(r/2k)^2}^t \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{16(t-\tau)}\right) \mathrm{d}\tau = \frac{r}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{(t-\tau)}}\right]_a^{t-(r/2k)^2} + \\ & + 2\int_{k/2}^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z \leqq \frac{r}{2}\left(\frac{2k}{r} - \frac{1}{\sqrt{(t-a)}}\right) + \sqrt{\pi} \leqq k + \sqrt{\pi}\,.\end{aligned}$$

On the right hand side of the estimate (1.25) we have a constant which is independent of the value $r > 0$ $(r < 2k\sqrt{(t-a)})$. Hence the condition (1.20) is fulfilled. Similarly for the condition (1.21). This completes the proof.

Let us now show some complementary assertions concerning the operators $\tilde{T}_+$, $\tilde{T}_-$ which have been established in [1] in connection with the boundary value problem of the heat equation. In [1] we have defined a space of all continuous functions on $\langle a, b\rangle$ vanishing at the point a. This space may be considered a space $\mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$ where Q is a function on $\langle a, b\rangle$ for which $Q(a) = 0$ and $Q(t) = 1$ for each $t \in (a, b\rangle$. Provided the condition

$$(1.26)\qquad \sup\{V_K(\varphi(t), t);\ t \in \langle a, b\rangle\} < \infty$$

was fulfilled the operators $\tilde{T}_+$ and $\tilde{T}_-$ have been defined on that space by

$$(1.27)\qquad \tilde{T}_+ f(t) = \lim_{\substack{[x', t'] \to [\varphi(t), t] \\ t' \in \langle a, b\rangle, x' > \varphi(t')}} Tf(x', t'),$$

$$(1.28)\qquad \tilde{T}_- f(t) = \lim_{\substack{[x', t'] \to [\varphi(t), t] \\ t' \in \langle a, b\rangle, x' < \varphi(t')}} Tf(x', t')$$

$(f \in \mathscr{C}_0(\langle a, b\rangle)$, $t \in \langle a, b\rangle)$. These operators map the space $\mathscr{C}_0(\langle a, b\rangle)$ into itself.

Now let Q be a nonnegative lower-semicontinuous and bounded function on $\langle a, b\rangle$ and suppose that

$$(1.29)\qquad \sup\{V_K^Q(x, t);\ [x, t] \in K\} < \infty\,.$$

Then the limits (1.27), (1.28) exist for each $f \in \mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$ and for each $t \in (a, b\rangle$.

Proposition 1.2. *Suppose that the condition* (1.29) *is fulfilled and let* $Q(a) > 0$. *For each* $f \in \mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$ *let us define on the interval* $(a, b\rangle$ *functions* $\bar{T}_+ f$, $\bar{T}_- f$ *by* (1.27), (1.28). *Then the functions* $\bar{T}_+ f$, $\bar{T}_- f$ *may be continuously extended to the whole interval* $\langle a, b\rangle$ *for each* $f \in \mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$ *if and only if the limit* (*finite or infinite*)

$$\lim_{t \to a+} \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{\sqrt{(t-a)}} . \tag{1.30}$$

exists.

Proof. Suppose, for instance, that $\bar{T}_+ f$ has a continuous extension on the interval $\langle a, b\rangle$ for each $f \in \mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$. Since $Q(a) > 0$ (and Q is lower-semicontinuous) there are $\delta > 0$, $f_1 \in \mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$ such that $f_1(t) = 1$ for each $t \in \langle a, a + \delta)$. It is easily seen that for each $t \in (a, a + \delta)$

$$\bar{T}_+ f_1(t) = 2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} G\left(\frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{2\sqrt{(t-a)}}\right) \tag{1.31}$$

where G is the function defined above (see [1], proof of Lemma 2.1). The limit

$$\lim_{t \to a+} \bar{T}_+ f_1(t)$$

exists by the assumption and since G is an increasing function the limit (1.30) exists as well.

Suppose that the limit (1.30) exists. If f_1 denotes the same as in the first part of this proof one may write any function $f \in \mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$ in the form $f = f_0 + kf_1$, where $f_0 \in \mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$, $f_0(a) = 0$ $(k = f(a))$. Operator T is linear (and so the operators $\bar{T}_+$, $\bar{T}_-$ are) and thus it suffices to show that $\bar{T}_+ f_0$, $\bar{T}_+ f_1$, $\bar{T}_- f_0$, $\bar{T}_- f_1$ may be continuously extended to $\langle a, b\rangle$. But

$$\lim_{t \to a+} \bar{T}_+ f_0(t) = \lim_{t \to a-} \bar{T}_- f_0(t) = 0$$

(for $\lim\limits_{[x,t] \to [\varphi(a), a]} Tf_0(x, t) = 0$) and finite limits

$$\lim_{t \to a+} \bar{T}_+ f_1(t), \lim_{t \to a+} \bar{T}_- f_1(t)$$

exist according to (1.31) and to the assumption of the existence of the limit (1.30). This completes the proof.

Remark. Provided (1.26) holds the operators $\bar{T}_+$, $\bar{T}_-$ have been defined on the space $\mathscr{C}_0(\langle a, b\rangle)$. Conformably to Proposition 1.2 we may define operators $\bar{T}_+$, $\bar{T}_-$

on the space $\mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$ (provided the condition (1.29) is fulfilled) by (1.27), (1.28) for $t \in (a, b\rangle$. We define

$$\bar{T}_+ f(a) = \lim_{t \to a+} \bar{T}_+ f(t)\,, \quad \bar{T}_- f(a) = \lim_{t \to a-} \bar{T}_- f(t)\,.$$

Then the operators $\bar{T}_+$, $\bar{T}_-$ map $\mathscr{C}_Q(\langle a, b\rangle)$ into $\mathscr{C}(\langle a, b\rangle)$.

2.

In this part we shall show that there is a continuous function φ of bounded variation on an interval $\langle a, b\rangle$ such that

$$V_K(\varphi(t), t) = \infty$$

for almost all $t \in (a, b\rangle$ $(K = \{[\varphi(t), t];\ t \in \langle a, b\rangle\})$.

Let $a, b \in R^1$, $a < b$. The supremum norm on $\mathscr{C}(\langle a, b\rangle)$ is denoted by $\|\ldots\|$ or $\|\ldots\|_{\mathscr{C}}$. Let us define a space $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\langle a, b\rangle)$. Put

$$\mathscr{B} = \{f \in C(\langle a, b\rangle);\ \operatorname{var}[f; \langle a, b\rangle] < \infty\}$$

and endow the space $\mathscr{B}$ with the norm $\|\ldots\|_{\mathscr{B}}$ defining

$$\|f\|_{\mathscr{B}} = \|f\|_{\mathscr{C}} + \operatorname{var}[f; \langle a, b\rangle]\,, \quad (f \in \mathscr{B})\,.$$

It is well known that the space $\mathscr{B}$ with the norm $\|\ldots\|_{\mathscr{B}}$ is a Banach space.

For $f \in \mathscr{B}$ we define on $\langle a, b\rangle$ a function W^f by

$$W^f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t = a \\ \displaystyle\int_a^t \frac{1}{\sqrt{(t - \tau)}}\, \mathrm{d} \operatorname{var} f(\tau) & \text{for } t \in (a, b\rangle\,. \end{cases}$$

For a positive integer k such that $1/k < b - a$ we set

$$M_k = \left\{f \in \mathscr{B};\ \text{there is a } t \in \left\langle a + \frac{1}{k}, b\right\rangle \text{ with } W^f(t) \leqq k\right\}.$$

Proposition 2.1. *The sets M_k are closed in $\mathscr{B}$.*

Proof. For $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < b - a$, $f \in \mathscr{B}$ we put

$$W^f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \in \langle a, a + \varepsilon\rangle \\ \displaystyle\int_a^{t-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{(t - \tau)}}\, \mathrm{d} \operatorname{var} f(\tau) & \text{for } t \in (a + \varepsilon, b\rangle\,. \end{cases}$$

It is easily verified that W_ε^f is a continuous function on $\langle a, b\rangle$ (since $\operatorname{var}[f; \langle a, b\rangle] < < \infty$) and it holds

$$W_\varepsilon^f \nearrow W^f \quad \text{as} \quad \varepsilon \searrow 0 .$$

Hence it immediately follows that W^f is a lower-semicontinuous function on $\langle a, b\rangle$.

Let $f_n \in M_k$ (where k is a fixed number, $n = 1, 2, \ldots$) and let $\|f_n - f\|_{\mathscr{B}} \to 0$. Then particularly

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}[f_n - f; \langle a, b\rangle] = 0$$

and thus

$$W_\varepsilon^{f_n} \to W_\varepsilon^f \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

for any $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < b - a$ and this convergence is uniform on the interval $\langle a, b\rangle$ (since the functions $1/\sqrt{(t-\tau)}$ are uniformly bounded on the intervals $\langle a, t - \varepsilon\rangle$ with respect to $t \in (a + \varepsilon, b\rangle$ and $W_\varepsilon^{f_n}(t) = 0$ for $t \in \langle a, \varepsilon\rangle$). According to the definition of the set M_k there are points $t_n \in \langle a + 1/k, b\rangle$ such that

$$W^{f_n}(t_n) \leqq k .$$

Let us suppose that the sequence $\{t_n\}$ converges to a point $t \in \langle a + (1/k), b\rangle$. We assert that $f \in M_k$. To this end it suffices to show that $W^f(t) \leqq k$.

Suppose that

$$k < W^f(t) = k + c .$$

Then there are $\varepsilon, \delta > 0$ such that

$$W_\varepsilon^f(t') > k + \frac{c}{2}$$

for each $t' \in \langle t - \delta, t + \delta\rangle \cap \langle a, b\rangle$ (we assume $c < \infty$; in the case $c = \infty$ one would proceed by analogy).

There is n_0 such that

$$|W_\varepsilon^f(t') - W_\varepsilon^{f_n}(t')| \leqq \frac{c}{4}$$

for each $n > n_0$ and each $t' \in \langle a, b\rangle$. But then

$$k \geqq W_\varepsilon^{f_n}(t_n) = W_\varepsilon^f(t_n) - \frac{c}{4} > k + \frac{c}{4} .$$

This is a contradiction which completes the proof.

Proposition 2.2. *There is a function $\varphi \in \mathscr{B}$ such that*

$$V_K(\varphi(t), t) = \infty \tag{2.1}$$

(*where* $K = \{[x, t];\ t \in \langle a, b\rangle, x = \varphi(t)\}$) *for almost all* $t \in (a, b\rangle$. *The function* φ *may be even chosen to be absolutely continuous.*

Proof. Let $\mathscr{A}$ denote the closure in $\mathscr{B}$ of the family of all Lipschitz functions on $\langle a, b\rangle$ (it is clear that $\mathscr{A}$ is the set of all absolutely continuous functions on $\langle a, b\rangle$). $\mathscr{A}$ endowed with the norm restricted from $\mathscr{B}$ is a Banach space.

Let us prove that the set

$$A = \{f \in \mathscr{A};\ t \in (a, b\rangle \Rightarrow W^f(t) = \infty\}$$

is of the second category in $\mathscr{A}$. From this the assertion will follow.

Since

$$A = \mathscr{A} - \bigcup_{k > 1/(b-a)} M_k\,,$$

it suffices to show that the sets $M_k \cap \mathscr{A}$ are nowhere dense in $\mathscr{A}$. Those sets are closed and thus it suffices to prove that no set $M_k \cap \mathscr{A}$ contains any interior point (with respect to $\mathscr{A}$). We assume for the simplicity that $\langle a, b\rangle = \langle 0, 1\rangle$. Let us define functions $f_n \in \mathscr{A}$ in the following way.

For a positive integer n we put $b_n = 1/(2n^6)$ and

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \in \left\langle 0, \dfrac{1}{n} - b_n\right) \\ \dfrac{1}{n^2 b_n}\ (=2n^4) & \text{for } t \in \left\langle \dfrac{1}{n} - b_n, \dfrac{1}{n}\right). \end{cases}$$

We extend the function φ_n periodically with the period $1/n$ on the whole interval $\langle 0, 1\rangle$. Further, we put

$$f_n(t) = \int_0^t \varphi_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad (t \in \langle a, b\rangle)\,.$$

With respect to the fact that the function f_n is nondecreasing (for φ_n is nonnegative) and $f_n(0) = 0$ we have

$$\|f_n\|_{\mathscr{B}} = 2f_n(1) = 2n\,\frac{1}{n^2 b_n}\,b_n = \frac{2}{n}\,.$$

Let $t_0 \in (0, 1/n\rangle$. Then

$$W^{f_n}\left(\frac{1}{n} + t_0\right) = \int_0^{1/n + t_0} \frac{\varphi_n(\tau)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + t_0 - \tau\right)}}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{n^2 b_n}\int_{1/n - b_n}^{1/n} \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + t_0 - \tau\right)}} =$$

$$= \frac{2}{n^2 b_n}\left[-\sqrt{\left(\frac{1}{n} + t_0 - \tau\right)}\right]_{1/n - b_n}^{1/n} = \frac{2}{n^2 b_n}(\sqrt{(t_0 + b_n)} - \sqrt{t_0}) =$$

$$= \frac{2}{n^2 b_n} \frac{b_n}{\sqrt{(b_n + t_0)} + \sqrt{t_0}} \geqq \frac{1}{n^2 \sqrt{(2b_n)}} = n\,.$$

In virtue of the fact that the function φ_n is $1/n$ – periodic one sees that

$$W^{f_n}(t) \geqq n$$

for any $t \in (1/n, 1\rangle$.

Suppose now that for a positive integer k (with $1/k < b - a$) the set $M_k \cap \mathscr{A}$ has an interior point (in $\mathscr{A}$). Then there are $f_0 \in M_k \cap \mathscr{A}$, $\varepsilon > 0$ such that

$$(f \in \mathscr{A},\ \|f_0 - f\|_{\mathscr{B}} < \varepsilon) \Rightarrow f \in M_k\,. \tag{2.2}$$

Since the set of all Lipschitz functions on $\langle 0, 1\rangle$ is dense in $\mathscr{A}$ (by the definition of the set $\mathscr{A}$) one may suppose that the function f_0 is a Lipschitz function. Then there is a positive integer k_0 such that

$$W^{f_0}(t) \leqq k_0$$

for each $t \in \langle a, b\rangle$ (see Lemma 1.3). Choose n to be a positive integer such that

$$n > 2 \max\{k, k_0\}\,, \quad \|f_n\|_{\mathscr{B}} = \frac{2}{n} < \varepsilon\,.$$

Then for each $t \in \langle 1/k, 1\rangle$,

$$W^{(f_0 + f_n)}(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t - \tau)}} \,\mathrm{d} \operatorname{var}(f_0 + f_n)(\tau) \geqq$$

$$\geqq \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t-\tau)}} \,\mathrm{d} \operatorname{var} f_n(\tau) - \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t-\tau)}} \,\mathrm{d} \operatorname{var} f_0(\tau) = W^{f_n}(t) - W^{f_0}(t) \geqq$$

$$\geqq n - k_0 > k\,.$$

It follows from this that $f_0 + f_n \notin M_k$ which contradicts (2.2) (where we put $f = f_0 + f_n$). Thus, in fact, the sets $M_k \cap \mathscr{A}$ are nowhere dense in $\mathscr{A}$.

We conclude that there is a function $\varphi \in \mathscr{A}$ such that $W^\varphi(t) = \infty$ for each $t \in (a, b\rangle$. But φ has a finite derivative at almost all points $t \in (a, b)$ and at every such point t it holds

$$W^\varphi(t) = \infty \Leftrightarrow V_K(\varphi(t), t) = \infty$$

(where $K = \{[\varphi(t), t];\ t \in \langle a, b\rangle\}$) according to Lemma 1.3.

The proof is complete.

References

[1] *M. Dont:* On a heat potential; Czech. Math. J., *25 (100)* 1975, 84—109.

[2] *M. Gevrey:* Sur les équations aux dérivées du type parabolique; J. Math. Purès Appl. *9* (1913), 305—471; *10* (1914), 105—148.

[3] *J. Král:* Teorie potenciálu I; Praha 1965.

[4] *J. Král:* On the logarithmic potential of the double distribution; Czech Math. J., *14 (89)* 1964, 306—321.

[5] *J. Král:* Non-tangential limits of the logarithmic potential; Czech. Math. J., *14 (89)* 1964, 455—482.

[6] *J. Král:* Hladké funkce s nekonečnou cyklickou variací; Čas. pěst. mat., *93* (1968), 178—185.

[7] *J. Král, J. Lukeš:* On the modified logarithmic potential; Czech. Math. J., *21 (96)* 1971, 76—98.

[8] *J. Král, J. Lukeš:* Integrals of the Cauchy type; Czech. Math. J., *22 (97)* (1972), 663—682.

[9] *J. Král, I. Netuka, J. Veselý:* Teorie potenciálu II; Praha 1972.

[10] *I. Netuka:* Hladké plochy s nekonečnou cyklickou variací; Časopis pěst. mat., *96* (1971), 86—101.

[11] *F. Riesz, B. SZ. - Nagy:* Vorlesungen über Funktionalanalysis; Berlin 1956.

Author's address: 166 27 Praha 6 - Dejvice, Suchbátarova 2 (České vysoké učení technické).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ КУРЦВЕЙЛЯ-ЯСНОГО ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. Д. МИРЗОВ, Тбилиси

(Поступило в редакцию 19/II 1974 г.)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$u_1' = a_1(t)\,|u_2|^{\lambda_1}\operatorname{sign} u_2\,, \quad u_2' = -a_2(t)\,|u_1|^{\lambda_2}\operatorname{sign} u_1\,, \tag{1}$$

где $\lambda_i > 0$, функции $a_i(t)$ $(i = 1, 2)$ абсолютно непрерывны на каждом конечном отрезке промежутка $[0, +\infty]$ и

$$a_i(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \geqq 0 \quad (i = 1, 2)\,. \tag{2}$$

Решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1), заданное в промежутке $[t_*, t^*)$ называется непродолжаемым вправо, если $t^* = +\infty$, либо $t^* < +\infty$ и

$$\lim_{t \to t^*} (|u_1(t)| + |u_2(t)|) = +\infty\,.$$

Решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1) назовём правильным, если оно задано на некотором бесконечном промежутке $[t_*, +\infty)$ и

$$\sup \{|u_1(\tau)| + |u_2(\tau)| : \tau \geqq t\} > 0 \quad \text{при любом} \quad t \in [t_*, +\infty)\,. \tag{3}$$

Правильное решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1) называется колеблющимся, если обе компоненты имеют последовательность нулей, сходящуюся к $+\infty$. Если же обе компоненты (хотя бы одна компонента) отличны от нуля для больших значений t то решение $(u_1(t), u_2(t))$ называется неколеблющимся (слабо неколеблющимся).

Необходимые и достаточные условия колеблемости всех правильных решений уравнений вида (1) содержатся в [4] и [6].

В настоящей заметке доказывается теорема о существовании хотя бы одного правильного колеблющегося решения системы (1), являющаяся аналогом теоремы Курцвейля-Ясного [1], [2], [3].

Теорема 1. *Любое нетривиальное непродолжаемое вправо решение системы* (1) *является правильным.*

Доказательство. Пусть $(u_1(t), u_2(t))$ некоторое нетривиальное непродолжаемое вправо решение системы (1), заданное в промежутке $[t_*, t^*)$. Тогда из (1) имеем

$$\frac{a_1(t)}{\lambda_1 + 1} \mathrm{d}|u_2(t)|^{\lambda_1 + 1} + \frac{a_2(t)}{\lambda_2 + 1} \mathrm{d}|u_1(t)|^{\lambda_2 + 1} = 0 \quad \text{при} \quad t_* \leqq t < t^* . \tag{4}$$

Проинтегрировав равенство (4) от t_* до t и воспользовавшись формулой интегрирования по частям, получим

$$E(t) = E(t_*) + \int_{t^*}^{t} \left[\frac{a_1'(\tau)}{\lambda_1 + 1} |u_2(\tau)|^{\lambda_1 + 1} + \frac{a_2'(\tau)}{\lambda_2 + 1} |u_1(\tau)|^{\lambda_2 + 1} \right] \mathrm{d}\tau \quad \text{при} \quad t_* \leqq t < t^*,$$

где

$$E(t) = \frac{a_1(t)}{\lambda_1 + 1} |u_2(t)|^{\lambda_1 + 1} + \frac{a_2(t)}{\lambda_2 + 1} |u_1(t)|^{\lambda_2 + 1} .$$

Следовательно,

$$E(t) \leqq E(t_*) + \int_{t_*}^{t} \left(\frac{[a_1'(\tau)]_+}{a_1(\tau)} + \frac{[a_2'(\tau)]_+}{a_2(\tau)} \right) E(\tau) \, \mathrm{d}\tau \quad \text{при} \quad t_* \leqq t < t^* ,$$

где $[a_i'(t)]_+ = \max \{0, a_i'(t)\}$, $(i = 1, 2)$. В силу леммы Гронуолла-Беллмана, из последнего неравенства получим

$$E(t) \leqq E(t_*) \exp \left\{ \int_{t^*}^{t} \left(\frac{[a_1'(\tau)]_+}{a_1(\tau)} + \frac{[a_2'(\tau)]_+}{a_2(\tau)} \right) \mathrm{d}\tau \right\} \quad \text{при} \quad t_* \leqq t < t^* . \tag{5}$$

Если предположить, что $t^* < +\infty$ то из (5) будем иметь

$$\lim_{t \to t^*} (|u_1(t)| + |u_2(t)|) < +\infty .$$

Но это невозможно, поскольку $(u_1(t), u_2(t))$ непродолжаемое вправо решение системы (1). Тем самым мы доказали, что $t^* = +\infty$.

Для заверешения доказательства теоремы остается показать, что соблюдается условие (3). Допустим обратное. Тогда найдётся $t_0 \in [t_*, +\infty)$ что $u_i(t_0) = 0$ $(i = 1, 2)$ и $|u_1(t)| + |u_2(t)| \not\equiv 0$ при $t_* \leqq t \leqq t_0$. Ввиду (4), –

$$E(t) = - \int_{t}^{t_0} \left[\frac{a_1'(\tau)}{\lambda_1 + 1} |u_2(\tau)|^{\lambda_1 + 1} + \frac{a_2'(\tau)}{\lambda_2 + 1} |u_1(\tau)|^{\lambda_2 + 1} \right] \mathrm{d}\tau \leqq$$

$$\leqq \int_{t}^{t_0} \left(\frac{|a_1'(\tau)|}{a_1(\tau)} + \frac{|a_2'(\tau)|}{a_2(\tau)} \right) E(\tau) \, \mathrm{d}\tau \quad \text{при} \quad t_* \leqq t \leqq t_0 .$$

Применив снова лемму Гронуолла-Беллмана к последнему неравенству, получим

$$E(t) \leqq 0 \quad \text{при} \quad t_* \leqq t \leqq t_0 .$$

Следовательно, $u_i(t) \equiv 0$ при $t_* \leqq t \leqq t_0$ $(i = 1, 2)$. Полученное противоречие показывает, что наше допущение о том, что нарушается условие (3), неверно. Теорема доказана.

Замечание. Из (5) следует, что если для некоторого $i \in \{1, 2\}$ функция

$$\int_0^t \left(\frac{[a_1'(\tau)]_+}{a_1(\tau)} + \frac{[a_2'(\tau)]_+}{a_2(\tau)} \right) \mathrm{d}\tau - \ln a_i(t)$$

ограничена, то какое бы ни было решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1) компонента $|u_{3-i}(t)|$ ограничена в промежутке $[0, +\infty)$.

Ввиду (2), нетрудно убедиться, что справедлива

Лемма 1. *Любое слабо неколеблющееся решение системы* (1) *является неколеблющимся.*

Лемма 2. *Если для некоторого* $i \in \{1, 2\}$ $\int^{+\infty} a_i(\tau)\,\mathrm{d}\tau = +\infty$, *то любое неколеблющееся решение* $(u_1(t), (u_2(t))$ *системы* (1) *при достаточно больших* t *удовлетворяет нерабенству*

$$(-1)^{i-1}\, u_1(t)\, u_2(t) > 0 .$$

Доказательство. Для определённости будем считать, что $i = 1$. Если предположить, что $u_1(t)\, u_2(t) < 0$ при $t \geqq t_0$ где t_0-достаточно большое число, то из (1) получаем равенства

$$|u_1(t)|' = -a_1(t)|u_2(t)|^{\lambda_1}, \quad |u_2(t)|' = a_2(t)\,|u_1(t)|^{\lambda_2} \quad \text{при} \quad t \geqq t_0$$

из которых следует, что

$$|u_1(t)| \leqq |u_1(t_0)| - |u_2(t_0)|^{\lambda_1} \int_{t_0}^t a_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{при} \quad t \geqq t_0 .$$

Но это невозможно, ввиду того, что $\int^{+\infty} a_1(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$. Следовательно, $u_1(t)\, u_2(t) > 0$ при достаточно больших t. Лемма доказана.

Теорема 2. *Если* $\lambda_1 \lambda_2 \neq 1$ *и найдётся такое* $i \in \{1, 2\}$, *что* $\int^{+\infty} a_i(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$ *и функция*

$$A_i(t) = \frac{a_{3-i}(t)}{a_i(t)} \left(\int_0^t a_i(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right)^{(\lambda_i + \lambda_{3-i} + 2)/(\lambda_i + 1)}$$

не убывает, то система (1) *обладает колеблющимся решением.*

Доказательство. Мы рассмотрим лишь случай, когда $i = 1$ ибо при $i = 2$ рассуждения аналогичны. Пусть решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1) неколеблющееся. Тогда, ввиду леммы 2, найдётся такое t_0, что $u_1(t)\, u_2(t) > 0$ при $t \geqq t_0$. Поэтому

$$(6) \qquad |u_1(t)|' = a_1(t)\, |u_2(t)|^{\lambda_1}, \quad |u_2(t)|' = -a_2(t)\, |u_1(t)|^{\lambda_2} \quad \text{при} \quad t \geqq t_0 .$$

Из второго равенства в (6) получим

$$(7) \qquad |u_2(t)| \geqq \int_t^{+\infty} a_2(\tau)\, |u_1(\tau)|^{\lambda_2}\, d\tau = \int_t^{+\infty} A_1(\tau)\, |u_1(\tau)|^{\lambda_2}\, a_2(\tau)\, A_1^{-1}(\tau)\, d\tau \geqq$$

$$\geqq A_1(t)\, |u_1(t)|^{\lambda_2} \int_t^{+\infty} a_1(\tau) \left(\int_0^{\tau} a_1(s)\, ds \right)^{-(\lambda_1+\lambda_2+2)/(\lambda_1+1)} d\tau =$$

$$= |u_1(t)|^{\lambda_2} \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_2 + 1} A_1(t) \left(\int_0^t a_1(s)\, ds \right)^{-(\lambda_2+1)/(\lambda_1+1)} \quad \text{при} \quad t \geqq t_0 .$$

С другой стороны из первого равенства в (6) имеем

$$(8) \qquad |u_1(t)| \geqq \left(\int_{t_0}^t a_1(\tau)\, d\tau \right) |u_2(t)|^{\lambda_1} \quad \text{при} \quad t \geqq t_0 .$$

Пусть $t_1 > t_0$ настолько велико, что

$$\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \leqq (\lambda_1 + 1)^{\lambda_1} \int_{t_0}^t a_1(\tau)\, d\tau \quad \text{при} \quad t \geqq t_1 .$$

Если $\lambda_1 \lambda_2 > 1$, ввиду последнего неравенства, из (7) и (8) следует, что

$$(9) \qquad |u_1(t)| \leqq \left(\frac{\lambda_2 + 1}{A_1(t)} \right)^{\lambda_1/(\lambda_1\lambda_2 - 1)} \left(\int_0^t a_1(s)\, ds \right)^{1/(\lambda_1+1)} \quad \text{при} \quad t \geqq t_1 ,$$

если же $\lambda_1 \lambda_2 < 1$ то

$$(10) \qquad |u_1(t)| \geqq \left(\frac{A_1(t)}{\lambda_2 + 1} \right)^{\lambda_1/(1-\lambda_1\lambda_2)} \left(\int_0^t a_1(s)\, ds \right)^{1/(\lambda_1+1)} \quad \text{при} \quad t \geqq t_1 .$$

Таким образом мы показали, что если $\lambda_1 \lambda_2 > 1$ ($\lambda_1 \lambda_2 < 1$), то всякое неколеблющееся решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1), при больших значениях аргумента удовлетворяет условию (9) (условию (10)).

