Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

POZNÁMKA K APLIKACÍM LAPLACEOVY TRANSFORMACE NA ABSTRAKTNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PARABOLICKÉHO TYPU

ALEXANDER DOKTOR, JINDŘICH NEČAS, RUDOLF ŠVARC, Praha

(Došlo dne 27. prosince 1973)

ÚVOD

O Laplaceově transformaci reálných funkcí již byla napsána řada publikací a učebnic, např. [1], [2], [3], [4], [5] popřípadě [6], kde lze nalézt odkazy na další literaturu. Použití Laplaceovy transformace při řešení diferenciálních rovnic je poměrně jednoduché a často se dobře hodí i v praktických úlohách techniky a při konkrétních výpočtech. Přitom, jak ukážeme v dalším textu, má Laplaceova transformace blízký vztah k definici slabého řešení parciálních diferenciálních rovnic, se kterou pracují moderní metody.

Laplaceovu transformaci lze dále přirozeným způsobem rozšířit na funkce s hodnotami v Hilbertově prostoru. Při řešení evolučních rovnic (např. rovnice parabolické) je pak možné pomocí tohoto zobecnění výhodně používat známé věty z funkcionální analýzy, nebo teorie diferenciálních rovnic eliptického typu. Výsledky dosažené touto metodou přitom odpovídají výsledkům dosaženým jiným způsobem, např. pomocí teorie analytických pologrup.

Přes uvedené výhody ustoupila Laplaceova transformace v poslední době do pozadí a proto si dovolujeme v této poznámce předložit čtenáři několik příkladů na její použití. Zároveň zde stručně vybudujeme již zmíněné zobecnění Laplaceovy transformace, které sice není složité, ale běžná dostupná literatura se o něm nezmiňuje.

LAPLACEOVA TRANSFORMACE ABSTRAKTNÍCH FUNKCÍ

Laplaceova transformace $\hat{u}$ reálné funkce $u \in L_{1,\mathrm{loc}}\langle 0, \infty)$ je definována integrálem

$$\hat{u}(p) \equiv \int_0^\infty e^{-pt}\, u(t)\, \mathrm{d}t \equiv \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-pt}\, u(t)\, \mathrm{d}t \tag{1}$$

a lze ji výhodně použít při řešení některých úloh pro diferenciální rovnice (viz např.

[2], [3]). Například úloha

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = h(t)$$

má řešení

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \hat{h}(p) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{(p)} \,.\, x}{\operatorname{sh} \sqrt{p}} e^{pt} \, \mathrm{d}p, \quad \sigma > 0.$$

Přirozeným zobecněním je definice Laplaceovy transformace pro abstraktní funkci u (tj. zobrazení s hodnotami v Hilbertově prostoru) a její použití na řešení abstraktní diferenciální rovnice, která zahrnuje jako speciální případ např. parabolické rovnice ve více proměnných.

Mějme tedy komplexní Hilbertův prostor H se skalárním součinem $(.,.)$ a normou $\|\cdot\|$ a dále abstraktní funkci $u : (0, \infty) \mapsto H$ takovou, že $u \in L_2(0, \infty; H)$, tj. takovou že $\int_0^\infty \|u(t)\|^2 \, \mathrm{d}t < \infty$.

Pro $p \in \mathbb{C}$, Re $p > 0$ pak Laplaceovu transformaci $\hat{u}$ funkce u definujeme vztahem (1), kde ovšem nyní všechny integrály bereme v Bochnerově smyslu. Připomeňme proto nejprve stručně definici a základní vlastnosti Bochnerova integrálu (viz např. [7], [8]).

Je-li $f : (a, b) \mapsto H$ jednoduchá funkce, tj. funkce tvaru $f(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(t) \,.\, c_i$, kde $c_1, \ldots, c_n \in H$ a $B_i \subset (a, b)$ jsou měřitelné navzájem disjunktní množiny konečné Lebesgueovy míry, definujeme její Bochnerův integrál vztahem

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \equiv \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \,.\, c_i \in H$$

(μ budiž Lebesgueova míra v $\mathbb{R}$).

