ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 101 * PRAHA 17. 5. 1976 * ČÍSLO 2

ON SOME LINEAR VOLTERRA DELAY EQUATIONS

JIŘÍ CERHA, Praha

(Received June 6, 1973)

The L^p-solutions of the equation

$$\text{(I)} \qquad x(t) = a(t) + \int_0^t B(t, s)\, x(\mu(s))\, ds$$

with $\mu(t) \leqq t$ are investigated. R. K. MILLER has constructed the *resolvent kernel* of (I) with $\mu(t) = t$ in [9] using *Picard successive approximation method.* Using this kernel, an explicit formula for the solution x of (I) corresponding to the right-hand side a is available. Similarly, we shall find the resolvent kernel R of (I) in general case solving the *resolvent equation*

$$\text{(R)} \qquad R(t, s) = B(t, s) + \int_s^t B(t, u)\, R(\mu(u), s)\, du$$

or

$$\text{(R')} \qquad R(t, s) = B(t, s) + \int_s^t R(t, u)\, B(\mu(u), s)\, du\,.$$

This kernel enables us to express the solution x of (I) using the explicit *resolvent formula*

$$\text{(X)} \qquad x(t) = a(t) + \int_0^t R(t, s)\, a(\mu(s))\, ds\,.$$

Modifying this method, similar results for continuous solutions and for the solutions of more complicated equation

$$(\hat{\text{I}}) \qquad x(t) = a(t) + \int_0^t \sum_\alpha B^\alpha(t, s)\, x(\mu^\alpha(s))\, ds$$

will be shown. The continuous dependence of x on the kernel B and the delay function μ is investigated in the second part. The equations considered comprise the linear cases of the differential delay equations introduced by L. E. ELSGOLĆ and S. B. Norkin in [6] and many of the cases introduced by A. B. Myškis in [10]. We may also find close relationships to some linear cases of the functional differential equations investigated by J. Hale in [8].

1. EXISTENCE AND UNICITY THEOREMS

1. Notation. We shall fix an integer $n \geqq 1$, real numbers τ, T; $\tau \leqq 0 < T$; real numbers p, q; $1 \leqq p \leqq \infty$, $1 \leqq q \leqq \infty$; $1/p + 1/q = 1$. $|\cdot|$ will be the Euclidean norm of matrices. We put $J = \langle \tau, T \rangle$. We shall write

$$\|f\|_r = \left(\int_J |f|^r \right)^{1/r}, \quad 1 \leqq r < \infty ;$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{vrai\,sup}_t |f(t)|$$

for a matrix-valued (Lebesgue) measurable function f on J. $f \circ \mu$ will be the composition of functions f, μ;

$$(B \circ \mu)(t, s) = B(\mu(t), s) ; \quad t, s \in J ;$$

$$\|B\|_{r,s} = \left[\int_J \left(\int_J |B(t, u)|^s \, du \right)^{r/s} dt \right]^{1/r} ; \quad 1 < r < \infty , \quad 1 < s < \infty ;$$

$$\|B\|^{r,s} = \left[\int_J \left(\int_J |B(t, u)|^r \, dt \right)^{s/r} du \right]^{1/s} ; \quad 1 < r < \infty, \quad 1 < s < \infty ;$$

$$\|B\|_{r,\infty} = \left[\int_J (\operatorname*{vrai\,sup}_s |B(t, s)|)^r \, dt \right]^{1/r} , \quad 1 < r < \infty ;$$

$$\|B\|_{\infty,s} = \operatorname*{vrai\,sup}_t \left(\int_J |B(t, u)|^s \, du \right)^{1/s} , \quad 1 < s < \infty .$$

for a measurable function B on the cartesian product $J \times J$ and a function $\mu : J \to J$.

2. μ-assumptions. Let

(2,1) $\mu : J \to J$;

(2,2) μ be a measurable function on J;

(2,3) $\tau \leqq \mu(t) \leqq t$ for all $t \in J$.

3. B-assumptions. Let

(3,1) B be a finite complex $n \times n$-matrix-valued function defined for all points of the interval $J \times J$;

(3,2) $B(t, s) = 0$ for $s < 0$ or $s > t$;

(3,3) B be measurable on $J \times J$;

(3,4) $B \circ \mu$ be measurable on $J \times J$;

(3,5) $|B(t, s)| \leqq g(t)\, h(s)$; $t, s \in J$;

(3,6) $|B(\mu(t), s)| \leqq g(t)\, h(s)$; $t, s \in J$,

where the real functions g, h satisfy $\|g\|_p < \infty$, $\|h\|_q < \infty$. We shall sometimes use weaker assumptions

(3,7) $\|B(t, \cdot)\|_q < \infty$, $\|B(\mu(\cdot), t)\|_p < \infty$, $t \in J$;

(3,8) $\|B\|_{p,q} < \infty$;

(3,9) $\|B \circ \mu\|_{p,q} < \infty$;

(3,10) $\|B \circ \mu\|^{p,q} < \infty$;

instead of (3,5–6), if $1 < p, q < \infty$.

4. ***a*-assumptions.** Let

(4,1) a be an n-dimensional vector function (column-matrix) defined on J;

(4,2) a be measurable on J;

(4,3) $\|a\|_p < \infty$;

(4,4) $a \circ \mu$ be measurable on J;

(4,5) $\|a \circ \mu\|_p < \infty$.

5. Definition. $\mathscr{M}$ will denote the set of all μ satisfying (2,1–3). Let $\mu \in \mathscr{M}$.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_n^{p,\mu}(J)$$

will be the set of all B satisfying (3,1–6) and, if $1 < p$,

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}}_n^{p,\mu}(J)$$

the set of all B satisfying (3,1–4), (3,7–10).

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_n^{p,\mu}(J)$$

will be the set of the functions a satisfying (4,1–5). We shall write shortly $\mathbf{L}^p$ if $\mu(t) = t$. The solution of the equation (I) will be a function $x \in \mathbf{L}$ satisfying (I) for all $t \in J$.

6. Remark. We get immediately $\mathbf{B} \subset \hat{\mathbf{B}}$ for $1 < p < \infty$ from Definition 5. It follows from the equation (I) that its solution x is independent of the values $\mu(t)$ for $t < 0$. We have introduced these values only for easier formulations.

We find some essential differences comparing the equation (I) with the classical case $\mu(t) = t$. Let us note that supposing measurability or integrability of a function f, we do not generally get the same property for the composition $f \circ \mu$. Hence the assumptions (3,4), (3,6) e.t.c. are necessary. It is also worth mentioning that changing a value $x(t)$ of a solution x of (I) at one point we may get a function that does not satisfy (I) for the elements of a nonzero set, for some μ. Hence it is not sufficient to define x, a, $B(\cdot, s)$ only almost everywhere. However, the functions μ, $B(t, \cdot)$ may be defined only almost everywhere.

7. Theorem. *Let $\mu \in \mathcal{M}$, $B \in \hat{\mathbf{B}}$. Then there exists a resolvent kernel $R \in \hat{\mathbf{B}}$ satisfying* (R), (R′) *for all $t, s \in J$.*

Proof. We prove the theorem using Picard successive approximation method. (Cf. [9].) We introduce these approximations by

$$(7,1) \qquad R_0(t, s) = B(t, s),$$

$$R_{\nu+1}(t, s) = \int_s^t B(t, u)\, R_\nu(\mu(u), s)\, du; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots; \quad t, s \in J.$$

We shall prove by induction that:

(i) the definition (7,1) is a good one;

$$\text{(ii)} \qquad R_{\nu+1} \in \hat{\mathbf{B}},$$

$$\text{(iii)} \qquad R_{\nu+1}(t, s) = \int_s^t R_\nu(t, u)\, B(\mu(u), s)\, du,$$

$$\text{(iv)} \qquad |R_{\nu+1}(t, s)| \leqq \xi(t)^{1/q}\, \eta(s)^{1/p} [\zeta(t, s)^\nu / \nu!]^{1/p}$$

where

$$\xi(t) = \int_0^t |B(t, s)|^q\, ds, \quad \eta(s) = \int_s^t |B(\mu(t), s)|^p\, dt, \quad \zeta(t, s) = \int_s^t \xi(\mu(u))^{p/q}\, du$$

for $t, s \in J$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$. Let firstly $\nu = 0$. Using the Hölder inequality we obtain

$$\int_s^t |B(t, u)|\, |B(\mu(u), s)|\, du \leqq$$

$$\leqq \left(\int_s^t |B(t, u)|^q\, du\right)^{1/q} \left(\int_s^t |B(\mu(u), s)|^p\, du\right)^{1/p} \leqq \xi(t)^{1/q}\, \eta(s)^{1/p}.$$

Hence the definition (7,1) is a good one, (iv) holds, R_1 satisfies (3,1–4) and (3,7–10) and we obtain (ii). Clearly (iii) holds as well. Let now $\nu \geqq 1$ and let the assertions (i)–(iv) hold for the indices $\alpha \leqq \nu - 1$. Using the induction predicate and the Hölder inequality we get

$$\int_s^t |B(t, u)|\, |R_\nu(\mu(u), s)|\, \mathrm{d}u \leqq \left(\int_s^t |B(t, u)|^q\, \mathrm{d}u\right)^{1/q} \left(\int_s^t |R_\nu(\mu(u), s)|^p\, \mathrm{d}u\right)^{1/p} \leqq$$

$$\leqq \xi(t)^{1/q} \left[\int_s^t \xi(\mu(u))^{p/q} \frac{\zeta(\mu(u), s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\, \mathrm{d}u\right]^{1/p} \eta(s)^{1/p} \leqq$$

$$\leqq \xi(t)^{1/q} \left[\int_s^t \xi(\mu(u))^{p/q} \frac{1}{(\nu-1)!} \left[\int_s^u \xi(\mu(v))^{p/q}\, \mathrm{d}v\right]^{\nu-1} \mathrm{d}u\right]^{1/p} \eta(s)^{1/p} \leqq$$

$$\leqq \xi(t)^{1/q} \left[\frac{\zeta(t, s)^\nu}{\nu!}\right]^{1/p} \eta(s)^{1/p}.$$

Now we follow the argument of the first induction step. (iii) follows from the relations

$$R_{\nu+1}(t, s) = \int_s^t B(t, u) \int_s^u R_{\nu-1}(\mu(u), v)\, B(\mu(v), s)\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u =$$

$$= \int_s^t \int_v^t B(t, u)\, R_{\nu-1}(\mu(u), v)\, \mathrm{d}u\, B(\mu(v), s)\, \mathrm{d}v = \int_s^t R_\nu(t, v)\, B(\mu(v), s)\, \mathrm{d}v.$$

Let us put

$$\tilde{R}(t, s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} R_\nu(t, s). \tag{7,2}$$

The function $\tilde{R}$ is defined on the whole interval $J \times J$ and satisfies

$$|\tilde{R}(t, s)| \leqq c\, \xi(t)^{1/q}\, \eta(s)^{1/p}.$$

Similarly,

$$|\tilde{R}(\mu(t), s)| \leqq c\, \xi(\mu(t))^{1/q}\, \eta(s)^{1/p}.$$

Now, if $R = \tilde{R} + B$ then $R \in \tilde{B}$ and using the Lebesgue theorem we get

$$\int_s^t B(t, u)\, R(\mu(u), s)\, \mathrm{d}u = \int_s^t \sum_{\nu=0}^{\infty} B(t, u)\, R_\nu(\mu(u), s)\, \mathrm{d}u =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_s^t B(t, u)\, R_\nu(\mu(u), s)\, \mathrm{d}u = \sum_{\nu=1}^{\infty} R_\nu(t, s) = R(t, s) - B(t, s).$$

Hence (R) holds. We prove (R′) similarly using (iii).

8. Remark. There exists $R \in \mathbf{B}$ satisfying (R), (R′) and the inequalities

$$|R(t, s)|, |R(\mu(t), s)| \leqq \varkappa\, g(t)\, h(s)$$

for $B \in \mathbf{B}$, where $\varkappa$ depends only on the functions g, h corresponding to B according to the relations (3,5–6). The proof is similar to that of Theorem 7. We obtain for the successive approximations

$$|R_\nu(t, s)|, |R_\nu(\mu(t), s)| \leqq g(t)\, h(s) f_\nu(t, s)$$

where

$$f_\nu(t, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\nu!^{1/q}} \left(\displaystyle\int_s^T g^p\right)^{\nu/p} \left(\displaystyle\int_0^t h^q\right)^{\nu/q}, & 1 < p < \infty, \\ \dfrac{1}{\nu!} \left(\displaystyle\int_0^t h\right)^\nu, & p = \infty, \\ \dfrac{1}{\nu!} \left(\displaystyle\int_0^t g\right)^\nu, & p = 1. \end{cases}$$

9. Theorem. *Let $\mu \in \mathscr{M}$, $B \in \mathbf{B}$ or $B \in \tilde{\mathbf{B}}$; $a \in \mathbf{L}$. Then there exists a unique solution $x \in \mathbf{L}$ of the equation* (I). *This solution is given by* (X), *where R is the corresponding resolvent kernel.*

Proof. Let us define x by (X). Then

$$\int_0^t B(t, s)\, x(\mu(s))\, ds = \int_0^t B(t, s) \left[a(\mu(s)) + \int_0^{\mu(s)} R(\mu(s), u)\, a(\mu(u))\, du \right] ds =$$

$$= \int_0^t B(t, u)\, a(\mu(u))\, du + \int_0^t \int_u^t B(t, s)\, R(\mu(s), u)\, ds\, a(\mu(u))\, du =$$

$$= \int_0^t R(t, u)\, a(\mu(u))\, du$$

in virtue of (R). Hence x fulfils (I). If the couple x, a satisfies (I) it satisfies also (X) because $-B$ is the resolvent kernel corresponding to $-R$. So we get the unicity.

10. Example. For $t - \mu(t) \geqq c > 0$, $t \in J$, we get a finite number of approximations for the resolvent kernel evaluation. We may also simply compute the solution x provided that μ is a step function e.t.c.

11. Remark. Let $1 < p \leqq \infty$, $B \in \mathbf{B}_n^{p,\mu}(J)$,

$$\text{(11,1)} \qquad \int_J |B(t, s) - B(u, s)|^q\, ds \to 0, \quad u \to t; \quad u, t \in J.$$

Then the resolvent kernel also fulfils (11,1) and for continuous a the solution x of (I) is continuous as well. Using *Carathéodory condition* for the measurability of a composed function (see e.g. M. M. VAJNBERG [12]) we may prove the following more general assertion.

12. Theorem. *Let $\mu \in \mathcal{M}$, let the kernel B satisfy* (3,1–2) *and*

(12,1) $B(t, \cdot)$ *is measurable on J for all $t \in J$;*

(12,2) $|B(t, s)| \leqq h(s)$; $t, s \in J$ *where* $h \in \mathbf{L}^1$;

$$(12,3) \qquad \int_J |B(u, s) - B(t, s)| \, ds \to 0 \quad \text{for} \quad u \to t\,; \quad u, t \in J\,.$$

Let a be continuous on J. Then the equation (I) *has a unique solution x continuous on J.*

13. Remark. A function B continuous on $J \times J$ satisfies (12,1–3).

14. The more general case. Now we generalize the previous results to the equation ($\hat{\mathrm{I}}$). Let $\mathcal{A}$ be a countable set, $\mu^\alpha \in \mathcal{M}$ for all $\alpha \in \mathcal{A}$. Let $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, $\mu^{\alpha_0}(t) = t$, $t \in J$. Let B^α be a kernel satisfying (3,1–2) for all $\alpha \in \mathcal{A}$ and let
(14,1) $B^\alpha(\mu^\beta(t), s)$ be a measurable function on $J \times J$;

$$(14,2) \qquad |B^\alpha(\mu^\beta(t), s)| \leqq g^\beta(t)\, h^\alpha(s)\,; \quad t, s \in J\,;$$

for all $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ where

$$G \equiv (\sum \|g^\beta\|_p^p)^{1/p} < \infty\,, \quad H \equiv (\sum_\beta \|h^\beta\|_q^q)^{1/q} < \infty\,.$$

(We put $G = \sup_\beta \|g^\beta\|_\infty$ if $p = \infty$ e.t.c.) We denote $B = \{B^\alpha\}$ the system of this kernels, $\hat{\mathbf{B}}$ the family of this systems. Let $\hat{\mathbf{L}}$ be the set of functions satisfying (4,1–2) and the assumptions:

(14,3) $a \circ \mu^\alpha$ is measurable for all $\alpha \in \mathcal{A}$;

$$(14,4) \qquad \|a\|_{p,\mu} \equiv (\sum_\alpha \|a \circ \mu^\alpha\|_p^p)^{1/p} < \infty\,.$$

(We put $\|a\|_{p,\mu} = \sup_\alpha \|a \circ \mu^\alpha\|_\infty$ if $p = \infty$.) We shall consider the equation

$$(\hat{\mathrm{I}}) \qquad x(t) = a(t) + \int_0^t \sum_\alpha B^\alpha(t, s)\, x(\mu^\alpha(s))\, ds$$

and seek a system $R = \{R^\alpha\}$ of resolvent kernels satisfying the resolvent equations

$$(\hat{\mathrm{R}}) \qquad R^\alpha(t, s) = B^\alpha(t, s) + \int_s^t \sum_\beta B^\beta(t, u)\, R^\alpha(\mu^\beta(u), s)\, du\,,$$

$$(\hat{\mathrm{R}}') \qquad R^\alpha(t, s) = B^\alpha(t, s) + \int_s^t \sum_\beta R^\alpha(t, u)\, B^\beta(\mu^\beta(u), s)\, du$$

for all $\alpha \in \mathscr{A}$. The corresponding resolvent formula for the solution x will be of the form

$$(\hat{\mathrm{X}}) \qquad x(t) = a(t) + \int_0^t \sum_\beta R^\beta(t, s)\, a(\mu^\beta(s))\, ds\,, \quad t \in J\,.$$

15. Theorem. *Let $B = \{B^\alpha\} \in \hat{\mathbf{B}}$. Then there exists a system $R = \{R^\alpha\} \in \hat{\mathbf{B}}$ of resolvent kernels satisfying* (R), (R′) *and the inequalities*

$$|R^\alpha(\mu^\beta(t), s)| \leqq c\, g^\beta(t)\, h^\alpha(s)\,; \quad t, s \in J\,; \quad \alpha, \beta \in \mathscr{A}\,;$$

where the constant c depends only on the functions g^γ, h^δ, $\gamma, \delta \in \mathscr{A}$.

Proof. We may define the systems of resolvent kernels by the formulas

$$R_0^\alpha(t, s) = B^\alpha(t, s)\,,$$

$$R_{\nu+1}^\alpha(t, s) = \int_s^t \sum_\beta B^\beta(t, u)\, R^\alpha(\mu^\beta(u), s)\, du\,; \quad t, s \in J\,; \quad \alpha \in \mathscr{A}\,; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

similarly to the case of the equation (I) (see Remark 8). These systems belong to $\hat{\mathbf{B}}$ and it holds

$$|R_\nu^\alpha(\mu^\beta(t), s)| \leqq g^\beta(t)\, h^\alpha(s)\, w_\nu(t)$$

where

$$w_\nu(t) = \begin{cases} \left[\dfrac{\left(G \sum_\beta \int_0^t (h^\beta)^q\right)^\nu}{\nu!}\right]^{1/q} & \text{if } 1 < p \leqq \infty\,, \\[2ex] \dfrac{\left(H \sum_\beta \int_0^t g^\beta\right)^\nu}{\nu!} & \text{if } p = 1\,. \end{cases}$$

The system of resolvent kernels satisfying the assertion of the theorem may be defined by

$$R^\alpha = \sum_{\nu=0}^\infty R_\nu^\alpha\,, \quad \alpha \in \mathscr{A}\,.$$

16. Theorem. *Let $B = \{B^\alpha\} \in \hat{\mathbf{B}}$. $R = \{R^\alpha\}$ be the corresponding system of re-*

solvent kernels, $a \in \hat{\mathbf{L}}$. Then the equation $(\hat{\mathrm{I}})$ *has a unique solution $x \in \hat{\mathbf{L}}$. This solution is given by the resolvent formula* $(\hat{\mathrm{X}})$.

Proof is analogous to that of Theorem 9.

2. CONTINUITY

1. Lemma. Let $b \in \mathbf{B}_1^{p,\mu}$; $f, z \in \mathbf{L}_1^{p,\mu}$; $b \geqq 0$; let r be the resolvent kernel corresponding to the kernel b. Then $r \geqq 0$ and the inequality

$$z(t) \leqq f(t) + \int_0^t b(t, s)\, z(\mu(s))\, ds\,, \quad t \in J\,, \tag{1,1}$$

implies

$$z(t) \leqq f(t) + \int_0^t r(t, s)\, f(\mu(s))\, ds\,, \quad t \in J\,. \tag{1,2}$$

Moreover, there exists a constant $c > 0$ dependent only on the functions g_b, h_b so that (1,1) and the assumption $z \geqq 0$ imply

$$\|z\|_p \leqq \|f\|_p + c\|f \circ \mu\|_p\,, \quad \|z \circ \mu\|_p \leqq c\|f \circ \mu\|_p\,. \tag{1,3}$$

Proof. We obtain $r \geqq 0$ from $b \geqq 0$ and the successive approximation method. Hence and from (1,1) it follows

$$\begin{aligned} z(t) + \int_0^t r(t, u)\, z(\mu(u))\, du \leqq f(t) + \int_0^t r(t, u) f(\mu(u))\, du\, + \\ + \int_0^t b(t, s)\, z(\mu(s))\, ds + \int_0^t r(t, u) \int_0^{\mu(u)} b(\mu(u), s)\, z(\mu(s))\, ds\, du\,. \end{aligned} \tag{1,4}$$

Let us denote the last integral by U. Replacing the upper limit $\mu(u)$ by u and using the resolvent formula we get after simple calculation

$$U = \int_0^t [r(t, s) - b(t, s)]\, z(\mu(s))\, ds\,.$$

Hence and from (1,4), (1,2) follows. (1,2) implies (using also $z \geqq 0$)

$$\|z\|_p \leqq \|f\|_p + \|f \circ \mu\|_p\, \|h_r\|_q\, \|g_r\|_p\,,$$

$$\|z \circ \mu\|_p \leqq \|f \circ \mu\|_p + \|f \circ \mu\|_p\, \|h_r\|_q\, \|g_r\|_p\,.$$

We obtain (1,3) from here and Remark 8 of the first part.

2. Lemma. Let $B \in \mathbf{B}_n^{p,\mu}$, $a \in \mathbf{L}_n^{p,\mu}$. Then $|B| \in \mathbf{B}_1^{p,\mu}$; $|B|$, $|B(\mu(\cdot), \cdot)| \in \mathbf{B}_1^{p,1}$, $|a| \in \mathbf{L}_1^{p,1}$

and we may choose $g_{|B|} = g_B$, $h_{|B|} = h_B$. If, moreover, x is a solution of (I), then there exists a constant $c > 0$ depending only on g_B, h_B so that

$$\|x\|_p \leqq \|a\|_p + c\|a \circ \mu\|_p\,, \quad \|x \circ \mu\|_p \leqq c\|a \circ \mu\|_p\,.$$

Proof follows from Lemma 1.

3. Lemma. Let $\lambda, \mu \in \mathcal{M}$, $a \in \mathbf{L}_n^{p,\mu} \cap \mathbf{L}_n^{p,\lambda}$, $B \in \mathbf{B}_n^{p,\mu} \cap \mathbf{B}_n^{p,\lambda}$, $g \in \mathbf{L}^p$, $h \in \mathbf{L}^q$,

$$|B(t, s)|,\ |B(\mu(t), s)|,\ |B(\lambda(t), s)| \leqq g(t)\, h(s)\,; \quad t, s \in J\,; \tag{3,1}$$

let x be a solution of (I), y a solution of the equation

$$y(t) = a(t) + \int_0^t B(t, s)\, y(\lambda(s))\, \mathrm{d}s\,, \quad t \in J\,. \tag{3,2}$$

Then there exists a constant c depending only on the functions g, h so that it holds

$$\|x - y\|_p \leqq c[\|a \circ \mu - a \circ \lambda\|_p + \|B \circ \mu - B \circ \lambda\|_{p,q}(\|a \circ \mu\|_p + \|a \circ \lambda\|_p)]\,, \tag{3,3}$$

$$\|x \circ \mu - y \circ \lambda\|_p \leqq \tag{3,4}$$

$$\leqq c[\|a \circ \mu - a \circ \lambda\|_p + \|B \circ \mu - B \circ \lambda\|_{p,q}(\|a \circ \mu\|_p + \|a \circ \lambda\|_p)]\,.$$

Proof. We get

$$x(t) - y(t) = \int_0^t B(t, s)\, [x(\mu(s)) - y(\lambda(s))]\, \mathrm{d}s\,, \tag{3,5}$$

$$x(\mu(t)) - y(\lambda(t)) = a(\mu(t)) - a(\lambda(t)) + \tag{3,6}$$

$$+ \int_0^{\mu(t)} B(\mu(t), s)\, x(\mu(s))\, \mathrm{d}s - \int_0^{\lambda(t)} B(\lambda(t), s)\, y(\lambda(s))\, \mathrm{d}s =$$

$$= a(\mu(t)) - a(\lambda(t)) + \int_0^{\mu(t)} [B(\mu(t), s) - B(\lambda(t), s)]\, x(\mu(s))\, \mathrm{d}s +$$

$$+ \int_0^{\mu(t)} B(\lambda(t), s)\, [x(\mu(s)) - y(\lambda(s))]\, \mathrm{d}s - \int_{\mu(t)}^{\lambda(t)} B(\lambda(t), s)\, y(\lambda(s))\, \mathrm{d}s$$

from (I) and (3,2). Let us put (for $t, s \in J$)

$$z(t) = |x(\mu(t)) - y(\lambda(t))|\,, \quad b(t, s) = |B(\lambda(t), s)|\,,$$

$$f_1(t) = |a(\mu(t)) - a(\lambda(t))|\,,$$

$$f_2(t) = \int_0^t |B(\mu(t), s) - B(\lambda(t), s)| \, |x(\mu(s))| \, \mathrm{d}s \,,$$

$$f_3(t) = \left| \int_{\mu(t)}^{\lambda(t)} B(\lambda(t), s) \, y(\lambda(s)) \, \mathrm{d}s \right| ,$$

$$f = f_1 + f_2 + f_3 \,.$$

We get

$$z(t) \leqq f(t) + \int_0^t b(t, s) \, z(s) \, \mathrm{d}s \,, \quad t \in J \,,$$

from (3,6). Clearly $z, f \in \mathbf{L}_1^{p,1}$; $b \in \mathbf{B}_1^{p,1}$. Using Lemma 1 and (3,1) we get

(3,7) $$\|z\|_p \leqq c\|f\|_p$$

(c denotes constants depending only on g, h). Using Lemma 2 we obtain

(3,8) $$\|f_2\|_p \leqq \|B \circ \mu - B \circ \lambda\|_{p,q} \, \|x \circ \mu\|_p \leqq c\|B \circ \mu - B \circ \lambda\|_{p,q} \, \|a \circ \mu\|_p \,.$$

$f_3(t) = 0$ if $\lambda(t) \leqq \mu(t)$ because $B(\lambda(t), s) = 0$ for $s > \lambda(t)$. For $\lambda(t) > \mu(t)$ it holds

$$f_3(t) = \left| \int_{\mu(t)}^{\lambda(t)} [B(\mu(t), s) - B(\lambda(t), s)] \, y(\lambda(s) \, \mathrm{d}s \right| \leqq$$

$$\leqq \int_0^t |B(\mu(t), s) - B(\lambda(t), s)| \, |y(\lambda(s))| \, \mathrm{d}s \,.$$

Using this and Lemma 2 we get

(3,9) $$\|f_3\|_p \leqq \|B \circ \mu - B \circ \lambda\|_{p,q} \, \|y \circ \lambda\|_p \leqq c\|B \circ \mu - B \circ \lambda\|_{p,q} \, \|a \circ \lambda\|_p \,.$$

(3,5) implies

(3,10) $$\|x - y\|_p \leqq c\|x \circ \mu - y \circ \lambda\|_p = c\|z\|_p \,.$$

(3,3–4) follows from (3,7–10).

4. Assumptions. Let

$$\mu_\nu \in \mathcal{M} \,, \quad B \in \mathbf{B}_n^{p,\mu_\nu}(J) \,, \quad a \in \mathbf{L}_n^{p,\mu_\nu}(J) \,,$$

let x_ν be the solution of (I) with $\mu = \mu_\nu$ for $\nu = 0, 1, 2, \ldots$.

5. Assumptions. Let

(5,1) $$\|a \circ \mu_2\|_p \leqq \alpha < \infty \,;$$

(5,2) $$|B(t, s)|, \, |B(\mu_\nu(t), s)| \leqq g(t) \, h(s) \,; \quad t, s \in J \,;$$

for $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ where $g \in \mathbf{L}^p(J)$, $h \in \mathbf{L}^q(J)$;

$$\|a \circ \mu_\nu - a \circ \mu_0\|_p \to 0, \quad \nu \to \infty; \tag{5,3}$$

$$\|B \circ \mu_\nu - B \circ \mu_0\|_{p,q} \to 0, \quad \nu \to \infty, \tag{5,4}$$

6. Corollary. *Let the assumptions 4,5 hold. Then* $\|x_\nu - x_0\| \to 0$, $\|x_\nu \circ \mu_\nu - x_0 \circ \mu_0\| \to 0$ if $\nu \to \infty$.

Proof follows from Lemma 3.

7. Theorem. *Let the assumptions 4 hold. Let* $p < \infty$,

$$|a(u) - a(v)| \leqq A\,|u - v|^{1/p}; u, v \in J; \tag{7,1}$$

$$|B(u, s) - B(v, s)| \leqq \beta(s)\,|u - v|^{1/p}; \quad s, u, v \in J, \tag{7,2}$$

where A is a constant, $\beta \in \mathbf{L}^q$;

$$\|\mu_\nu - \mu_0\|_1 \to 0, \quad \nu \to \infty; \tag{7,3}$$

$$\sup_\nu |\mu_\nu - \mu_0| \leqq \mu \in \mathbf{L}^1. \tag{7,4}$$

Then $x_\nu \to x_0$ for $\nu \to \infty$.

Proof. $(7,1-4)$ imply the assumptions 5. Now we apply Corollary 6.

8. Lemma. *Let* $B, K \in \mathbf{B}_n^{p,\mu}$, $a \in \mathbf{L}_n^{p,\mu}$, *let x be a solution of* (I), *y a solution of*

$$y(t) = a(t) + \int_0^t K(t, s)\, y(\mu(s))\,\mathrm{d}s, \quad t \in J. \tag{8,1}$$

Then there exists a constant c depending only on the functions g_B, h_B, g_K, h_K *so that*

$$\|x - y\|_p \leqq c[\|B - K\|_{p,q} + \|B \circ \mu - K \circ \mu\|_{p,q}]\,\|a \circ \mu\|_p, \tag{8,2}$$

$$\|x \circ \mu - y \circ \mu\|_p \leqq c\|B \circ \mu - K \circ \mu\|_{p,q}\,\|a \circ \mu\|_p \tag{8,3}$$

hold.

Proof. It follows

$$|x(t) - y(t)| \leqq \int_J |B(t, s)|\,|x(\mu(s)) - y(\mu(s))|\,\mathrm{d}s + \tag{8,4}$$

$$+ \int_J |B(t, s) - K(t, s)|\,|y(\mu(s))|\,\mathrm{d}s, \quad t \in J;$$

$$(8,5) \qquad |x(\mu(t)) - y(\mu(t))| \leqq \int_J |B(\mu(t), s)| \, |x(\mu(s)) - y(\mu(s))| \, \mathrm{d}s + $$

$$+ \int_J |B(\mu(t), s) - K(\mu(t), s)| \, |y(\mu(s))| \, \mathrm{d}s$$

from (I) and (8,1). Using this and Lemmas 1 and 2 we obtain (8,3) and, using (8,4), (8,2) as well.

9. Corollary. *Let* $B_\nu \in \mathbf{B}_n^{p,\mu}(J)$; $|B_\nu(t, s)|$, $|B_\nu(\mu(t), s)| \leqq g(t)\, h(s)$ *where* $g \in \mathbf{L}^p$, $h \in \mathbf{L}^q$, let x_ν *be the solution of* (I) *with* $B = B_\nu$ *for* $\nu = 0, 1, 2, \ldots$. *Let* $a \in \mathbf{L}_n^{p,\mu}(J)$, $\|B_\nu - B_0\|_{p,q} \to 0$, $\|B_\nu \circ \mu - B_0 \circ \mu\|_{p,q} \to 0$ *if* $\nu \to \infty$. *Then*

$$\|x_\nu - x_0\|_p \to 0\,, \quad \|x_\nu \circ \mu - x_0 \circ \mu\|_p \to 0 \quad \textit{if} \quad \nu \to \infty\,.$$

References

[1] *Bellman, R., Cook, K. L.:* Differential-difference equations, Academic Press, New York and London (1963).

[2] *Cerha, J.:* Resolventa jisté Volterrovy rovnice s odkloněným argumentem, IV. ved. konf. vysokej školy dopravnej v Žiline (sborník referátů), 1973, str. 57—58.

[3] *Corduneanu, C.:* On a class of functional-integral equations, Bull. Math. Soc. des Sci. Math., Roumaine (1968), pp. 43—53.

[4] *Далецкий, Ю. Л., Крейн, М. Г.:* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Наука, Москва, 1970.

[5] *Dunford, N., Schwartz, J. T.:* Linear Operators I, Interscience publishers, New York—London, 1958.

[6] *Эльсгольц, Л. Э., Норкин, С. Б.:* Введение в теорию диефренциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Наука, Москва, 1971.

[7] *Grafton, R.:* Differential equations depending on an infinite number of terms with deviating arguments, Rew. Roumaine math. pures et appl. *15* (1970), 711—716.

[8] *Hale, J.:* Functional differential equations, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1971).

[9] *Miller, R. K.:* Nonlinear Volterra Integral Equations, W. A. Benjamin, Inc., Menlo Park, California, 1971.

[10] *Мышкис, А. Д.:* Линейные диференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, Наука, Москва, 1972.

[11] *Oguztöreli, N.:* Time-Lag Control Systems, Academic Press, New York and London, 1966.

[12] *Вайнберг, М. М.:* Вариационные методы исследования нелинейных операторов, ГИТТЛ, Москва, 1956.

Author's address: 166 27 Praha 6 - Dejvice, Suchbátarova 2. (Elektrotechnická fakulta ČVUT).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

ON THE CONDITIONS FOR THE OSCILLATION OF SOLUTIONS OF NON-LINEAR THIRD ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

BAHMAN MEHRI, Teheran

(Received August 8, 1974)

In this article we study the problems of oscillation of the solutions of the differential equation

$$x''' + f(t, x) = 0 . \tag{1}$$

We shall assume that the function $f(t, x)$ satisfies the Carathéodry conditions in every bounded subregion of the rectangular region $0 \leqq t < \infty$, $|x| < \infty$. Here

$$x f(t, x) \geqq 0 , \tag{2}$$

$$|f(t, x_1)| \leqq |f(t, x_2)| , \quad \text{if} \quad |x_1| \leqq |x_2| , \quad x_1 x_2 \geqq 0 . \tag{3}$$

A solution $x(t)$ of (1) which exists in the future is said to be oscillatory if for every $T > 0$, there is a $t_0 > T$ such that $x(t_0) = 0$.

Theorem 1. *For all solutions of Equation* (1) *to be oscillatory it is necessary that conditions*

$$\int_{t_0}^{\infty} t^2 |f(t, C)| \, dt = \infty , \quad \int_{t_0}^{\infty} |f(t, Ct^2)| \, dt = \infty \tag{4}$$

be satisfied for any number $C \neq 0$.

Proof. We have to prove that if either the condition

$$\int_{t_0}^{\infty} t^2 |f(t, C)| \, dt < \infty \tag{5}$$

or the condition

$$\int_{t_0}^{\infty} |f(t, Ct^2)| \, dt < \infty \tag{6}$$

is satisfied for some constant C, then Equation (1) has at least one nonoscillatory solution.

We first assume that condition (5) is satisfied. We consider the integral equation

$$x(t) = \frac{C}{2} + \frac{1}{2!}\int_t^\infty (s - t)^2 f(s, x(s))\,ds \tag{7}$$

where $t > t_1 > 1$ is so large that

$$\int_{t_1}^\infty s^2 |f(s, C)|\,ds \leqq |C|\,.$$

Now consider the sequence $\{x_n(t)\}$, defined in the following manner

$$x_0(t) = \frac{C}{2}\,, \tag{9}$$

$$x_n(t) = \frac{C}{2} + \frac{1}{2!}\int_t^\infty (s - t)^2 f(s, x_{n-1}(s))\,ds\,.$$

In accordance with conditions (2), (3) and (9) we easily find from (9) that

$$\frac{|C|}{2} < x_n(t)\,\mathrm{sign}\,C < |C|\,; \quad n = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

from (9), we find

$$x_n'(t) = -\int_t^\infty (s - t)\,f(s, x_{n-1}(s))\,ds\,.$$

hence

$$|x_n'(t)| \leqq \int_t^\infty s\,f(s, C)|\,ds < \int_t^\infty s^2 |f(s, C)|\,ds \leqq |C| \tag{11}$$

for $t > t_1 > 1$. It follows form (10) and (11) that the sequence $\{x_n(t)\}$ defines a uniformly bounded and equicontinuous family on (t_1, ∞), hence it follows from the Arzela-Ascoli theorem there exists a subsequence $\{x_{n_\kappa}(t)\}$ uniformly convergent on every subinterval of (t_1, ∞). Now a standard argument, see for example [2], yields a function $x(t)$ which is a solution to (7), as easily checked, a solution of the differential equation (1). But on the other hand according to (10), $x(t)$ is nonoscillatory.