Пусть $(u_1(t), u_2(t))$ – непродолжаемое вправо решение системы (1), начальные значения которого в точке $t = 1$ удовлетворяют условию $|u_1(1)| + |u_2(1)| \neq 0$. Согласно теореме 1, $(u_1(t), u_2(t))$ является правильным.

Умножая обе части второго равенства в (1) на

$$\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right)^{(\lambda_1+2)/(\lambda_1+1)} \left[\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right)^{-1/(\lambda_1+1)} u_1(t) \right]'$$

и интегрируя от 1 до t получаем

$$(11)\qquad \left(\int_0^t a_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)|u_2(t)|^{\lambda_1+1} - u_1(t)\,u_2(t) +$$

$$+ \frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1} A_1(t)\left[\left(\int_0^t a_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{-1/(\lambda_1+1)}|u_1(t)|^{\lambda_2+1} =\right.$$

$$= c_0 + \frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1}\int_1^t A_1'(\tau)\left[\left(\int_0^\tau a_1(s)\,\mathrm{d}s\right)^{-1/(\lambda_1+1)}|u_1(\tau)|\right]^{\lambda_2+1}\mathrm{d}\tau \quad \text{при} \quad t \geqq 1\,,$$

где

$$c_0 = \left(\int_0^1 a_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)|u_2(1)|^{\lambda_1+1} - u_1(1)\,u_2(1) +$$

$$+ \frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1} A_1(1)\left[\left(\int_0^1 a_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{-1/(\lambda_1+1)}|u_1(1)|\right]^{\lambda_2+1}.$$

Покажем, что если $\lambda_1\lambda_2 > 1$ и

$$(12)\qquad c_0 > (\lambda_1+1)\left(\frac{\lambda_2+1}{A_1(1)}\right)^{(\lambda_1+1)/(\lambda_2+1)},$$

то $(u_1(t), u_2(t))$ является колеблющимся. Допустим противное – пусть это решение является слабо неколеблющимся. Тогда согласно леммам 1 и 2, найдется такое число $t_0 \geqq 1$ что

$$(13)\qquad u_1(t)\,u_2(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \geqq t_0\,.$$

Следовательно, имеют место равенства (6). С другой стороны, как это было доказано выше, справедлива оценка (9), где $t_1 \geqq t_0$. Ввиду (9), (12) и (13), из (11) следует, что

$$\left(\int_0^t a_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)|u_2(t)|^{\lambda_1+1} - |u_1(t)|\,|u_2(t)| \geqq c_0 -$$

$$- \frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1} A_1(t)\left[\left(\int_0^t a_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{-1/(\lambda_1+1)}|u_1(t)|\right]^{\lambda_2+1} >$$

$$> c_0 - (\lambda_1+1)\left(\frac{\lambda_2+1}{A_1(1)}\right)^{(\lambda_1+1)/(\lambda_2+1)} > 0 \quad \text{при} \quad t \geqq t_1\,.$$

Согласно последнему неравенству и первому равенству в (6), имеем

$$\frac{|u_1(t)|'}{|u_1(t)|} = \frac{a_1(t)\,|u_2(t)|^{\lambda_1}}{|u_1(t)|} > \frac{a_1(t)}{\int_0^t a_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau} \quad \text{при} \quad t \geqq t_1\,.$$

Отсюда ясно, что

$$|u_1(t)| > |u_1(t_1)| \left(\int_0^{t_1} a_1(\tau)\, d\tau \right)^{-1} \left(\int_0^{t} a_1(\tau)\, d\tau \right) \quad \text{при} \quad t \geqq t_1\,,$$

которое противоречит оценке (9). Следовательно, $(u_1(t), u_2(t))$ является колеблющимся.

Перейдём к рассмотрению случая, когда $\lambda_1\lambda_2 < 1$. Подберём $\delta > 0$ таким образом, чтобы

$$\delta < \left(\frac{A_1(1)}{\lambda_2 + 1} \right)^{\lambda_1/(1-\lambda_1\lambda_2)} \tag{14}$$

и покажем, что если

$$u_1(1) = 0\,, \quad c_0 = \left(\int_0^1 a_1(\tau)\, d\tau \right) |u_2(1)|^{\lambda_1+1} < \delta^{1+1/\lambda_1} \tag{15}$$

то $(u_1(t), u_2(t))$ колеблющееся.

Легко видеть, что для любых $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $\alpha > 0$ и $\lambda_1 > 0$ имеет место неравенство

$$\alpha x^{\lambda_1+1} - xy + \lambda_1 \alpha^{-1/\lambda_1} \left(\frac{y}{\lambda_1 + 1} \right)^{1+1/\lambda_1} \geqq 0\,,$$

с учётом которого имеем

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right) |u_2(t)|^{\lambda_1+1} - u_1(t)\, u_2(t) + \\
&+ \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_2 + 1} A_1(t) \left[\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right)^{-1/(\lambda_1+1)} |u_1(t)| \right]^{\lambda_2+1} = \\
&= \left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right) |u_2(t)|^{\lambda_1+1} - u_1(t)\, u_2(t) + \\
&+ \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + 1)^{1+1/\lambda_1}} \left[\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right)^{-1/(\lambda_1+1)} |u_1(t)| \right]^{1+1/\lambda_1} + \\
&+ \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_2 + 1} A_1(t) \left[\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right)^{-1/(\lambda_1+1)} |u_1(t)| \right]^{\lambda_2+1} - \\
&- \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + 1)^{1+1/\lambda_1}} \left[\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right)^{-1/(\lambda_1+1)} |u_1(t)| \right]^{1+1/\lambda_1} \geqq \\
&\geqq \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_2 + 1} A_1(t) \left[\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right)^{-1/(\lambda_1+1)} |u_1(t)| \right]^{\lambda_2+1} - \\
&- \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + 1)^{1+1/\lambda_1}} \left[\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right)^{-1/(\lambda_1+1)} |u_1(t)| \right]^{1+1/\lambda_1}.
\end{aligned}$$

Поэтому из (11) следует, что

$$\frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1} A_1(t)\, V(t)^{\lambda_2+1} - \frac{\lambda_1}{(\lambda_1+1)^{1+1/\lambda_1}} V(t)^{1+1/\lambda_1} \leqq$$

$$\leqq c_0 + \frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1}\int_1^t A_1'(\tau)\, V(\tau)^{\lambda_2+1}\, \mathrm{d}\tau\,, \quad t \geqq 1\,,$$

где $V(t) = \left(\left(\int_0^t a_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{-1/(\lambda_1+1)} |u_1(t)|\right)$. Полагая $W(t) = \max\{V(\tau) : 1 \leqq \tau \leqq t\}$ из последнего неравенства получим

$$\frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1} A_1(t)\, V(t)^{\lambda_2+1} - \frac{\lambda_1}{(\lambda_1+1)^{1+1/\lambda_1}} V(t)^{1+1/\lambda_1} \leqq$$

$$\leqq c_0 + \frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1} W(t)^{\lambda_2+1}[A_1(t) - A_1(1)] \quad \text{при} \quad t \geqq 1\,.$$

Следовательно,

(16) $$\frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1} A_1(1)\, W(t)^{\lambda_2+1} - \frac{\lambda_1}{(\lambda_1+1)^{1+1/\lambda_1}} W(t)^{1+1/\lambda_1} \leqq$$

$$\leqq c_0 + \frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1} A_1(t)\,[W(t)^{\lambda_2+1} - V(t)^{\lambda_2+1}] \quad \text{при} \quad t \geqq 1\,.$$

Далее наши рассуждения совпадают с рассуждениями авторов работы [7]. Так как $W(1) = 0$ и $W(t) \geqq 0$ при $t \geqq 1$, то

(17) $$0 \leqq W(t) < \delta$$

в некоторой правой окрестности точки $t = 1$. Покажем, что (17) справедливо для всех $t \geqq 1$. Предположим обратное, т. е. что существует $t^* > 1$ такое что $W(t^*) = \delta$ и что t^* – ближайшая к $t = 1$ точка. Тогда $W(t^*) = V(t^*)$ и из (16) и (15) следует неравенство

$$\frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1} A_1(1)\, \delta^{\lambda_2-1/\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{(\lambda_1+1)^{1+1/\lambda_1}} < 1\,,$$

которое, ввиду $\lambda_1\lambda_2 < 1$ противоречит (14). Таким образом для рассматриваемого решения

(18) $$\left(\int_0^t a_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{-1/(\lambda_1+1)} |u_1(t)| = V(t) < \delta \quad \text{при} \quad t \geqq 1\,.$$

Если допустить, что указанное решение является слабо неколеблющимся, то как было показано выше, для такого решения будет справедлива оценка (10), из которой следует, что

$$\left(\int_0^t a_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{-1/(\lambda_1+1)} |u_1(t)| \geqq \left(\frac{A_1(t)}{\lambda_2+1}\right)^{\lambda_1/(1-\lambda_1\lambda_2)} > \delta$$

при достаточно больших значениях аргумента, т. е. приходим к противоречию с (18). Теорема доказана.

Замечание 1. Если $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 > 1$, $a_1(t) \equiv 1$, то из доказанной теоремы получается теорема Курцвейля-Ясного (см. [3], теорема 1).

Замечание 2. Если $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 < 1$, $a_1(t) \equiv 1$, то из доказанной теоремы получается теорема Куо-ЛянгЧю из [5].

Литература

[1] *М. Ясны:* О существовании колеблющегося решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + f(x)y^{2n-1} = 0$. Časopis pro pěstování matematiky *85* (1960), 1, 78—83.

[2] *Я. Курцвейль:* Заметка по колеблющимся решениям уравнения $y'' + f(x)\,y^{2n-1} = 0$. Časopis pro pěstování matematiky *85* (1960), 3, 357—358.

[3] *И. Т. Кигурадзе:* Об условиях колеблемости решений уравнения $u'' + a(t)\,|u|^n \operatorname{sign} u = 0$. Časopis pro pěstovaní matematiky, *87*, (1962), 3, 492—495.

[4] *Д. Д. Мирзов:* Заметка о колеблемости решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Сообщения АН Груз. ССР, *61* (1971), 2, 277—279.

[5] *Kuo-liang Chion:* The existence of oscillatory solutions for the equation $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2 + q(t) \cdot y^r = 0$, $0 < r < 1$. Proc. Amer. Math. Soc. *35* (1972), 1, 120—122.

[6] *Д. Д. Мирзов:* О колеблемости решений системы нелинейных дифференциальных уравнений. Дифф. уравнения, *9*, (1973), 3, 581—583.

[7] *I. W. Heidel* and *I. T. Kiguradze:* Oscillatory solutions for a generalised sublinear second order differential equation. Proc. Math. Soc., *38*, (1973), 1, 80—82.

Адрес автора: СССР, г. Тбилиси, 380043, Университетская ул. 2 (Институт прикладной математики Тбилисского государственного университета).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

DIE BEDEUTUNG DER FOKALACHSEN FÜR DIE SYMMETRISCHE ROLLUNG*)

JÜRGEN TÖLKE, Stuttgart

(Eingegangen am 1. Juli 1974)

Nach R. BEREIS [1], O. BOTTEMA [4] und dem Verfasser [7, 8, 9] gelten für die ebene *symmetrische Rollung* eine ganze Reihe kennzeichnender Bedingungen. Sie resultieren aus Beziehungen der Krümmungskreise, der Schmiegparabeln, der Affinnormalen, der hyperoskulierenden Kegelschnitte und der fünfpunktig berührenden Kegelschnitte der Polbahnen im augenblicklichen Pol untereinander bzw. zum Wendekreis, zur Kreispunktkurve, zum Ballschen Punkt und zu den Burmester Punkten.

Von vorneherein haben wir somit eine enge Verbindung zu den (als symmetrisch nachzuweisenden) Polbahnen.

In der vorliegenden Note werden u. a. *Charakterisierungen der symmetrischen Rollung bewiesen, die sich nur auf die Kreispunktkurven* bzw. mittels deren abgeleiteter geometrisch-kinematischer Gebilde *stützen*, so dass wir uns von der engen Beziehung zu den Polbahnen lösen.

Von diesen Kennzeichnungen wollen wir folgende (Satz 3) hervorheben: *Die symmetrischen Rollungen sind dadurch charakterisiert, dass das Fokalzentrum die Ballsche Kurve beschreibt.*

1. Zwei euklidische Ebenen e, e' seien durch eine Bewegung $\beta(t) : e \mapsto e'$ aufeinander abgebildet. Die Bewegung $\beta(t)$ sei dadurch festgelegt, dass in $e(t)$ ein kartesisches Koordinatensystem $\{0(t); e_1(t), e_2(t)\}$ und in e' dessen Bild $\{0'; e_{1'}, e_{2'}\}$ gegeben ist.

Denken wir uns die beiden Ebenen zusammenfallend und fassen die Komponenten des Ortsvektors $\overrightarrow{O'X} := x' = x^{i'}e_{i'}$ bzw. $\overrightarrow{OX} := x = x^i e_i$ eines beliebigen Punktes X zur einspaltigen Matrix

$$\boldsymbol{x}' := \begin{bmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{x} := \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}.$$

*) Die Grundlagen zur vorliegenden Arbeit entstanden 1972 während meines Aufenthaltes an der Escola Politécnica da Universidade Federal de Paraiba, Campina Grande, Brasil.

zusammen, so lässt sich der *einparametrige Bewegungsvorgang* $\beta(t)$ bezüglich des *Rastsystems* $\{0'; e_{i'}\}$ durch die Matrixgleichung

$$\text{(1)} \qquad x' = C'(t)\,(x - c) \quad \text{mit} \quad C'(t) := \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{bmatrix}$$

darstellen, wobei $c := \overrightarrow{OO'}$ gesetzt wurde und $\theta(t)$ den von $e_1(t)$ und $e_{1'}$ eingeschlossenen Winkel bezeichnet[1]).

Nach [8] gilt die *Gangpolbahn* $\mathscr{P}$ das DGL-System

$$\text{(2)} \qquad \ddot{p} = \sigma\dot{p} - \frac{1}{1 - m} B\dot{p}\,,$$

wobei $\sigma = \sigma(t)$ eine „willkürliche“ Funktion ist, m das Verhältnis der Krümmungen der Rast- und Gangpolbahn bezeichnet und für die infinitesimale Bewegungsmatrix $B(t)$

$$\text{(3)} \qquad B := C\dot{C}' = \dot{\theta}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad CC' := E = \text{Einheitsmatrix}$$

gesetzt wurde.

2. Für das folgende benötigen wir einige mit der Kreis- bzw. Mittelpunktkurve[2]) zusammenhängende Begriffsbildungen. Der Ort der momentanen Bahnscheitel — die *Kreispunktkurve* $\mathscr{K}_{1,2}(t, x)$ — hat die Gleichung (vgl. z. B. [9], S. 282)[3])

$$\text{(1)} \qquad K_{1,2} \equiv (\varrho - 1)\left\{[B(x - p), x - p] + \frac{3}{\varrho - 1}[\dot{p}, x - p]\right\}[B\dot{p}, x - p] +$$
$$+ \left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)[B(x - p), x - p]\,[\dot{p}, x - p] = 0\,,$$

wobei wir die Grundgleichung (1.2) berücksichtigt und abkürzend

$$\varrho := (m - 1)^{-1}$$

gesetzt haben. Analog gilt für die Kreispunktkurve des zugehörigen inversen Bewegungsvorganges — die *Mittelpunktkurve* $\mathscr{M}_{1,2}(t, x)$ — die Darstellung

$$\text{(2)} \qquad M_{1,2} \equiv \{(\varrho + 2)[B(x - p), x - p] + 3[\dot{p}, x - p]\}\,[B\dot{p}, x - p] +$$
$$+ \left(\sigma - \left(\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)\right)[B(x - p), x - p]\,[\dot{p}, x - p] = 0\,.$$

---

[1]) Natürlich setzen wir voraus, dass der Bewegungsvorgang hinreichend oft stetig differenzierbar ist.

[2]) In der technischen Literatur spricht man statt von der Kreis- bzw. Mittelpunkturve nach M. Grübler von der *Kreisungs-* bzw. *Angelpunktkurve* [2].

[3]) Unter $[a, b]$ verstehen wir die Determinante der Spaltenvektoren a, b.

Diese Kurven sind vielfach untersuchte „*Fokalkurven*" mit jeweils einem Doppelpunkt. Wir setzen im folgenden voraus, dass die Kreispunktkurven im betrachteten Parameterintervall *nicht zerfallen*[4]).

Bei ihrer Erzeugung spielen die *Fokalachsen* bzw. *Fokalzentren* eine entscheidende Rolle. Mit [3], S. 42 entnimmt man den Formeln (1) und (2) für die Fokalachse $\mathscr{F}_1$ bzw. $\mathscr{F}_1^*$ des Bewegungsvorganges bzw. des zugehörigen inversen Bewegungsvorganges die Darstellung

$$(3) \qquad \mathscr{F}_1 : (\varrho - 1)[B\dot{p}, x - p] + \left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)[\dot{p}, x - p] = 0$$

bzw.

$$\mathscr{F}_1^* : (\varrho + 2)[B\dot{p}, x - p] + \left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)[\dot{p}, x - p] = 0\,.$$

Analog bestimmen sich die Fokalzentren F_1 bzw. F_1^* zu

$$(4) \quad f_1 = p - \frac{3}{2}\left\{(\varrho - 1)^2\dot{\theta}^2 + \left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)^2\right\}^{-1}\left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)\dot{p} - (\varrho - 1)\,B\dot{p}\Big\}$$

bzw.

$$(4') \quad f_1^* = p - \frac{3}{2}\left\{(\varrho + 2)^2\dot{\theta}^2 + \left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)^2\right\}^{-1}\left\{\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)\dot{p} - (\varrho + 2)\,B\dot{p}\Big\}\,.$$

Im weiteren benötigen wir eine berühmte *Erzeugungsweise der* (nicht zerfallenden) *Kreispunktkurve* $\mathscr{K}_{1,2}(t, x)$. Man betrachtet hierzu die Bahntangenten der Punkte von $\mathscr{K}_{1,2}(t, x)$ (für ein festes t) und frägt nach deren Evolute $\mathscr{E}_p$. Sie ist eine Parabel. Im lokalen (affinen) Koordinatensystem

$$(5) \qquad y = p + y_1\dot{p} + y_2 B\dot{p}$$

gilt für die Parabel $\mathscr{E}_p$ die Darstellung (vgl. [6], S. 64)

$$(6) \quad \mathscr{E}_p : \left\{3 + (\varrho - 1)\dot{\theta}^2 y_2 - \left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)y_1\right\}^2 = 4\dot{\theta}^2(1 - \varrho)\left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)y_1 y_2\,.$$

Die Kreispunktkurve selbst ist dann bekanntlich *Fusspunktkurve* der Parabel $\mathscr{E}_p$ zum Pol P.

3. Unter einer ebenen *symmetrischen Rollung* versteht man einen einparametrigen Bewegungsvorgang, bei dem die Krümmungen der Gang- und Rastpolbahn ständig entgegengesetzt gleiche Werte annehmen. Diese im Anschluss an R. Bereis [1] von O. Bottema [4] und dem Verf. [7, 8, 9] genauer untersuchten Bewegungsvorgänge gestatten eine sinnvolle *Verallgemeinerung*: Man spricht nach [8] von einem

[4]) Zerfallsbedingungen werden z. B. in [6], S. 103f. und [2], S. 124f. untersucht.

$S^{(m)}$*-Bewegungsvorgang*, wenn das Verhältnis der Krümmungen der Rast- und Gangpolbahn auf dem betrachteten Parameterintervall konstant $(= m \neq 1)$ ist.

In der kinematischen Abbildung von W. BLASCHKE und J. GRÜNWALD [3, 5] *bedeutet dies, dass die Quasiwindung der Bildkurve des Bewegungsvorganges* im quasielliptischen Parameterraum *konstant* $(= (1 + m)/(1 - m))$ *ist.*

Die symmetrischen Rollungen sind somit $S^{(-1)}$-Bewegungsvorgänge, während nach [8] die *Trochoidenbewegungen* unter den $S^{(m)}$-Bewegungsvorgängen durch

$$\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} = 0 \tag{1}$$

gekennzeichnet sind.

Diese $S^{(m)}$-Bewegungsvorgänge gestatten eine einfache Charakterisierung. Dazu bestimmen wir uns das Doppelverhältnis D, das die Fokalachsen mit den Doppelpunktstangenten $d_1([\dot{p}, x - p] = o)$ und $d_2([B\dot{p}, x - p] = o)$ der Kreispunktkurve bilden. Mit (2.3) findet man sofort

$$D := DV(d_1, d_2; \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_1^*) = \frac{2 - m}{2m - 1}. \tag{2}$$

Somit hängt das Verhältnis der Krümmungen der Gang- und Rastpolbahnen mit dem Doppelverhältnis D durch eine *projektive Transformation* zusammen. Insbesondere haben wir damit in Ergänzung zu den in [8] gegebenen Untersuchungen den

Satz 1. *Unter den Bewegungsvorgängen, für die die Kreispunktkurven nicht zerfallen, sind die* $S^{(m)}$*-Bewegungsvorgänge dadurch charakterisiert, dass die Fokalalchsen mit den Doppelpunktstangenten der Kreispunktkurven stets ein konstantes Doppelverhältnis bilden.*

4. Obiger Satz erhellt bereits die Bedeutung der Fokalachsen für die symmetrische Rollung. Zunächst ergibt sich das

Korollar. *Unter den Bewegungsvorgängen mit nicht zerfallenden Kreispunktkurven sind die symmetrischen Rollungen dadurch gekennzeichnet, dass die Fokalachsen von den Doppelpunktstangenten der Kreispunktkurve stets harmonisch getrennt werden.*

Nach einem in [3] (S. 42) gezeigten Sachverhalt liegt das Fokalzentrum F_1 somit für symmetrische Rollungen auf der Fokalachse $\mathscr{F}_1^*$ des inversen Bewegungsvorganges. Ist dies kennzeichnend? Mit (2.3) und (2.4) folgt, dass F_1 genau dann mit $\mathscr{F}_1^*$ inzidiert, wenn

$$(2\varrho + 1)\left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right) = 0. \tag{1}$$

Für Bewegungsvorgänge mit (3.1) zerfallen die Kreispunktkurven. Übrigens entspricht diesen Bewegungsvorgängen in der kinematischen Abbildung ein *windschiefer Kreis*. Also gilt

Satz 2. *Unter den Bewegungsvorgängen mit nicht zerfallender Kreispunktkurve sind die symmetrischen Rollungen dadurch charakterisiert, dass das Fokalzentrum stets auf der Fokalachse des zugehörigen inversen Bewegungsvorganges liegt.*

Diese Aussage lässt sich – auch hinsichtlich *praktischer Anwendungen* – noch wesentlich verschärfen! Nach [8] gilt nämlich für die Gleichung des *Wendekreises*

$$[B(x - p), x - p] - [\dot{p}, x - p] = 0 , \tag{2}$$

so dass *das Fokalzentrum genau dann auf dem Wendekreis liegt, wenn es sich um eine symmetrische Rollung handelt.* In Verbindung mit Satz 2 haben wir somit den bemerkenswerten

Satz 3. *Unter den Bewegungsvorgängen mit nicht zerfallenden Kreispunktkurven sind die symmetrischen Rollungen dadurch gekennzeichnet, dass das Fokalzentrum die Ballsche Kurve beschreibt.*

Den Gleichungen (2.1) und (2.2) entnimmt man ferner den

Satz 4. *Unter den Bewegungsvorgängen mit nicht zerfallenden Kreispunktkurven sind die symmetrischen Rollungen dadurch charakterisiert, dass die Mittelpunktkurve und die Kreispunktkurve beständig zur Polbahntangente spiegelsymmetrisch sind.*

Etwas stärkere Aussagen lassen sich über die Fokalzentren gewinnen! Für den Verbindungsvektor der beiden Fokalzentren gilt mit (2.4) und (2.4′)

$$f_1^* - f_1 = \tfrac{9}{2}(2\varrho + 1)\left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)\dot{\theta}^2 \left\{\left[(\varrho - 1)^2\,\dot{\theta}^2 + \left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)^2\right]\left[(\varrho + 2)^2\,\dot{\theta}^2 + \left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)^2\right]\right\}\dot{p}$$

mod $B\dot{p}$ und somit wegen (2.4), (2.4′) der

Satz 5. *Unter den Bewegungsvorgängen mit nicht zerfallenden Kreispunktkurven sind die symmetrischen Rollungen durch beständig zur Polbahntangente symmetrisch gelegene Fokalzentren gekennzeichnet.*

Man wird sich fragen, ob die *Affinnormale der Gangpolbahn*

$$\left[\left\{\left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right) - \frac{\dot{\varrho}}{\varrho}\right\}\dot{p} + 3\varrho B\dot{p},\, y - p\right] = 0$$

für spezielle Bewegungsvorgänge stets mit der Fokalachse zusammenfallen kann. Mit (2.3) ergibt sich die dafür notwendige und hinreichende Bedingung zu

$$(3) \qquad (2\varrho + 1)\left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right) = (1 - \varrho)\frac{\dot{\varrho}}{\varrho}$$

und hiermit insbesondere folgender auch *konstruktiv verwertbarer* Sachverhalt:

Satz 6. *Unter den $S^{(m)}$-Bewegungsvorgägen mit nicht zerfallender Kreispunktkurve sind die symmetrischen Rollungen dadurch charakterisiert, dass die Fokalachse die Affinnormale der Gangpolbahn ist.*

Die Gleichung (3) liefert noch mehr! Nach (2.6) hat die Parabel $\mathscr{E}_p$ die Achsenrichtung

$$(1 - \varrho)\dot{\theta}^2\dot{\boldsymbol{p}} + \left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)B\dot{\boldsymbol{p}} .$$

Somit ergibt sich der

Satz 7. *Die Affinnormale der Gangpolbahn fällt genau dann mit der Fokalachse zusammen, wenn sie zur Achse der von den Bahntangenten der Kreispunktkurve eingehüllten Parabel orthogonal ist.*

Da für den *Brennpunkt B_p der Parabel $\mathscr{E}_p$* gemäss (2.4) und (2.6) die Darstellung

$$(4) \qquad \boldsymbol{b}_p = 3\boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{f}_1$$

gilt, haben wir noch den

Satz 8. *Die symmetrischen Rollungen sind dadurch gekennzeichnet, dass die Fokalachse des zugehörigen inversen Bewegungsvorgages stets durch den Brennpunkt derjenigen Parabel geht, in bezug auf welche die Kreispunktkurve Fusspunktkurve zum Momentanpol ist.*

Bemerkung. Nach Satz 3 und dem in [7] (S. 323, Korollar) bewiesenen Sachverhalt verdienen unter den *symmetrischen Rollungen* jene besondere Aufmerksamkeit, *für welche die Schmiegparabel der Gangpolbahn mit der von den Bahntangenten der Kreispunktkurve eingehüllten Parabel kongruent ist.* Man findet für diese symmetrische Rollungen

$$(5) \qquad \sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} = \pm\frac{3}{4} .$$

Hiermit lässt sich (1.2) integrieren. Wir wollen hier nicht weiter darauf eingehen.

