Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

HARMONICKÉ FUNKCE A VĚTY O PRŮMĚRU

IVAN NETUKA, Praha

(Došlo dne 16. srpna 1974)

Od doby, kdy S. LAPLACE odvodil, že potenciál gravitačního pole hmotného tělesa splňuje jistou diferenciální rovnici (později pojmenovanou jeho jménem), uplynulo takřka 200 let. Funkce splňující Laplaceovu rovnici byly v minulém století nazvány lordem Kelvinem harmonické funkce a jejich studium se stalo předmětem teorie potenciálu. O harmonických funkcích byly napsány stovky vědeckých prací a desítky knih a z teorie potenciálu, která tvořila zpočátku kapitolu matematické fyziky, se stala velmi rozvinutá samostatná matematická disciplína, která ovlivnila řadu oblastí matematiky.

Naším cílem je všimnout si pozoruhodné vlastnosti harmonických funkcí vyjádřené Gaussovou větou o aritmetickém průměru (viz věta 2). Vzniká otázka, do jaké míry je tato vlastnost charakteristická pro harmonické funkce a v jakém smyslu platí „obrácení" Gaussovy věty. Přestože první výsledky z této problematiky byly známy již na počátku tohoto století, v posledních letech se objevila řada prací, které podávají zcela nové výsledky v tomto směru. Pokusíme se předložit přehled této problematiky a uvedeme hlavní výsledky (většinou bez důkazů), kterých bylo dosaženo.

Abychom mohli výsledky přesně formulovat, zavedeme nejprve označení, kterého budeme užívat, a připomeneme důležité definice.

Pro přirozené číslo m znamená E_m m-rozměrný euklidovský prostor a pro množinu $M \subset E_m$ označíme $\overline{M}$, ∂M a $\operatorname{int} M$ uzávěr, hranici a vnitřek množiny M. Je-li $x \in E_m$ a $M \subset E_m$, $d(x, M)$ značí vzdálenost bodu x od množiny M. Pro $y \in E_m$ a $r > 0$ označíme $\Omega_r(y) = \{z; |z - y| < r\}$ (koule) a $\Gamma_r(y) = \partial\Omega_r(y)$. Povrch jednotkové koule označíme σ_m, její objem α_m. Poznamenejme, že $\sigma_m = m\alpha_m$ a povrch koule $\Omega_r(y)$ je roven $\sigma_m r^{m-1}$; dále platí $\mu_m(\Omega_r(y)) = \alpha_m r^m$, kde μ_m je m-rozměrná Lebesgueova míra v E_m. Je-li funkce u lebesgueovsky integrovatelná na kouli $\Omega = \Omega_r(y)$, položíme

$$A(u; y, r) = \frac{1}{\alpha_m r^m} \int_\Omega u \, d\mu_m .$$

Podobně pro funkci u integrovatelnou vzhledem k plošné míře σ na $\partial\Omega$ označíme

$$L(u; y, r) = \frac{1}{\sigma_m r^{m-1}} \int_{\partial\Omega} u \, d\sigma .$$

(O elementárním zavedení plošného integrálu přes hranici koule se čtenář může poučit v [45].) Číslo $A(u; y, r)$ (resp. $L(u; y, r)$) budeme nazývat objemovým (resp. sférickým) průměrem funkce u přes kouli $\Omega_r(y)$ (resp. přes sféru $\Gamma_r(y)$). Pro $m = 1$ je ovšem $L(u; y, r)$ aritmetickým průměrem čísel $u(y + r)$ a $u(y - r)$.

Zopakujeme si ještě definici a základní vlastnosti harmonických funkcí. Nechť $G \subset E_m$ je otevřená množina a nechť u je funkce na G. Říkáme, že funkce u je harmonická na G, je-li tam spojitá a pro každé $x \in G$ platí

$$\Delta u(x) := \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} = 0 . \tag{1}$$

(Kromě spojitosti žádáme tedy jen, aby napsané derivace existovaly a platila Laplaceova rovnice (1).) Pro $m = 1$ znamená ovšem (1) rovnici $u'' = 0$, takže v $G \subset E_1$ jsou harmonické právě všechny funkce, které jsou lineární na každém intervalu obsaženém v G.

O harmonických funkcích a o různých vlastnostech průměrů se čtenář může poučit např. v [45], [53], [35], [9], [43]; pro naše účely postačí připomenout následující větu o vyjádření harmonické funkce Poissonovým integrálem.

Věta 1. *Nechť funkce u je harmonická funkce na otevřené množině obsahující uzávěr koule $\Omega = \Omega_r(y)$ a nechť $x \in \Omega$. Potom*

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_m r} \int_{\partial\Omega} \frac{r^2 - |y - x|^2}{|z - x|^m} \, u(z) \, d\sigma(z) . \tag{2}$$

Poissonův integrál vyjadřuje tedy hodnotu harmonické funkce v každém bodě koule Ω pomocí známých hodnot na $\partial\Omega$. Důkaz věty lze nalézt např. v [45], [35]. Položíme-li speciálně $x = y$, dostáváme následující větu.

