Werk

Label: Article

Jahr: 1976

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0101|log19

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ КУРЦВЕЙЛЯ-ЯСНОГО ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. Д. МИРЗОВ, Тбилиси

(Поступило в редакцию 19/II 1974 г.)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$(1)\qquad u_1' = a_1(t)\,|u_2|^{\lambda_1}\operatorname{sign} u_2\,,\quad u_2' = -a_2(t)\,|u_1|^{\lambda_2}\operatorname{sign} u_1\,,$$

где $\lambda_i > 0$, функции $a_i(t)$ $(i = 1, 2)$ абсолютно непрерывны на каждом конечном отрезке промежутка $[0, +\infty]$ и

$$(2)\qquad a_i(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \geqq 0 \quad (i = 1, 2)\,.$$

Решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1), заданное в промежутке $[t_*, t^*)$ называется непродолжаемым вправо, если $t^* = +\infty$, либо $t^* < +\infty$ и

$$\lim_{t\to t^*}(|u_1(t)| + |u_2(t)|) = +\infty\,.$$

Решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1) назовём правильным, если оно задано на некотором бесконечном промежутке $[t_*, +\infty)$ и

$$(3)\qquad \sup\{|u_1(\tau)| + |u_2(\tau)| : \tau \geqq t\} > 0 \quad \text{при любом} \quad t \in [t_*, +\infty)\,.$$

Правильное решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1) называется колеблющимся, если обе компоненты имеют последовательность нулей, сходящуюся к $+\infty$. Если же обе компоненты (хотя бы одна компонента) отличны от нуля для больших значений t то решение $(u_1(t), u_2(t))$ называется неколеблющимся (слабо неколеблющимся).

Необходимые и достаточные условия колеблемости всех правильных решений уравнений вида (1) содержатся в [4] и [6].

В настоящей заметке доказывается теорема о существовании хотя бы одного правильного колеблющегося решения системы (1), являющаяся аналогом теоремы Курцвейля-Ясного [1], [2], [3].

Теорема 1. *Любое нетривиальное непродолжаемое вправо решение системы* (1) *является правильным.*

Доказательство. Пусть $(u_1(t), u_2(t))$ некоторое нетривиальное непродолжаемое вправо решение системы (1), заданное в промежутке $[t_*, t^*)$. Тогда из (1) имеем

$$(4) \qquad \frac{a_1(t)}{\lambda_1 + 1} \mathrm{d}|u_2(t)|^{\lambda_1+1} + \frac{a_2(t)}{\lambda_2 + 1} \mathrm{d}|u_1(t)|^{\lambda_2+1} = 0 \quad \text{при} \quad t_* \leqq t < t^* .$$

Проинтегрировав равенство (4) от t_* до t и воспользовавшись формулой интегрирования по частям, получим

$$E(t) = E(t_*) + \int_{t^*}^{t} \left[\frac{a_1'(\tau)}{\lambda_1 + 1} |u_2(\tau)|^{\lambda_1+1} + \frac{a_2'(\tau)}{\lambda_2 + 1} |u_1(\tau)|^{\lambda_2+1}\right] \mathrm{d}\tau \quad \text{при} \quad t_* \leqq t < t^*,$$

где

$$E(t) = \frac{a_1(t)}{\lambda_1 + 1} |u_2(t)|^{\lambda_1+1} + \frac{a_2(t)}{\lambda_2 + 1} |u_1(t)|^{\lambda_2+1} .$$

Следовательно,

$$E(t) \leqq E(t_*) + \int_{t_*}^{t} \left(\frac{[a_1'(\tau)]_+}{a_1(\tau)} + \frac{[a_2'(\tau)]_+}{a_2(\tau)}\right) E(\tau)\, \mathrm{d}\tau \quad \text{при} \quad t_* \leqq t < t^* ,$$

где $[a_i'(t)]_+ = \max\{0, a_i'(t)\}$, $(i = 1, 2)$. В силу леммы Гронуолла-Беллмана, из последнего неравенства получим

$$(5) \qquad E(t) \leqq E(t_*) \exp\left\{\int_{t^*}^{t} \left(\frac{[a_1'(\tau)]_+}{a_1(\tau)} + \frac{[a_2'(\tau)]_+}{a_2(\tau)}\right) \mathrm{d}\tau\right\} \quad \text{при} \quad t_* \leqq t < t^* .$$

Если предположить, что $t^* < +\infty$ то из (5) будем иметь

$$\lim_{t \to t^*} (|u_1(t)| + |u_2(t)|) < +\infty .$$

Но это невозможно, поскольку $(u_1(t), u_2(t))$ непродолжаемое вправо решение системы (1). Тем самым мы доказали, что $t^* = +\infty$.