Literaturverzeichnis

[1] *R. Bereis:* Symmetrische Rollung, Österr. Ing.-Arch. *7* (1953), 243—246.
[2] *R. Beyer:* Kinematische Getriebelehre, Berlin 1953.
[3] *W. Blaschke* u. *H. R. Müller:* Ebene Kinematik, München 1956.
[4] *O. Bottema:* Characteristic properties of the symmetric plane motion, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. *75* (1972), 145—151.
[5] *J. Grünwald:* Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft, Sb. Ak. Wiss. Wien (math.-nat. Kl) *80* (1911), 677—741.
[6] *M. Krause:* Analysis der ebenen Bewegung, Leipzig 1920.
[7] *J. Tölke:* Symmetrische Rollung bei den nicht parabolischen M-Affinitätsvorgängen, Arch. Math. *21* (1970), 317—325.
[8] *J. Tölke:* Spezielle Bewegungsvorgänge I, Arch. Math. 21 (1970), 429—436.
[9] *J. Tölke:* Kennzeichnungen der symmetrischen Rollung höherer Ordnung, Mech. Mach. Theory *7* (1972), 277—290.

Anschrift des Verfassers: Universität, D-7 Stuttgart - 80, Pfaffenwaldring 57, BRD.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

NOTE ON WEAK EPIMORPHISMS OF 3-NETS WITHOUT SINGULAR POINTS

VÁCLAV HAVEL, Brno

(Received September 12, 1974)

In the present Note we introduce weak epimorphisms of nets (of degree 3, without singular points). We shall consider conditions of regularity and of parallelity-preserving which guarantee that a weak epimorphism of nets is, up to parastrophies, an usual epimorphism. For nets of order at least 3, every weak epimorphism preserves parallelity. For arbitrary nets every weak isomorphism preserves parallelity. So weak epimorphisms are essentially the same as usual epimorphisms. If the image of every line contains at least five points then a surjective join-preserving map of nets must be a weak epimorphism. As a special case we obtain the known fact ([1], Lemma 5.3, pp. 73–74) that every "collineation" of a net of order at least 5 is necessarily "proper". Although the results of this Note are quite elementary we believe that they can be useful for further detailed study of fundamental properties of nets. Finally, let us mention that V. D. Belousov's homotopy of nets (conciding with "weak homomorphism" of nets in our sense) is introduced and studied in [1], pp. 18–19, with some inaccuracy. It was this circumstances which stimulated the origin of this Note.

The *net* (of degree 3, without singular points) is defined here as a triple $(\mathscr{P}, \mathscr{L}, (\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \mathscr{L}_3)$ where $\mathscr{P}$ is a set having at least two elements, $\mathscr{L}$ is a set of some subsets of $\mathscr{L}$ and $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \mathscr{L}_3$ are mutually disjoint subsets of $\mathscr{L}$ the union of which is $\mathscr{L}$, satisfying the following conditions:

(i) $\forall P \in \mathscr{P},\ i = \{1, 2, 3\} \quad \exists!\, l \in \mathscr{L}_i \quad P \in l$,

(ii) $\forall i, j \in \{1, 2. 3\};\ i \neq j \quad \forall a \in \mathscr{L}_i,\ b \in \mathscr{L}_j \quad \#(a \cap b) = 1$,

(iii) $\forall i \in \{1, 2, 3\} \quad \forall a, b \in \mathscr{L}_i;\ a \neq b \quad a \cap b = \emptyset$.

Elements of $\mathscr{P}$ are called *points*, elements of $\mathscr{L}$ are called *lines*, the sets $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \mathscr{L}_3$ are called *first*, *second* and *third pencil*. Lines a, b of the same pencil are called *parallel* (notation: $a \parallel b$), lines a, b from distinct pencils are called *non-parallel* (notation: $a \nparallel b$). Points P, Q are termed *joinable* if they lie on the same line; if moreover $P \neq Q$ then this line is called *the join of* P, Q and is denoted by PQ.

The common point of non-parallel lines a, b is called the *intersection point* and is denoted by $a \sqcap b$. A set of points is said to be *collinear* if all its points lie on the same line. For any two lines l_1, l_2 one verifies easily that $\# l_1 = \# l_2$; the common cardinality of lines of the net is called *order* of the net. If $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ are nets we shall put standardly $\mathcal{N} =: (\mathcal{P}, \mathcal{L}, (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3))$, $\mathcal{N}' =: (\mathcal{P}', \mathcal{L}', (\mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2, \mathcal{L}'_3))$.

Now let $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ be nets and $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ a surjective map. Then we say that π is

1) *join-preserving* if for any joinable points P, Q also P^π, Q^π are joinable,

2) *collinearity-preserving* (or a *weak epimorphism* of $\mathcal{N}$ onto $\mathcal{N}'$) if to every $l \in \mathcal{L}$ there is an $l^\wedge \in \mathcal{L}'$ such that $\{x^\pi \mid X \in l\} \subseteq l^\wedge$,

3) a *weak isomorphism* of $\mathcal{N}$ onto $\mathcal{N}'$ if it is a bijective weak epimorphism,

4) an *epimorphism* of $\mathcal{N}$ onto $\mathcal{N}'$ if for every $i \in \{1, 2, 3\}$ and every $l \in \mathcal{L}_i$ there is an $l^\wedge \in \mathcal{L}'_i$ such that $\{X^\pi \mid X \in l\} \in l^\wedge$.

5) an *isomorphism* of $\mathcal{N}$ onto $\mathcal{N}'$ if it is a bijective epimorphism,

6) *line-preserving* if $\{X^\pi \mid X \in l\} \in \mathcal{L}'$ whenever $l \in \mathcal{L}$,

7) *regular* if $\# \{X^\pi \mid X \in l\} \geqq 2$ whenever $l \in \mathcal{L}$.

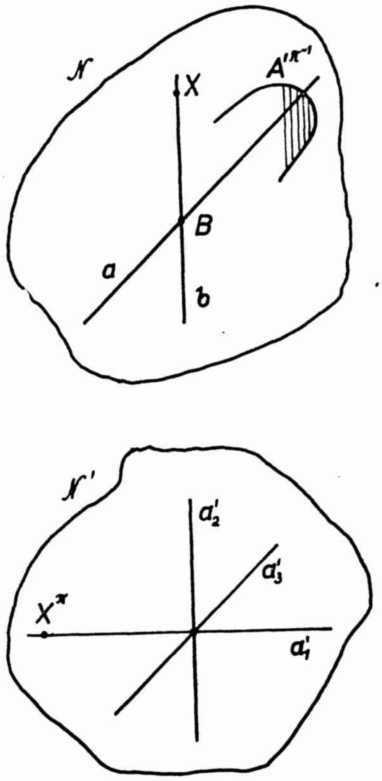


Fig. 1
(to the proof of Proposition 1).

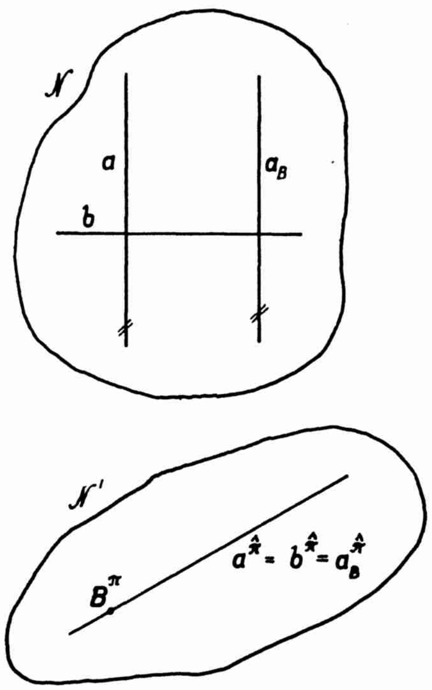


Fig. 2
(to the first part of the proof of Proposition 2).

Let π be a regular weak epimorphism of $\mathcal{N}$ onto $\mathcal{N}'$. Then for every $l \in \mathcal{L}$ there is exactly one $l^\wedge \in \mathcal{L}'$ such that $\{X^\pi \mid X \in l\} \subseteq l^\wedge$. Thus $l \mapsto l^\wedge$ is a map of $\mathcal{L}$ onto $\mathcal{L}'$. This map will be denoted by $\hat{\pi}$. If π is a regular weak epimorphism of $\mathcal{N}$ onto $\mathcal{N}'$ then π is said to be *parallelity-preserving* or *non-parallelity-preserving*, if $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow l_1^{\hat{\pi}} \parallel l_2^{\hat{\pi}}$ or $l_1 \nparallel l_2 \Rightarrow l_1^{\hat{\pi}} \nparallel l_2^{\hat{\pi}}$ respectively.

Proposition 1. *Let $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ be nets of order at least 3 and let $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ be a weak epimorphism of $\mathcal{N}$ onto $\mathcal{N}'$. Then π is regular.*

Proof. Let there exist a line $a \in \mathcal{L}$ such that $\{X^\pi \mid X \in a\} = \{A'\}$ for some $A' \in \mathcal{P}'$. For every $X \in \mathcal{P} \setminus A'^{\pi^{-1}}$ take a line $b \in \mathcal{L}$ such that $X \in b \nparallel a$. Further let $B := a \sqcap b$. As π is collinearity-preserving and $X, B \in b$ so X^π, $B^\pi(=A')$ must also lie on the same line and this line is one of the three lines a_1', a_2', a_3' through A'. Consequently $\{X^\pi \mid X \in \mathcal{P}\} \subseteq a_1' \cup a_2' \cup a_3'$, contrary to the hypothesis that π is surjective and $\mathcal{N}'$ has order greater than 2. ■

Proposition 2. *Let $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ be nets and let $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ be a regular weak epimorphism of $\mathcal{N}$ onto $\mathcal{N}'$. Then π preserves parallelity if and only if it preserves non parallelity.*

Proof. First let π preserve parallelity. We shall proceed indirectly supposing the existence of non-parallel lines $a, b \in \mathcal{L}$ such that $a^{\hat{\pi}} \parallel b^{\hat{\pi}}$. It follows $a^{\hat{\pi}} = b^{\hat{\pi}}$. We take an arbitrary point $B \in b$ and consider the line a_B such that $B \in a_B \parallel a$. Then $B^\pi \in a_B^{\hat{\pi}}$ so that $a_B^{\hat{\pi}} = a^{\hat{\pi}}$. From this we get $\{X^\pi \mid X \in \mathcal{P}\} \subseteq a^{\hat{\pi}}$ which contradicts the surjectivity of π. Secondly let π preserve non-parallelity. For indirect proof suppose the existence of parallel lines $a, b \in \mathcal{L}$ such that $a^{\hat{\pi}} \nparallel b^{\hat{\pi}}$. Then there is a point $A \in a$ such that $A^\pi \in a^{\hat{\pi}} \setminus \{a^{\hat{\pi}} \sqcap b^{\hat{\pi}}\}$. Let c, d be the remaining lines through A. Then $(b \sqcap c)^\pi, (b \sqcap d)^\pi \in b^{\hat{\pi}} \setminus \{(a \sqcap b)^\pi\}$ are distinct points, each of them being joinable with A^π. However for both lines $A^\pi(b \sqcap c)^\pi$, $A^\pi(b \sqcap d)^\pi$ only one possibility remains, namely the line through A^π distinct to $a^{\hat{\pi}}$ and non-parallel to $b^{\hat{\pi}}$, a contradiction. ■

Proposition 3. *Let $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ be nets and let $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ be a regular weak epimorphism of $\mathcal{N}$ onto $\mathcal{N}''$ which preserves parallelity. Then there is a permutation σ of the set $\{1, 2, 3\}$ such that π is an epimorphism of $\mathcal{N}$ onto $(\mathcal{P}', \mathcal{L}', (\mathcal{L}'_{1\sigma}, \mathcal{L}'_{2\sigma}, \mathcal{L}'_{3\sigma}))$*

Proof. An immediate corollary of Proposition 2. ■

Proposition 4. *Let $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ be nets of order at least 3 and let $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ be a weak epimorphism of $\mathcal{N}$ onto $\mathcal{N}'$. Then π preserves non-parallelity.*

Proof. By Proposition 1, π is regular and we can work with the map $\hat{\pi}$. Suppose, on the contrary, that there exist non-parallel lines $a, c \in \mathcal{L}$ such that $a^{\hat{\pi}} \parallel c^{\hat{\pi}}$. Consequently, it must be $a^{\hat{\pi}} = c^{\hat{\pi}}$.

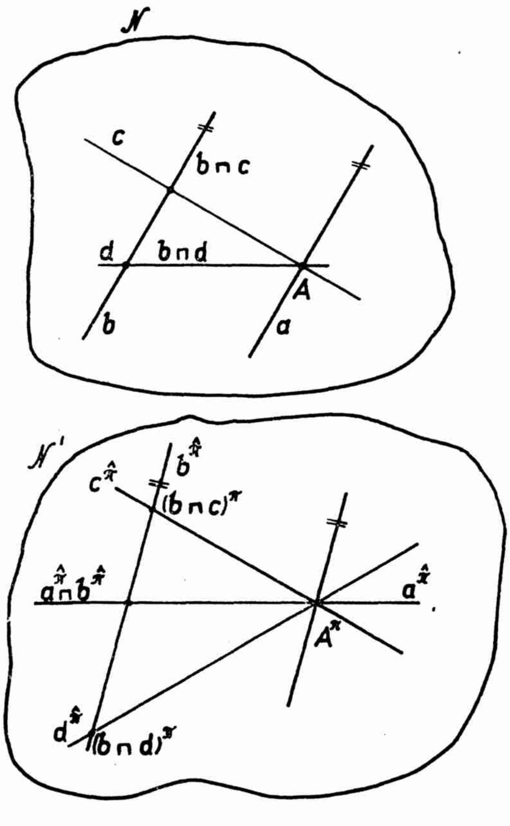


Fig. 3
(to the second part of the proof of Proposition 2).

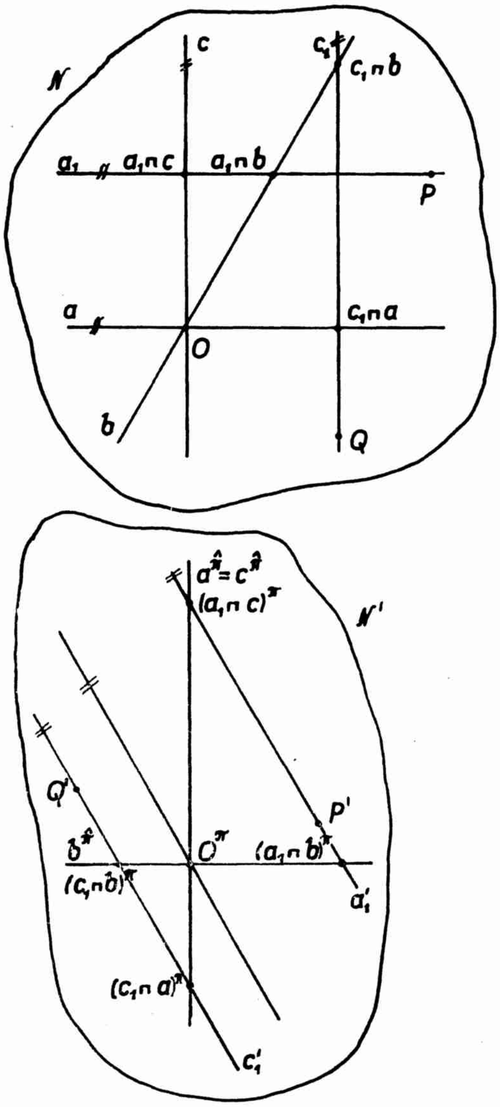


Fig. 4
(to the first part of the proof of Proposition 4).

Let b be the remaining line through $a \sqcap c$ $(=: 0)$. Now we shall distinguish two cases:

First let $b^{\hat{\pi}} \neq a^{\hat{\pi}}$. Taking a point $P' \in \mathscr{P}$ outside the lines through O^{π} and choosing one of its pre-images $P \in P'^{\pi^{-1}}$ we can deduce the following: The image $a_1^{\hat{\pi}}$ of the line a_1 such that $P \in a_1 \parallel a$ has to be equal to the line a_1' such that $P' \in a_1' \nparallel a^{\hat{\pi}}, b^{\hat{\pi}}$ (which follows by $a_1 \nparallel b, c$ from the fact that the points $(a_1 \sqcap b)^{\pi}$, $(a_1 \sqcap c)^{\pi}$ must lie on $a_1^{\hat{\pi}}$ so that the lines through P' parallel to $a^{\hat{\pi}}$, $b^{\hat{\pi}}$ cannot be equal to $a_1^{\hat{\pi}}$ and a_1'

remains the only possibility for $a_1^{\hat{\pi}}$ *). Now repeat the same reasoning for a point $Q' \in \mathscr{P}'$ lying outside the lines through O^π and outside a'_1, (such a point must exist if the order of $\mathscr{N}$ is greater than 2): Let $Q \in Q'^{\pi^{-1}}$ and $c_1 \in \mathscr{L}$ be such that $Q \in c_1 \parallel c$. Further denote by $c'_1 \in \mathscr{L}'$ the line through Q' non-parallel to $a^{\hat{\pi}}$, $b^{\hat{\pi}}$. Then $c_1^{\hat{\pi}} = c'_1$. But $a_1 \nparallel c_1$ and the point $a_1 \sqcap c_1$ cannot have its image under π because this image would lie simultaneously on a'_1 and on c'_1 which is impossible as a'_1, c'_1 are distinct and parallel.

In the remaining case let $a^{\hat{\pi}} = b^{\hat{\pi}} = c^{\hat{\pi}}(=: d')$. We shall start from a point $P' \in \mathscr{P}' \setminus a^{\hat{\pi}}$. We choose a point $P \in \mathscr{P}'^{\pi^{-1}}$ (which is not contained in $a \cup b \cup c$).

Let $a_2 \parallel a$, $b_2 \parallel b$, $c_2 \parallel c$ be lines through P. Then the lines $a_2^{\hat{\pi}}$, $b_2^{\hat{\pi}}$, $c_2^{\hat{\pi}}$ cannot be mutually distinct (because each of them must intersect d' as a_2 intersects b, b_2 intersects c and c_2 intersects a), nor can just two of them be equal (because this contradicts the first part of the proof). So $a_2^{\hat{\pi}} = b_2^{\hat{\pi}} = c_2^{\hat{\pi}}(=: e') \nparallel d'$. We repeat the same argument for a point $Q' \in \mathscr{P}'$ outside $d' \cup e'$. After choosing a point $Q \in Q'^{\pi^{-1}}$ (which must lie outside $a \cup b \cup c \cup a_2 \cup b_2 \cup c_2$) we consider the lines $a_3 \parallel a$, $b_3 \parallel b$, $c_3 \parallel c$ through Q and obtain $a_3^{\hat{\pi}} = b_3^{\hat{\pi}} = c_3^{\hat{\pi}}(=: f') \nparallel d', e'$. Finally we repeat the same argument for a point $R' \in \mathscr{P}'$ outside $d' \cup e' \cup f'$ (which is possible as $\mathscr{N}$ has order greater than 2). We choose a point $R \in R'^{\pi^{-1}}$ (which lies outside $a \cup b \cup$ $\cup\, c \cup a_2 \cup b_2 \cup c_2 \cup a_3 \cup b_3 \cup c_3$) and consider the line $a_4 \parallel a$, $b_4 \parallel b$, $c_4 \parallel c$ through R. Now it results $a_4^{\hat{\pi}} = b_4^{\hat{\pi}} = c_4^{\hat{\pi}} \nparallel d', e' f'$, a contradiction. ∎

Proposition 5. *Let $\mathscr{N}$, $\mathscr{N}'$ be nets and let $\pi : \mathscr{P} \to \mathscr{P}'$ be a regular weak epimorphism of $\mathscr{N}$ onto $\mathscr{N}'$ which preserves parallelity. Then π is line-preserving.*

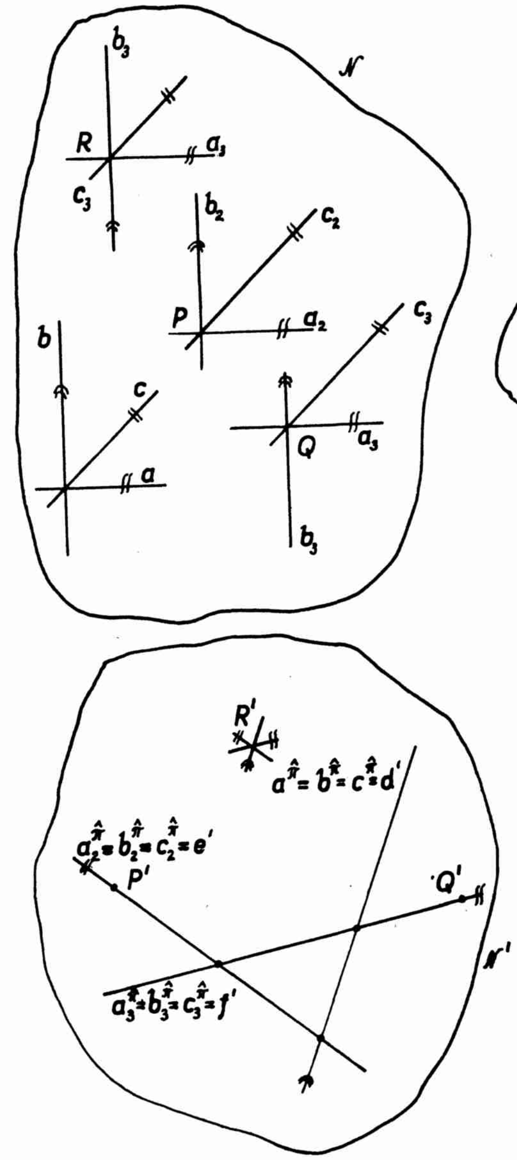
Proof. As π is regular we can deal with the mapping $\hat{\pi}$. Suppose, on the contrary, that there exist a point $A' \in \mathscr{P}'$ and a line $a \in \mathscr{L}$ such that $A' \in a^{\hat{\pi}}$ but $A'^{\pi^{-1}} \cap a = \emptyset$. Take an arbitrary point $A \in A'^{\pi^{-1}}$ and denote by $a_1 \in \mathscr{L}_1$, $a_2 \in \mathscr{L}_2$, $a_3 \in \mathscr{L}_3$ the lines through A. Without loss of generality let $a \parallel a_1$. Then $a^{\hat{\pi}} \parallel a^{\hat{\pi}}$. Putting $A_2 :=$ $:= a_2 \sqcap a$, $A_3 := a_3 \sqcap a$ we get $a^{\hat{\pi}} = a_3^{\hat{\pi}}$ (since $A^\pi = A' \neq A_2^\pi \in a_1^{\hat{\pi}}$) and $a^{\hat{\pi}} = a_3^{\hat{\pi}}$ (since $A^\pi = A' \neq A_3^\pi \in a^{\hat{\pi}}$), a contradiction to parallelity-preserving. ∎

Proposition 6. *Let $\mathscr{N}$, $\mathscr{N}'$ be nets and let $\pi : \mathscr{P} \to \mathscr{P}'$ be a weak isomorphism of $\mathscr{N}$ onto $\mathscr{N}'$. Then π preserves parallelity.*

Proof. With regard to Propositions 1, 2, 4 we could restrict ourselves to nets $\mathscr{N}'$ with order 2 but we shall give a proof which is independent on order of $\mathscr{N}'$. The mapping π under consideration is necessarily regular (as π is bijective) so that we can deal with the mapping $\hat{\pi}$. Suppose, contrary to the conclusion of Proposition 6, that there are parallel lines $a, b \in \mathscr{L}$ such that $a^{\hat{\pi}} \nparallel b^{\hat{\pi}}$ and put $C' := a^{\hat{\pi}} \sqcap b^{\hat{\pi}}$.

We shall distinguish two cases: First let $C \notin a \cup b$. Let $c \in \mathscr{L}$ be a line through C non-parallel to a. Putting $C_a := a \sqcap c$, $C_b := b \sqcap c$ we see that C, C_a, C_b are $X \in x \parallel a$. Further set $X_c := c \sqcap x$, $X_d := d \sqcap x$. Then $X_c \neq X_d$ so that also

*) This important step was found by J. Klouda. The author thaks him for his kindly communicating it and also for further helpful comments to this article.