Zobrazení $f : (a, b) \mapsto H$ se nazývá silně měřitelná funkce, jestliže existuje posloupnost $\{f_n\}$ jednoduchých funkcí taková, že $\lim_{n \to \infty} \|f_n(t) - f(t)\| = 0$ pro skoro všechna t. Je-li f silně měřitelná funkce, je reálná funkce $\|f(\cdot)\|$ lebesgueovsky měřitelná. Platí-li pro silně měřitelnou funkci dále $\lim_{n \to \infty} \int_a^b \|f_n(s) - f(s)\| \, \mathrm{d}s = 0$, existuje $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t) \, \mathrm{d}t$ a je nezávislá na volbě posloupnosti $\{f_n\}$. Můžeme pak definovat Bochnerův integrál funkce f vztahem

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \equiv \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t) \, \mathrm{d}t,$$

kde f_n jsou příslušné jednoduché funkce. Takto zavedený Bochnerův integrál je tedy prvkem prostoru H a platí pro něj důležitá Bochnerova věta:

Věta (Bochnerova). *Silně měřitelná funkce $f : (a, b) \mapsto H$ má Bochnerův integrál právě když reálná funkce $\|f(\cdot)\|$ má konečný Lebesgueův integrál. Pak navíc platí*

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqq \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t\,.$$

Nyní tedy už máme výrazu (1) připsán smysl i pro funkci u s hodnotami v prostoru H a díky omezení na $u \in L_2(0, \infty; H)$ příslušné integrály konvergují (pro $\operatorname{Re} p > 0$); tedy $\hat{u}$ je zobrazení

$$\hat{u} : \{p \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} p > 0\} \mapsto H\,.$$

Zřejmě $\hat{u}$ je holomorfní funkce, tj. pro každé $v \in H$ je funkce $(\hat{u}(\cdot), v)$ holomorfní v běžném smyslu.

Takto zavedená Laplaceova transformace má známý algebraický vztah k derivaci:

Tvrzení 1. *Nechť funkce $u \in L_2(0, \infty; H)$ má slabou derivaci u' (tj. existuje funkce $u' \in L_{1,\mathrm{loc}}(0, \infty; H)$ taková, že*

$$\int_a^b u'(t)\,\mathrm{d}t = u(b) - u(a)$$

pro každé $0 < a < b$). Buď také $u' \in L_2(0, \infty; H)$. Pak platí

$$\widehat{u'}(p) = p\,\hat{u}(p) - u(0)\,. \tag{2}$$

(*Hodnota $u(0)$ má zde smysl, protože v našem případě je i $u \in C(\langle 0, \infty); H)$; je totiž zřejmě*

$$\|u(t) - u(s)\| \leqq \left| \int_s^t \|u'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau \right| \leqq |t - s|^{1/2} \left(\int_0^\infty \|u'(\tau)\|^2\,\mathrm{d}\tau \right)^{1/2}.)$$

Dále platí rovnost

$$\frac{1}{2\pi} \sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{u}(\sigma + i\tau)\|^2\,\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty \|u(t)\|^2\,\mathrm{d}t\,, \tag{3}$$

vztah pro inverzní transformaci

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} \frac{\hat{u}(p)}{p}\, e^{pt}\,\mathrm{d}p = \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{pro} \quad t \geqq 0\,, \tag{4}$$

$$= 0 \quad \text{pro} \quad t < 0$$

a následující tvrzení o reprezentaci pro Laplaceovu transformaci:

Věta 2. *Buď* $U \in \{p \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Re} p > 0\} \mapsto H$. *Pak nutná a postačující podmínka pro to, aby U byla Laplaceovou transformací originálu* $u \in L_2(0, \infty; H)$ *je, aby U byla holomorfní a*

$$\sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|U(\sigma + i\tau)\|^2 \, \mathrm{d}\tau < \infty\,.$$

APLIKACE LAPLACEOVY TRANSFORMACE
NA ABSTRAKTNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Uvažujme nyní dva komplexní Hilbertovy prostory V, H takové, že $V \subset H$ algebraicky a topologicky (tj. existuje konstanta $c_1 > 0$ taková, že $\|v\|_H \leqq c_1 \|v\|_V$ pro každé $v \in V$) a přitom V je hustý v H ($\bar{V} = H$). Označme $\tilde{V}$ prostor všech funkcionálů na V které jsou spojité a antilineární, tj. pro $\phi \in \tilde{V}$ platí $\langle \phi, v + w \rangle = \langle \phi, v \rangle + \langle \phi, w \rangle$, $\langle \phi, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle \phi, v \rangle$, $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ($\langle \phi, v \rangle$ značíme hodnotu funkcionálu ϕ na prvku v).

