Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

O JEDNOM MODELU $2k$-ROZMĚRNÉHO AFINNÍHO PROSTORU

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

(Došlo dne 8. ledna 1974)

Úvod. V tomto článku nejdříve vytvoříme pomocí prostoru A_k (afinní bodový prostor, jehož zaměření je vektorový prostor dimenze k nad tělesem reálných čísel) jistý model prostoru A_{2k}. Potom ukážeme, že každou regulární afinitu v A_k lze studovat jako podprostor prostoru A_{2k} a dále odvodíme konfigurace v A_{2k} pomocí konfigurací v A_k.

Model A_{2k}. Nechť $A_k = \{A, Z_k, \varepsilon\}$ je model afinního bodového prostoru k (A je neprázdná množina, Z_k je vektorový prostor dimenze k a ε přiřazení, které musí existovat mezi A a Z_k). Uvažujme kartézský součin $A \times A = A'$, tj. množinu všech uspořádaných dvojic prvků množiny A. Stručně naznačíme základní myšlenky důkazu, že množina těchto dvojic je při vhodně zavedených operacích modelem afinního prostoru dimenze $2k$. Nejdříve zavedeme označení: $\boldsymbol{B} = [M, N]$ a $\boldsymbol{\mathcal{U}} = (\mathcal{M}, \mathcal{N})$, kde $\boldsymbol{B} \in A'$, $M \in A$, $N \in A$, $\boldsymbol{\mathcal{U}} \in Z_k \times Z_k$, $\mathcal{M} \in Z_k$, $\mathcal{N} \in Z_k$. M budeme nazývat první obraz bodu $\boldsymbol{B}$, N je druhý obraz bodu $\boldsymbol{B}$, $\mathcal{M}$ je první vektoru $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ a $\mathcal{N}$ je druhý obraz vektoru $\boldsymbol{\mathcal{U}}$. V A_k zvolíme uspořádanou dvojici bází: $\{\bar{O}_1 = \{O_1, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_k\}, \bar{O}_2 = \{O_2, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_k\}\}$. Bodu $X = [C, D]$ přiřadíme $2k$-tici čísel tak, že prvých k čísel jsou souřadnice bodu C v $\bar{O}_1$ a zbývající čísla jsou souřadnice bodu D v $\bar{O}_2$. Každé uspořádané $2k$-tici čísel (reálných) přiřadíme bod, jehož obraz má za souřadnice v $\bar{O}_1$ prvých k čísel a druhý obraz má za souřadnice v O_2 zbývající čísla. Existuje tedy prosté zobrazení mezi množinou A' a množinou všech uspořádaných $2k$-tic čísel — označme ji P_{2k}. Víme, že množinu P_{2k} můžeme při vhodném zavedení příslušných operací uvažovat jako aritmetický model afinního prostoru dimenze $2k$, tj. A_{2k}. Nyní zavedeme, že vektory sčítáme tak, že sečteme příslušné obrazy a podobně bod a vektor sečteme tak, že sečteme příslušné obrazy. Je zřejmé, že uvažované prosté zobrazení mezi A' a P_{2k} takto zavedené operace zachovává, a je tedy izomorfní. Lze tedy A' uvažovat jako model bodového prostoru dimenze $2k$, jehož zaměření je vektorový prostor dimenze $2k$ nad tělesem reálných čísel. Označíme: $A_{2k} = \{A' = A_k \times A_k, Z_k \times Z_k, \varepsilon\}$ a také stručněji $A_{2k} = A_k \times A_k$.

Nyní uvážíme co vyplní resp. jak se interpretují podprostory prostoru A_{2k}. Platí zřejmě, že každý podprostor prostoru A_{2k} je uspořádaná dvojice množin prostoru A_k

(první množinu tvoří první obrazy a druhou množinu druhé obrazy). Přenecháme čtenáři, aby dokázal, že zřejmě uvažované množiny jsou podprostory prostoru A_k. Označíme: $\boldsymbol{A}_s = [A_i, A_j]$, kde $\boldsymbol{A}_s$ je podprostor prostoru A_{2k} a A_i, A_j jsou podprostory prostoru A_k.

