Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

ORTOGONALITA NA MNOŽINÁCH

JAN HAVRDA, Praha

(Došlo dne 30. dubna 1974)

1. Tento článek se zabývá studiem a přirozeným zobecněním ortogonality, jak je známa např. z teorie Hilbertova prostoru. Při analýze této problematiky se užívá jazyka teorie svazů a zejména ortomodulárních svazů. Článek je rozdělen do dvou částí, z nichž prvá je pomocného charakteru, druhá je věnována vlastnímu tématu.

2. Je známo mnoho ekvivalentních definicí ortomodulárního svazu. Připomeňme si ty z nich, na něž se budeme v dalším výkladu odvolávat. Především, je-li $\mathcal{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ svaz s ortogonalitou, nazývá se *ortomodulární svaz*, právě když ke každým dvěma prvkům $p, q \in P$, $q \leqq p$, existuje prvek $r \in P$, $r \perp q$ tak, že $p = q \vee r$. Pak např. platí

2.1. Věta. *Buď $\mathcal{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ svaz s ortogonalitou. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1) *$\mathcal{P}$ je ortomodulární svaz.*

2) *Jsou-li $p, q \in P$, $q \leqq p$, potom $p = q \vee (q^\perp \wedge p)$.*

3) *Jsou-li $p, q \in P$, $q \leqq p$, $q^\perp \wedge p = 0$, potom $p = q$.*

4) *Jsou-li $p, q, r \in P$, $r \leqq q$, $p \leqq q^\perp$, potom $(r \vee p) \wedge q = r$.*

Důkaz. Implikace 2) $\Rightarrow$ 1) je zřejmá. Důkaz implikace 3) $\Rightarrow$ 2) je snadný. Dokážeme implikaci 1) $\Rightarrow$ 3). Nechť $q \leqq p$, $p = q \vee r$, kde $r \perp q$ čili $r \leqq q^\perp$. Jestliže $q^\perp \wedge p = 0$, pak $0 = p \wedge q^\perp = (q \vee r) \wedge q^\perp \geqq (q \wedge q^\perp) \vee (r \wedge q^\perp) = r$. Odtud $p = q$. Nyní dokážeme implikaci 4) $\Rightarrow$ 2). Je-li $q \leqq p$, platí $p^\perp \leqq q^\perp$, $q \leqq q$, takže podle tvrzení 4) máme $(p^\perp \vee q) \wedge q^\perp = p^\perp$ čili $p = q \vee (q^\perp \wedge p)$. Nakonec dokážeme ještě implikaci 2) $\Rightarrow$ 4). Nechť $r \leqq q$, $p \leqq q^\perp$. Potom $q^\perp \leqq r^\perp$ a podle tvrzení 2) máme $r^\perp = q^\perp \vee (q \wedge r^\perp)$ čili $r = q \wedge (q^\perp \vee r)$. Platí také $(r \vee p) \wedge q \leqq \leqq (r \vee q^\perp) \wedge q = r$. Na druhé straně $(r \vee p) \wedge q \geqq (r \wedge q) \vee (p \wedge q) = r$. Tedy vskutku $r = (r \vee p) \wedge q$.

2.2. Důsledek. *Je-li* $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ *ortomodulární svaz, jestliže* $p, q, r, s, t \in P$, $r \leqq q$, $t \leqq q$, $p \leqq q^\perp$, $s \leqq q^\perp$ *a jestliže* $r \vee p = t \vee s$, *pak* $r = t$ *a* $p = s$.

Z rovnosti $(r \vee p) \wedge q = (t \vee s) \wedge q$ a z tvrzení 4) věty 2.1 plyne $r = t$; analogicky z rovnosti $(r \vee p) \wedge q^\perp = (t \vee s) \wedge q^\perp$ plyne $p = s$.

Připomeňme, že je-li $\mathscr{P} = (P, \leqq, 0)$ svaz s nulou 0, prvek $p \in P$ se nazývá atom v $\mathscr{P}$, právě když $p \neq 0$ a jestliže $q \in P$, $q \neq 0$, $q \leqq p$, potom $q = p$. Jestliže ke každému prvku $q \in P$, $q \neq 0$, existuje atom p v $\mathscr{P}$ takový, že $p \leqq q$, nazývá se $\mathscr{P}$ atomický svaz.