Laplaceovy transformace použijeme k řešení této abstraktní diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = f(t)\,, \quad t > 0 \tag{5}$$

s počáteční podmínkou

$$u(0) = u_0\,, \tag{6}$$

kde $f : (0, \infty) \mapsto H$ a $A : V \mapsto \tilde{V}$ je omezený lineární operátor ($A \in \mathscr{L}(V, \tilde{V})$).

Jako model k tomuto abstraktnímu případu si můžeme představovat tuto smíšenou úlohu pro parabolickou rovnici druhého řádu: pro omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ volíme $H = L_2(\Omega)$, $V = W_0^{1,2}(\Omega)$ (prostor $W_0^{1,2}(\Omega)$ je definován jako uzávěr množiny $\mathscr{D}(\Omega)$ v prostoru $W^{1,2}(\Omega)$, tj. v normě $\|f\|_{1,2} \equiv \|f\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial f / \partial x_i\|_{L_2(\Omega)}$). Pro funkce $a_{i,j} \in L_\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \ldots, N$ pak operátor A definujeme předpisem

$$\langle Aw, v \rangle \equiv \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}(x) \, \mathrm{d}x\,, \quad w, v \in W_0^{1,2}(\Omega)\,. \tag{7}$$

($\bar{v}$ označujeme funkci komplexně sdruženou k v). Pak abstraktní úloha (5), (6) neznamená nic jiného než hledání tzv. slabého nebo zobecněného řešení úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f(x, t)\,, \quad x \in \Omega\,, \quad t > 0\,, \tag{8}$$

$$u(x, 0) = u_0(x)\,, \quad x \in \Omega, \tag{9}$$

$$u(x, t) = 0\,, \quad x \in \partial\Omega\,, \quad t > 0\,. \tag{10}$$

Zobecněným řešením úlohy (8)–(10) ve smyslu testovacích funkcí rozumíme funkci $u \in L_2(0, \infty; W_0^{1,2}(\Omega))$ takovou, že je splněna integrální identita

$$(11) \qquad \int_0^\infty \int_\Omega \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t - \int_\Omega u_0(x) \, \varphi(x, 0) \, \mathrm{d}x = \\ = \int_0^\infty \int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

pro všechny tzv. testovací funkce φ z nějakého prostoru V, jehož volba zaručuje, že pro klasické řešení (tj. $u \in C^2(\bar{\Omega} \times \langle 0, \infty))$) úlohy (8)–(10) platí (11) a naopak pro dosti hladké zobecněné řešení jsou splněny rovnice (8)–(10).

Vraťme se k abstraktní úloze (5), (6). Formální použití Laplaceovy transformace na funkci $u : \langle 0, \infty) \mapsto V$ nám rovnici (5) a počáteční podmínku (6) převede na rovnici

$$(12) \qquad p \, \hat{u}(p) - u_0 + A \, \hat{u}(p) = \hat{f}(p) \, .$$

Tohoto vztahu také použijeme k definici slabého řešení ve smyslu Laplaceovy transformace:

Definice 3. Buď $f \in L_2(0, \infty; H)$, $u_0 = 0$. Řekneme, že úloha (5), (6) má slabé řešení, jestliže existuje funkce $U : \{p \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\ p > 0\} \mapsto V$, která je holomorfní a taková, že platí

$$(13) \qquad (p \, U(p), v)_H + \langle A \, U(p), v \rangle = (\hat{f}(p), v)_H \quad \text{pro} \quad v \in V \, ,$$

$$(14) \qquad \sup_{\sigma > 0} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \|U(\sigma + i\tau)\|_V^2 \, \mathrm{d}\tau < \infty \, .$$

Nerovnost (14) nám zaručuje existenci funkce $u \in L_2(0, \infty; V)$ takové, že $\hat{u}(p) = U(p)$. Tímto u pak rozumíme slabé řešení.