Věta 2. *Nechť funkce u je harmonická v otevřené množině $G \subset E_m$. Potom pro každou kouli $\Omega = \Omega_r(x)$, pro niž $\bar{\Omega} \subset G$, platí*

$$u(x) = L(u; x, r) . \tag{3}$$

Jinak řečeno, hodnota harmonické funkce ve středu koule je rovna průměru hodnot na hranici. Věta 2 se v literatuře uvádí často jako Gaussova věta o aritmetickém průměru harmonických funkcí. Citujme zde obecnější větu, kterou C. F. GAUSS uvádí ve své práci z r. 1840 (viz [30], str. 222):

Lehrsatz. *Bedeutet V das Potential einer wie immer vertheilten Masse in dem Elemente einer mit dem Halbmesser R beschriebenen Kugelfläche* ds, *so wird, durch die ganze Kugelfläche integrirt,*

$$\int V \, \mathrm{d}s = 4\pi(RM^0 + RRV^0)$$

wenn man mit M^0 die ganze im Innern der Kugel befindliche Masse, mit V^0 das Potential der ausserhalb befindlichen Masse in Mittelpunkt der Kugel bezeichnet, und dabei die Massen, die etwa auf der Oberfläche der Kugel stetig vertheilt sein mögen, nach Belieben den äussern oder innern Massen zuordnet.

Pro případ, že uvnitř uvažované koule není žádná hmota, dostáváme (pro E_3) rovnost (3). Přestože věta 2 bývá spojována s Gaussovým jménem, byla známa dříve. Objevuje se v práci S. Earnshawa (Cambr. Trans. 7, str. 97) v roce 1839 (viz [19], str. 480).

Z (3) ihned dostaneme (integrací) následující verzi věty 2 pro objemové průměry.

Věta 3. *Za předpokladů z věty 2 platí*

$$u(x) = A(u; x, r)\,. \tag{4}$$

Poznamenejme, že někteří autoři požadují v definici harmonické funkce, aby u měla spojité parciální derivace 2. řádu. Potom lze větu 2 dokázat bez užití Poissonova integrálu na základě věty o vyjádření hladké funkce pomocí tří potenciálů (srv. [35]).

Pozoruhodná vlastnost harmonických funkcí vyjádřená ve větách 2, 3 nás přivádí k následující otázce: Jak vypadají všechny funkce, které mají vlastnost průměru (3) nebo (4)?

Zamysleme se nejprve nad touto otázkou pro případ E_1. Snadno je vidět, že každá funkce f definovaná v E_1, pro niž $f(0) = 0$, má vlastnost sférického průměru, právě když splňuje Cauchyovu funkcionální rovnici

$$f(x + y) = f(x) + f(y)\,, \quad x, y \in E_1\,. \tag{5}$$

Nelze očekávat, že každá funkce splňující (5) bude harmonická (tj. lineární), neboť víme, že existují nespojitá (dokonce neměřitelná) řešení rovnice (5) (viz [40]). Na druhé straně však každé spojité řešení (5) je již lineární funkce. Speciálně tedy spojité funkce, mající vlastnost průměru, jsou lineární. Jak vypadá tato situace v prostorech vyšší dimenze? Je zajímavé, že vlastnost průměru vymezuje mezi spojitými funkcemi právě funkce harmonické.

Věta 4. *Nechť G je otevřená podmnožina v E_m a u je spojitá funkce na G. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *u je harmonická v G;*

(ii) *pro každé $t \in G$ a každé r, $0 < r < d(t, \partial G)$, platí*

$$u(t) = L(u; t, r)\,;$$

(iii) *pro každé* $t \in G$ *a každé* r, $0 < r < d(t, \partial G)$, *platí*

$$u(t) = A(u; t, r);$$

(iv) *pro každé* $t \in G$ *a každé* $r > 0$, $0 < r < d(t, \partial G)$, *platí*

$$L(u; t, r) = A(u; t, r).$$

Je užitečné si uvědomit, že pro případ souvislé množiny G a funkce u s vlastností (ii) (resp. (iii)) platí následující ostrý princip maxima a minima: Jestliže u nabývá buď maxima nebo minima v některém bodě z G, potom je konstantní. Je-li totiž M např. množina všech bodů z G, v nichž u nabývá svého maxima, je M uzavřená v G (u je spojitá) a z (ii) (resp. (iii)) plyne, že M je otevřená. Je tedy buď $M = \emptyset$ nebo $M = G$.

Při důkazu implikace (ii) $\Rightarrow$ (i) (resp. (iii) $\Rightarrow$ (i)) lze postupovat nyní takto: Zvolíme libovolně $y \in G$ a $R > 0$ tak, aby $\overline{\Omega_R(y)} \subset G$. Stačí ověřit, že u je harmonická na $\Omega \doteq \Omega_R(y)$. K tomu účelu položme

$$v(x) = \frac{1}{\sigma_m R} \int_{\partial\Omega} \frac{R^2 - |y - x|^2}{|z - x|^m} u(z) \, d\sigma(z), \quad x \in \Omega,$$

a uvažujme funkci w, která je rovna 0 na $\partial\Omega$ a $u - v$ na Ω. Výše uvedený princip maxima a minima dává $w = 0$ v Ω, tedy u je harmonická v Ω (dodejme ještě, že w je spojitá na $\overline{\Omega}$ — to plyne z vlastností Poissonova integrálu).

Všimněme si, že věta 5 dává ekvivalentní definici harmonických funkcí, v níž se nevyskytují žádné podmínky na diferenciální vlastnosti. O implikacích (ii) $\Rightarrow$ (i), (iii) $\Rightarrow$ (i) se často mluví jako o obrácení věty o průměru pro harmonické funkce.