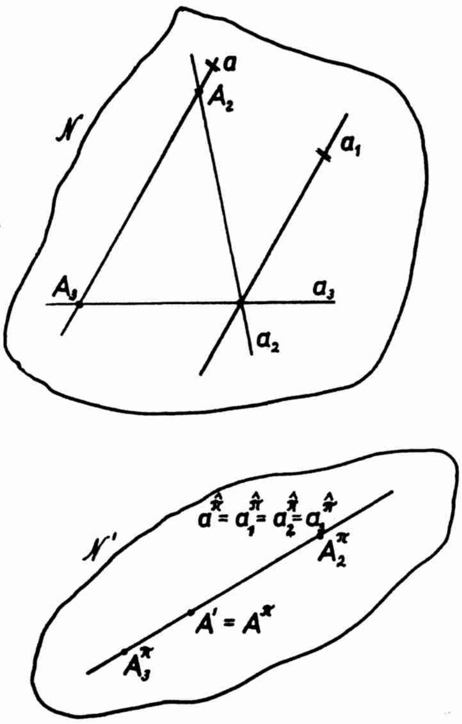


Fig. 6
(to the proof of Proposition 5).

Fig. 5 (to the second part of the proof Proposition 4).

mutually different so that also C^{π}, C_a^{π}, C_b^{π} are mutually different. But $\{C, C_a, C_b\}$ is a collinear set whereas $\{C^{\pi}, C_a^{\pi}, C_b^{\pi}\}$ is not, a contradiction.

Secondly let $C \in a \cup b$. Without loss of generality let $C \in a$. Denote by $c, d \in \mathscr{L}$ the two remaining lines through C and put $C_b := b \sqcap c$, $C_d := b \sqcap d$. Then C, C_b, C_d are pairwise different so that also C^{π}, C_b^{π}, C_d^{π} are pairwise different points on the line $b^{\hat{\pi}}$. Thus $b^{\hat{\pi}} = c^{\hat{\pi}} = d^{\hat{\pi}}$. For every $X \in \mathscr{P} \setminus a$ let $x \in \mathscr{L}$ be such that

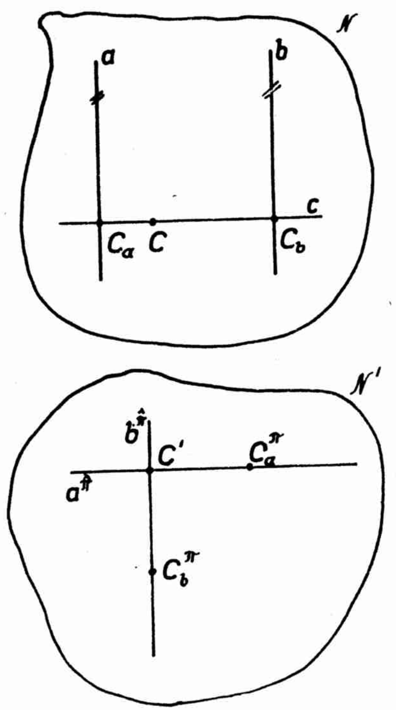


Fig. 7

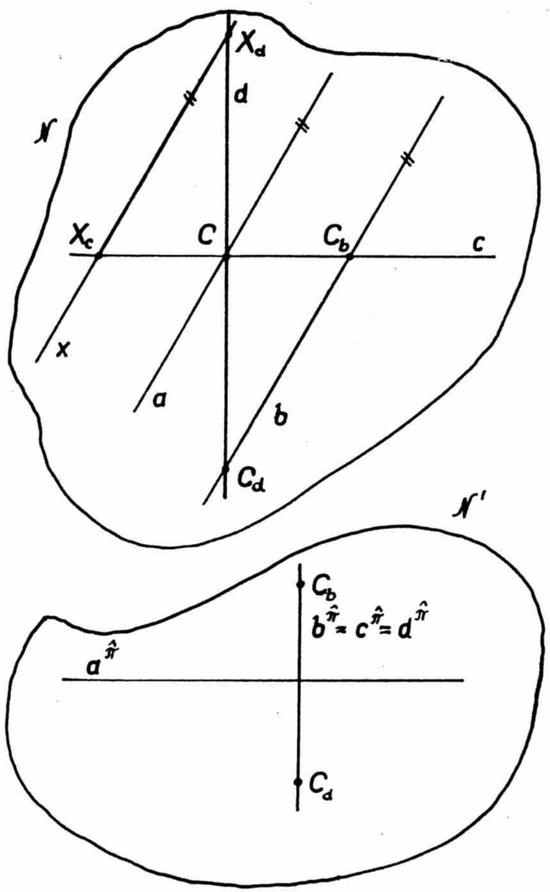


Fig. 8

(to the proof of Proposition 6)

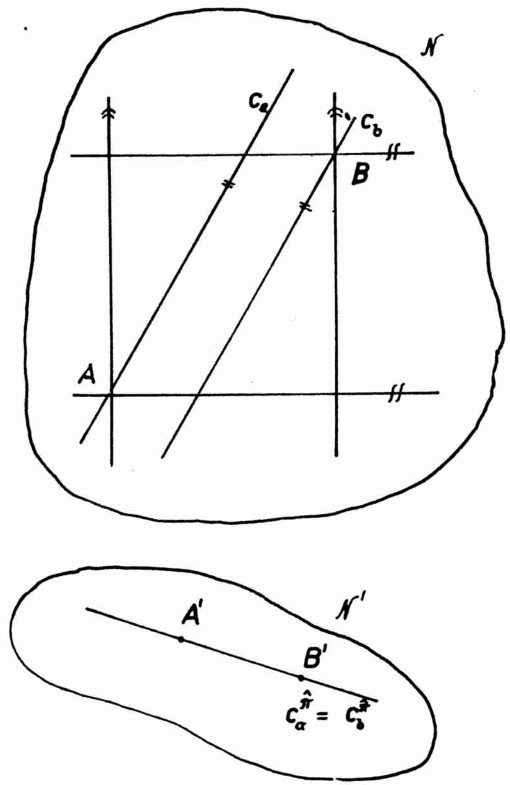


Fig. 9

(to the proof of Proposition 7).

$X^{\pi}_{c} \neq X^{\pi}_{d}$, where $X^{\pi}_{c} \in c^{\hat{\pi}} = b^{\hat{\pi}}$, $X^{\pi}_{d} \in d^{\hat{\pi}} = b^{\hat{\pi}}$. Consequently $\{X^{\pi} \mid X \in \mathscr{P}\} \subseteq a^{\hat{\pi}} \cup b^{\hat{\pi}}$, a contradiction to surjectivity of π. ■

Proposition 7. *Let $\mathscr{N}$, $\mathscr{N}'$ be nets and let $\pi : \mathscr{P} \to \mathscr{P}'$ be a weak isomorphism of $\mathscr{N}$ onto $\mathscr{N}'$. Then $\pi^{-1} : \mathscr{P}' \to \mathscr{P}$ is a weak isomorphism of $\mathscr{N}'$ onto $\mathscr{N}$.*

Proof. Let there exist joinable points $A', B' \in \mathscr{P}'$ such that $A := A'^{\pi^{-1}}$, $B := B'^{\pi^{-1}}$ are not joinable. Then we see that there are parallel lines $c_a, c_b \in \mathscr{L}$ such that $A \in c_a$, $B \in c_b$, $c_a^{\hat{\pi}} = c_b^{\pi} = A'B'$, a contradiction to injectivity of π. So π^{-1} is join-preserving. Now let there exist a collinear set $\{A', B', C'\} \leqq \mathscr{P}'$ such that for $A := A'^{\pi^{-1}}$, $B := B'^{\pi^{-1}}$, $C := C'^{\pi^{-1}}$ the set $\{A, B, C\}$ is not collinear. Then, by the preceding A, B; A, C; B, C are joinable and the lines AB, AC, BC must belong to distinct pencils although they have the same image under $\hat{\pi}$. This yields a contradiction to non-parallelity-preserving. Consequently for each collinear set $Q' \subset \mathscr{P}'$ the set $\{X^{\pi^{-1}} \mid X \in Q'\}$ is collinear, too. ■

Theorem 1. *Let $\mathscr{N}$, $\mathscr{N}'$ be nets and $\pi : \mathscr{P} \to \mathscr{P}'$ a weak epimorphism of $\mathscr{N}$ onto $\mathscr{N}'$. If $\mathscr{N}'$ is of order greater than 2 or if π is a weak isomorphism of $\mathscr{N}$ onto $\mathscr{N}'$ then there is a permutation σ of $\{1, 2, 3\}$ such that π is an epimorphism or an isomorphism of $\mathscr{N}$ onto $(\mathscr{P}', \mathscr{L}', (\mathscr{L}'_{1\sigma}, \mathscr{L}'_{2\sigma}, \mathscr{L}'_{3\sigma}))$. In both cases π is line-preserving, in the latter case π^{-1} is an isomorphism of $(\mathscr{P}', \mathscr{L}', (\mathscr{L}'_{1\sigma}, \mathscr{L}'_{2\sigma}, \mathscr{L}'_{3\sigma}))$ onto $\mathscr{N}$.*

Proof. A corollary of Propositions 1–7. ■

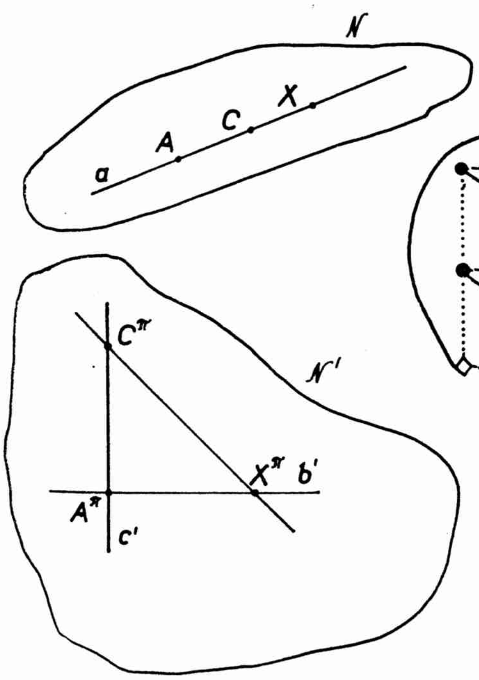


Fig. 10
(to the proof of Proposition 8).

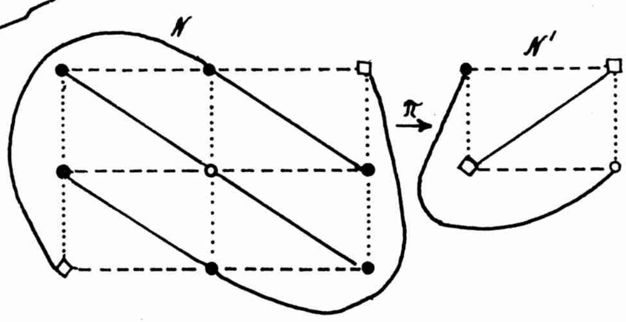


Fig. 11
(to the final Remark).

Proposition 8. *Let $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ be nets and let $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ be a surjective join-preserving mapping satisfying the condition $\#\{X^\pi \mid X \in l\} \geqq 5$ for all $l \in \mathcal{L}$. Then π is a weak epimorphism of $\mathcal{N}$ onto $\mathcal{N}'$.*

Proof. Let there exist, on the contrary, a line $a \in \mathcal{L}$ such that $\{X^\pi \mid X \in a\}$ is not collinear. We shall start with an arbitrary point $A \in a$. Then for all $X \in a \setminus (A^\pi)^{\pi^{-1}}$ the images X^π lie on the lines through A^π and on every such line it lies at most one point of $\{X^\pi \mid X \in a\} \setminus \{A^\pi\}$. Thus let $b' \in \mathcal{L}'$ be a line through A^π. Then there exists a point $C \in a$ such that $C^\pi \notin b'$. Let $c' := A^\pi C^\pi$. Here $c' \neq b'$ and for every $X \in a \setminus (A^\pi)^{\pi^{-1}}$ the image X^π is joinable with C^π. The line $X^\pi C^\pi$ is different from c' and non parallel to b' and thus it is only one possibility for it. Consequently they are at most $3.1 + 1 = 4$ possibilities for points X^π where $X \in a$, contrary to the hypothesis $\#\{X^\pi \mid X \in a\} \geqq 5$. ■

Proposition 9. *Let $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ be nets or orders at least 5 and let $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ be a bijective join-preserving mapping. Then π is a weak isomorphism of $\mathcal{N}$ onto $\mathcal{N}'$.*

Proof. Follows immediately from Proposition 8. ■

Proposition 10. *Let $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ be nets and let $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ be a bijective join-preserving mapping. Then $\pi^{-1} : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ is also join-preserving.*

Proof. If order of $\mathcal{N}'$ is at least 5, then the conclusion follows from Propositions 9 and 7. Thus it would suffice to restrict the proof to nets $\mathcal{N}'$ of order less than 5, but we give a proof for all nets of finite order, say n. In every net of order n there are just $n^2(\frac{3}{2}) \cdot (n - 1)$ couples (we mean not ordered couples) of joinable points. As the mapping $\{X, Y\} \mapsto \{X^\pi, Y^\pi\}$ of the set $\{\{X, Y\} \mid X, Y \in \mathcal{P}; X, Y$ distinct and joinable$\}$ into the set $\{\{X', Y'\} \mid X', Y' \in \mathcal{P}$ distinct and joinable$\}$ is bijective we see that there are no joinable points $A', B' \in \mathcal{P}'$ such that $A'^{\pi^{-1}}, B'^{\pi^{-1}}$ are not joinable. ■

Theorem 2. *Let $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ be nets and let $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ be join-preserving mapping. If $\#\{x^\pi \mid X \in l\} \geqq 5$ for all $l \in \mathcal{L}$ then there is a permutation σ of $\{1, 2, 3\}$ such that π is an epimorphism of $\mathcal{N}$ onto $(\mathcal{P}', \mathcal{L}', (\mathcal{L}'_{1\sigma}, \mathcal{L}'_{2\sigma}, \mathcal{L}'_{3\sigma}))$.*

Proof. A consequence of Proposition 8 and Theorem 1. ■

Remark. There are simple examples of "proper" weak epimorphisms of nets in which necessarily the image net is of order 2.

Probably the simplest is the following (which is easily seen from the figure 11).

Reference

[1] *Belousov, Valentin Danilovič*: Algebraic Nets and Quasigroups (in Russian), Kišinev 1971.

Author's address: 602 00 Brno, Hilleho 6 (Vysoké učení technické).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH JUMPING NONLINEARITIES

SVATOPLUK FUČÍK, Praha

(Received August 30, 1974)

1. INTRODUCTION

Consider the nonlinear two point boundary value problem

$$
\begin{aligned}
(1.1)\qquad & u''(\tau) + \psi(u(\tau)) = p(\tau)\,, \\
& u(0) = u(\pi) = 0\,,
\end{aligned}
$$

where ψ is a continuous real-valued function defined on $(-\infty, \infty)$. If

$$\lim_{\xi \to \infty} \frac{\psi(\xi)}{\xi} = \lim_{\xi \to -\infty} \frac{\psi(\xi)}{\xi} = A$$

we shall say that the nonlinearity ψ is not jumping. The results obtained under various assumptions may be summarized as follows:

I. If $A = \infty$ (see [3]) or $A \neq n^2$, n is positive integer (see e.g. [6], [10]) then (1.1) has a solution for any right hand side p.

The assumption $A \neq n^2$ means that A is not an eigenvalue of the boundary value problem

$$
\begin{aligned}
(1.2)\qquad & u''(\tau) + \lambda\, u(\tau) = 0\,, \\
& u(0) = u(\pi) = 0\,.
\end{aligned}
$$

II. If $A = n^2$ (see e.g. [4], [5], [9], [13]) then necessary and sufficient conditions on p have been given for (1.1) to be solvable.

If

$$\lim_{\xi \to \infty} \frac{\psi(\xi)}{\xi} \neq \lim_{\xi \to -\infty} \frac{\psi(\xi)}{\xi}$$

we shall say that the nonlinearity ψ is jumping.

III. Under some assumptions it is proved (see [10], for partial differential analogue see [8]) that if

$$n^2 < \lim_{\xi \to \infty} \frac{\psi(\xi)}{\xi} < (n+1)^2 ,$$

$$n^2 < \lim_{\xi \to -\infty} \frac{\psi(\xi)}{\xi} < (n+1)^2$$

(n is positive integer) then (1.1) is solvable for any right hand side p.

In this case the nonlinearity may be jumping but it does not jump over an eigenvalue of (1.2). To the author's best knowledge, the first result about solvability of (1.1) with the nonlinearity jumping over an eigenvalue of (1.2) is proved by A. Ambrosetti and G. Prodi (see [1], for partial differential analogue see [2], a generalization is given in [12]).

IV (see [1]). Let ψ be a continuous function of class C^2 satisfying the following conditions:

(i) $\psi(0) = 0$;

(ii) $\psi''(\xi) > 0, \quad \xi \in (-\infty, \infty)$;

(iii) $0 < \lim\limits_{\xi \to -\infty} \dfrac{\psi(\xi)}{\xi} < 1$;

(iv) $1 < \lim\limits_{\xi \to \infty} \dfrac{\psi(\xi)}{\xi} < 4$.

Then there exists in $C\langle 0, \pi \rangle$ a closed connected C^1-manifold M of codimension 1, such that $C\langle 0, \pi \rangle \setminus M$ consists of exactly two connected components A_1, A_2 with the following properties:

(a) if $p \in A_1$ then (1.1) has no solution;

(b) if $p \in A_2$ then (1.1) has exactly two solutions;

(c) if $p \in M$ then (1.1) has a unique solution.

In the last case the nonlinearity ψ jumps over the least eigenvalue of (1.2). This paper deals with the following cases:

(α) the nonlinearity ψ jumps over an eigenvalue of (1.2) which is not the least (see 2.15, 2.17);

(β) the nonlinearity jumps over more than one eigenvalue of (1.2) (see 2.18);

(γ) the nonlinearity jumps from an eigenvalue of (1.2) to another one (see 2.16);

(δ) the nonlinearity jumps off an eigenvalue (but not to another) (see 2.15–2.17, 3.9–3.11).

The paper serves also as an example that the assumptions (iii) and (iv) are essential for the assertion in IV since if the nonlinearity jumps over an eigenvalue which is not the least we obtain solvability of (1.1) for arbitrary right hand side.

The proofs are based on the properties of the Leray-Schauder degree which are for the reader's convenience recalled in 2.2. Routine and tedious calculations play by no means a merely trifling part in the proofs. From this point of view it seems that it is not possible to obtain the partial differential analogue of the results given here in the same way. Thus the problem of solvability of boundary value problems for nonlinear partial differential equations with a nonlinearity of one of the types $(\alpha)-(\delta)$ remains open. On the other hand, the partial differential analogues of I–IV (except the case $A = \infty$) are known. Other open problems are formulated in the ends of both sections.

2. JUMPING OUTSIDE THE LEAST EIGENVALUE

2.1. Notation and terminology. Unless otherwise stated, we shall suppose that X and Y are real Banach spaces with the norms $\| \|_X$ and $\| \|_Y$, respectively. Let F be a mapping with the domain $D \subset X$ and values in Y ($F : D \subset X \to Y$). Then F is said to be completely continuous on D if for each bounded subset $M \subset D$, $F(M)$ is compact and F is continuous on D.

2.2. Leray-Schauder degree. Let $K_\varrho = \{x \in X;\ \|x\|_X < \varrho\}$ and let $F : \bar{K}_\varrho \subset X \to X$ (the bar denotes the closure) be a completely continuous mapping. Denote by Id the identity mapping in X, i.e. $Id(x) = x$ for every $x \in X$. Let $x - F(x) \neq 0_X$ (0_X means the zero element of X) for each $x \in X$ with $\|x\|_X = \varrho$. Then it is possible to define the Leray-Schauder degree $d[Id - F; K_\varrho, 0_X]$ of the mapping $Id - F$ with respect to K_ϱ and the point 0_X so that (see e.g. [7]):

I. $d[Id; K_\varrho, 0_X] = 1$;

II. $d[Id - F; K_\varrho, 0_X] \neq 0$ implies that there exists at least one $x_0 \in K_\varrho$ such that $x_0 = F(x_0)$.

III. Let $G : \bar{K}_\varrho \subset X \to X$ be also a completely continuous mapping. Suppose that for each $x \in \bar{K}_\varrho$, $\|x\|_X = \varrho$ and $t \in \langle 0, 1\rangle$ it is $x - F(x) - t\,G(x) \neq 0_X$. Then $d[Id - F; K_\varrho, 0_X] = d[Id - F - G; K_\varrho, 0_X]$.

IV. Suppose that for arbitrary $k \in \langle 0, 1\rangle$ the equation

$$x = \frac{1}{1+k} F(x) - \frac{k}{1+k} F(-x)$$

has only the trivial solution. Then

$$d[Id - F; K_\varrho, 0_X] \neq 0 .$$

I – III imply immediately

V (Schauder fixed point theorem). *Let* $F(\overline{K}_\varrho) \subset \overline{K}_\varrho$. *Then there exists at least one* $x_0 \in \overline{K}_\varrho$ *such that* $F(x_0) = x_0$.

2.3. Lemma. *Let J be an isomorphism between X and Y. Let* $S : X \to Y$, $R : X \to Y$ *be completely continuous mappings. Suppose that there exist* $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $\gamma \in \langle 0, 1)$ *such that*

$$\|R(x)\|_Y \leqq \alpha + \beta \|x\|_X^\gamma \tag{2.3.1}$$

for every $x \in X$.

For every $x \in X$ *and* $t \geqq 0$, *let*

$$S(tx) = t\,S(x)\,. \tag{2.3.2}$$

Then the equation

$$J(x) - S(x) + R(x) = y \tag{2.3.3}$$

is solvable for any right hand side $y \in Y$ *provided the equations*

$$J(x) = \frac{1}{1+k} S(x) - \frac{k}{1+k} S(-x) \tag{2.3.4}$$

have for each $k \in \langle 0, 1\rangle$ *the trivial solution only.*

Proof. Since the operator J is an isomorphism between X and Y it is sufficient to show that the equation

$$x - J^{-1} S(x) + J^{-1} R(x) = \eta \tag{2.3.5}$$

is solvable for any $\eta \in X$, where J^{-1} is the inverse of J. First of all we notice that there exists $c > 0$ such that

$$\|x - J^{-1} S(x)\|_X \geqq c\|x\|_X \tag{2.3.6}$$

for every $x \in X$. Let $\eta \in X$ be arbitrary but fixed. There exists $\varrho > 0$ such that

$$c\varrho > (\alpha + \beta\varrho^\gamma)\,\|J^{-1}\| + \|\eta\|_X\,. \tag{2.3.7}$$

Put $K_\varrho = \{x \in X;\ \|x\|_X < \varrho\}$. It is easy to see that the mappings $J^{-1}S$ and $J^{-1}R$ are completely continuous. From (2.3.6), (2.3.7) according to III (see 2.2) we have

$$\mathrm{d}[x - J^{-1} S(x) + J^{-1} R(x) - \eta;\ K_\varrho, 0_X] = \mathrm{d}[x - J^{-1} S(x);\ K_\varrho, 0_X]\,.$$

Now it is sufficient to show (see the property II from 2.2) that

$$\mathrm{d}[x - J^{-1} S(x);\ K_\varrho, 0_X] \neq 0\,.$$

This fact follows immediately from our assumption that the equations (2.3.4) have for each $k \in \langle 0, 1 \rangle$ only the trivial solution and form the property IV of the Leray-Schauder degree.

2.4. Notation. In the sequel, $L_p(0, \pi)$ $(p \geqq 1)$ will denote the space of all measurable real-valued functions u such that $|u|^p$ is integrable, with the usual norm

$$\|u\|_{L_p} = \left\{\int_0^\pi |u(\tau)|^p \, \mathrm{d}\tau\right\}^{1/p}$$

and with the inner product

$$(u, v) = \int_0^\pi u(\tau)\, v(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

if $p = 2$.

For $k = 0, 1, 2, \ldots$, $C^k\langle 0, \pi \rangle$ will denote the space of all functions which are k-times continuously differentiable on $(0, \pi)$ and such that the derivatives can be extended continuously to $\langle 0, \pi \rangle$. With the usual norm

$$\|u\|_{C^k} = \sup_{0 \leqq r \leqq k} \sup_{x \in (0,\pi)} |u^{(r)}(x)|\,,$$

$C^k\langle 0, \pi \rangle$ is a Banach space. $C^k_0\langle 0, \pi \rangle$ will denote the subspace of $C^k\langle 0, \pi \rangle$ consisting of all functions which are zero at 0 and π.

Denote by $W^1_2\langle 0, \pi \rangle$ the Sobolev space of all real-valued absolutely continuous functions u on the interval $\langle 0, \pi \rangle$ whose derivatives u' (which exist almost everywhere) are elements of $L_2(0, \pi)$. Put $\mathring{W}^1_2\langle 0, \pi \rangle = W^1_2\langle 0, \pi \rangle \cap C^0_0\langle 0, \pi \rangle$. It is easy to see that $\mathring{W}^1_2\langle 0, \pi \rangle$ is a Hilbert space with the inner product

$$\langle u, v \rangle = (u', v')\,, \quad u, v \in \mathring{W}^1_2\langle 0, \pi \rangle$$

and that the imbedding $i : u \mapsto u$ is a completely continuous mapping from $\mathring{W}^1_2\langle 0, \pi \rangle$ into $C^0_0\langle 0, \pi \rangle$.

Let g be a continuous real-valued function defined on $(-\infty, \infty)$ and such that there exist $c_1 \geqq 0$, $c_2 \geqq 0$ and $\gamma \in \langle 0, 1)$ such that

$$|g(\xi)| \leqq c_1 + c_2|\xi|^\gamma \tag{2.4.1}$$

for every $\xi \in (-\infty, \infty)$.

2.5. Definition. Let $p \in L_1(0, \pi)$, μ, ν real numbers. The function $u_0 \in \mathring{W}^1_2\langle 0, \pi \rangle$ is said to be a *weak solution* of the boundary value problem

$$\begin{gathered} u''(\tau) + \mu\, u^+(\tau) - \nu\, u^-(\tau) + g(u(\tau)) = p(\tau)\,, \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{gathered} \tag{2.5.1}$$

(where $u^+(\tau) = \max\{u(\tau), 0\}$, $u^-(\tau) = \max\{-u(\tau), 0\}$) if for every $v \in \mathring{W}_2^1\langle 0, \pi\rangle$ the integral identity

$$(2.5.2)\qquad -\int_0^\pi u_0'(\tau)\, v'(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \mu \int_0^\pi u_0^+(\tau)\, v(\tau)\, \mathrm{d}\tau - \nu \int_0^\pi u_0^-(\tau)\, v(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \\ + \int_0^\pi g(u_0(\tau))\, v(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_0^\pi p(\tau)\, v(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

holds.