Poznámka 4. Uvědomíme-li si význam rovnice (13) a definici Laplaceovy transformace např. ve speciálním případě (8)–(10), vidíme, že použití Laplaceovy transformace lze chápat jako použití speciálních testovacích funkcí tvaru $\varphi(x, t) = e^{-pt} \, v(x)$, $v \in V$ při definici zobecněného řešení ve smyslu testovacích funkcí.

Definice 3 nám umožnila se zbavit derivace a další výsledky lze očekávat od podrobnějšího zkoumání operátoru A, tj. v podstatě od řešení eliptických diferenciálních rovnic.

Věta 5. *Nechť platí*

$$(15) \qquad \exists c_2 > 0 \quad \forall u \in V: \mathrm{Re} \langle Au, u \rangle \geqq c_2 \|u\|_V^2 \, ,$$

a buď $u_0 = 0$. *Potom existuje právě jedno slabé řešení úlohy* (5), (6).

Důkaz. Z (15) (tzv. V-elipticita operátoru A) snadno dostaneme

$$\left|(pu, u)_H + \langle Au, u\rangle\right| \geqq c_2\|u\|_V^2\,, \quad u \in V\,, \quad \operatorname{Re} p > 0\,.$$

Můžeme tedy použít Laxovu-Milgramovu větu (viz např. [8]):

Věta (Laxova-Milgramova). *Budiž $S(u, v)$ sesquilineární forma definovaná na Hilbertově prostoru H (tj. zobrazení $S : H \times H \mapsto \mathbb{C}$ lineární v první a antilineární ve druhé proměnné: $S(u, v + w) = S(u, v) + S(u, w)$, $S(u, \lambda v) = \bar{\lambda}\, S(u, v)$), která je spojitá a splňuje podmínku*

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall v \in H : \left|S(v, v)\right| \geqq \alpha\|v\|_H^2\,.$$

Pak ke každému spojitému lineárnímu funkcionálu ϕ na H existuje právě jeden prvek $u \in H$ tak, že platí

$$\phi(v) = S(v, u)\,, \quad \forall v \in H\,,$$

přičemž $\|u\|_H \leqq (1/\alpha)\,\|\phi\|_{H^*}$.

Podle této věty pro každé $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > 0$ existuje $U(p) \in V$ jež je řešením rovnice (13) a zároveň je vidět jednoznačnost řešení.

Zbylé vlastnosti funkce U pak plynou z toho, že rezolventa

$$R(p) \equiv (pI - A)^{-1} : \tilde{V} \mapsto V$$

je holomorfní operátorová funkce, $\|R(p)\| \leqq 1/c_2$.

Poznámka 7. Podmínka (15) je ve speciální úloze (8)–(10) splněna, požadujeme-li elipticitu koeficientů a_{ij}, tj. platí-li:

$$\exists c_3 > 0 \ \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{C}^N \ \forall \text{s.v. } x \in \Omega : \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\, \xi_i \bar{\xi}_j \geqq c_3 \sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^2\,.$$

Poznámka 8 (o regularitě „v prostoru“). Máme-li ještě další dva Hilbertovy prostory $H_1 \subset V$, $H_2 \subset V$ a zjistíme-li, že rezolventa $R(p)$ jako operátor z H_2 do H_1 je holomorfní zobrazení omezené pro $\operatorname{Re} p > 0$, můžeme ve vztahu (14) uvažovat normu v H_1 a dostaneme řešení $u \in L_2(0, \infty; H_1)$.

V našem konkrétním modelu (8)–(10) můžeme např. brát $H_2 = L_2(\Omega)$, $H_1 = W^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$, v případě hladké oblasti a koeficientů vidíme, že jde o regularitu eliptické diferenciální rovnice.

Poznámka 9 (o regularitě v čase). Máme-li navíc $f' \in L_2(0, \infty; H_2)$, $f(0) = 0$, je

$$\sup_{\operatorname{Re} p > 0} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |p|^2)\, \|\hat{f}(\sigma + i\tau)\|_{H_2}^2\, \mathrm{d}\tau < \infty\,,$$

odkud

$$\sup_{\operatorname{Re} p > 0} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |p|^2) \, \|\hat{u}(\sigma + i\tau)\|_{H_1}^2 \, d\tau < \infty ,$$

takže je $u' \in L_2(0, \infty; H_1)$, tedy také $u \in C(\langle 0, \infty); H_1)$, má smysl $u(0)$ a je $u(0) = u_0 = 0$.