Patrně první obrácení věty o průměru se objevuje v r. 1906 v práci P. KOEBEA [46], jehož větu ocitujeme:

Satz. *Ist u eine in der Ebene oder im Raume erklärte stetige reele Funktion, welche inbezug auf jede ganz im Innern des Definitionsbereiches liegende Kreisfläche bzw. Kugel die erwähnte Gaußsche Mittelwerteigenschaft besitzt, so ist u eine Potentialfunktion.*

Nezávisle podobnou větu dokázal r. 1909 E. LEVI [49] (mimochodem bratr známého italského matematika Beppo Leviho) za obecnějších předpokladů, než spojitosti funkce u; další oslabení pochází od L. TONELLIHO [66]; viz také H. LEBESGUE [48] 1912. Důkaz implikace (iv) $\Rightarrow$ (i) z věty 4 lze nalézt v [5]. Různé důkazy obrácení věty o průměru se vyskytují např. v [9], [13], [44]. Poznamenejme, že větu 4 lze v různých směrech ještě zlepšit. Dá se říci, že ve většině dalšího textu chceme ukázat, v jakém smyslu je to možné.

Začněme několika drobnostmi. Místo podmínky (ii) lze uvažovat podmínku (srv. [61], [50]) (ii′) *pro každé* $s \in G$ *existuje posloupnost* $\{r_n\}$ *kladných čísel taková, že* $\lim r_n = 0$ *a pro všechna* n *platí*

$$u(s) = L(u; s, r_n);$$

nebo podmínkou

(ii″) *existuje hustá podmnožina* $H \subset G$ (*tj.* $\bar{H} = G$) *tak, že pro každé* $s \in H$ *a každé* r, $0 < r < d(s, \partial G)$, *platí*

$$u(s) = L(u; s, r).$$

Předpoklad spojitosti z věty 4 lze také oslabit. Pro platnost (iii) $\Rightarrow$ (i) stačí, aby u byla lebesgueovsky integrovatelná na každé uzavřené kouli obsažené v G (srv. [9], [66]).

V souvislosti s větou 4 můžeme formulovat dva různé problémy. (Pro jednoduchost předpokládejme, že u je spojitá na otevřené množině $G \subset E_m$.)

Problém 1. *Nechť* $S \subset G$ *a nechť pro každé* $s \in S$ *a každé* r, $0 < r < d(s, \partial G)$, *platí* $u(s) = L(u; s, r)$. *Jak „velká" musí být množina* S, *abychom mohli usoudit, že* u *harmonická?*

Problém 2. *Pro „kolik" poloměrů* r *musíme v každém bodě* $s \in G$ *požadovat platnost rovnosti* $u(s) = L(u; s, r)$, *aby* u *byla harmonická?*

V souvislosti s problémem 1 jsme uvedli, že hustá podmnožina je dostatečně „velká". Daleko hezčí větu však dokázal pro případ $G = E_m$ L. Flatto [25] 1965.

Věta 5. *Nechť* u *je spojitá funkce v* E_m *a nechť* $S \subset E_m$. *Předpokládejme, že* $\operatorname{int} \bar{S} \neq \emptyset$ (*tj.* S *není řídká*). *Jestliže pro každé* $s \in S$ *a každé* $r > 0$ *platí*

$$u(s) = L(u; s, r),$$

potom je u *harmonická v* E_m.

Vrátíme se k problému 2 a budeme poněkud přesnější. V roce 1956 formuloval J. Mařík [52] následující úlohu:

Úloha. *Rozhodněte, zda platí tato věta: Buď* f *spojitá funkce na množině* G, *která je otevřená v* E_m. *Nechť ke každému* $s \in G$ *existuje* $r > 0$ *tak, že* $\Omega_r(s) \subset G$ *a* $f(s) = A(f; s, r)$. *Potom je funkce* f *harmonická na množině* G.

V [54] 1969 je sestrojen příklad, který ukazuje, že uvedená věta neplatí. V tomto příkladě je $G = E_m$ a prohlédneme-li si konstrukci, vidíme, že pro některá s je třeba zvolit příslušné r „hodně" malé a pro jiná naopak „hodně" velké. Nic se ovšem nezachrání, ani když budeme požadovat, aby příslušný poloměr byl pro všechny body stejný. Tuto situaci ilustruje následující příklad v E_1. Nechť $\gamma = \alpha + i\beta$, je (nenulový) kořen rovnice

$$\frac{\sin \gamma r_0}{\gamma r_0} = 1$$

(kde $r_0 > 0$ je předem zadaný „poloměr"). Potom pro funkci

$$q(t) = e^{-\beta t} \cos \alpha t$$

(která není lineární!) platí

$$q(\eta) = \frac{1}{2r_0} \int_{\eta - r_0}^{\eta + r_0} q(\xi) \, d\xi \,, \quad \eta \in E_1 \,.$$

Položíme-li např. $u(x) = u(x_1, \ldots, x_m) = q(x_1)$, spočteme, že platí $u(x) = L(u; x, r_0)$ pro všechna $x \in E_m$ (viz [13], str. 280). Vidíme, že informace o sférickém či objemovém průměru (spojité funkce v E_m) pro jeden poloměr v každém bodě nestačí k tomu, abychom mohli tvrdit, že u je harmonická. Nic se dokonce nezmění, požadujeme-li, aby množina G byla omezená a u spojitá omezená na G. Lze například sestrojit funkci f (viz [13], str. 281), která je omezená a spojitá na intervalu $(a, b) \subset E_1$, nelineární, a přitom pro každé $x \in (a, b)$ existuje r tak, že $a < x - r < x + r < b$ a

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(f(x + r) + f(x - r)) \,.$$

Pro zmíněnou funkci neexistují $\lim_{x \to a+} f(x)$, $\lim_{x \to b-} f(x)$ a později uvidíme, že to není náhoda.

K problematice vět „s jedním poloměrem" se ještě vrátíme. Zatím si budeme pamatovat, že bez dodatečných předpokladů je jeden poloměr nedostačující. Je překvapivé, že dva poloměry již poskytují dostatečnou informaci. Přesněji to vyjadřuje tato pozoruhodná věta.