Now let condition (6) be satisfied. We consider the integral equation

$$x(t) = \frac{C}{2}\,t^2 + \int_{t_0}^t s\left(t - \frac{s}{2}\right) f(s, x(s))\,ds + \frac{t^2}{2}\int_t^\infty f(s, x(s))\,ds \tag{12}$$

where t_0 is chosen so that

(13) $$\int_{t_0}^{\infty} |f(t, Ct^2)|\, dt < \frac{|C|}{2}.$$

Consider, the sequence $\{x_n(t)\}$, defined in the following manner

(14) $$x_0(t) = \frac{C}{2} t^2,$$

$$x_n(t) = \frac{C}{2} t^2 + \int_{0t}^{t} s\left(t - \frac{s}{2}\right) f(s, x_{n-1}(s))\, ds + \frac{t^2}{2} \int_{t}^{\infty} f(s, x_{n-1}(s))\, ds$$

in accordance with conditions (2), (3) and (13), we easily find from (14), that

(15) $$\frac{|C|}{2} t^2 < x_n(t) \operatorname{sign} C < |C|\, t^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

and

(16) $$|x_{n-1}(t)| < |x_n(t)|, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

It is obvious from (15) and (16) that the sequence $\{x_n(t)\}$ converges to some function $x(t)$. Furthermore

(17) $$\frac{|C|}{2} t^2 < x(t) \operatorname{sign} C \leqq |C|\, t^2$$

we show that $x(t)$ is a solution of the integral equation (12). For any preassigned $\varepsilon > 0$, we choose T in such a way that

$$\int_{T}^{\infty} |f(t, Ct^2)|\, dt < \varepsilon.$$

Then, according to (14), (15) and (17) we obtain

$$x_n(t) - \frac{Ct^2}{2} - \frac{t^2}{2} \int_{t}^{\infty} f(s, x(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} s\left(t - \frac{s}{2}\right) f(s, x(s))\, ds \leqq$$

$$\leqq \frac{t^2}{2} \int_{t}^{T} |f(s, x(s)) - f(s, x_{n-1}(s))|\, ds + \frac{t^2}{2} \int_{T}^{\infty} |f(s, x_{n-1}(s)) -$$

$$- |f(s, x(s))|\, ds + \int_{t_0}^{t} s\left(t - \frac{s}{2}\right) |f(s, x_{n-1}(s)) - f(s, x(s))|\, ds \leqq$$

$$\leqq t^2 \int_{t_0}^{T} |f(s, x_{n-1}(s)) - f(s, x(s))|\, ds + \frac{t^2}{2} \int_{T}^{\infty} f(s, x_{n-1}(s) - f(s, x(s))|\, ds \leqq$$

$$\leqq t^2 \int_{t_0}^{T} |f(s, x_{n-1}(s)) - f(s, x(s))|\, ds + \varepsilon t^2.$$

If in the latter inequality, we pass to the limit as $n \to \infty$ we obtain

$$\left| x(t) - \frac{Ct^2}{2} - \frac{t^2}{2} \int_t^\infty f(s, x(s))\, \mathrm{d}s - \int_{t_0}^t s\left(t - \frac{s}{2}\right) f(s, x(s))\, \mathrm{d}s \right| \leqq \varepsilon t^2 .$$

But since ε is arbitrary, it follows from the last inequality that $x(t)$ is a solution of the integral equation (12), as well, as easily checked, a solution of the differential equation (1). But on the other hand, according to (17) $x(t)$ is nonoscillatory.

Theorem 2. *If the condition*

$$\int_{t_0}^\infty |f(t, C)|\, \mathrm{d}t = \infty \tag{18}$$

is satisfied for every constant $C \neq 0$, then any solution of (1) *which exists for $t > t_0$ is oscillatory.*

Proof. Assume it is not oscillatory, without loss of generality, we assume $x(t) > 0$ for $t \geqq t_0$. Then $x'''(t) < 0$ which implies $x''(t) > 0$ for $t \geqq t_0$. Therefore $x'(t) > 0$ for $t \geqq t_1 > t_0$, or $x'(t) < 0$ for $t \geqq t_0$. Replacing t by t_0, when necessary we may consider both cases.

Assume, $x'(t) > 0$ i.e. $x(t)\, x'(t) > 0$ which implies $|x(t)| > |x(t_0)|$ and

$$x''(t) = x''(t_0) - \int_{t_0}^t f(s, x(s))\, \mathrm{d}s$$

or

$$|x''(t)| = |x''(t_0)| - \int_{t_0}^t |f(s, x(s))|\, \mathrm{d}s \leqq |x''(t_0)| - \int_{t_0}^t |f(s, x(t_0))|\, \mathrm{d}s ,$$

this implies $|x''(t)| \to -\infty$, which is a contradiction.

Assume $x'(t) < 0$ i.e. $x(t)\, x'(t) < 0$, or

$$|x(t)| < |x(t_0)| .$$

From the identity

$$tx''(t_0) - x'(t_0) = tx''(t) - x'(t) + \int_{t_0}^t s f(s, x(s))\, \mathrm{d}s$$

it follows, that

$$A > \int_{t_0}^t s f(s, x(s))\, \mathrm{d}s > \int_{t_0}^t f(s, x(t_0))\, \mathrm{d}s ,$$

which is again a contradiction.

Theorem 3. *If for any nonzero constant C we can find constants $\lambda \neq 0$ and $M > 0$, depending on C, such that the inequality*

$$|f(t, C)| \geqq M|f(t, \lambda t^2)| \tag{19}$$

is satisfied for t sufficiently large, then for every solution of Equation (1) to be oscillatory condition (18) is necessary and sufficient.

Proof. The sufficiency of the condition follows from Theorem 2, we prove the necessity of the condition. For this we show that if $\int_{t_0}^{\infty} |f(t, C)|\, dt < \infty$ then (1) has at least one nonoscillatory solution. Indeed, according to condition (19) we have

$$\int_{t_0}^{\infty} |f(t, \lambda t^2)|\, dt \leqq \frac{1}{M} \int_{t_0}^{\infty} |f(t, C)|\, dt < \infty .$$

But, then by Theorem 1 Equation (1) has at least one nonoscillatory solution. This proves the theorem.

Corollary. *Let $a(t) \geqq 0$, $f(x)$ be continuous function satisfying the condition*

$$x f(x) > 0 , \quad \textit{when} \quad x \neq 0 ,$$

$$|f(x_1)| < |f(x_2)| \quad \text{when} \quad |x_1| < |x_2| , \quad x_1 x_2 \geqq 0 \tag{20}$$

and

$$\sup |f(x)| < \infty . \tag{21}$$

Then for all the solutions of the equation

$$x''' + a(t) f(x) = 0 \tag{22}$$

to be oscillatory, the condition

$$\int_{t_0}^{\infty} a(t)\, dt = \infty \tag{23}$$

is necessary and sufficient.

Proof. It is clear according to (20) and (23) that conditions (2), (3) are observed for Equation (22). On the other hand (21) and (23) imply that condition (18) is fulfilled. Therefore, all the hypotheses of Theorem 3 are satisfied, hence follows the validity of our assertion.

References

[1] *Izymova, D. V.:* On the conditions of oscillation and nonoscillation of solutions of nonlinear second order differential equations, Дифференциальные уравнения, *2* (1966), 1572—1586.

[2] *Wong J. S. W.:* On second order nonlinear oscillation, Math. Research Center University of Wisconsin Technical Report no. 836, Also Funkcial Ekvac. *11* (1969), 207—234.

[3] *Pavol Marušiak:* Note on the Ladas' paper on oscillation and asymptotic behaviour of solutions of differential equations with retarded argument, Journal of Differential Equations, *13*, 150—156 (1973).

Author's address: Arya-Mehr University of Technology, Teheran, Iran.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

THE LYAPUNOV STABILITY OF THE TIMOSHENKO TYPE EQUATION

JAROSLAV BARTÁK, Praha

(Received October 25, 1974)

The purpose of this paper is the investigation of the global exponential stability, respectively the stability of the zero solution of the equation

$$(1)\qquad u''''(t) + a\,u'''(t) + (b_1 A^{1/2} + b_2 I)\,u''(t) + (c_1 A^{1/2} + c_2 I)\,u'(t) + \\ + (d_1 A + d_2 A^{1/2} + d_3 I)\,u(t) = 0$$

where A is a selfadjoint, strictly positive linear operator in a Hilbert space H; I is the identity operator in H; $a, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, d_3$ are real constants.

Under the solution of (1) we understand a function u from the space $\mathcal{U} = \{u : \langle 0, \infty) \to H \mid u^{(j)} \in C(\mathcal{D}(u), \mathcal{D}(A^{(4-j)/4})),\ j = 0, 1, 2, 3\}$, fulfilling the equation (1) on $\langle 0, \infty)$.

Let us define the norm $\|\cdot\|_{\mathcal{D}(A)\times\mathcal{D}(A^{3/4})\times\mathcal{D}(A^{1/2})\times\mathcal{D}(A^{1/4})}$ by the relation

$$\|u(t)\|_{\mathcal{D}(A)\times\mathcal{D}(A^{3/4})\times\mathcal{D}(A^{1/2})\times\mathcal{D}(A^{1/4})} = \\ = \|(u(t), u'(t), u''(t), u'''(t))\|_{\mathcal{D}(A)\times\mathcal{D}(A^{3/4})\times\mathcal{D}(A^{1/2})\times\mathcal{D}(A^{1/4})} = \\ = [\|A\,u(t)\|^2 + \|A^{3/4}\,u'(t)\|^2 + \|A^{1/2}\,u''(t)\|^2 + \|A^{1/4}\,u'''(t)\|^2]^{1/2}$$

for $u \in \mathcal{U}$ and $t \in \langle 0, \infty)$, ($\|\cdot\|$ is the norm in the space H).

Definition 1. We say that the solution $v(t)$ of the equation (1) is *stable with respect to the norm* $\|\cdot\|_{\mathcal{D}(A)\times\mathcal{D}(A^{3/4})\times\mathcal{D}(A^{1/2})\times\mathcal{D}(A^{1/4})}$ if to arbitrarily chosen $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta(\varepsilon) > 0$ so that the following implication holds:

$$\|u(0) - v(0)\|_{\mathcal{D}(A)\times\mathcal{D}(A^{3/4})\times\mathcal{D}(A^{1/2})\times\mathcal{D}(A^{1/4})} \leqq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \\ \Rightarrow \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{D}(A)\times\mathcal{D}(A^{3/4})\times\mathcal{D}(A^{1/2})\times\mathcal{D}(A^{1/4})} \leqq \varepsilon$$

for $t \geqq 0$ and for every solution $u(t)$ of the equation (1).

Definition 2. We say that the solution $v(t)$ of the equation (1) is *exponentially stable with respect to the norm* $\|\cdot\|_{\mathscr{D}(A)\times\mathscr{D}(A^{3/4})\times\mathscr{D}(A^{1/2})\times\mathscr{D}(A^{1/4})}$ if there exist positive numbers δ, K, α so that the following implication holds:

$$\|u(0) - v(0)\|_{\mathscr{D}(A)\times\mathscr{D}(A^{3/4})\times\mathscr{D}(A^{1/2})\times\mathscr{D}(A^{1/4})} \leqq \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|u(t) - v(t)\|_{\mathscr{D}(A)\times\mathscr{D}(A^{3/4})\times\mathscr{D}(A^{1/2})\times\mathscr{D}(A^{1/4})} \leqq K e^{-\alpha t} \,.$$

$$. \|u(0) - v(0)\|_{\mathscr{D}(A)\times\mathscr{D}(A^{3/4})\times\mathscr{D}(A^{1/2})\times\mathscr{D}(A^{1/4})}$$

for $t \geqq 0$ and for every solution $u(t)$ of the equation (1).

If $\delta = +\infty$ in addition, we speak about the *global exponential stability.*

Let $u(t)$ be a solution of (1) and let the following initial conditions be fulfilled:

(2) $$u(0) = \varphi_0\,, \quad u'(0) = \varphi_1\,, \quad u''(0) = \varphi_2\,, \quad u'''(0) = \varphi_3\,,$$

where $\varphi_i \in \mathscr{D}(A^{1-i/4})$, $i = 0, \ldots, 3$.

Let us assume that

(3) the solution of (1) fulfilling (2) is unique.

The problem of the uniqueness is studied in [1], [2].

Let us denote $E(s)$ a spectral resolution of the identity corresponding to the operator A, $\delta = \inf \sigma(A)$. By the assumptions on the operator A, we have

(4) $$\delta > 0\,.$$

Let us write the solution of (1) fulfilling (2) in the form (we shall show that this is possible)

(5) $$u(t) = \sum_{i=0}^{3} \int_{\delta}^{\infty} m_i(t, s) \,\mathrm{d}E(s)\, \varphi_i\,,$$

where $m_i(t, s)$, $(i = 0, \ldots, 3)$ are solutions of

(6) $$m''''(t, s) + a\, m'''(t, s) + (b_1 s^{1/2} + b_2)\, m''(t, s) + (c_1 s^{1/2} + c_2)\, m'(t, s) +$$
$$+ (d_1 s + d_2 s^{1/2} + d_3)\, m(t, s) = 0$$

fulfilling the initial conditions

(7) $$m_i^{(k)}(0, s) = \delta_i^k\,, \quad i, k = 0, \ldots, 3\,, \quad s \geqq \delta\,.$$

The symbol of derivative means the derivative with respect to the variable t; $s \geqq \delta$ is a parameter.

Suppose that $\lambda_i = \lambda_i(s)$, $i = 1, \ldots, 4$ are solutions of

$$\lambda^4(s) + a\,\lambda^3(s) + (b_1 s^{1/2} + b_2)\,\lambda^2(s) + (c_1 s^{1/2} + c_2)\,\lambda(s) + \\ + d_1 s + d_2 s^{1/2} + d_3 = 0\,. \tag{8}$$

For the sake of simplification we shall further use the following notation

$$b = b_1 s^{1/2} + b_2\,, \quad c = c_1 s^{1/2} + c_2\,, \quad d = d_1 s + d_2 s^{1/2} + d_3\,. \tag{9}$$

Then

$$m_0(t, s) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\lambda_i^3 + a\lambda_i^2 + b\lambda_i + c}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4} (\lambda_i - \lambda_j)}\, e^{\lambda_i t}\,, \tag{10_0}$$

$$m_1(t, s) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\lambda_i^2 + a\lambda_i + b}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4} (\lambda_i - \lambda_j)}\, e^{\lambda_i t}\,, \tag{10_1}$$

$$m_2(t, s) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\lambda_i + a}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4} (\lambda_i - \lambda_j)}\, e^{\lambda_i t}\,, \tag{10_2}$$

$$m_3(t, s) = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4} (\lambda_i - \lambda_j)}\, e^{\lambda_i t}\,, \tag{10_3}$$

if $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ for $i \neq j$.

It will be advantageous to express the functions $m_i(t, s)$ in the following form:

$$m_0(t, s) = (\lambda_1^3 + a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} \int_0^\tau e^{\lambda_2(\tau-\sigma)} \,. \\ . \int_0^\sigma e^{\lambda_3(\sigma-\varrho)} e^{\lambda_4 \varrho}\, d\varrho\, d\sigma\, d\tau + [\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2 + \\ + a(\lambda_1 + \lambda_2) + b] \int_0^t e^{\lambda_2(t-\sigma)} \int_0^\sigma e^{\lambda_3(\sigma-\varrho)} e^{\lambda_4 \varrho}\, d\varrho\, d\sigma + \\ + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + a) \int_0^t e^{\lambda_3(t-\varrho)} e^{\lambda_4 \varrho}\, d\varrho + e^{\lambda_4 t}\,, \tag{11_0}$$

$$(11_1) \qquad m_1(t, s) = (\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b) \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} \int_0^\tau e^{\lambda_2(\tau-\sigma)} \, .$$

$$. \int_0^\sigma e^{\lambda_3(\sigma-\varrho)} e^{\lambda_4 \varrho} \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\sigma \, \mathrm{d}\tau + (\lambda_1 + \lambda_2 + a) \, .$$

$$. \int_0^t e^{\lambda_2(t-\sigma)} \int_0^\sigma e^{\lambda_3(\sigma-\varrho)} e^{\lambda_4 \varrho} \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\sigma + \int_0^t e^{\lambda_3(t-\varrho)} e^{\lambda_4 \varrho} \, \mathrm{d}\varrho \, ,$$

$$(11_2) \qquad m_2(t, s) = (\lambda_1 + a) \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} \int_0^\tau e^{\lambda_2(\tau-\sigma)} \, .$$

$$. \int_0^\sigma e^{\lambda_3(\sigma-\varrho)} e^{\lambda_4 \varrho} \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\sigma \, \mathrm{d}\tau + \int_0^t e^{\lambda_2(t-\sigma)} \int_0^\sigma e^{\lambda_3(\sigma-\varrho)} e^{\lambda_4 \varrho} \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\sigma \, ,$$

$$(11_3) \qquad m_3(t, s) = \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} \int_0^\tau e^{\lambda_2(\tau-\sigma)} \int_0^\sigma e^{\lambda_3(\sigma-\varrho)} e^{\lambda_4 \varrho} \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\sigma \, \mathrm{d}\tau \, .$$

Lemma 1. *Let the following conditions be fulfilled:*

$$(12) \qquad a > 0 \, ,$$

$$(13) \qquad c_1 s^{1/2} + c_2 > 0 \quad for \quad s \geqq \delta \, , \quad c_1 > 0 \, ,$$

$$(14) \qquad d_1 s + d_2 s^{1/2} + d_3 > 0 \quad for \quad s \geqq \delta \, , \quad d_1^2 + d_2^2 > 0 \, ,$$

$$(15) \qquad a(b_1 s^{1/2} + b_2)(c_1 s^{1/2} + c_2) - a^2(d_1 s + d_2 s^{1/2} + d_3) -$$

$$- (c_1 s^{1/2} + c_2)^2 > 0 \quad for \quad s \geqq \delta \, ,$$

$$(16) \qquad a b_1 c_1 - a^2 d_1 - c_1^2 > 0 \, .$$

Then there exists a constant $\omega > 0$ such that

$$(17) \qquad \operatorname{Re} \lambda_i(s) \leqq -\omega$$

for all solutions $\lambda_i(s)$ of the equation (8) and all $s \geqq \delta$.

Proof. We can easily derive by means of the Hurwitz theorem that the necessary and sufficient conditions that the inequality $\operatorname{Re} \lambda_i(s) \leqq -\omega$ (for $s \geqq \delta$) holds are

$$(18_1) \qquad -4\omega + a > 0 \, ,$$

$$(18_2) \qquad (-4\omega + a)(6\omega^2 - 3a\omega + b) - (-4\omega^3 + 3a\omega^2 - 2b\omega + c) > 0 \, ,$$

$$(18_3) \qquad (-4\omega + a)(6\omega^2 - 3a\omega + b)(-4\omega^3 + 3a\omega^2 - 2b\omega + c) - $$
$$- (-4\omega + a)^2 (\omega^4 - a\omega^3 + b\omega^2 - c\omega + d) -$$
$$- (-4\omega^3 + 3a\omega^2 - 2b\omega + c)^2 > 0\,,$$

$$(18_4) \qquad \omega^4 - a\omega^3 + b\omega^2 - c\omega + d > 0\,;$$

the inequalities (18) must be fulfilled for all $s \geqq \delta$. It follows from (12) that the condition (18_1) holds for sufficiently small $\omega > 0$. (18_2) follows immediately from (13), (14), (18_3), (18_4). The condition (18_4) is also fulfilled for sufficiently small $\omega > 0$ because of (14). Further it follows from (16) that there exists $S_0 \geqq \delta$ such that (18_3) holds for $s \geqq S_0$. Using (15) we can guarantee also (18_3) on the interval $[\delta, S_0]$, if we consider sufficiently small $\omega > 0$ only.

Lemma 1A. *Suppose that it holds* (12), (13), (14), (15). *Then*

$$(19) \qquad \operatorname{Re} \lambda_i(s) \leqq 0$$

for all solutions $\lambda_i(s)$ of the equation (8) *and all $s \geqq \delta$.*

Proof. It can be proved that to each $S_0 \geqq \delta$ there exists $\omega = \omega(S_0) > 0$ such that (17) holds for all solutions $\lambda_i(s)$ of the equation (8) and all $s \in [\delta, S_0]$ similarly as in the proof of Lemma 1. This proves Lemma 1A.

Lemma 2. *There exists a constant $A_1 > 0$ such that for each solution $\lambda_i(s)$ of the equation* (8) (*which can be written in the form*

$$(20) \qquad \lambda^4(s) + a\,\lambda^3(s) + b\,\lambda^2(s) + c\,\lambda(s) + d = 0$$

when we use the notation (9)) *it holds*

$$(21) \qquad |\lambda_i(s)| \leqq A_1 s^{1/4}$$

for $s \geqq \delta$.

Proof. If we put

$$(22) \qquad \lambda = y - \frac{a}{4}$$

we can transform the equation (20) to

$$(23) \qquad y^4 + ey^2 + fy + g = 0$$

where

$$e = b - \frac{3}{8}a^2\,, \quad f = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c\,, \quad g = -\frac{3}{256}a^4 + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d\,.$$

All solutions of the equation (23) are:

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(z_1^{1/2} + z_2^{1/2} + z_3^{1/2}), \tag{24_1}$$

$$y_2 = \tfrac{1}{2}(z_1^{1/2} - z_2^{1/2} - z_3^{1/2}), \tag{24_2}$$

$$y_3 = \tfrac{1}{2}(-z_1^{1/2} + z_2^{1/2} - z_3^{1/2}), \tag{24_3}$$

$$y_4 = \tfrac{1}{2}(-z_1^{1/2} - z_2^{1/2} + z_3^{1/2}), \tag{24_4}$$

where z_1, z_2, z_3 are solutions of a cubic equation

$$z^3 + 2ez^2 + (e^2 - 4g)\, z - f^2 = 0\,. \tag{25}$$

We choose values of the square roots such that $z_1^{1/2} \,.\, z_2^{1/2} \,.\, z_3^{1/2} = -f$. Let us put

$$z = x - \frac{2}{3}\, e\,. \tag{26}$$

Then the equation (25) can be transformed to

$$x^3 + 3px + 2q = 0 \tag{27}$$

where

$$p = -\frac{e^2}{9} - \frac{4g}{3}\,, \quad q = -\frac{e^3}{27} + \frac{4eg}{3} - \frac{f^2}{2}\,.$$

Let us denote

$$u = \sqrt[3]{(-q + \sqrt{(q^2 + p^3)})}\,, \quad v = \sqrt[3]{(-q - \sqrt{(q^2 + p^3)})}\,. \tag{28}$$

The square roots are chosen such that $uv = -p$.

Further let us put $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$. Then solutions of the equation (27) are

$$x_1 = u + v\,, \tag{29_1}$$

$$x_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v\,, \tag{29_2}$$

$$x_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v\,. \tag{29_3}$$

Substituting for p, q to (28), we get

$$u = K_u s^{1/2} + o(s^{1/2})\,, \quad v = K_v s^{1/2} + o(s^{1/2})\,, \tag{30}$$

where K_u, K_v are constants and $o(f(s))$ means any expression such that

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{o(f(s))}{f(s)} = 0\,.$$

We get from (22), (24), (26), (29), (30)

$$\lambda_i(s) = K_i s^{1/4} + o(s^{1/4}), \; i = 1, \dots 4, \tag{31}$$

K_i are constants. We can easily find with help of (4) that

(32) to each $S_0 \geqq \delta$ there exists a constant $K(S_0)$ such that $|\lambda_i(s)| \leqq K(S_0)\,\delta^{1/4}$ for $s \in [\delta, S_0]$, $i = 1, \dots, 4$.

The assertion of the lemma follows immediately from (31), (32).

Lemma 3. *Suppose that*

$$d_1 \neq 0, \tag{33}$$

$$b_1^2 - 4d_1 \neq 0. \tag{34}$$

Then there exist constants $\Lambda_2 > 0$, $S_0 \geqq \delta$ such that

$$|\lambda_i(s) - \lambda_j(s)| \geqq \Lambda_2 s^{1/4} \quad \text{for} \quad s \geqq S_0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, 4. \tag{35}$$

Proof. We use all notations from the proof of Lemma 2. Then

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 &= z_2^{1/2} + z_3^{1/2}, & \lambda_2 - \lambda_3 &= z_1^{1/2} - z_2^{1/2}, \\ \lambda_1 - \lambda_3 &= z_1^{1/2} + z_3^{1/2}, & \lambda_2 - \lambda_4 &= z_1^{1/2} - z_3^{1/2}, \\ \lambda_1 - \lambda_4 &= z_1^{1/2} + z_2^{1/2}, & \lambda_3 - \lambda_4 &= z_2^{1/2} - z_3^{1/2}. \end{aligned} \tag{36}$$

So if (35) is to be proved it suffices to prove

$$\begin{aligned} &(z_i^{1/2} + z_j^{1/2})\, s^{-1/4} \xrightarrow{(s \to +\infty)} {}^1K_{ij} \neq 0, \quad \text{for} \quad i \neq j, \\ &(z_i^{1/2} - z_j^{1/2})\, s^{-1/4} \xrightarrow{(s \to +\infty)} {}^2K_{ij} \neq 0, \quad \text{for} \quad i \neq j; \end{aligned} \tag{37}$$

the existence of finite limits is clear, cf. (31).

The conditions (37) will be fulfilled, if

$$\pm \lim_{s \to +\infty} z_i^{1/2} s^{-1/4} \neq \lim_{s \to +\infty} z_j^{1/2} s^{-1/4}, \quad \text{for } i \neq j \tag{38}$$

(the existence of finite limits is clear again).

Using (26) we get the following sufficient condition that (38) is fulfilled

$$\lim_{s \to +\infty} x_i s^{-1/2} \neq \lim_{s \to +\infty} x_j s^{-1/2}, \quad \text{for } i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3. \tag{39}$$

Let us denote

$$\bar{p} = -\frac{b_1^2}{9} - \frac{4}{3} d_1 , \quad \bar{q} = -\frac{b_1^3}{27} + \frac{4}{3} b_1 d_1 ,$$

$$\bar{u} = \sqrt[3]{(-\bar{q} + \sqrt{(\bar{q}^2 + \bar{p}^3)})} , \quad \bar{v} = \sqrt[3]{(-\bar{q} - \sqrt{(\bar{q}^2 + \bar{p}^3)})} ,$$

then

(40)
$$\lim_{s \to +\infty} x_1 s^{-1/2} = \bar{u} + \bar{v} ,$$
$$\lim_{s \to +\infty} x_2 s^{-1/2} = \varepsilon \bar{u} + \varepsilon^2 \bar{v} ,$$
$$\lim_{s \to +\infty} x_3 s^{-1/2} = \varepsilon^2 \bar{u} + \varepsilon \bar{v} .$$

It follows from (40): the condition (39) is fulfilled if

(41)
$$\bar{q}^2 + \bar{p}^3 \neq 0 .$$

We can easily find that (41) follows from (33), (34).

This proves the lemma.

Proposition 1. *Suppose that* (12)–(16), (33), (34) *hold. Then there exist constants* $L > 0$, $\omega > 0$ *such that*

(42)
$$\left| m_i^{(k)}(t, s)\, s^{(i-k)/4} \right| \leqq L e^{-\omega t}$$

for $t \geqq 0$, $s \geqq \delta$, $i = 0, \ldots, 3$, $k = 0, \ldots, 4$.

Proof. It follows from (10), (17), (21), (35) that (42) is fulfilled for $s \geqq S_0$. If we take into consideration the boundedness of $\lambda_i(s)$ for $s \in [\delta, S_0]$ and use (11), we easily prove that (42) holds on $[\delta, S_0]$, too.

Proposition 1A. *Suppose that* (12)–(15), (33), (34) *hold. Then there exists a constant* $L > 0$ *such that*

(43)
$$\left| m_i^{(k)}(t, s)\, s^{(i-k)/4} \right| \leqq L$$

for $t \geqq 0$, $s \geqq \delta$, $i = 0, \ldots, 3$, $k = 0, \ldots, 4$.

Proof. It is similar to the proof of Proposition 1.

It follows immediately from Proposition 1A:

Theorem 1. *Let* (12)–(15), (33), (34) *be fulfilled. Then the function* $u(t)$, *defined by the relation* (5), *is the solution of the equation* (1) *and fulfils the initial conditions* (2).

Theorem 2. *Let* (12)–(16), (33), (34) *be fulfilled. Then the zero solution of the equation* (1) *is globally exponentially stable with respect to the norm* $\|\cdot\|_{\mathscr{D}(A)\times\mathscr{D}(A^{3/4})\times\mathscr{D}(A^{1/2})\times\mathscr{D}(A^{1/4})}$.

Proof. Using (42) we get from (5)

$$(44_0)\qquad \|Au(t)\|^2 \leqq 4\left\{\int_\delta^\infty |m_0(t,s)|^2\, s^2\, \mathrm{d}\|E(s)\,\varphi_0\|^2 + \int_\delta^\infty |m_1(t,s)\, s^{1/4}|^2 \,.\right.$$

$$.\, s^{3/2}\,\mathrm{d}\|E(s)\,\varphi_1\|^2 + \int_\delta^\infty |m_2(t,s)\, s^{1/2}|^2\, s\,\mathrm{d}\|E(s)\,\varphi_2\|^2 +$$

$$\left. + \int_\delta^\infty |m_3(t,s)\, s^{3/4}|^2\, s^{1/2}\,\mathrm{d}\|E(s)\,\varphi_3\|^2\right\} \leqq 4[Le^{-\omega t}]^2\,.$$

$$.\,(\|A\varphi_0\|^2 + \|A^{3/4}\varphi_1\|^2 + \|A^{1/2}\varphi_2\|^2 + \|A^{1/4}\varphi_3\|^2) =$$

$$= 4[Le^{-\omega t}]^2\, \|u(0)\|^2_{\mathscr{D}(A)\times\mathscr{D}(A^{3/4})\times\mathscr{D}(A^{1/2})\times\mathscr{D}(A^{1/4})}\,.$$

We can prove similarly

$$(44_k)\qquad \|A^{1-k/4}\, u^{(k)}(t)\|^2 \leqq 4\, L[e^{-\omega t}]^2\, \|u(0)\|^2_{\mathscr{D}(A)\times\mathscr{D}(A^{3/4})\times\mathscr{D}(A^{1/2})\times\mathscr{D}(A^{1/4})}\,,$$

$$k = 1, 2, 3\,.$$

If we add (44_0)–(44_3), we get the global exponential stability of the zero solution.

Theorem 3. *Let* (12)–(15), (33), (34) *be fulfilled. Then the zero solution of the equation* (1) *is stable with respect to the norm* $\|\cdot\|_{\mathscr{D}(A)\times\mathscr{D}(A^{3/4})\times\mathscr{D}(A^{1/2})\times\mathscr{D}(A^{1/4})}$.

The proof is similar to that of Theorem 2.

Remark 1. *Suppose that $v(t)$ is any solution of the equation* (1). *Then under the assumptions of Theorem* 2, *respectively Theorem* 3, *$v(t)$ is globally exponentially stable, respectively stable with respect to the norm* $\|\cdot\|_{\mathscr{D}(A)\times\mathscr{D}(A^{3/4})\times\mathscr{D}(A^{1/2})\times\mathscr{D}(A^{1/4})}$.

Proof. Let $u(t)$ be a solution of (1). Then the function $w(t) = u(t) - v(t)$ satisfies equation (1), too. Now our assertion immediately follows from Theorem 2, respectively Theorem 3.

Example. The following problem is often investigated:

$$(45)\qquad \varepsilon_1\varepsilon_2\, u_{tttt}(t,x) + a\varepsilon_1\varepsilon_2\, u_{ttt}(t,x) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, u_{ttxx}(t,x) +$$

$$+ (1 + c\varepsilon_1\varepsilon_2)\, u_{tt}(t,x) - a\varepsilon_2\, u_{txx}(t,x) + a\, u_t(t,x) + u_{xxxx}(t,x) -$$

$$- c\varepsilon_2\, u_{xx}(t,x) + c\, u(t,x) = 0\,,$$

where $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $a > 0$, c are real constants,

$$u(t,0) = u(t,\pi) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,\pi) = 0.$$

Using Theorem 3, we get sufficient conditions for the stability of the zero solution of the problem (45).

Put $H = L_2(0, \pi)$ and define the operator A by the relation

$$(46) \qquad A\,v(x) = v_{xxxx}(x)\,, \quad \text{for} \quad v \in \mathscr{D}(A) = \{v \in W_2^4(0, \pi) \mid v(0) = v(\pi) = \\ = v_{xx}(0) = v_{xx}(\pi) = 0\}\,,$$

(in the sense of distributions).

We easily find that the operator A is linear, selfadjoint, strictly positive and $\delta = 1$.

Now, we can rewrite our problem into the form

$$(47) \qquad u''''(t) + a\,u'''(t) + \{[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\,A^{1/2} + 1 + c\varepsilon_1\varepsilon_2]/\varepsilon_1\varepsilon_2\}\,u''(t) + \\ + [(a\varepsilon_2 A^{1/2} + a)/\varepsilon_1\varepsilon_2]\,u'(t) + [(A + c\varepsilon_2 A^{1/2} + c)/\varepsilon_1\varepsilon_2]\,u(t) = 0\,.$$

Simple calculations show that the conditions (12)–(15), (33), (34) are fulfilled, if

$$(48) \qquad \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2\,, \quad c > -(1 + \varepsilon_2)^{-1}\,.$$

Theorem 4. *Let* (48) *be fulfilled. Then the zero solution of the problem* (45) *is stable with respect to the norm* $\|\cdot\|_{\mathscr{D}(A)\times\mathscr{D}(A^{3/4})\times\mathscr{D}(A^{1/2})\times\mathscr{D}(A^{1/4})}$, (*the operator* A *is defined by* (46)).

References

[1] *M. Sova:* On the Timoshenko type equations, Časopis pro pěstování matematiky, *100*, 1975, 217–254.

[2] *M. Sova:* Linear differential equations in Banach spaces, Rozpravy ČSAV, řada matematických a přírodních věd, *85*, 6, 1975, Academia Praha.

[3] *I. Straškraba, O. Vejvoda:* Periodic solutions to abstract differential equations, Czech. Math. J., *23* (*98*) 1973, 635–669.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

$\mathcal{M}$-BEWEGUNGEN MIT DEN (U)-AUTOMORPHISMEN

ZDENĚK JANKOVSKÝ, Praha

(Eingegangen am 22. Januar 1975)

EINLEITUNG

Im vorliegenden Artikel wird die Möbiussche ebene Geometrie ($\mathcal{M}$-Geometrie) als Geometrie im Kleinschen Sinn angesichts der 6-parametrigen Gruppe der direkten linearen gebrochenen Transformationen der Gaussschen Ebene ($\mathcal{M}$-Gruppe) aufgefaßt. Diese Geometrie ist auf die spezielle komplexe Mannigfaltigkeit Dim 2 ($\mathcal{M}$-Ebene) zu übertragen. Die $\mathcal{M}$-Geometrie hat manche bedeutende Eigenschaften (sie ist z. B. konform), s. [1], [3]. Auf der $\mathcal{M}$-Gruppe sind die kinematische Geometrie ($\mathcal{M}$-kinematische Geometrie) und die Kinematik ($\mathcal{M}$-Kinematik) analogisch zur klassischen kongruenten, bzw. afinnen, bzw. projektiven kinematischen Geometrie und Kinematik, die auf der kongruenten, bzw. afinnen, bzw. projektiven Gruppe aufgebaut werden, aufzubauen. Dieser Artikel beschäftigt sich mit den Eigenschaften der Bewegungen dieser $\mathcal{M}$-Kinematik ($\mathcal{M}$-Bewegungen) vom Standpunkt der Reproduktion der geometrischen Figur (U) der $\mathcal{M}$-Ebene ((U)-Automorphismen der $\mathcal{M}$-Bewegungen). Vom Standpunkt der $\mathcal{M}$-Differentialgeometrie handelt es sich um die Eigenschaften der $\mathcal{M}$-Bewegungen des Ranges 0.

1. GRUNDBEGRIFFE

Es sei R der Körper der reellen Zahlen und K der Körper der komplexen Zahlen; bezeichnen wir $\bar{K} = K \cup \{\infty\}$ die erweiterte Gausssche komplexe Ebene, der die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit analytisch durch den Atlas

$$\{(K, w);\ (\bar{K} - \{0\}, w_1)\}$$

mit den Karten

$$w\ : K \to K\ ;\quad w = \mathrm{id}$$

$$w_1 : (\bar{K} - \{0\}) \to K\,,\quad w_1(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z} & \text{für} \quad z \neq 0\,, \quad z \in K\,, \\ 0 & \text{für} \quad z = \infty \end{cases}$$

zugeordnet wird.

Definition 1. Es sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathscr{F} : M \to \bar{K}$ eine bijektive Abbildung, dann nennen wir die Menge M mit der Struktur der komplexen Mannigfaltigkeit, die die Abbildung $\mathscr{F}$ in ihr induziert, die Möbiussche Ebene ($\mathscr{M}$-Ebene) und ihre Elemente $\mathscr{M}$-Punkte.

Es sei $\Gamma_3^1 = \{\mathscr{M} : \bar{K} \to \bar{K} |$

$$\mathscr{M}z = \begin{cases} \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}; \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \,; \quad z, \alpha, \beta, \gamma \neq 0\,, \quad \delta \in K\,; & \text{für} \quad z \neq -\dfrac{\delta}{\gamma}\,, \\ \infty & \text{für} \quad z = -\dfrac{\delta}{\gamma}\,, \\ \dfrac{\alpha}{\gamma} & \text{für} \quad z = \infty\,, \end{cases}$$

für $\gamma = 0$ ist notwendig $\delta \neq 0$ und

$$\mathscr{M}z = \left\{\begin{matrix} \dfrac{\alpha}{\delta} z + \dfrac{\beta}{\delta} & \text{für} \quad z \in K\,, \\ \infty & \text{für} \quad z = \infty\,, \end{matrix}\right\}$$

die Gruppe der linearen gebrochenen Transformationen der erweiterten Gaussschen komplexen Ebene $\bar{K}$. Die Abbildung $\mathscr{F}^{-1}\mathscr{M}\mathscr{F}$ ist offenbar eine Punkttransformation der $\mathscr{M}$-Ebene M.

Definition 2. Die Gruppe Γ_3^1 wird die Möbiussche Gruppe ($\mathscr{M}$-Gruppe) genannt. Die Gruppe $\mathscr{F}^{-1}\Gamma_3^1\mathscr{F}$ wird die Möbiussche Gruppe der Punkttransformationen der $\mathscr{M}$-Ebene M genannt.