Podobně můžeme uvažovat vyšší derivace.

Poznámka 10 (o splnění původní rovnice). Předpokládejme, že o operátoru A dále platí

$$\operatorname{Im} \langle Au, u \rangle \leqq c_4 \|u\|_H^2 \quad \forall u \in V . \tag{16}$$

Dosadíme-li do (13) speciálně $v = \hat{u}(p)$, dostaneme

$$\sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |p|^2) \, \|\hat{u}(\sigma + i\tau)\|_H^2 \, d\tau \leqq c \sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{f}(p)\|_H^2 \, dp .$$

Odtud $u' \in L_2(0, \infty; H)$ $(u(0) = 0)$, takže $u' \in L_2(0, \infty; \tilde{V})$, a tedy pro s.v. $t \in (0, \infty)$ je ve smyslu $\tilde{V}$ splněna původní rovnice (5).

Doposud jsme se zabývali případem $A \in \mathscr{L}(V; \tilde{V})$. Uvažujme nyní operátor

$$B : \mathbb{D}(B) \subset V \to H$$

obecně neomezený, ale uzavřený s hustým definičním oborem $(\overline{\mathbb{D}(B)} = H)$.

Na $\mathbb{D}(B)$ zavádíme normu grafu, indukovanou skalárním součinem

$$(u, v)_{\mathbb{D}(B)} = (u, v)_V + (Bu, Bv)_H , \quad u, v \in V ,$$

při které je $\mathbb{D}(B)$ díky uzavřenosti B úplný.

Modifikujme nyní pro tento případ definici řešení:

Definice 11. Buď $f \in L_2(0, \infty; H)$, $u_0 \in \mathbb{D}(B)$. Řekneme, že úloha $u' + Bu = f$, $u(0) = u_0$ má slabé řešení ve smyslu Laplaceovy transformace, jestliže existuje funkce $U : \{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} p > 0\} \mapsto U(p) \in \mathbb{D}(B)$ holomorfní pro $\operatorname{Re} p > 0$ taková, že

$$p\,U(p) - u_0 + B\,U(p) = \hat{f}(p) , \quad \forall \operatorname{Re} p > 0 , \tag{17}$$

$$\sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|U(\sigma + i\tau)\|_{\mathbb{D}(B)}^2 \, d\tau < \infty . \tag{18}$$

Existuje tedy $u \in L_2(0, \infty; \mathbb{D}(B))$ taková, že $\hat{u}(p) = U(p)$; slabým řešením míníme tuto funkci u.

Nyní dostaneme větu (s jistou modifikací) jako v [6]:

Věta 12. *Nechť platí*

$$\exists c_5 > 0 \,\forall \operatorname{Re} p > 0 : \|(pI + B)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H;H)} \leqq \frac{c_5}{1 + |p|} . \tag{19}$$

Potom pro každé $u_0 \in \mathbb{D}(B)$ existuje právě jedno slabé řešení úlohy $u' + Bu = f$, $u(0) = u_0$.

Důkaz. Nerovnost (19) zaručuje, že

$$\|(pI + B)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H;\mathbb{D}(B))} \leqq c .$$

Položíme-li v případě $u_0 = 0$

$$U(p) = (pI + B)^{-1} \hat{f}(p) ,$$

dostaneme z předchozí nerovnosti příslušné vlastnosti U. Pro $u_0 \neq 0$, $u_0 \in \mathbb{D}(B)$ pak stačí využít toho, že funkce $u_0 e^{-t}$ je partikulární řešení.

Poznámka 13. Podmínka (19) je splněna např. platí-li: B je samoadjungovaný a

$$\exists c_6 > 0 \;\forall u \in \mathbb{D}(B) : (Bu, u)_H \geqq c_6 \|u\|_H^2 .$$

Nerovnost (19) s $c_5 \leqq 1$, uvažovaná jen pro p přirozená, je podle Hilleho-Yosidovy věty (viz [8]) nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby operátor $-B$ byl infinitesimálním generátorem pologrupy neexpanzivních operátorů $\{T(t)\}_{t \geqq 0} \subset \mathscr{L}(H; H)$. (Pak pro každé $u_0 \in \mathbb{D}(B)$ je funkce $u(t) = T(t)\, u_0$ $C^{(1)}$ – řešením úlohy $u' + Bu = 0$, $u(0) = u_0$.)