Для заверешения доказательства теоремы остается показать, что соблюдается условие (3). Допустим обратное. Тогда найдётся $t_0 \in [t_*, +\infty)$ что $u_i(t_0) = 0$ $(i = 1, 2)$ и $|u_1(t)| + |u_2(t)| \not\equiv 0$ при $t_* \leqq t \leqq t_0$. Ввиду (4), –

$$E(t) = -\int_{t}^{t_0} \left[\frac{a_1'(\tau)}{\lambda_1 + 1} |u_2(\tau)|^{\lambda_1+1} + \frac{a_2'(\tau)}{\lambda_2 + 1} |u_1(\tau)|^{\lambda_2+1}\right] \mathrm{d}\tau \leqq$$

$$\leqq \int_{t}^{t_0} \left(\frac{|a_1'(\tau)|}{a_1(\tau)} + \frac{|a_2'(\tau)|}{a_2(\tau)}\right) E(\tau)\, \mathrm{d}\tau \quad \text{при} \quad t_* \leqq t \leqq t_0 .$$

Применив снова лемму Гронуолла-Беллмана к последнему неравенству, получим

$$E(t) \leqq 0 \quad \text{при} \quad t_* \leqq t \leqq t_0 .$$

Следовательно, $u_i(t) \equiv 0$ при $t_* \leqq t \leqq t_0$ $(i = 1, 2)$. Полученное противоречие показывает, что наше допущение о том, что нарушается условие (3), неверно. Теорема доказана.

Замечание. Из (5) следует, что если для некоторого $i \in \{1, 2\}$ функция

$$\int_0^t \left(\frac{[a_1'(\tau)]_+}{a_1(\tau)} + \frac{[a_2'(\tau)]_+}{a_2(\tau)} \right) \mathrm{d}\tau - \ln a_i(t)$$

ограничена, то какое бы ни было решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1) компонента $|u_{3-i}(t)|$ ограничена в промежутке $[0, +\infty)$.

Ввиду (2), нетрудно убедиться, что справедлива

Лемма 1. *Любое слабо неколеблющееся решение системы* (1) *является неколеблющимся.*

Лемма 2. *Если для некоторого* $i \in \{1, 2\}$ $\int^{+\infty} a_i(\tau)\, \mathrm{d}\tau = +\infty$, *то любое неколеблющееся решение* $(u_1(t), (u_2(t))$ *системы* (1) *при достаточно больших* t *удовлетворяет нерабенству*

$$(-1)^{i-1}\, u_1(t)\, u_2(t) > 0 .$$

Доказательство. Для определённости будем считать, что $i = 1$. Если предположить, что $u_1(t)\, u_2(t) < 0$ при $t \geqq t_0$ где t_0-достаточно большое число, то из (1) получаем равенства

$$|u_1(t)|' = -a_1(t) |u_2(t)|^{\lambda_1}, \quad |u_2(t)|' = a_2(t)\, |u_1(t)|^{\lambda_2} \quad \text{при} \quad t \geqq t_0$$

из которых следует, что

$$|u_1(t)| \leqq |u_1(t_0)| - |u_2(t_0)|^{\lambda_1} \int_{t_0}^t a_1(\tau)\, \mathrm{d}\tau \quad \text{при} \quad t \geqq t_0 .$$

Но это невозможно, ввиду того, что $\int^{+\infty} a_1(t)\, \mathrm{d}t = +\infty$. Следовательно, $u_1(t)\, u_2(t) > 0$ при достаточно больших t. Лемма доказана.