Bemerkung 1. Die $\mathscr{M}$-Gruppe ist linear durch die spezielle lineare Gruppe $SL(2, K)$ zu repräsentieren, denn es existiert der folgende Isomorphismus:

$$\psi : \Gamma_3^1 \to SL(2, K) : \psi(\mathscr{M}) = \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{M}| = 1\,; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in K\,.$$

Definition 3. Unter der Möbiusschen Geometrie der $\mathscr{M}$-Ebene M verstehen wir die Geometrie im Kleinschen Sinn angesichts der $\mathscr{M}$-Gruppe der Punkttransformationen der $\mathscr{M}$-Ebene M. Die geometrischen Grundobjekte in der $\mathscr{M}$-Geometrie sind die $\mathscr{M}$-Punkte und die $\mathscr{M}$-Kreise, d. h. die Menge $(\mathscr{K})$ der $\mathscr{M}$-Punkte $(z) \in M$, für welche bei der Matrixdarstellung (die Interpretation M auf der komplexen projektiven Geraden)

$$(z) \to (\mathbf{Z}) = \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = z\,, \quad z_2 \neq 0\,; \quad (\infty) \to \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right); \quad (z_1, z_2) \neq (0, 0)\,,$$

$$\mathscr{K} \equiv \mathbf{Z}^T \mathbf{K} \overline{\mathbf{Z}} = 0$$

gilt, wo

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} A & \bar{B} \\ B & C \end{pmatrix}; \quad A, B, C \in K\,; \quad (A, B, C) \neq (0, 0, 0)\,; \quad A = \bar{A}\,;$$

$$C = \bar{C}\,; \quad AC < B\bar{B}\,.$$

Das 1-parametrische System aller $\mathscr{M}$-Kreise, die mit 2 gegebenen, voneinander verschiedenen Punkten inzidieren (Grundpunkte), bzw. die mit dem gegebenen Kreis in seinem einzigen gegebenen Punkt inzidieren, bzw. die zu den Kreisen im ersten Fall orthogonal sind, heißt das hyperbolische, bzw. parabolische, bzw. elliptische Büschel der $\mathscr{M}$-Kreise.

Bemerkung 2. Vergleiche die Einführung dieser Grundbegriffe mit den ähnlich eingeführten Begriffen in [1], [2], [3], [6].

Definition 4. Das Koordinatensystem S der $\mathscr{M}$-Ebene M heißt jedes Tripel voneinander verschiedener $\mathscr{M}$-Punkte $(z_1), (z_2), (z_3) \in M$, bezeichnen wir $S = \langle (z_1), (z_2), (z_3) \rangle$, und unter den Koordinaten angesichts S verstehen wir jede bijektive Abbildung $\mathscr{F}$ von D1 (Definition 1), für welche

$$\mathscr{F}((z_1)) = 0\,; \quad \mathscr{F}((z_2)) = 1\,; \quad \mathscr{F}((z_3)) = j\,; \quad j^2 = -1$$

gilt. Ist S und $\mathscr{F}$ auf M gegeben, dann sagen wir, daß die $\mathscr{M}$-Ebene M auf S mittels $\mathscr{F}$ bezogen wird; wir bezeichnen sie $M_{\mathscr{F}}(S)$ oder kurz $M(S)$.

Operiert die $\mathscr{M}$-Gruppe $\mathscr{F}^{-1}\Gamma_3^1\mathscr{F}$ auf M, dann transformiert sich das gegebene Koordinatensystem $S = \langle (z_1), (z_2), (z_3) \rangle$ durch die beliebige $\mathscr{M}$-Transformation $\mathscr{F}^{-1}\mathscr{M}\mathscr{F} \in \mathscr{F}^{-1}\Gamma_3^1\mathscr{F}$ ins Koordinatensystem $\Sigma = \langle (\zeta_1), (\zeta_2), (\zeta_3) \rangle$. Die Koordinatentransformation ist in der Form

$$\mathscr{F} = \mathscr{M} \circ {}'\mathscr{F} \tag{1,1}$$

darzustellen.

Bemerkung 3. Ist $'\mathscr{F} = \mathrm{id}$, dann $M \equiv K$ und (1,1) ist als $\mathscr{F} = \mathscr{M}$ zu schreiben.

Wenn eine $\mathscr{M}$-Punktfigur durch eine $\mathscr{M}$-Transformation $\mathscr{F}^{-1}\mathscr{M}\mathscr{F}$ auf die andere $\mathscr{M}$-Punktfigur der $\mathscr{M}$-Ebene M abgebildet wird, dann sind diese 2 $\mathscr{M}$-Punktfiguren in der $\mathscr{M}$-Geometrie als gleichförmig zu betrachten.

Analogisch zur kongruenten Bewegung in der euklidischen Ebene, die auf der Kongruenzgruppe (gewöhnliche Bewegungsgruppe) aufgebaut wird, ist der Begriff der $\mathscr{M}$-Bewegung auf der $\mathscr{M}$-Gruppe der Punkttransformationen der $\mathscr{M}$-Ebene aufzubauen. Sind die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Transformation $\mathscr{M}$ stetige komplexe Funktionen von einem reellwertigen Argument $t \in \mathscr{I} \subset R$ ($\mathscr{I}$ ist ein reelles Intervall), das als die physikalische Zeit zu interpretieren ist, d. h. $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C^0(\mathscr{I})$ ($C^n(\mathscr{I})$ ist der lineare Raum aller n-mal stetig differenzierbaren komplexen Funktionen $\varphi : \mathscr{I} \to K$) und gilt $\forall t_0 \in \mathscr{I} : |\mathbf{M}(t_0)| = 1$, dann ist auszusprechen:

Definition 5. Das 1-parametrische System $\{\mathscr{M}(t)\}_{t \in \mathscr{I}}$ der Punkttransformationen $\mathscr{F}^{-1}\mathscr{M}\mathscr{F}$ der $\mathscr{M}$-Ebene $M_1(S)$ über die analytische Darstellung

$$(1,2) \qquad \zeta = \frac{\alpha(t)\, z + \beta(t)}{\gamma(t)\, z + \delta(t)}, \quad |\mathbf{M}| = 1 \quad \text{auf} \quad \mathscr{I},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C^0(\mathscr{I})$, wird die Möbiussche Bewegung $\mathscr{M}(S/\Sigma)$ der $\mathscr{M}$-Ebene $M_1(S)$ in $\mathscr{M}$-Ebene $M_2(\Sigma)$ auf $\mathscr{I}$ ($\mathscr{M}$-Bewegung $\mathscr{M}(S/\Sigma)$ auf $\mathscr{I}$) genannt, wobei man als Konvention $(z) \in M_1(S)$, $(\zeta) \in M_2(\Sigma)$ legt. $\mathscr{M}$-Ebene $M_1(S)$, bzw. $M_2(\Sigma)$ wird die Gangebene, bzw. Rastebene der $\mathscr{M}$-Bewegung $\mathscr{M}(S/\Sigma)$ auf $\mathscr{I}$ genannt. Fixieren wir in der gegebenen $\mathscr{M}$-Bewegung $\mathscr{M}(S/\Sigma)$ auf $\mathscr{I}$ $t_0 \in \mathscr{I}$, so bekommen wir eine $\mathscr{M}$-Transformation, die wir die Phase t_0 nennen.

Transformieren wir das Koordinatensystem in M_1, bzw. in M_2

$$^1S \to {}^2S, \quad \text{bzw.} \quad {}^1\Sigma \to {}^2\Sigma$$

so, daß die Koordinatentransformation durch die konstante Matrix

$$(1,3) \qquad \mathbf{C}, \text{ bzw. } \boldsymbol{\Gamma}; \quad |\mathbf{C}| = |\boldsymbol{\Gamma}| = 1$$

dargestellt wird, dann geht die gegebene $\mathscr{M}$-Bewegung $\mathscr{M}_1({}^1S/{}^1\Sigma)$ auf $\mathscr{I}$ in so eine $\mathscr{M}$-Bewegung $\mathscr{M}_2({}^2S/{}^2\Sigma)$ auf $\mathscr{I}$ über, daß für ihre Matrixdarstellungen

$$(1,4) \qquad \mathbf{M}_i(t) = \begin{pmatrix} \alpha_i(t) & \beta_i(t) \\ \gamma_i(t) & \delta_i(t) \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{M}_i(t)| = 1,$$

$t \in \mathscr{I}$, $i = 1, 2$

$$(1,5) \qquad \mathbf{M}_2(t) = \boldsymbol{\Gamma}\, \mathbf{M}_1(t)\, \mathbf{C} \quad \text{auf} \quad \mathscr{I}$$

gilt. $\mathscr{M}$-Bewegungen $\mathscr{M}_i({}^iS/{}^i\Sigma)$ auf $\mathscr{I}$, deren die Matrixdarstellung (1,4) bei den gegebenen konstanten Matrixen (1,3) der Beziehung (1,5) genügen, werden äquivalente $\mathscr{M}$-Bewegungen genannt; (1,4) repräsentieren den einzigen, in den verschiedenen Koordinatensystemen dargestellten Bewegungsprozeß.

Definition 6. Die Klasse aller aneinander äquivalenten $\mathcal{M}$-Bewegungen $\mathcal{M}_i({}^iS/{}^i\Sigma)$ auf $\mathcal{I}$ wird $\mathcal{M}$-Bewegung $\mathcal{M}(t)$ auf $\mathcal{I}$ genannt.

2. (U)-AUTOMORPHISMEN DER $\mathcal{M}$-BEWEGUNG

Definition 7. Wir sagen, daß die Punktfigur $(U) \subset M(S)$ analytisch durch die Gleichung

$$f(z) = 0$$

dargestellt wird, wenn

$$f : \bar{K} \to \bar{K}\,, \quad f(z) \begin{cases} = 0 & (z) \in (U)\,, \\ \neq 0 & (z) \notin (U)\,. \end{cases}$$

ist.

Bemerkung 4. Jede Punktfigur kann man analytisch durch unendlich vielen Gleichungen repräsentieren.

Definition 8. Die Gleichungen

$$f_i(z) = 0\,, \quad i = 1, 2$$

sind bezüglich (U) äquivalent, wenn jede von ihnen (U) repräsentiert. Die Funktionen f_i werden dann die äquivalenten Funktionen bezüglich (U) genannt und

$$f_1 \underset{(U)}{\sim} f_2$$

bezeichnet.

Definition 9. $(U) \subset M(S)$ wird die feste Punktfigur bezüglich der $\mathcal{M}$-Bewegung $\mathcal{M}(t)$ auf $\mathcal{I}$ genannt, wenn für ihre beliebige analytische Repräsentation f gilt:

$$f \circ \mathcal{M}(t) \underset{(U)}{\sim} f\,, \quad \text{auf} \quad \mathcal{I}\,. \tag{2,1}$$

Bemerkung 5. Gilt die stärkere Beziehung

$$f \circ \mathcal{M} = f\,, \quad \mathcal{M} \in \Gamma_3^1\,,$$

anstatt (2,1), dann ist die Funktion f die Automorphfunktion der Gruppe Γ_3^1 (siehe z. B. [4], [5]).

Definition 10. Die $\mathcal{M}$-Bewegung $\mathcal{M}(t)$ mit der festen Punktfigur (U) auf $\mathcal{I}$ heißt die $\mathcal{M}$-Bewegung mit dem (U)-Automorphismus auf $\mathcal{I}$.

Bei der Untersuchung der $\mathcal{M}$-Bewegungen mit den (U)-Automorphismen ist eine Aufgabe zu stellen:

Zur beliebigen gegebenen Punktfigur $(U) \subset M$ alle $\mathcal{M}$-Bewegungen finden, die (U) reproduzieren.

Wenn (U) analytisch durch die Funktion f repräsentiert wird, dann werden alle $\mathcal{M}$-Bewegungen $\mathcal{M}(t)$ auf $\mathcal{I}$ mit dem (U)-Automorphismus durch ihre kinematischen Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C^0(\mathcal{I})$ bestimmt und diese kinematischen Parameter genügen der Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{\alpha(t)\, z + \beta(t)}{\gamma(t)\, z + \delta(t)}\right) = 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{I} \tag{2,2}$$

genau für alle z, für welche

$$f(z) = 0 \quad \text{gilt} .$$

Angesichts der Schwierigkeit dieser Aufgabe begrenzen wir uns weiter nur auf ihre Lösung für einige spezielle Punktfiguren, besonders für die geometrischen Grundobjekte und ihre Systeme.

3. $\mathcal{M}$-BEWEGUNGEN MIT DEN (z_0)- UND $(z_1) \wedge (z_2)$-AUTOMORPHISMEN

Suchen wir die $\mathcal{M}$-Bewegungen mit dem (U)-Automorphismus auf $\mathcal{I}$ für

$$(U) \equiv (z_0), \quad (\text{ein } \mathcal{M}\text{-Punkt}) .$$

Es ist S, Σ so auszuwählen, daß die Beziehung

$$\zeta_0 = \mathcal{M}(t)\, z_0 = z_0 = 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{I} \tag{3,1}$$

gilt. Aus (1,2) und (3,1) folgt

$$\beta(t) = 0$$

und daraus folgt

Satz 1. *Das System aller $\mathcal{M}$-Bewegungen mit dem (z_0)-Automorphismus auf $\mathcal{I}$ ist 4-parametrisch (die Parameter des Systems bei unserer Wahl S, Σ :* $\mathrm{Re}\,(\alpha/\delta)$, $\mathrm{Im}\,(\alpha/\delta)$, $\mathrm{Re}\,(\gamma/\delta)$, $\mathrm{Im}\,(\gamma/\delta)$) *und seine Repräsentation*

$$\zeta = \frac{\alpha(t)\, z}{\gamma(t)\, z + \delta(t)} ; \quad \alpha\delta = 1 \quad auf \quad \mathcal{I} \tag{3,2}$$

ist kanonisch.

Suchen wir die $\mathcal{M}$-Bewegungen mit dem (U)-Automorphismus auf $\mathcal{I}$ für

$$(U) \equiv \{(z_1), (z_2)\} ; \quad (z_1) \neq (z_2) .$$

Es ist S, Σ so auszuwählen, daß die Beziehungen

$$z_i = \zeta_i = \varepsilon_i ; \quad i = 1, 2 ; \quad \varepsilon_1 = 1 , \quad \varepsilon_2 = -1 \tag{3,3}$$

gelten. Aus (1,2) und (3,3) folgt

$$\alpha = \delta\,; \quad \beta = \gamma \quad \text{in} \quad C^0(\mathscr{I})$$

und daraus folgt

Satz 2. *Das System aller $\mathscr{M}$-Bewegungen mit dem $(z_1) \wedge (z_2)$-Automorphismus auf $\mathscr{I}$ ist 2-parametrisch und seine Repräsentation*

$$(3,4) \qquad \zeta = \frac{\alpha(t)\, z + \beta(t)}{\beta(t)\, z + \alpha(t)}\,; \quad \alpha(t) = \pm\sqrt{(1 + \beta^2(t))}$$

ist kanonisch. Für $\alpha(t).\,\beta(t) = 0$ auf $\mathscr{I}$ hängt die Beziehung (3,4) von t nicht ab und es handelt sich um die $\mathscr{M}$-Ruhe.

Satz 3. Die $\mathscr{M}$-Bewegung mit dem $(z_1) \wedge (z_2) \wedge \ldots \wedge (z_n)$-Automorphismus, wo $z_i \neq z_j$, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $n \geqq 3$, ist die $\mathscr{M}$-Ruhe.

Der Beweis folgt aus D5, D6 und dem Satz über die Bestimmung der $\mathscr{M}$-Transformation, siehe z. B. [2], S. 4–5.

4. $\mathscr{M}$-BEWEGUNGEN MIT DEM $(\mathscr{K})$-AUTOMORPHISMUS

Suchen wir die $\mathscr{M}$-Bewegungen $\mathscr{M}(t)$ mit dem (U)-Automorphismus auf $\mathscr{I}$ für

$$(U) \equiv (\mathscr{K})$$

Es ist S, Σ so auszuwählen, daß die Beziehungen

$$(4,1) \qquad \mathscr{K} \equiv z - \bar{z} = 0$$

und

$$(4,2) \qquad \mathscr{M}(t)\,(\mathscr{K}) \equiv \zeta - \bar{\zeta} = 0 \quad \text{auf} \quad \mathscr{I}$$

gelten. Aus (2,2) und (4,1) folgt

$$(4,3) \qquad \mathscr{M}(t)\,(\mathscr{K}) \equiv \frac{\delta\zeta - \beta}{-\gamma\zeta + \alpha} = \frac{\bar{\delta}\bar{\zeta} - \bar{\beta}}{-\bar{\gamma}\bar{\zeta} + \bar{\alpha}}$$

und aus (4,2) und (4,3)

$$(4,4) \qquad \delta\bar{\gamma} - \bar{\delta}\gamma = 0\,, \quad \beta\bar{\alpha} - \bar{\beta}\alpha = 0\,, \quad \gamma\bar{\beta} - \delta\bar{\alpha} = \beta\bar{\gamma} - \alpha\bar{\delta} \quad \text{in} \quad C^0(\mathscr{I})\,.$$

Die Beziehungen (4,4) sind gleich den 3 auf die kinematischen Parameter der $\mathscr{M}$-Bewegung gelegten reellen Bedingungen. Diese Bedingungen sind z. B. durch den folgenden Fall

$$\operatorname{Arg} \alpha = \operatorname{Arg} \beta = \operatorname{Arg} \gamma = \operatorname{Arg} \delta$$

zu erfüllen und daraus folgt

Satz 4. *Das System aller $\mathcal{M}$-Bewegungen mit dem $(\mathcal{K})$-Automorphismus auf $\mathcal{I}$ ist 3-parametrisch und seine Repräsentation*

$$\zeta = \frac{\alpha^* z + \beta^*}{\gamma^* z + \delta^*}\,; \quad \alpha^*\delta^* - \beta^*\gamma^* = 1 \quad auf \ \mathcal{I}\,, \tag{4,5}$$

wo $\alpha^* = \bar{\alpha}^*$, $\beta^* = \bar{\beta}^*$, $\gamma^* = \bar{\gamma}^*$, $\delta^* = \bar{\delta}^*$, *ist kanonisch.*

Bemerkung 6. Die $\mathcal{M}$-Bewegungen mit dem $(\mathcal{K})$-Automorphismus sind eigentlich die auf der Gruppe $SL(2, R)$ aufgebauten Bewegungen.

Untersuchen wir den Fall der Reproduktion $(\mathcal{K})$ in den $\mathcal{M}$-Bewegungen (4,5) in ihren einzelnen Phasen, dann ist es nach den festen Punkten (z) in der Phase t_0 zu fragen, d. h. nach den Punkten, für welche

$$\zeta = z \quad \text{in der Phase } t_0 \tag{4,6}$$

gilt.

Satz 5. *In der Phase $t_0 \in \mathcal{I}$ der $\mathcal{M}$-Bewegung (4,5) gibt es einen einzigen Punkt $(z_0) \in (\mathcal{K})$, bzw. eben 2 feste Punkte (z_0), $(\bar{z}_0) \notin (\mathcal{K})$, bzw. eben 2 feste Punkte (z_1), $(z_2) \in (\mathcal{K})$, $(z_1) \neq (z_2)$, dann und nur dann, wenn $\alpha^*(t_0) + \delta^*(t_0) = \operatorname{tr} \mathbf{M}^*(t_0) = \pm 2$, bzw. $|\operatorname{tr} \mathbf{M}^*(t_0)| < 2$, bzw. $|\operatorname{tr} \mathbf{M}^*(t_0)| > 2$ gilt.*

Der Beweis folgt aus (4,5) und [5], Satz 1.12 und 1.13, S. 20–23.

Gilt (4,6) auf $\mathcal{I}$, dann bekommen wir angesichts S5 (Satz 5) 3 wichtige Unterklassen der $\mathcal{M}$-Bewegungen (4,5), die durch

$$\zeta = \frac{\alpha^* z}{\gamma^* z + \alpha^*}, \quad \alpha^{*2} = 1 \quad \text{auf} \ \mathcal{I} \tag{4,7.1}$$

$$\zeta = \frac{\alpha^* z + \beta^*}{-\beta^* z + \alpha^*}, \quad \alpha^{*2} + \beta^{*2} = 1 \quad \text{auf} \ \mathcal{I} \tag{4,7.2}$$

$$\zeta = \frac{\alpha^* z + \beta^*}{\beta^* z + \alpha^*}, \quad \alpha^{*2} - \beta^{*2} = 1 \quad \text{auf} \ \mathcal{I} \tag{4,7.3}$$

zu repräsentieren sind. Die Klassen der $\mathcal{M}$-Bewegungen (4.7) sind 1-parametrisch. Interpretieren wir die einzige beliebige reelle Funktion als einen neuen Zeitvorgang der $\mathcal{M}$-Bewegung, dann bekommen wir in jeder Klasse eine einzige $\mathcal{M}$-Bewegung. Vom Standpunkte der Geometrie werden diese $\mathcal{M}$-Bewegungen durch „die Kreisförmigkeit" aller ihrer Bahnkurven charakterisiert (wie aus (4,7) folgt).

Suchen wir die $\mathcal{M}$-Bewegungen mit dem (U)-Automorphismus auf $\mathcal{I}$ für

$$(U) \equiv \{(\mathcal{K}_1), (\mathcal{K}_2)\}\ ; \quad (\mathcal{K}_1) \neq (\mathcal{K}_2) \ldots \mathcal{M}\text{-Kreise}\ ;$$

die Reproduktion $\{(\mathcal{K}_1), (\mathcal{K}_2)\}$ ist angesichts der Definition der $\mathcal{M}$-Bewegung und „der Kreisförmigkeit" der $\mathcal{M}$-Geometrie nur so möglich, daß jeder aus den $\mathcal{M}$-Kreisen $(\mathcal{K}_1), (\mathcal{K}_2)$ im Ganzen sich reproduziert.

Untersuchen wir die $\mathcal{M}$-Bewegungen mit den $(\mathcal{K}_1) \wedge (\mathcal{K}_2)$-Automorphismen für 3 mögliche Fälle vom Standpunkte der Inzidenz von $(\mathcal{K}_1)$ und $(\mathcal{K}_2)$:

a) $\operatorname{card}\{(\mathcal{K}_1) \cap (\mathcal{K}_2)\} = 2$

b) $\operatorname{card}\{(\mathcal{K}_1) \cap (\mathcal{K}_2)\} = 1$

c) $\operatorname{card}\{(\mathcal{K}_1) \cap (\mathcal{K}_2)\} = 0$

a) Es ist S, Σ so auszuwählen, daß für

$$(z_i) \equiv (\mathcal{K}_1) \cap (\mathcal{K}_2)\ ; \quad (\zeta_i) \equiv \mathcal{M}(t)(\mathcal{K}_1) \cap \mathcal{M}(t)(\mathcal{K}_2)\ ; \quad i = 1, 2\,,$$

die Beziehungen

(5,1) $$z_i = \zeta_i = \varepsilon_i$$

(5,2) $$\mathcal{K}_1 \equiv z - \bar{z} = 0\ ; \quad \mathcal{M}(t)(\mathcal{K}_1) \equiv \zeta - \bar{\zeta} = 0$$

gelten. Die gesuchte $\mathcal{M}$-Bewegung gehört angesichts (5,2) in das System der $\mathcal{M}$-Bewegungen (4,5) und angesichts (5,1) in das System $\mathcal{M}$-Bewegungen von der Repräsentation

(5,3) $$\zeta = \frac{\alpha^* z + \beta^*}{\beta^* z + \alpha^*}\ ; \quad \alpha^{*2} - \beta^{*2} = 1\,,$$

wo $\alpha^* = \bar{\alpha}^*$, $\beta^* = \bar{\beta}^*$ auf $\mathcal{I}$ ist. Beschränken wir uns auf $\alpha^*\beta^* \neq 0$ auf $\mathcal{I}$ (reguläre Phasen), dann ist (5,3)

(5,4) $$\zeta = \frac{\vartheta z + 1}{z + \vartheta}\ ; \quad \vartheta = \vartheta(t) = \bar{\vartheta} = \frac{\alpha^*}{\beta^*}$$

zu schreiben. Durch die Ausschließung des Parameters ϑ bekommen wir die nichtparametrische Repräsentation der $\mathcal{M}$-Karte (des Systems aller $\mathcal{M}$-Bahnkurven) dieser $\mathcal{M}$-Bewegung:

(5,5) $$(z - \bar{z})(\zeta\bar{\zeta} - 1) + (1 - z\bar{z})(\zeta - \bar{\zeta}) = 0\,.$$

Aus (5,5) folgt: die $\mathcal{M}$-Karte bildet das hyperbolische Büschel der $\mathcal{M}$-Kreise mit den Grundpunkten (-1), (1); zu diesem Büschel gehört auch $(\mathcal{K}_2)$ und daraus folgt weiter:

Satz 6. *Das System aller $\mathscr{M}$-Bewegungen mit den $(\mathscr{K}_1) \wedge (\mathscr{K}_2)$-Automorphismen auf $\mathscr{I}$ im Falle sub* a) *ist* 1-*parametrisch und seine Repräsentation* (5,3), *bzw.* (5,4) (*Beschränkung auf die regulären Phasen*) *ist kanonisch. Bei diesen $\mathscr{M}$-Bewegungen reproduzieren sich alle $\mathscr{M}$-Kreise und beide Grundpunkte des hyperbolischen Büschels* (5,5), *aber keine andere $\mathscr{M}$-Punkte und $\mathscr{M}$-Kreise.*

Satz 7. *Das System aller $\mathscr{M}$-Bewegung mit den $(\mathscr{K}_1) \wedge (\mathscr{K}_2)$-Automorphismen auf $\mathscr{I}$ im Falle sub* a) *ist mit dem System der Bewegungen mit dem $(\mathscr{K}_1)$-Automorphismus* (4,7.3) *identisch.*

Der Beweis folgt aus (5,3) und aus der (4,7.3).

b) Es ist S, Σ so auszuwählen, daß die Beziehungen

$$(5,6)\qquad \mathscr{K}_1 \equiv z - \bar{z} = 0\,;\quad \mathscr{M}(t)(\mathscr{K}_1) \equiv \zeta - \bar{\zeta} = 0\,,$$

$$\mathscr{K}_2 \equiv Az\bar{z} - Bz + B\bar{z} = 0\,;\quad \mathscr{M}(t)(\mathscr{K}_2) \equiv A\zeta\bar{\zeta} - B\zeta + B\bar{\zeta} = 0\,,$$

$$A = \bar{A} \neq 0\,;\quad B = -\bar{B} \neq 0\,,$$

also auch

$$(5,7)\qquad (\mathscr{K}_1) \cap (\mathscr{K}_2) \equiv \mathscr{M}(t)(\mathscr{K}_1) \cap \mathscr{M}(t)(\mathscr{K}_2) \equiv (0)$$

gelten. Die gesuchte $\mathscr{M}$-Bewegung gehört angesichts (5,6) in das System der $\mathscr{M}$-Bewegungen (4,5) und angesichts (5,7) in das System der $\mathscr{M}$-Bewegungen (3,2). Da $(0) \in (\mathscr{K}_1)$ der einzige feste Punkt auf $\mathscr{I}$ ist, gehört die gesuchte $\mathscr{M}$-Bewegung in das System der $\mathscr{M}$-Bewegung mit der Repräsentation:

$$(5,8)\qquad \zeta = \frac{\alpha^* z}{\gamma^* z + \alpha^*}\,;\quad \alpha^{*2} = 1\,.$$

Beschränken wir uns auf $\gamma^* \neq 0$ auf $\mathscr{I}$ (reguläre Phasen), dann ist (5,8)

$$(5,9)\qquad \zeta = \frac{\vartheta z}{z + \vartheta}\,;\quad \vartheta = \vartheta(t) = \bar{\vartheta} = \frac{\alpha^*}{\gamma^*}\,.$$

zu schreiben.

Durch die Ausschließung des Parameters ϑ bekommen wir die nichtparametrische Repräsentation der $\mathscr{M}$-Karte der $\mathscr{M}$-Bewegung

$$(5,10)\qquad (z - \bar{z})\,\zeta\bar{\zeta} - z\bar{z}(\zeta - \bar{\zeta}) = 0\,.$$

Aus (5,10) folgt: die $\mathscr{M}$-Karte bildet das parabolische Büschel der $\mathscr{M}$-Kreise mit dem Grundpunkt (0); zu diesem Büschel gehört auch $(\mathscr{K}_1)$ und $(\mathscr{K}_2)$ und daraus folgt weiter:

Satz 8. *Das System aller $\mathscr{M}$-Bewegungen mit den $(\mathscr{K}_1) \wedge (\mathscr{K}_2)$-Automorphismen auf $\mathscr{I}$ in Falle sub* b) *ist* 1-*parametrisch und seine Repräsentation* (5,8), *bzw.* (5,9)

(*Beschränkung auf die regulären Phasen*) *ist kanonisch. Bei diesen $\mathcal{M}$-Bewegungen reproduzieren sich alle $\mathcal{M}$-Kreise und der Grundpunkt des parabolischen Büschels* (5,10), *aber keine andere $\mathcal{M}$-Punkte und $\mathcal{M}$-Kreise.*

Satz 9. *Das System aller $\mathcal{M}$-Bewegungen mit den* $(\mathcal{K}_1) \wedge (\mathcal{K}_2)$-*Automorphismen auf $\mathcal{S}$ im Falle sub* b) *ist mit dem System der Bewegungen mit* $(\mathcal{K}_1)$-*Automorphismus* (4,7.1) *identisch.*

Der **Beweis** folgt aus (5,8) und (4,7.1).

c) Angesichts der Anwendung S5 auf $(\mathcal{K}_1)$ und $(\mathcal{K}_2)$ auf $\mathcal{S}$ und [6], S. 32, gibt es in dieser Bewegung 2 feste Punkte auf $\mathcal{S}$. Es ist S, Σ so auszuwählen, daß

$$(5{,}11)\qquad \mathcal{K}_1 \equiv z - \bar{z} = 0\,; \quad \mathcal{M}(t)\,(\mathcal{K}_1) \equiv \zeta - \bar{\zeta} = 0$$

und

$$(5{,}12)\qquad z_i = \mathcal{M}(t)\,(z_i) = \zeta_i = {}^{\backprime}\varepsilon_i\,, \quad {}^{\backprime}\varepsilon_1 = j\,, \quad {}^{\backprime}\varepsilon_2 = -j\,,$$

$j^2 = -1$, $i = 1, 2$, ist.

Die gesuchte $\mathcal{M}$-Bewegung gehört angesichts (5,11) in das System der $\mathcal{M}$-Bewegungen (4,5) und angesichts (5,12) in das System der $\mathcal{M}$-Bewegungen von der Repräsentation

$$\zeta = \frac{\alpha z + \beta}{-\beta z + \alpha}\,; \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1\,;$$

im Ganzen gehört sie in das System der $\mathcal{M}$-Bewegungen von der Repräsentation

$$(5{,}13)\qquad \zeta = \frac{\alpha^* z + \beta^*}{-\beta^* z + \alpha^*}\,; \quad \alpha^{*2} + \beta^{*2} = 1\,.$$

Beschränken wir uns auf $\alpha^* \,.\, \beta^* \neq 0$ auf $\mathcal{S}$ (reguläre Phasen), dann ist (5,13)

$$(5{,}14)\qquad \zeta = \frac{\vartheta z + 1}{-z + \vartheta}\,; \quad \vartheta = \vartheta(t) = \bar{\vartheta} = \frac{\alpha^*}{\beta^*}$$

zu schreiben. Durch die Ausschließung des Parameters ϑ bekommen wir die nichtparametrische Repräsentation der $\mathcal{M}$-Karte der $\mathcal{M}$-Bewegung

$$(5{,}15)\qquad (z - \bar{z})(\zeta\bar{\zeta} + 1) - (z\bar{z} + 1)(\zeta - \bar{\zeta}) = 0\,.$$

Aus (5,15) folgt: die $\mathcal{M}$-Karte bildet das elliptische Büschel der $\mathcal{M}$-Kreise mit den Grundpunkten (j), $(-j)$; zu diesem Büschel gehört auch $(\mathcal{K}_1)$ und $(\mathcal{K}_2)$ und daraus folgt weiter:

Satz 10. *Das System aller $\mathcal{M}$-Bewegungen mit den* $(\mathcal{K}_1) \wedge (\mathcal{K}_2)$-*Automorphismen auf $\mathcal{S}$ im Falle sub* c) *ist* 1-*parametrisch und seine Repräsentation* (5,13), *bzw.* (5,14) (*Beschränkung auf die regulären Phasen*) *ist kanonisch. Bei diesem* $\mathscr{M}$*-Bewegungen reproduzieren sich alle* $\mathscr{M}$*-Kreise und beide Grundpunkte des elliptischen Büschels* (5,15), *aber keine andere* $\mathscr{M}$*-Punkte und* $\mathscr{M}$*-Kreise.*

Satz 11. *Das System aller* $\mathscr{M}$*-Bewegungen mit den* $(\mathscr{K}_1) \wedge (\mathscr{K}_2)$*-Automorphismen auf* $\mathscr{I}$ *im Falle sub* c) *ist mit dem System der Bewegungen mit* $(\mathscr{K}_1)$*-Automorphismus* (4,7.2) *identisch.*

Der Beweis folgt aus (5,13) und (4,7.2).

6. $\mathscr{M}$-BEWEGUNGEN MIT DEM $(\mathscr{L}_\omega)$-AUTOMORPHISMUS

In den vorangehenden Absätzen haben wir alle Möglichkeiten der Zusammensetzung der festen Punktfigur (U) aus den $\mathscr{M}$-Punkten und $\mathscr{M}$-Kreisen ausgenutzt, denn wir bekommen nach dem Beifügen von weiteren festen $\mathscr{M}$-Punkten, bzw. $\mathscr{M}$-Kreisen keine neue $\mathscr{M}$-Bewegung sondern nur die höher angeführten Bewegungen oder $\mathscr{M}$-Ruhe.

Fragen wir also weiter angesichts des vorangehenden Absatzes und der Konformigkeit der $\mathscr{M}$-Geometrie (siehe z. B. [3]) nach den $\mathscr{M}$-Bewegungen mit (U)-Automorphismus für

$$(U) \equiv (\mathscr{L}_\omega)\,,$$

wo

$$\mathscr{L}_\omega \equiv \zeta(t) = \frac{`\alpha + `\beta \exp(\chi t)}{`\gamma + `\delta \exp(\chi t)}\,, \tag{6,1}$$

$`\alpha, `\beta, `\gamma, `\delta \in K$, konst., $`\alpha`\delta \neq `\beta`\gamma$, $\chi \neq 0$, konst., $\omega = \operatorname{Arg} \chi$, $t \in R$, die ω-Loxodrome (Doppelspirale) des hyperbolischen Büschel der $\mathscr{M}$-Kreise mit den Grundpunkten $(`\alpha/`\gamma)$, $(`\beta/`\delta)$ ist. Für $\chi = \bar{\chi}$, bzw. $\chi = -\bar{\chi}$ repräsentiert (6,1) den Bogen des $\mathscr{M}$-Kreises des hyperbolischen, bzw. elliptischen Büschels der Kreise mit den Grundpunkten $(`\alpha/`\gamma)$, $(`\beta/`\delta)$.

Es ist das Koordinatensystem S so auszuwählen, daß

$$\left(\frac{`\alpha}{`\gamma}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{`\beta}{`\delta}\right) = -1$$

ist. Dann ist (6,1)

$$\mathscr{L}_\omega \equiv \zeta(t) = \frac{``\alpha - ``\beta \exp(\chi t)}{``\alpha + ``\beta \exp(\chi t)}\,, \quad ``\alpha \,.\, ``\beta \neq 0\,, \tag{6,2}$$

zu schreiben. Die notwendige Bedingung für die $\mathscr{M}$-Bewegung mit dem $(\mathscr{L}_\omega)$-Automorphismus (6,2) heißt:

(6,2) Bußm eine ahnkurve dieser $\mathscr{M}$-Bewegungen bis auf die Parametrisation repräsentieren.

Die gesuchten $\mathcal{M}$-Bewegungen gehören also in das System der Bewegungen von der Repräsentation

$$(6,3) \qquad \zeta = \frac{z - \exp(\chi{}`t)}{z + \exp(\chi{}`t)}; \quad \chi \neq 0, \quad \text{konst.},$$

$$`t \triangleq `\bar{t} = `t(t) \in C^1(\mathcal{I}), \quad `t \in `\mathcal{I}, \quad \frac{d`t}{dt} \neq 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{I}.$$

Bemerkung 7. In (6,3) ist $|\mathbf{M}| \neq 1$, und $|\mathbf{M}| \neq 0$. Die Repräsentation (6,3) ist in diesem Falle einfacher als die normale Repräsentation und deshalb wird sie hier angewandt.

Durch die Transformationen S, bzw. Σ, bei welchen $(0) \to (-1)$; $(\infty) \to (1)$, bzw. $(0) \leftrightarrow (\infty)$ ist, bekommen wir die Repräsentation der $\mathcal{M}$-Bewegungen (6,3) in folgender Form:

$$(6,4) \qquad \zeta = \frac{(z + 1) + (z - 1)\exp(\chi{}`t)}{(z + 1) - (z - 1)\exp(\chi{}`t)}; \quad \chi \neq 0, \text{konst.}$$

Das Bild $(\mathcal{L}_\omega)$ von der Repräsentation (6,2) bei den Transformationen (6,4) ist wieder $(\mathcal{L}_\omega)$ von der Repräsentation (6,2). Daraus folgt:

Satz 12. *Das System aller $\mathcal{M}$-Bewegungen mit dem $(\mathcal{L}_\omega)$-Automorphismus ist 1-parametrisch und seine Repräsentation (6,4) ist kanonisch. Bei diesen $\mathcal{M}$-Bewegungen reproduzieren sich alle ω-Loxodromen des hyperbolischen Büschels der $\mathcal{M}$-Kreise mit den Grundpunkten (-1), (1) und beide Grundpunkte.*

Bemerkung 8. $\mathcal{M}$-Bewegungen mit $(\mathcal{L}_0)$-Automorphismus sind mit den Bewegungen mit $(\mathcal{K}_1) \wedge (\mathcal{K}_2)$-Automorphismen im Fall sub a) identisch; die $\mathcal{M}$-Bewegungen mit $(\mathcal{L}_{\pi/2})$-Automorphismus sind mit den Bewegungen mit $(\mathcal{K}_1) \wedge (\mathcal{K}_2)$-Automorphismen im Falle sub c) identisch.

Literatur

[1] *Blaschke, W., Thomsen, G.:* Vorlesungen über Differentialgeometrie III. (Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln). Berlin, Springer, 1929.

[2] *Benz, W.:* Vorlesungen über Geometrie der Algebren. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1973.

[3] *Бушманова, Г. В., Норден, А. П.:* Элементы конформной геометрии. Казань, Из. каз. унив., 1972 (russisch).

[4] *Forsyth, A. R.:* Theory of functions of a complex variable. Cambridge, University Press, 1900.

[5] *Shimura, G.:* Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Princeton, University Press, 1971 (russisch: Moskva, Mir, 1973).