Věta 1. *Nechť* $A_{2k} = A_k \times A_k$. *Pro každý s-rozměrný* $(s = 0, 1, \ldots, 2k)$ *podprostor* $\boldsymbol{A}_s \subseteq A_{2k}$ *platí*:

1. $\boldsymbol{A}_s = [A_i, A_j]$, *přičemž* $A_i \subseteq A_k$, $A_j \subseteq A_k$, $i = 0, 1, \ldots, \min(s, k)$, $j = 0, 1, \ldots$ $\ldots, \min(s, k)$ *a* $s \leqq i + j \leqq 2s$.

2. *Nechť* $\boldsymbol{B} = [M, N] \in \boldsymbol{A}_s$, *potom bod* $[M, X] \in \boldsymbol{A}_s$ *právě když bod* $X \in A_{s-i}$ *a podobně bod* $[Y, N] \in \boldsymbol{A}_s$ *právě když* $Y \in A_{s-j}$, *přičemž* A_{s-i}, A_{s-j} *jsou jisté podprostory příslušných dimenzí prostoru* A_k.

Důkaz. Nechť $A'_s = \{B', \mathcal{U}'_1, \mathcal{U}'_2, \ldots, \mathcal{U}'_s\}$ je podprostor prostoru P_{2k} a nechť v uvažovaném izomorfismu mezi P_{2k} a A' odpovídá tomuto A'_s podprostor $\boldsymbol{A}_s$, jehož interpretaci hledáme. Označme (M) matici, jejíž řádky jsou souřadnice vektorů $\mathcal{U}'_1, \mathcal{U}'_2, \ldots, \mathcal{U}'_s$. Nechť (M_1) je matice určená prvními k sloupci matice (M) a (M_2) matice určená zbývajícími sloupci matice (M). Nechť matice (M_1) má hodnost i a matice (M_2) hodnost j. Je známo, že můžeme matici (M) upravit na (M') se stejnou hodností tak, aby (M'_1) měla právě i nenulových řádků a obdobně (M'_2) bude mít právě j nenulových řádků. Vektory, jejichž souřadnice jsou v řádcích matice (M'_1), zřejmě určují zaměření prostoru A_i a právě tak zaměření prostoru A_j určují vektory, jejichž souřadnice jsou v řádcích matice (M'_2). Zřejmě je $s \leqq i + j \leqq 2s$, neboť v opačném případě hodnost matice (M) je větší resp. menší než s. Matice (M_1) a (M_2) mají s řádků a k sloupců. Dokázali jsme tedy tvrzení 1. naší věty.

Uvažujme v (M') řádky, které mají na prvých k místech číslo 0. Těchto řádků je $s - i$ a každá lineární kombinace těchto řádků resp. vektor v Z_{2k} má prvních k souřadnic nulových a tedy odpovídající vektor v $Z_k \times Z_k$ má vždy za první obraz nulový vektor a druhé obrazy jsou vektory vektorového prostoru dimenze $s - i$. Přičteme-li tento vektor k bodu podprostoru $\boldsymbol{A}_s$ dostaneme bod téhož podprostoru, přičemž však první obraz je pro všechny takové body stejný a druhý obraz je bod jistého podprostoru $A_{s-i} \subset A_k$. Tím je dokázáno prvé tvrzení ad 2). Druhé tvrzení se dokáže zcela obdobně a nebudeme ho dokazovat.

Afinita v k**-rozměrném prostoru.** Uvažujme regulární afinitu F v prostotu A_k. Každému bodu $A \in A_k$ odpovídá jediný bod $A' = F(A) \in A_k$. Nechť $\boldsymbol{X} = [A, F(A)]$, tj. nechť první obraz bodu $\boldsymbol{X}$ je bod A a nechť druhý obraz bodu $\boldsymbol{X}$ je obraz bodu A v afinitě F. Co vytvoří všechny takové body X? Bezprostředním důsledkem věty 1) je, že body $\boldsymbol{X}$ mohou vytvořit jedině $\boldsymbol{A}_k = [A_k, A_k]$.