The existence of a weak solution of the boundary value problem (2.5.1) will be proved (under some assumptions) by means of Lemma 2.3 the assumptions of which will be verified in 2.6 and 2.8.

Let $u \in \mathring{W}_2^1\langle 0, \pi\rangle$ and $p \in L_1(0, \pi)$ be fixed. It is easy to see that

$$j_u : v \mapsto -\int_0^\pi u'(\tau)\, v'(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,,$$

$$s_u : v \mapsto -\mu \int_0^\pi u^+(\tau)\, v(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \nu \int_0^\pi u^-(\tau)\, v(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,,$$

$$r_u : v \mapsto \int_0^\pi g(u(\tau))\, v(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,,$$

$$\xi : v \mapsto \int_0^\pi p(\tau)\, v(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

are continuous linear functionals on the space $\mathring{W}_2^1\langle 0, \pi\rangle = X = Y$. By the Riesz representation theorem there exist uniquely determined elements $J(u)$, $S(u)$, $R(u)$, $y \in X$ such that

$$\langle J(u), v\rangle = j_u(v)\,, \quad \langle S(u), v\rangle = s_u(v)\,, \quad \langle R(u), v\rangle = r_u(v)\,, \quad \langle y, v\rangle = \xi(v)$$

for any $v \in X$.

2.6. Lemma. a) *The mapping J is an isomorphism on $\mathring{W}_2^1\langle 0, \pi\rangle$;*

b) *the mappings S and R are completely continuous;*

c) *there exist $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $\gamma \in \langle 0, 1)$ such that*

$$\|R(u)\|_{\mathring{W}_2^1} \leqq \alpha + \beta \|u\|_{\mathring{W}_2^1}^{\gamma}$$

for every $u \in \mathring{W}_2^1\langle 0, \pi\rangle$;

d) $S(tu) = t\, S(u)$ *for every $u \in \mathring{W}_2^1\langle 0, \pi\rangle$ and $t \geqq 0$.*

Proof. The assertions a), c) and d) are obvious. The assertion b) follows immediately from the complete continuity of the imbedding from $\mathring{W}_2^1\langle 0, \pi\rangle$ into $C_0^0\langle 0, \pi\rangle$.

2.7. Lemma. *Let $p \in C^0\langle 0, \pi\rangle$ and let $u_0 \in \mathring{W}_2^1\langle 0, \pi\rangle$ be a weak solution of the boundary value problem (2.5.1). Then $u_0 \in C_0^2\langle 0, \pi\rangle$ and the equation in (2.5.1) is satisfied at every $\tau \in \langle 0, \pi\rangle$.*

(This regularity result can be obtained immediately by integrating by parts in the integral identity (2.5.2).)

Denote by $\mathbb{N}$ the set of all positive integers.

2.8. Lemma. *The boundary value problem*

$$u''(\tau) + \bar{\mu}\, u^+(\tau) - \bar{\nu}\, u^-(\tau) = 0\,, \qquad u(0) = u(\pi) = 0 \tag{2.8.1}$$

has a nontrivial weak solution if and only if one from the following conditions is satisfied:

a) $\bar{\nu} = 1$, *$\bar{\mu}$ is arbitrary;*

b) *$\bar{\nu}$ is arbitrary,* $\bar{\mu} = 1$;

c) $\bar{\mu} > 1,\ \bar{\nu} > 1,\ \omega_1(\bar{\nu}, \bar{\mu}) = \dfrac{\sqrt{\bar{\mu}}\sqrt{\bar{\nu}}}{\sqrt{\bar{\mu}} + \sqrt{\bar{\nu}}} \in \mathbb{N}$;

d) $\bar{\mu} > 1,\ \bar{\nu} > 1,\ \omega_2(\bar{\nu}, \bar{\mu}) = \dfrac{\sqrt{\bar{\nu}}(\sqrt{\bar{\mu}} - 1)}{\sqrt{\bar{\mu}} + \sqrt{\bar{\nu}}} \in \mathbb{N}$;

e) $\bar{\mu} > 1,\ \bar{\nu} > 1,\ \omega_3(\bar{\nu}, \bar{\mu}) = \dfrac{\sqrt{\bar{\mu}}(\sqrt{\bar{\nu}} - 1)}{\sqrt{\bar{\mu}} + \sqrt{\bar{\nu}}} \in \mathbb{N}$.

Proof. Let $u_0 \in \mathring{W}_2^1\langle 0, \pi\rangle$ be a nontrivial weak solution of (2.8.1). In virtue of the assertion of Lemma 2.7 it is $u_0 \in C_0^2\langle 0, \pi\rangle$ and u_0 is a nontrivial classical solution of (2.8.1). According to the Uniqueness Theorem for ordinary differential equations the function u_0 has a finite number of zero points in the interval $(0, \pi)$. If u_0 has no zero point in $(0, \pi)$ then we obtain either a) or b). If u_0 has a zero point in $(0, \pi)$ then $\bar{\nu} > 0$, $\bar{\mu} > 0$ and the function u_0 is periodic with the period

$$\pi\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{\nu}}} + \frac{1}{\sqrt{\bar{\mu}}}\right)$$

(since on the interval where the function u_0 is positive there exists a constant $m > 0$ such that $u_0(\tau) = m \sin \sqrt{(\bar{\mu})}\, \tau$ and analogously $u_0(\tau) = n \sin \sqrt{(\bar{\nu})}\, \tau$ with a suitable constant $n < 0$ on the interval where $u_0(\tau) < 0$). Hence one of the equations

$$k\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{\nu}}} + \frac{1}{\sqrt{\bar{\mu}}}\right) = 1\,,$$

$$k\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{\nu}}} + \frac{1}{\sqrt{\bar{\mu}}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\bar{\mu}}} = 1\,,$$

$$k\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{\nu}}} + \frac{1}{\sqrt{\bar{\mu}}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\bar{\nu}}} = 1$$

must have a positive integer k for a solution. Thus one of the conditions c)–e) is fulfilled.

Conversely, if one of the conditions a)–e) is fulfilled then it is easy to construct a nontrivial classical solution of (2.8.1) and thus also a nontrivial weak solution.

Let $k \in \langle 0, 1\rangle$ and let us consider the equation (2.3.4) in our special case, i.e. we shall seek the nontrivial $u \in \mathring{W}_2^1\langle 0, \pi\rangle$ such that the integral identity

$$-\int_0^\pi u'(\tau)\, v'(\tau)\, d\tau = -\frac{\mu + k\nu}{1 + k}\int_0^\pi u^+(\tau)\, v(\tau)\, d\tau + \frac{\nu + k\mu}{1 + k}\int_0^\pi u^-(\tau)\, v(\tau)\, d\tau$$

holds for all $v \in \mathring{W}_2^1\langle 0, \pi\rangle$. (According to the assertion of Lemma 2.7, $u \in C_0^2\langle 0, \pi\rangle$ and satisfies at every point $\tau \in \langle 0, \pi\rangle$ the equation

$$u''(\tau) + \frac{\mu + k\nu}{1 + k}\, u^+(\tau) - \frac{\nu + k\mu}{1 + k}\, u^-(\tau) = 0\,.)$$

2.9. Theorem. *Let $\mu < 1$, $\nu < 1$, let a continuous function g satisfy the condition (2.4.1). Then the boundary value problem (2.5.1) is weakly solvable for every $p \in L_1(0, \pi)$.*

Proof. If $\mu < 1$ and $\nu < 1$ then also

$$\frac{\mu + k\nu}{1 + k} < 1\,, \quad \frac{\nu + k\mu}{1 + k} < 1\,.$$

With respect to the assertion of Lemma 2.8, the equations (2.3.4) have for arbitrary $k \in \langle 0, 1\rangle$ the trivial solution only. The other assumptions of Lemma 2.3 are verified in Lemma 2.6. Thus the assertion of Theorem follows from Lemma 2.3.

2.10. Remark. The assertion of the previous theorem is well-known. It follows immediately from the Leray-Lions theorem (see [11]).

Let $\mu > 1$, $\nu > 1$ and put

$$\Phi_i(\nu, \mu) = \max_{t \in \langle 0,1 \rangle} \omega_i \left(\frac{\nu + t\mu}{1 + t}, \frac{\mu + t\nu}{1 + t} \right),$$

$$\varphi_i(\nu, \mu) = \min_{t \in \langle 0,1 \rangle} \omega_i \left(\frac{\nu + t\mu}{1 + t}, \frac{\mu + t\nu}{1 + t} \right)$$

for $i = 1, 2, 3$.

Analogously as Theorem 2.9, we obtain immediately from the above lemmas the following result.

2.11. Theorem. *Let $\mu > 1$, $\nu > 1$ and let the continuous function g satisfy the condition (2.4.1). Then the boundary value problem (2.5.1) is weakly solvable for every $p \in L_1(0, \pi)$ provided*

$$(2.11.1)_i \qquad \langle \varphi_i(\nu, \mu), \Phi_i(\nu, \mu) \rangle \cap \mathbb{N} = \emptyset$$

for $i = 1, 2, 3$.

2.12. Corollary. *Let $\mu = \nu = m^2$, $m \notin \mathbb{N}$ and let the continuous function g satisfy the condition (2.4.1). Then the boundary value problem (2.5.1) is weakly solvable for every $p \in L_1(0, \pi)$.*

2.13. Remark. It is possible to obtain the assertion of the previous corollary also from the so-called "*Fredholm alternative for nonlinear operators*" (see e.g. [6, Chapter II]).

2.14. Remark. Let $1 < \mu < \nu$, $k \doteq \nu + \mu$. By elementary calculation we obtain:

$$\Phi_1(\nu, \mu) = \max_{\varrho \in \langle \mu, k/2 \rangle} \frac{\sqrt{\varrho}\sqrt{(k - \varrho)}}{\sqrt{\varrho} + \sqrt{(k - \varrho)}} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\mu + \nu}{2}\right)};$$

$$\varphi_1(\nu, \mu) = \min_{\varrho \in \langle \mu, k/2 \rangle} \frac{\sqrt{\varrho}\sqrt{(k - \varrho)}}{\sqrt{\varrho} + \sqrt{(k - \varrho)}} = \frac{\sqrt{\nu}\sqrt{\mu}}{\sqrt{\nu} + \sqrt{\mu}};$$

$$\Phi_2(\nu, \mu) = \max_{\varrho \in \langle \mu, k/2 \rangle} \frac{\sqrt{(k - \varrho)}(\sqrt{\varrho} - 1)}{\sqrt{\varrho} + \sqrt{(k - \varrho)}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{\mu + \nu}{2}\right)} - 1\right);$$

$$\varphi_2(\nu, \mu) = \min_{\varrho \in \langle \mu, k/2 \rangle} \frac{\sqrt{(k - \varrho)}(\sqrt{\varrho} - 1)}{\sqrt{\varrho} + \sqrt{(k - \varrho)}} = \frac{\sqrt{\nu}(\sqrt{\mu} - 1)}{\sqrt{\nu} + \sqrt{\mu}}.$$

In the same way we have

$$\Phi_3(\nu, \mu) = \max_{\varrho \in \langle \mu, k/2 \rangle} z(\varrho)$$

and

$$\varphi_3(\nu, \mu) = \min_{\varrho \in \langle \mu, k/2 \rangle} z(\varrho),$$

where

$$z : \varrho \mapsto \frac{\sqrt{\varrho}\,(\sqrt{(k-\varrho)} - 1)}{\sqrt{\varrho} + \sqrt{(k-\varrho)}}.$$

It is

$$z'(\varrho) = \frac{(k-\varrho)^{3/2} - \varrho^{3/2} - k}{2(\sqrt{\varrho} + \sqrt{(k-\varrho)})^2 \sqrt{\varrho}\,\sqrt{(k-\varrho)}}$$

on $\langle \mu, k/2 \rangle$. If $\nu(\sqrt{\nu} - 1) \leqq \mu(\sqrt{\mu} + 1)$ then $z'(\varrho) \leqq 0$ and

$$\Phi_3(\nu, \mu) = \frac{\sqrt{\mu}\,(\sqrt{\nu} - 1)}{\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu}},$$

$$\varphi_3(\nu, \mu) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{\nu + \mu}{2}\right)} - 1\right).$$

If $\nu(\sqrt{\nu} - 1) > \mu(\sqrt{\mu} + 1)$ then there exists exactly one $\varrho_0 \in (\mu, k/2)$ such that $z'(\varrho_0) = 0$ and

$$z(\varrho_0) = \max_{\varrho \in \langle \mu, k/2 \rangle} z(\varrho) = \varrho_0^{3/2}/k.$$

Thus

$$\Phi_3(\nu, \mu) = z(\varrho_0),$$

$$\varphi_3(\nu, \mu) = \min\left\{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{\nu + \mu}{2}\right)} - 1\right), \quad \frac{\sqrt{\mu}\,(\sqrt{\nu} - 1)}{\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu}}\right\}.$$

It follows from the previous calculation that the conditions $(2.11.1)_i$ $(i = 1, 2, 3)$ assume that form

$$\left\langle \frac{\sqrt{\nu}\,\sqrt{\mu}}{\sqrt{\nu} + \sqrt{\mu}}, \; \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\mu + \nu}{2}\right)} \right\rangle \cap \mathbb{N} = \emptyset \tag{2.14.1}$$

and

$$\left\langle \frac{\sqrt{\nu}\,(\sqrt{\mu} - 1)}{\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu}}, \; A(\nu, \mu) \right\rangle \cap \mathbb{N} = \emptyset, \tag{2.14.2}$$

where

$$A(\nu, \mu) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\mu}\,(\sqrt{\nu} - 1)}{\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu}} & \text{if} \quad \nu(\sqrt{\nu} - 1) \leqq \mu(\sqrt{\mu} + 1) \\ z(\varrho_0) \quad \text{if} \quad \nu(\sqrt{\nu} - 1) > \mu(\sqrt{\mu} + 1), \end{cases}$$

for $\varphi_2(\nu, \mu) \leqq \varphi_3(\nu, \mu) \leqq \Phi_2(\nu, \mu) \leqq \Phi_3(\nu, \mu)$. It is easy to see that

$$z(\varrho_0) = \varrho_0^{3/2}/k < \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\nu + \mu}{2}\right)}.$$

Since $\varphi_2(\nu, \mu) \leqq \varphi_1(\nu, \mu)$ and $\Phi_3(\nu, \mu) < \Phi_1(\nu, \mu)$, we shall consider the condition

$$\left\langle \frac{\sqrt{\nu}\,(\sqrt{\mu} - 1)}{\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu}}, \ \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\nu + \mu}{2}\right)}\right\rangle \cap \mathbb{N} = \emptyset \tag{2.14.3}$$

instead of (2.14.1) and (2.14.2) if $\nu(\sqrt{\nu} - 1) > \mu(\sqrt{\mu} + 1)$. It is possible to consider the condition (2.14.3) also if

$$\nu(\sqrt{\nu} - 1) \leqq \mu(\sqrt{\mu} + 1)\,.$$

2.15. Corollary. *Let a continuous function g satisfy the condition (2.4.1). Let $m > 1$. Then there exists $\varepsilon_0 > 0$ such that for every $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ the boundary value problem (2.5.1) is weakly solvable for every $p \in L_1(0, \pi)$ provided $\mu = m^2$, $\nu = (m + \varepsilon)^2$.*

Proof. It is sufficient (see 2.11 and 2.14) to show that there exists ε_0 such that for $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ we have

$$(m + \varepsilon)^2\,(m + \varepsilon - 1) \leqq m^2(m + 1)\,,$$
$$(m/2, (m + \varepsilon)/2) \cap \mathbb{N} = \emptyset\,,$$
$$((m - 1)/2, \ (m + \varepsilon - 1)/2) \cap \mathbb{N} = \emptyset\,.$$

The existence of ε_0 with the previous properties is trivial.

2.16. Corollary. *Let a continuous function g satisfy the condition (2.4.1). Suppose that $\varepsilon \geqq 0$, $\delta \geqq 0$, $\varepsilon + \delta < 1$ and let n be an odd positive integer, $n \geqq 3$. Put $\mu = (n + \varepsilon)^2$, $\nu = (n + 1 - \delta)^2$. Then the boundary value problem (2.5.1) has a weak solution for arbitrary $p \in L_1(0, \pi)$.*

Proof. According to 2.11 and 2.14 it is sufficient to verify the condition (2.14.3). It is easy to see that

$$\left\langle \frac{(n + 1 - \delta)\,(n + \varepsilon - 1)}{2n + 1 - \delta + \varepsilon}, \ \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{(n + \varepsilon)^2 + (n + 1 - \delta)^2}{2}\right)}\right\rangle \cap \mathbb{N} \subset$$
$$\subset \left(\frac{n + \varepsilon - 1}{2}, \ \frac{n + 1 - \delta}{2}\right) \cap \mathbb{N} = \emptyset$$

for n is odd.

2.17. Corollary. *Let a continuous function g satisfy the condition (2.4.1). Suppose that $1 > \varepsilon \geqq 0$, $1 > \delta \geqq 0$, $\varepsilon + \delta > 0$. Put $\mu = (n - \varepsilon)^2$, $\nu = (n + \delta)^2$,* *where n is an odd positive integer, $n \geqq 3$. Moreover, let*

(2.17.1) $$\delta(n - 1 - 2\varepsilon) > \varepsilon(n + 1).$$

Then the boundary value problem (2.5.1) *has a weak solution for arbitrary* $p \in L_1(0, \pi)$.

Proof. Similarly as in the proof of 2.16 we have

$$\left\langle \frac{(n + \delta)(n - \varepsilon - 1)}{2n + \delta - \varepsilon}, \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{(n - \varepsilon)^2 + (n + \delta)^2}{2}\right)} \right\rangle \cap \mathbb{N} \subset$$
$$\subset \left(\frac{n - 1}{2}, \frac{n + \delta}{2}\right) \cap \mathbb{N} = \emptyset$$

for n is odd.

2.18. Example. In the previous corollaries we solved the problem when the nonlinearity jumps over one eigenvalue (see 2.15 and 2.17) or jumps from an eigenvalue to the next one (see 2.16). 2.11 and 2.14 imply also the weak solvability of (2.5.1) if the nonlinearity jumps over two eigenvalues. An example is provided by the case $\mu = 2.75^2$, $\nu = 4.75^2$ for

$$\left\langle \frac{4.75 \times 1.75}{2.75 + 4.75}, \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2.75^2 + 4.75^2}{2}\right)} \right\rangle \cap \mathbb{N} \subset (1, 2) \cap \mathbb{N} = \emptyset.$$

2.19. Remark. *Let g be a continuous function satisfying* (2.4.1). *Let the couple μ, ν satisfy the assumptions from one of the parts* 2.15–2.18. *Then the boundary value problem*

(2.19.1) $$u''(\tau) + \nu u^+(\tau) - \mu u^-(\tau) + g(u(\tau)) = p(\tau),$$
$$u(0) = u(\pi) = 0$$

has a weak solution for arbitrary $p \in L_1(0, \pi)$.

Proof. Let $p \in L_1(0, \pi)$. The continuous function $\xi \mapsto -g(-\xi)$ satisfies the condition (2.4.1). By 2.15–2.18, the boundary value problem

$$u''(\tau) + \mu u^+(\tau) - \nu u^-(\tau) - g(-u(\tau)) = p(\tau),$$
$$u(0) = u(\pi) = 0$$

has a weak solution $u_0 \in \mathring{W}_2^1\langle 0, \pi\rangle$. Thus the function $-u_0$ is a weak solution of (2.19.1).

2.20. Open problems. a) Are the assertions of 2.16 and 2.17 true also if n is an even integer?

b) Is true that the boundary value problem (2.5.1) is weakly solvable for arbitrary $p \in L_1(0, \pi)$ if only $\mu > 1$, $\nu > 1$, $\mu \neq \nu$?

3. JUMPING OFF THE LEAST EIGENVALUE

3.1. Notation. Let g be a continuous function defined on $(-\infty, \infty)$ and suppose that there exist $c_1 \geqq 0$, $c_2 \geqq 0$ such that

$$|g(\xi)| \leqq c_1 + c_2|\xi| \tag{3.1.1}$$

for every $\xi \in (-\infty, \infty)$. Let $\nu > 1$ be a real number. Define the mappings $L: C_0^2\langle 0, \pi\rangle \to C^0\langle 0, \pi\rangle$, $N: C_0^2\langle 0, \pi\rangle \to C^0\langle 0, \pi\rangle$ by the formulas

$$L : u \mapsto u'' + u\,, \tag{3.1.2}$$

$$N : u \mapsto \nu_1\, u^-(\tau) - g(u(\tau))\,, \tag{3.1.3}$$

where $\nu_1 = \nu - 1$.

To obtain the (classical) solution of the boundary value problem

$$\begin{gathered} u''(\tau) + u^+(\tau) - \nu\, u^-(\tau) + g(u(\tau)) = p(\tau)\,, \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{gathered} \tag{3.1.4}$$

for $p \in C^0\langle 0, \pi\rangle$ we have to show that the operator equation

$$L(u) = N(u) + p \tag{3.1.5}$$

is solvable in $C_0^2\langle 0, \pi\rangle$.

3.2. Lemma. a) *The mapping* L *defined by the formula* (3.1.2) *is linear and continuous. The null-space* $\operatorname{Ker}[L]$ *of* L *is a linear hull generated by the function* $\tau \mapsto \sin\tau$, *i.e.*,

$$\operatorname{Ker}[L] = \{\lambda \sin\tau;\ \lambda \in (-\infty, \infty)\}\,.$$

b) *The image* $\operatorname{Im}[L]$ *of* L *is*

$$\left\{z \in C^0\langle 0, \pi\rangle;\ \int_0^\pi z(\tau) \sin\tau \, d\tau = 0\right\}.$$

c) *The mappings*

$$Q : z \mapsto \frac{2 \sin\tau}{\pi} \int_0^\pi z(\xi) \sin\xi \, d\xi\,, \quad z \in C^0\langle 0, \pi\rangle\,, \tag{3.2.1}$$

$$P : x \mapsto \frac{2 \sin\tau}{\pi} \int_0^\pi x(\xi) \sin\xi \, d\xi\,, \quad x \in C_0^2\langle 0, \pi\rangle \tag{3.2.2}$$

are continuous linear projections in the spaces considered and

$$\mathrm{Im}\,[P] = \mathrm{Ker}\,[L]\,, \quad \mathrm{Im}\,[Q^c] = \mathrm{Im}\,[L]\,,$$

where $Q^c = Id - Q$.

d) *The mapping* N *is completely continuous. Moreover,*

$$\|N(u)\|_{C^0} \leqq c_1 + (c_2 + \nu_1)\,\|u\|_{C_0{}^2}$$

for every $u \in C_0^2\langle 0, \pi\rangle$.

(The assertions a)–c) are well-known. The proof of d) is trivial.)

3.3. Remark. The restriction $\tilde{L}$ of the operator L to

$$X_1 = (Id - P)\,(C_0^2\langle 0, \pi\rangle)$$

is one-to-one and according to the Closed Graph Theorem the mapping $\tilde{L}$ is an isomorphism between X_1 and $\mathrm{Im}\,[L]$. Denote its inverse by K (the so-called right inverse of L). Considering the same norm on X_1 as in $C_0^2\langle 0, \pi\rangle$, let $\|K\|$ be the norm of K.

3.4. Lemma. *Let there exist* $t_0 \in (-\infty, \infty)$ *and* $v_0 \in X_1$ *such that*

$$QN(t \sin \tau + v(\tau)) + Q(p) = 0\,, \tag{3.4.1}$$

$$KQ^cN(t \sin \tau + v(\tau)) + K\,Q^c(p) = v \tag{3.4.2}$$

hold with $t = t_0$, $v = v_0$.

Then $u_0(\tau) = t_0 \sin \tau + v_0(\tau)$ *is a solution of the equation* (3.1.5).

Proof. $L(u_0) - N(u_0) - p = L(v_0) - Q\,N(u_0) - Q^c\,N(u_0) - Q(p) - Q^c(p) = 0_X$.

3.5. Lemma. *Let* $v \in X_1$. *Define*

$$\varphi_v : t \mapsto \nu_1 \int_0^\pi (t \sin \tau + v(\tau))^- \sin \tau \,d\tau - \int_0^\pi g(t \sin \tau + v(\tau)) \sin \tau \,d\tau \tag{3.5.1}$$

(*i.e.*, $QN(t \sin \tau + v(\tau)) = (2 \sin \tau/\pi)\,\varphi_v(t)$).

Let

$$t_1 < t_2 \Rightarrow g(t_1) \leqq g(t_2)\,. \tag{3.5.2}$$

Then:

(a) φ_v *is continuous*;

(b) $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi_v(t) = -2\,g(\infty)$, $(g(\infty) = \lim\limits_{\xi \to \infty} g(\xi))$;

(c) $\lim_{t \to -\infty} \varphi_v(t) = \infty$.

(The assertions follow immediately from the classical theorems about interchanging the integration and the limit process.)

3.6. Remark. From the previous lemma we see that a necessary condition for the solvability of (3.4.1) is

$$\int_0^\pi p(\tau) \sin \tau \, d\tau \leqq 2\, g(\infty)$$

provided $g(\infty)$ is finite.

3.7. Lemma. *Suppose in addition that the function g satisfies the following condition:*

(3.7.1) $$g(\infty) < \infty\,; \quad t_1 \neq t_2\,, \quad g(t_1) = g(t_2) \Rightarrow g(t_1) = g(\infty)\,.$$

Let $p \in C^0\langle 0, \pi\rangle$ and

(3.7.2) $$\int_0^\pi p(\tau) \sin \tau \, d\tau < 2\, g(\infty)\,.$$

Then for every $v \in X_1$ there exists exactly one $t(v) \in (-\infty, \infty)$ such that

(3.7.3) $$\varphi_v(t(v)) + \int_0^\pi p(\tau) \sin \tau \, d\tau = 0\,.$$

The mapping $v \mapsto t(v)$ is continuous.

Proof. The existence of t such that

$$\varphi_v(t) + \int_0^\pi p(\tau) \sin \tau \, d\tau = 0$$

is evident. Suppose $t_1 < t_2$. Obviously $\varphi_v(t_1) \geqq \varphi_v(t_2)$. Let

(3.7.4) $$\varphi_v(t_1) + \int_0^\pi p(\tau) \sin \tau \, d\tau = \varphi_v(t_2) + \int_0^\pi p(\tau) \sin \tau \, d\tau = 0\,.$$

Thus $\varphi_v(t_1) = \varphi_v(t_2)$ which implies

(3.7.5) $$\int_0^\pi (t_1 \sin \tau + v(\tau))^- \sin \tau \, d\tau = \int_0^\pi (t_2 \sin \tau + v(\tau))^- \sin \tau \, d\tau$$

and

(3.7.6) $$\int_0^\pi g(t_1 \sin \tau + v(\tau)) \sin \tau \, d\tau = \int_0^\pi g(t_2 \sin \tau + v(\tau)) \sin \tau \, d\tau\,.$$

From (3.7.5) we have $0 < t_1 \sin \tau + v(\tau) < t_2 \sin \tau + v(\tau)$ and from (3.7.6) we have $g(t_1 \sin \tau + v(\tau)) = g(\infty)$. Substituting into (3.7.4) we obtain

$$-2\, g(\infty) = \int_0^\pi p(\tau) \sin \tau \, d\tau = 0$$

which contradicts (3.7.2).