Теорема 2. *Если* $\lambda_1 \lambda_2 \neq 1$ *и найдётся такое* $i \in \{1, 2\}$, *что* $\int^{+\infty} a_i(t)\, \mathrm{d}t = +\infty$ *и функция*

$$A_i(t) = \frac{a_{3-i}(t)}{a_i(t)} \left(\int_0^t a_i(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right)^{(\lambda_i + \lambda_{3-i} + 2)/(\lambda_i + 1)}$$

не убывает, то система (1) *обладает колеблющимся решением.*

Доказательство. Мы рассмотрим лишь случай, когда $i = 1$ ибо при $i = 2$ рассуждения аналогичны. Пусть решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1) неколеблющееся. Тогда, ввиду леммы 2, найдётся такое t_0, что $u_1(t)\, u_2(t) > 0$ при $t \geqq t_0$. Поэтому

$$(6) \qquad |u_1(t)|' = a_1(t)\, |u_2(t)|^{\lambda_1}, \quad |u_2(t)|' = -a_2(t)\, |u_1(t)|^{\lambda_2} \quad \text{при} \quad t \geqq t_0 .$$

Из второго равенства в (6) получим

$$(7) \qquad |u_2(t)| \geqq \int_t^{+\infty} a_2(\tau)\, |u_1(\tau)|^{\lambda_2}\, d\tau = \int_t^{+\infty} A_1(\tau)\, |u_1(\tau)|^{\lambda_2}\, a_2(\tau)\, A_1^{-1}(\tau)\, d\tau \geqq$$

$$\geqq A_1(t)\, |u_1(t)|^{\lambda_2} \int_t^{+\infty} a_1(\tau) \left(\int_0^\tau a_1(s)\, ds \right)^{-(\lambda_1+\lambda_2+2)/(\lambda_1+1)} d\tau =$$

$$= |u_1(t)|^{\lambda_2} \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_2 + 1} A_1(t) \left(\int_0^t a_1(s)\, ds \right)^{-(\lambda_2+1)/(\lambda_1+1)} \quad \text{при} \quad t \geqq t_0 .$$

С другой стороны из первого равенства в (6) имеем

$$(8) \qquad |u_1(t)| \geqq \left(\int_{t_0}^t a_1(\tau)\, d\tau \right) |u_2(t)|^{\lambda_1} \quad \text{при} \quad t \geqq t_0 .$$

Пусть $t_1 > t_0$ настолько велико, что

$$\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \leqq (\lambda_1 + 1)^{\lambda_1} \int_{t_0}^t a_1(\tau)\, d\tau \quad \text{при} \quad t \geqq t_1 .$$

Если $\lambda_1 \lambda_2 > 1$, ввиду последнего неравенства, из (7) и (8) следует, что

$$(9) \qquad |u_1(t)| \leqq \left(\frac{\lambda_2 + 1}{A_1(t)} \right)^{\lambda_1/(\lambda_1\lambda_2 - 1)} \left(\int_0^t a_1(s)\, ds \right)^{1/(\lambda_1+1)} \quad \text{при} \quad t \geqq t_1 ,$$

если же $\lambda_1 \lambda_2 < 1$ то

$$(10) \qquad |u_1(t)| \geqq \left(\frac{A_1(t)}{\lambda_2 + 1} \right)^{\lambda_1/(1 - \lambda_1\lambda_2)} \left(\int_0^t a_1(s)\, ds \right)^{1/(\lambda_1+1)} \quad \text{при} \quad t \geqq t_1 .$$

Таким образом мы показали, что если $\lambda_1\lambda_2 > 1$ $(\lambda_1\lambda_2 < 1)$, то всякое неколеблющееся решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1), при больших значениях аргумента удовлетворяет условию (9) (условию (10)).

Пусть $(u_1(t), u_2(t))$ – непродолжаемое вправо решение системы (1), начальные значения которого в точке $t = 1$ удовлетворяют условию $|u_1(1)| + |u_2(1)| \neq 0$. Согласно теореме 1, $(u_1(t), u_2(t))$ является правильным.