2.3. Věta. *Buď* $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ *ortomodulární svaz,* $p \in P$, $0 \neq p \neq 1$; $r_1, r_2 \in P$ *buďte atomy v* $\mathscr{P}$ *takové, že* $r_1 \leqq p$, $r_2 \leqq p^\perp$. *Nechť* $q \in P$, $q \neq 0$, $q \wedge p = q \wedge p^\perp = 0$ *a nechť* $q \leqq r_1 \vee r_2$. *Potom* $r_1 \vee q = r_1 \vee r_2 = q \vee r_2$.

Důkaz rozdělíme na několik částí.

1) Dokážeme, že $(q \vee r_2) \wedge r_1 = (q \vee r_2) \wedge p = (q \vee r_2) \wedge r_2^\perp$ a $(r_1 \vee q) \wedge r_2 = (r_1 \vee q) \wedge p^\perp = (r_1 \vee q) \wedge r_1^\perp$. Protože $r_2 \leqq r_1^\perp$, podle tvrzení 2) věty 2.1 platí $r_1^\perp = r_2 \vee (r_2^\perp \wedge r_1^\perp)$ čili $r_1 = r_2^\perp \wedge (r_1 \vee r_2)$. Nyní $(q \vee r_2) \wedge p \geqq (q \vee r_2) \wedge r_1 = (q \vee r_2) \wedge r_2^\perp \wedge (r_1 \vee r_2) = (q \vee r_2) \wedge r_2^\perp \geqq (q \vee r_2) \wedge p$. Druhé tvrzení se dokáže analogicky.

2) Dokážeme, že $(q \vee r_1) \wedge r_2 = r_2$ a $(q \vee r_2) \wedge r_1 = r_1$. Protože $r_1 \leqq q \vee r_1$ a kdyby $r_1^\perp \wedge (q \vee r_1) = 0$, podle tvrzení 3) věty 2.1 by bylo $r_1 = q \vee r_1$, tedy $q \leqq r_1 \leqq p$, odkud $q \wedge p = q \neq 0$, což však odporuje předpokladu. Podle bodu 1) tohoto důkazu máme tak $0 \neq r_1^\perp \wedge (q \vee r_1) = (q \vee r_1) \wedge r_2 \leqq r_2$. Protože r_2 je atom v $\mathscr{P}$, dostáváme $r_2 = (q \vee r_1) \wedge r_2$. Druhé tvrzení se dokáže analogicky.

3) Dokážeme tvrzení věty. Protože $q \vee r_2 \leqq r_1 \vee r_2$ a protože podle bodu 2) tohoto důkazu platí $(q \vee r_2) \wedge r_1 = r_1$, máme $r_1 \leqq q \vee r_2$, tedy $r_1 \vee r_2 \leqq q \vee r_2$, odkud plyne, že $r_1 \vee r_2 = q \vee r_2$. Zbývající tvrzení se dokáže analogicky.

2.4. Důsledek. *Jsou-li splněny předpoklady věty* 2.3, *potom atomy* r_1, r_2 *jsou určeny jednoznačně.*

Důkaz. Buďte navíc $s_1, s_2 \in P$ atomy v $\mathscr{P}$ takové, že $s_1 \leqq p$, $s_2 \leqq p^\perp$ a nechť $q \leqq s_1 \vee s_2$. Z věty 2.3 pak vyplývají rovnosti $s_1 \vee s_2 = s_1 \vee q$, $r_1 \vee r_2 = r_1 \vee q$. Z těchto rovností dostáváme $s_1 \vee s_2 \vee r_1 = s_1 \vee q \vee r_1$, $r_1 \vee r_2 \vee s_1 = r_1 \vee q \vee s_1$, odkud máme $r_1 \vee s_1 \vee s_2 = r_1 \vee s_1 \vee r_2$. Protože $r_1 \vee s_1 \leqq p$, $r_2 \leqq p^\perp$, podle tvrzení 4) věty 2.1 platí $s_2 = (r_1 \vee s_1 \vee s_2) \wedge p^\perp = (r_1 \vee s_1 \vee r_2) \wedge p^\perp = r_2$. Podobně se dokáže, že $s_1 = r_1$.

2.5. Definice. Nechť $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ je svaz s ortogonalitou. Jestliže ke každému atomu $q \in P$ a ke každému $p \in P$, $0 \neq p \neq 1$, $q \wedge p = q \wedge p^\perp = 0$, existují atomy $r_1, r_2 \in P$, $r_1 \leqq p$, $r_2 \leqq p^\perp$ tak, že $q \leqq r_1 \vee r_2$, pak se svaz $\mathscr{P}$ *nazývá V-svaz.*

Z důsledku 2.4 ihned vyplývá, že pro ortomodulární V-svaz $\mathscr{P}$ platí, že atomy r_1, r_2 z definice 2.5 jsou určeny jednoznačně. Atomický svaz s ortogonalitou $\mathscr{P} =$

$= (P, \leqq, 1, \perp)$ budeme nazývat *A-svaz*. Atomický svaz s ortogonalitou $\mathcal{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$, který je současně *V*-svaz, budeme nazývat *AV-svaz*.