Platnost (19) pro $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > 0$ (s obecnou konstantou c_5) pak zaručuje dokonce existenci holomorfní operátorové pologrupy s infinitesimálním generátorem $-B$.

DODATEK

Důkaz tvrzení 1. Jelikož $du/dt = u'$ s.v. v $(0, \infty)$, plyne vztah (2) z věty o integraci per partes (vzhledem k předpokladům je funkce u absolutně spojitá).

Důkaz rovnosti (3). Pro funkci $g \in L_2(\mathbb{R}, H)$ můžeme běžným způsobem zavést její Fourierovu transformaci $\tilde{g} \in L_2(\mathbb{R}, H)$; pro $g \in L_2(\mathbb{R}, H) \cap L_1(\mathbb{R}, H)$ je definována předpisem

$$\tilde{g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\tau} g(t) \, dt ;$$

protože $L_2(\mathbb{R}, H) \cap L_1(\mathbb{R}, H)$ je hustý v $L_2(\mathbb{R}, H)$ a platí Parsevalova rovnost, lze tento předpis rozšířit na $L_2(\mathbb{R}, H)$. Důkaz Parsevalovy rovnosti pro reálné funkce je uveden např. v [4], [9] a lze jej snadno zobecnit na náš případ. Platí tedy: Jsou-li $g, h \in L_2(\mathbb{R}, H)$, pak

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{g}(t), \tilde{h}(t)) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} (g(t), h(t)) \, dt .$$

Položme nyní $u(t) = 0$ pro $t < 0$. Pak se snadno ověří, že

$$\hat{u}(\sigma + i\tau) = \widetilde{(e^{-\sigma t} u(t))} (\tau)$$

pro $\sigma > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$. Nyní podle Parsevalovy rovnosti

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{u}(\sigma + i\tau)\|^2 \, d\tau = \int_0^{\infty} \|e^{-\sigma t} u(t)\|^2 \, dt ,$$

tedy stačí dokázat, že

$$\sup_{\sigma > 0} \int_0^{\infty} \|e^{-\sigma t} u(t)\|^2 \, dt = \int_0^{\infty} \|u(t)\|^2 \, dt ,$$

avšak k tomu zřejmě stačí, aby

$$\lim_{\sigma \to 0+} \int_0^{\infty} e^{-2\sigma t} \|u(t)\|^2 \, dt = \int_0^{\infty} \|u(t)\|^2 \, dt .$$

Tato rovnost ale vyplývá z věty o Lebesgueově integrálu závislém na parametru, jejíž předpoklady lze snadno ověřit (za integrabilní majorantu lze vzít přímo $\|u(t)\|^2$).

Důkaz věty 2 pro reálné funkce je uveden např. v [4], důkaz dodatku v [2]. Nechť $\sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|U(\sigma + i\tau)\|^2 \, d\tau = A < +\infty$. Nejprve potřebujeme dokázat, že pro každé $\delta > 0$ je U omezená na množině $\{p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} p \geqq \delta\}$. Zvolme tedy takové δ. Nechť $0 < \varrho < \delta$. Pak pro $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p \geqq \delta$ je podle Cauchyovy věty, jejíž platnost pro holomorfní funkce s hodnotami v Hilbertově prostoru H lze snadno ověřit,

$$U(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varrho(p)} \frac{U(z)}{z - p} \, dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(p + \varrho e^{i\varphi}) \, d\varphi ,$$

tedy

$$\tfrac{1}{2}\delta^2\|U(p)\| = \left(\int_0^\delta \varrho\,\mathrm{d}\varrho\right)\|U(p)\| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\delta\rangle}\|U(p+\varrho e^{i\varphi})\|\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varrho =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|\sigma+i\tau-p|\leqq\delta}\|U(\sigma+i\tau)\|\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{|\sigma-\mathrm{Re}\,p|\leqq\delta}\left(\int_{|\tau-\mathrm{Im}\,p|\leqq\delta}\|U(\sigma+i\tau)\|\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\sigma \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{|\sigma-\mathrm{Re}\,p|\leqq\delta}\left(\int_{|\tau-\mathrm{Im}\,p|\leqq\delta}\|U(\sigma+i\tau)\|^2\,\mathrm{d}\tau\int_{|\tau-\mathrm{Im}\,p\leqq\delta|}\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}\mathrm{d}\sigma \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{|\sigma-\mathrm{Re}\,p|\leqq\delta}(A\,.\,2\delta)^{1/2}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{(A\,.\,2\delta)^{1/2}\,.\,2\delta}{2\pi},$$