The continuity of $v \mapsto t(v)$ is obvious.

3.8. Lemma. *There exist $c_3(v_1) \geqq 0$ and $c_4 \geqq 0$ such that*

$$|t(v)| \leqq c_3(v_1) + c_4 \|v\|_{C_0^2}$$

for every $v \in X_1$.

Proof. Since there exists $M > 0$ such that

$$\left| \frac{v(\tau)}{\sin \tau} \right| \leqq M \|v\|_{C_0^2}$$

for $\tau \in (0, \pi)$ and $v \in C_0^2\langle 0, \pi \rangle$ we have

$$v_1 \int_0^\pi \left(t(v) \sin \tau - M \|v\|_{C_0^2} \sin \tau\right)^- \sin \tau \, d\tau \geqq$$

$$\geqq \int_0^\pi g\left(t(v) \sin \tau - M \|v\|_{C_0^2} \sin \tau\right) \sin \tau \, d\tau - \int_0^\pi p(\tau) \sin \tau \, d\tau .$$

Let $t(v) > M \|v\|_{C_0^2}$. Then

$$\int_0^\pi g(\lambda \sin \tau) \sin \tau \, d\tau = \int_0^\pi p(\tau) \sin \tau \, d\tau \geqq \int_0^\pi g\left(\left(t(v) - M \|v\|_{C_0^2}\right) \sin \tau\right) \sin \tau \, d\tau$$

and thus $t(v) \leqq \lambda + M \|v\|_{C_0^2}$ for every $v \in X_1$.

On the other hand,

$$-v_1\, t(v) \int_0^\pi \sin^2 \tau \, d\tau = -v_1 \int_0^\pi \left(t(v) \sin \tau + v(\tau)\right) \sin \tau \, d\tau \leqq$$

$$\leqq v_1 \int_0^\pi \left(t(v) \sin \tau + v(\tau)\right)^- \sin \tau \, d\tau \leqq 2\, g(\infty) - \int_0^\pi p(\tau) \sin \tau \, d\tau$$

and

$$t(v) \geqq \frac{2}{\pi v_1} \left\{ \int_0^\pi p(\tau) \sin \tau \, d\tau - 2\, g(\infty) \right\} .$$

3.9. Theorem. *Suppose* (3.1.1), (3.5.2), (3.7.1), (3.7.2) *and*

$$\|K\| \, \|Q^c\| \, (c_2 + \nu_1)(c_4 + 1) < 1 . \tag{3.9.1}$$

Then the boundary value problem (3.1.4) *has a solution.*

Proof. The foregoing consideration shows that it is sufficient to prove that the mapping

$$F : v \mapsto K Q^c N(t(v) \sin \tau + v(\tau)) + K \, Q^c(p)$$

has at least one fixed point in X_1. Obviously, F is completely continuous. Moreover,

$$\|F(v)\|_{C_0^2} \leqq c_7 + \|K\| \, \|Q^c\| \, (c_2 + \nu_1)(c_4 + 1) \, \|v\|_{C_0^2}$$

$$(c_7 = \|K \, Q^c(p)\|_{C_0^2} + \|K\| \, \|Q^c\| \, c_1 + (c_2 + \nu_1) \, c_3(\nu_1))$$

for every $v \in X_1$.

Now it is easy to see that there exists $\varrho > 0$ such that

$$\|F(v)\|_{C_0^2} \leqq \varrho$$

for each $v \in X_1$, $\|v\|_{C_0^2} \leqq \varrho$. The Schauder fixed point theorem (see 2.2) implies our assertion.

3.10. Corollary. *Suppose* (3.1.1), (3.5.2), (3.7.1), (3.9.1) *and*

$$g(0) \neq g(\infty) . \tag{3.10.1}$$

Then the condition (3.7.2) *is necessary and sufficient for the solvability of* (3.1.4).

Proof. Let

$$\int_0^\pi p(\tau) \sin \tau \, d\tau = 2 \, g(\infty)$$

and suppose that $u_0(\tau) = t_0 \sin \tau + v_0(\tau)$ is a solution of (3.1.4). From

$$\nu_1 \int_0^\pi (t_0 \sin \tau + v_0(\tau))^- \sin \tau \, d\tau = \int_0^\pi g(t_0 \sin \tau + v_0(\tau)) \sin \tau \, d\tau - 2 \, g(\infty) \leqq 0$$

it follows that $(t_0 \sin \tau + v_0(\tau))^- = 0$ and $t_0 \sin \tau + v_0(\tau) \geqq 0$. Thus

$$\int_0^\pi g(t_0 \sin \tau + v_0(\tau)) \sin \tau \, d\tau = 2 \, g(\infty) = \int_0^\pi g(\infty) \sin \tau \, d\tau$$

and $g(t_0 \sin \tau + v_0(\tau)) = g(\infty)$ for every $\tau \in \langle 0, \pi \rangle$. The last fact is in contradiction with (3.10.1).

3.11. Corollary. *Suppose* (3.1.1), (3.5.2), (3.7.1), (3.9.1) *and*

(3.11.1) $$g(\xi) = 0 \quad \text{for} \quad \xi \geqq 0 .$$

Then the condition

(3.11.2) $$\int_0^\pi p(\tau) \sin \tau \, d\tau \leqq 0$$

is necessary and sufficient for the solvability of (3.1.4).

Proof. It remains to show that if

(3.11.3) $$\int_0^\pi p(\tau) \sin \tau \, d\tau = 0$$

then (3.1.4) has a solution. But this follows from the fact that if (3.11.3) is fulfilled then

$$u''(\tau) + u(\tau) = p(\tau), \quad u(0) = u(\pi) = 0$$

has a nonnegative solution.

3.12. Remark. In the same way as in 3.9, it is possible to introduce an analogous condition to (3.9.1) to obtain the solvability of (3.1.4) for arbitrary $p \in C^0\langle 0, \pi \rangle$ if the assumption (3.7.1) is replaced by

$$g(\infty) = \infty \, ; \quad t_1 < t_2 \Rightarrow g(t_1) < g(t_2) .$$

3.13. Open problem. Let $g \equiv 0$. Is the condition (3.11.2) necessary and sufficient for the solvability of (3.1.4) with no restriction on $\nu > 1$?

Note added in September 1975. The problems in 2.20 are solved negatively by E. N. Dancer (see "On the Dirichlet problem for weakly nonlinear elliptic partial differential equations" — to appear). The periodic problem and boundary value problems for partial differential equations of the elliptic type are also solved in Dancer's paper.

References

[1] *A. Ambrosetti - G. Prodi:* Analisi non lineare (I quaderno), Pisa 1973.

[2] *A. Ambrosetti - G. Prodi:* On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces, Annali Mat. Pura Appl. *93*, 1973, 231—247; see also Theory of nonlinear operators, Proceedings of a Summer School held in September 1971 at Babylon, Czechoslovakia, Prague 1973, pp. 9—28.

[3] *H. Ehrmann:* Über die Existenz der Lösungen von Randwertaufgaben bei gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Annalen *134*, 1957, 167—194.

[4] *S. Fučík:* Nonlinear equations with noninvertible linear part, Czech. Math. Journal *24 (99)* 1974, 467—495.

[5] *S. Fučík - M. Kučera - J. Nečas:* Ranges of nonlinear asymptotically linear operators, Journ. Diff. Equations *17*, 1975, 375—394.

[6] *S. Fučík - J. Nečas - J. Souček - V. Souček:* Spectral analysis of nonlinear operators, Lecture Notes in Mathematics No 346, Springer Verlag 1973.

[7] *M. A. Krasnoselskij:* Topological methods in the theory of nonlinear integral equations, Pergamon Press Book 1964.

[8] *E. M. Landesman - A. C. Lazar:* Linear eigenvalues and a nonlinear boundary value problem, Pac. J. Math. *33*, 1970, 311—328.

[9] *E. M. Landesman - A. C. Lazer:* Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance, J. Math. Mech. *19*, 1970, 609—623.

[10] *A. C. Lazer - D. E. Leach:* On a nonlinear two-point boundary value problem, J. Math. Anal. Appl. *26*, 1969, 20—27.

[11] *J. Leray - J. L. Lions:* Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, Bull. Soc. Math. France *93*, 1965, 97—107.

[12] *A. Manes - A. Micheletti:* Un'estensione della teoria variazionale classica degli autovalori per operatori ellittici del secondo ordine, Boll. Unione Mat. Ital. *7*, 1973, 285—301.

[13] *J. Nečas:* On the range of nonlinear operators with linear asymptotes which are not invertible, Comment. Math. Univ. Carolinae *14*, 1973, 63—72.

Author's address: 186 00 Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta University Karlovy).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

LATTICE ORDERED GROUPS WITH CYCLIC LINEARLY ORDERED SUBGROUPS

JÁN JAKUBÍK, Košice

(Received October 18, 1974)

In this note a solution is given to a problem proposed by CONRAD and MONTGOMERY [3] on lattice ordered groups G with the property that each linearly ordered subgroup of G is cyclic.

Let G be an archimedean lattice ordered group. Consider the following conditions for G:

(a) G is singular;

(b) each linearly ordered subgroup of G is cyclic.

In [3] it was proved that (a) implies (b) while the problem whether (a) is implied by (b) remained open. We shall show that the answer is negative in general; nonetheless, (b) $\Rightarrow$ (a) is valid if G is complete.

For the basic notions and notations cf. BIRKHOFF [1] and FUCHS [4]. Let G be a lattice ordered group. An element $0 \leqq g \in G$ is called singular, if $x \wedge (g - x) = 0$ for each $x \in G$ with $0 \leqq x \leqq g$. It is easy to verify that a strictly positive element $g \in G$ is singular if and only if the interval $[0, g]$ is a Boolean algebra. The l-group G is singular, if for each $0 < g \in G$ there is a singular element $h \in G$ such that $0 < h \leqq g$. Singular lattice ordered groups were investigated in the papers [2], [5], [6], [7], [8].

The following theorem is known (cf. [2]):

(A) *Let G be a complete l-group. Then there are l-subgroups A, B of C such that A is singular, B is a vector lattice and $G = A \times B$.*

(The symbol $A \times B$ denotes the direct sum of l-groups A and B.)

Now let G be a complete l-group that is not singular. According to (A) we have $B \neq \{0\}$ and hence there is b, $0 < b \in B$. Let R be the set of all reals; since B is a vector lattice, for each $r \in R$ there exists $rb \in B$. Denote $B_1 = \{rb : r \in R\}$. Then B_1 is a linearly ordered subgroup of G that fails to be cyclic. Therefore (a) is implied by (b) whenever G is a complete lattice ordered group.

The following example shows that an archimedean lattice ordered group fulfilling (b) need not be singular.

Let Q be the set of all rational numbers and let G_0 be the set of all real functions defined on Q. For $f, g \in G_0$ we put $f \leqq g$ if $f(x) \leqq g(x)$ for all $x \in Q$. Then $(G_0; +, \leqq)$ is an archimedean lattice ordered group. Let φ be a one-to-one mapping of the set N of all positive integers onto the set Q. Further, let G be the set of all $f \in G_0$ with the following properties:

(i) $2^{n-1} f(\varphi(n))$ is an integer for all $n \in N$;

(ii) there are irrational numbers $\alpha_1 < \beta_1 \leqq \alpha_2 < \beta_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_m < \beta_m$ such that f is a constant on each set $Q \cap [\alpha_i, \beta_i]$ $(i = 1, \ldots, m)$ and $f(x) = 0$ for each $x \in Q \setminus \bigcup [\alpha_i, \beta_i]$ $(i = 1, \ldots, m)$. Then G is an l-subgroup of G_0.

Let $H \neq \{0\}$ be a linearly ordered subgroup of G. For each $h \in H$ put

$$s(h) = \{x \in Q : h(x) \neq 0\} .$$

Lemma 1. *Let* $0 \neq h_i \in H$ $(i = 1, 2)$. *Then* $s(h_1) = s(h_2)$.

Proof. Suppose that $s(h_1) \neq s(h_2)$. Then we can assume that there is $x \in s(h_1) \setminus s(h_2)$. We have $|h_i| \in H$, $s(|h_i|) = s(h_i)$ $(i = 1, 2)$. The elements $|h_1|, |h_2|$ are comparable and $|h_1|(x) > 0 = |h_2|(x)$. Since $h_2 \neq 0$, there is $y \in s(h_2)$ and hence $|h_2|(y) > 0$. There is a positive integer n with $n|h_2|(y) > |h_1|(y)$. Since $n|h_2| \in H$, the elements $n|h_2|$ and $|h_1|$ are comparable, thus $n|h_2| > |h_1|$. But

$$0 = n|h_2|(x) < |h_1|(x)$$

and this is a contradiction.

For $x \in Q$ let

$$F_x = \{h(x) : h \in G\} .$$

Obviously F_x is an additive group.

Lemma 2. *Let* $0 \neq h_0 \in H$, $x \in s(h_0)$. *The mapping*

$$\varphi_1 : h \to h(x)$$

is an isomorphism of H *into* F_x.

Proof. If $h_1, h_2 \in H$ and $\circ \in \{+, \wedge, \vee\}$, then

$$\varphi_1(h_1 \circ h_2) = h_1(x) \circ h_2(x) ,$$

thus φ_1 is a homomorphism of H into F_x. Let $\varphi_1(h_1) = \varphi_1(h_2)$ and suppose that $h_1 \neq h_2$. Then $h = h_1 - h_2 \in H$, $h \neq 0$ and $h(x) = 0 \neq h_0(x)$. Thus $s(h) \neq s(h_0)$, which contradicts Lemma 1. Therefore $h_1 = h_2$ and hence φ_1 is an isomorphism.

Lemma 3. *The* l*-group* H *is cyclic.*

Proof. Let $x \in Q$, $\varphi^{-1}(x) = n$. There exist irrational numbers α, β such that $x \in [\alpha, \beta]$ and $\varphi^{-1}(y) \geqq n$ for each $y \in [\alpha, \beta] \cap Q$. Let $f \in G_0$ such that $f(z) = 2^{1-n}$

for each $z \in [\alpha, \beta] \cap Q$ and $f(z) = 0$ otherwise. Then $f \in G_0$ and hence $2^{1-n} \in F_x$. Thus by (i), 2^{1-n} is a generator of the group F_x and therefore F_x is cyclic. Hence each subgroup of F_x is cyclic; by Lemma 2, H is cyclic.

Lemma 4. *Let $0 < f \in G_0$. Then f is not singular.*

Proof. Suppose that f is singular. Then each $f_1 \in G_0$, $0 < f_1 < f$ is singular. There exist irrational numbers α_1, β_1 and a real $c \neq 0$ such that $f(x) = c$ for each $x \in \in [\alpha_1, \beta_1] \cap Q$. Let $f_1 \in G_0$ such that $f_1(x) = f(x) = c$ for each $x \in Q \cap [\alpha_1, \beta_1]$ and $f_1(x) = 0$ otherwise. Clearly $f_1 \in G$ and $0 < f_1 \leqq f$. Let

$$N_1 = \{\varphi^{-1}(x) : x \in Q \cap [\alpha_1, \beta_1]\}.$$

Let k be the least element of N_1. According to (i) and (ii), $2^{k-1}c$ is an integer. We can choose irrational numbers $\alpha < \beta$ such that $[\alpha, \beta] \subset [\alpha_1, \beta_1]$ and $\varphi(k) \notin [\alpha, \beta]$. Let $y \in [\alpha, \beta] \cap Q$. Put $\varphi^{-1}(y) = t$. Since $t > k$, we infer that $2^{k-1}(\frac{1}{2}c)$ is an integer. Thus the function $g \in G_0$ defined by

$$g(x) = \tfrac{1}{2}c \quad \text{if} \quad x \in [\alpha, \beta] \cap Q \quad \text{and} \quad g(x) = 0 \quad \text{otherwise}$$

belongs to G_0. We have $0 < 2g < f_1$, hence $g < f_1 - g$ and therefore

$$g \wedge (f_1 - g) = g > 0;$$

thus f_1 cannot be singular. This shows that f is not singular.

From Lemma 2 and Lemma 4 it follows that there exists an archimedean lattice ordered group fulfilling (b) with no singular elements.

References

[1] *G. Birkhoff:* Lattice theory, third edition, Providence 1967.

[2] *P. Conrad, D. McAllister:* The completion of a lattice ordered group, J. Austral. Math. Soc. *9* (1969), 182–208.

[3] *P. Conrad, D. Montgomery:* Lattice ordered groups with rank one components, Czech. Math. J. *25* (1975), 445–453.

[4] *Л. Фукс:* Частично упоиядоченные алгебраические сыстемы, Москва 1965.

[5] *J. Jakubík:* Cantor-Bernstein theorem for lattice ordered groups, Czechoslov. Math. J. *22* (1972), 159–175.

[6] *J. Jakubík:* On σ-complete lattice ordered groups, Czechoslov. Math. J. *23* (1973), 164–174.

[7] *J. Jakubík:* Splitting property of lattice ordered groups, Czechoslov. Math. J. *24* (1974), 257–269.

[8] *J. Jakubík:* Conditionally orthogonally complete l-groups Math. Nachrichten *65* (1975), 153–162.

Author's address: 040 01 Košice, Švermova 5 (Vysoké učení technické).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

ON THE NUMBER OF NORMAL SUBGROUPS OF A GIVEN PRIME INDEX

Jiří Parobek, Praha

(Received December 10, 1974)

Our aim in this short note is to give an optimum upper bound to the number of normal subgroups of index p, p a prime, in groups of order n. Our result is divided into two theorems: Theorem 1 gives the estimate, Theorem 2 states its optimality.

Remark on notation and terminology. By $|X|$ we mean the cardinality of a set X (or its order if it is a group). If A, B are two complexes in a group G, then AB means, as usual, the complex in G consisting of all ab where $a \in A$, $b \in B$. The sign $\otimes$ denotes the direct product of groups. A normal subgroup of index p (in a group G) will also be briefly called an Np-subgroup (of G). The word "group" means "finite group" throughout the paper.

Lemma. *Let N_1, N_2 be two distinct Np-subgroups of a group G. Then $N_1 \cap N_2$ is an Np-subgroup of N_1.*

Proof. The second (or the first as it is sometimes called) theorem on isomorphism states, if applied to our subgroups N_1, N_2, that $N_1/N_1 \cap N_2$ is isomorphic to N_1N_2/N_2. As both N_1, N_2 are of a prime index, we have $N_1N_2 = G$, and the proof follows immediately.

Theorem 1. *For the number $s_p(G)$ of normal subgroups of index p, p a prime, in a group G of order n, the following inequality holds:*

$$s_p(G) \leqq \frac{p^r - 1}{p - 1}, \tag{1}$$

where r is the greatest integer such that $p^r \mid n$.

Proof. For an arbitrary group X, let $r_p(X)$ denote the greatest integer such that $p^{r_p(X)} \mid |X|$. We shall prove (1) by induction with respect to $r_p(G)$. The case $r_p(G) = 0$ is obvious, the case $r_p(G) = 1$ follows immediately from the lemma since if N_1, N_2

are two distinct Np-subgroups of G, then $|G| = p|N_1| = p^2|N_1 \cap N_2|$ so that $r_p(G) \geqq 2$. Hence, let r be an integer, $r \geqq 2$, and suppose that (1) holds for all groups X for which $r_p(X) \leqq r - 1$. Let G be a group of order n with $r_p(G) = r$. Suppose that G has exactly q Np-subgroups $N_1, N_2, \ldots, N_q$. We clearly may assume $q \geqq 2$. Let us now take the set $\mathcal{B} = \{N_2, N_3, \ldots, N_q\}$ and partition it into β disjoint nonempty subsets $\mathcal{A}_i$ such that N_j and N_k $(2 \leqq j, k \leqq q)$ belong to the same class if and only if $N_1 \cap N_j = N_1 \cap N_k$. Thus, among the groups $N_1 \cap N_2, N_1 \cap N_3, \ldots$ $\ldots, N_1 \cap N_q$, there are exactly β distinct ones. Since all these groups are Np-subgroups of N_1 (as follows from the lemma) and since $r_p(N_1) = r - 1$, we have by hypothesis

$$\beta \leqq \frac{p^{r-1} - 1}{p - 1}. \tag{2}$$

Further, we shall prove

$$\alpha_i \leqq p \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, \beta \tag{3}$$

where $\alpha_i = |\mathcal{A}_i|$. Without any loss of generality, let $\mathcal{A}_i$ (i arbitrary) consist of the first α_i elements of $\mathcal{B}$. Thus, let $N_1 \cap N_2 = N_1 \cap N_3 = \ldots = N_1 \cap N_{\alpha_i+1} = Q$. By an easy argument we find that

$$N_j \cap N_k = Q \quad \text{for any} \quad 1 \leqq j \leqq \alpha_i + 1 \quad \text{and} \quad 2 \leqq k \leqq \alpha_i + 1. \tag{4}$$

Indeed, we have $N_j \cap N_k \supset (N_1 \cap N_j) \cap (N_1 \cap N_k) = Q$ and $|N_j \cap N_k| = |Q|$ by the lemma. According to (4), the sets $Q, N_1 - Q, \ldots, N_{\alpha_i+1} - Q$ must be disjoint. Hence, in view of the relations $|Q| = n/p^2$, $|N_l - Q| = n/p - n/p^2$ $(1 \leqq l \leqq$ $\leqq \alpha_i + 1)$ following from the lemma, we get the condition

$$\left(\frac{n}{p} - \frac{n}{p^2}\right)(\alpha_i + 1) + \frac{n}{p^2} \leqq n$$

implying (3). By (3) and (2), we have

$$q - 1 = \sum_{i=1}^{\beta} \alpha_i \leqq \beta p \leqq p \frac{p^{r-1} - 1}{p - 1}$$

whence

$$q \leqq \frac{p^r - 1}{p - 1}.$$

This completes our proof.

Theorem 2. *The estimate* (1) *of Theorem* 1 *is best possible since for any pair p, n, p a prime, of positive integers, at least one group G of order n exists for which the equality sign takes place in* (1).

Our proof is based on a certain well-known assertion of the theory of abelian groups, see e.g. [1], p. 53, Satz 51.

Proof of Theorem 2. For given n, p, let r, m be those integers for which $n = p^r m$, $p \nmid m$. Let H be an arbitrary group of order m and let A denote the (elementary) abelian group of order p^r and of type $(p, \ldots, p)$. Put $G = A \otimes H$. (For $m = 1$ or $r = 0$, this reduces to $G = A$ and $G = H$, respectively.) To prove Theorem 2, it evidently suffices to show that A possesses $(p^r - 1)/(p - 1)$ distinct subgroups of index p (that is just a special case of the assertion mentioned above; we shall, however, give its proof for the sake of completeness). Indeed, if B_1, B_2 are two distinct subgroups of index p in A, then $B_1 \otimes H$, $B_2 \otimes H$ are two distinct Np-subgroups of G. — To determine the number of Np-subgroups in A (we retain our short notation though the normality is trivial in this case), let us first note that each Np-subgroup of A is of type $(p, \ldots, p)$ since its invariants must be divisors of those of A. The basis of each Np-subgroup therefore consists of $r - 1$ elements. Any independent $(r - 1)$-tuple of elements of A may evidently be chosen in the following manner: In the first step, we choose an arbitrary element $a_1 \in A$, $a_1 \neq 1$; the elements $a_1, \ldots, a_{i-1}$ being already chosen, in the i-th step $(2 \leqq i \leqq r - 1)$ we choose an arbitrary element $a_i \in A$ not belonging to the group generated by the elements $a_1, \ldots, a_{i-1}$. In this way, just $n_1 = (p^r - 1)(p^r - p) \ldots (p^r - p^{r-2})$ distinct independent $(r - 1)$-tuples may be chosen. Analogously, we find that for each Np-subgroup of A, exactly $n_2 = (p^{r-1} - 1)(p^{r-1} - p) \ldots (p^{r-1} - p^{r-2})$ distinct independent $(r - 1)$-tuples may be chosen out of its elements. Thus, among the total of n_1 distinct independent $(r - 1)$-tuples made up of the elements of A, every n_2 of them generate the same Np-subgroup. The number of distinct Np-subgroups in A is therefore given by $n_1/n_2 = (p^r - 1)/(p - 1)$. The same number of (distinct) Np-subgroups will, as remarked above, exist in the group $G = A \otimes H$. The proof is hereby completed.

In the end of our note, let us mention two special cases of Theorem 1 which perhaps are of certain importance since they are concerned with the class of all, not explicitly normal, subgroups.

Corollary 1. *For the number $s_p(G)$ of subgroups of a given prime index, p, in an abelian group G of order n, the estimate (1) of Theorem 1 holds and is best possible.*

Corollary 2. *For the number $s_2(G)$ of subgroups of index 2 in a group G of order n, the inequality*

$$s_2(G) \leqq 2^r - 1$$

holds where r is the greatest integer such that $2^r \mid n$. This estimate is best possible.

Proof of Corollary 1 is obvious (the optimality is secured by Theorem 2 — just taking H abelian), proof of Corollary 2 follows from the well-known fact that in a group G, any subgroup A of index 2 is normal since (in usual notation) $G = A + x_1 A = A + A x_2 \Rightarrow x_1^{-1} A x_2 = A$.

References

[1] A. *Speiser:* Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 2nd ed., Julius Springer Verlag, Berlin, 1927.

Author's address: 140 00 Praha 4, Na Jezerce 43.

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

BOHDAN ZELINKA, Liberec: *Groups and polar graphs.* (Grupy a polární grafy.)

Polární grafy představují nový typ grafů, který byl zaveden F. Zítkem. V práci se k dané grupě G a její podmnožině A definuje jistý polární graf $PG(\mathfrak{G}, A)$ a zkoumají se jeho vlastnosti.

MIROSLAV DONT, Praha: *A note on a heat potential and the parabolic variation.* (Poznámka o tepelném potenciálu a parabolické variaci.)

Tato poznámka je doplňkem k autorovu článku *On a heat potential* (Czech. Math. J. *25* (*100*), (1975), 84—109). První část se týká úhlových limit tepelného potenciálu Tf definovaného v uvedeném článku, speciálně limit tvaru $\lim_{x \to \varphi(t)+} Tf(x, t)$, $\lim_{x \to \varphi(t)-} Tf(x, t)$. Je nalezena jistá nutná a postačující podmínka pro existenci těchto limit. Ve druhé části je dokázána existence takové spojité funkce s konečnou variací, že parabolická variace této funkce je nekonečná ve skoro všech bodech svého grafu.