Věta 6. *Pro každé $m \geqq 2$ přirozené existuje konečná množina $K(m)$ tak, že platí následující tvrzení: Nechť u je spojitá funkce v E_m, a, b různá kladná reálná čísla. Jestliže pro každé $x \in E_m$ platí*

$$u(x) = L(u; x, a) = L(u; x, b)$$

a $a/b \notin K(m)$, potom u je harmonická v E_m.

Tuto větu dokázal J. Delsarte [15], (1958) (srv. [16], [17]), jiný důkaz podal L. Flatto [25]. Oba důkazy jsou velmi netriviální a užívají náročného aparátu. Delsarte popisuje $K(m)$ (zdůrazněme, že $K(m)$ nezávisí na funkci u!) jako množinu kořenů jisté speciální funkce a tvrdí, že $K(3) = \emptyset$, tedy v E_3 platí věta bez výjimek. Problém, zda pro ostatní m je $K(m) = \emptyset$, se zdá být zatím neřešený.

Při vyšetřování vět uvedeného typu se setkáváme s parciální diferenciální rovnicí hyperbolického typu (Darbouxova rovnice), která úzce souvisí se sférickými průměry. Zmíněná souvislost je popsána v následující větě, jejíž důkaz je uveden například v [13], str. 639.

Věta 7. *Nechť funkce u má spojité parciální derivace druhého řádu v E_m, $m \geqq 2$. Pro $(x, r) \in E_m \times (0, \infty)$ položme $v(x, r) = L(u; x, r)$. Potom pro $(x, r) \in E_m \times \times (0, \infty)$ platí*

$$-\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 v(x, r)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v(x, r)}{\partial r^2} + \frac{m-1}{r} \frac{\partial v(x, r)}{\partial r} = 0 .$$

Věty delsartovského typu jsou vyšetřovány v článku L. ZALCMANA [71] 1972. Zformulujeme je (stejně jako v uvedeném článku) pro případ E_2. Autor uvádí, že věty platí také pro prostory vyšší dimenze. V následující větě je S_0 (resp. S_1) množina všech poměrů z_j/z_k, kde z_j, $z_k \neq 0$ jsou komplexní čísla taková, že $J_0(z_j) = J_0(z_k) = 1$ (resp. $J_1(z_j)/z_j = J_1(z_k)/z_k = \frac{1}{2}$). Přitom J_0, J_1 jsou Besselovy funkce. Důležité je, že „výjimečné" množiny S_0, S_1 jsou spočetné.

Věta 8. *Nechť funkce u je lebesgueovsky integrovatelná na každé kompaktní podmnožině roviny E_2, a, b nechť jsou kladná různá čísla.*

Jestliže pro skoro všechna $x \in E_2$ (vzhledem k μ_2) platí

$$u(x) = L(u; x, a) = L(u; x, b)$$

(resp.

$$u(x) = A(u; x, a) = A(u; x, b))$$

a $a/b \notin S_0$ (resp. S_1), *potom existuje funkce $\tilde{u}$ harmonická v E_2 tak, že $\tilde{u} = u$ μ_2-skoro všude v E_2.*

Později uvidíme, že podobná věta platí také pro holomorfní funkce. Nyní se však vrátíme zpět k větám „s jedním poloměrem". Abychom si udělali představu, jaké věty platí, bude vhodné zavést následující definice. V dalším bude stále G neprázdná oblast v E_m. Funkci δ definovanou na G nazveme G-přípustnou, když pro každé $x \in G$ je $0 < \delta(x) \leqq d(x, \partial G)$. Lebesgueovsky měřitelná funkce u na G se nazývá δ-harmonická, jestliže pro každé $x \in G$ je

$$u(x) = A(u; x, \delta(x))$$

(předpokládáme tedy, že u je integrovatelná na každé kouli $\Omega_{\delta(x)}(x)$). Z věty 3 plyne, že každá harmonická nezáporná funkce na G je δ-harmonická pro libovolnou G-přípustnou funkci δ. (Každá harmonická funkce je δ-harmonická pro každou funkci δ splňující $0 < \delta(x) < d(x, \partial G)$.) Nyní můžeme formulovat následující problém:

Problém. *Za jakých předpokladů na G, δ a u platí, že δ-harmonická funkce u je harmonická?*

Ptáme se tedy, za jakých předpokladů platí obrácení Gaussovy věty „s jedním poloměrem".

Již víme, že předpoklady $G = E_m$, u spojitá, nestačí. Také dokonce nestačí $G = E_1$, u nekonečně diferencovatelná a δ konstantní (příklad na str. 396). V dalším uvedeme řadu různých postačujících podmínek k tomu, aby δ-harmonická funkce byla harmonická.

Začneme následujícím tvrzením, které dokázal F. HUCKEMANN [38] 1954 (viz též str. 22 v [51]).

Věta 9. *Nechť*

a) $G = (-1, 1)$;

b) δ *je libovolná G-přípustná funkce;*

c) *u je spojitá δ-harmonická funkce taková, že existují*

$$\lim_{x\to 1-} \int_0^x u(t)\, \mathrm{d}t\,, \qquad \lim_{x\to -1+} \int_x^0 u(t)\, \mathrm{d}t$$

(event. nevlastní).

Potom je funkce u lineární.

Dříve, než zformulujeme další větu, připomeňme následující definici. Oblast $G \subset E_m$ se nazývá regulární, jestliže pro každou spojitou funkci h na ∂G existuje řešení Dirichletovy úlohy příslušné okrajové podmínce h a množině G (tj. funkci h lze spojitě rozšířit na $\bar{G}$, přičemž toto rozšíření je harmonické na G).