Věta 2. *Každou uspořádanou dvojici podprostorů* $[A_i, A_j]$ $(A_i, A_j \subseteq A_k)$ *můžeme uvažovat jako podprostor* $\boldsymbol{A}_s \subseteq A_{2k}$ $(\boldsymbol{A}_s = [A_i, A_j])$, *přičemž platí* $\max(i, j) \leqq$ $\leqq s \leqq i + j$.

Důkaz. Zvolíme bázi zaměření podprostoru A_i vektory $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2, \ldots, \mathscr{U}_i$ a bázi zaměření podprostoru A_j vektory $\mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2, \ldots, \mathscr{V}_j$. Zaměření A_s je určeno bází: $\{(\mathscr{U}_1, \emptyset), (\mathscr{U}_2, \emptyset), \ldots, (\mathscr{U}_{s-j}, \emptyset), (\mathscr{U}_{s-j+1}, \mathscr{V}_1), \ldots, (\mathscr{U}_i, \mathscr{V}_{j-s+i}), (\emptyset, \mathscr{V}_{j-s+i+1}), \ldots$ $\ldots, (\emptyset, \mathscr{V}_j)\}$.

Z předcházejícího a věty 2 dostáváme:

Věta 3. *Každý podprostor $\boldsymbol{F}_k = [A_k, A_k]$ prostoru $A_{2k} = A_k \times A_k$ můžeme uvažovat jako regulární afinitu v prostoru A_k.*

Poznámka. Vícerozměrnou geometrií je připravena klasifikace afinit podle samodružných bodů a vektorů. Identita $\boldsymbol{I}_k$ je afinita $[A_k, A_k]$, pro jejíž všechny body $X = [X_1, X_2]$ platí $X_1 = X_2$. Hledání samodružných bodů a vektorů dané afinity F je tedy převedeno na hledání společných bodů a vektorů dvou k-rozměrných podprostorů a sice $\boldsymbol{F}_k$ a $\boldsymbol{I}_k$ v prostoru A_{2k}. Z předcházejícího plyne důkaz známé věty o tom, že v A_k existuje $2k + 1$ různých typů afinit.

Konfigurace v A_{2k} odvozené pomocí konfigurací v A_k. r-rozměrná konfigurace je množina, jejíž prvky jsou vlastní podprostory daného prostoru a pro něž platí tato podmínka: Každý s-rozměrný podprostor je incidentní vždy s týmž počtem k-rozměrných podprostorů (podrobněji např. v lit. [1]). Nechť v A_k je dána konfigurace K typu:

$$
(1) \qquad \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0k} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \ldots & a_{k-1,k-1} \end{pmatrix}.
$$

Body konfigurace K označme B_i, $i = 1, 2, \ldots, a_{00}$. V $A_{2k} = A_k \times A_k$ uvažujme a_{00}^2 bodů $\boldsymbol{B} = [B_i, B_j]$, kde i a j je rovno $1, 2, \ldots, a_{00}$. Nyní uvažujme v $A_{2k} = A_k \times A_k$ podprostory $\boldsymbol{P}_h$, přičemž $\boldsymbol{P}_h$ je:

1. $[P_h, B_i]$ nebo $[B_i, P_h]$ (zřejmě toto nastane, jestliže $h \leqq k$),

2. $[A_k, P_{h-k}]$ nebo $[P_{h-k}, A_k]$ $(h > k)$, přičemž P_h i P_{h-k} jsou prvky konfigurace K – označme tyto $\boldsymbol{P}_h$ přípustné podprostory.