VÁCLAV HAVEL, Brno: *Note on weak epimorphisms of* 3-*nets without singular points.* (Poznámka o slabých epimorfismech 3-tkání bez singulárních bodů.)

Jsou-li $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ 3-tkáně (bez singulárních bodů) a π je surjektivní zobrazení bodů z $\mathcal{N}$ na body z $\mathcal{N}'$, pak je vyšetřena vzájemně souvislost toho, kdy zobrazení π zachovává spojitelnost bodů, kolinearitu bodů, přímky jako celek, resp. rovnoběžnost přímek.

SVATOPLUK FUČÍK, Praha: *Boundary value problems with jumping nonlinearities.* (Okrajové úlohy se skákajícími nelinearitami.)

V práci je zkoumána nelineární diferenciální rovnice $u'' + \psi(u) = p$ s okrajovými podmínkami $u(0) = u(\pi) = 0$. Položme $a_- = \lim_{\xi \to -\infty} \psi(\xi)/\xi$, $a_+ = \lim_{\xi \to +\infty} \psi(\xi)/\xi$. Otázka řešitelnosti této okrajové úlohy je řešena za předpokladu, že n^2 ($n = 2, 3, \ldots$) je prvek intervalu o koncových bodech a_- a a_+. Řešitelnost je dokázána pro libovolnou pravou stranu, což je zcela odlišný výsledek než v případě $n = 1$, který obdrželi A. Ambrosetti a G. Prodi.

JÁN JAKUBÍK, Košice: *Lattice ordered groups with cyclic linearly ordered subgroup.* (Zväzovo usporiadané grupy s cyklicky lineárne usporiadanými podgrupami.)

Cieľom práce je riešenie istého problému, ktorý sa týka lineárne usporiadaných podgrúp zväzovo usporiadanej grupy, ktorý bol formulovaný v nedávno publikovanej práci P. Conrada a D. Montgomeryho.

JIŘÍ PAROBEK, Praha: *On the number of normal subgroups of a given prime index.* (O počtu normálních podgrup s daným prvočíselným indexem.)

Pro počet $s_p(G)$ normálních podgrup s prvočíselným indexem p v grupě G řádu n je v článku odvozen vztah $s_p(G) \leqq (p^r - 1)/(p - 1)$, kde r je největší celé číslo takové, že $p^r \mid n$. Dále je popsána jedna třída grup, pro něž hořejší nerovnost přechází v rovnost. Nalezený odhad je tedy nejlepší možný.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

RŮZNÉ

O ČÍSELNOTEORETICKEJ FUNKCII $d(n)$

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 9. septembra 1974)

O počte $d(n)$ kladných deliteľov prirodzeného čísla $n > 1$ platí

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_k + 1) \tag{1}$$

keď

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \tag{2}$$

je kanonický rozklad čísla n (pozri napr. [1], str. 27[1])).

V tomto článku nás zaujíma, čo možno povedať o hodnote funkcie $d(n)$, ak kanonický rozklad čísla n nie je známy úplne.

V cvičení 1 na strane 158 diela [2] je uvedená veta: *Nech $n > 1$ je prirodzené číslo. Potom $d(n) < 2\sqrt{n}$.* Bez dôkazu uvedieme spresnenie tejto vety:

Nech $n > 1$ je prirodzené číslo. Ak je n štvorcom celého čísla, tak $d(n) \leqq 2\sqrt{(n)} - 1$, pričom rovnosť platí práve vtedy, keď $n = 4$ a v ostatných prípadoch $d(n) \leqq 2[\sqrt{n}]$, pričom rovnosť platí vtedy a len vtedy, keď $n = 2, 3, 6, 8, 12, 24$.

V ďalšom sa snažíme získať tesnejšie ohraničenie $d(n)$, než poskytuje táto veta.

Veta 1. *Nech $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, $p_1 < p_2 < \dots < p_k$; je kanonický rozklad prirodzeného čísla n a nech $\alpha = \max \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$. Potom platí*

$$n^{\log 2/\alpha \log p_k} \leqq d(n) \leqq n^{\log 2/\log p_1} \tag{3}$$

pričom rovnosť platí práve vtedy, keď n je prvočíslo.

Dôkaz. Platí

$$n^{\log 2/\alpha \log p_k} = \prod_{i=1}^{k} (p_i^{\alpha_i})^{\log 2/\alpha \log p_k} \leqq p_k^{\alpha k \log 2/\alpha \log p_k} = 2^k \leqq \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1) = d(n)$$

[1]) Tu sa funkcia $d(n)$ označuje symbolom $\tau(n)$.

pričom rovnosť platí práve vtedy, keď $p_1 = p_2 = \ldots = p_k$, teda keď $k = 1$ a keď súčasne $\alpha = 1$, teda keď n je prvočíslo.

Ďalej platí

$$(4) \qquad n^{\log 2/\log p_1} = \prod_{i=1}^{k} (p_i^{\alpha_i})^{\log 2/\log p_1} \geqq \prod_{i=1}^{k} (p_i^{\alpha_i})^{\log 2/\log p_i} = \prod_{i=1}^{k} 2^{\alpha_i} \geqq \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1) = d(n)$$

lebo matematickou indukciou sa ľahko dokáže, že $2^\alpha \geqq \alpha + 1$, pričom rovnosť platí práve vtedy, keď $\alpha = 1$. Rovnosť v (4) platí zrejme tiež vtedy, keď $k = 1$, $\alpha = 1$, čiže keď n je prvočíslo.

Tým je veta dokázaná.

Veta 2. *Nech $n > 1$ je prirodzené číslo, ktoré nemá prvočíselného deliteľa menšieho než p_0.*

Potom

$$(5) \qquad d(n) \leqq n^{\log 2/\log p_0}$$

pričom rovnosť platí práve vtedy, keď n je prvočíslo, $p_0 = n$.

Dôkaz. Pretože $p_1 \geqq p_0$, vyplýva (5) z (3).

Poznámka. Ak je n zložené číslo, potom $p_k \leqq n/p_0$ a teda podľa (3) platí

$$d(n) \geqq n^{\log 2/\alpha \log(n/p_0)} .$$

Ak napr. $2,3 \nmid n$, teda $p_0 = 5$, je podľa (5) $d(n) \leqq n^{\log 2/\log 5} < n^{0,44} < \sqrt{n}$. Ak je $p_0 = 101$, je $d(n) < n^{0,1502} < \sqrt[5]{n}$.

Literatúra

[1] *Vinogradov I. M.*: Osnovy teorii čisel, Moskva—Leningrad, 1952.

[2] *Sierpiński W.*: Elementary Theory of Numbers, Warszawa 1964.

Adresa autora: 801 00 Bratislava, Sibírska 3.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

JEDEN PŘÍKLAD HARMONICKÉHO SVAZKU

JOSEF KRÁL, Praha

(Došlo dne 24. února 1975)

Buď X lokálně kompaktní (Hausdorffův) topologický prostor. V teorii harmonických prostorů (viz [3]) se harmonickým svazkem na X rozumí zobrazení $\mathscr{H}$, přiřazující každé neprázdné otevřené množině $U \subset X$ vektorový prostor $\mathscr{H}(U)$ spojitých reálných funkcí na U takovým způsobem, že jsou splněny následující požadavky:

a) Jsou-li množiny $\emptyset \neq U \subset V \subset X$ otevřené, pak pro každou funkci $h \in \mathscr{H}(V)$ patří její restrikce na množinu U do prostoru $\mathscr{H}(U)$.

b) Je-li množina U sjednocením neprázdného systému $\{U_\iota\}_{\iota \in I}$ otevřených množin $U_\iota \neq \emptyset$ a je-li h taková funkce na U, že její restrikce na množinu U_ι patří do $\mathscr{H}(U_\iota)$ pro každé $\iota \in I$, pak $h \in \mathscr{H}(U)$.

Připomeňme ještě, že relativně kompaktní otevřená množina $V \subset X$ s hranicí $\partial V \neq \emptyset$ se nazývá $\mathscr{H}$-regulární, jestliže ke každé spojité reálné funkci f na ∂V existuje právě jedna funkce $H_f^V \in \mathscr{H}(V)$ taková, že

$$\lim_{\substack{x \to y \\ x \in V}} H_f^V(x) = f(y)$$

pro každé $y \in \partial V$, a jestliže navíc $H_f^V \geqq 0$ na V v případě, že $f \geqq 0$ na ∂V. V Bauerově i Brelotově axiomatice harmonických prostorů se žádá, aby $\mathscr{H}$-regulární množiny tvořily bázi topologie prostoru X a tento tzv. axiom báze se doplňuje výše formulovaným axiomem svazku (sestávajícím z požadavků a), b)) a vhodným konvergenčním axiomem. N. Boboc, C. Constantinescu a A. Cornea dokázali v [1] (viz též kap. 1 v [3]), že prostor X je nutně lokálně souvislý, je-li opatřen harmonickým svazkem $\mathscr{H}$, jenž je nedegenerovaný v každém bodě $x \in X$ (v tom smyslu, že existuje otevřené okolí U bodu x a funkce $h \in \mathscr{H}(U)$ tak, že $h > 0$ na U) a splňuje následující Bauerův konvergenční axiom:

Pro každou neprázdnou otevřenou množinu $U \subset X$ a každou lokálně omezenou neklesající posloupnost funkcí $h_n \in \mathscr{H}(U)$ je $\lim_n h_n \in \mathscr{H}(U)$.

V definici Brelotova harmonického prostoru se postuluje axiom svazku, axiom báze a následující Brelotův konvergenční axiom (srv. [2]):

Je-li D otevřená souvislá podmnožina v X a $\{h_n\}$ neklesající posloupnost funkcí z $\mathscr{H}(D)$ taková, že posloupnost $\{h_n(x)\}$ konverguje aspoň pro jeden bod $x \in D$, pak tato posloupnost konverguje pro všechna $x \in D$ a $\lim_n h_n \in \mathscr{H}(D)$.

Tyto axiomy se zpravidla doplňují požadavkem lokální souvislosti prostoru X. S ohledem na výše citovaný výsledek N. Boboca, C. Constantinesca a A. Cornea přirozeně vzniká otázka (kterou na semináři z matematické analýzy formuloval J. Lukeš), zda souvislý prostor X opatřený nedegenerovaným harmonickým svazkem splňujícím axiom báze a Brelotův konvergenční axiom je již nutně lokálně souvislý. Poznamenejme při této příležitosti, že v knize [4] je požadavek lokální souvislosti prostoru X při definici Brelotova harmonického prostoru opominut, i když se v dalším výkladu jeho lokální souvislosti využívá; tato okolnost vzbuzuje dojem, že odpověď na právě zmíněnou otázku by mohla být kladná. Následující jednoduchý příklad však ukazuje, že tomu tak není a že v definici Brelotova prostoru je třeba lokální souvislost zvlášť požadovat.

Příklad. Položme $S = \{[x, y];\ x > 0,\ y = \sin(1/x)\}$ a definujme na S funkci

$$s : [x, y] \mapsto \int_{1/\pi}^{x} \sqrt{(1 + x^{-4} \cos^2 x^{-1})}\, \mathrm{d}x\,,$$

jejíž hodnotou v bodě $[x, y]$ je orientovaná délka grafu funkce $y = \sin(1/x)$ mezi úsečkou $1/\pi$ a úsečkou x (tuto délku měříme záporně v případě $x < 1/\pi$). Položme $X_0 = \{0\} \times (-1, 1)$ a nechť $X = X_0 \cup S$; na prostoru X uvažujme topologii indukonou z roviny. Pro každou otevřenou množinu $U \subset X$ označme symbolem $\mathscr{H}(U)$ třídu všech spojitých reálných funkcí h na U s následující vlastností:

Ke každé komponentě D množiny $U \cap S$ existují reálné konstanty k_1, k_2 tak, že $h = k_1 + k_2 s$ na D.

Není obtížné nahlédnout, že $\mathscr{H} : U \mapsto \mathscr{H}(U)$ je harmonický svazek na X, jenž je nedegenerovaný v každém bodě prostoru X (poznamenejme, že konstantní funkce na X patří do $\mathscr{H}(X)$). Snadno se též zjistí, že $\mathscr{H}$-regulární množiny tvoří bázi topologie X. Je-li D libovolná otevřená souvislá množina v prostoru X, pak v případě $D \cap X_0 \neq \emptyset$ sestává $\mathscr{H}(D)$ jedině z konstantních funkcí a Brelotův konvergenční axiom je pro D splněn; v případě $D \subset S$ je tento konvergenční axiom rovněž splněn, neboť funkce z $\mathscr{H}(D)$ jsou pak lineární v s. Prostor X je přitom souvislý, ale nikoli lokálně souvislý.

Literatura

[1] *N. Boboc, C. Constantinescu, A Cornea:* Axiomatic theory of harmonic functions. Nonnegative superharmonic functions. Annales de l'Institut Fourier Grenoble *XV* (1965), 283–312.

[2] *M. Brelot:* Extension axiomatique des fonctions sous-harmoniques I. C.R. Acad. Sci. Paris *246* (1958), 2709–2712.

[3] *C. Constantinescu, A. Cornea:* Potential theory on harmonic spaces. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1972.

[4] *N. du Plessis:* An introduction to potential theory. Oliver & Boyd, Edinburgh 1970.

Adresa autora: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

RECENSE

J. W. Dettman: MATEMATICKÉ METODY VE FYZICE A TECHNICE. Z angličtiny přeložil J. Langer, vydala ACADEMIA Praha 1970, 356 str., 16 obr., cena 32.— Kčs.

Většina absolventů nejrůznějších nematematických (ať už technických nebo přírodovědních) oborů velmi brzo zjišťuje, že k tomu, aby mohli tvůrčím způsobem pracovat ve svém oboru, potřebují dosti široký matematický základ a dosti hluboké poznatky z řady speciálních matematických disciplin. Přitom s lítostí konstatují, že to, co slyšeli v přednáškách z matematiky již do značné míry zapomněli a že tedy musí sáhnout po vhodné literatuře. Pro tuto situaci (a pro mnoho jiných) je vhodná Dettmanova kniha, představující z matematického hlediska velmi kultivovaně napsaný úvod do matematické fyziky.

Obsah knihy je rozdělen do 6. kapitol. 1. kap. obsahuje stručně a srozumitelně shrnuté základní poznatky jak z teorie tak i početní techniky lineární algebry, včetně nekonečně rozměrných lineárních prostorů, Hilbertova prostoru a Fourierovy analýzy. Ve 2. kap. jsou vyloženy základní metody variačního počtu. Používá se Hamiltonova principu ke studiu malých kmitů a okrajových úloh matematické fyziky. Je zde formulován problém vlastního čísla a vlastní funkce a podána řada informací o chování vlastních čísel. 3. kap. je věnována metodě separace proměnných pro řešení okrajových úloh. Řešením Sturmova-Liouvilleova problému se přirozeným způsobem získávají systémy ortogonálních funkcí, zejména klasické ortogonální systémy Besselových, Legendreových a kulových funkcí. Pozornost se věnuje rovněž rozvoji funkce v řadu podle ortogonálních funkcí. Metodě Greenovy funkce pro řešení okrajových úloh je věnována kap. 4. Řeší se zde nehomogenní úlohy, např. úlohy z teorie potenciálu a teorie ohybu vln. Je zde rovněž předveden postup, jak lze použít Greenovy funkce k převedení okrajové úlohy na ekvivalentní úlohu formulovanou pomocí integrální rovnice. Této problematice je pak věnována ještě 5. kapitola. Kromě vlastní formulace okrajových úloh v jazyce integrálních rovnic je zde vybudována Hilbertova-Schmidtova a Fredholmova teorie. V poslední, 6. kap. se popisuje metoda integrálních transformací, zejména transformace Fourierovy a Laplaceovy, a to nejen pro řešení obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic, ale i integrálních rovnic.

Stručnost, jasnost a přesnost výkladu jak vlastní teorie tak i početních algoritmů, vhodné motivace pojmů i úvah, ilustrace na řešených příkladech velice usnadňuje čtení této knihy. Navíc má čtenář k disposici u každého tématu řadu cvičení, jejichž řešením si může ověřit správné pochopení probrané látky, procvičit a upevnit příslušné početní algoritmy, prohloubit poznání vzájemných souvislostí jednotlivých metod a učinit si představu o oblasti jejich použitelnosti.

Knihu lze doporučit nejen teoretickým pracovníkům v oblasti přírodních a technických věd, ale i studentům vyšších ročníků vysokých škol a aspirantům.

Jozef Nagy, Praha

A. Angot: UŽITÁ MATEMATIKA PRO ELEKTROTECHNICKÉ INŽENÝRY. Z francouzštiny přeložil A. Ter-Manueliance, 2., nezměněné vydání, SNTL Praha 1971, 820 str., 370 obr., cena 130.— Kčs.

„Toto dílo je psáno především pro elektrotechnické inženýry, avšak jeho studium je třeba doporučit také fyzikům, neboť v teoretických partiích moderní fyziky se užívá vesměs v nejširší míře těch algoritmů, jež jsou v něm vyšetřovány. Pro fyzika stejně jako pro inženýra bude krásná kniha pana plukovníka Angota nevyčerpatelným pramenem nezbytných vědomostí a cenných poučení."

Tak končí svoji předmluvu k prvnímu francouzskému vydání této knihy v r. 1949 slavný fyzik Louis de Broglie. Ovšem vývoj matematických metod používaných ve fyzice a v technice pokračoval za poslední čtvrtstoletí tak rychle, že i sebelepší kniha za tuto dobu zastará. Rozvoj zcela nových metod bádání, nutnost provádět podstatně přesnější (exaktnější) úvahy a systematicky ověřovat předpoklady, za kterých dosažené výsledky platí, proniknutí moderní výpočetní techniky do prací a laboratoří dnešních inženýrů a fyziků vyžadují nejen u vědeckých pracovníků, ale už i u studentů kvalitativně jiné matematické vzdělání, než může poskytnout Angotova kniha. To jsou faktory, které způsobují, že recenzovaná kniha, která během uplynulého čtvrtstoletí sehrála svoji velice kladnou roli a o kterou ještě i dnes inženýři skutečně jeví zájem, slouží dnes pouze jako obsáhlá sbírka vzorců a algoritmů klasických disciplin aplikované matematiky, jejichž oblast použitelnosti, jako u všech sbírek vzorců, musí čtenář (pokud tyto vzorce chce aplikovat poctivě a odpovědně) hledat jinde.

Jozef Nagy, Praha

Peter Crawley, Robert P. Dilworth: ALGEBRAIC THEORY OF LATTICES, Prentice-Hall, Inc., London 1973. Stran vi + 201, cena neudána.

Jak říkají autoři v předmluvě, spočívá jejich přístup v rychlém probrání elementárního úvodu a v soustředění se na obtížnější výsledky. Výběr látky je ovlivněn osobní specializací obou známých odborníků v teorii svazů a byl proveden na základě jejich přednášek v California Institute of Technology.

První a druhá kapitola jsou věnovány uspořádaným množinám a svazům; kromě úvodních pojmů obsahují např. důkaz věty Tarskiho a Davisové o charakterizaci úplných svazů přes existenci pevných bodů izotonních zobrazení.

Distributivní, modulární a semimodulární svazy jsou zavedeny v třetí kapitole. Zde je také odvozena charakterizace distributivních a modulárních svazů pomocí pětiprvkových podsvazů. Pro jednoznačně komplementární svazy jsou udány podmínky, při nichž jsou to Booleovy svazy.

Krátká pátá kapitola uvádí čtenáře do vyšetřování teorie konečných rozkladů s odvozením Kurošovy-Oreovy věty.

V šesté a sedmé kapitole je prováděno zkoumání nekonečných rozkladů pro kompaktně generované svazy. Pro tuto třídu svazů se pak v další kapitole probírá teorie direktních rozkladů.

Ideály a kongruence tvoří náplň kapitoly 9 a 10. Klíčovým výsledkem je zde věta 10.9 charakterizující ty svazy, které jsou izomorfní se svazem kongruencí některého distributivního svazu.

Strukturální teorie, vyšetřování pomocí subdirektních součinů a reprezentace svazů ve svazu všech rozkladů na dané množině jsou obsahem dalších dvou kapitol.

Geomodulární svazy a kombinatorické metody jsou jádrem kapitoly 13 a 14. Čtenář zde najde důkaz Dilworthovy věty o počtu prvků konečného modulárního svazu, které mají právě k horních (resp. právě k dolních) sousedů. (Poznamenejme, že poměrně komplikovaný důkaz této věty stále přitahuje pozornost matematiků. V poslední době vyšly dva články věnované důkazu této věty.)

Otázky svazů s konečnou či nekonečnou dimenzí jsou zkoumány v kapitole 15.

Závěrečné dvě kapitoly jsou z hlediska monografií věnovaných teorii svazů obzvláště cenné, neboť shrnují důležité výsledky z teorie volných svazů a věty o varietách svazů. Uveďme jako typický příklad zde podaný důkaz obdivuhodné Dilworthovy věty o možnosti vnoření kteréhokoli svazu do některého jednoznačně komplementárního svazu.

Knihu doplňuje dvoustránkový rejstřík, odkazy na 90 původních prací a 24 obrázků.

V předmluvě autoři u čtenáře předpokládají znalost základů teorie množin a moderní algebry. Dle mého soudu to lze zpřesnit tak, že od čtenáře je požadováno obstojné zvládnutí techniky důkazů, a to tím spíše, že řadu výroků autoři nedokazují, ale ponechávají je čtenáři jako cvičení. Pro ukázku uveďme, na str. 72 říkají, že normální zúplnění Booleovy algebry (tj. zúplnění pomocí řezů) je opět Booleova algebra a důkaz této věty (v literatuře citované jako Glivenkův-Stoneův teorém) přenechávají čtenáři s výstižnými (a pravdivými) slovy„... The proof is a challenging exercice." (Důkaz je stimulujícím cvičením.).

Prostudování knihy umožní čtenáři dostat se k současným oblastem výzkumu v teorii svazů. Řada dosud otevřených problémů základní povahy je formulována přímo v textu. Za všechny tyto problémy buďtež zde uvedeny alespoň dva na ukázku: Svaz se nazývá (str. 55 a 56) svazem s Kurošovou-Oreovou vlastností, právě když pro každý jeho prvek je jednoznačně určen počet (průsekově) ireducibilních prvků v kterémkoli jemu příslušném nezkratitelném vyjádření. — Nalezněte nutnou a postačující podmínku k tomu, aby daný svaz byl svazem s Kurošovou-Oreovou vlastností. Druhým hezkým otevřeným problémem (str. 17) je popis těch uspořádaných množin, v nichž má každé izotonní zobrazení pevný bod.

Zpracování výkladu knihy je přes konciznost některých částí na výborné úrovni. Snaha po úsporném vyjadřování patrně způsobila přehlédnutí při formulaci věty 9.1 na str. 68. V uvedeném tvaru totiž neplatí. — Je třeba doplnit předpoklad, že uvažovaný svaz nepatří do absolutně degenerované třídy a odpovídajícím způsobem rozšířit důkaz.

Ladislav Beran, Praha

Paul R. Halmos: FINITE-DIMENSIONAL VECTOR SPACES. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin 1974. Str. VIII + 200, cena 19,50 DM.

Kniha je přetiskem svého druhého vydání, které vyšlo v nakladatelství Van Nostrand, Princeton, N. J. Podle tohoto druhého vydání byla kniha přeložena do ruštiny a vyšla v Gos. izd. fyz.-mat. literatury v Moskvě roku 1963. Tak se stala dostupnou a známou širokému okruhu našich čtenářů.

Obsahem knihy je studium vektorových prostorů konečné dimenze, především pak studium lineárních zobrazení v těchto prostorech, dále pak vyšetřování prostorů se skalárním součinem včetně konvergence vektorů a konvergence lineárních zobrazení v nich. Krátký dodatek obsahuje stručnou zmínku o Hilbertově prostoru. Velmi užitečný doplněk textu tvoří více než tři sta cvičení přivádějících čtenáře k samostatnému promýšlení studované látky. Význačným rysem této krásné knížky je okolnost, že všude tam, kde to lze, používá autor metod neomezených jen na prostory konečné dimenze; tím jeho kniha tvoří velmi instruktivní úvod do funkcionální analyzy.

Od čtenáře nevyžaduje kniha předběžných znalostí, je napsána vysoce zajímavě a jasně. Kdo si tuto knihu přečetl a četl i Halmosův článek „*Jak psát matematiku*" (český překlad: Pokroky 1974, č. 2 a 3), jistě uzná, že Halmosova knížka o vektorových prostorech vskutku odpovídá užitečným radám v tomto článku.

Václav Vilhelm, Praha

V. Cruceanu: ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ ŞI GEOMETRIE. Editură didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1973. Str. 354, obr. 58. Cena 16,90 Lei.

Kniha je úvodní učebnicí lineární algebry a geometrie lineárních a kvadratických útvarů v afinních a euklidovských prostorech. První díl, tvořící zhruba polovinu rozsahu knihy, je věnován lineární algebře a autor tu postupuje od pojmu množiny a relace přes pojem grupy, tělesa, základní vlastnosti konečně dimensionálních vektorových prostorů k maticím, determinantům, systémům lineárních rovnic, lineárním zobrazením vektorových prostorů, k bilineárním, kvadratickým a multilineárním formám, speciálně pak k euklidovským vektorovým prostorům, lineárním zobrazením a vnějšímu součinu v těchto prostorech. Výběr látky je tak zaměřen k potřebám druhé, geometrické části, která je těžištěm knihy. Její obsah tvoří studium základních geometrických vlastností afinního a euklidovského n-rozměrného prostoru, lineárních podprostorů, lineárních transformací a nadkvadrik včetně jejich klasifikace. Speciální pozornost je věnována kuželosečkám a kvadrikám. Kniha je dobrým a přístupným úvodem ke studiu geometrie.

Václav Vilhelm, Praha

H. Heyer: MATHEMATISCHE THEORIE STATISTISCHER EXPERIMENTE. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1973. Stran XXII + 209, cena DM 19,80.

Jde o vysokoškolský učební text, tištěný ofsetem (ale ve velmi dobré úpravě a s minimem tiskových chyb), který vznikl především z poznámek autora k přednáškám o matematické statistice, konaným pro studenty středních ročníků na universitách v Erlangenu a v Tübingenu v letech 1970—72, a zčásti též z obsahu semináře o srovnávání experimentů, který autor vedl na Universitě Tübingen. Výklad je poněkud netradiční. Opírá se spíše o teorii míry a funkcionální analýzu (zejména o pojem stochastického jádra) než o teorii pravděpodobnosti; z ní si „vypůjčuje" jen základní věty o rozložení náhodných veličin, o nezávislosti a o podmíněných středních hodnotách. Přitom se omezuje jen na teorii testování hypotéz a teorii odhadu v konečněrozměrném případě; asymptotická teorie je zcela vynechána.