Věta 10. *Nechť*

a) *$G \subset E_m$ je omezená regulární oblast;*

b) *δ je libovolná G-přípustná funkce;*

c) *u je stejnoměrně spojitá δ-harmonická funkce na G.*

Potom je u harmonická funkce na G.

Poznamenejme, že požadavek stejnoměrné spojitosti je ekvivalentní podmínce, že existuje spojité rozšíření $\tilde{u}$ funkce u na $\bar{G}$. Naznačme si myšlenku důkazu této věty. Nechť v je řešení Dirichletovy úlohy příslušné okrajové podmínce $\tilde{u}$ a uvažujme funkci $w = v - \tilde{u}$. Funkce w je spojitá na $\bar{G}$, anuluje se na hranici a

$$w(x) = A(w; x, \delta(x))\,, \quad x \in G\,.$$

Nechť F je množina všech $y \in \bar{G}$, pro něž $w(y) = \max w(\bar{G})$. Kdyby $F \subset G$, zvolili bychom v množině F bod x_0, který má nejbližší vzdálenost k ∂G (F je uzavřená!). Potom by ale bylo $w(x_0) > A(w; x_0, \delta(x_0))$, což není možné. Tedy $F \cap \partial G \neq 0$ a tedy $w \leqq 0$. Zbytek důkazu je snadný. (Srv. s úvahou za větou 4.)

První tvrzení typu vět s „jedním" poloměrem se patrně vyskytuje u V. VOLTERRY [69] 1909. Věta podobná větě 10 (se sférickými průměry) je dokázána v [13], str. 279, obecnější případ vyšetřuje O. D. KELLOG [42] 1934.

Předpoklady, kladené ve větě 10 na G a u jsou velmi silné (a také důkaz byl snadný). První hlubší tvrzení o δ-harmonických funkcích dokázali metodami ergodické teorie M. A. ACKOGLU a R. W. SHARPE v [1] 1968, kteří navázali na FELLERŮV výsledek z [23].

Věta 11. *Nechť*

a) *G je otevřený jednotkový kruh v* E_2;

b) $\delta(x) = 1 - \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$ *pro každé* $x = (x_1, x_2) \in G$;

c) *u je omezená* δ*-harmonická funkce v* G.

Potom funkce u je harmonická v G.

(Průměry se tedy počítají přes maximání kruh obsažený v G.)

V následujících větách se vyskytuje předpoklad, že ∂G je třídy C_1 (resp. lipschitzovská). Velmi zhruba řečeno to znamená, že lokálně se dá ∂G (při vhodné volbě souřadnic) popsat grafem funkce $(m - 1)$ proměnných, která má spojité parciální derivace prvního řádu (resp. je lipschitzovská).

Další věta náleží J. R. Baxterovi [4] 1972. Důkaz je náročný a navazuje na metody užité v [1].

Věta 12. *Nechť*

a) *G je omezená oblast s hranicí třídy* C_1;

b) $\alpha > 0$ *a* δ *je G-přípustná měřitelná funkce, pro niž*

$$\delta(x) \geqq \alpha d(x, \partial G) ;$$

c) *u je omezená* δ*-harmonická funkce.*

Potom u je harmonická v G.

Poslední tři věty o δ-harmonických funkcích jsou dokázány pravděpodobnostními metodami. Poznamenejme, že není nikterak překvapivé, že v souvislosti s harmonickými funkcemi se dostáváme do oblasti teorie pravděpodobnosti. V současné době jsou dosti detailně známy hluboké souvislosti teorie potenciálu a teorie pravděpodobnosti. Zájemce, který by se chtěl seznámit s těmito souvislostmi, odkazujeme pro první informaci např. na článek [12], kde je uvedena příslušná motivace.

Věta, která následuje, pochází od W. A. Veeche [67] 1973 a zobecňuje Baxterův výsledek.

Věta 13. *Nechť*

a) *G je omezená oblast v* E_m *s lipschitzovskou hranicí*;

b) δ *je G-přípustná funkce taková, že* $\inf \delta(K) > 0$ *pro každou kompaktní podmnožinu* $K \subset G$;

c) *u je* δ*-harmonická funkce, pro niž existuje harmonická funkce v na G tak, že* $|u| \leqq v$.

Potom je funkce u harmonická na G.

Další tvrzení je zajímavé tím, že se nepředpokládá nic o množině G. Věta byla dokázána D. Heathem, S. Oreyem (viz [11] 1972) a také zobecňuje větu Baxtera.

Věta 14. *Nechť*

a) *G je libovolná oblast v E_m;*

b) *Existuje funkce g kladná na G a čísla $M \geqq 1$, $\varepsilon > 0$ tak, že $|g(x) - g(y)| \leqq M|x - y|$ pro každé $x, y \in G$, funkce δ je měřitelná na G a*

$$\varepsilon\, g(x) \leqq \delta(x) \leqq g(x) \leqq d(x, \partial G)\,, \quad x \in G\,;$$

c) *u je omezená δ-harmonická funkce na G.*

Potom je funkce u harmonická na G.

S výjimkou věty 13 jsme se setkali s předpokladem omezenosti funkce u. W. A. Veechovi [68] 1974 se podařilo dokázat tuto větu pro libovolné nezáporné funkce:

Věta 15. *Nechť*

a) *G je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí;*

b) *existuje $\alpha > 0$ a funkce r na G tak, že $0 < r(x) \leqq d(x, \partial G)$ na G a*

$$\alpha\, r(x) \leqq \delta(x) \leqq (1 - \alpha)\, r(x)$$

a

$$|r(x) - r(y)| \leqq |x - y|\,, \quad x, y \in G\,;$$

c) *u je konečná nezáporná δ-harmonická funkce na G.*

Potom u je harmonická na G.