Věta 4. 1. *Nechť $0 < h < k$; potom počet přípustných podprostorů $\boldsymbol{P}_h$ je $2a_{00}a_{hh}$.*

2. *Nechť $k \leqq h \leqq 2k - 1$; potom existuje $2a_{h-k,h-k}$ přípustných podprostorů $\boldsymbol{P}_h$.*

Důkaz. 1. Počet P_h v K je a_{hh}. Každý bod $B_i \in K$ může být první nebo druhý obraz $\boldsymbol{P}_h$, a tedy počet $\boldsymbol{P}_h$ je $2a_{00}a_{hh}$.

2. Jestliže $h \geqq k$, potom počet prostorů P_{h-k} v K je právě $a_{h-k,h-k}$ a každý z nich může být prvním nebo druhým obrazem $\boldsymbol{P}_h$; přípustných $\boldsymbol{P}_h$ je tedy $2a_{h-k,h-k}$.

Věta 5. *Nechť $s < h$. Počet přípustných podprostorů $\boldsymbol{P}_s$ obsažených v přípustném $\boldsymbol{P}_h$ je:*

1. a_{hs}, *jestliže je* $h < k$,
2. a_{ss} *pro* $h = k$,
3. $a_{h-k,0}a_{00}$ *pro* $h > k$ *a* $s = 0$,
4. $a_{ss}a_{h-k,0} + a_{h-k,s}a_{00}$ *pro* $h - k > s > 0$,
5. $a_{ss}a_{h-k,0} + a_{00}$ *pro* $h - k = s > 0$,
6. $a_{ss}a_{h-k,0}$ *pro* $h - k < s < k$ $(h > k)$,
7. $a_{h-k,s-k}$ *pro* $s \geqq k$ (*zřejmě* $h - k > s - k$).

Důkaz 1. Jestliže $h < k$, potom jeden obraz $\boldsymbol{P}_h$ je bod a druhý obraz je podprostor P_h náležející konfiguraci K. Nechť je tedy daný $P_h = [B_1, P_h]$. $\boldsymbol{P}_s \subset \boldsymbol{P}_h$, jestliže je $\boldsymbol{P}_s = [B_1, P_s]$ a $P_s \subset P_h$. V konfiguraci K je počet $P_s \subset P_h$ právě a_{hs} a toto číslo zřejmě udává počet $\boldsymbol{P}_s$ ležících v daném $\boldsymbol{P}_h$.

2. Zde je $\boldsymbol{P}_k = [B_1, A_k]$ a zřejmě počet hledaných $\boldsymbol{P}_s$ je počet všech P_s konfigurace K, tj. a_{ss}.

3. Nechť $\boldsymbol{P}_h = [A_k, P_{h-k}]$. Bod $\boldsymbol{B} = [B_i, B_j] \in \boldsymbol{P}_h$, jestliže $B_i \in A_k$ a $B_j \in P_{h-k}$. Počet bodů konfigurace K je a_{00} a v prostoru P_{h-k} leží $a_{h-k,0}$ bodů; číslo $a_{h-k,0}a_{00}$ zřejmě udává počet uvažovaných bodů ležících v daném $\boldsymbol{P}_h$.

4. Nechť opět je $\boldsymbol{P}_h = [A_k, P_{h-k}]$. V tomto $\boldsymbol{P}_h$ leží všechny $\boldsymbol{P}_s = [P_s, B_i]$, kde P_s je každý podprostor dimenze s náležející konfiguraci K a B_i je bod podprostoru P_{h-k}. Těchto $\boldsymbol{P}_s$ je zřejmě $a_{ss}a_{h-k,0}$. Dále v daném $\boldsymbol{P}_h$ leží všechny $P_s = [B_i, P_s]$, přičemž B_i je každý bod konfigurace K a P_s je podprostor dimenze s, který leží v daném P_{h-k}. Těchto $\boldsymbol{P}_s$ je zřejmě $a_{h-k,s}a_{00}$.

5. Jestliže v případě 4, je $P_s = P_{h-k}$, potom je zřejmě počet prostorů $\boldsymbol{P}_s = [B_i, P_s]$ právě a_{00}.