odkud

$$\|U(p)\| \leqq \frac{2}{\pi}\left(\frac{2A}{\delta}\right)^{1/2}.$$

Položme pro $x \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$$\phi(x,\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\sigma+i\tau)\frac{1}{(\sigma+i\tau)^2}\,e^{(\sigma+i\tau)x}\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{20}$$

Zvolme pevně $x \in \mathbb{R}$. Nechť $\sigma > 0$, $\vartheta > \sigma$. Ukážeme, že $\phi(x,\sigma) = \phi(x,\vartheta)$. Pro každé $a > 0$ definujeme

$$K_a = \{p;\ \mathrm{Re}\,p \in \langle\sigma,\vartheta\rangle,\ \mathrm{Im}\,p = a \text{ nebo } \mathrm{Im}\,p = -a\}\,,$$

$$M_a = \{p;\ \mathrm{Re}\,p = \sigma \text{ nebo } \mathrm{Re}\,p = \vartheta,\ \mathrm{Im}\,p \in \langle -a, a\rangle\}\,,$$

zorientujeme-li nyní křivku $\Gamma_a = K_a \cup M_a$, je

$$\int_{\Gamma_a} U(p)\,p^{-2}e^{px}\,\mathrm{d}p = 0$$

neboť Γ_a je uzavřená křivka a integrand je holomorfní v $\{p;\ \mathrm{Re}\,p > 0\}$. Podle předchozího existuje $B > 0$ tak, že $\|U(p)\| \leqq B$ na $\{p;\ \mathrm{Re}\,p \geqq \sigma\}$. Dále

$$\|\phi(x,\vartheta) - \phi(x,\sigma)\| \leqq \lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi}\left\|\int_{K_a} U(p)\,p^{-2}e^{px}\,\mathrm{d}p\right\| \leqq$$

$$\leqq \frac{B}{2\pi}\,.\lim_{a\to\infty}\int_{K_a}|p^{-2}e^{px}|\,\mathrm{d}p \leqq \frac{B}{2\pi}(e^{\sigma x}+e^{\vartheta x})\lim_{a\to\infty}\int_\sigma^\vartheta\frac{1}{\lambda^2+a^2}\,\mathrm{d}\lambda \leqq$$

$$\leqq \frac{B}{2\pi}(e^{\sigma x}+e^{\vartheta x})\,.\lim_{a\to\infty}\frac{\pi}{a} = 0\,.$$

Je tedy $\phi(x, \sigma)$ konstantní podle σ a lze psát $\phi(x, \sigma) = \phi(x)$. Nechť $x < 0$, $\sigma > 0$, $a > 0$, $\|U\| \leqq B$ pro $\operatorname{Re} p > \sigma$. Pak podle Cauchyovy věty

$$\left\| \int_{\sigma - ia}^{\sigma + ia} U(p)\, p^{-2} e^{px}\, \mathrm{d}p \right\| = \frac{1}{r} \left\| \int_{-\theta}^{\theta} U(re^{i\varphi}) \exp(xre^{i\varphi} - i\varphi)\, \mathrm{d}\varphi \right\| \leqq$$

$$\leqq \frac{B}{r} \int_{-\theta}^{\theta} \exp(xr \cos \varphi)\, \mathrm{d}\varphi \leqq \frac{B\pi}{r},$$

integrovali jsme po křivce $p = re^{i\varphi}$, $\operatorname{Re} p > \sigma$, $r^2 = \sigma^2 + a^2$, $|\varphi| \leqq \theta < \pi$. Odtud

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} U(p)\, p^{-2} e^{px}\, \mathrm{d}p = 0,$$

tedy $\phi(x) = 0$ pro $x < 0$.