2.6. Věta. *Nechť $\mathcal{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ je ortomodulární V-svaz. Nechť $r_1, r_2 \in P$ jsou atomy v $\mathcal{P}$ takové, že $r_1 \neq r_2$. Pak existuje atom $r_3 \in P$ takový, že $r_1 \perp r_3$ (čili $r_1 \leqq r_3^\perp$) a platí $r_1 \vee r_2 = r_1 \vee r_3$.*

Důkaz. Jestliže $r_1 \perp r_2$, stačí položit $r_3 = r_2$. Nechť proto nadále neplatí $r_1 \perp r_2$, tedy neplatí $r_2 \leqq r_1^\perp$. Odtud $r_2 \wedge r_1^\perp = 0$ a zřejmě $0 \neq r_1 \neq 1$. Podle definice 2.5 existuje atom $r_3 \leqq r_1^\perp$ tak, že $r_2 \leqq r_1 \vee r_3$. Nyní užitím věty 2.3 dostáváme $r_1 \vee r_2 = r_1 \vee r_3 \; (= r_2 \vee r_3)$.

Podobná dokázané větě je další věta.

2.7. Věta. *Nechť $\mathcal{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ je ortomodulární V-svaz. Nechť $r_1, r_2 \in P$ jsou atomy v $\mathcal{P}$ takové, že $r_1 \perp r_2$. Buď $r_3 \in P$ atom v $\mathcal{P}$ takový, že $r_1 \neq r_3 \neq r_2$ a že $r_3 \leqq r_1 \vee r_2$. Pak existuje v $\mathcal{P}$ atom r_4 tak, že $r_3 \perp r_4$ a platí $r_1 \vee r_2 = r_3 \vee r_4$.*

Důkaz rozdělíme na několik částí.

1) Dokážeme, že neplatí $r_1 \leqq r_3^\perp$ a že neplatí $r_2 \leqq r_3^\perp$. Kdyby totiž $r_1 \leqq r_3^\perp$, pak $r_3 \leqq r_1^\perp$. Protože $r_3 \leqq r_1 \vee r_2$, podle tvrzení 4) a 2) věty 2.1 platí $r_2 = (r_1 \vee r_2) \wedge r_1^\perp = \{r_3 \vee [r_3^\perp \wedge (r_1 \vee r_2)]\} \wedge r_1^\perp \geqq r_3 \vee \{[r_3^\perp \wedge (r_1 \vee r_2)] \wedge r_1^\perp\} \geqq r_3$, což odporuje předpokladu. Podobně, kdyby $r_2 \leqq r_3^\perp$, potom $r_3 \leqq r_2^\perp$ a potom $r_1 = (r_1 \vee r_2) \wedge r_2^\perp = \{r_3 \vee [r_3^\perp \wedge (r_1 \vee r_2)]\} \wedge r_2^\perp \geqq r_3 \vee \{[r_3^\perp \wedge (r_1 \vee r_2)] \wedge r_2^\perp\} \geqq r_3$, což také odporuje předpokladu.

2) Protože $r_1 \wedge r_3 = 0 = r_1 \wedge r_3^\perp$, $0 \neq r_3 \neq 1$, podle definice 2.5 existuje atom $r_4 \leqq r_3^\perp$ tak, že $r_1 \leqq r_3 \vee r_4$. Protože $r_2 \wedge r_3 = 0 = r_2 \wedge r_3^\perp$, podle definice 2.5 existuje atom $r_5 \leqq r_3^\perp$ tak, že $r_2 \leqq r_3 \vee r_5$. Podle věty 2.3 platí $r_1 \vee r_3 = r_3 \vee r_4 = r_1 \vee r_4$, $r_2 \vee r_3 = r_3 \vee r_5 = r_2 \vee r_5$. Odtud plyne $r_1 \vee r_2 = r_1 \vee r_2 \vee r_3 = r_3 \vee r_4 \vee r_5 \; (= r_1 \vee r_2 \vee r_4 \vee r_5)$.