Předpoklad, že ∂G je lipschitzovská, se vyskytuje v souvislosti s metodou, kterou W. A. Veech užívá. Metoda se opírá o vlastnosti Martinovy hranice, o níž za obecnějších předpokladů nejsou známy potřebné informace. Není bez zajímavosti, že při důkazu vět 13 a 15 se lze omezit na borelovské funkce u a δ. Ukazuje to následující věta z [67].

Věta 16. *Nechť u je nezáporná δ-harmonická funkce v množině G (δ je libovolná G-přípustná funkce). Potom existují borelovské funkce u_0 a δ_0 tak, že $u_0 \geqq 0$, $u_0 = u$ skoro všude v G, $\delta \leqq \delta_0$ a funkce u_0 je δ_0-harmonická.*

Uveďme zde ještě zmínku o výsledcích S. Alinhace [3] 1972, který metodami klasické analýzy obdržel výsledky podobného druhu, jako ve větách 12–15. Výchozím bodem jeho úvah je jisté zobecnění Darbouxovy rovnice. Předpokládá hladkost hranice, lipschitzovskost δ a uvažuje u z jistých Sobolevových prostorů. Ve skutečnosti však pracuje s obecnějšími průměry než objemovými.

Přestože je známa řada výsledků o δ-harmonických funkcích, stále zůstává otevřena (viz [68])

Veechova domněnka. *Nechť*

a) *G je omezená oblast;*

b) *δ je G-přípustná funkce, pro niž* $\inf \delta(K) > 0$ *pro každou kompaktní část* $K \subset G$;

c) *u je konečná nezáporná δ-harmonická funkce.*

Potom je u harmonické na G.

Uveďme ještě větu zcela jiného typu, která ukazuje, jak pomocí průměrů lze charakterizovat harmonické funkce.

Věta 17. *Nechť u je spojitá funkce v otevřené množině $G \subset E_m$. Potom u je harmonická tehdy a jen tehdy, když pro každé $x \in G$ platí*

$$\tilde{\Delta} u(x) = 0, \tag{6}$$

kde

$$\tilde{\Delta} u(x) = \lim_{r \to 0+} 2m \frac{L(u; x, r) - u(x)}{r^2}.$$

Důkaz této věty lze nalézt například v [9]. Tato věta bývá spojována se jménem W. Blaschke [6] 1916. Je zajímavé, že již v r. 1914 byla dokázána M. Plancherelem [56]. Plyne však z následující věty, kterou S. Zaremba publikoval v [73] 1905 (srv. s poznámkou v [37]).

Věta 18. *Nechť G je otevřená podmnožina E_m. Nechť $\mathscr{L}$ je lineární prostor spojitých funkcí takový, že $C^2(G) \subset \mathscr{L}$. Buď Φ lineární operátor, který každé funkci $u \in \mathscr{L}$ přiřazuje konečnou funkci Φu na G tak, že platí:*

1) *Je-li $u \in C^2(G)$, potom*

$$\Phi u(x) = \Delta u(x), \quad x \in G;$$

2) *Jestliže $u \in \mathscr{L}$ nabývá svého maxima (resp. minima) v bodě $x_0 \in G$, potom $\Phi\, u(x_0) \leqq 0$ (resp. $\Phi\, u(x_0) \geqq 0$).*

Jestliže $v \in \mathscr{L}$ a $\Phi v = 0$ na G, potom je funkce v harmonická na G.

Poznamenejme, že operátor $\tilde{\Delta}$, zavedený ve větě 17, splňuje předpoklady věty 18 (srv. [9]); $\mathscr{L}$ je ovšem množina všech spojitých funkcí, pro něž existuje limita v (6). Věta 17 je tedy důsledkem věty 18. Jako jiný příklad operátoru Φ uveďme (viz [9])

$$\Phi_1 u(x) = \lim_{r \to 0+} \frac{2(m+2)\left(A(u; x, r) - u(x)\right)}{r^2}$$

(prostor $\mathscr{L}$ se definuje podobně, jako nahoře). Poznamenejme, že operátory $\tilde{\Delta}$, Φ_1 se studují v souvislosti se subharmonickými funkcemi (viz např. [59], [60]).

Na okamžik nyní opustíme harmonické funkce a všimneme si krátce vět podobného typu pro funkce holomorfní v komplexní rovině E. Mezi harmonickými funkcemi v otevřené množině $G \subset E_2$ a holomorfními funkcemi v G je velmi těsná souvislost. Především reálná a imaginární část funkce holomorfní v G jsou harmonické funkce v G (plyne z Cauchyových-Riemannových podmínek). Je-li však dána harmonická funkce u v G, není vždy možno nalézt harmonickou funkci v v G tak, aby $u + iv$ byla holomorfní (stačí volit

$$G = E_2 - \{[0, 0]\}, \quad u(x) = u(x_1, x_2) = \log \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}.$$

Na druhé straně je to možné, když G je kruh (viz [45]) (nebo jednoduše souvislá oblast). Lze tedy říci, že každá harmonická funkce je lokálně reálnou částí jisté holomorfní funkce. Snadno lze nahlédnout, že příslušná funkce v (konjugovaná funkce) je určena jednoznačně až na konstantu.

Jednou ze základních vět analýzy v komplexním oboru je Cauchyova věta (viz např. [14]).