6. V tomto případě neexistuje prostor $\boldsymbol{P}_s = [B_i, P_s]$ (z případu 4)).

7. Nechť je $\boldsymbol{P}_h = [A_k, P_{h-k}]$. V tomto $\boldsymbol{P}_h$ leží $\boldsymbol{P}_s = [A_k, P_{s-k}]$ a $P_{s-k} \subset P_{h-k}$. Počet hledaných $\boldsymbol{P}_s$ je tedy roven počtu prostorů P_{s-k} ležících v P_{h-k} a těch je $a_{h-k,s-k}$.

Věta 6. *Nechť $s > h$. Počet přípustných podprostorů $\boldsymbol{P}_s$ obsahujících přípustný $\boldsymbol{P}_h$ je:*

1. $2a_0$ *pro* $s < k$ *a* $h = 0$,
2. a_{hs} *pro* $s < k$ *a* $h > 0$,
3. 2 *pro* $s = k$ *a* $h = 0$,
4. 1 *pro* $s = k$ *a* $h > 0$,
5. $2a_{0,s-k}$ *pro* $s > k$ *a* $h = 0$,

6. $a_{0,s-k} + a_{h,s-k}$ *pro* $s - k > h > 0$,

7. $a_{0,s-k} + 1$ *pro* $s - k = h > 0$,

8. $a_{0,s-k}$ *pro* $s - k < h < k$,

9. $a_{h-k,s-k}$ *pro* $s > h \geqq k$.

Důkaz. 1. Nechť $\boldsymbol{B} = [B_1, B_2]$, přičemž B_1 i B_2 jsou body K. Bodem $B_i \in K$ prochází a_{0s} s-rozměrných prostorů P_s konfigurace K. Bodem $\boldsymbol{B}$ prochází tedy a_{0s} prostorů $\boldsymbol{P}_s = [P_s, B_2]$ a právě tak a_{0s} podprostorů $\boldsymbol{P}_s = [B_1, P_s]$.

2. Nechť $\boldsymbol{P}_h = [B_i, P_h]$. Tento $\boldsymbol{P}_h$ obsahuje $\boldsymbol{P}_s = [B_i, P_s]$ a P_s obsahuje P_h. Počet $\boldsymbol{P}_s$ obsahující daný $\boldsymbol{P}_h$ je tedy zřejmě roven počtu P_s obsahujících P_h, tj. a_{hs}.

3. A_k je v A_k jediný a proto každým bodem $\boldsymbol{B} = [B_1, B_2]$ procházejí jedině tyto dva podprostory: $[B_1, A_k]$ a $[A_k, B_2]$.

4. Podprostor $\boldsymbol{P}_h = [B_1, P_h]$ je obsažen jedině v prostoru $[B_1, A_k]$.

5. Bodem $\boldsymbol{B} = [B_1, B_2]$ prochází $a_{0,s-k}$ podprostorů $\boldsymbol{P}_s = [P_{s-k}, A_k]$, přičemž B_1 leží v P_{s-k}. Právě tak bodem $\boldsymbol{B}$ prochází ještě $a_{0,s-k}$ podprostorů $[A_k, P_{s-k}]$.

6. Nechť $\boldsymbol{P}_h = [B_1, P_h]$. Tímto $\boldsymbol{P}_h$ prochází zřejmě $a_{0,s-k}$ prostorů $\boldsymbol{P}_s = [P_{s-k}, A_k]$ (je to počet P_{s-k} procházejících bodem B_1) a $a_{h,s-k}$ prostorů $\boldsymbol{P}_s = [A_k, P_{s-k}]$ (je to počet P_{s-k} procházejících daným P_h).

7. Prvé číslo, tj. $a_{0,s-k}$, dostaneme jako v případě 6, a dále existuje jediný prostor $\boldsymbol{P}_s = [A_k, P_h]$ obsahující prostor $\boldsymbol{P}_h = [B_1, P_h]$.