Умножая обе части второго равенства в (1) на

$$\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right)^{(\lambda_1+2)/(\lambda_1+1)} \left[\left(\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right)^{-1/(\lambda_1+1)} u_1(t) \right]' \right.$$

и интегрируя от 1 до t получаем

$$(11)\qquad \left(\int_0^t a_1(\tau)\,d\tau\right)|u_2(t)|^{\lambda_1+1} - u_1(t)\,u_2(t) + $$
$$+ \frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1} A_1(t)\left[\left(\int_0^t a_1(\tau)\,d\tau\right)^{-1/(\lambda_1+1)} |u_1(t)|\right]^{\lambda_2+1} =$$
$$= c_0 + \frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1}\int_1^t A_1'(\tau)\left[\left(\int_0^\tau a_1(s)\,ds\right)^{-1/(\lambda_1+1)} |u_1(\tau)|\right]^{\lambda_2+1} d\tau \quad \text{при} \quad t \geqq 1\,,$$

где

$$c_0 = \left(\int_0^1 a_1(\tau)\,d\tau\right)|u_2(1)|^{\lambda_1+1} - u_1(1)\,u_2(1) +$$
$$+ \frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1} A_1(1)\left[\left(\int_0^1 a_1(\tau)\,d\tau\right)^{-1/(\lambda_1+1)} |u_1(1)|\right]^{\lambda_2+1}.$$

Покажем, что если $\lambda_1\lambda_2 > 1$ и

$$(12)\qquad c_0 > (\lambda_1+1)\left(\frac{\lambda_2+1}{A_1(1)}\right)^{(\lambda_1+1)/(\lambda_2+1)},$$

то $(u_1(t), u_2(t))$ является колеблющимся. Допустим противное – пусть это решение является слабо неколеблющимся. Тогда согласно леммам 1 и 2, найдется такое число $t_0 \geqq 1$ что

$$(13)\qquad u_1(t)\,u_2(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \geqq t_0\,.$$

Следовательно, имеют место равенства (6). С другой стороны, как это было доказано выше, справедлива оценка (9), где $t_1 \geqq t_0$. Ввиду (9), (12) и (13), из (11) следует, что

$$\left(\int_0^t a_1(\tau)\,d\tau\right)|u_2(t)|^{\lambda_1+1} - |u_1(t)|\,|u_2(t)| \geqq c_0 -$$
$$- \frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1} A_1(t)\left[\left(\int_0^t a_1(\tau)\,d\tau\right)^{-1/(\lambda_1+1)} |u_1(t)|\right]^{\lambda_2+1} >$$
$$> c_0 - (\lambda_1+1)\left(\frac{\lambda_2+1}{A_1(1)}\right)^{(\lambda_1+1)/(\lambda_2+1)} > 0 \quad \text{при} \quad t \geqq t_1\,.$$

Согласно последнему неравенству и первому равенству в (6), имеем

$$\frac{|u_1(t)|'}{|u_1(t)|} = \frac{a_1(t)\,|u_2(t)|^{\lambda_1}}{|u_1(t)|} > \frac{a_1(t)}{\int_0^t a_1(\tau)\,d\tau} \quad \text{при} \quad t \geqq t_1\,.$$

Отсюда ясно, что

$$|u_1(t)| > |u_1(t_1)| \left(\int_0^{t_1} a_1(\tau)\, d\tau \right)^{-1} \left(\int_0^{t} a_1(\tau)\, d\tau \right) \quad \text{при} \quad t \geqq t_1 ,$$

которое противоречит оценке (9). Следовательно, $(u_1(t), u_2(t))$ является колеблющимся.

Перейдём к рассмотрению случая, когда $\lambda_1 \lambda_2 < 1$. Подберём $\delta > 0$ таким образом, чтобы

$$\delta < \left(\frac{A_1(1)}{\lambda_2 + 1} \right)^{\lambda_1/(1 - \lambda_1 \lambda_2)} \tag{14}$$

и покажем, что если

$$u_1(1) = 0\,, \quad c_0 = \left(\int_0^1 a_1(\tau)\, d\tau \right) |u_2(1)|^{\lambda_1 + 1} < \delta^{1 + 1/\lambda_1} \tag{15}$$

то $(u_1(t), u_2(t))$ колеблющееся.