K obsahu knihy: V úvodu najde čtenář ve velmi zhuštěné formě označení, definice a tvrzení z teorie míry, funkcionální analýzy a teorie pravděpodobnosti, důležité pro vlastní výklad. Ten začíná v kapitolách I a II zavedením a diskutováním pojmu postačitelnosti (σ-algebry a statistiky) v obecném případě a za některých dodatečných podmínek. Třetí kapitola se zabývá základy teorie testování hypotéz, jmenovitě existencí maximinimálního testu a existencí nejmohutnějších testů při jednoduché hypotéze a jednoduché alternativě (Neymanovo-Pearsonovo základní lemma) i při složené hypotéze nebo složené alternativě (Bayesovy testy). Ve čtvrté kapitole se využívá Neymanovo-Pearsonovo lemma k vyšetřování třídy parametrických testů s monotonním poměrem věrohodnosti, speciálně pak třídy experimentů exponenciálního typu. Ukazuje se, že existence stejnoměrně nejmohutnějšího testu s danou úrovní α je v podstatě ekvivalentní monotonnímu poměru věrohodnosti a znamená, že experiment je exponenciálního typu. Tím se teoreticky zdůvodňuje omezenost parametrických metod. V páté kapitole se studují odhady parametrů a jejich vlastnosti (nevychýlenost, minimalita — je uvedena Raova-Blackwellova věta), v posledním paragrafu kapitoly též odhady pomocí pořádkových statistik. V posledních dvou kapitolách je vyložena dosti podrobně teorie srovnávání experimentů. Šestá kapitola je věnována srovnávání experimentů z hlediska informativnosti a zavedení pojmu postačitelnosti stochastického jádra, který je zobecněním postačitelnosti σ-algebry a statistiky a hraje zde významnou roli, a konečně sedmá srovnávání konečných experimentů. V krátkém dodatku je uvedeno znění ergodické věty, věty o martingalech a tří vět z teorie konvexních kompaktních množin. Text je uzavřen bibliografickými poznámkami k jednotlivým paragrafům, seznamem literatury, rejstříkem symbolů a věcným rejstříkem.

Autorův přístup k danému tématu je bezesporu zajímavý. Přestože je jeho učebnice určena především studentům, upoutá jistě i nejednoho absolventa v tomto oboru, který má ovšem potřebné znalosti z teorie míry a funkcionální analýzy. Autora je nutno pochválit i za přesnost při výkladu, který se tak stává srozumitelným i přes určitou náročnost. V textu je obsaženo mnoho řešených příkladů.

Knihu lze charakterizovat i slovy samotného autora vyňatými z předmluvy (ve volném překladu): „Výklad základních pojmů matematické statistiky by měl zahrnout alespoň elementy této oblasti, měl by přivést čtenáře k podstatným otázkám teorie při co možná nejmenším vynakládání vedlejšího, nadbytečného úsilí, a všechny úvahy by měly být prováděny na základě jednotného hlediska. V tomto textu byl učiněn pokus vyhovět uvedeným třem požadavkům."

Jaroslav Hustý, Praha

O. Lehto - K. I. Virtanen: QUASICONFORMAL MAPPINGS IN THE PLANE. Grundlehren d. math. Wiss., Bd. 126. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1973. Str. VIII + 258, cena DM 38,—.

Kvasikonformní zobrazení je možno studovat buď jako řešení Beltramiho rovnice nebo přímo geometricky. Monografie je věnována převážně geometrickému studiu, v analytické teorii se autoři zaměřují hlavně na studium situace v nehladkém případě. Uveďme geometrickou definici. **Čtyřúhelníkem** $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ Gaussovy roviny $\mathscr{C}$ nazýváme Jordanovu oblast Q a posloupnost z_1, z_2, z_3, z_4 jejích hraničních bodů. Existuje konformní zobrazení φ, pro které $\varphi(Q)$ $\{\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4)\}$ je pravoúhelník se stranami délek a a b; modul $M(Q)$ definujeme jako konformní invariant a/b. Orientaci zachovávající homeomorfismus $\varphi : G \to \mathscr{C}$ oblasti G se nazývá K-kvasikonformním zobrazením, jestliže $K(G) = \sup \{M(\varphi(Q))/M(Q)\} \leqq K < \infty$, kde sup je přes všechny 4-úhelníky $Q(z_i)$, pro něž $\bar{Q} \subset G$. Dokazuje se, že konformní zobrazení jsou právě 1-konformní zobrazení. Původní Grötzschova definice z r. 1928 je s udanou definicí ekvivalentní pro difeomorfismy třídy C^1. Kvasikonformita je rovněž definována pomocí modulu $M(B)$ 2-souvislých oblastí B; B je možno konformně zobrazit na mezikruží $\{0 \leqq r_1 < |z| < r_2 \leqq \infty\}$ a definuje se $M(B) = \log(r_2/r_1)$. Nyní φ je K-kvasikonformní právě když $M(\varphi(B)) \leqq K\,M(B)$ pro každou B, $\bar{B} \subset G$.

Jedním z hlavních problémů je tento: Nechť W je množina kvasikonformních zobrazení φ oblasti G a $z_1, z_2 \in G$; jest nalézti supremum vzdáleností bodů $\varphi(z_1)$, $\varphi(z_2)$. Tento problém je probírán ve druhé kapitole. Dále je probírán problém existence kvasikonformních zobrazení s daným zobrazením hranic.

Třetí kapitola je celá věnována elementárně vyloženým pomocným výsledkům z reálné analýzy; probírá se míra, integrál, skoro všude diferencovatelné homeomorfismy, aproximace měřitelných funkcí, funkce s L^p-derivacemi, Hilbertova transformace. Výsledky této kapitoly se užívají dále k nalezení ekvivalentních analytických definic. V G uvažujme Beltramiho rovnici $(*)$ $w_{\bar{z}} = \varkappa w_z$, kde $\varkappa$ je (skoro všude v G definovaná) měřitelná funkce s $\sup |\varkappa(z)| < 1$. Funkce w se nazývá zobecněným řešením rovnice $(*)$, jestliže w je absolutně spojitá na přímkách v G a derivace $w_{\bar{z}}$, w_z (které pak nutně existují skoro všude) splňují $(*)$ skoro všude; zobecněné L^p-řešení má pak navíc L^p-derivace. Nyní platí následující tvrzení: K-kvasikonformní zobrazení w je zobecněné L^2-řešení rovnice $(*)$; obráceně, jestliže $\varkappa$ je měřitelná funkce a $(K + 1)\,|\varkappa(z)| \leqq K - 1$, pak každé homeomorfní zobecněné řešení rovnice $(*)$ je K-kvasikonformní zobrazení. Pro měřitelnou $\varkappa$ s $\sup |\varkappa(z)| < 1$ pak vždy existuje řešení. Tyto existenční otázky jsou předmětem páté kapitoly; jedním z prostředků je převedení Beltramiho rovnice na integrální rovnici Hilbertovou transformací.

Kniha není monografií, která by dávala přehled celého oboru. Je však nepostradatelná pro každého, kdo se chce zabývat kvasikonformními zobrazeními. První vydání této knihy vyšlo v německé versi v r. 1965.

Alois Švec, Praha

A. Grothendieck - J. A. Dieudonné: ELÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE I. Grundlehren d. math. Wiss., Bd. 166. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1971. Str. IX + 466, cena DM 84,—.

Podle autorů se celé dílo má skládat z dvanácti kapitol: jazyk schemat, studium globálních vlastností některých tříd morfismů, kohomologie algebraických koherentních svazků, lokální studium schemat a jejich morfismů, projektivní morfismy, konstrukce schemat, schemata v grupách a hlavní fibrované prostory, Picardova schemata, fundamentální grupa, residua a dualita, teorie průniků a Riemannova-Rochova věta, kohomologie schemat. Autoři předpokládají znalost komutativní algebry, homologické algebry a teorie svazků. Recensovaná kniha obsahuje (mimo dvousetstránkové „nulté" kapitoly s předběžnými pomocnými výsledky) pouze první kapitolu výše uvedeného přehledu.

Alois Švec, Praha

I. R. Shafarevich: BASIC ALGEBRAIC GEOMETRY. Grundlehren d. math. Wiss., Bd. 213. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1974. Str. XV + 439, cena 98 DM.

Kniha je Hirschovým překladem ruského originálu, vyšlého v r. 1972 (Nauka, Moskva). Předpokládám, že čtenář, zajímající se o algebraickou geometrii, se již seznámil s ruskou verzí, která je u nás dostupná. Ve světové literatuře je kniha jistě nejkvalitnější učebnicí; poprvé se v ní setkáváme se zpracováním teorie schemat učebnicovým způsobem. Zpracování jiných témat je velmi originální a styl výkladu je dokonalý, velkou pomocí je nepochybně i řada příkladů. Velmi cenný je historický dodatek. Protože se jedná o překlad, není třeba knihu podrobněji analyzovat.

Alois Švec, Praha

Murray Rosenblatt: RANDOM PROCESSES (2nd edition). Graduate Texts in Mathematics 17. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1974. Stran x + 228, cena 31,40 DM.

První vydání této knihy vyšlo již v r. 1962 v Oxford University Press, Inc. Recenzi na ně napsal Karlin v Math. Rew. *24* (1962) A 3686. Druhé vydání se od prvního liší hlavně přidáním kapitoly o martingalech.

Kniha má sloužit jako úvodní vysokoškolská učebnice náhodných procesů. Explicitně se předpokládá pouze základní znalost diferenciálního a integrálního počtu a elementy teorie matic. Nežádají se však žádné předběžné vědomosti ani z teorie pravděpodobnosti ani z matematické statistiky. Tím se může stát tato publikace velmi atraktivní pro ty pracovníky, kteří mají vysokoškolské vzdělání v matematice a potřebují se seznámit s teorií náhodných procesů. V knize je uvedena i řada zajímavých příkladů. Aby výklad nebyl přetížen matematickým aparátem, je na některých místech použit jen heuristický náhled.

Rosenblattova kniha je rozdělena do devíti kapitol. Nejprve v ní je obsaženo úvodní pojednání o základech teorie pravděpodobnosti zahrnující slabý zákon velkých čísel, centrální limitní větu a dokonce i výklad o entropii. Následují kapitoly o markovských řetězcích, o základech obecné teorie náhodných procesů, o striktně stacionárních procesech, o markovských procesech, o slabě stacionárních procesech a o martingalech. Poslední kapitola v knize je tvořena několika dodatky, které se vzhledem k svému specifickému obsahu nepřimykají bezprostředně k žádné z předchozích kapitol.

Výběr jednotlivých témat i volba prezentovaných důkazů do značné míry odrážejí zájmy autora. Je ovšem otázka, zda třebas zařazení důkazu Weierstrassovy věty o aproximaci jen kvůli němu samému (str. 21) je vhodnou částí úvodu k náhodným procesům a zda netradiční důkaz centrální limitní věty (str. 24) bude pro čtenáře skutečně výhodnější. Při čtení je třeba si všimnout, že pojem „positivně definitní matice" má jiný význam na str. 82 a jiný na str. 83. Definice Wienerova procesu na str. 94 není příliš obratná; z kontextu by se mohlo zdát, že každý normální proces se obvykle nazývá Wienerův. Na str. 199 v poznámce 1 jsou vynechané symboly.

K sympatickým rysům patří řada stručných historických poznámek, z nichž čtenář získá představu o postupném budování teorie náhodných procesů. Za každou kapitolou jsou umístěna cvičení s různým stupněm obtížnosti. Celkem jich je v knize 94. Rosenblattova kniha si již získala své místo ve statistické literatuře. Lze ji doporučit jako přehledný úvodní kurs náhodných procesů.

Jiří Anděl, Praha

Eberhard Oeljeklaus, Reinhold Remmert: LINEARE ALGEBRA I, Heidelberger Taschenbücher, Band 150, Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1974, 280 + xv stran, cena 19,80 DM.

Kniha je první částí učebnice lineární algebry, která vznikla z přednášek prof. Remmerta na universitách v Erlangen a Göttingen.

V kapitole 0 *Mengen und Abbildungen* jsou probrány základní poznatky z teorie množin, zobrazení a relací.

Kapitola I *Algebraische Strukturen* uvádí elementární poznatky z teorie grup, okruhů, těles a okruhů polynomů. Podrobněji jsou studovány vlastnosti symetrické a alternující grupy permutací.

V kapitole II *Elementare Modultheorie* jsou zavedeny základní pojmy z teorie modulů, jako jsou modul, podmodul, faktormodul, okruh endomorfizmů, grupa automorfizmů a jsou dokázány základní vlastnosti těchto pojmů včetně věty o homomorfizmu a vět o izomorfizmu. § 4 je věnován studiu duality v modulech.

Kapitola III *Theorie endlich erzeugbarer Moduln* se zabývá soustavami generátorů modulů, cyklickými a volnými moduly, direktními součty modulů, hodností modulu. Z dokázaných výsledků je odvozena teorie konečně rozměrných vektorových prostorů.

Kapitola IV *Abbildungen und Matrizen* je věnována studiu matic, jejich ekvivalenci a podobnosti, hodnosti matice, vlastnostem úplného maticového okruhu R^n nad okruhem R, vlastnostem obecné a speciální lineární grupy $G(m, R)$ a teorii řešení soustav lineárních rovnic nad tělesem.

Kapitola V *Determinanten* začíná studiem multilineárních a alternujících forem. Je zaveden pojem determinantu a jsou odvozena základní pravidla pro počítání s determinanty. § 6 je věnován použití teorie determinantů na řešení soustav lineárních rovnic (Cramerovo pravidlo).

V dodatku *Noethersche, artinsche, halbeinfache Moduln* jsou studovány základní vlastnosti noetherovských, artinovských a polojednoduchých modulů a okruhů. Je zde dokázána např. Hilbertova věta o bazi a některé strukturní věty o konečně generovaných polojednoduchých modulech.

Ladislav Bican, Praha

MATHEMATICAL METHODS IN QUEUEING THEORY (Matematické metody v teorii hromadné obsluhy). Sborník konference pod redakcí A. B. Clarka, vyšel jako 98. svazek edice Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems v nakladatelství J. Springer, Berlín—Heidelberg—New York, 1974; 380 stran, cena 28,— DM.

V květnu 1973 se na Western Michigan University v Kalamazoo konala velká konference o matematických metodách teorie hromadné obsluhy, jíž se zúčastnilo přes 80 odborníků, převážně z USA a z Kanady. Recensovaná kniha je sborníkem obsahujícím 18 referátů přednesených na této konferenci.

Pokusím se tu alespoň stručně vystihnout obsah, resp. tématiku jednotlivých referátů.

M. F. Neuts (Markovovský větvící se proces obnovy) podal definici a nejdůležitější vlastnosti určitého typu stochastických procesů užitečného při studiu pracovních intervalů v různých systémech hromadné obsluhy.

R. L. Disney a W. P. Charry (Některé otázky z teorie obsluhových sítí) se zabývali procesy výstupů ze systémů hromadné obsluhy, systémy se zpětnou vazbou a markovovskými sítěmi.

J. Keilson (Konvexita a úplná monotónie zákonů rozložení v systémech hromadné obsluhy a příslušné limitní chování) studoval hlavně otázky robustnosti charakteristik systémů hromadné obsluhy.

G. F. Newell (Grafické znázornění fronty v systémech obsluhy s více obsluhovými linkami) napsal podnětnou *přehlednou* stať na toto téma.

N. U. Prabhu (Wienerovsko-hopfovské techniky v teorii hromadné obsluhy) ukázal, jak lze princip wienerovsko-hopfovské faktorisace rozšířit na případ spojitého času a jak toho lze využít v teorii hromadné obsluhy.

L. Takács (Problémy doby obsazení v teorii hromadné obsluhy) podal systematický přehled o využití rozložení doby setrvání v problémech teorie hromadné obsluhy.

T. P. Bagchi a J. G. C. Templeton (Některé systémy obsluhy s omezenou čekárnou a skupinovou obsluhou) studovali tyto systémy metodou vnořeného Markovova řetězce.

U. N. Bhat (Některé problémy uzavřených systémů hromadné obsluhy) rozvíjel analytické metody pro studium systémů typu $M/G/1$ a $G/M/s$ s konečným počtem zákazníků.

C. M. Harris (Některé nové výsledky statistické analysy systémů hromadné obsluhy) se ve svém referátu věnoval poměrně málo pěstované problematice statistických odhadů vstupních a obsluhových intensit.

R. Loulou (O rozšíření limitních vět na systémy s více linkami) se zabýval systémy obsluhy v tzv. „těžkém" provozu.

S. R. Neal a A. Kuczura (Teorie chyb měření provozu pro ztrátové systémy s rekurentním vstupem) zevrubně prozkoumali otázku, jak přesné odhady charakteristik provozu telekomunikačního zařízení, chápaného jako systém hromadné obsluhy, lze získat ze znalosti hodnot tří parametrů, které se dají přímo měřit.

M. J. Sobel (Optimální operace se systémy hromadné obsluhy) podal přehled novějších prací o optimalisačních problémech v systémech obsluhy, v nichž lze ovládat — zcela nebo v určitých mezích — některé parametry, měnit frontové režimy, strukturu systému, zasahovat do procesu příchodů atp.

S. Stidham jr. a N. U. Prabhu (Optimální řízení systémů hromadné obsluhy) se v dlouhé stati s bohatým seznamem literatury snaží dokázat, že by bylo účelné vypracovat speciální teorii optimálního řízení systémů hromadné obsluhy, jež by nahradila dosavadní pokusy o aplikaci, resp. přizpůsobování obecných optimalisačních metod.

V. L. Wallace (Algebraické metody numerického řešení obsluhových sítí) se zabýval problematikou numerického zpracování markovovských obsluhových sítí a hledání jejich stacionárních pravděpodobností.

W. Whitt (Přehled limitních vět pro systémy hromadné obsluhy v těžkém provozu) přehledně zreferoval současný stav bádání o tzv. těžkém provozu a upozornil na otevřené problémy; příslušné limitní věty lze, jak uvedl, chápat jednak jako popis chování nestabilních systémů, jednak jako aproximaci chování systémů stabilních. K referátu je připojen seznam literatury se 182 odkazy.

D. J. Daley (Poznámky o výstupních procesech) se zajímal o zákony rozložení, momenty a charakterisaci procesů odchodů ze stabilisovaného systému.

P. Purdue (Jednolinkový systém hromadné obsluhy v markovovském prostředí) studoval systémy s nestacionárním procesem příchodů a proměnnou intensitou obsluhy.

S. G. Moharty (O dalších kombinatorických metodách v teorii hromadné obsluhy) přinesl několik výsledků v duchu známých Takácsových kombinatorických metod ve stochastických procesech.

Ve sborníku není bohužel zachycena diskuse k referátům, jíž bylo na konferenci věnováno údajně velmi mnoho času. Přesto poskytuje sborník velice cennou a prakticky nezastupitelnou možnost seznámit se s aktuálními problémy a současnými vývojovými tendencemi teorie hromadné obsluhy, alespoň pokud se týče amerického kontinentu. Může se tak stát vhodným pramenem inspirací pro další výzkumnou činnost v tomto oboru, o jehož teoretické zajímavosti a praktické závažnosti dnes již není pochyb.

František Zítek, Praha

Kai Lai Chung: ELEMENTARY PROBABILITY THEORY WITH STOCHASTIC PROCESSES (Elementární teorie pravděpodobnosti se stochastickými procesy). V řadě Undergraduate Texts in Mathematics vydalo nakladatelství J. Springer, New York—Heidelberg—Berlin, 1974; 353 stran, cena 29,40 DM.

Je známo, že dobrou učebnici může napsat jenom ten, kdo sám zná mnohem více, nežli se snaží vyložit. Kai Lai Chung patří dnes bezpochyby ke světové špičce v teorii pravděpodobnosti a již jeho jméno je zárukou kvality recensované knihy.

Ta je míněna (a vznikla) jako úvodní kurs teorie pravděpodobnosti asi na úrovni druhého ročníku vysoké školy. Nepředpokládá žádné předběžné znalosti z teorie pravděpodobnosti (ani z abstraktní teorie míry), není však určena čtenářům bez základních znalostí matematické analysy.

Nebylo jistě lehké napsat učebnici právě na této střední úrovni. Autor však dokázal obratně proplout mezi Scyllou přehnané abstrakce a Charybdou povídavé popularisace: ani nedělá z pravděpodobnosti málo srozumitelnou teorii bez vztahu k aplikacím, ani nepředstírá, že jde jen o hraní si s problémy, na jejichž řešení stačí zdravý úsudek s trochou kombinatoriky.

Výběr látky vykládané v knize je ovšem standardní: od obvyklých kombinatorických základů (v moderním množinovém rouše) přes náhodné veličiny, zákony rozložení (diskrétní a spojité zvlášť, bez Stieltjesova integrálu), nezávislost, až k náhodným procházkám a Markovovým řetězcům — to jsou zajisté základní pojmy teorie pravděpodobnosti, bez nichž se nelze obejít.

Tyto klasické partie byly již v literatuře mnohokráte zpracovány; jestliže se autorovi přesto podařilo napsat knihu originální pojetím i způsobem výkladu, svědčí to o jeho hlubokých znalostech i pedagogickém mistrovství. Ke srovnání se nabízí snad nejspíše první díl Fellerova Úvodu. Ten snad zahrnuje více materiálu, zdá se mi však mnohem sušší.

I pro toho, kdo teorii pravděpodobnosti již zná, je četba Kai Lai Chungovy knihy vzrušujícím zážitkem. Autor vede neustálý dialog se čtenářem, klade mu otázky, které zdaleka nejsou jenom řečnické, vyžaduje od něho přemýšlení a aktivní spoluúčast. Výkladový text není suchopárný, autor neskrblí historickými poznámkami, upozorňuje na možné, resp. často se vyskytující chybné úsudky, předkládá zajímavé, netriviální příklady k řešení. K textu jsou připojena četná cvičení, většinou s výsledky.

Knihu lze jen doporučit: matematikům pro první seznámení s teorií pravděpodobnosti (uchrání je mj. ilusí o teorii pravděpodobnosti jako o pouhé součásti teorie míry), ale také odborníkům v „sousedních" oborech (operační výzkum, ekonomie, biologie, některé společenskovědní obory) jako standardní učebnici pravděpodobnosti. I když je kniha tzv. selfcontained, netroufl bych si ji dát do rukou samoukům, je to však pravý poklad pro vyučujícího.

František Zítek, Praha

RECENT ADVANCES IN GRAPH THEORY, v edici Symposia ČSAV vydala Academia Praha r. 1975 nákladem 700 výtisků na 548 stranách za 150 Kčs (34,50 US $).

Sborník obsahuje (v angličtině) všech 65 přednášek a referátů přednesených na Druhém pražském symposiu o teorii grafů. Toto symposium pořádal Matematický ústav ČSAV, Matematický ústav SAV a matematicko-fyzikální fakulta KU v červnu 1974 a zpráva o něm obsahující m. j. seznam všech příspěvků, a tedy vlastně obsah sborníku, byla uveřejněna v tomto časopise roč. *100* (1975), č. 1, str. 103—104. Na závěr je uvedeno 11 otevřených problémů. Škoda, že publikace vyšla v nákladu, který zdaleka neodpovídal velkému zájmu zejména zahraničních institucí. S tím také asi souvisí cena, jež se i v dnešní době zdá za nevázanou knížku poněkud horentní.

Antonín Vrba, Praha

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

ZPRÁVY

XVII. MMO

XVII. Mezinárodní matematická olympiáda (MMO) se konala ve dnech 3.—16. července 1975 v Bulharsku, v Burgasu a v Sofii. Zúčastnilo se jí 17 zemí: Bulharsko, Československo, Francie, Holandsko, Jugoslávie, Maďarsko, Mongolsko, NDR, Polsko, Rakousko, Rumunsko, Řecko, Sovětský svaz, Švédsko, USA, Velká Británie a VDR. Soutěž proběhla vcelku již tradičním způsobem a také její výsledky odpovídaly většinou očekávání. Československé družstvo nedosáhlo nijak výrazných úspěchů; z našich žáků jen dva, M. Valášek z Prahy a J. Navrátil z Olomouce, získali třetí cenu.

Podrobnější zprávu o průběhu a výsledcích XVII. MMO přinesl členský časopis JČSMF Pokroky matematiky, fyziky a astronomie; zpráva bude také otištěna v brožuře o XXIV. ročníku naší MO, která vyjde v SPN.

František Zítek, Praha

OBHAJOBY A DISERTAČNÍ PRÁCE KANDIDÁTŮ VĚD

Před *komisemi pro obhajoby kandidátských disertačních prací* obhájili dne 13. února 1975 Milan Mareš práci na téma: „Predikace vyjednávání ve strategických koaličních hrách s konečnou identifikací a s kompenzacemi", dne 14. února 1975 RNDr. Petr Kratochvíl práci na téma: „Konvergence multiposloupností a její aplikace v teorii pravděpodobnostní míry", dne 18. dubna 1975 RNDr. Eliška Moravusová práci na téma: „Maticový počet ve školské matematice a dne 20. června 1975 Ing. Karel Vašek práci na téma: „Asymptotické vlastnosti pravděpodobnosti chybného dekódování pro markovské zdroje informace".

Redakce

ČTVRTÉ PRAŽSKÉ TOPOLOGICKÉ SYMPOSIUM

Od roku 1961 se koná v Praze každých pět let Symposium o obecné topologii a jejích vztazích k moderní analyse a algebře. Čtvrté symposium připadá na rok 1976 a je předběžně plánováno na dny od 23. do 27. srpna 1976. Zájemci o podrobnější informace o symposiu mohou napsat předsedovi organisačního výboru akademiku J. Novákovi na adresu Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.

Redakce

OZNÁMENÍ

Mezinárodní matematické centrum S. Banacha ve Varšavě pořádá v září až prosinci 1976 semestr věnovaný matematické statistice. Odbornou náplň semestru mají tvořit tato témata: Řízení procesů, Mnohorozměrná analýza, Analytické metody statistiky, „case models" a Spektrální analýza stochastických procesů.

Semestr je určen pro kandidáty věd a pracovníky, kteří se připravují z této oblasti na vědeckou práci. Celý pobyt vysílaného pracovníka hradí vysílající pracoviště. Účast pracovníků z ČSSR na programu schvaluje Vědecké kolegium matematiky ČSAV.

Pro další 4 semestry v Banachově centru byla předběžně navržena tato témata: diskrétní matematika, spektrální teorie operátorů, parciální diferenciální rovnice a algoritmické jazyky.

Redakce