8. Tento případ je opět speciálním případem 6, s tím, že neexistuje $\boldsymbol{P}_s = [A_k, P_{s-k}]$ obsahující $\boldsymbol{P}_h = [B_1, P_h]$, jestliže je $s - k < h$.

9. Nechť $\boldsymbol{P}_h = [P_{h-k}, A_k]$. Tento $\boldsymbol{P}_h$ je obsažen v $\boldsymbol{P}_s = [P_{s-k}, A_k]$ a zřejmě počet těchto $\boldsymbol{P}_s$ je roven počtu P_{s-k} procházejících daným P_{h-k} v konfiguraci K, tj. $a_{h-k,s-k}$.

Uvažujme nyní za přípustné tyto podprostory:

a) $\boldsymbol{P}_h = [P_{h/2}, L_{h/2}]$, kde h je číslo sudé a $P_{h/2}$ i $L_{h/2}$ jsou podprostory dimenze $h/2$ a patří konfiguraci K.

b) $\boldsymbol{P}_h = [P_{(h-1)/2}, L_{(h+1)/2}]$ nebo $\boldsymbol{P}_h = [P_{(h+1)/2}, L_{(h-1)/2}]$, kde h je liché číslo a prostory P i L (příslušných dimenzí) patří konfiguraci K. V obou případech počítejme s možností prostoru dimenze 0, tj. bodu – musíme však pokládat nulu za sudé číslo.

Věta 7. 1. *Nechť h je číslo sudé, potom počet přípustných podprostorů $\boldsymbol{P}_h$ je $a^2_{h/2,h/2}$*

2. *Nechť h je číslo liché a menší než $2k - 1$, potom počet přípustných podprostorů $\boldsymbol{P}_h$ je $2a_{(h-1)/2,(h-1)/2}a_{(h+1)/2,(h+1)/2}$.*

3. *Počet přípustných nadrovin je $2a_{k-1,k-1}$.*

Důkaz. 1. Počet všech podprostorů dimenze $h/2$ konfigurace K je právě $a_{h/2,h/2}$. Každá dvojice těchto podprostorů je jediným prostorem $\boldsymbol{P}_h$, a tedy jejich počet je $a^2_{h/2,h/2}$.

2. V K existuje právě $a_{(h-1)/2,(h-1)/2}$ prostorů dimenze $(h-1)/2$ a $a_{(h+1)/2,(h+1)/2}$ prostorů dimenze $(h+1)/2$. Dostáváme celkem $a_{(h-1)/2,(h-1)/2}a_{(h+1)/2,(h+1)/2}$ dvojic těchto podprostorů, kde prostor dimenze $(h-1)/2$ je prvním prvkem této dvojice. Dále dostáváme stejný počet dvojic, kde prostor dimenze $(h-1)/2$ je druhým prvkem této dvojice. Je tedy počet všech těchto dvojic resp. prostorů $\boldsymbol{P}_h$ právě $2a_{(h-1)/2,(h-1)/2}a_{(h+1)/2,(h+1)/2}$.

3. Počet $\boldsymbol{P}_{2k-1} = [P_{k-1}, A_k]$ je právě $a_{k-1,k-1}$, tj. počet nadrovin konfigurace K, a právě tak existuje $a_{k-1,k-1}$ prostorů $\boldsymbol{P}_{2k-1} = [A_k, P_{k-1}]$.