[6] *Jankovský, Z.:* Základy $\mathcal{M}$-kinematiky a $\mathcal{M}$-kinematické geometrie v rovině (Grundlagen der $\mathcal{M}$-Kinematik und der $\mathcal{M}$-kinematischen Geometrie in der Ebene) — tschechisch. Kandidatdissertation FJFI, ČVUT, Praha, 1974.

Anschrift des Verfassers: 166 27 Praha 6, Suchbátarova 2 (FEL ČVUT).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

ON TRANSFINITE SEQUENCES OF MAPPINGS

JAN STANISŁAW LIPIŃSKI, Gdańsk

(Received March 14, 1975)

The notion of transfinite sequence of numbers and transfinite sequence of real functions was introduced by W. SIERPIŃSKI [8] and generalized by P. KOSTYRKO and T. ŠALÁT [2] and [7] for the case of mappings of sets into a metric space.

Definition 1. [7] Let $\{a_\xi\}_{\xi<\Omega}$ be a transfinite sequence of elements of the metric space (Y, ϱ). Point $a \in Y$ is said to be *the limit of the sequence* $\{a_\xi\}$ if there exists for every positive number ε a transfinite number $\eta < \Omega$ such that for any transfinite number ξ the inequality $\eta < \xi$ implies $\varrho(a_\xi, a) < \varepsilon$.

The limit of the transfinite sequence $\{a_\xi\}$ will be denoted by $\lim_{\xi\to\Omega} a_\xi$. A transfinite sequence is called *convergent* if a limit in the above stated sense exists.

Definition 2. [2], [7] The transfinite sequence $\{f_\xi\}_{\xi<\Omega}$ of mappings of the set E into metric space (Y, ϱ) is said to be *convergent to the mapping* f if for every point $x \in E$ the sequence $\{f_\xi(x)\}$ is convergent and $\lim_{\xi\to\Omega} f_\xi(x) = f(x)$. We write $\lim_{\xi\to\Omega} f_\xi = f$.

Definition 3. The transfinite sequence $\{f_\xi\}$ $[\{a_\xi\}]$ is said to be *almost constant* if there exists a transfinite number $\eta < \Omega$ such that for every transfinite number ξ the inequality $\eta < \xi$ implies $f_\xi = f_{\eta+1}$ $[a_\xi = a_{\eta+1}]$.

It can easily be seen that a transfinite sequence of elements of (Y, ϱ) is convergent if and only if it is almost constant. There is no assumption in Definition 3 for the members of the sequence to belong to a metric space. Hence this definition is more general than Definition 1. This enables us to drop the assumption of metrization in certain other formulations.

Definition 4. [2] A transfinite sequence $\{f_\xi\}_{\xi<\Omega}$ of mappings of E into the metric space (Y, ϱ) is said to be *uniformely convergent to the mapping* f if there exists for every $\varepsilon > 0$ a transfinite number $\eta < \Omega$ such that for every $x \in E$ and for every transfinite number ξ the inequality $\eta < \xi$ implies $\varrho(f_\xi(x), f(x)) < \varepsilon$.

It can be easily verified that a sequence of mappings into a metric space is uniformely convergent if and only if it is almost constant [2], [4].

Definition 5. A family $\mathscr{F}$ of mappings of E into Y is said to be *closed with respect to the transfinite convergence* if for every convergent sequence of mappings $\{f_\xi\}_{\xi<\Omega}$ with members belonging to $\mathscr{F}$ the condition $\lim_{\xi>\Omega} f_\xi \in \mathscr{F}$ holds.

Definition 6. A family $\mathscr{F}$ of mappings of E into Y is said to be *strictly closed* if every convergent sequence of mappings belonging to $\mathscr{F}$ is almost constant.

Several authors have delivered proofs of closedness and strictly closedness of different families of functions. E.g. W. Sierpiński [8] has shown that the family of real functions of real variable belonging to first Baire class is closed and the family of continuous functions is strictly closed. T. Šalát [7] demonstrated that the family of continuous mappings of a metric space into a metric space is closed. Also the family of quasicontinuous functions and the family of cliquish functions are closed, as was shown by A. Neubrunnová [5].

Definition 7. Let $\mathscr{F}$ and $\mathscr{G}$ be families of mappings of E into Y. The family $\mathscr{F}$ is said to be *dense* in $\mathscr{G}$ (with respect to the transfinite convergence) if for every mapping $g \in \mathscr{G}$ there exists a transfinite sequence $\{f_\xi\}$ with members belonging to $\mathscr{F}$ such that $g = \lim_{\xi\to\Omega} f_\xi$.

E.g. the family of approximatively continuous functions is dense in the family of functions semicontinuous from above [3].

The aim of this note is the formulation of necessary and sufficient conditions for a family of mappings to be closed or strictly closed or dense in another family.

In spite of the fact that the literature concerning the problems of closedness with respect to the transfinite convergence is fairly ample, general criterion of closedness can be found only in paper [7] by T. Šalát. It is a sufficient condition for closedness based on the notion of a determining set.

Definition 8. [1] Let $\mathscr{A}$ be a family of mappings of E into F. A set $D \subset E$ is said to be *determining for the family* $\mathscr{A}$ if two members of $\mathscr{A}$ which agree on D must agree on all of E.

Remark 1. It can easily be seen that a set determining for a family $\mathscr{A}$ is also determining for every family enclosed in $\mathscr{A}$.

The criterion of closedness given by Šalát in [7] reads as follows: "If there exists among the determinings sets for a family $\mathscr{A}$ a denumerable set, then the family $\mathscr{A}$ is closed". The sufficient condition quoted in this theorem is not a necessary condition even for strict closedness. The following exemple is a proof of this fact:

Exemple 1. Let $\{a_\xi\}_{\xi<\Omega}$ be a transfinite and one-to-one sequence of real numbers. Let $\overline{\overline{E}} = \aleph_1$ and let $E = \bigcup_{\xi>\Omega} E_\xi$ where E_ξ are denumerable sets and let $\{E_\xi\}$ be the increasing sequence of sets. Let $\{x_\xi\}_{\xi<\Omega}$ be a transfinite and one-to-one sequence of elements of E such that $x_\xi \notin E_\xi$. Let $f_\xi(x) = a_\xi$ for every $x \in E$ and $g_\xi(x) = a_\xi$ for $x \neq x_\xi$ and $g_\xi(x_\xi) = a_\xi + 1$. Let $\mathscr{A}$ be the family of all functions f_ξ and g_ξ. No denumerable set is determining for $\mathscr{A}$. In fact, let $F \subset E$ be a denumerable set. Then there exists a set E_ξ such that $F \subset E_\xi$. We come to $f_\xi(x) = g_\xi(x)$ for $x \in F$, but $f_\xi(x_\xi) \neq g_\xi(x_\xi)$. Therefore the set F is not determining for $\mathscr{A}$.

The family $\mathscr{A}$ is strictly closed. In fact, let $h_\xi \in \mathscr{A}$ and let the sequence $\{h_\xi\}_{\xi<\Omega}$ be convergent. We shall show that it is almost constant. Assume that $G \subset E$ is a denumerable set. The functions $h_\xi \mid G$ form a convergent sequence. As they are defined on a denumerable set, hence, according to Theorem 1 of paper [2], the sequence of these functions is uniformely convergent. It follows herefrom that this sequence is almost constant. There exists therefore a number $\eta < \Omega$ such that if $\eta < \xi$ then $h_\xi \mid G = h_{\eta+1} \mid G$. As $h_{\eta+1} \in \mathscr{A}$ there exists a number α such that either $h_{\eta+1} = f_\alpha$ or $h_{\eta+1} = g_\alpha$. On the set G all functions h_ξ with indeces $\xi > \eta$ are equal to f_α or to g_α. According to the definition of f_α and g_α all functions h_ξ $(\xi > \eta)$ take everywhere in G, may be with the exception of x_α, the value a_α. In the family $\mathscr{A}$ there exist only two functions of this property. They are f_α and g_α. The sequence $\{h_\xi(x_\alpha)\}_{\xi<\Omega}$ is convergent and therefore almost constant. For $\eta < \xi$ depending on whether $h_\xi = f_\alpha$ or $h_\xi = g_\alpha$ either $h_\xi(x_\alpha) = a_\alpha$ or $h_\xi(x_\alpha) = a_\alpha + 1$ holds. As the sequence $\{h_\xi(x_\alpha)\}_{\alpha<\Omega}$ is convergent it must necessarily be almost constant. There exists a number $\tau < \Omega$ such that if $\tau < \xi$ then $h_\xi(x_\alpha) = h_{\tau+1}(x_\alpha)$. Without loss of generality we may assume that $\eta < \tau$. Then it follows from $h_{\tau+1}(x_\alpha) = a_\alpha$ that for $\tau < \xi$ all functions $h_\xi = f_\alpha$, and from $h_{\tau+1}(x_\alpha) = a_\alpha + 1$ it follows that they are equal to g_α. In both cases the sequence $\{h_\xi\}$ ist almost constant.

We have proved thus that the family $\mathscr{A}$ is strictly closed, although no denumerable set is determining for this family.

Lemma 1. *Let f and f_ξ be mappings of E and let $f = \lim_{\xi\to\Omega} f_\xi$. Then there exists for each denumerable set $F \subset E$ a number η such that all mappings f_ξ with indices $\xi > \eta$ are extensions of the mapping $f \mid F$.*

Proof. Evidently $f \mid F = \lim_{\xi\to\infty} f_\xi \mid F$. It follows from Theorem 1 of paper [2] that the sequence $\{f_\xi \mid F\}$ ist almost constant. Hence there exists a number $\eta < \Omega$ such that if $\eta < \xi$ then $f_\xi \mid F = f \mid F$. The mappings f_ξ $(\eta < \xi)$ are therefore extensions of the mapping $f \mid F$.

Lemma 2. *Let $\{f_\xi\}_{\xi<\Omega}$ be a transfinite and convergent sequence of mappings of E into Y. Let $\mathscr{F}$ be the family of all elements of $\{f_\xi\}$. The sequence $\{f_\xi\}$ is almost* *constant if and only if there exists among the determining sets for $\mathscr{F}$ a set at most denumerable.*

Proof. Let F be an at most denumerable determining set for $\mathscr{F}$. It follows from Theorem 1 of [2] that the sequence $\{f_\xi \mid F\}$ is almost constant. Hence there exists a number η such that if $\eta < \xi$ then $f_\xi \mid F = f_{\eta+1} \mid F$. We have therefore $f_\xi(x) = f_{\eta+1}(x)$ for $x \in F$ and $\eta < \xi$. As F is a determining set therefore $f_\xi(x) = f_{\eta+1}(x)$ for every x. The sequence $\{f_\xi\}$ proves to be almost constant.

Assume now that the sequence $\{f_\xi\}$ is almost constant. Let $f = \lim\limits_{\xi \to \Omega} f_\xi$. If $f = f_\xi$ for all $\xi < \Omega$ then the family $\mathscr{F}$ consists of only one mapping and every set $F \subset E$ is a determining set for $\mathscr{F}$. Evidently there are finite sets among them.

Consider now the remaining case when not all elements of the sequence are equal to its limit. Evidently the set of indices ξ for which $f_\xi \neq f$ is at most denumerable. For each coupel (ξ, ζ) such that $f_\xi \neq f$, $f_\zeta \neq f$ and $f_\xi \neq f_\zeta$ there exists a point $x_{\xi,\zeta} \in E$ such that $f_\xi(x_{\xi,\zeta}) \neq f_\zeta(x_{\xi,\zeta})$. For each mapping $f_\xi \neq f$ there exists a point x_ξ such that $f_\xi(x_\xi) \neq f(x_\xi)$. The set of all points $x_{\xi,\zeta}$ and x_ξ is non-empty and at most denumerable. Denote this set by D. We shall demonstrate that it is a determining set for $\mathscr{F}$. Indeed, if two mappings f_ξ and f_ζ belonging to $\mathscr{F}$ are not equal, then they are not equal in at least one point $x \in D$. Therefore if $f_\xi(x) = f_\zeta(x)$ for all $x \in D$ then necessarily $f_\xi = f_\zeta$.

Theorem 1. *A family $\mathscr{R}$ of mappings of E into Y is strictly closed if and only if for every transfinite and convergent sequence of mappings belonging to $\mathscr{R}$ there exists an at most denumerable determining set for the family of all terms of this sequence.*

Proof. The assertion follows easily from Lemma 2 and Definition 6.

Corollary. *Let $\mathscr{R}$ be a family of mappings. If there exists an at most denumerable determining set for $\mathscr{R}$, then the family $\mathscr{R}$ is strictly closed.*

Exemple 2. The family of all Riemann-integrable derivatives defined on the interval $\langle a, b\rangle$ is strictly closed. In fact, any set dense in $\langle a, b\rangle$ is determining for this family [1], and there exist also denumerable sets among the dense ones.

Theorem 2. *Let $\overline{\overline{E}} = \aleph_1$. A family $\mathscr{F}$ of mappings of E into Y is closed if and only if there exists for every mapping $g \notin \mathscr{F}$ a denumerable set $F \subset E$ such that no mapping $f \in \mathscr{F}$ is an extension of $g \mid F$.*

Proof. Assume that the assertion does not hold. Then there exists a mapping $g \notin \mathscr{F}$ such that for every denumerable set $A \subset E$ there exists a mapping $f \in \mathscr{F}$ such that $f \mid A = g \mid A$. Let $E = \bigcup\limits_{\xi<\Omega} A_\xi$ where A_ξ are denumerable sets and $\xi < \zeta$ implies $A_\xi \subset A_\zeta$. There exists for every A_ξ a mapping $f_\xi \in \mathscr{F}$ such that $f_\xi \mid A_\xi =$

$= g \mid A_\xi$. There exists for any point $x \in E$ a number $\eta \in \Omega$ such that $\eta < \xi$ implies $x \in A_\xi$. Hence we have $f_\xi(x) = g(x)$ for $\eta < \xi$. Hence $g = \lim_{\xi \to \Omega} f_\xi$. Thus the family $\mathscr{F}$ is not closed and the condition given in the theorem proves to be necessary for the closedness of $\mathscr{F}$.

Assume now that $\mathscr{F}$ is not closed. Then there exist mappings $g \notin \mathscr{F}$ and $f_\xi \in \mathscr{F}$ such that $g = \lim_{\xi \to \infty} f_\xi$. By Lemma 1 there exists for any denumerable set $A \subset E$ a number η such that for $\eta < \xi$ the mappings f_ξ are extensions of the mapping $g \mid A$. The condition mentioned in the theorem is therefore not satisfied. Hence it follows that this condition is sufficient for the closedness of the family $\mathscr{F}$.

Corollary 2. *It follows from the continuum hypothesis and Theorem* 2 *that followings families of real functions defined on* $\langle a, b \rangle$ *are closed with respect to the convergence of transfinite sequences*:

a) *the family of all bounded [bounded from above] functions,*
b) *the family of all increasing [non-decreasing] functions,*
c) *the family of all functions of bounded variation,*
d) *the family of all differentiable functions,*
e) *the family of all functions satisfying the Lipschitz condition,*
f) *the family of all Riemann-integrable functions.*

Take for exemple case f). Let $\mathscr{F}$ be the family of all Riemann-integrable functions defined on the interval $\langle a, b \rangle$. Suppose that $g \notin \mathscr{F}$. In this case either g is not bounded or the set of the discontinuity points of g has positive measure. In the first case there exists a denumerable set $A \subset \langle a, b \rangle$ such that the function $g \mid A$ is not bounded. The functions $f \in \mathscr{F}$ are bounded and therefore cannot be extensions of the function $g \mid A$.

In the second case we choos for A a denumerable set such that the graph of $g \mid A$ is dense in the graph of g. The existence of such a set follows from the separability of R^2. Let $\omega(x, f)$ denote the oscillation of the function f in the point x. For each x also the condition $\omega(x, g) = \omega(x, g \mid A)$ is satisfied. For each function f being an extension of the function $g \mid A$ we have $\omega(x, f) \geqq \omega(x, g \mid A)$. The set of discontinuity points of f contains the set of discontinuity points of g. This set necessarily has positive measure. None of the functions $f \in \mathscr{F}$ can be an extension of the function $g \mid A$. Therefore by Theorem 2 the family $\mathscr{F}$ is closed.

Theorem 3. *Let $\mathscr{F}$ and $\mathscr{G}$ be families of mappings of E into Y. For the family $\mathscr{F}$ to be dense in $\mathscr{G}$ it is necessary, and if $\overline{\overline{E}} = \aleph_1$ also sufficient, that for every mapping $g \in \mathscr{G}$ and every at most denumerable set $A \subset E$ exists a mapping $f \in \mathscr{F}$ being an extension of $g \mid A$.*

Proof. Assume that the family $\mathscr{F}$ is dense in $\mathscr{G}$. For any mapping $g \in \mathscr{G}$ there exists a transfinite sequence $\{f_\xi\}_{\xi<\Omega}$ of mappings $f_\xi \in \mathscr{F}$ such that $g = \lim_{\xi \to \Omega} f_\xi$. By Lemma 1 there exist among them such mappings f_ξ which are extensions of $g \mid A$. Hence the condition is necessary.

Assume now that the condition is satisfied. Assume, as in the proof of Theorem 2, that $E = \bigcup_{\xi \to \Omega} A_\xi$ where A_ξ are denumerable sets and $\xi < \zeta$ implies $A_\xi \subset A_\zeta$. Let $g \in \mathscr{G}$. According the assumption there exists for every set A_ξ a mapping $f_\xi \in \mathscr{F}$ such that $f_\xi \mid A_\xi = g \mid A_\xi$. Hence follows as was the case with Theorem 2 that $g = \lim_{\xi<\Omega} f_\xi$. The family $\mathscr{F}$ is therefore dense in $\mathscr{G}$. The condition proves to be sufficient.

Exemple 3. Let $\mathscr{A}$ be the family of all functions approximatively continuous defined on R. Let $\mathscr{B}_1$ be the family of all Baire class 1 functions. It follows from the continuum hypothesis that $\mathscr{A}$ is dense in $\mathscr{B}_1$. In fact, G. Petruska and M. Laczkovich have demonstrated in [6] that for any function $g \in \mathscr{B}_1$ and for every set A of measure zero (and therefore also for any denumerable set) there exists a function $f \in \mathscr{A}$ such that $f \mid A = g \mid A$. This implies by Theorem 3 the denseness of $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}_1$.

References

[1] *N. Boboc* et *S. Marcus:* Sur la détermination d'une fonction par les valeur prises sur un certain ensemble. Ann. Sci. École Norm. Sup., *3*, 76, (1959), pp. 151—159.

[2] *P. Kostyrko:* On convergence of transfinite sequences. Matematický časopis, *21*, (1971), pp. 233—239.

[3] *J. S. Lipiński:* On transfinite sequences of approximately continuous functions, Bull. Acad. Pol. Sci. Série sci. math., astr. et phys., *21*, (1973), pp. 817—821.

[4] *H. Malchair:* Quelques novelles considérations relative aux suites transfinies, Bull. Soc. Royale Sci. de Liège *3*, (1934), pp. 133—140.

[5] *A. Neubrunnová:* On quasicontinuous and cliquish functions, Čas. pěstování matemat., *99*, (1974), pp. 109—114.

[6] *G. Petruska* and *M. Laczkovich:* Baire 1 functions, approximately continuous functions and derivatives, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, *25*, (1974), pp. 189—212.

[7] *T. Šalát:* On transfinite sequences of B measurable functions, Fund. Mathem., *78*, (1973), pp. 157—162.

[8] *W. Sierpiński:* Sur les suites transfinies convergentes de fonctions de Baire, Fund. Mathem., *1*, (1920), pp. 132—141.

Author's address: Instytut Matematyki, Uniwersytet Gdański, 80-952 Gdańsk-Oliwa ul. Wita Stwosza 15, Polska.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

RELATIONS BETWEEN GENERALIZED SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

JAROSLAV PELANT, Praha

(Received June 10, 1975)

This paper is concerned with existence theorems for ordinary differential equations with discontinuous right-hand sides in a space of finite dimension for various definitions of generalized solutions. We substitute the Viktorovskij definition [2] by an equivalent definition in terms of differential inclusions and then we establish the relations between the new definition and the Filippov definition [1].

This paper will be followed by another one dealing with a modification of the Viktorovskij definition and with an equivalent definition in terms of differential inclusion, which will be shown to coincide with the Filippov definition. Consequently, we shall obtain an existence theorem for the modified Viktorovskij solution.

I. AUXILIARY LEMMAS AND DEFINITIONS

Let us introduce the following notation. Let (E_n, S, μ) be a space with a Lebesgue measure μ, where E_n is an n-dimensional real linear normed space with the norm $\| \; \|$, S is a σ-algebra of Lebesgue measurable subsets. Let the closed convex hull of the subset $E \subset E_n$ be denoted by $\overline{\text{conv}}\, E$. The base formed by n linearly independent vectors $e_1, \ldots, e_n$ will be denoted by $(e_1, \ldots, e_n)$. $U(x, \delta)$ will denote an open δ-neighbourhood of the point x in the space E_n considered.

Definition 1. A function f defined in a measurable set $E \subset E_n$, $f(E) \subset E_r$ will be called *weakly asymptotically continuous* at the point x_0 with respect to E if it satisfies the condition

$$\forall(\varepsilon > 0)\, \forall(\delta > 0)\, \exists(\delta_0 \in (0, \delta\rangle)\, \exists(N)\, \forall(x \in E)\,.$$
$$.\,(\|x - x_0\| < \delta_0,\ x \notin N \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon)$$

where $\mu(N) < \mu(U(x_0, \delta_0) \cap E)$ for $\mu(U(x_0, \delta_0) \cap E) > 0$ and if $\mu(U(x_0, \delta_0) \cap E) = 0$ then N is arbitrary.

Definition 2. A point x will be called a point of *metrical density* of the measurable set $E \subset E_n$, if $\mu(U(x, \delta) \cap E) > 0$ for arbitrary $\delta > 0$.

Lemma 1. *Let an arbitrary measurable set $E \subset E_n$ be given. If E' is the set of all points of metrical density of the set E, then the set $E - E'$ is of measure zero.*

Proof. We shall use Vitali's covering of the set $E - E'$ with the cubes H chosen small enough to satisfy the condition $\mu(H \cap E) = 0$ for each H. Following Vitali's theorem, an at most countable disjoint system of cubes H_i can be chosen so that $\mu((E - E') - \bigcup_i H_i) = 0$ holds. This implies $\mu(E - E') = 0$.

Lemma 2. *For every simple measurable function f defined on $E \subset E_n$, $f(E) \subset E_r$, the set of all the points of E at which the function f is not w.a. cont. with respect to E is of measure zero.*

Proof. For $\mu(E) = 0$ the assertion is trivial. Suppose therefore $\mu(E) > 0$. Let f be an arbitrary measurable simple function defined on E by the formula $f(x) = e_i$ for $x \in B_i$, $i = 1, \ldots, m$ where $B_i \subset E$ are measurable disjoint sets which satisfy $\bigcup_{i=1}^{m} B_i = E$, and e_i are points in E_r. The set E' is the set of all points of metrical density of the set E. From now on it is sufficient to consider the sets $E'' = E' \cap E$, $B_i'' = B_i \cap E''$ instead of E, B_i, respectively, since $\mu(E - E') = 0$.

Let us choose an arbitrary $x_0 \in E''$ and suppose $x_0 \in B_i''$ for a certain fixed i. The following cases may occur:

1) $\mu(U(x_0, \delta_0) \cap (E'' - B_i'')) = 0$ holds for a certain $\delta_0 > 0$. Then $f(x)$ is w. a. cont. at the point x_0.
2) $\mu(U(x_0, \delta) \cap (E'' - B_i'')) > 0$ holds for every $\delta > 0$.
a) $\mu(U(x_0, \delta) \cap (E'' - B_i'')) < \mu(U(x_0, \delta) \cap E'')$ for every $\delta > 0$, then $f(x)$ is w. a. cont. at x_0.
b) There exists $\delta_1 > 0$ such that $\mu(U(x_0, \delta_1) \cap (E'' - B_i'')) = \mu(U(x_0, \delta_1) \cap E'')$. This implies $\mu(U(x_0, \delta_1) \cap B_i'') = 0$ and, therefore, $f(x)$ is not w. a. cont. at x_0.

It will be shown that the set of all the points in B_i'' at which the function f is not w. a. cont. is of measure zero. To every point $x \in B_i''$ with that property there exists $\delta_x > 0$ such that $\mu(U(x, \delta_x) \cap B_i'') = 0$. Now it suffices to use Lemma 1 with B_i'' written instead of E. As the number of the disjoint sets B_i'' is finite and $E'' = \bigcup_{i=1}^{m} B_i''$, the measure of the set of all the points in E'' at which the function f is not w. a. cont. with respect to E'' is zero.

Lemma 3. *For every function f defined on $E \subset E_n$, $f(E) \subset E_r$, which is the uniform limit of a sequence of simple measurable functions, the measure of the set of all the points in E at which f is not w. a. cont. with respect to E, is zero.*

Proof. We shall prove the non-trivial case i.e. $\mu(E) > 0$. Suppose $f(x) = \lim_{m \to \infty} f_m(x)$ uniformly on E where f_m are simple measurable functions. We shall omit the set D

of measure zero where the functions f_m are not w. a. cont. We shall show that the function f is w. a. cont. on $E - D$ with respect to $E - D$ and, therefore, also with respect to E because $\mu(D) = 0$. Suppose $x_0 \in E - D$ is an arbitrary point of metrical density of the set $E - D$. Let us prove the inequality

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leqq \|f(x) - f_m(x)\| + \|f_m(x) - f_m(x_0)\| + \|f_m(x_0) - f(x_0)\| < \varepsilon .$$

For an arbitrary $\varepsilon > 0$ we find m such that $\|f(x) - f_m(x)\| < \frac{1}{3}\varepsilon$ on $E - D$. Now, for the fixed function f_m and for every $\delta > 0$ there exist $\delta_0 \in (0, \delta\rangle$ and a set N satisfying $\mu(N) < \mu(U(x_0, \delta_0) \cap E)$ such that the implication $(\|x - x_0\| < \delta_0, x \notin N \Rightarrow \|f_m(x) - f_m(x_0)\| < \frac{1}{3}\varepsilon) \Rightarrow (\|x - x_0\| < \delta_0, x \notin N \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon)$ holds.

If $x_0 \in E - D$ but x_0 is not a point of metrical density, then the weakly asymptotical continuity is obvious.

Lemma 4. *For every function defined and measurable on $E \subset E_n$, $f(E) \subset E_r$ the measure of the set D_E of all the points of E at which f is not w. a. cont. with respect to E, is zero.*

Proof. It suffices to suppose $\mu(E) > 0$ and that all points of the set E are its points of metrical density. Given a measurable subset $A \subset E$ consisting exclusively of its points of metrical density, then $D_A \supset D_E \cap A$. Let $\mu(E) < +\infty$. Following Egoroff Theorem, to an arbitrary $\varepsilon > 0$ there exists $E_\varepsilon \subset E$ such that $\mu(E_\varepsilon) > \mu(E) - \varepsilon$, and there exist simple measurable functions on E_ε uniformly converging to f. Now we shall use the results of Lemmas 2 and 3. Let the set of all the points of metrical density of E_ε be denoted by E'_ε. Let $E'_\varepsilon \cap E$ be denoted by E''_ε. This set satisfies again $\mu(E''_\varepsilon) > \mu(E) - \varepsilon$, and moreover, $D_{E_\varepsilon''} \supset D_E \cap E''_\varepsilon$ where $\mu(D_{E_\varepsilon''}) = 0$. We may write $D_E = (D_E \cap E''_\varepsilon) \cup (D_E \cap (E - E''_\varepsilon))$. Then $\mu(D_E) = \mu(D_E \cap (E - E''_\varepsilon)) < \varepsilon$ where ε is an arbitrary positive number. Hence $\mu(D_E) = 0$, q. e. d. In the case of $\mu(E) = +\infty$ it is possible to use a countable covering of the set E by sets of finite measure.

Lemma 5. *To every function f defined and measurable on $E \subset E_n$, $f(E) \subset E_r$, there exists a set $N_0 \subset E$ such that $\mu(N_0) = 0$, $\bigcap_{N, \mu(N)=0} \overline{f(E - N)} = \overline{f(E - N_0)}$, $\bigcap_{N, \mu(N)=0} \overline{\operatorname{conv} f(E - N)} = \overline{\operatorname{conv} f(E - N_0)}$.*

Proof. Let N_0 contain all the points of E at which the function f is not w. a. cont. with respect to E as well as all the points that are not points of metrical density of the set E. Lemmas 1 and 4 imply $\mu(N_0) = 0$.

Lemma 6. *For any measurable function f defined and bounded on an open set $E \subset E_n$, $f(E) \subset E_r$*

$$\bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{N, \mu(N)=0} \overline{\operatorname{conv} f(U(x, \delta) - N)} \neq \emptyset \quad \textit{holds for every} \quad x \in E .$$

Proof. Use Lemma 5 for every fixed $\delta > 0$, then Cantor's theorem on intersection of compact sets.

II. DEFINITION OF GENERALIZED SOLUTIONS

Considering an ordinary differential equation $\dot{x} = f(t, x)$, we suppose the right-band side $f(t, x)$ to be a function defined almost everywhere on an open connected set $G \subset E_{n+1}$, and to map this set into E_n.

Remark 1. Definition 3 was introduced by A. F. Filippov (cf. [1]), Definition 4 is due to E. E. Viktorovskij [2].

Definition 3. A function $x(t)$ defined on an interval $T = \langle t_1, t_2 \rangle$ where $(t, x(t)) \in G$ for every $t \in T$, is an *F-solution* of the equation $\dot{x} = f(t, x)$ if it is absolutely continuous on T and if there exists a subset $T_1 \subset T$, $\mu(T_1) = \mu(T)$ such that

$\dot{x}(t) \in \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{N, \mu(N) = 0} \overline{\operatorname{conv}} f(t, U(x(t), \delta) - N)$ for every $t \in T_1$.

Remark 2. The intersection of the sets in Definition 3 will be written briefly as $K^F(f, t, x(t))$.

Remark 3. When passing from one base $(e_1, \ldots, e_n)$ where the system in Definition 3 has the form $\dot{x}_i = f(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ with a solution $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, to another base $(b_1, \ldots, b_n)$ the system transforms into the form $\dot{y}_i = g_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ and the solution assumes the form $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ where $y(t) = C\, x(t)$, $g(t, y) = C f(t, C^{-1} y)$ and C is a regular matrix of the corresponding transformation. Vectors $x(t)$, $y(t)$, g, f are taken as column vectors. When passing from one base to another, the set T_1 in Definition 3 remains unchanged. This is directly concluded from the properties of linear mapping represented by a regular matrix C. Hence, Definition 3 does not depend on the choice of the base.

Definition 4. A function $x(t)$ defined on an interval $T = \langle t_1, t_2 \rangle$ where $(t, x(t)) \in G$ for every $t \in T$, is a *V-solution* of the equation $\dot{x} = f(t, x)$ with respect to a given base B, where the equation is represented by $\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, if it is absolutely continuous on T and if to any $\varepsilon > 0$ and to an arbitrary set $N \subset G$, $\mu(N) = 0$ there exist functions $\psi^i(t)$ defined on T, with their ranges in E_n and with the following properties:

For $i = 1, 2, \ldots, n$,

(1) $$(t, \psi^i(t)) \in G \quad \text{for every} \quad t \in T,$$

(2) $$f_i(t, \psi^i(t)) \quad \text{are integrable on} \quad T,$$

(3) $$\|x(t) - \psi^i(t)\| < \varepsilon \quad \text{on} \quad T,$$

(4) $$\left|x_i(t) - \left(x_i(t_1) + \int_{t_1}^{t} f_i(\tau, \psi^i(\tau))\, d\tau\right)\right| < \varepsilon \quad \text{on} \quad T,$$

and

(5) $$(t, \psi^i(t)) \notin N \quad \text{almost everywhere on} \quad T.$$

Definition 5. A function $x(t)$ defined on an interval $T = \langle t_1, t_2 \rangle$ where $(t, x(t)) \in G$ for every $t \in T$ is an *MF-solution* of the equation $\dot{x} = f(t, x)$ with respect to a given base B where the equation is represented by $\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, if it is absolutely continuous on T and if there exists a subset $T_1 \subset T$ such that $\mu(T_1) = \mu(T)$ and for every $t \in T_1$ it is $\dot{x}(t) \in K_B^{MF}(f, t, x(t))$ where

$$K_B^{MF}(f, t, x(t)) = \prod_{i=1}^{n} K^F(f_i, t, x(t))$$

and

$$K^F(f_i, t, x(t)) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{N, \mu(N) = 0} \overline{\text{conv}}\, f_i(t, U(x(t), \delta) - N)$$

for $i = 1, \ldots, n$.

Remark 4. If the right-hand side of the equation $\dot{x} = f(t, x)$ is defined on G, measurable on G and continuous in x for arbitrary (but fixed) t, then $K_B^{MF}(f, t, x) = K^F(f, t, x) = f(t, x)$ and, therefore, every solution in the sense of Definition 3 and Definition 5 is a solution in the sense of Carathéodory.

Definition 6. A function $x(t)$ defined on an interval $T = \langle t_1, t_2 \rangle$ where $(t, x(t)) \in G$ for every $t \in T$ is an *MV-solution* of the equation $\dot{x} = f(t, x)$ if it is absolutely continuous on T, and if to any $\varepsilon > 0$ and to an arbitrary set $N \subset G$, $\mu(N) = 0$ there exists a function $\psi(t) \in E_n$ defined on T, with the following properties:

(6) $$(t, \psi(t)) \in G \quad \text{for every} \quad t \in T,$$

(7) $$f(t, \psi(t)) \quad \text{is integrable on} \quad T,$$

(8) $$\|x(t) - \psi(t)\| < \varepsilon \quad \text{on} \quad T,$$

(9) $$\left\|x(t) - \left(x(t_1) + \int_{t_1}^{t} f(\tau, \psi(\tau))\, d\tau\right)\right\| < \varepsilon \quad \text{on} \quad T,$$

and

(10) $$(t, \psi(t)) \notin N \quad \text{a. e. on} \quad T.$$

III. RELATIONS BETWEEN GENERALIZED SOLUTIONS

Remark 5. Everywhere in this chapter we suppose that the right-hand side $f(t, x)$ of the system $\dot{x} = f(t, x)$ is defined a. e. on an open connected set $G \subset E_{n+1}$, and that it maps this set into E_n. Let the function $f(t, x)$ be measurable on G. Assume that to every compact set $K \subset G$ there exists a locally integrable function $m(t)$ defined a. e. on the projection of the set K to the axis t, satisfying $\|f(t, x)\| \leqq m(t)$ a. e. on K. It follows from this remark and Lemma 6 that the sets $K^F(f, t, x(t))$ are non-empty almost everywhere on T provided $x(t)$ is a continuous function defined on a closed interval T, $(t, x(t)) \in G$ for every $t \in T$.

Definition 7. We shall say that an absolutely continuous function $x(t)$ defined on $T = \langle t_1, t_2 \rangle$ fulfils condition CF if $\exists(T_1 \subset T : \mu(T_1) = \mu(T)) \, \forall(i) \, \forall(B_j) \, \forall(t \in T_1)$ . . $\{\alpha \vee \beta\}$, where $B_j = C_j B$ and B is a given orthonormal base and C_j are all the regular matrices of the type (n, n) with rational elements. Hence $\{B_j\}$ is a countable system of orthonormal bases in E_n. An index i is the index of the coordinate in a given base. The conditions α and β read as follows:

α) for an arbitrary open interval $I \subset G(t)$ with $x(t) \in I$ and for any $\varepsilon > 0$ it holds $\mu(M^i_{\varepsilon,I,t}) > 0$, where $M^i_{\varepsilon,I,t} = \{x \in I : |\dot{x}_i(t) - f_i(t, x)| < \varepsilon\}$.

β) for an arbitrary open interval $I \subset G(t)$ with $x(t) \in I$, it holds $\mu(N^i_{1,I,t}) > 0$ as well as $\mu(N^i_{2,I,t}) > 0$ where $N^i_{1,I,t} = \{x \in I : f_i(t, x) > \dot{x}_i(t)\}$, $N^i_{2,I,t} = \{x \in I : : f_i(t, x) < \dot{x}_i(t)\}$ and $G(t)$ is the projection of the set G into E_n with fixed t.

Theorem 1. *($F \Leftrightarrow CF$) An absolutely continuous function $x(t)$ defined on $T = = \langle t_1, t_2 \rangle$ is an F-solution of the system $\dot{x} = f(t, x)$ from Remark 5 in the sense of Definition 3 if and only if the condition CF holds for $x(t)$.*

Proof. Let us suppose $x(t)$ is an F-solution of the equation $\dot{x} = f(t, x)$ on an interval $T = \langle t_1, t_2 \rangle$. Then there exists a subset $T_1 \subset T$, $\mu(T_1) = \mu(T)$ such that $\dot{x}(t) \in \in K^F(f, t, x(t))$ provided $t \in T_1$. We shall prove that $\alpha \vee \beta$ holds for any index i, for every $t \in T_1$, and with respect to any base B. According to Definition 3 it holds $\dot{x}(t) \in \overline{\operatorname{conv}} f(t, U(x(t), \delta) - N_\delta(t))$ for every $t \in T_1$ and $\delta > 0$. The set $N_\delta(t)$, $\mu(N_\delta(t)) = 0$ has the same meaning as the set N_0 in Lemma 5. For the sake of brevity, let us denote $A_\delta(t) = \overline{\operatorname{conv}} f(t, U(x(t), \delta) - N_\delta(t))$. Let us choose a base (cf. Remark 3). Now let $\mu(M^i_{\varepsilon,I_1,t_1}) = 0$ hold for some $t_1 \in T_1$ and fixed i and certain I_1 and $\varepsilon > 0$. Consequently, the condition α does not hold at t_1. At the same time, let there exist I_2 such that, for instance, $\mu(N^i_{2,I_2,t_1}) = 0$. Let us choose $\delta > 0$ such that $U(x(t_1), \delta) \subset I_1 \cap I_2$ where the intersection is a non-empty set because it contains the point $x(t_1)$. Consequently, the inequality $\dot{x}_i(t_1) \leqq f_i(t_1, x) - \varepsilon$ must be valid for every $x \in U(x(t_1), \delta) - N(t_1)$ where the set $N(t_1) = (N_\delta(t_1) \cup M^i_{\varepsilon,I_1,t_1} \cup N^i_{2,I_2,t_1})$ has measure zero. Hence $\varepsilon + \dot{x}_i(t_1) \leqq y_i$ for every $y = (y_1, \ldots, y_n)$ where $y \in \in \overline{\operatorname{conv}} f(t_1, U(x(t_1), \delta) - N(t_1)) = A_\delta(t_1)$. This implies $\dot{x}(t_1) \notin A_\delta(t_1)$, which is a contradiction. This yields that the condition $\alpha \vee \beta$ is satisfied on the whole set T_1 for every base B and $i = 1, \ldots, n$. The argument is analogous for $\mu(N^i_{1,I_2,t_1}) = 0$.