Легко видеть, что для любых $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $\alpha > 0$ и $\lambda_1 > 0$ имеет место неравенство

$$\alpha x^{\lambda_1 + 1} - xy + \lambda_1 \alpha^{-1/\lambda_1} \left(\frac{y}{\lambda_1 + 1} \right)^{1 + 1/\lambda_1} \geqq 0\,,$$

с учётом которого имеем

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right) |u_2(t)|^{\lambda_1 + 1} - u_1(t)\, u_2(t) + \\
&+ \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_2 + 1} A_1(t) \left[\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right)^{-1/(\lambda_1 + 1)} |u_1(t)| \right]^{\lambda_2 + 1} = \\
&= \left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right) |u_2(t)|^{\lambda_1 + 1} - u_1(t)\, u_2(t) + \\
&+ \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + 1)^{1 + 1/\lambda_1}} \left[\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right)^{-1/(\lambda_1 + 1)} |u_1(t)| \right]^{1 + 1/\lambda_1} + \\
&+ \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_2 + 1} A_1(t) \left[\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right)^{-1/(\lambda_1 + 1)} |u_1(t)| \right]^{\lambda_2 + 1} - \\
&- \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + 1)^{1 + 1/\lambda_1}} \left[\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right)^{-1/(\lambda_1 + 1)} |u_1(t)| \right]^{1 + 1/\lambda_1} \geqq \\
&\geqq \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_2 + 1} A_1(t) \left[\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right)^{-1/(\lambda_1 + 1)} |u_1(t)| \right]^{\lambda_2 + 1} - \\
&- \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + 1)^{1 + 1/\lambda_1}} \left[\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau \right)^{-1/(\lambda_1 + 1)} |u_1(t)| \right]^{1 + 1/\lambda_1}.
\end{aligned}$$

Поэтому из (11) следует, что

$$\frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1} A_1(t)\, V(t)^{\lambda_2+1} - \frac{\lambda_1}{(\lambda_1+1)^{1+1/\lambda_1}} V(t)^{1+1/\lambda_1} \leqq$$

$$\leqq c_0 + \frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1}\int_1^t A_1'(\tau)\, V(\tau)^{\lambda_2+1}\, d\tau\,, \quad t \geqq 1\,,$$

где $V(t) = \left(\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau\right)^{-1/(\lambda_1+1)} |u_1(t)|\right)$. Полагая $W(t) = \max\{V(\tau) : 1 \leqq \tau \leqq t\}$

из последнего неравенства получим

$$\frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1} A_1(t)\, V(t)^{\lambda_2+1} - \frac{\lambda_1}{(\lambda_1+1)^{1+1/\lambda_1}} V(t)^{1+1/\lambda_1} \leqq$$

$$\leqq c_0 + \frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1} W(t)^{\lambda_2+1}[A_1(t) - A_1(1)] \quad \text{при} \quad t \geqq 1\,.$$

Следовательно,

$$\frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1} A_1(1)\, W(t)^{\lambda_2+1} - \frac{\lambda_1}{(\lambda_1+1)^{1+1/\lambda_1}} W(t)^{1+1/\lambda_1} \leqq \tag{16}$$

$$\leqq c_0 + \frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1} A_1(t)\,[W(t)^{\lambda_2+1} - V(t)^{\lambda_2+1}] \quad \text{при} \quad t \geqq 1\,.$$

Далее наши рассуждения совпадают с рассуждениями авторов работы [7]. Так как $W(1) = 0$ и $W(t) \geqq 0$ при $t \geqq 1$, то

$$0 \leqq W(t) < \delta \tag{17}$$

в некоторой правой окрестности точки $t = 1$. Покажем, что (17) справедливо для всех $t \geqq 1$. Предположим обратное, т. е. что существует $t^* > 1$ такое что $W(t^*) = \delta$ и что t^* — ближайшая к $t = 1$ точка. Тогда $W(t^*) = V(t^*)$ и из (16) и (15) следует неравенство

$$\frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1} A_1(1)\, \delta^{\lambda_2-1/\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{(\lambda_1+1)^{1+1/\lambda_1}} < 1\,,$$

которое, ввиду $\lambda_1\lambda_2 < 1$ противоречит (14). Таким образом для рассматриваемого решения

$$\left(\int_0^t a_1(\tau)\, d\tau\right)^{-1/(\lambda_1+1)} |u_1(t)| = V(t) < \delta \quad \text{при} \quad t \geqq 1\,. \tag{18}$$

Если допустить, что указанное решение является слабо неколеблющимся, то