Věta 8. *Nechť $s < h$. Počet přípustných podprostorů $\boldsymbol{P}_s$ obsažených v přípustném $\boldsymbol{P}_h$ je:*

1. $a^2_{h/2,s/2}$ *pro h i s sudé,*
2. $2a_{h/2,(s-1)/2}a_{h/2,(s+1)/2}$ *pro h sudé a s liché,*
3. $a_{(h-1)/2,s/2}a_{(h+1)/2,s/2}$ *pro s sudé, h liché a menší než $2k-1$,*
4. $a_{(h-1)/2,(s-1)/2}a_{(h+1)/2,(s+1)/2} + a_{(h-1)/2,(s+1)/2}a_{(h+1)/2,(s-1)/2}$ *pro h i s liché a $h < 2k-1$,*
5. $a_{k-1,s/2}a_{s/2,s/2}$ *pro $h = 2k-1$ a s sudé,*
6. $a_{k-1,(s-1)/2}a_{(s+1)/2,(s+1)/2} + a_{k-1,(s+1)/2}a_{(s-1)/2,(s-1)/2}$ *pro $h = 2k-1$ a s liché.*

Důkaz. 1. Nechť $\boldsymbol{P}_h = [P_{h/2}, L_{h/2}]$ a $\boldsymbol{P}_s = [P_{s/2}, L_{s/2}]$. $\boldsymbol{P}_s \subset \boldsymbol{P}_h$, jestliže $P_{s/2} \subset P_{h/2}$ a $L_{s/2} \subset L_{h/2}$. Počet prostorů $P_{s/2}$ obsažených v $P_{h/2}$ je $a_{h/2,s/2}$. Právě tak počet $L_{s/2}$ obsažených v $L_{h/2}$ je $a_{h/2,s/2}$. Počet dvojic těchto prostorů resp. počet $\boldsymbol{P}_s$ je tedy $a^2_{h/2,s/2}$.

2. $\boldsymbol{P}_h = [P_{h/2}, L_{h/2}]$ a $\boldsymbol{P}_s = [P_{(s-1)/2}, L_{(s+1)/2}]$ nebo $[P_{(s+1)/2}, L_{(s-1)/2}]$. Počet $P_{(s-1)/2} \subset P_{h/2}$ je $a_{h/2,(s-1)/2}$ a počet $L_{(s+1)/2} \subset L_{h/2}$ je $a_{h/2,(s+1)/2}$. Každá dvojice $[P_{(s-1)/2}, L_{(s+1)/2}]$ je hledaný $\boldsymbol{P}_s \subset \boldsymbol{P}_h$ a těchto $\boldsymbol{P}_s$ je tedy $a_{h/2,(s-1)/2}a_{h/2,(s+1)/2}$. Existuje ještě stejný počet $\boldsymbol{P}_s = [P_{(s+1)/2}, L_{(s-1)/2}]$, a tedy celkový počet hledaných $\boldsymbol{P}_s$ je $2a_{h/2,(s-1)/2}a_{h/2,(s+1)/2}$.

3. Nechť $\boldsymbol{P}_h = [P_{(h-1)/2}, L_{(h+1)/2}]$ a $\boldsymbol{P}_s = [P_{s/2}, L_{s/2}]$. V K existuje $a_{(h-1)/2,s/2}$ prostorů $P_{s/2} \subset P_{(h-1)/2}$ a $a_{(h+1)/2,s/2}$ prostorů $L_{s/2} \subset L_{(h+1)/2}$. Číslo $a_{(h-1)/2,s/2} \cdot a_{(h+1)/2,s/2}$ je tedy počet všech dvojic $[P_{s/2}, L_{s/2}]$.

4. Nechť $\boldsymbol{P}_h = [P_{(h-1)/2}, L_{(h+1)/2}]$ a $\boldsymbol{P}_s = [P_{(s-1)/2}, L_{(s+1)/2}]$ nebo $[P_{(s+1)/2}, L_{(s-1)/2}]$. Z předcházejících úvah je zřejmé, že číslo $a_{(h-1)/2,(s-1)/2}a_{(h+1)/2,(s+1)/2}$ udává počet $\boldsymbol{P}_s = [P_{(s-1)/2}, L_{(s+1)/2}] \subset \boldsymbol{P}_h$ a číslo $a_{(h-1)/2,(s+1)/2}a_{(h+1)/2,(s-1)/2}$ je počet $\boldsymbol{P}_s = [P_{(s+1)/2}, L_{(s-1)/2}] \subset \boldsymbol{P}_h$.

