Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

RŮZNÉ

O ČÍSELNOTEORETICKEJ FUNKCII $d(n)$

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 9. septembra 1974)

O počte $d(n)$ kladných deliteľov prirodzeného čísla $n > 1$ platí

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k + 1) \tag{1}$$

keď

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} \tag{2}$$

je kanonický rozklad čísla n (pozri napr. [1], str. 27[1])).

V tomto článku nás zaujíma, čo možno povedať o hodnote funkcie $d(n)$, ak kanonický rozklad čísla n nie je známy úplne.

V cvičení 1 na strane 158 diela [2] je uvedená veta: *Nech $n > 1$ je prirodzené číslo. Potom $d(n) < 2\sqrt{n}$.* Bez dôkazu uvedieme spresnenie tejto vety:

Nech $n > 1$ je prirodzené číslo. Ak je n štvorcom celého čísla, tak $d(n) \leqq 2\sqrt{(n)} - 1$, pričom rovnosť platí práve vtedy, keď $n = 4$ a v ostatných prípadoch $d(n) \leqq 2[\sqrt{n}]$, pričom rovnosť platí vtedy a len vtedy, keď $n = 2, 3, 6, 8, 12, 24$.

V ďalšom sa snažíme získať tesnejšie ohraničenie $d(n)$, než poskytuje táto veta.

Veta 1. *Nech $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$; je kanonický rozklad prirodzeného čísla n a nech $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$. Potom platí*

$$n^{\log 2/\alpha \log p_k} \leqq d(n) \leqq n^{\log 2/\log p_1} \tag{3}$$

pričom rovnosť platí práve vtedy, keď n je prvočíslo.

Dôkaz. Platí

$$n^{\log 2/\alpha \log p_k} = \prod_{i=1}^{k} (p_i^{\alpha_i})^{\log 2/\alpha \log p_k} \leqq p_k^{\alpha k \log 2/\alpha \log p_k} = 2^k \leqq \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1) = d(n)$$

[1]) Tu sa funkcia $d(n)$ označuje symbolom $\tau(n)$.

pričom rovnosť platí práve vtedy, keď $p_1 = p_2 = \ldots = p_k$, teda keď $k = 1$ a keď súčasne $\alpha = 1$, teda keď n je prvočíslo.

Ďalej platí

$$(4) \qquad n^{\log 2/\log p_1} = \prod_{i=1}^{k} (p_i^{\alpha_i})^{\log 2/\log p_1} \geqq \prod_{i=1}^{k} (p_i^{\alpha_i})^{\log 2/\log p_i} = \prod_{i=1}^{k} 2^{\alpha_i} \geqq \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1) = d(n)$$

lebo matematickou indukciou sa ľahko dokáže, že $2^\alpha \geqq \alpha + 1$, pričom rovnosť platí práve vtedy, keď $\alpha = 1$. Rovnosť v (4) platí zrejme tiež vtedy, keď $k = 1$, $\alpha = 1$, čiže keď n je prvočíslo.

Tým je veta dokázaná.

Veta 2. *Nech $n > 1$ je prirodzené číslo, ktoré nemá prvočíselného deliteľa menšieho než p_0.*

Potom

$$(5) \qquad d(n) \leqq n^{\log 2/\log p_0}$$

pričom rovnosť platí práve vtedy, keď n je prvočíslo, $p_0 = n$.

Dôkaz. Pretože $p_1 \geqq p_0$, vyplýva (5) z (3).

Poznámka. Ak je n zložené číslo, potom $p_k \leqq n/p_0$ a teda podľa (3) platí

$$d(n) \geqq n^{\log 2/\alpha \log(n/p_0)}.$$

Ak napr. $2, 3 \nmid n$, teda $p_0 = 5$, je podľa (5) $d(n) \leqq n^{\log 2/\log 5} < n^{0,44} < \sqrt{n}$. Ak je $p_0 = 101$, je $d(n) < n^{0,1502} < \sqrt[5]{n}$.

Literatúra

[1] *Vinogradov I. M.*: Osnovy teorii čisel, Moskva—Leningrad, 1952.

[2] *Sierpiński W.*: Elementary Theory of Numbers, Warszawa 1964.

Adresa autora: 801 00 Bratislava, Sibírska 3.