It remains to prove $CF \Rightarrow F$. Let us suppose CF holds, i.e. $\exists(T_2 \subset T : \mu(T_2) = \mu(T))\ \forall(B_j)\ \forall(i)\ \forall(t \in T_2)\ \{\alpha \vee \beta\}$. For sufficiently small $\delta_0 > 0$ the set $\overline{\bigcup_{t \in T} (t, U(x(t), \delta_0))}$ is a compact subset of G. Hence, cf. Remark 5, there exists $T' \subset T$, $\mu(T') = \mu(T)$ such that $\|f(t, x)\| \leqq m(t)$ for every $t \in T'$. Then for every $\delta \in (0, \delta_0)$ the sets $f(t, U(x(t), \delta) - N_\delta(t))$ where $\mu(N_\delta(t)) = 0$ are bounded for every fixed $t \in T'$. In the sequel we consider the set $T_2' = T_2 \cap T'$ for which again $\mu(T_2') = \mu(T_2)$. Let $\alpha \vee \beta$ be satisfied on T_2' with respect to any base $B_j \in \{B_j\}$ and for each index $i = 1, \ldots, n$. It depends on the choice of the base B_j which of the conditions α or β holds for a given i and $t \in T_2'$. However, both α and β imply the inequality

$$\begin{aligned} (11) \qquad & \{\text{vrai min} f_i(t, x) : x \in U(x(t), \delta)\} \leqq \dot{x}_i(t) \leqq \\ & \leqq \{\text{vrai max} f_i(t, x) : x \in U(x(t), \delta)\} \end{aligned}$$

for $i = 1, \ldots, n$ and $t \in T_2'$. Let us choose $\delta \in (0, \delta_0)$ and let V denote the set of all vectors $v \in E_n$ with rational coordinates in the base B. The set V is countable and dense in E_n. We shall prove that for every $v \in V$ and $t \in T_2'$ the inequality

$$(12) \qquad (\dot{x}(t), v) \leqq \{\text{vrai max}\,(f(t, x), v) : x \in U(x(t), \delta)\}$$

holds. Let us choose a fixed $t_2 \in T_2'$ and a fixed $v \in V$ and let us consider an orthonormal base $(e_1, \ldots, e_n) \in \{B_j\}$ such that $v = k.e_i$ for a certain fixed i, where k is a positive rational number. With respect to this base, let the equation be represented by the system $\dot{y}_j = g_j(t, y)$, $j = 1, \ldots, n$ (cf. Remark 3). The inequality (11) is satisfied in every base B_j. Furthermore, $(\dot{x}(t_2), v) = k.\dot{y}_i(t_2)$, hence $(f(t_2, x), v) = k.g_i(t_2, y)$ and, therefore, the inequality (12) holds. This inequality can be rewritten into the form $(\dot{x}(t), v) \leqq \{\sup\,(x, v) : x \in f(t, U(x(t), \delta) - N_\delta(t))\}$ where $\mu(N_\delta(t)) = 0$. Let us denote $A(t) = f(t, U(x(t), \delta) - N_\delta(t))$. The inequality $(\dot{x}(t), v) \leqq \{\sup\,(x, v) : x \in A(t)\}$ has been proved for arbitrary fixed $t \in T_2'$ and arbitrary $v \in V$. We shall prove that inequality for every $v \in E_n$. There exists a sequence $\{v_n\} \subset V$ such that $v_n \to v$ for $n \to \infty$. In the inequality $(\dot{x}(t), v_n) \leqq \{\sup\,(x, v_n) : x \in A(t)\}$ let $n \to \infty$. The continuity of scalar product yields $(\dot{x}(t), v_n) \to (\dot{x}(t), v)$ for $n \to \infty$. Further, $\{\sup\,(x, v_n) : x \in A(t)\} \to \{\sup\,(x, v) : x \in A(t)\}$ for $n \to \infty$ because $|\{\sup\,(x, v) - \sup\,(x, v_n) : x \in A(t)\}| \leqq |\{\sup\,((x, v) - (x, v_n)) : x \in A(t)\}| = |\{\sup\,(x, (v - v_n)) : x \in A(t)\}| \leqq \{\sup\,|(x, v - v_n)| : x \in A(t)\} \leqq \{\sup\,\|x\|\,\|v - v_n\| : x \in A(t)\} = \{\sup\,\|x\| : x \in A(t)\}.\|v - v_n\| \leqq c.\|v - v_n\|$ where c is a positive constant because the set $A(t)$ is bounded. To complete the proof, it suffices to show that the implication

$$\forall(v \in E_n)\,((\dot{x}(t), v) \leqq \{\sup\,(x, v) : x \in A(t)\}) \Rightarrow \dot{x}(t) \in \overline{\text{conv}}\,A(t)$$

holds for fixed $t \in T_2'$. To this end, assume that $\dot{x}(t) \notin \overline{\text{conv}}\,A(t)$. Then there exists a hyperplane Γ dividing the space E_n into two open parts Γ^+, Γ^- such that $\overline{\text{conv}}\,A(t) \subset \Gamma^+ \cup \Gamma$ and $\dot{x}(t) \in \Gamma^-$. Let us substitute v by a vector v_Γ perpendicular to Γ and directed into Γ^-. We get $(\dot{x}(t), v_\Gamma) > \{\sup(x, v_\Gamma) : x \in A(t)\}$ which is a contradiction. Thus we have proved that $\dot{x}(t) \in \overline{\text{conv}}\, A(t) = A_\delta(t)$ on T_2'. Since $\dot{x}(t) \in A_\delta(t)$ holds on T_2' for arbitrary $\delta \in (0, \delta_0)$, the function $x(t)$ is an F-solution of the equation $\dot{x} = f(t, x)$ on T.

Remark 6. The condition CF

$$\exists(T_1 \subset T : \mu(T_1) = \mu(T))\ \forall(B_j)\ \forall(i)\ \forall(t \in T_1)\ \{\alpha \vee \beta\}$$

where the number of B_j's is countable while that of indices i is finite, can be rewritten into the form

$$\forall(B_j)\ \forall(i)\ \exists(T_1 \subset T : \mu(T_1) = \mu(T))\ \forall(t \in T_1)\ \{\alpha \vee \beta\},$$

since for every B_j and i there exists $T_1^{j,i} \subset T$, $\mu(T_1^{j,i}) = \mu(T)$ and we can put $T_1 = \bigcap_{j,i} T_1^{j,i}$, measure of T_1 being equal to $\mu(T)$.

Theorem 2. $(F \Rightarrow MF)$ *If an absolutely continuous function $x(t)$ defined on $T = \langle t_1, t_2 \rangle$ is an F-solution to the equation $\dot{x} = f(t, x)$, then it is an MF-solution as well.*

Proof. The function $x(t)$ is an F-solution on T which means $\dot{x}(t) \in K^F(f, t, x(t))$ holds a. e. on T. Let us choose an arbitrary base B. With respect to this base, let the system be expressed in the form $\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$. From Definition 5 we get $K_B^{MF}(f, t, x(t)) = \prod_{i=1}^{n} K^F(f_i, t, x(t))$. Hence the inclusion $K^F(f, t, x(t)) \subset K_B^{MF}(f, t, x(t))$ can be derived from the inequality (11) in the proof of Theorem 1. Thus obviously $\dot{x}(t) \in K_B^{MF}(f, t, x(t))$ holds a. e. on T and, therefore, $x(t)$ is an MF-solution of the equation $\dot{x} = f(t, x)$ on T.

Corollary 1. *For $n = 1$ we have $K^F(f, t, x) = K_B^{MF}(f, t, x)$ and hence Definitions 3 and 5 are equivalent.*

This equivalence is introduced in [1] without proof.

Example 1. In this example it will be shown that for $n > 1$ there exist equations whose MF-solutions need not be F-solutions.

Let an equation $\dot{x} = f(x)$ be given on E_2 which has, in a given base B, the form $f_1(x) = 2 - \text{sign}\, x_2$, $f_2(x) = -\text{sign}\, x_2$. Each trajectory in the sense of Definitions 3 and 5 reaches the axis x_1 after a certain time, and continues along this axis. On the axis x_1 we obtain the F-solution $x_1(t) = 2t$, $x_2(t) = 0$, unique in the sense of increasing t. There are infinitely many MF-solutions on the axis x_1 with a given base B, their form being $x_1(t) = ct$, $x_2(t) = 0$, where c is an arbitrary constant from the interval $\langle 1, 3 \rangle$.

Theorem 3. *Let a function $x(t)$ be defined and absolutely continuous on T and let it be an MF-solution of the equation $\dot{x} = f(t, x)$ on T in a given base B but not an F-solution of this equation on T. Then there exists a base B' such that $x(t)$ is not an MF-solution on T of the equation $\dot{x} = f(t, x)$ in the base B'.*

Proof. Let us consider all regular matrices C_i with rational elements of the type (n, n). Transforming the given base B by means of these matrices we obtain a countable system of bases $B_i = C_i B$ for which $K^F(f, t, x) = \bigcap_{B_i} K^{MF}_{B_i}(f, t, x)$. The last identity follows from the separability of a closed convex set from a point that does not belong to the set. Hence the countable system of bases B_i includes a base B' such that $x(t)$ is not an MF-solution of the equation $\dot{x} = f(t, x)$ on the interval T with respect to this base.

Definition 8. We shall say that an absolutely continuous function $x(t)$ defined on $T = \langle t_1, t_2 \rangle$ fulfils condition CMF if $\exists(T_1 \subset T : \mu(T_1) = \mu(T)) \forall(i) \forall(t \in T_1) . \{\alpha \vee \beta\}$, where $i = 1, \ldots, n$ and the condition $\alpha \vee \beta$ is from Definition 7. The index i is the index of the coordinate in a given base B.

Theorem 4. $(MF \Leftrightarrow CMF)$ *An absolutely continuous function $x(t)$ defined on $T = \langle t_1, t_2 \rangle$ is an MF-solution of the system $\dot{x} = f(t, x)$ from Remark 5 with respect to a given base B if and only if the condition CMF holds for $x(t)$.*

Proof. Let us suppose $x(t)$ is an MF-solution of the equation $\dot{x} = f(t, x)$ on the interval $T = \langle t_1, t_2 \rangle$ with respect to a given base B. The equation has the form $\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$ with respect to B. Then there exists a subset $T_1 \subset T$, $\mu(T_1) = \mu(T)$ on which $\dot{x}_i(t) \in K^F(f_i, t, x(t))$ holds for every $i = 1, \ldots, n$.

Hence, $\dot{x}_i(t) \in \overline{\text{conv}}\, f_i(t, U(x(t), \delta) - N^i_\delta(t)) = A^i_\delta(t)$ for every $t \in T_1$, $i = 1, \ldots, n$ and $\delta > 0$ where $N^i_\delta(t)$, $\mu(N^i_\delta(t)) = 0$ has the same meaning as the set N_0 in Lemma 5. Now let $\mu(M^i_{\varepsilon, I_1, t_1}) = 0$ hold for some $t_1 \in T_1$ and fixed i and I_1 and $\varepsilon > 0$. Simultaneously, let there exist I_2 such that, for instance, $\mu(N^i_{2, I_2, t_1}) = 0$. Let us choose $\delta > 0$ such that $U(x(t_1), \delta) \subset I_1 \cap I_2$. Consequently, the inequality $\dot{x}_i(t_1) \leqq f_i(t_1, x) - \varepsilon$ is valid for every $x \in U(x(t_1), \delta) - N(t_1)$ where the set $N(t_1) = (N^i_\delta(t_1) \cup M^i_{\varepsilon, I_1, t_1} \cup N^i_{2, I_2, t_1})$ has measure zero. This implies $\dot{x}_i(t_1) \notin A^i_\delta(t_1)$, which is a contradiction. This yields that the condition $\alpha \vee \beta$ is satisfied on the whole set T_1 for each $i = 1, \ldots, n$.

It remains to prove $CMF \Rightarrow MF$. Let α or β be satisfied on some $T_2 \subset T$, $\mu(T_2) = \mu(T)$ for each index $i = 1, \ldots, n$. We shall prove $\dot{x}_i(t) \in A^i_\delta(t)$ for every $\delta > 0$ and for each index i and all $t \in T_2$, which implies that $\dot{x}_i(t) \in K^F(f_i, t, x(t))$ is satisfied for every $t \in T_2$ and i. Then $\dot{x}(t) \in K^{MF}_B(f, t, x(t))$ is satisfied for every $t \in T_2$. Let us choose a fixed $\delta > 0$ and an index i and let $I(t) = U(x(t), \delta)$. Further, let α hold for a given $t_2 \in T_2$. Then there exists $x \in I(t_2) - N^i_\delta(t_2)$, $|\dot{x}_i(t_2) - f_i(t_2, x)| < \varepsilon$ for an arbitrary ε-neighbourhood of the point $\dot{x}_i(t_2)$. We get $\dot{x}_i(t_2) \in A^i_\delta(t_2)$ because the set $A^i_\delta(t_2)$ is closed. Now let β hold for a given $t_2 \in T_2$; then there exists $x_1, x_2 \in I(t_2) -$

$- N_\delta^i(t_2)$ and it holds $f_i(t_2, x_1) < \dot{x}_i(t_2) < f_i(t_2, x_2)$. Consequently $\dot{x}_i(t_2) \in A_\delta^i(t_2)$ since the set $A_\delta^i(t_2)$ is convex. $\dot{x}_i(t_2) \in A_\delta^i(t_2)$ holds for each $i = 1, \ldots, n$ and for arbitrary $\delta > 0$ and $t_2 \in T_2$, $\mu(T_2) = \mu(T)$. Hence $\dot{x}(t_2) \in K_B^{MF}(f, t_2, x(t_2))$ for all $t_2 \in T_2$. Then $x(t)$ is an MF-solution of the equation $\dot{x} = f(t, x)$ on T in a given base B.

Lemma 7. *Let a function $x(t)$ be defined and absolutely continuous on $T = \langle t_1, t_2 \rangle$, mapping the interval T into E_n. Let a real function $f(t, x)$ be defined a. e. and measurable on the set $M = \bigcup_{t \in T} (t, R_t)$, where $R_t = \prod_{i=1}^{n} R_i$, $R_i = \langle x_i(t) - \delta, x_i(t) + \delta \rangle$ and δ is a fixed positive number. Let T' denote a subset of T with the following properties: For every $t \in T'$ and every $\varepsilon > 0$, $\mu\{x \in R_t : \|x - x(t)\| < \varepsilon, f(t, x) < \varepsilon\} > 0$ holds and for every $t \in T - T'$, there exists $\varepsilon > 0$ such that $\mu\{x \in R_t : \|x - x(t)\| < \varepsilon, f(t, x) < \varepsilon\} = 0$. Then the set T' is measurable and there exists a measurable function $h(t)$ on T with the properties: $h(t)$ equals zero on T' and is positive or $+\infty$ on $T - T'$; for every $t \in T - T'$,*

$$\mu\{x \in R_t : \|x - x(t)\| < h(t), f(t, x) < h(t)\} = 0 .$$

Proof. Let a measurable function $\lambda(t)$ be given on T. Let us choose a function $g(t, x)$ on the set M:

$$g(t, x) = 1 \quad \text{for} \quad f(t, x) > \lambda(t)$$

and

$$g(t, x) = 0 \quad \text{for} \quad f(t, x) \leqq \lambda(t) .$$

This function $g(t, x)$ is measurable and integrable on M. By virtue of Fubini's theorem it holds $\int_M g(t, x)\, dt\, dx = \int_T dt \int_{R_t} g(t, x)\, dx$; therefore, $\int_{R_t} g(t, x)\, dx = \mu\{x \in R_t : f(t, x) > \lambda(t)\}$ is a measurable function on T with respect to the variable t. Then the sets

$$\{t \in T : \mu\{x \in R_t : f(t, x) > \lambda(t)\} = 0\} \tag{13}$$
$$\{t \in T : \mu\{x \in R_t : f(t, x) > \lambda(t)\} > 0\}$$

are measurable. Let us choose a sequence $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, where r_n are all positive rational numbers and define a function $h_n(t)$ on the interval T by

$$h_n(t) = r_n \quad \text{for every } t \text{ satisfying} \quad \mu\{x \in R_t : \|x - x(t)\| < r_n, f(t, x) < r_n\} = 0 ,$$
$$h_n(t) = 0 \quad \text{for every } t \text{ satisfying} \quad \mu\{x \in R_t : \|x - x(t)\| < r_n, f(t, x) < r_n\} > 0 .$$

From (13) we derive that the function $h_n(t)$ is measurable on T, hence also the function $\limsup_{n \to \infty} h_n(t)$ is measurable on T. This function will be denoted by $h(t)$.

The function $h(t)$ can be $+\infty$ for some $t \in T$. If $h_n(t) > 0$ for a certain fixed $t \in T$ and for a certain n, then $\mu\{x \in R_t : \|x - x(t)\| < r_n, f(t, x) < r_n\} = 0$, therefore $\mu\{x \in R_t : \|x - x(t)\| < r_k, f(t, x) < r_k\} = 0$ for every r_k, where $0 < r_k < r_n$. For every positive integer l there exists $k(l) > \max(n, l)$ such that $\frac{1}{2}r_n < r_{k(l)} < r_n$. Then it holds $h_{k(l)}(t) = r_{k(l)} > \frac{1}{2}r_n > 0$ and this yields $h(t) > \frac{1}{2}r_n$. Thus we have proved that $h_n(t) > 0 \Rightarrow h(t) > 0$ for every $t \in T$. Hence $h(t) = 0$ for a certain $t \in T$ implies $h_n(t) = 0$ for every positive integer n. Then $h(t) = 0$ yields $\mu\{x \in R_t : : \|x - x(t)\| < r_n, f(t, x) < r_n\} > 0$ for every positive integer n and this implies that the function $h(t)$ is positive or $+\infty$ on the set $T - T'$. The identity $h(t) = 0$ on T' follows from the definition of $h_n(t)$. Now we shall prove the last assertion of this lemma. If $h(t) > 0$ for a certain $t \in T$, then there exists a nondecreasing sequence $h_{n(i)}(t) \to h(t)$, therefore $r_{n(i)} \to h(t)$ and $\mu\{x \in R_t : \|x - x(t)\| < r_{n(i)}, f(t, x) < < r_{n(i)}\} = 0$ implies $\mu\{x \in R_t : \|x - x(t)\| < h(t), f(t, x) < h(t)\} = 0$. Let us choose $h(t) = \{\sup h_n(t) : n = 1, \ldots\}$ for every $t \in T$; then we reach the same result.

Lemma 8. *Let a measurable function $f(t, x)$ be given on an open connected set $G \subset E_{n+1}$. Let a mapping $M_0(t)$ into sets from E_n be defined on an interval $T = = \langle t_1, t_2 \rangle$, such that for every $t \in T$ the sets $M_0(t)$ are subsets of E_n, $\mu(M_0(t)) > 0$, $(t, M_0(t)) \subset G$ and $M_0 = \bigcup_{t \in T} (t, M_0(t))$ is a measurable set in E_{n+1}. Then there exists a measurable function $\psi(t)$ defined on T such that $f(t, \psi(t))$ is measurable on T and $\psi(t) \in M_0(t)$ for every $t \in T$.*

Proof. We shall proceed similarly as in [2]. Let us denote $N_0 = \{x \in G' : f(t, x)$ is not measurable on T with respect to the variable $t\}$, where G' is the projection of the set G into E_n. We shall leave the set $T \times N_0$ out of the set G. In this way we have reduced the sets $M_0(t)$ at most by sets of measure zero. We shall keep the same notation $M_0(t)$ for the new sets. The set M_0 is measurable, therefore we can write $\mu(M_0) = \int_T \mu(M_0(t))\,dt > 0$. Let us denote $X = \{x \in E_n : \mu(M'_0(x)) > 0\}$, where $M'_0(x)$ are the projections of the sections of M_0 with a fixed x into the axis t. Then we can rewrite $\mu(M_0) = \int_X \mu(M'_0(x))\,dx > 0$. Now, there exists $x_0 \in X$ such that $\mu(M'_0(x_0)) \geqq \mu(M_0)/\mu(X)$. Let us denote $M_1 = \{(t, x) \in M_0 : t \notin M'_0(x_0)\}$, then $\mu(M_1) = \int_X \mu(M'_1(x))\,dx$ holds, where $M'_1(x)$ is the projection of the section of the set M_1 with a fixed x into the axis t. Again there exists $x_1 \in X$ such that $\mu(M'_1(x_1)) \geqq \geqq \mu(M_1)/\mu(X)$. Let us write generally $M_{i+1} = \{(t, x) \in M_0 : t \notin \bigcap_{j=0}^{i} M'_j(x_j)\}$ for $i = 1, 2, \ldots$; then $\mu(M_{i+1}) = \int_X \mu(M'_{i+1}(x))\,dx$ and there exists $x_{i+1} \in X$ such that $\mu(M'_{i+1}(x_{i+1})) \geqq \mu(M_{i+1})/\mu(X)$. The set sequence $\{M_i\}_{i=0}^{\infty}$ is nonincreasing.

Let $\lim_{n\to\infty} \mu(M_n) = \alpha > 0$, then $\mu(M'_n(x_n)) \geqq \alpha/\mu(X)$ and we derive $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} M'_n(x_n)) = = +\infty$ which is a contradiction because the sets $M'_n(x_n)$ are disjoint and the union of these sets is included in the interval T with a finite measure. From the preceding result we obtain $\lim_{n\to\infty} \mu(M_n) = 0$. Further $\mu(M_n) = \int_{T - \bigcup_{i=0}^{n-1} M_i'(x_i)} \mu(M_n(t))\,dt = = \int_{T - \bigcup_{i=0}^{n-1} M_i'(x_i)} \mu(M_0(t))\,dt$ because $M_0(t) = M_n(t)$ on the integration domain. The implication $\lim_{n\to\infty} \mu(M_n) = \int_{T - \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i'(x_i)} \mu(M_0(t))\,dt = 0 \Rightarrow \mu(T - \bigcup_{i=0}^{\infty} M'_i(x_i)) = 0$

is true because $\mu(M_0(t)) > 0$ for every $t \in T$. Thus we have proved that $\mu(\bigcup_n M'_n(x_n)) = \mu(T)$, where the union is at most countable. Now let us define a function ψ on T:

$$\psi(t) = x_n \quad \text{on each set} \quad M'_n(x_n)\,,$$
$$\psi(t) \in M_0(t) \quad \text{on} \quad T - \bigcup_n M'_n(x_n)\,.$$

Theorem 5. $(CMF \Rightarrow V)$ *Let the condition CMF from Definition 8* $\exists(T_1 \subset T : \mu(T_1) = \mu(T))\, \forall(i)\, \forall(t \in T_1)\, \{\alpha \vee \beta\}$ *be satisfied in a given base B for an absolutely continuous function* $x(t)$ *given on an interval* $T = \langle t_1, t_2 \rangle$. *Then* $x(t)$ *is a V-solution of the equation* $\dot{x} = f(t, x)$ *from Remark 5 on the interval T in the base B.*

Proof. Let an absolutely continuous function $x(t)$ be given on the interval T and let $\alpha \vee \beta$ be satisfied on a certain set $T_1 \subset T$, $\mu(T_1) = \mu(T)$ in the given base B for each $i = 1, \ldots, n$. Let $T'_i = \{t \in T_1 : \alpha \text{ holds at the point } t\}$, then only β holds on the sets $T''_i = T_1 - T'_i$. According to Lemma 7 the sets T'_i and T''_i are measurable. Let us choose an arbitrary $\varepsilon > 0$ and $N \subset G$, $\mu(N) = 0$. For each $i = 1, \ldots, n$ we shall find a function $\psi^i(t)$ on T satisfying (1)–(5) with the norm $\|x\| = \{\max |x_i| : i = 1, \ldots, n\}$. Thus we shall have proved the assertion of Theorem 5. Let us fix an index i and an interval $I_t = \prod_{j=1}^{n} I^t_j$ for every $t \in T$, where $I^t_j = (x_j(t) - \varepsilon,\ x_j(t) + \varepsilon)$ with $\varepsilon > 0$ sufficiently small so that $\overline{\bigcup_{t \in T} (t, I_t)} \subset G$. Now let us choose $\varepsilon_1 > 0$ such that

$$2\varepsilon_1\, \mu(T) < \varepsilon\,. \tag{14}$$

The condition α holds for every $t \in T'_i$, which implies $\mu(M^i_{\varepsilon_1, I_t, t}) > 0$ on the set T'_i, where

$$M^i_{\varepsilon_1, I_t, t} = \{x \in I_t : |\dot{x}_i(t) - f_i(t, x)| < \varepsilon_1\}\,.$$

The condition β holds for every $t \in T''_i$, which implies $\mu(N^i_{1, I_t, t}) > 0$ and $\mu(N^i_{2, I_t, t}) > 0$, where

$$N^i_{1, I_t, t} = \{x \in I_t : \dot{x}_i(t) - f_i(t, x) < 0\}\,,$$
$$N^i_{2, I_t, t} = \{x \in I_t : \dot{x}_i(t) - f_i(t, x) > 0\}\,.$$

Now let us define for $j = 1, 2$:

$$M_j(t) = M^i_{\varepsilon_1, I_t, t} \quad \text{on} \quad T'_i\,,$$
$$M_j(t) = N^i_{j, I_t, t} \quad \text{on} \quad T''_i\,,$$
$$M_j(t) = I_t \quad \text{on} \quad T - (T'_i \cup T''_i)\,.$$

The sets $\bigcup_{t \in T} (t, M_j(t))$ are measurable.

Evidently $\mu(M_j(t)) > 0$ for every $t \in T$ and $j = 1, 2$. The function $f(t, x)$ is defined a. e. on G and there exists a set $G_0 \subset G$, $\mu(G_0) = 0$ such that $f(t, x)$ is defined on $G - G_0$. We shall denote $N_0 = N \cup G_0$ while $N_0(t)$ is the projection of the section of the set N_0 with a fixed t into E_n. Now let new mappings be defined on T for $j = 1, 2$: $M'_j(t) = M_j(t) - N_0(t)$ for every t satisfying $\mu\{M_j(t) - N_0(t)\} > 0$, $M'_j(t) = I_t$ for every t satisfying $\mu\{M_j(t) - N_0(t)\} = 0$, where the last identity is satisfied on a set of measure zero. In virtue of Lemma 8 there exist functions $\psi^i_{-1}(t)$ and $\psi^i_1(t)$ such that $\psi^i_{(-1)^j}(t) \in M'_j(t)$ holds for $j = 1, 2$ and for every $t \in T$ because the set $\bigcup_{t \in T} (t, M'_j(t))$ is measurable which again is an immediate consequence of the measurability of the functions $x(t)$, $\dot{x}_i(t)$, $f_i(t, x)$ and the set T'_i. This implies (1) for $\psi^i_{-1}(t)$ and $\psi^i_1(t)$. The functions $f_i(t, \psi^i_{(-1)^j}(t))$ are measurable on T and $(t, \psi^i_{(-1)^j}(t)) \in \bigcup_{t \in T} (t, I_t)$ on T, where $K = \overline{\bigcup_{t \in T} (t, I_t)}$ is a compact set. There exists a locally integrable function $m(t)$ such that

$$\|f(t, x)\| \leqq m(t) \text{ holds a. e. on } K. \tag{15}$$

(Cf. Remark 5.) This yields that $f_i(t, \psi^i_{(-1)^j}(t))$ are integrable functions, therefore, (2) holds. Further, (3) holds for $\psi^i_{(-1)^j}(t)$ because $\psi^i_{(-1)^j}(t) \in I_t$ on T. The definition of the mappings $M'_j(t)$ implies (5) for both functions $\psi^i_{(-1)^j}(t)$. Let us choose $\tau_0 = t_1$ and define $\beta^1_{\tau_0}(t) = \int_{T_i'' \cap \langle \tau_0, t \rangle} (\dot{x}_i(\tau) - f_i(\tau, \psi^i_1(\tau)))\, d\tau$ on T. The function $\beta^1_{\tau_0}(t)$ is nondecreasing on T and $\beta^1_{\tau_0}(\tau_0) = 0$. If the inequality $\beta^1_{\tau_0}(t) < \frac{1}{2}\varepsilon$ hold on T, then we choose $\tau_1 = t_2$. If the contrary is true, then we choose the first $\tau_1 \in T$ for which $\beta^1_{\tau_0}(\tau_1) = \frac{1}{2}\varepsilon$. If $\tau_1 < t_2$ we define

$$\beta^{-1}_{\tau_1}(t) = \int_{T_i'' \cap \langle \tau_1, t \rangle} (\dot{x}_i(\tau) - f_i(\tau, \psi^i_{-1}(\tau)))\, d\tau \quad \text{on} \quad \langle \tau_1, t_2 \rangle .$$

This function is nonincreasing and $\beta^{-1}_{\tau_1}(\tau_1) = 0$. If $\beta^{-1}_{\tau_1}(t) > -\varepsilon$ on $\langle \tau_1, t_2 \rangle$, then we choose $\tau_2 = t_2$. If this last inequality does not hold on the whole $\langle \tau_1, t_2 \rangle$, then we choose the first $\tau_2 \in \langle \tau_1, t_2 \rangle$ for which $\beta^{-1}_{\tau_1}(\tau_2) = -\varepsilon$. If again $\tau_2 < t_2$, we define an analogous function $\beta^1_{\tau_2}(t)$. If $\beta^1_{\tau_2}(t) < \varepsilon$ on $\langle \tau_2, t_2 \rangle$, then we choose $\tau_3 = t_2$. If this inequality does not hold, then we continue further analogously. Now we have defined

$$\beta^{(-1)^j}_{\tau_j}(t) = \int_{T_i'' \cap \langle \tau_j, t \rangle} (\dot{x}_i(\tau) - f_i(\tau, \psi^i_{(-1)^j}(\tau)))\, d\tau \quad \text{on} \quad \langle \tau_j, t_2 \rangle \tag{16}$$

for $j = 0, 1, 2, \ldots$. We choose $\tau'_0 = \tau_0$ and define auxiliary functions

$$\lambda^{(-1)^j}_{\tau'_j}(t) = \int_{T_i'' \cap \langle \tau_j', t \rangle} (\dot{x}_i(\tau) + (-1)^j\, m(\tau))\, d\tau \quad \text{on} \quad \langle \tau'_j, t_2 \rangle \tag{17}$$

by the same method as the functions (16), where $m(t)$ is the function from (15).

As

$$f_i(t, \psi_1^i(t)) \leqq m(t) \quad \text{on} \quad T$$

and

$$f_i(t, \psi_{-1}^i(t)) \geqq -m(t) \quad \text{on} \quad T,$$

the inequality $\tau_n' \leqq \tau_n$ holds for $n = 0, 1, \ldots$. If $\tau_n' \leqq t_2$ for all n, then τ_n' converge to a certain τ', $\tau' \leqq t_2$. We get

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{T_i'' \cap \langle \tau'_{2n}, \tau'_{2n+1} \rangle} (\dot{x}_i(\tau) + m(\tau))\, d\tau = \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon = +\infty$$

which is a contradiction because $\dot{x}(t)$ and $m(t)$ are absolutely integrable functions on T. Hence it holds $\tau_{n_0}' = t_2$ for a certain positive integer n_0. We have proved that a finite number of steps τ_j is sufficient in (17) and (16). Let us define a function $\beta(t)$ on T:

$$\beta(t) = \beta_{\tau_0}^1(t) \quad \text{for} \quad t \in \langle \tau_0, \tau_1 \rangle ,$$

$$\beta(t) = \beta_{\tau_n}^{(-1)^n}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{\tau_j}^{(-1)^j}(\tau_{j+1}) \quad \text{for} \quad t \in (\tau_n, \tau_{n+1} \rangle ,$$

where $n = 1, 2, \ldots$. The inequality $-\frac{1}{2}\varepsilon \leqq \beta(t) \leqq \frac{1}{2}\varepsilon$ holds on T. Let us define a function $\psi_0^i(t)$ on T:

$$\psi_0^i(t) = \psi_1^i(t) \quad \text{on} \quad (\tau_{2n}, \tau_{2n+1} \rangle$$

$$\psi_0^i(t) = \psi_{-1}^i(t) \quad \text{on} \quad (\tau_{2n+1}, \tau_{2n+2} \rangle$$

for $n = 0, 1, 2, \ldots$ and $\psi_0^i(t_1) = \psi_1^i(t_1)$.

This function $\psi_0^i(t)$ satisfies (1), (2), (3), (5) because the functions $\psi_1^i(t)$ and $\psi_{-1}^i(t)$ satisfy the same conditions. Now we must prove that $\psi_0^i(t)$ satisfies the inequality (4), too. It holds

$$\left| x_i(t) - x_i(t_1) - \int_{t_1}^{t} f_i(\tau, \psi_0^i(\tau))\, d\tau \right| = \left| \int_{t_1}^{t} (\dot{x}_i(\tau) - f_i(\tau, \psi_0^i(\tau)))\, d\tau \right| \leqq$$

$$\leqq \int_{T_i' \cap \langle t_1, t \rangle} \left| \dot{x}_i(\tau) - f_i(\tau, \psi_0^i(\tau)) \right| d\tau + \left| \int_{T_i'' \cap \langle t_1, t \rangle} (\dot{x}_i(\tau) - f_i(\tau, \psi_0^i(\tau)))\, d\tau \right| \leqq$$

$$\leqq \mu(T)\, \varepsilon_1 + |\beta(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

on T because $x(t)$ is absolutely continuous and owing to the definition of the mappings $M_j'(t)$ on T_i' for $j = 1, 2$. Thus we proved that the inequality (4) holds for the function $\psi_0^i(t)$. Hence the function $x(t)$ is a V-solution of the equation $\dot{x} = f(t, x)$ on T in the given base B.