Pro $\sigma > 0$ je podle Hölderovy nerovnosti $U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-1} \in L_1(\mathbb{R})$. (20) lze zřejmě derivovat a derivace je záměnná s integrálem, takže

$$\phi'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-1} e^{(\sigma + i\tau)x}\, \mathrm{d}\tau. \tag{21}$$

Funkce ϕ' je spojitá v $\mathbb{R}$ a podle předchozího je $\phi'(x) = 0$ pro $x < 0$, tedy $\phi'(x) = 0$ pro $x \leqq 0$. (21) lze opět derivovat a

$$\phi''(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sigma + i\tau)\, e^{(\sigma + i\tau)x}\, \mathrm{d}\tau$$

je spojitá na $\mathbb{R}$, tedy $\phi'' \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Dále

$$\phi(x) = \int_0^x \left(\int_0^y \phi''(z)\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y. \tag{22}$$

Pro $\sigma > 0$ je z (20)

$$e^{-\sigma x} \phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-2} e^{i\tau x}\, \mathrm{d}\tau.$$

Protože $U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-2} \in L_2(\mathbb{R})$, je

$$\lim_{a \to \infty} \left\| \int_{-a}^{a} e^{-\sigma x} \phi(x)\, e^{-i\tau x}\, \mathrm{d}x - U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-2} \right\|_{L_2} = 0$$

(podle věty o inverzní Fourierově transformaci). Integrál určující $\hat{\Phi}(\sigma + i\tau)$ konverguje, tedy $\hat{\Phi}(\sigma + i\tau) = U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-2}$ a jako v důkazu (2) je

$$\int_0^\infty \phi''(x)\, e^{-px}\, dx = p^2\, \hat{\Phi}(p) = p^2\, U(p)\, p^{-2} = U(p)\,.$$

Dokážeme-li, že $\phi'' \in L_2(\mathbb{R})$, je ϕ'' podle předchozího hledanou funkcí a $U(p) = \widehat{\phi''}(p)$, Re $p > 0$. Dokázali jsme, že $\phi'' \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, ale z věty o integraci per partes je

$$\int_0^\infty \phi''(x)\, e^{-\sigma x}\, dx = \sigma \int_0^\infty \phi'(x)\, e^{-\sigma x}\, dx\,,$$

neboť ϕ' je z $L_1(\mathbb{R})$ a je spojitá, takže $\phi'' \in L_1(\mathbb{R})$ a podle Parsevalovy rovnosti

$$(23)\qquad \int_{-\infty}^\infty \|U(\sigma + i\tau)\|^2\, d\tau = 2\pi \int_{-\infty}^\infty \|\widehat{(\phi''(x)\, e^{-\sigma x})}(\tau)\|^2\, d\tau =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^\infty \|\phi''(x)\|^2\, e^{-2\sigma x}\, dx\,,$$

z toho ovšem vyplývá, že $\phi'' \in L_2(\mathbb{R})$.

Nechť $u \in L_2(0, \infty; H)$, $\sigma > 0$. Položme $u(x) = 0$ pro $x < 0$. Pak

$$\int_0^\infty \|u(x)\|\, e^{-\sigma x}\, dx \leqq \left(\int_0^\infty \|u(x)\|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty e^{-2\sigma x}\, dx\right)^{1/2} < +\infty\,,$$

takže

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma + i\tau)x}\, u(x)\, dx$$

je absolutně konvergentní v $\sigma + i\tau$ pro všechna $\tau \in \mathbb{R}$ a $\hat{u}$ je holomorfní na $\{p \in \mathbb{C}$, Re $p > 0\}$. Obdobně jako v (23)

$$\sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^\infty \|\hat{u}(\sigma + i\tau)\|^2\, d\tau = \sup_{\sigma > 0} 2\pi \int_{-\infty}^\infty \|u(x)\|^2\, e^{-2\sigma x}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^\infty \|u(x)\|^2\, dx < +\infty\,.$$

V první části jsme ukázali, že

$$\phi'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-1}\, e^{(\sigma + i\tau)x}\, d\tau\,,$$

ale $\phi''(x) = u(x)$, neboť z (3) plyne: $\hat{u} = 0 \Rightarrow u = 0$ s. v. Tedy platí dodatek.