Věta 19. *Nechť funkce f je holomorfní v otevřené množině $G \subset E$ a nechť φ je Jordanova křivka konečné délky v G, jejíž vnitřek leží v G. Potom*

$$\int_\varphi f \, dz = 0.$$

Místo abychom formulovali Morrerovu větu (viz např. [61], [34]), která je v jistém smyslu obrácením Cauchyovy věty, uveďme následující zobecnění Morrerovy věty (viz [71]).

Věta 20. *Nechť $\{r_n\}$ je klesající posloupnost kladných čísel s limitou nula a nechť $\Gamma_n(z)$ $(z \in E)$ je kružnice o středu z a poloměru r_n. Předpokládejme, že $G \subset E$ je oblast a f je komplexní funkce definovaná na G a lebesgueovsky integrovatelná na každé kompaktní podmnožině G. Nechť pro skoro všechna $z \in G$ platí*

$$\int_{\Gamma_n(z)} f(\zeta) \, d\zeta = 0$$

pro každé n, pro něž $r_n < d(z, \partial G)$.

Potom existuje funkce $\tilde{f}$ holomorfní v G tak, že $f = \tilde{f}$ skoro všude v G.

Nyní si ovšem můžeme položit analogické otázky, jako v případě harmonických funkcí. Následující věta (v níž K_1 je množina všech podílů z/w, kde z, w jsou kladné kořeny Besselovy funkce J_1) připomíná „delsartovské" věty 6, 8 pro harmonické funkce. Větu dokázal L. Zalcman [71] 1972.

Věta 21. *Nechť komplexní funkce f je lebesgueovsky integrovatelná na každé kompaktní podmnožině E. Předpokládejme, že r_1, r_2 jsou různá reálná kladná čísla taková, že rovnost*

(7) $$\int_{\Gamma_{r_j}(z)} f(\zeta) \, d\zeta = 0$$

platí pro $j = 1, 2$ a skoro všechna $z \in E$. Jestliže $r_1/r_2 \notin K_1$, potom existuje funkce $\tilde{f}$ holomorfní v E tak, že $f = \tilde{f}$ skoro všude v E.

Na první pohled by se zdálo, že výjimečná množina K_1 se ve větě objevila jen z důvodu užité metody důkazu. Věta je hezká tím, že tomu tak není. Pišme $z = \xi + i\eta$ a zvolme libovolně $\alpha > 0$. Potom zvolme čísla $r_1, r_2, \ldots$ tak, aby $r_n\alpha$ byly všechny kladné kořeny funkce J_1. Konečně definujme v E funkci

$$g(z) = \exp(i\alpha\eta)\,.$$

Lze dokázat [71], že pro každé j a každé $z \in E$ platí

$$\int_{\Gamma_{r_j}(z)} g(\zeta)\, d\zeta = 0\,.$$

Funkce g přitom není zřejmě holomorfní. Odtud je ihned vidět, že výjimečnou množinu K_1 nejen nelze vyloučit, ale ani zmenšit. Zároveň je vidět, že větu 21 nelze vylepšit v tom smyslu, že bychom požadovali pro každé $z \in E$ nulový integrál pouze pro jednu kružnici (předem zvoleného poloměru). (Stačí vhodně zvolit α.) Poznamenejme ještě, že kdybychom ve větě 21 předpokládali f spojitou, stačilo by požadovat (7) pro z z husté podmnožiny E.

V analogii mezi harmonickými funkcemi a holomorfními funkcemi musíme však být opatrní. Již jsme poznamenali, že spojitá funkce f na kruhu $\overline{\Omega_1(0)}$ bude harmonická na $\Omega_1(0)$, jestliže pro každé $z \in \Omega_1(0)$ existuje $\delta(z) \in (0, 1 - |z|\rangle$ tak, že

$$f(z) = L(f; z, \delta(z))\,.$$

Jestliže však f je spojitá komplexní funkce na $\overline{\Omega_1(0)}$ taková, že pro každé $z \in \Omega_1(0)$ existuje $\varepsilon(z)$ tak, že $0 < \varepsilon(z) \leqq 1 - |z|$ a

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon(z)}(z)} f(\zeta)\, d\zeta = 0\,, \tag{8}$$

nemusí ještě být takové funkce holomorfní v $\Omega_1(0)$. Stačí volit libovolnou spojitou funkci, která není identicky rovna nule a má nosič v $\Omega_{1/4}(0)$. Řešení následujícího problému není známo [71]:

Problém. *Rozhodněte, zda platí tato věta: Nechť f je spojitá komplexní funkce na $\overline{\Omega_1(0)}$. Buď $\varepsilon : z \mapsto \varepsilon(z)$ spojitá reálná funkce na $\Omega_1(0)$ taková, že $0 < \varepsilon(z) \leqq 1 - |z|$ pro všechna $z \in \Omega_1(0)$. Je-li splněna rovnost (8) pro každé $z \in \Omega_1(0)$, potom je funkce f holomorfní v $\Omega_1(0)$.*

Po této malé odbočce do komplexního oboru se vraťme opět k harmonickým funkcím v E_m. Z věty 3 se snadno odvodí následující tvrzení.

Věta 22. *Pro každou funkci u harmonickou a integrovatelnou na kouli $\Omega = \Omega_r(x_0) \subset E_m$ platí*

$$u(x_0) = \frac{1}{\mu_m(\Omega)} \int_\Omega u(x)\, d\mu_m(x)\,.$$

V souvislosti s touto větou definujme následující pojem. Nechť $G \subset E_m$ je otevřená neprázdná podmnožina konečné míry a nechť $x_0 \in G$. Bod x_0 nazveme harmonickým středem G, jestliže pro každou funkci u harmonickou a integrovatelnou na G platí

$$u(x_0) = \frac{1}{\mu_m(G)} \int_G u(x)\, d\mu_m(x)\,.$$

Viděli jsme, že střed koule je jejím harmonickým středem. Můžeme se ptát, jak vypadají množiny, pro něž existuje harmonický střed. Mohou to být ještě jiná tělesa než koule?