5. Kdybychom v případě 3, nekladli omezení $h < 2k-1$, potom pro $h = 2k-1$ je $a_{(h-1)/2,s/2} = a_{k,s/2}$ a takto indexované číslo v matici konfigurace K není. Význam tohoto čísla však zůstává a sice počet všech $P_{s/2}$ v A_k — v konfiguraci K je tento počet vyjádřen číslem $a_{s/2,s/2}$.

6. Tento případ dostaneme, jestliže v 4. nahradíme číslo $a_{(h+1)/2,(s-1)/2}$ číslem $a_{(s+1)/2,(s+1)/2}$ a číslo $a_{(h+1)/2,(s-1)/2}$ číslem $a_{(s-1)/2,(s-1)/2}$.

Věta 9. *Nechť $s > h$. Počet přípustných podprostorů P_s obsahujících přípustný P_h je:*

1. $a^2_{h/2,s/2}$ *pro h i s sudé,*

2. $2a_{h/2,(s-1)/2}a_{h/2,(s+1)/2}$ *pro h sudé, s liché a menší než $2k - 1$,*

3. $a_{(h-1)/2,s/2}a_{(h+1)/2,s/2}$ *pro h liché a s sudé,*

4. $a_{(h-1)/2,(s-1)/2}a_{(h+1)/2,(s-1)/2} + a_{(h+1)/2,(s-1)/2}a_{(h-1)/2,(s+1)/2}$ *pro h liché, s sudé a menší než $2k - 1$,*

6. $a_{(h-1)/2,k-1} + a_{(h+1)/2,k-1}$ *pro liché a $s = 2k - 1$.*

D ů k a z. V případech 1), 2), 3) a 4) jsou uvedená čísla formálně stejná jako ve větě 8. Rozdíl je však ten, že zde je $s > h$ a uvedená čísla a_{hs} udávají počet prostorů P_s obsahujících P_h. Ve větě 8 tato čísla udávala počet P_s obsažených v P_h. Jinak je důkaz těchto čtyř případů zcela obdobný předcházejícímu důkazu a proto jej nebudeme provádět.

5. Tento případ dostaneme z 2., jestliže číslo $a_{h/2,k}$ bude počet prostorů A_k obsahujících $P_{s/2}$ — prostor A_k je však jediný.

6. Podobně v 4. je $a_{(h+1)/2,k} = 1$ a $a_{(h-1)/2,k} = 1$.

Z předcházejícího snadno dokážeme tuto zajímavou a důležitou větu:

Věta 10. *Nechť v A_k (afinní bodový prostor, jehož zaměření je vektorový prostor nad tělesem reálných čísel dimenze k) existuje konfigurace K daná maticí (1). Potom v A_{2k} existuje konfigurace K_1 typu:*

$$
(2) \quad \left(\begin{array}{lll}
a^2_{00} & 2a_{01} & \cdots \\
a_{10} & 2a_{00}a_{11} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \cdots \\
a_{00} & a_{11} & \cdots \\
a_{10}a_{00} & a_{11}a_{10} + a_{00} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
a_{k-1,0}a_{00} & a_{11}a_{k-1,0} + a_{k-1,1}a_{00} & \cdots
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{llllll}
\cdots & 2a_{0,k-1} & 2 & 2a_{01} & \cdots & 2a_{0,k-1} \\
\cdots & a_{1,k-1} & 1 & a_{01} + 1 & \cdots & a_{0,k-1} + a_{1,k-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & 2a_{00}a_{k-1,k-1} & 1 & a_{01} & \cdots & a_{0,k-1} \\
\cdots & a_{k-1,k-1} & 2a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,k-1} \\
\cdots & a_{k-1,k-1}a_{10} & a_{10} & 2a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & a_{k-1,k-1}a_{k-1,0} + a_{00} & a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \cdots & 2a_{k-1,k-1}
\end{array}\right)
$$