Theorem 6. $(V \Rightarrow CMF)$ *If an absolutely continuous function $x(t)$ is a V-solution of the equation $\dot{x} = f(t, x)$ from Remark 5 on the interval $T = \langle t_1, t_2 \rangle$ in the given base B, then the condition CMF from Definition 8 holds for $x(t)$ on T.*

Proof. The condition CMF can be written in the form

$$\forall(i)\, \exists(T_1 \subset T : \mu(T_1) = \mu(T))\, \forall(t \in T_1)\, \{\alpha \vee \beta\}$$

because CMF obviously implies this condition and also the proof of the converse implication follows easily: Let us choose for $i = 1, \ldots, n$ a set $T_1^i \subset T$, $\mu(T_1^i) = \mu(T)$ where the condition $\alpha \vee \beta$ holds and denote $T_1 = \bigcap_{i=1}^{n} T_1^i$. The set T_1 so constructed can be used in CMF. The converse to this new condition has the form: $\exists(i)\, \forall(T_1 \subset T : : \mu(T_1) = \mu(T))\, \exists(t \in T_1)\, \{\text{non}\, (\alpha \vee \beta)\}$. This coincides with the condition

$$\exists(i)\, \exists(T' \subset T : \mu^*(T') > 0)\, \forall(t \in T')\, \{\text{non}\, (\alpha \vee \beta)\}\,,$$

where μ^* is the outer measure. Suppose that $\alpha \vee \beta$ does not hold for a certain index i on $T' \subset T$ with $\mu^*(T') > 0$ while $\alpha \vee \beta$ holds on $T - T'$. We shall prove that $x(t)$ is not a V-solution of the equation $\dot{x} = f(t, x)$ on T in the given base B. Now there exists $\varepsilon_t > 0$ and a certain open interval I'_t, $x(t) \in I'_t$ such that

$$\mu\{x \in I'_t : |\dot{x}_i(t) - f_i(t, x)| < \varepsilon_t\} = 0 \quad \text{for every} \quad t \in T'$$

and at the same time there exists a certain open interval I''_t, $x(t) \in I''_t$ such that, for example, $\mu\{x \in I''_t : \dot{x}_i(t) - f_i(t, x) < 0\} = 0$ for every $t \in T'$. To every $t \in T$ let us choose an open interval I_t^0 with the following properties: $x(t) \in I_t^0$ and $\bigcup_{t \in T} (t, I_t^0)$ is bounded and $\overline{I_t^0} \subset G(t)$, where $G(t)$ is the projection of the section of the set G with a fixed t into E_n. Moreover, $I_t^0 \subset I'_t \cap I''_t$ for every $t \in T'$. The intervals I_t^0 can be written on T by the formula $I_t^0 = \prod_{j=1}^{n} I_t^j$, where I_t^j has the form $(x_j(t) - \delta'_{t,j}, x_j(t) + + \delta''_{t,j})$. Let us denote $\delta_t = \{\min(\delta'_{t,j}, \delta''_{t,j}) : j = 1, \ldots, n\}$ and $I_t = \prod_{j=1}^{n} (x_j(t) - \delta_t, x_j(t) + \delta_t)$ in the space E_n for every $t \in T$. By virtue of Lemma 7 the set T' is measurable with a positive measure and we can choose ε_t, δ_t positive on T' and measurable on T' with respect to the variable t and such that $\mu\{x \in I_t : |\dot{x}_i(t) - - f_i(t, x)| < \varepsilon_t\} = 0$, $\mu\{x \in I_t : \dot{x}_i(t) - f_i(t, x) < 0\} = 0$ for every $t \in T'$. Now there exists a measurable subset $T'' \subset T'$, $\mu(T'') > 0$ such that there exists a positive integer k for which the inequality $1/k < \delta_t$ holds for every $t \in T''$. Let us denote $B(t) = \{x \in I_t : |\dot{x}_i(t) - f_i(t, x)| < \varepsilon_t\} \cup \{x \in I_t : \dot{x}_i(t) - f_i(t, x) < 0\}$ and $N' = \bigcup_{t \in T''} (t, B(t))$. The set N' is measurable because $f_i(t, x)$ is measurable with respect to (t, x) and $\varepsilon_t, \delta_t, \dot{x}_i(t)$ are measurable with respect to t. Then the measure of the set N' can be written in the form $\mu(N') = \int_{T''} \mu(B(t))\, dt$. Hence $\mu(N') = 0$ because $\mu(B(t)) =$

$= 0$ holds for every $t \in T''$. Given $\Delta > 0$, there exists an open set G_Δ such that $T'' \subset G_\Delta \subset T$ and $\mu(G_\Delta - T'') < \Delta$. For brevity, let us write $b = \int_{T''} \varepsilon_t \, dt$. The value b is positive and obviously b is independent of Δ and ψ, N from (1)–(5). Let us denote by $s_i(t)$ the minorant function of the functions $\dot{x}_i(t) - f_i(t, \psi(t))$ on $\langle t_1, t_2 \rangle$, where $\psi(t)$ is an arbitrary function on T with the property $\psi(t) \in I_t$. The inequality

(18) $$s_i(t) \leqq \dot{x}_i(t) - f_i(t, \psi(t))$$

holds for such functions ψ and the existence of an integrable minorant $s_i(t)$ follows (cf. Remark 5) from the compactness of the set $\overline{\bigcup_{t \in T} (t, I_t)} \subset G$. Further, let us choose $\Delta > 0$ small enough so that the inequality

$$\int_{G_\Delta \cap T''} \varepsilon_t \, dt + \int_{G_\Delta - T''} s_i(t) \, dt > \frac{b}{2} > 0$$

holds. Let G_Δ be written in the form $G_\Delta = \bigcup_j G_j$, where G_j are the components of the set G_Δ; then

$$\sum_j \left(\int_{G_j \cap T''} \varepsilon_t \, dt + \int_{G_j - T''} s_i(t) \, dt \right) > \frac{b}{2} > 0 \, .$$

This implies the existence of a certain G_j and $b' \in (0, \frac{1}{2}b)$ such that

(19) $$\int_{G_j \cap T''} \varepsilon_t \, dt + \int_{G_j - T''} s_i(t) \, dt > b' > 0 \, .$$

The value b' depends only on ε_t, $s_i(t)$ and G_Δ and does not depend on N and ψ. Now we have defined the functions ε_t, δ_t, $s_i(t)$, the sets T'', G_Δ, N', G_j and the constants $b' > 0$ and k. In the sequel we shall use the fact that the function $x(t)$ is a V-solution of the equation $\dot{x} = f(t, x)$. Let us choose $\varepsilon > 0$ satisfying

(20) $$\varepsilon < \min \left(\frac{1}{k}, \frac{b'}{2} \right)$$

and $N \subset G$, $\mu(N) = 0$, and let us denote the union $N \cup N'$ again by N. From the definition of the set N' and from (5) the inequality

(21) $$\dot{x}_i(t) - f_i(t, \psi(t)) \geqq \varepsilon_t > 0 \quad \text{a. e. on} \quad T''$$

follows for every function $\psi(t)$ satisfying the conditions (1), (2), (3), (5) and we shall prove that the inequality (4) does. This inequality can be written in the form

$$\left| \int_{t_1}^{t} (\dot{x}_i(\tau) - f_i(\tau, \psi(\tau))) \, d\tau \right| < \varepsilon \quad \text{on} \quad T \, .$$

Further,

$$\int_{G_\Delta} (\dot{x}_i(t) - f_i(t, \psi(t)))\,dt = \int_{G_\Delta \cap T''} (\dot{x}_i(t) - f_i(t, \psi(t)))\,dt +$$

$$+ \int_{G_\Delta - T''} (\dot{x}_i(t) - f_i(t, \psi(t)))\,dt \geqq \int_{G_\Delta \cap T''} \varepsilon_t\,dt + \int_{G_\Delta - T''} s_i(t)\,dt$$

holds for every $\psi(t)$ satisfying (1), (2), (3), (5) (cf. (18), (21)). The inequality (19) implies

$$(22) \qquad \int_{G_j} (\dot{x}_i(t) - f_i(t, \psi(t)))\,dt > b' > 0 \quad \text{for every} \quad \psi(t)$$

satisfying (1), (2), (3), (5). We assume that $x(t)$ is V-solution. Therefore for a given $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \min(1/k, \frac{1}{2}b')$ and $N \subset G$, $\mu(N) = 0$ there exists a function $\psi(t)$ satisfying (1)–(5). Let $\hat{\psi}(t)$ satisfy the properties (1), (2), (3), (5). Denoting $\varphi(t) = \dot{x}_i(t) - f_i(t, \hat{\psi}(t))$ we can write the last inequality (22) in the form $\int_{G_j} \varphi(t)\,dt > b' > 0$. Let $G_j = (\tau_1, \tau_2) \subset T$. Now due to (4) $\left|\int_{t_1}^{\tau_1} \varphi(\tau)\,d\tau\right| < \varepsilon$ must hold for τ_1, hence $-\varepsilon < \int_{t_1}^{\tau_1} \varphi(\tau)\,d\tau < \varepsilon$ and $\int_{t_1}^{\tau_2} \varphi(\tau)\,d\tau = \int_{t_1}^{\tau_1} \varphi(\tau)\,d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi(\tau)\,d\tau > \int_{t_1}^{\tau_1} \varphi(\tau)\,d\tau + b' > -\varepsilon + b' > \varepsilon$ holds because the value $\varepsilon > 0$ was defined in (20) so that $2\varepsilon < b'$. The inequality $\left|\int_{t_1}^{\tau_2} \varphi(\tau)\,d\tau\right| < \varepsilon$ does not hold for τ_2 which is a contradiction to the inequality (4).

This contradiction completes the proof of the theorem.

References

[1] *Filippov A. F.*: Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, Математический сборник, 1960, Т. *51* (93), № 1, 99–128.

[2] *Viktorovskij E. E.*: Об одном обобщении понятия интегральных кривых для разрывного поля направлений, Математический сборник, 1954, Т. *34* (76), № 2, 213–248.

Author's address: 199 05 Praha 9, Beranových 130 (Výzkumný a zkušební letecký ústav).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

POLOKANONICKÝ REPER SÍTĚ NA PLOŠE V TROJROZMĚRNÉM AFINNÍM PROSTORU

PAVLA BAJÁKOVÁ, Brno

(Došlo dne 30. června 1975)

1. ÚVOD

V tomto článku je užitím Cartanových metod konstruován polokanonický reper sítě na ploše v trojrozměrném afinním prostoru A^3. Tento reper závisí na parametrech plochy, tj. na hlavních parametrech, ale také na význačných parametrech sítě. Odtud název – polokanonický. V článku [1] je uvedena konstrukce kanonického reperu sítě na ploše, kde reper závisí pouze na hlavních parametrech. Obě konstrukce jsou odlišné, vychází se však ze stejných předpokladů. Tak jako v [1] uvažujme v prostoru A^3 obecný pohyblivý reper R s vrcholem M a třemi lineárně nezávislými vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Dále mějme libovolnou nerozvinutelnou plochu $\mathbf{P} = \mathbf{P}(u, v)$ s obecnou sítí $\mathrm{S} = \{S_1, S_2\}$. Nechť vrchol M reperu je ztotožněn s bodem plochy P a vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ reperu ať leží v tečné rovině plochy v tomto bodě. Takto specialisovaný reper závisí na dvou hlavních parametrech u, v a sedmi parametrech vedlejších. Označme jej R_7.

V článku [1] byl reper R_7 již další specialisací připojen k síti. Přímky $(M, \mathbf{e}_1)$, $(M, \mathbf{e}_2)$ se staly tečnami dvou křivek náležejících vrstvám S_1 a S_2 sítě S, procházejících bodem M. Toto připojení se děje volbou dvou vedlejších parametrů, tzv. význačných parametrů sítě, odpovídajících formám e_1^2, e_2^1. Při konstrukci polokanonického reperu musí zůstat význačné parametry volné, aby stále byla zachována možnost připojení reperu k libovolné síti S. Tedy volbu vedlejších parametrů provedeme tak, aby z nich v průběhu konstrukce nevyplynuly žádné závislosti mezi formami e_1^2, e_2^1. Pfaffovy formy ω_1^2, ω_2^1 se stanou hlavními až v závěru celé konstrukce.

Než přikročíme ke specialisaci reperu R_7, vedoucí k polokanonickému reperu, uvedeme rovnice, které pro reper R_7 platí. Jsou to

$$(1) \qquad \mathrm{d}\mathbf{M} = \omega^i \mathbf{e}_i\,, \quad \mathrm{d}\mathbf{e}_i = \omega_i^k \mathbf{e}_k\,; \quad i, k = 1, 2, 3\,,$$

pak rovnice struktury

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i\,, \quad d\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k\,; \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

a

$$\omega^3 = 0\,,$$

(2) $$\omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2\,, \quad \omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2\,,$$

z nichž prodloužením obdržíme

(3) $$\begin{aligned} da - a(2\omega_1^1 - \omega_3^3) - 2b\omega_1^2 \qquad\qquad &= m\omega^1 + n\omega^2\,,\\ db - b(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3) - a\omega_2^1 - c\omega_1^2 &= n\omega^1 + p\omega^2\,,\\ dc - c(2\omega_2^2 - \omega_3^3) - 2b\omega_2^1 \qquad\qquad &= p\omega^1 + q\omega^2\,. \end{aligned}$$

Podle předpokladu je uvažovaná plocha $\boldsymbol{P}$ nerozvinutelná, tj.

(4) $$b^2 - ac \neq 0\,,$$

což plyne z diferenciální rovnice asymptotických křivek na ploše $\boldsymbol{P}$

(5) $$a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2 = 0\,.$$

2. KONSTRUKCE POLOKANONICKÉHO REPERU SÍTĚ NA PLOŠE

Z rovnic (3) obdržíme

(6) $$d(b^2 - ac) - 2(b^2 - ac)(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3) = 2F\omega^1 + 2G\omega^2\,,$$

kde

(7) $$F = \tfrac{1}{2}(2bn - ap - cm)\,, \quad G = \tfrac{1}{2}(2bp - aq - cn)\,.$$

Z (6) plyne

(8) $$\delta(b^2 - ac) = 2(b^2 - ac)(e_1^1 + e_2^2 - e_3^3)\,.$$

Vzhledem k uvažovanému předpokladu (4) lze bez újmy na obecnosti zvolit

(9) $$b^2 - ac = 1\,.$$

Dosazením do (6) dostaneme

(10) $$-(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3) = F\omega^1 + G\omega^2\,.$$

Prodloužením poslední rovnice získáme

(11) $$\begin{aligned} dF - F\omega_1^1 - G\omega_1^2 - 2a\omega_3^1 - 2b\omega_3^2 &= -2h\omega^1 - 2k\omega^2\,,\\ dG - F\omega_2^1 - G\omega_2^2 - 2b\omega_3^1 - 2c\omega_3^2 &= -2k\omega^1 - 2l\omega^2\,. \end{aligned}$$

Odtud

$$\delta F = Fe_1^1 + Ge_1^2 + 2ae_3^1 + 2be_3^2\,, \tag{12}$$

$$\delta G = Fe_2^1 + Ge_2^2 + 2be_3^1 + 2ce_3^2\,.$$

Pro další specialisaci použijeme afinní normálu plochy. Určíme ji jako geometrické místo středů svazku Darbouxových kvadrik [4]. K určení rovnice svazku potřebujeme lokální rozvoj plochy $\boldsymbol{P}$ až do členů třetího řádu. Tento rozvoj v souřadnicích x, y, z je tvaru

$$z = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 x^2 + 2\alpha_2 xy + \alpha_3 y^2) + \tag{13}$$
$$+ \tfrac{1}{6}(\beta_1 x^3 + 3\beta_2 x^2 y + 3\beta_3 xy^2 + \beta_4 y^3) + \dots\,.$$

Zvolíme nyní na ploše libovolný bod

$$\boldsymbol{P}(x, y, z) = \boldsymbol{M} + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3\,. \tag{14}$$

Určíme nejdříve podmínku pro to, aby tento bod byl pevný, tedy aby $\mathrm{d}\boldsymbol{P} = 0$. Zdiferencujeme (14), dosadíme (1) a srovnáme koeficienty u lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Dostaneme

$$\mathrm{d}x + \omega^1 + x\omega_1^1 + y\omega_2^1 + z\omega_3^1 = 0\,, \tag{15}$$
$$\mathrm{d}y + \omega^2 + x\omega_1^2 + y\omega_2^2 + z\omega_3^2 = 0\,,$$
$$\mathrm{d}z + \omega^3 + x\omega_1^3 + y\omega_2^3 + z\omega_3^3 = 0\,.$$

Diferencováním rovnice (13) obdržíme

$$\mathrm{d}z = (\alpha_1 x + \alpha_2 y)\,\mathrm{d}x + (\alpha_2 x + \alpha_3 y)\,\mathrm{d}y + \tfrac{1}{2}(\mathrm{d}\alpha_1 x^2 + 2\mathrm{d}\alpha_2 xy + \mathrm{d}\alpha_3 y^2) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\beta_1 x^2 + 2\beta_2 xy + \beta_3 y^2)\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}(\beta_2 x^2 + 2\beta_3 xy + \beta_4 y^2)\,\mathrm{d}y + \dots\,.$$

Do této rovnice dosadíme z (13) a (15). Srovnáme-li členy při jednotlivých mocninách x a y, dostaneme

$$\omega_1^3 = \alpha_1\omega^1 + \alpha_2\omega^2\,,\quad \omega_2^3 = \alpha_2\omega^1 + \alpha_3\omega^2\,, \tag{16}$$

$$\tfrac{1}{2}\alpha_1\omega_3^3 = \alpha_1\omega_1^1 + \alpha_2\omega_1^2 - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\beta_1\omega^1 + \tfrac{1}{2}\beta_2\omega^2\,, \tag{17}$$
$$\alpha_2\omega_3^3 = \alpha_1\omega_2^1 + \alpha_2\omega_1^1 + \alpha_2\omega_2^2 + \alpha_3\omega_1^2 - \mathrm{d}\alpha_2 + \beta_2\omega^1 + \beta_3\omega^2\,,$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha_3\omega_3^3 = \alpha_2\omega_2^1 + \alpha_3\omega_2^2 - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}\alpha_3 + \tfrac{1}{2}\beta_3\omega^1 + \tfrac{1}{2}\beta_4\omega^2\,.$$

Porovnáním (16) s (2) vyjde

$$\alpha_1 = a\,,\quad \alpha_2 = b\,,\quad \alpha_3 = c$$

a obdobně z (17) a (3) obdržíme

$$\beta_1 = m\,, \quad \beta_2 = n\,, \quad \beta_3 = p\,, \quad \beta_4 = q\,.$$

Hledaný lokální rozvoj má tvar

$$z = \tfrac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \tag{18}$$
$$+ \tfrac{1}{6}(mx^3 + 3nx^2y + 3pxy^2 + qy^3) + \dots\,.$$

Pro stanovení rovnice svazku Darbouxových kvadrik odvoďme rovnici obecné oskulační kvadriky. Předpokládejme, že její rovnice má tvar

$$f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) + 2\, l(\boldsymbol{X}) + a_{00} = 0\,, \tag{19}$$

kde f je bilineární symetrická forma a l lineární forma. Přitom pro $\boldsymbol{X} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ klademe $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = a_{ik} = a_{ki}$, $l(\mathbf{e}_i) = a_{i0}$. Požavavek, aby bod M plochy $\boldsymbol{P}$ ležel na této kvadrice, je vyjádřen rovnicí

$$f(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}) + 2\, l(\boldsymbol{M}) + a_{00} = 0\,,$$

z níž $a_{00} = 0$. Podmínku dotyku prvního řádu obdržíme diferencováním rovnice (19):

$$f(\boldsymbol{X}, \mathrm{d}\boldsymbol{X}) + l(\mathrm{d}\boldsymbol{X}) = 0\,. \tag{20}$$

Tedy pro bod M platí

$$f(\boldsymbol{M}, \mathrm{d}\boldsymbol{M}) + l(\mathrm{d}\boldsymbol{M}) = 0\,,$$

čili

$$\omega^1 a_{10} + \omega^2 a_{20} = 0\,.$$

Odtud plyne

$$a_{10} = a_{20} = 0\,.$$

Dalším diferencováním rovnice (20) dostaneme

$$f(\mathrm{d}\boldsymbol{X}, \mathrm{d}\boldsymbol{X}) + f(\boldsymbol{X}, \mathrm{d}^2\boldsymbol{X}) + l(\mathrm{d}^2\boldsymbol{X}) = 0\,.$$

Dosadíme-li z derivačních vzorců reperu (1), vyjde

$$(aa_{30} + a_{11})(\omega^1)^2 + 2(ba_{30} + a_{12})\,\omega^1\omega^2 + (ca_{30} + a_{22})(\omega^2)^2 = 0\,,$$

takže

$$a_{11} = -aa_{30}\,, \quad a_{12} = -ba_{30}\,, \quad a_{22} = -ca_{30}\,.$$

Získáváme tak rovnici soustavy oskulačních kvadrik:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + a_{33}z^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz - 2z = 0\,, \tag{21}$$

kde a_{13}, a_{23}, a_{33} jsou libovolné parametry.

Rovnice (18) a (21) určují průsečnou křivku libovolné kvadriky z (21) s plochou. Její průmět do tečné roviny má v bodě M trojnásobný bod s tečnami o rovnicích

$$(22) \qquad (3aa_{13} - m)\,x^3 + 3(2ba_{13} + aa_{23} - n)\,x^2y + \\ + 3(ca_{13} + 2ba_{23} - p)\,xy^2 + (3ca_{23} - q)\,y^3 = 0\,, \quad z = 0\,.$$

Jak známo, jsou Darbouxovy tečny apolární k dvojici asymptotických tečen. Z rovnic (5), (22) obdržíme podmínku apolarity ve tvaru

$$a(ca_{13} + 2ba_{23} - p) - 2b(2ba_{13} + aa_{23} - n) + c(3aa_{13} - m) = 0\,,$$

$$a(3ca_{23} - q) - 2b(ca_{13} + 2ba_{23} - p) + c(2ba_{13} + aa_{23} - n) = 0\,.$$

Odtud a z (4) plyne

$$a_{13} = \frac{ap - 2bn + cm}{4(ac - b^2)}\,, \quad a_{23} = \frac{aq - 2bp + cn}{4(ac - b^2)}\,.$$

Dosazením těchto hodnot do (21) obdržíme rovnici svazku Darbouxových kvadrik ve tvaru

$$(23) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 + \frac{cm - 2bn + ap}{2(ac - b^2)}\,xz + \\ + \frac{cn - 2bn + aq}{2(ac - b^2)}\,yz - 2z + a_{33}z^2 = 0\,.$$

Určíme nyní afinní normálu plochy. Střed libovolné středové kvadriky svazku (23) má souřadnice

$$x = \frac{bG - cF}{2D}\,, \quad y = \frac{bF - aG}{2D}\,, \quad z = -\frac{1}{D}\,,$$

kde

$$D = \begin{vmatrix} a & b & \frac{F}{2} \\ b & c & \frac{G}{2} \\ \frac{F}{2} & \frac{G}{2} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Budeme specialisovat reper R_7 tak, aby vektor $\mathbf{e}_3$ měl směr afinní normály. Z posledních rovnic plyne

$$(24) \qquad F = G = 0\,.$$

Rovnice svazku Darbouxových kvadrik přejde pak ve tvar

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + a_{33}z^2 - 2z = 0\,. \tag{25}$$

Určíme poláru k přímce $(M, \mathbf{e}_3)$ vzhledem k svazku (25). Je to průsečnice polární roviny bodu M s polární rovinou nevlastního bodu přímky $(M, \mathbf{e}_3)$, tedy průsečnice roviny $z = 0$ s rovinou $a_{33}z = 1$. Přímka $(M, \mathbf{e}_3)$ a nevlastní přímka tečné roviny $(M, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ jsou sdružené poláry vzhledem ke svazku Darbouxových kvadrik (25). To je další geometrický výsledek volby (24).

Rovnice (10) a (24) dávají

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 = \omega_3^3 \tag{26}$$

a relace (10) mají tvar

$$a\omega_3^1 + b\omega_3^2 = h\omega^1 + k\omega^2\,, \qquad b\omega_3^1 + c\omega_3^2 = k\omega^1 + l\omega^2\,. \tag{27}$$

Z těchto rovnic vyjádříme ω_3^1, ω_3^2. Je tedy

$$\omega_3^1 = A_1\omega^1 + A_2\omega^2\,, \qquad \omega_3^2 = B_1\omega^1 + B_2\omega^2\,, \tag{28}$$

kde

$$A_1 = bk - ch\,, \quad A_2 = bl - ck\,, \quad B_1 = bh - ak\,, \quad B_2 = bk - al\,.$$

Vzhledem k (26) a (28) je tedy $e_3^1 = e_3^2 = 0$ a

$$e_3^3 = e_1^1 + e_2^2\,. \tag{29}$$

Získali jsme tak reper R_4, který závisí na čtyřech vedlejších parametrech odpovídajících čtyřem nezávislým formám $e_1^1, e_2^2, e_1^2, e_2^1$. V něm

$$\delta \mathbf{M} = 0\,, \quad \delta\mathbf{e}_3 = e_3^3\mathbf{e}_3\,, \tag{30}$$

tedy směr vektoru $\mathbf{e}_3$ afinní normály $(M, \mathbf{e}_3)$ je pevný.

Prodloužením rovnic (27) získáme vztahy

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}h - 2h\omega_1^1 - 2k\omega_1^2 = A\omega^1 + (B - mA_2 - nB_2 + nA_1 + pB_1)\,\omega^2\,, \\ &\mathrm{d}k - k(\omega_1^1 + \omega_2^2) - h\omega_2^1 - l\omega_1^2 = B\omega^1 + C\omega^2\,, \\ &\mathrm{d}l - 2l\omega_2^2 - 2k\omega_2^1 = (C + nA_1 + pB_2 - pA_1 - qB_1)\,\omega^1 + D\omega^2\,. \end{aligned} \tag{31}$$

Odtud

$$\begin{aligned} &\delta h - 2he_1^1 - 2ke_1^2 = 0\,, \\ &\delta k - k(e_1^1 + e_2^2) - he_2^1 - le_1^2 = 0\,, \\ &\delta l - 2le_2^2 - 2ke_2^1 = 0\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Na základě rovnic (30) provedeme takovou specialisaci, která normalisuje vektor $\mathbf{e}_3$.

Uvažujme za tím účelem kongruenci afinních normál $(M, \mathbf{e}_3)$. Bod

$$\mathbf{F} = \mathbf{M} + \lambda \mathbf{e}_3$$

je ohniskem této přímky, když pro něj platí $[\mathrm{d}\mathbf{F}, \mathbf{e}_3] = 0$. Z této podmínky obdržíme rovnice

$$\omega^1 + \lambda\omega_3^1 = 0\,, \quad \omega^2 + \lambda\omega_3^2 = 0\,, \tag{33}$$

z nichž po vyloučení λ získáme rovnici rozvinutelných ploch kongruence

$$\omega^1\omega_3^2 - \omega^2\omega_3^1 = 0\,.$$

Rovnice (33) přejdou po dosazení výrazů (28) ve tvar

$$\begin{gathered}(1 + \lambda\overline{bk - ch})\,\omega^1 + (bl - ck)\,\omega^2 = 0\,,\\ \lambda(bh - ak)\,\omega^1 + (1 + \lambda\overline{bk - al})\,\omega^2 = 0\end{gathered} \tag{34}$$

a z nich vyloučením forem ω^1, ω^2 obdržíme pro λ rovnici

$$(k^2 - hl)\,\lambda^2 - (al - 2bk + ch)\,\lambda + 1 = 0\,. \tag{35}$$

Její kořeny λ_1, λ_2 jsou souřadnice ohnisek F_1, F_2. V důsledku rovnic (32) platí

$$\delta(al - 2bk + ch) = (al - 2bk + ch)\,(e_1^1 + e_2^2)\,, \tag{36}$$

$$\delta(k^2 - hl) = 2(k^2 - hl)\,(e_1^1 + e_2^2) \tag{37}$$

a odtud je patrno, že $(al - 2bk + ch)$ a $(k^2 - hl)$ jsou relativní invarianty. Budeme o nich předpokládat, že

$$al - 2bk + ch \neq 0\,, \quad k^2 - hl \neq 0\,. \tag{38}$$

Z rovnic (36), (37) získáme

$$\delta\,\frac{al - 2bk + ch}{k^2 - hl} = -\,\frac{al - 2bk + ch}{k^2 - hl}\,(e_1^1 + e_2^2)\,. \tag{39}$$

Je tedy $(al - 2bk + ch)/(k^2 - hl)$ rovněž relativní invariant. Tyto tři relativní invarianty nás vedou ke třem různým specialisacím reperu R_4. Spočívají v tom, že koncovým bodem vektoru $\mathbf{e}_3$ budeme volit tři různé body. Závěrem pak získáme tři různé polokanonické repery obecné sítě S.

V prvním případě bude normalisace vektoru $\mathbf{e}_3$ provedena tak, že koncový bod vektoru $\mathbf{e}_3$ zvolíme ve středu Lieovy kvadriky. Střed L je určen dvojpoměrem

$$(F_1F_2ML) = -1\,, \tag{40}$$

přičemž

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M} + \lambda_1 \mathbf{e}_3\,, \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{M} + \lambda_2 \mathbf{e}_3\,, \quad \mathbf{L} = \mathbf{M} + s\mathbf{e}_3\,.$$

Ze vztahu (40) plyne pro s rovnice

$$(41) \qquad 2\lambda_1\lambda_2 - s(\lambda_1 + \lambda_2) = 0\,,$$

která užitím rovnice (35) přejde ve tvar

$$\frac{2}{k^2 - hl} - s\,\frac{al - 2bk + ch}{k^2 - hl} = 0\,.$$

Při uvažované specialisaci je však $s = 1$ a z předcházející rovnice vyjde

$$(42) \qquad al - 2bk + ch = 2\,.$$

Ze vztahu (36) obdržíme rovnici

$$(43) \qquad e_1^1 + e_2^2 = 0\,,$$

a tedy také $e_3^3 = 0$. Z rovnic (3), (31) vyjde

$$(44) \qquad \mathrm{d}(al - 2bk + ch) = (al - 2bk + ch)(\omega_1^1 + \omega_2^2) - 2R_1\omega^1 - 2T_1\omega^2\,,$$

kde

$$(45) \qquad R_1 = \tfrac{1}{2}(-lm - aC - anA_2 + ap\overline{A_1 - B_2} + aqB_1 + 2kn + $$
$$+ 2bB - hp - cA)\,,$$

$$T_1 = \tfrac{1}{2}(-ln - aD - cpB_1 + cn\overline{B_2 - A_1} + cmA_2 + 2kp + $$
$$+ 2bC - hq - cB)\,.$$

Z rovnice (44) užitím vztahu (42) dostaneme

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 = R_1\omega^1 + T_1\omega^2\,.$$

Takto specialisovaný reper R_4 označíme R_1.

V druhém případě budeme vektor $\mathbf{e}_3$ normalisovat tak, aby jeho koncovým bodem byl bod E mající vlastnost, že s bodem E', symetricky položeným vzhledem k bodu M, odděluje harmonicky ohniska F_1, F_2. Tedy

$$(46) \qquad (F_1F_2EE') = -1\,,$$

kde

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M} + \lambda_1\mathbf{e}_3\,, \quad \mathbf{E} = \mathbf{M} + u\mathbf{e}_3\,,$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{M} + \lambda_2\mathbf{e}_3\,, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{M} - u\mathbf{e}_3\,.$$

Podle (46) je u určeno rovnicí

$$\lambda_1\lambda_2 - u^2 = 0,$$

která použitím rovnice (35) přejde ve tvar

$$u^2 = \frac{1}{k^2 - hl}.$$

Při uvažované volbě koncového bodu vektoru $\mathbf{e}_3$ je však $u = 1$ a odtud plyne, že

$$k^2 - hl = 1. \tag{47}$$

Z rovnice (37) obdržíme

$$e_1^1 + e_2^2 = 0.$$

Z (31) dostaneme

$$d(k^2 - hl) = 2(k^2 - hl)(\omega_1^1 + \omega_2^2) - 2R_2\omega^1 - 2T_2\omega^2, \tag{48}$$

kde

$$\begin{aligned} R_2 &= \tfrac{1}{2}(-2kB + lA + hC + hnA_2 + hp\overline{B_1 - A_1} - hqB_1), \\ T_2 &= \tfrac{1}{2}(-2kC + lB + hD + lpB_1 + ln\overline{A_1 - B_1} - lmA_2). \end{aligned} \tag{49}$$

Z rovnice (48) po dosazení (47) obdržíme

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 = R_2\omega^1 + T_2\omega^2.$$

Reper R_4 specialisovaný volbou (47) přejde v reper, který označíme R_{II}.

V posledním případě budeme specialisovat reper R_4 tak, aby koncový bod vektoru $\mathbf{e}_3$ splynul se středem S úsečky F_1F_2. Pro bod S musí tedy platit

$$(F_1F_2S) = -1, \tag{50}$$

přičemž

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M} + \lambda_1\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{F}_2 = \mathbf{M} + \lambda_2\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{S} = \mathbf{M} + s\mathbf{e}_3.$$

Z (50) dostáváme pro s rovnici

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2s.$$

Vyjádřením $\lambda_1 + \lambda_2$ z (35) přejde poslední rovnice ve tvar

$$2s = \frac{al - 2bk + ch}{k^2 - hl}.$$

Odtud vychází

$$\frac{al - 2bk + ch}{k^2 - hl} = 2\,, \tag{51}$$

protože při uvažované specialisaci reperu je $s = 1$. Rovnice (39) nyní dává

$$e_1^1 + e_2^2 = 0$$

a užitím vztahů (44), (48) obdržíme

$$\mathrm{d}\,\frac{al - 2bk + ch}{k^2 - hl} = -\,\frac{al - 2bk + ch}{k^2 - hl}\,(\omega_1^1 + \omega_2^2) + 2R_3\omega^1 + 2T_3\omega^2\,, \tag{52}$$

kde

$$R_3 = \frac{1}{2(k^2 - hl)}\,[lm - hp - 2kn - 2B(b + 2k) + A(c + 2l) + \tag{53}$$
$$+ (a + 2h)(C + nA_2 + pB_2 - pA_1 - qB_1)]\,,$$

$$T_3 = \frac{1}{2(k^2 - hl)}\,[ln + hq - 2kp - 2C(b + 2k) + D(a + 2h) +$$
$$+ (c + 2l)(B - mA_2 - nB_2 + nA_1 + pB_1)]\,.$$

V důsledku volby (51) z rovnice (52) vyjde

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 = R_3\omega^1 + T_3\omega^2\,.$$

Uvedenou specialisací jsme získali reper R_{III}.

Předcházející rovnice, které jsme obdrželi v důsledku tří různých normalisací vektoru $\mathbf{e}_3$, lze zapsat jedinou rovnicí

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 = R_i\omega^1 + T_i\omega^2\,, \quad i = 1, 2, 3\,, \tag{54}$$

v níž R_i, T_i jsou pro jednotlivé hodnoty i vyjádřeny v (45), (49) a (53). Ve všech třech případech dostáváme pro e_1^1, e_2^2 vztah

$$e_1^1 + e_2^2 = 0\,. \tag{55}$$

Volme dále vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ v tečné rovině tak, aby $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ a $(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ byly tečnými vektory vrstev asociované konjugované sítě. Asociovaná konjugovaná síť přiřazená k parametrické síti má tu vlastnost, že její tečny v každém bodě harmonicky oddělují parametrické a asymptotické tečny [2]. Snadným výpočtem zjistíme, že rovnice asociované konjugované sítě k parametrické síti s rovnicí $\omega^1\omega^2 = 0$ [1] má tvar

$$a(\omega^1)^2 - c(\omega^2)^2 = 0\,.$$

Rovnice vyjde za předpokladu, že síť nenít konjugovaná. Tento předpoklad je vyjádřen podle (5) vztahem $b \neq 0$. Tečné vektory křivek asociované konjugované sítě jsou $(\sqrt{(c)}\, e_1 + \sqrt{(a)}\, e_2)$, $(\sqrt{(c)}\, e_1 - \sqrt{(a)}\, e_2)$. Uvažovaná specialisace reperů $R_{\mathrm{I}}, R_{\mathrm{II}}, R_{\mathrm{III}}$ tedy vyjde, položíme-li $a = c$. Pak z rovnic (3) obdržíme

$$(56) \qquad a(\omega_1^1 - \omega_2^2) = b(\omega_2^1 - \omega_1^2) + \frac{p - m}{2}\,\omega^1 + \frac{q - n}{2}\,\omega^2$$

a při změně vedlejších parametrů platí

$$(57) \qquad a(e_1^1 - e_2^2) = b(e_2^1 - e_1^2)\,.$$

Z (55) a (57) vyjdou e_1^1, e_2^2 v závislosti na e_1^2, e_2^1.

Nyní již připojíme reper k síti S. Zvolíme tedy

$$\omega_1^2 = t\omega^1 + v\omega^2\,, \quad \omega_2^1 = f\omega^1 + g\omega^2\,,$$

takže $e_1^2 = 0$, $e_2^1 = 0$. Pak také $e_1^1 = e_2^2 = e_3^3 = 0$ a formy $\omega_1^1, \omega_2^2, \omega_3^3$ jsou hlavní. Vypočteme je z rovnic (54), (56) a (26).

$$(58)\ \omega_1^1 = \frac{1}{2}\left[R_i + \frac{p - m}{2a} + \frac{b}{a}(f - t)\right]\omega^1 + \frac{1}{2}\left[T_i + \frac{q - n}{2a} + \frac{b}{a}\,(g - v)\right]\omega^2\,,$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[R_i - \frac{p - m}{2a} - \frac{b}{a}(f - t)\right]\omega^1 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[T_i - \frac{q - n}{2a} - \frac{b}{a}(g - v)\right]\omega^2\,, \quad i = 1, 2, 3\,.$$

Všimneme-li si geometrického významu vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, vidíme, že v tomto reperu vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ jsou ve směru tečen libovolné sítě, protože pro význačné parametry odpovídající formám e_1^2, e_2^1 nevyplynuly během specialisace reperu žádné závislosti.

Získaný reper je polokanonický reper obecné sítě na ploše. Je dán soustavou diferenciálních rovnic

$$\mathrm{d}\boldsymbol{M} = \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2\,,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{e}_1 = \omega_1^1\mathbf{e}_1 + (t\omega^1 + v\omega^2)\,\mathbf{e}_2 + (a\omega^1 + b\omega^2)\,\mathbf{e}_3\,,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{e}_2 = (f\omega^1 + g\omega^2)\,\mathbf{e}_1 + \omega_2^2\mathbf{e}_2 + (b\omega^1 + c\omega^2)\,\mathbf{e}_3\,,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{e}_3 = \omega_3^1\mathbf{e}_1 + \omega_3^2\mathbf{e}_2 + (\omega_1^1 + \omega_2^2)\,\mathbf{e}_3\,,$$

kde $\omega_1^1, \omega_2^2, \omega_3^3$ jsou určeny rovnicemi (58), (26) a ω_3^1, ω_3^2 rovnicemi (28).

Literatura

[1] *Bajáková P.:* Reper sítě na ploše v trojrozměrném afinním prostoru. Čas. pro pěst. mat. 1975, svazek *100*, 384—390.
[2] *Kolář I.:* Užití Cartanových metod ke studiu obecné sítě křivek na ploše v trojrozměrném projektivním prostoru. Rozpravy Čes. ak. věd 1967, ročník *77*, sešit 5, Praha.
[3] *Marková L.:* Reper sítě na ploše. Čas. pro pěst. mat. 1973, svazek *98*, 369—374.
[4] *Щербаков Р. Н.:* Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск 1960.

Adresa autorky: 602 00 Brno, Hilleho 6 (Vysoké učení technické).

Zusammenfassung

DAS HALBKANONISCHE BEWEGLICHE BEZUGSSYSTEM DES NETZES AUF EINER FLÄCHE IM DREIDIMENSIONALEN AFFINEN RAUM

PAVLA BAJÁKOVÁ, Brno

In diesem Artikel wird mittels der Cartanschen Methoden das halbkanonische bewegliche Bezugssystem des allgemeinen Netzes von Kurven auf einer Fläche im dreidimensionalen affinen Raum konstruiert. Bei der angegebenen Konstruktion ist das bewegliche Bezugssystem dem Netz erst in der letzten Etappe der Spezialisierung zugeordnet. Die Spezialisierungen des beweglichen Bezugssystems sind geometrisch charakterisiert.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

A MODIFICATION OF NEWTON'S METHOD

VLASTIMIL PTÁK, Praha

(Received June 30, 1975)

INTRODUCTION

In a recent paper [2] the author obtained a simple theorem of the closed graph type, the so-called "Induction Theorem" which gives an abstract model for iterative existence proofs in analysis and numerical analysis. The induction theorem not only provides a heuristic method for the investigation of iterative constructions but also yields considerable simplifications of proofs.

The induction theorem forms the basis of the method of nondiscrete mathematical induction described in [8]. The method consists in reducing the given problem to a set of inequalities for several indeterminate functions one of which is to be a rate of convergence.

In the present remark we intend to apply the method of nondiscrete mathematical induction to a modification of Newton's method due to Jürgen Moser. The purpose of the remark is twofold. First of all, the method of nondiscrete induction provides, we believe, a deeper insight into the essence of the use of approximate solutions of the linearized equation (obtained, in concrete situations, by means of smoothing operators or additional viscosities or similar devices). At the same time, Moser's theorem provides a good example to illustrate the advantages of the nondiscrete method.

1. DEFINITIONS AND NOTATION

Let T be an interval of the form $T = \{t; 0 < t < t_0\}$. A function ω mapping T into itself will be called a *rate of convergence* if, for each $r \in T$, the series

$$r + \omega(r) + \omega(\omega(r)) + \omega(\omega(\omega(r))) + \ldots$$

is convergent.

If ω is a rate of convergence we denote by σ the sum of the above series. We observe that σ satisfies the functional equation

$$\sigma(\omega(r)) + r = \sigma(r) .$$

(1,1) Lemma. *Let a be a number with $a > 1$. Then $t \mapsto t^a$ is a rate of convergence on the interval $0 < t < 1$. For sufficiently small t we have the estimate $\sigma(t) \leqq 2t$. More precisely, it suffices to have*

$$t \leqq 2^{-1/(a-1)} .$$

Proof. If

$$0 < t \leqq 2^{-1/(a-1)}$$

we have $t^a \leqq \frac{1}{2}t$ and it is easy to see, by induction, that

$$t^{a^n} \leqq (\tfrac{1}{2})^n t .$$

Hence $\sigma(t) \leqq 2t$.

Let (E, d) be a metric space.

An approximate set in E is a family of subsets of E $t \mapsto W(t)$, $t \in T$. We define the limit $W(0)$ of this family as follows

$$W(0) = \bigcap_{r>0} (\bigcup_{s \leqq r} W(s))^- ;$$

hence $W(0)$ is the set of all limits of convergent sequences x_n such that $x_n \in W(r_n)$ for a suitable sequence $r_n \to 0$.