Tato otázka byla zkoumána W. Brödelem [10] 1939 pro konvexní množiny v E_2 (viz citaci [26]; práce [10] mi byla nedostupná) a A. Friedmanem a W. Littmanem v [26] 1962. Výsledky této práce jsou poněkud komplikované a nebudeme je zde uvádět. Poznamenejme, že autoři vyžadují jistou hladkost hranice a uvažují problém trochu složitější. Kromě objemových průměrů vyšetřují případ povrchových průměrů a nakonec zkoumají podobné problémy pro rovnici pro vedení tepla a vlnovou rovnici. Nyní uvedeme výsledky čtyř prací (v žádné z nich není zmínka o [10] a [26]), které se týkají problematiky harmonického středu.

Zajímavé tvrzení dokázal metodami komplexní proměnné (reprodukční jádra, konformní zobrazení) B. Epstein [20] 1962 (srv. s obecnější formulací v [7] 1965).

Věta 23. *Nechť $G \neq \emptyset$ je jednoduše souvislá oblast konečné míry v E_2. Předpokládejme, že $x_0 \in G$ je harmonický střed G. Potom G je kruh o středu x_0.*

I když chronologicky následuje práce [21], všimněme si výsledků, které dokázali M. Goldstein a W. H. Ow [32] 1971. Tato práce navazuje na [20] a všímá si jen rovinného případu. Ve větě 23 byla jednoduchá souvislost vynucena užitou metodou důkazu. V práci [32] je však ukázáno, že pokud hranice G je nesouvislá a není příliš „roztrhaná", množina G nemá harmonický střed. Dříve, než větu zformulujeme, připomeňme, že vlastním kontinuem v E_2 rozumíme uzavřenou souvislou množinu obsahující více než jeden bod.

Věta 24. *Nechť $G \subset E_2$ je oblast konečné míry a nechť ∂G má alespoň dvě různé komponenty, které jsou vlastní kontinua. Potom neexistuje harmonický střed množiny G.*

Poznamenejme, že autoři dokazují poněkud více, než je ve větě uvedeno a zobecňují Epsteinův výsledek (viz následující věta).

Věta 25. *Nechť $G \neq \emptyset$ je oblast konečné míry v E_2. Nechť ∂G má alespoň jednu komponentu, která je vlastní kontinuum. Jestliže x_0 je harmonickým středem množiny G, potom je G kruh o středu x_0.*

Problém (v rovině) tedy není zatím touto větou řešen pro množiny, jejichž hranice, názorně řečeno, je velmi „roztrhaná". Metody užité v [32] se opírají o vlastnosti reprodukčních jader a holomorfních funkcí na Riemannových plochách.

B. Epstein a M. M. Schiffer [21] 1965 se věnovali otázce harmonického středu v prostorech vyšší dimenze.

Věta 26. *Nechť $G \neq \emptyset$ je oblast konečné míry v E_m $(m \geqq 2)$ a nechť* $\operatorname{int}(E_m - G) \neq \emptyset$. *Předpokládejme, že x_0 je harmonický střed množiny G. Potom G je koule o středu x_0.*

Důkaz provádějí autoři pro $m = 3$ (není řečeno, jak se modifikuje důkaz pro $m = 2$) a v důkaze užívají kulové inverze (proto předpoklad $\operatorname{int}(E_m - G) \neq \emptyset$).

Poslední věta, kterou uvedeme, zobecňuje předchozí výsledky.

Věta 27. *Nechť $G \subset E_m$ $(m \geqq 2)$ je neprázdná oblast konečné míry. Nechť x_0 je harmonický střed množiny G. Potom G je koule o středu x_0.*

Tato věta je elegantně dokázána Ü. Kuranem v [47] 1972. Naznačme si její důkaz[1]). Nechť $x_1 \in E_m - G$ je bod, který má nejbližší vzdálenost od bodu x_0; buď $r = |x_1 - x_0|$ a $\Omega = \Omega_r(x_0)$. Stačí dokázat, že $\Omega = G$.

Postupujme sporem. Jestliže $G - \Omega \neq \emptyset$, potom $0 < \mu_m(G - \bar{\Omega}) < \infty$ a pro každou funkci h harmonickou a integrovatelnou na G, pro niž $h(x_0) = 0$, musí platit

$$\int_{G-\bar{\Omega}} h \, d\mu_m = 0 \,, \tag{9}$$

neboť

$$0 = h(x_0) = \int_G h \, d\mu_m = \int_{G-\bar{\Omega}} h \, d\mu_m + \int_\Omega h \, d\mu_m = \int_{G-\bar{\Omega}} h \, d\mu_m \,.$$

Zvolíme-li ovšem $h(x) = K(x) - K(x_0)$, kde

$$K(x) = \frac{|x - x_0|^2 - r^2}{|x_1 - x|^m} \,,$$

je $h(x_0) = 0$ a h je harmonická, integrovatelná a kladná na $G - \bar{\Omega}$, což je spor s (9). (Zároveň si všimněme, že jsme v důkaze nepotřebovali, že G je souvislá.)

Uvedenými větami však není ani zdaleka problematika průměrů vyčerpána. Různé typy vět o průměru a jejich obrácení jsou známa pro obecnější parciální diferenciální rovnice než rovnice Laplaceova a také pro různé třídy funkcí (ne nutně

---

[1]) Na zjednodušení jedné úvahy v Kuranově důkaze mne upozornil V. Souček.