If $x \in E$ and $r > 0$ we define

$$U(x, r) = \{z \in E;\ d(z, x) < r\}$$

similarly, if $M \subset E$ and $r > 0$,

$$U(M, r) = \{z \in E;\ d(z, m) < r \text{ for some } m \in M\} .$$

(1,2) The Induction Theorem. *Let ω be a rate of convergence on T. Let (E, d) be a complete metric space; for each $t \in T$ let $W(t)$ be a subset of E. Suppose that, for each $t \in T$*

$$W(t) \subset U(W(\omega(t)), t) ;$$

then

$$W(t) \subset U(W(0), \sigma(t)) .$$

The proof is simple and straightforward; the theorem is closely related to the closed graph theorem of Functional Analysis. The proof is given and the relation to the closed graph theorem explained in the author's remark [4]. Applications to existence theorems are given in [3], [2], [6], [7]. The general principles governing the application of the nondiscrete induction method are discussed in the author's lecture [8] where further examples are given.

Sometimes, it is more convenient to use the induction theorem in the following equivalent form.

(1.3) *Let (E, d) be a complete metric space, let ω be a function which maps $T = (0, t_0)$ into itself and such that $\omega^{(n)}(t)$ tends to zero for all $t \in T$. Let φ be a positive increasing function defined on T such that*

$$\sigma_\varphi(t) = \sum \varphi(\omega^{(n)}(t)) < \infty$$

for each $t \in T$. Then $\varphi \circ \omega \circ \varphi^{-1}$ is a rate of convergence. Given a family $W(t)$ of subsets of E such that

$$W(t) \subset U(W(\omega(t)), \varphi(t))$$

for each $t \in T$, then

$$W(t) \subset U(W(0), \sigma_\varphi(t))$$

for each $t \in T$.

Proof. Set $Z(t) = W(\varphi^{-1}(t))$ and apply the induction theorem to the family $Z(\cdot)$ and the rate of convergence $\tilde{\omega} = \varphi \circ \omega \circ \varphi^{-1}$.

2. MOSER'S THEOREM

In this section we state and prove a slightly improved version of Moser's theorem. There are some formal simplifications in the statement of the theorem and the proof is considerably simpler.

(2,1) Theorem. *Suppose $E_1 \subset E_\varrho \subset E_0$ are three vector spaces over the complex field, each equipped with a norm (indexed by the same number). Suppose that the norm of E_ϱ satisfies the inequality*

$$|u|_\varrho \leqq c|u|_0^{1-\sigma}\,|u|_1^\sigma \quad \textit{for all} \quad u \in E_1$$

and a fixed $0 < \sigma < 1$ and that the space $(E_\varrho, |\cdot|_\varrho)$ is complete.

Further, let $F_1 \subset F_0$ be two vector spaces over the complex field, each equipped with a norm (indexed by the same number).

Let R be a positive number and let

$$D_1 = \{u \in E_1;\ |u|_\varrho \leqq R\}.$$

Let D be the closure of D_1 in the space $(E_\varrho, |\cdot|_\varrho)$. Let f be a continuous mapping of $(D, |\cdot|_\varrho)$ into $(F_0, |\cdot|_0)$ such that f maps D_1 into F_1. We shall make the following assumptions about f.

1° *(growth) there exist two positive numbers M and $S \geqq 1$ such that*

$$|f(u)|_1 \leqq M \max(S, |u|_1) \quad \text{for all} \quad u \in D_1 .$$

2° *(approximation by a differential) there exists a mapping g of $D_1 \times E_1$ into F_1 and a number β, $0 < \beta < 1$ such that*

$$|f(u + v) - f(u) - g(u, v)|_0 \leqq M|v|_0^{2-\beta} |v|_1^\beta$$

whenever both u and $u + v$ belong to D_1.

3° *(solvability of the linearized equation) there exist two positive numbers λ and μ with the following properties*

$$\text{if} \quad u \in D_1 \quad \text{and} \quad g \in f(D_1) \quad \text{are such that}$$

$|g|_0 \leqq m^{-\lambda}$ where $m = \max((1/M)|g|_1, |u|_1, S)$ and if Q is any number greater than 1, there exists at least one $v \in E_1$ for which

$$|g(u, v) - g|_0 \leqq MmQ^{-\mu},$$
$$|v|_1 \leqq MmQ,$$
$$|v|_0 \leqq M|g(u, v)|_0 .$$

4° *suppose that $\mu > \lambda$ and*

$$\frac{\mu + 1}{\mu - \lambda} < \min\left(2 - \beta \cdot \frac{\lambda + (\lambda + 1)(\mu + 1)}{\lambda(\mu + \beta)}, \quad \lambda \frac{1 - \sigma}{\sigma}\right).$$

Then there exists a number $\delta > 0$ such that $|f(0)|_0 < \delta$ implies the existence of an element $u \in D$ for which $f(u) = 0$.

Proof. Suppose that $u \in D_1$ and $|f(u)|_0 \leqq m^{-\lambda}$ where

$$m \geqq \max(|u|_1, S) . \tag{1}$$

According to 1°, we have $\max(|u|_1, S) \geqq |f(u)|_1/M$ so that $m \geqq \max(|f(u)|_1/M, |u|_1, S)$.

According to 4°, there exists, for each $Q > 1$, at least one $v \in E_1$ such that

$$|g(u, v) + f(u)|_0 \leqq MmQ^{-\mu} \quad \text{and} \quad |v|_1 \leqq MmQ .$$

Suppose further that

$$u + v \in D_1 \tag{2}$$

and let us estimate $|f(u + v)|_0$ and $|v|_0$. We have, by 2°

$$|f(u + v)|_0 \leqq |f(u + v) - f(u) - g(u, v)|_0 + |g(u, v) + f(u)|_0 =$$
$$\leqq M|v|_0^{2-\beta} |v|_1^\beta + MmQ^{-\mu} \leqq M|v|_0^{2-\beta} (MmQ)^\beta + MmQ^{-\mu} .$$

According to 3°

$$|v|_0 \leqq M|g(u, v)|_0 \leqq M(|g(u, v) + f(u)|_0 + |f(u)|_0) \leqq$$
$$\leqq M(MmQ^{-\mu} + m^{-\lambda}).$$

Let us assume further that

(3) $$MmQ^{-\mu} \leqq m^{-\lambda}.$$

Under these assumptions it follows that $|v|_0 \leqq 2Mm^{-\lambda}$ whence

$$|v|_\varrho \leqq c\, 2^{1-\sigma} Mm^{-\lambda(1-\sigma)+\sigma} Q^\sigma$$
$$|f(u + v)|_0 \leqq pQ^\beta + qQ^{-\mu}$$

where $p = M^3\, 2^{2-\beta} m^{-\lambda(2-\beta)+\beta}$ and $q = Mm$.

We shall write $1/r$ for m. We intend to show that there exists a number $a > 1$ such that

(5) $$qQ^{-\mu} \leqq \tfrac{1}{2} r^{a\lambda}$$

(6) $$pQ^\beta \leqq \tfrac{1}{2} r^{a\lambda}$$

for a suitable $Q > 1$. First of all let us note that condition (5) implies condition (3). If such a number a exists it is possible to expect that $t \to t^a$ will be a suitable rate of convergence. Since $|u|_1 \leqq m = 1/r$ it is natural to impose further the following condition

(7) $$Q \leqq \frac{1}{2M} r^{1-a}$$

which will ensure the estimate $|v|_1 \leqq \frac{1}{2}(1/r)^a$ whence

$$|u + v|_1 \leqq |u|_1 + |v|_1 \leqq \frac{1}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\right)^a$$

and this will not exceed $(1/r)^a$ as soon as

(8) $$r \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/(a-1)}.$$

Summing up: our task reduces to finding an $a > 1$ for which there exists a Q satisfying the following conditions

$$1 < Q$$

(5) $$(2M)^{1/\mu} r^{-(1+a\lambda)/\mu} = (2qr^{-a\lambda})^{1/\mu} \leqq Q$$

(7) $$Q \leqq \frac{1}{2M} r^{1-a}$$

(6) $$Q \leqq \left(\frac{1}{2p} r^{a\lambda}\right)^{1/\beta} =$$

$$= (2^{3-\beta} M^3)^{-1/\beta} r^{-(\lambda(2-\beta)-\beta-a\lambda)/\beta}.$$

If there exists an a such that

(57) $$\frac{1 + a\lambda}{\mu} < a - 1$$

and

(56) $$\frac{1 + a\lambda}{\mu} < \frac{1}{\beta}(\lambda(2-\beta) - \beta - a\lambda)$$

then there exists an $r(a)$ with the following property: for each $0 < r \leqq r(a)$ there exists a $Q > 1$ (depending on r) satisfying (5), (6) and (7). Since $\mu > \lambda$, condition (57) is equivalent to

(57) $$a > \frac{\mu + 1}{\mu - \lambda}$$

and condition (56) to

(56) $$a < 2 - \beta \frac{\lambda + (\lambda + 1)(\mu + 1)}{\lambda(\mu + \beta)}.$$

If condition 4° is satisfied, it follows that it is possible to choose an a which satisfies both (56) and (57).

It follows that

$$|v|_\varrho \leqq c\, 2^{1-\sigma} M \left(\frac{1}{2M}\right)^{\sigma} r^{\lambda(1-\sigma)-\sigma a};$$

this will tend to zero with r if $\lambda(1-\sigma) - \sigma a > 0$. Choose a positive ε such that $\omega = \lambda(1-\sigma) - \sigma a - \varepsilon > 0$. If $r \leqq (c\, 2^{1-\sigma} M (2M)^{-\sigma})^{-1/\varepsilon}$, we shall have $|v|_\varrho \leqq r^{\omega}$. The new condition to be imposed on a is the following

(9) $$a < \lambda \frac{1-\sigma}{\sigma}.$$

It follows from condition 4° that $(\mu + 1)/(\mu - \lambda) < (1-\sigma)/\sigma$ so that a may be chosen so as to satisfy (56), (57) and (9). Once such a is fixed, for any $r \leqq r(a)$ there exists a $Q > 1$ satisfying (5), (6) and (7). Now let

$$r_0 = \min\left(S^{-1}, r(a), 2^{-1/(a-1)}, (c\, 2^{1-2\sigma} M^{1-\sigma})^{-1/\varepsilon}\right)$$

and, for each $r \leqq r_0$, set

$$W(r) = \{u \in D_1; |u|_\varrho \leqq R - \sigma(r^\omega), |u|_1 \leqq 1/r, |f(u)|_0 \leqq r^\lambda\}.$$

Here, of course, σ is the function corresponding to the rate of convergence $t \to t^a$, hence $\sigma(t) = t + t^a + t^{a^2} + \ldots$. The preceding discussion shows that

$$W(r) \subset U(W(r^a), r^\omega)$$

for $r \leqq r_0$, the neighbourhood being taken in the norm $|\cdot|_\varrho$.

To complete the proof it will be sufficient to show that there exists an $r \leqq r_0$ such that $0 \in W(r)$. If $r \leqq r_0$ then $0 \in W(r)$ is equivalent to $|f(0)|_0 \leqq r^\lambda$ and $\sigma(r^\omega) \leqq R$.

If

$$0 < t < \left(\frac{1}{2}\right)^{1/(a-1)},$$

we have $\sigma(t) \leqq 2t$ by lemma (1,1). It follows that the inequality $\sigma(r^\omega) \leqq R$ will be satisfied if $r^\omega \leqq (\frac{1}{2})^{1(a-1)}$ and $2r^\omega \leqq R$, in other words, if $r \leqq \min((\frac{1}{2})^{1/\omega(a-1)}, (\frac{1}{2}R)^{1/\omega})$. Now set $\delta = (\min(r_0, (\frac{1}{2})^{1/\omega(a-1)}, (\frac{1}{2}R)^{1/\omega}))^\lambda$ and suppose that $|f(0)|_0 \leqq \delta$. If $r = (|f(0)|_0)^{1/\lambda}$, we have $|f(0)|_0 \leqq r^\lambda$ and $\sigma(r^\omega) \leqq R$ so that $0 \in W(r)$. It follows from the induction theorem that $W(0)$ is nonvoid, in other words, there exists a $u \in D$ for which $f(u) = 0$.

The proof is complete.

The author wishes to thank M. ŠTĚDRÝ for several stimulating conversations concerning Moser's theorem and its applications.

References

[1] *J. Moser:* A rapidly convergent iteration method and nonlinear partial differential equations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa *20* (1966), 265–315.

[2] *V. Pták:* A theorem of the closed graph type, Manuscripta Math. *13* (1974), 109–130.

[3] *V. Pták:* Deux théoremes de factorisation, Comptes Rendus Ac. Sci. Paris *278* (1974), 1091–1094.

[4] *V. Pták:* A quantitative refinement of the closed graph theorem, Czech. Math. J. *99* (1974), 503–506.

[5] *V. Pták:* On the closed graph theorem, Czech. Math. J. *84* (1959), 523–527.

[6] *J. Křížková, P. Vrbová:* A remark on a factorization theorem, Comment. Math. Univ. Carol. *15* (1974), 611–614.

[7] *J. Zemánek:* A remark on transitivity of operator algebras, Čas. pěst. mat. *100* (1975), 176–178.

[8] *V. Pták:* Nondiscrete mathematical induction and iterative existence proofs, Lin. Algebra and its Appl., in print.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

A CONSTRUCTION OF TOLERANCES ON MODULAR LATTICES

IVAN CHAJDA, Přerov

(Received July 16, 1975)

It is well-known that there exists a one-to-one correspondence between congruences and ideals in rings and Ω-groups (see [4]) and between congruences and normal subgroups in groups. This correspondence exists also between congruences and ideals in Boolean algebras (see [1] or [5]), however, an analogous correspondence does not exist for distributive lattices in the general case, as is shown in [5]. It is only proved in [3] (Theorem 2.2) that each ideal of a lattice L is a kernel of at least one congruence relation if and only if L is distributive. The aim of this paper is to give a relationship between ideals and compatible tolerances for modular lattices.

1.

By a *tolerance relation*, or briefly a *tolerance*, on a set A we mean a reflexive and symmetric binary relation on A. Thus each equivalence relation on A is a tolerance relation on A.

Let $\mathfrak{A} = (A, F)$ be an algebra with the support A and a set F of fundamental operations. Further, let T be a tolerance relation on the support A. The relation T is called a *compatible tolerance relation* on $\mathfrak{A}$ (or briefly a *compatible tolerance* on $\mathfrak{A}$) if for each n-ary $f \in F$, $n \geqq 1$, and for arbitrary $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$ such that $a_i \, T \, b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ we have also $f(a_1, \ldots, a_n) \, T f(b_1, \ldots, b_n)$.

Especially, each congruence on $\mathfrak{A}$ is a compatible tolerance on $\mathfrak{A}$. The concept of compatible tolerance has been introduced for algebraic structures by B. ZELINKA in [6] and studied for lattices in [7] and [8].

Definition 1. Let $\mathfrak{A} = (A, F)$ be an algebra, $S = \{A_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ a system of subsets $A_\gamma \subseteq A$. S is called a *covering* of $\mathfrak{A}$ if $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = A$. The covering S is called *compatible* on $\mathfrak{A}$, if for each n-ary $f \in F$ and arbitrary $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ there exists $\gamma_0 \in \Gamma$ such that $a_i \in A_{\gamma_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ imply $f(a_1, \ldots, a_n) \in A_{\gamma_0}$.

Clearly, if Θ is a congruence on an algebra $\mathfrak{A}$, then the system of all classes of the partition of A induced by Θ forms a compatible covering of $\mathfrak{A}$.

Definition 2. Let $\mathfrak{A} = (A, F)$ be an algebra, $S = \{A_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ a covering of $\mathfrak{A}$. The binary relation $T(S)$ defined on A by the rule

$$a\ T(S)\ b \text{ if and only if there exists } \gamma_0 \in \Gamma \text{ such that } a, b \in A_{\gamma_0}$$

is called *induced* by S.

It is clear that $T(S)$ is a tolerance relation on A for an arbitrary covering S of $\mathfrak{A}$. If S is a partition of A, then $T(S)$ is an equivalence on A.

Lemma 1. *Let $\mathfrak{A} = (A, F)$ be an algebra and S a compatible covering of $\mathfrak{A}$. Then the relation $T(S)$ induced by S is a compatible tolerance relation on $\mathfrak{A}$.*

The proof is clear and follows directly from Definition 1.

Let L be a lattice. By $\vee$ or $\wedge$ the operation join or meet on L, respectively, is denoted. Denote by $\leqq$ the lattice ordering on L. If $a, b \in L$ are incomparable, i.e. neither $a \leqq b$ nor $b \leqq a$, then we symbolize it by $a \parallel b$. By the symbol $J(a)$ we denote the *principal ideal of L generated by a*.

Notation. Let L be a lattice, $a \in L$, and J be an ideal of L. Denote $a \vee J = \{a \vee j; j \in J\}$.

Theorem 1. *Let L be a lattice. Then the following two conditions are equivalent:*

(a) *L is modular;*

(b) *for each ideal J of L and each element $a \in L$ the set $a \vee J$ is a convex sublattice of L.*

Proof. Let (a) be valid, $a \in L$, and let J be an ideal of L. Let $j \in J$ and $x \in [a, a \vee j]$. From a result of Croisot [2] it follows that $x \in a \vee J$. Hence $a \vee J$ is a convex subset of L. Let $x, y \in a \vee J$. Then there exist $i_1, i_2 \in J$ such that $x = a \vee i_1$, $y = a \vee i_2$. Thus

$$x \vee y = (a \vee i_1) \vee (a \vee i_2) = a \vee (i_1 \vee i_2) \in a \vee J\,,$$

$$x \wedge y = (a \vee i_1) \wedge (a \vee i_2) = a \vee (i_1 \wedge (a \vee i_2)) = a \vee i \in a \vee J\,,$$

where $i = i_1 \wedge (a \vee i_2)$. Hence (b) holds.

Conversely, assume that (a) does not hold. It is well-known that then L must contain a five-element non-modular sublattice $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ such that $x_0 < x_2 < x_1$, $x_0 < x_3 < x_4 < x_1$. Put $J = J(x_2)$, $a = x_3$. Then clearly $x_1, x_3 \in a \vee J$. Suppose that $x_4 = a \vee j$ for some $j \in J$. Then $j \leqq x_4$ and from $j \in J(x_2)$ we have $j \leqq x_2$. Hence $j \leqq x_2 \wedge x_4 = x_0$. Thus

$$x_4 = a \vee j \leqq a \vee x_0 = x_3 \vee x_0 = x_3\,,$$

which is a contradiction with $x_3 < x_4$. Hence $a \vee J$ fails to be a convex subset in L.

Lemma 2. *Let L be a lattice and J an ideal of L. Then $S_J = \{a \vee J,\ a \in L\}$ is a covering of L.*

Proof. Let $a \in L$, $x \in J$. Then $a \wedge x \in J$, thus $a = a \vee (x \wedge a) \in a \vee J$.

Definition 3. Let L be a lattice and J an ideal of L. The covering $S_J = \{a \vee J, a \in L\}$ is called *induced by J* and the tolerance relation $T(S_J)$ induced by S_J is called *tolerance on L induced by the ideal J*. For the sake of brevity, denote by $T_J = T(S_J)$ the tolerance induced by J.

2.

Now, we have two natural problems: the first, for which ideal J of L the relation T_J is a compatible tolerance on L, and the second, for which J is a compatible tolerance which is not a congruence on L. This first problem is considered in what follows for the case of modular lattices.

Definition 4. Let L be a lattice and $c \in L$. If for each $a, b \in L$ c fulfils the identity

$$(a \vee c) \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c\,,$$

c is called a *semi-distributive element.*

Theorem 2. *Let L be a modular lattice and $j \in L$ a semi-distributive element of L. If J is the principal ideal of L generated by j, then T_J is a compatible tolerance relation on L.*

Proof. By Lemma 2, T_J is a tolerance relation on L. It remains to prove that T_J is compatible on L. If the covering $S_J = \{x \vee J, x \in L\}$ induced by J is a compatible covering of L, then, by Lemma 1, T_J is a compatible tolerance on L. Accordingly, it suffices to prove only the compatibility of S_J.

Let $a, b \in L$, $x \in a \vee J$, $y \in b \vee J$. Then there exist $i_1, i_2 \in J$ such that $x = a \vee i_1$, $y = b \vee i_2$. Evidently, $x \vee y = (a \vee b) \vee i$ where $i = i_1 \vee i_2 \in J$, thus $x \vee y \in (a \vee b) \vee J$.

Further, we have

$$(1^\circ) \qquad x \wedge y = (a \vee i_1) \wedge (b \vee i_2) \geqq (a \wedge b) \vee (i_1 \wedge i_2) \in (a \wedge b) \vee J\,.$$

As $J = J(j)$, it is $i \leqq j$ for each $i \in J$. Then

$$x \wedge y = (a \vee i_1) \wedge (b \vee i_2) \leqq (a \vee j) \wedge (b \vee j)\,.$$

However, j is a semi-distributive element, thus

$$(2^\circ) \qquad x \wedge y \leqq (a \wedge b) \vee j \in (a \wedge b) \vee J\,.$$

By Theorem 1, $(a \wedge b) \vee J$ is a convex sublattice of L, thus (1°) and (2°) imply $x \wedge y \in (a \wedge b) \vee J$.

Remark. Let L be a lattice and T a compatible tolerance relation on L. If there exists an ideal J of L such that $T = T_J$, we call T a constructible tolerance on L. Thus, each constructible tolerance on L is a compatible tolerance relation on L, however, the converse assertion need not be true. The problem of the determination of lattices on which each compatible tolerance relation is constructible is open.

References

[1] *Birkhoff G.:* Lattice Theory, Amer. Math. Soc. 1940, N.Y.

[2] *Croisot M. R.:* Axiomatique des treillis modulaires, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris *231*, (1950), p. 95—97.

[3] *Hashimoto J.:* Ideal Theory for Lattices, Math. Japonicae *2*, (1952), 149—186.

[4] *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре, Физматгиз, Москва 1962.

[5] *Szász G.:* Introduction to lattice theory, Academ. Kiadó, Budapest 1963.

[6] *Zelinka B.:* Tolerances in algebraic structures, Czech. Math. J. *20*, (1970), 179—183.

[7] *Chajda I.* and *Zelinka B.:* Tolerance relations on lattices, Časop. pěst. matem. *99*, (1974), 394—399.

[8] *Chajda I.* and *Zelinka B.:* Tolerance relations and weakly associative lattices, Czech. Math. J., (to appear).

Author's address: 750 00 Přerov, třída Lidových milicí 290.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

ON THE MINIMUM DEGREE AND EDGE-CONNECTIVITY OF A GRAPH

LADISLAV NEBESKÝ, Praha

(Received July 25, 1975)

Let G be a graph. We denote by $V(G)$ and $E(G)$ the vertex set of G and the edge set of G, respectively. If $v \in V(G)$, then we denote by $\deg_G v$ the degree of v in G. Moreover, we denote by $\delta(G)$ and $\Delta(G)$ the minimum degree of G and the maximum degree of G, respectively. If U is a nonempty subset of $V(G)$, then we denote by $\langle U \rangle_G$ the graph G' such that $V(G') = U$ and

$$E(G') = \{e \in E(G);\ e \text{ is incident with no vertex in } V(G) - U\}\ .$$

Let G be a nontrivial connected graph. We say that a set $S \subseteq E(G)$ is a cut set of G, if the graph $G - S$ is disconnected. A cut set S with $|S| = n$ is referred to as an n-cut set. We denote by $\varkappa_1(G)$ the minimum integer k such that there is a k-cut set of G; the integer $\varkappa_1(G)$ is called the edge-connectivity of G. (The terms not defined here can be found in M. BEHZAD and G. CHARTRAND [1].)

It is obvious that for any nontrivial connected graph G, $\varkappa_1(G) \leqq \delta(G)$. A sufficient condition for $\varkappa_1(G) = \delta(G)$ is due to D. R. LICK [3]; note that Lick's result is an analogue of R. HALIN's theorem on the vertex-connectivity [2]. In the present note it will be shown that an analysis of a nontrivial connected graph from the point of view of its edge-connectivity can lead to an upper bound for the minimum degree. In fact, we obtain an upper bound for a more general characteristic: if G is a graph and U is a nonempty subset of $V(G)$, then we denote

$$\deg_G U = \min\{\deg_G u;\ u \in U\}\ .$$

Obviously, $\delta(G) = \deg_G V(G)$.

Let G be a nontrivial connected graph, and let U be a nonempty subset of $V(G)$. We denote $f_G(U) = \Delta(G_0)$, where G_0 is the spanning subgraph of $\langle U \rangle_G$ with the property that $e \in E(G_0)$ if and only if $e \in E(\langle U \rangle_G)$ and $\varkappa_1(G - e) = \varkappa_1(G)$. We denote by $h_G(U)$ the minimum integer i such that there is an i-cut set R_0 of G with the property that for at least one component F_0 of the graph $G - R_0$ it holds that $V(F_0) \subseteq U$. Obviously, $\varkappa_1(G) \leqq h_G(U)$. It is clear that if U_1 and U_2 are subsets of $V(G)$ such that $\emptyset \neq U_1 \subseteq U_2$, then $f_G(U_1) \leqq f_G(U_2)$ and $h_G(U_2) \leqq h_G(U_1)$. Denote $f_G = f_G(V(G))$. Clearly, $h_G(V(G)) = \varkappa_1(G)$.

The following theorem is the main result of this note:

Theorem. *Let G be a nontrivial connected graph, and let U be a nonempty subset of $V(G)$. Then*

$$h_G(U) \leqq \deg_G U \leqq \max\left(f_G(U), h_G(U)\right).$$

Proof. It is obvious that for each $u \in U$, the set of edges incident with u in G is a cut set of G. Therefore, $h_G(U) \leqq \deg_G U$.

We shall prove the inequality $\deg_G U \leqq \max(f_G(U), h_G(U))$. Clearly, there is a nonempty subset U_0 of U such that $h_G(U_0) = h_G(U)$ and that for each nonempty subset U' of U, $|U'| < |U_0|$ implies $h_G(U') > h_G(U)$. Obviously, $U_0 \neq V(G)$. We denote by F the graph $\langle U_0 \rangle_G$. It is obvious that there is an $h_G(U)$-cut set R of G such that F is a component of $G - R$. It is easy to see that $E(F) \cap R = \emptyset$. Denote $n = |U_0|$. Obviously,

$$\text{(1)} \qquad \deg_G U \leqq \deg_G U_0 \leqq \Delta(F) + \left[\frac{h_G(U)}{n}\right] \leqq n - 1 + \frac{h_G(U)}{n}.$$

(Note that if x is a real number, then $[x]$ denotes the maximum integer j such that $j \leqq x$.)

Let $n \leqq h_G(U)$. If $h_G(U) < \deg_G U$, then it follows from (1) that $h_G(U).(n - 1) < n(n - 1)$, and thus $h_G(U) < n$, which is a contradiction. Hence $\deg_G U \leqq h_G(U) \leqq \max(f_G(U), h_G(U))$.

Let $h_G(U) < n$. From (1) it follows that $\deg_G U \leqq \Delta(F)$. We distinguish two cases:

(I) For each $e \in E(F)$, $\varkappa_1(G - e) = \varkappa_1(G)$. Then $f_G(U) \geqq \Delta(F)$. Therefore, $\deg_G U \leqq \Delta(F) \leqq f_G(U) \leqq \max(f_G(U), h_G(U))$.

(II) There exists $e \in E(F)$ such that $\varkappa_1(G - e) \neq \varkappa_1(G)$. Then there exists a $\varkappa_1(G)$-cut set S of G such that $e \in S$. Obviously, the graph $G - S$ has precisely two components, say G_1 and G_2, and $E(G_1) \cap S = \emptyset = E(G_2) \cap S$. We denote by H the graph $G - U_0$. It is easy to see that $E(H) \cap R = \emptyset$. Next, we denote $V_{11} = U_0 \cap V(G_1)$, $V_{12} = U_0 \cap V(G_2)$, $V_{21} = V(H) \cap V(G_1)$, and $V_{22} = V(H) \cap V(G_2)$. Finally, we denote by

$$E_1, \ldots, E_5, \text{ and } E_6$$

the set of all $e \in R \cup S$ with the property that e is incident

$$\text{with } V_{11} \text{ and } V_{21},$$

$$\text{with } V_{12} \text{ and } V_{22},$$

$$\text{with } V_{11} \text{ and } V_{12},$$

$$\text{with } V_{21} \text{ and } V_{22},$$

$$\text{with } V_{11} \text{ and } V_{22},$$

and

$$\text{with } V_{12} \text{ and } V_{21},$$

respectively.

It is clear the sets $E_1, \ldots, E_5, E_6$ are mutually disjoint, $R = E_1 \cup E_2 \cup E_5 \cup E_6$ and $S = E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6$. Since $E(F) \cap S \neq \emptyset$, we have $V_{11} \neq \emptyset \neq V_{12}$. Since $V(H) \neq \emptyset$, we have that either $V_{21} \neq \emptyset$ or $V_{22} \neq \emptyset$. Without loss of generality we assume that $V_{21} \neq \emptyset$. We distinguish two subcases:

(1) $V_{22} = \emptyset$. Then $E_2 = E_4 = E_5 = \emptyset$. Therefore $S = E_3 \cup E_6$. This implies that $h_G(V_{12}) \leqq \varkappa_1(G) \leqq h_G(U)$, which is a contradiction.

(2) $V_{22} \neq \emptyset$. Then both $E_1 \cup E_4 \cup E_6$ and $E_2 \cup E_4 \cup E_5$ are cut sets of G. Therefore, $|E_1 \cup E_4 \cup E_6| \geqq \varkappa_1(G)$ and $|E_2 \cup E_4 \cup E_5| \geqq \varkappa_1(G)$. Clearly, $E_1 \cup E_3 \cup E_5$ and $E_2 \cup E_3 \cup E_6$ are also cut sets of G. Since $h_G(V_{11}) > h_G(U)$ and $h_G(V_{12}) > h_G(U)$, we have $|E_1 \cup E_3 \cup E_5| > h_G(U)$ and $|E_2 \cup E_3 \cup E_6| > h_G(U)$. Thus $2|R| + 2|S| = 2\, h_G(U) + 2\, \varkappa_1(G) < |E_1 \cup E_3 \cup E_5| + |E_2 \cup E_3 \cup E_6| + |E_1 \cup E_4 \cup E_6| + |E_2 \cup E_4 \cup E_5| \leqq 2|R| + 2|S|$, which is a contradiction.

Hence the proof is complete.

Proofs of the following corollaries are omitted:

Corollary 1. *Let G be a nontrivial connected graph. Then $\varkappa_1(G) \leqq \delta(G) \leqq \max(f_G, \varkappa_1(G))$.*

Corollary 2. *Let G be a nontrivial connected graph, and let U be a nonempty subset of $V(G)$. If $f_G(U) \leqq h_G(U)$, then $\deg_G U = h_G(U)$.*

Corollary 3. *Let G be a nontrivial connected graph, and let n be a positive integer such that $n \geqq \varkappa_1(G)$. Then there exists a vertex u of G such that $\deg_G u = n$ if and only if there exists a nonempty subset U of $V(G)$ such that $f_G(U) \leqq h_G(U) = n$.*

Corollary 4. *Let G be a nontrivial connected graph. Then $\delta(G) = \varkappa_1(G)$ if and only if there exists a nonempty subset U of $V(G)$ such that $f_G(U) \leqq h_G(U) = \varkappa_1(G)$.*

Corollary 5. (D. R. Lick [3]). *Let G be a nontrivial connected graph such that for each $e \in E(G)$, $\varkappa_1(G - e) = \varkappa_1(G) - 1$. Then $\delta(G) = \varkappa_1(G)$.*

Note that an upper bound for the minimum degree of a graph different from the upper bound in Corollary 1 was obtained by the author in [4].

Added in proof. The graphs G fulfilling the assumption of Corollary 5 were also studied by W. MADER (Minimale n-fach kantenzusammenhängende Graphen. Math. Ann. *191* (1971), 21—28).

References

[1] *M. Behzad, G. Chartrand:* Introduction to the Theory of Graphs. Allyn and Bacon, Inc., Boston 1971.

[2] *R. Halin:* A theorem on n-connected graphs. J. Combinatorial Theory *7* (1969), 150—154.

[3] *D. R. Lick:* Minimally n-line connected graphs. J. reine angew. Math. *252* (1972), 178—182.

[4] *L. Nebeský:* An upper bound for the minimum degree of a graph (submitted to publication).

Author's address 116 38 Praha 1, nám. Krasnoarmějců 2 (Filosofická fakulta Karlovy university).

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

JIŘÍ CERHA, Praha: *On some linear Volterra delay equations.* (Lineární Volterrovy rovnice se zpožděním.)

Vyšetřuje se existence řešení Volterrových rovnic se zpožděním, např. $x(t) = a(t) + \int_0^t B(t, s)\, x(\mu(s))\, ds$, $0 \leqq t \leqq 1$, kde $\mu(t) \leqq t$, $\max(|B(t, s)|, |B(\mu(t), s)|) \leqq g(t)\, h(s)$, $g \in \mathscr{L}^p$, $h \in \mathscr{L}^q$, $1 \leqq p \leqq \infty$, $1/p + 1/q = 1$, a spojitá závislost řešení x na parametrech úlohy.

BAHMAN MEHRI, Teheran: *On the conditions for the oscillation of solutions of non-linear third order differential equations.* (Podmínky pro oscilatoričnost řešení nelineární diferenciální rovnice třetího řádu.)

V článku je studován problém oscilatoričnosti řešení diferenciální rovnice $x''' + f(t, x) = 0$. Předpokládá se, že funkce $f(t, x)$ lokálně splňuje Carathéodoryho podmínky v $0 \leqq t < \infty$, $|x| < \infty$, $x f(t, x) \geqq 0$ a $|f(t, x_1)| \leqq |f(t, x_2)|$ jestliže $|x_1| \leqq |x_2|$, $x_1 x_2 \geqq 0$.

JAROSLAV BARTÁK, Praha: *The Lyapunov stability of the Timoshenko type equation.* (Ljapunovova stabilita řešení rovnice Timošenkova typu.)

V článku jsou odvozeny postačující podmínky globální exponenciální stability a stability řešení rovnice Timošenkova typu $u''''(t) + au'''(t) + (b_1 A^{1/2} + b_2 I)\, u''(t) + (c_1 A^{1/2} + c_2 I)\, u'(t) + (d_1 A + d_2 A^{1/2} + d_3 I)\, u(t) = 0$ v Hilbertově prostoru se samoadjungovaným, striktně pozitivním operátorem A. Odvozené výsledky jsou aplikovány na rovnici $\varepsilon_1 \varepsilon_2 u_{tttt}(t, x) + a\varepsilon_1 \varepsilon_2 u_{ttt}(t, x) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, u_{ttxx}(t, x) + (1 + c\varepsilon_1 \varepsilon_2)\, u_{tt}(t, x) - a\varepsilon_2 u_{txx}(t, x) + au_t(t, x) + u_{xxxx}(t, x) - c\varepsilon_2 u_{xx}(t, x) + cu(t, x) = 0$.

ZDENĚK JANKOVSKÝ, Praha: *$\mathscr{M}$-Bewegungen mit den (U)-Automorphismen.* ($\mathscr{M}$-pohyby s (U)-automorfismy.)

V článku je zaveden pojem Möbiova pohybu ($\mathscr{M}$-pohybu) v Möbiově rovině ($\mathscr{M}$-rovině), pojímané jako komplexní varieta. To umožňuje vhodné representace, ukazující na souvislosti s funkcemi komplexní proměnné a jejich aplikacemi. $\mathscr{M}$-pohyb je vybudován na 6-parametrické grupě přímých lineárních lomených transformací rozšířené Gaussovy roviny, kterou lze lineárně reprezentovat grupou $SL(2, K)$, a to analogicky ke kongruenčnímu pohybu vybudovanému na kongruenční (obyčejné pohybové) grupě. V práci se zavádí $\mathscr{M}$-pohyb s (U)-automorfismem jako $\mathscr{M}$-pohyb, který reprodukuje daný bodový útvar (U) v $\mathscr{M}$-rovině. Jsou zkoumány základní typy $\mathscr{M}$-pohybů s (U)-automorfismem, jejich vzájemné souvislosti a vlastnosti a jsou uvedeny kanonické repezentace těchto pohybů.

Jan Stanisław Lipiński, Gdańsk: *On transfinite sequences of mappings.* (O transfinitných postupnostiach funkcií.)

V práci sa autor zaoberá zo všeobecného hľadiska otázkou, kedy je systém funkcií uzavretý vzhľadom na limitný prechod, pričom sa uvažujú limity transfinitných postupností typu Ω (Ω-prvé nespočitateľné ordinálne číslo). Uvažujú sa dva typy uzavretosti. Tzv. striktná uzavretosť, pri ktorej sú konvergentné postupnosti funkcií počnúc istým členom stacionárne a uzavretosť vo zvyčajnom zmysle, t. j. uzavretosť, pri ktorej limitná funkcia patrí opäť do skúmaného systému funkcií. Za použitia pojmu determinujúcej množiny sa uvádza nutná a postačujúca podmienka pre striktnú uzavretosť systému funkcií. Za predpokladu, že definičný obor funkcií skúmaného systému $\mathscr{F}$ je mohutnosti $\aleph_1$ sa uvádza nutná a postačujúca podmienka k uzavretosti $\mathscr{F}$. Ďalším pojmom, ktorý je analyzovaný v práci je pojem hustoty systému funkcií $\mathscr{F}$ v systéme funkcií $\mathscr{G}$ (Systém $\mathscr{F}$ je hustý v $\mathscr{G}$ ak každá funkcia z $\mathscr{G}$ sa dá vyjadriť ako limita transfinitnej postupnosti typu Ω funkcií z $\mathscr{F}$). Uvádza sa tu nutná podmienka k hustote $\mathscr{F}$ v $\mathscr{G}$, ktorá za predpokladu, že definičný obor funkcií systémov $\mathscr{F}$ a $\mathscr{G}$ je mohutnosti $\aleph_1$ je aj postačujúcou.

Jaroslav Pelant, Praha: *Relations between generalized solutions of ordinary differential equations.* (Vztahy mezi zobecněnými řešeními obyčejných diferenciálních rovnic.)

V tomto článku je Viktorovského definice řešení obyčejných diferenciálních rovnic s nespojitou pravou stranou v prostoru konečné dimense nahrazena ekvivalentní definicí ve tvaru diferenciální inkluse. Dále je uveden vztah této nové definice a definice Filippova.

Vlastimil Pták, Praha: *A modification of Newton's method.* (Modifikace Newtonovy metody.)

Autor v článku aplikuje metodu nediskrétní matematické indukce založené na indukční větě (viz články V. Pták, *A theorem of the closed graph type,* Manuscripta Math. *13* (1974), 109—130 a V. Pták, *Nondiscrete mathematical induction and iterative existence proofs,* v tisku v Lin. Algebra and its Appl.) k důkazu a k mírnému zlepšení existenční věty pro řešení nelineární rovnice.

Ivan Chajda, Přerov: *A construction of tolerances on modular lattices.* (Konstrukce tolerancí v modulárních svazech.)

V článku jsou studovány kompatibilní tolerance definované pomocí ideálů v modulárních svazech. Jsou dokázány věty o existenci a konstrukci kompatibilních tolerancí, které nejsou kongruencemi. Článek obsahuje také formulaci otevřeného problému o tzv. konstruovatelných tolerancích na svazech.

Ladislav Nebeský, Praha: *On the minimum degree and edge-connectivity of a graph.* (O minimálním stupni a hranové souvislosti grafu.)

Nechť G je netriviální souvislý graf a nechť U je neprázdná podmnožina množiny všech uzlů grafu G. Hlavním výsledkem této poznámky je horní odhad pro min $\{\deg_G u;\ u \in U\}$, kde $\deg_G u$ značí stupeň uzlu u v grafu G.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

RŮZNÉ

PŘÍKLAD K JEDNOMU OBRÁCENÍ GREENOVY VĚTY

JOSEF KRÁL, Praha

(Došlo dne 11. července 1975)

Buď $K = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ a předpokládejme, že P, Q jsou borelovsky měřitelné funkce na K takové, že funkce $x \mapsto P(x, y)$ je integrovatelná na $\langle 0, 1 \rangle$ pro každé $y \in \langle 0, 1 \rangle$ a funkce $y \mapsto Q(x, y)$ je integrovatelná na $\langle 0, 1 \rangle$ pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Pak lze definovat funkci F dvojrozměrného intervalu $I \subset K$ předpisem

$$F(I) = \int_{\partial I} P \, dx + Q \, dy ,$$

kde ∂I značí kladně orientovanou hranici obdélníka I. Je patrno, že F je aditivní funkcí intervalu. Vyšetřování absolutní spojitosti funkce F (vzhledem k dvojrozměrné Lebesgueově míře) je věnován článek [1]. Ve větě 1 tohoto článku se mj. tvrdí, že z absolutní spojitosti funkce F plyne, že funkce P, Q splňují následující podmínky:

1) Funkce

$$y \mapsto P(x, y) \tag{1}$$

je absolutně spojitá na $\langle 0, 1 \rangle$ pro skoro všechna $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

2) Funkce

$$x \mapsto Q(x, y) \tag{2}$$

je absolutně spojitá na $\langle 0, 1 \rangle$ pro skoro všechna $y \in \langle 0, 1 \rangle$.

Toto tvrzení neplatí, jak ukazuje následující jednoduchý

Příklad. Zvolme libovolnou omezenou borelovsky měřitelnou funkci f na $\langle -1, 1 \rangle$ a definujme

$$P(x, y) = f(x - y) , \quad Q(x, y) = -f(x - y) , \quad 0 \leqq x, y \leqq 1 . \tag{3}$$

Potom pro $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \subset K$ platí

$$F(I) = \int_{\partial I} P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y = \int_a^b f(x - c) \, \mathrm{d}x - \int_c^d f(b - y) \, \mathrm{d}y - \int_a^b f(x - d) \, \mathrm{d}x + \\ + \int_c^d f(a - y) \, \mathrm{d}y = 0 ,$$

takže $F \equiv 0$. Zvolíme-li funkci f navíc tak, aby nebyla absolutně spojitá na žádném nedegenerovaném intervalu obsaženém v $\langle -1, 1 \rangle$, pak při definici (3) není splněna žádná z podmínek 1), 2); dokonce pak funkce (1) není absolutně spojitá pro žádné $x \in \langle 0, 1 \rangle$ a funkce (2) není absolutně spojitá pro žádné $y \in \langle 0, 1 \rangle$.

Různé postačující podmínky pro absolutní spojitost funkce F lze najít v literatuře, jež je uvedena v komentáři k § 8 skript [2] otištěném na str. 329–331 v [3].

Literatura

[1] *С. В. Горленко:* Обращение теоремы Грина-Стокса, сб. Метрические вопросы теории функций и отображений, издат. „Наукова Думка“, Киев 1973, стр. 61–68.

[2] *J. Král:* Teorie potenciálu I, Státní pedagogické nakladatelství Praha 1965.

[3] *J. Král, I. Netuka, J. Veselý:* Teorie potenciálu II, Státní pedagog. nakl. Praha 1972.

Adresa autora: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

RECENSE

Rainer Alletsee, Gerd F. Umhauer: ASSEMBLER I–III (Ein Lernprogramm). Mit einem Geleitwort von Prof. Dr.-Ing. E.h. Konrad Zuse, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1974; celkem 480 stran, cena celkem 54,40 DM.

Oba autoři působí jako lektoři u firmy SIEMENS v Mnichově ve škole pro zpracování dat a jejich dílo jednak vychází z jejich zkušeností získaných při výuce programování v assembleru, jednak je určitě psáno se záměrem vytvořit učební text pro kursy programování počítačů SIEMENS. Pokusili se vytvořit takový učební program, v němž by abstraktní definice assembleru byly podány srozumitelně i čtenáři, který není zvyklý přesnému algoritmickému myšlení. Proto jsou formální pravidla assembleru při úplném zachování jejich exaktnosti vysvětlena po částech a tak, aby čtenářovi bylo zřejmé, proč nelze zůstat u jednoduché verze pravidla.

Obsah všech tří knížeček zahrnuje téměř úplný výklad assembleru, který má velmi blízko k systému SIEMENS 4004 a k IBM 360/370 a je rozvržen tak, aby ho bylo možno použít ve čtrnáctidenním kursu programování.

V prvém díle jsou velmi podrobně vysvětleny základní fakta a souvislosti, které jsou nezbytné pro každý program v assembleru: definice konstant a polí, přenosy uvnitř operační paměti, úvodní a závěrečný příkaz, nejdůležitější makroinstrukce pro vstup a výstup dat, příkazy srovnání a skoku. Dále je důkladně vysvětlen způsob zápisu programu do formuláře a jsou podány nezbytné informace o zpracování programu v assembleru až do fáze spuštění: překlad, sestavení a jsou vysvětleny pojmy jako modul, dump, ladění atd.

Ve druhém díle je soubor popsaných příkazů rozšířen tak, aby pomocí něho bylo možno napsat užitečný program: je vysvětlen princip relativního adresování včetně příkazů a jiných atributů, které ho umožňují, jsou zavedeny další makroinstrukce pro vstup a výstup dat, je rozšířen, resp. podrobněji popsán soubor příkazů pro srovnání, přesuny, skoky a jsou vysvětleny příkazy dekadické aritmetiky. Tyto nové pojmy jsou ilustrovány obsáhle na programu pro výpočet mezí.

Třetí, závěrečný, díl obsahuje popisy zbývajících částí assembleru: binární aritmetiku v registrech, počítání s adresami a popis příkazů EDIT, TRANSLATE. Na závěr je stručně popsána segmentace rozsáhlých programů a význam modulárního uspořádání programů.

Z tohoto strohého popisu se může zdát, že v těchto třech knížkách lze nalézt to, co v každé učebnici nebo příručce o assembleru. Určitě je pravda, že tam je všechno, co se má student — začátečník o assembleru dovědět. Každý, kdo přišel s nějakým assemblerem do styku a prošel nějakým kursem programování v tomto typu jazyků, získal jistě dojem, že se nejedná o obzvláště poutavé čtení a učení. Této nepříjemné skutečnosti si byli zřejmě vědomi i autoři a pokusili se látku oživit a udržet zájem žáka nebo čtenáře tak, aby mu neuniklo nic z jejich výkladu i když žák není dobrovolně nakloněn trvalému vypjatému soustředění. Proto je výklad stále přerušován otázkami, které pouze navazují na předchozí stať, ale odpověď na ně z výkladu nevyplývá — žák je nucen samostatně uvažovat a přemýšlet. Správná odpověď je samozřejmě uvedena na konci knihy a zdůvodnění správnosti je často obsahem navazujícího výkladu. Tento typ otázek, problémů udržuje stále živý kontakt mezi učitelem a žákem (mezi autorem a čtenářem) a přispívá k průběžné kontrole stupně pochopení vysvětlované látky u žáka. Pěkná grafická úprava knih text oživuje a zpřehledňuje.

Po didaktické stránce nelze autorům nic vytknout: vytvořili přesný a přitom čtivý text — učební program, který pro začátečníka je velmi vhodný. Není to však podle mého názoru učební text vhodný pro programátora, který už zná jiný assembler, protože by se mu zdál příliš rozvláčný.

Každý díl je doplněn přílohou, která obsahuje mj. popis příkazů až dosud vysvětlených a to v takovém tvaru, který je obvyklý ve všech programovacích příručkách. Vzhledem k této koncepci rozšiřování látky se v přílohách některé úseky zcela opakují nebo doplňují novými údaji. Považoval bych za vhodnější nerozdělovat látku do tří malých knížek, ale všechen učební text shrnout do jedné a přílohu s příručkou svázat do druhé knížky, protože by to při učení umožnilo pohodlněji příručku používat a zvláště proto, že student, který zvládne učební program, odloží učební text, ale příručku si ponechá a bude ji používat po celou svou programátorskou kariéru.

Kromě této jediné technické připomínky (jejíž realizace by navíc text zkrátila o 10%) lze recenzované dílo doporučit bezvýhradně všem, kteří se potřebují naučit programovat v assembleru a také všem lektorům v kursech tohoto programování.

J. Nadrchal, Praha

W. A. Wolovich: LINEAR MULTIVARIABLE SYSTEMS. Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin, 1974, 358 str., 28 obr., cena DM 23,30.

Matematická teorie systémů patří k nejmladším matematickým disciplinám a do studijních plánů vysokých škol proniká až v posledních letech. Přitom značná část výsledků zejména teorie lineárních vícerozměrných systémů má bezprostřední aplikace v technice analýzy a syntézy konkrétních regulovaných soustav. Vzniká tak přirozená potřeba seznámit s metodami této části matematické teorie systémů poměrně širokou třídu studentů vysokých škol technického zaměření. To však představuje dosti náročný úkol vybrat z mnoha existujících konkrétních algoritmů ty, které nejlépe ukazují podstatu této teorie a její význam pro aplikce, a současně po matematické stránce používají aparát přístupný studentům technických škol. Zdá se, že recenzovaná kniha, která vychází jako 11. svazek edice Applied Mathematical Sciences, se s tímto úkolem vyrovnala velmi úspěšně. Je zpracovaná nejen na základě vědecké práce autora, ale i na základě jeho zkušeností z přednášek o teorii lineárních vícerozměrných systémů. Cílem knihy je seznámit čtenáře s klasickým i moderním přístupem k řešení úloh teorie lineárních systémů a ukázat oblasti použitelnosti obou těchto přístupů.

Kniha je rozdělena do 8 kapitol. První dvě kapitoly představují úvodní část. Je zde zaveden základní aparát lineární algebry, využívaný pak bohatě v celé knize. Další tři kapitoly obsahují popis metod analýzy lineárních autonomních vícerozměrných diferenciálních dynamických systémů. Ve třetí kapitole se čtenář seznámí s metodami syntézy lineárního systému ve stavovém prostoru. Podrobně jsou zde popsány metody stavové representace lineárního regulovaného systému a základní kriteria jeho ovladatelnosti a pozorovatelnosti. Analogické problémy jsou řešeny ve čtvrté kapitole frekvenčními metodami. Zde je dokázána kromě jiného věta o minimální realisaci dané matice přenosů pomocí lineárního autonomního systému. Metody representace lineárního autonomního dynamického systému pomocí diferenciálních operátorů jsou popsány v páté kapitole. Zde se rovněž srovnává efektivnost a oblast použitelnosti metody stavového prostoru, frekvenční metody a metody diferenciálních operátorů jak při řešení úloh ovladatelnosti a pozorovatelnosti systému tak i při minimální realisaci matice přenosů. V posledních třech kapitolách knihy se ukazuje, jak lze využít metod analýzy, popsaných v předchozích kapitolách, k řešení problému syntézy, zejména k návrhu alternativních regulačních a kompenzačních vazeb. Metody stavového prostoru jsou popsány v šesté kapitole. Řeší se zde zejména syntéza optimálního regulátoru. Sedmá kapitola obsahuje popis kompenzačních metod ve frekvenční oblasti. Matematický aparát analýzy a syntézy lineárních autonomních diferenciálních dynamických systémů vytvořený v předchozích kapitolách se v poslední, osmé kapitole rozšiřuje přirozeným způsobem na analýzu a syntézu lineárních neautonomních diferenciálních systémů. Kromě jiného se zde uvádí algoritmus minimální realisace matice přenosů pomocí lineárního neautonomního systému.

Kniha obsahuje řadu podrobně řešených příkladů, na kterých se ilustrují jednak zaváděné pojmy, ale zejména popisované algoritmy. Navíc je v ní téměř 200 úloh, určených jako cvičení pro čtenáře. Kniha se čte poměrně snadno a lze ji doporučit každému, kdo se chce seznámit s metodami analýzy a syntézy lineárních vícerozměrných regulovaných soustav.

Jozef Nagy, Praha

L. Frank a kol.: MATEMATIKA. (Technický průvodce, svazek 1.) Česká matice technická, ročník LXXVIII (1973), vyd. SNTL, Praha 1973. 752 stran, 221 obr. Cena váz. výtisku Kčs 51,—.

V edici České matice technické vyšel jako 1. svazek Technického průvodce přehled matematiky ve zpracování čtrnáctičlenného kolektivu autorů pod vedením doc. RNDr. Ludvíka Franka. Jak je patrno z určení knihy, má být stručným přehledem matematického aparátu, pojmů i metod, kterých užívá technik pro řešení svých problémů; vzhledem k omezenému rozsahu by se snadno mohla stát pouhou sbírkou vzorců. Tento problém však autoři velmi dobře vyřešili tím, že sáhli spíše k formě učebnice, kde jednotlivé partie přístupně vyložené jsou doplněny řadou vzorově řešených příkladů.

Obsah knihy je rozdělen do 22 kapitol, z nichž první poskytuje přehled o elementární aritmetice a algebře (se základy nauky o maticích, determinantech a řešení soustav lineárních rovnic), druhá podává přehled elementárních funkcí (včetně rovinné a sférické trigonometrie) a třetí shrnuje základy analytické geometrie v rovině a v prostoru. 4. a 5. kapitola se zabývají diferenciálním a integrálním počtem funkcí jedné i více reálných proměnných, kapitola 6. nekonečnými řadami s konstantními členy i řadami funkcí jedné reálné proměnné. Základní pojmy z teorie funkcí komplexní proměnné obsahuje kapitola 7., diferenciální geometrii je věnována kapitola 8., vybraným rovinným křivkám pak kapitola 19. Přehled obyčejných diferenciálních rovnic a důležitých parciálních rovnic a metody jejich řešení obsahuje kapitola 9. Nejzákladnější pojmy variačního počtu jsou uvedeny v kapitole 10., integrální rovnice jsou předmětem kapitoly 11., kapitola 12. je věnována vektorovému a tenzorovému počtu. Další kapitola 13. se zabývá diferenčním počtem a k ní se řadí kapitoly o numerických a grafických metodách, tj. kapitola 17. (numerické početní metody) a 18. (nomografie). Kapitoly 14., 15. a 16. jsou věnovány počtu pravděpodobnosti, matematické statistice a vyrovnávacímu počtu. Dále kapitoly 20. a 21. se zabývají základy matematické logiky a základními pojmy teorie množin. Poslední kapitola 22. obsahuje stručný přehled vzorců pro jednoduché rovinné útvary a tělesa.

Kniha je psána srozumitelně a s dostatečnou přesností. Čtenáři umožňuje prohloubit jednotlivé kapitoly rozsáhlý seznam literatury připojený na konci knihy.

I když obsah Průvodce je vzhledem k omezenému rozsahu široký, stálo by za to při eventuelním dalším vydání uvažovat o tom, jak jej vhodně doplnit kapitolou, která by se zabývala základy teorie lineárních operátorů (pojmem operátoru, skalárního a energetického součinu, minimem kvadratického funkcionálu apod.), neboť ta v současné době hraje důležitou roli v aplikacích a její základy jsou zařazeny do přednášek z matematiky na vysokých školách technických. Přesto se kniha jistě stane již nyní dobrým průvodcem jak našich techniků, tak i studentů vysokých škol technického směru.

Marie Valešová, Praha

Laurent Schwartz: ANALYSE. Deuxième Partie: Topologie générale et analyse fonctionnelle. Hermann, Paříž 1970. Stran 436, cena 58 F.

Tuto knihu tvoří celkem tradiční úvodní partie obecné topologie a funkcionální analysy. Část se překrývá s druhou kapitolou autorova Cours d'analyse (Paříž 1967), který je znám též v ruském překladu. Ale i většinu ostatní látky lze přirozeně najít i v jiných standardních knihách. Nynější autorovo dílo může však být přístupné pracovníkům nejrůznějších oborů, (a právě pro ně zřejmě bylo napsáno), kteří se potřebují seznámit se základními pojmy funkcionální analysy, aby se mohli orientovat v této oblasti a významných aplikacích. Pro odborníka ovšem rozsah knihy není postačující, jak je patrno již z toho, že např. Lebesgueův integrál se zde vůbec neuplatňuje. Ale i takový čtenář může mít z knihy užitek. Za povšimnutí stojí třeba kapitola o Montelových prostorech. V kapitole o nekonečných součinech je obsaženo i základní poučení o Riemannově ζ-funkci. Pro Hilbertův prostor zbyla jenom kapitola poslední. V celé knize je možno najít mnoho pěkných příkladů. Na druhé straně však důkaz jedné z nejdůležitějších vět matematiky vůbec, věty Weierstrassovy-Stoneovy, je v této knize, která má být elementární učebnicí, nepotřebně složitý a neobjasňuje podstatu věci (bohužel, podobně tomu je i v ostatních knihách, ačkoli zcela prostý důkaz vyplývá z principu kontrakce a názorné topologické úvahy).

Jaroslav Zemánek, Praha

G. Pólya - G. Szegö: PROBLEMS AND THEOREMS IN ANALYSIS, vol. I, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1972, 73 obr., XIX + 389 str., cena 98,— DM.

První německé vydání tohoto díla vyšlo v r. 1924 a dočkalo se u Springerova nakladatelství reedicí v letech 1954 a 1964; čtvrté vydání „Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I" vyšlo v serii „Heidelberger Taschenbücher" jako svazek 73 v r. 1970. Poznamenejme, že oba díly vyšly dvakrát též v ruském překladu. Jde o známou knihu, která měla hluboký vliv na rozvoj matematické analýzy a jejíž základní koncepce — vést čtenáře aktivním řešením vhodně kladených úloh ke zvládnutí jisté disciplíny a k samostatným objevům — nachází stále následovníky v rozličných odvětvích matematiky. Recense německého vydání z r. 1964 z péra Doc. A. Kufnera byla publikována v časopise Aplikace matematiky sv. *11* (1966), č. 2, 154—155, a není tedy jistě třeba, abychom se zde zabývali podrobným rozborem obsahu díla. Je ovšem nutno zdůraznit, že nejde o pouhý překlad prvního dílu německého vydání do angličtiny. Svazek zahrnuje části „Řady a posloupnosti", „Integrace" a „Funkce komplexní proměnné. Obecná část". Původní materiál byl přepracován a doplněn novými úlohami. V první části je zařazen nový paragraf „Rozklady množin, cykly v permutacích", v druhé části paragrafy „Některé aplikace nerovností" a „Minimax a maximin". Jak zdůrazňují autoři, změny se vztahují na méně než 10 procent textu, jehož charakter byl zachován. Anglické vydání druhého dílu bude čtenáři rovněž bezpochyby uvítáno.

Josef Král, Praha

Klaus Deimling: NICHTLINEARE GLEICHUNGEN UND ABBILDUNGSGRADE. (Nelineární rovnice a indexy zobrazení.) Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1974 v serii Hochschultexte, VIII + 131 stran, cena DM 16,80.

V serii Hochschultexte vychází užitečná úvodní přednáška o nelineárních rovnicích a stupních zobrazení. Hlavním cílem je popsat pokud možno elementárním způsobem cestu, kterou je možno zobecnit do nekonečně dimensionálních prostorů výsledky, související s větou o residuích. Integrál

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{z - z_0}$$

po křivce C udává (samozřejmě při splnění jistých předpokladů), kolikrát křivka C „ovíjí" bod z_0. Podobně

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

uvádá počet (i s násobností) kořenů rovnice $f(z) = 0$ uvnitř oblasti uzavřené křivkou C. Autor si klade úkol popsat přirozená zobecnění těchto výsledků na prostory vyšších dimensí a uvést jejich užitečné aplikace. Cesta, kterou volí, je zcela jednoznačně poznamenána snahou vyhnouti se sice elegantním, ale náročným metodám a pojmům algebraické topologie, které, jak praví, „für viele Analytiker von sekundärer Bedeutung sind"; přednáška se tím stává přístupnější těm, kteří dávají přednost metodám klasické analysy i za cenu, že samotné vyslovení definice stupně zobrazení si vyžádá trochu tvrdé práce. Definice indexu se nejprve vysloví pro hladká zobrazení, dokáže se — ne vždy snadno — stabilita indexu při malých změnách daného zobrazení, což umožní podat definici v celé obecnosti. Četba knížky vyžaduje samozřejmě dobré znalosti ze základů funcionální analysy a ovšem jistý stupeň matematické zralosti. Základní potřebné vědomosti jsou shrnuty v první úvodní kapitole, která obsahuje základní pojmy nelineární funkcionální analysy. Druhá kapitola obsahuje definici indexu pro R_n. Jako aplikace jsou uvedeny Brouwerova věta o pevném bodu, věta o existenci nezáporných vlastních čísel a nezáporných vlastních vektorů pro nezáporné matice i věta o česání ježka. Použití pojmu indexu je k důkazu existence řešení rovnic vysvětleno ve zbytku kapitoly. Nejcennějším prostředkem k výpočtu indexu je samozřejmě jeho homotopická invariance.

Ve třetí kapitole se studuje Lerayův-Schauderův index v nekonečně dimensionálních prostorech pro kompaktní perturbace identity, to jest pro operátory tvaru $I + T$, kde T je kompaktní operátor. Definice indexu je pak umožněna existencí konečně-dimensionální aproximace operátoru T. Jsou vysvětleny principy aplikací v teorii rovnic i ve spektrální teorii. Věty o pevném bodě tvoří předmět dalšího odstavce; je zařazena i krátká zmínka o zobecnění na některé nemetrisovatelné prostory. Poslední kapitola je věnována nedávným vyšetřováním tzv. P-kompaktních operátorů. Kniha obsahuje na 120 stranách velké množství materiálu. Její četba není snadná, důkazy jsou stručné, ale srozumitelné. Jako úvodní text může být užitečná studentům matematiky v prostředních semestrech i oněm pracovníkům v aplikacích, kteří se nezaleknou ne právě snadné práce s abstraktními pojmy a výsledky. Přestože kniha je tištěna ve strojopisu, působí velmi úpravným dojmem a je přehledným způsobem rozčleněna.

Vlastimil Pták, Praha

Felix Klein: DAS ERLANGER PROGRAMM. „Vergleichende Betrachgungen über neuere geometrische Vorschungen", Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 253, Leipzig 1974, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G.; cena 9,80 M.

Není snad matematika, a tím spíše ne geometra, který by neznal základní myšlenky proslulého Kleinova „Erlangenského programu", nástupní programové přednášky, kterou podle tamnějších zvyklostí proslovil před profesorským sborem (senátem) v r. 1872 při jmenování universitním profesorem na filosofické fakultě university v Erlangen (ve svých 23 letech!). Původní název „Srovnávací úvahy o novějších geometrických bádáních" zachytil velmi přesně a neobyčejně výstižně skutečné vlastní zaměření přednášky, která s mimořádnou jasností a formulací ještě dnes stále živou rozvinula myšlenky, jež umožnily spojit tehdy zdánlivě zcela roztříštěné prakticky samostatně se rozvíjející nejrůznější pracovní směry v geometrii jednotícím principem, a to grupovým hlediskem, které se tak stalo podkladem klasifikací geometrií.

Útlý 84 stránkový svazeček uvádí H. Wußing, který nadto ještě připojil jednak krátkou životopisnou poznámku o Felixi Kleinovi (1849—1925), jednak šířeji pojatou, velmi dobře a zasvěceně fundovanou úvahu „K historii vzniku Erlangenského programu" (str. 12—28), pořízenou podle autorovy vlastní přednášky na výročním zasedání Matematické společnosti NDR v Berlíně 1967.*)

Text Erlangenského programu v této publikaci (str. 29—73) odpovídá poslednímu Kleinem redigovanému textu uveřejněnému v Felix Klein: *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*,

*) K životopisným údajům v tomto historickém náčrtu je třeba u J. A. Schoutena připojit, že zemřel v r. 1971.

Bd. 1, Berlin 1921 (str. 460—497). F. Klein připojoval v nejrůznějších dobách k textu Erlangenského programu poznámky a komentáře. Všechny komentáře jsou pečlivě uvedeny přímo u příslušného textu, poznámky jsou pak souborně připojeny na závěr svazku (str. 74—84).

Pro dnešního geometra je Kleinovo grupové pojetí při klasifikaci geometrií samozřejmostí. S tím větším zájmem a zaujetím se začte do úvah původního Kleinova textu, v němž poprvé byl zachycen a vyzvednut význam transformačních grup, a který ve svých důsledcích znamenal význačný mezník ve vývoji geometrie 19. století.

Alois Urban, Praha

H. R. Jacobs: GEOMETRY. W. H. Freeman and Company, San Francisco 1974. Stran XII + 701. Cena 4.30 £.

Kniha je zcela elementárním úvodem do geometrie. Z větší části odpovídá úrovni naší 6.—9. třídy základní školy, jen některými výhledy zasahuje i do geometrie na našich školách 2. stupně. Výjimkou je poslední oddíl. Uveďme nadpisy kapitol: Povaha deduktivního myšlení. Základní představy — přímky a úhly. Některé postuláty a teorémy. Kongruentní trojúhelníky. Transformace. Nerovnosti. Rovnoběžné přímky. Čtyřúhelník. Obsah. Podobnost. Pravoúhlý trojúhelník. Kružnice. Věty o trojicích přímek se společným bodem (Cevova věta atp.). Pravidelné mnohoúhelníky a kružnice. Geometrická tělesa. Neeuklidovské geometrie.

Učebnici můžeme považovat za první předstupeň ke Coxeterově dílu *Introduction to Geometry*, New York—London 1961 (2. vyd. 1972, ruský překlad Moskva 1966). Je jim společný velmi živý výklad, pestrý obsah, množství odboček s historickými údaji anebo s uvedením souvislostí, ohromná snaha po názornosti. V knize asi není stránka bez obrázku, naopak je v ní mnoho míst, na nichž ilustrace a žertovné kresby text téměř vytlačují. Kniha hýří vtipnými nápady a nepřekvapilo by, kdyby její četba byla pro žáčky spíše hrou než učením. Příležitosti k ukázkám geometrických tvarů v lidské činnosti anebo v přírodě jsou využity do krajnosti. Snaha po živosti je možná až přemrštěná, ale teprve při prohlédnutí takového extrému si zřetelně uvědomíme suchopárnost našich geometrických učebnic a příruček.

Graficky je kniha vypravena perfektně.

Zbyněk Nádeník, Praha

Frank W. Anderson - Kent R. Fuller: RINGS AND CATEGORIES OF MODULES. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 13. Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin, 1974. Stran VIII + 339, cena DM 36,30.

Kniha je moderně psanou učebnicí obecné teorie okruhů a modulů. Díky kategoriálnímu hledisku vhodně uplatňovanému v průběhu celého výkladu poskytuje čtenáři dobrý přehled o vztazích mezi strukturou kategorie modulů nad daným okruhem a strukturou tohoto okruhu samého i po velké části obecných výsledků dosažených v teorii okruhů a modulů (nezabývá se např. teorií homologie nebo teorií komutativních okruhů). Od čtenáře nevyžaduje žádných speciálních znalostí kromě zcela základních algebraických pojmů.

V úvodu jsou podány stručné základní informace o třídách, množinách a zobrazeních (axiom výběru, Zornovo lemma), o uspořádaných množinách a svazech a je tu zaveden pojem kategorie, funktoru a přirozené transformace mezi funktory. Tedy jen zcela základní informace o kategoriích; ovšem v dalším textu má pak čtenář dostatek příležitosti se s pojmy a především s použitím teorie kategorií seznámit blíže.

To se děje už v 1. kapitole. Její text vychází ze základních definic a vlastností okruhů, modulů a homomorfismů mezi okruhy a moduly, seznamuje čtenáře s kategoriemi (levých, pravých, oboustranných) modulů a některými jejich přirozenými podkategoriemi.

Kategoriální hledisko je pak už výrazněji uplatněno ve 2. kapitole věnované direktním součtům a součinům, pojmu modulu generovaného resp. kogenerovaného danou třídou modulů a pojmu generátoru a kogenerátoru.

3. a 4. kapitola se obracejí ke speciálním třídám modulů. V 3. kapitole je vyšetřována struktura polojednoduchých, konečně generovaných a konečně kogenerovaných modulů, struktura modulů, jejichž svaz podmodulů splňuje podmínky konečnosti řetězců a dále direktní rozklady modulů na direktně nerozložitelné faktory. Kratší 4. kapitola se zabývá okruhy; obsahuje Weddeburnovu-Artinovu větu o charakterisaci polojednoduchých okruhů, Jacobsonův radikál, lokální a artinovské okruhy.

V 5. a 6. kapitole se autoři opět obracejí k obecným otázkám, ke studiu aditivních funktorů mezi kategoriemi modulů, funktorů Hom a tensorových funktorů. Toto studium vede přirozeným způsobem k vyšetřování projektivních, injektivních a plochých modulů. Obecné úvahy vrcholí 6. kapitolou věnovanou studiu duality a ekvivalence kategorií modulů.

Poslední 7. kapitola se vrací k dalšímu vyšetřování projektivních a injektivních modulů a jejich direktním rozkladům (je tu např. uvedena charakterisace noetherovských okruhů pomocí injektivních modulů).

Ke každému odstavci všech sedmi kapitol je připojena řada cvičení, která značně obohacují základní text. Kniha je podnětnou učebnicí teorie okruhů a modulů a důkladně informuje čtenáře o současném stavu této teorie i o metodách v ní používaných. *Václav Vilhelm,* Praha

David J. Winter: THE STRUCTURE OF FIELDS. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 16. Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin, 1974. Stran XII + 205, cena DM 33,30.

„Teorie těles je jedním z nejstarších a nejkrásnějších témat algebry", píše autor na začátku předmluvy. Lze říci, že jeho kniha nic z tohoto půvabu teorie těles neztrácí; je to promyšleně a zajímavě psaná učebnice, která na nevelkém stránkovém rozsahu (vlastní text o teorii těles zaujímá jen něco přes 120 stran) seznamuje čtenáře s teorií těles od základních pojmů a výsledků klasické teorie až po současné metody studia této oblasti algebry.

Od čtenáře se předpokládá v podstatě jen znalost elementů lineární algebry. Další potřebné poznatky jsou vyloženy jednak v úvodní nulté kapitole, která je věnována zejména základním vlastnostem grup a jejíž text značně rozšiřují připojená cvičení (je jich skoro sto), jednak v šesti dodatcích na konci knihy (teorie množin, tensorové součiny, Wittovy vektory, algebry, koalgebry, bialgebry).

Vlastní text o teorii (komutativních) těles je rozdělen na šest kapitol; ke každé je připojena řada cvičení. První čtyři kapitoly jsou věnovány klasické teorii. 1. kapitola se zabývá základními vlastnostmi nadtělesa nad daným tělesem (algebraické nadtěleso, rozkladové těleso polynomu jedné nerčité nad tělesem a jeho použití ke zjištění struktury konečných těles, algebraický uzávěr tělesa, ryze transcendentní nadtěleso a jeho stupeň transcendence nad základním tělesem). V 2. kapitole se podrobněji vyšetřuje struktura algebraických nadtěles (separabilní a ryze neseparabilní algebraická nadtělesa, grupa automorfismů algebraického nadtělesa K nad základním tělesem k, normální a Galoisova nadtělesa).

Studium Galoisových nadtěles přivádí čtenáře ke klasické Galoisově teorii, jíž je věnována 3. kapitola. Zde je předně dokázána základní věta o Galoisově korespondenci mezi mezitělesy Galoisova tělesa K nad k a uzavřenými podgrupami grupy automorfismů tělesa K nad k a vyšetřovány speciální případy, kdy je tato grupa cyklická, Abelova nebo řešitelná; poslední případ vede pak ke studiu řešitelnosti algebraických rovnic radikály. 4. kapitola se zabývá strukturou konečně generovaných nadtěles nad základním tělesem k a jejich geometrickou interpretací jakožto těles algebraických funkcí afinních variet nad k.

Poslední dvě kapitoly pojednávají o moderních metodách zkoumání teorie těles a uvádějí tak čtenáře do současné problematiky teorie. Jejich obsahem je studium moderní Galoisovy teorie a studium struktury ryze neseparabilních nadtěles. *Václav Vilhelm,* Praha

A. H. Stroud: NUMERICAL QUADRATURE AND SOLUTION OF ORDINARY DIFFERENCIAL EQUATIONS. Applied Mathematical Sciences, Vol. 10. Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin 1974. 338 stran, 15 obrázků, cena DM 23,30.

Tato zajímavá kniha vynikajícího amerického odborníka nese podtitul „učebnice pro úvodní kurs numerické analýzy". Tomu odpovídá i obsah knihy. Jak říká autor v předmluvě, je materiál učebnice rozvržen na jeden semestr, po němž by v dalším semestru měly následovat numerické metody lineární a nelineární algebry. U studentů se předpokládá znalost základů diferenciálního a integrálního počtu a programování ve Fortranu.

První kapitola, *Základní informace*, je přehledem těch výsledků z různých oblastí matematiky, které se v dalším výkladu používají. Jejich rozsah je omezen na minimum (např. determinant se nedefinuje obecně, ale jen pro matice řádu 2 a 3). Tvrzení jsou většinou uvedena bez důkazů a v dalších kapitolách se na ně odkazuje.

Druhá kapitola se jmenuje *Interpolace*, a jak autor uvádí, je možno základní látku této kapitoly vyložit v jedné přednášce. Problematika interpolace je tu skutečně probrána stručně a převážně bez důkazů, ale včetně otázky konvergence interpolačního polynomu k interpolované funkci.

Třetí kapitola, *Kvadratura*, je věnována integračním vzorcům Newtonovým-Cotesovým, Gaussovým a Rombergovým. Formule všech tří typů jsou studovány velmi důkladně a s ohledem na praktické aspekty.

Konečně čtvrtá kapitola, *Počáteční úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice*, pojednává o metodě Taylorovy řady, metodách Rungových-Kuttových a explicitních i implicitních metodách vícekrokových. V závěru kapitoly se autor zabývá stabilitou vícekrokových metod. Řešení okrajových úloh se v knize nestuduje.

Celá kniha je psána především jako učebnice. Odpovídá tomu i členění kapitol, jejichž některé odstavce nejsou určeny k přednesení, ale jako vodítko pro další a hlubší studium. Stejný účel mají i odstavce nazvané „Doplňková četba". Některé odstavce knihy jsou provázeny problémy, určenými k řešení.

Na druhé straně najde jistě kniha uplatnění i jako příručka pro praktické počítání. Je k tomu bohatě vybavena řadou tabulek v textu i v přílohách. (Jsou to např. tabulky uzlů a koeficientů integračních vzorců, tabulky koeficientů Rungových-Kuttových a vícekrokových formulí, tabulky ortogonálních polynomů atd.) Dále obsahuje větší množství algoritmů ve formě programů v jazyce Fortran. (Bohužel, komentářové řádky v programech nejsou vždy vyznačeny písmenem C v první pozici na řádce, takže před případným naděrováním a použitím programu je třeba toto vyznačení doplnit.) Kromě toho je kniha oživena i životopisnými poznámkami pod čarou.

Práce vyšla jako desátý svazek řady Aplikované matematické vědy, jež je podle prohlášení vydavatelů věnována publikacím, které třeba nejsou formálně úplně dokonale zpracovány, ale jsou aktuální a nové, zejména z hlediska aplikací matematiky. Tomu odpovídá i volba pohotové tiskařské techniky: kniha je pořízena fotografickou cestou z předloh psaných strojem a je třeba zdůraznit, že kvalita strojopisu je vynikající.

Celá práce prozrazuje nejen autorovy znalosti a dobrý přehled v moderní literatuře z tohoto oboru (včetně sovětské), ale i velkou zkušenost s numerickým počítáním. Na řadě míst se čtenáři dostane cenných praktických rad, zejména v otázce volby metody.

Stroudova kniha je rozhodně přínosem pro numerickou matematiku, ať už najde své uplatnění jako učebnice, nebo jako praktická příručka pro numerické integrování a řešení počátečních úloh pro obyčejné diferenciální rovnice.

Karel Segeth, Praha

OZNÁMENIE

Katedra matematickej informatiky EF VŠT v Košiciach, Katedra numerickej matematiky MFF UK v Prahe, Jednota slovenských matematikov a fyzikov, odbočka Košice a SVTS — Dom techniky v Košiciach poriadajú konferenciu „*Aplikácia numerických metód a teórie grafov v technike*".

Konferencia sa bude konať 29. 9. až 1. 10. 1976 vo Vysokých Tatrách (hotel Bellevue).

Konferencia má za cieľ prezentovať najnovšie teoretické poznatky z numerických metód a teórie grafov, ale aj oboznámiť účastníkov s praktickými aplikáciami v technike.

Súčasťou konferencie bude aj seminár o niektorých problémoch technickej praxe.

Program konferencie, ako aj výška vložného bude včas oznámená Domom techniky SVTS v Košiciach.

Predbežné prihlášky zasielajte na adresu Katedra matematickej informatiky EF VŠT, Zbrojnícka 3, Košice.

Doc. RNDr. *Pavel Galajda*, CSc.
za prípravný výbor