3) Dokážeme, že $r_1 \vee r_3 = r_2 \vee r_3$ a že $r_4 = r_5$ a tím bude důkaz proveden. Platí $r_3 \leqq r_1 \vee r_2$, $r_1 \leqq r_1$, $r_2 \leqq r_1^\perp$, $r_3 \wedge r_1 = 0$ a podle bodu 1) tohoto důkazu též $r_3 \wedge r_1^\perp = 0$. Podle věty 2.3 pak $r_1 \vee r_3 = r_1 \vee r_2 = r_2 \vee r_3$. Podle bodu 2) tohoto důkazu však platí $r_1 \vee r_3 = r_3 \vee r_4$, $r_2 \vee r_3 = r_3 \vee r_5$, tedy $r_3 \vee r_4 = r_3 \vee r_5$. Užitím tvrzení 4) věty 2.1 dostáváme $r_4 = (r_3 \vee r_4) \wedge r_3^\perp = (r_3 \vee r_5) \wedge r_3^\perp = r_5$.

2.8. Věta. *Nechť $\mathcal{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ je úplný ortomodulární svaz, $p \in P$, $0 \neq p \neq 1$. Nechť $q \in P$ je takový atom v $\mathcal{P}$, že neplatí $q \leqq p$ a neplatí $q \leqq p^\perp$. Nechť $\{(r_i, s_i) : i \in I\}$ je systém všech $r_i \in P$, $s_i \in P$, $r_i \leqq p$, $s_i \leqq p^\perp$ takových, že $q \leqq r_i \vee s_i$. Pak mezi r_i, $i \in I$ resp. s_i, $i \in I$ existuje nejmenší prvek r_0 resp. s_0 tak, že $q \leqq r_0 \vee s_0$. Přitom $r_0 = (q \vee p^\perp) \wedge p$, $s_0 = (q \vee p) \wedge p^\perp$.*

Důkaz. Množina I je neprázdná, neboť pro $r_i = p$, $s_i = p^\perp$ máme $q \leqq p \vee p^\perp$.

1) Dokážeme, že $\bigwedge_{i\in I}(r_i \vee p^\perp) = (\bigwedge_{i\in I} r_i) \vee p^\perp$, $\bigwedge_{i\in I}(p \vee s_i) = p \vee (\bigwedge_{i\in I} s_i)$. Podle tvrzení 2) věty 2.1 z nerovnosti $p^\perp \leqq r_i^\perp$ vyplývá, že pro všechna $i \in I$ platí $r_i^\perp = p^\perp \vee (p \wedge r_i^\perp)$. Odtud $(\bigvee_{i\in I} r_i^\perp) \wedge p = [p^\perp \vee \bigvee_{i\in I}(p \wedge r_i^\perp)] \wedge p = \bigvee_{i\in I}(p \wedge r_i^\perp)$, kde poslední rovnost plyne opět z tvrzení 2) věty 2.1 a toho, že $\bigvee_{i\in I}(p \wedge r_i^\perp) \leqq p$. Tím je prvé tvrzení dokázáno. Protože dále $s_i \leqq p^\perp$, platí podobně $s_i = p^\perp \wedge (s_i \vee p)$ pro všechna $i \in I$. Odtud $(\bigwedge_{i\in I} s_i) \vee p = [p^\perp \wedge \bigwedge_{i\in I}(s_i \vee p)] \vee p = \bigwedge_{i\in I}(s_i \vee p)$, neboť $p \leqq \bigwedge_{i\in I}(s_i \vee p)$.

2) Označme $t = \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee s_i)$. Dokážeme, že $p \wedge (p \wedge t)^\perp \leqq t^\perp$ a $p^\perp \wedge (p^\perp \wedge t)^\perp \leqq t^\perp$. Podle tvrzení 4) věty 2.1 platí $p \wedge t = \bigwedge_{i\in I} r_i$ a $p^\perp \wedge t = \bigwedge_{i\in I} s_i$. Zřejmě $t = \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee s_i) \leqq \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee p^\perp) = (\bigwedge_{i\in I} r_i) \vee p^\perp$, kde poslední rovnost platí podle bodu 1) tohoto důkazu. Prvé tvrzení je dokázáno. Dále $t = \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee s_i) \leqq \bigwedge_{i\in I}(p \vee s_i) = p \vee (\bigwedge_{i\in I} s_i) = p \vee (p^\perp \wedge t)$.

3) Dokážeme, že $p \leqq t^\perp \vee (t \wedge p)$ a $p^\perp \leqq t^\perp \vee (t \wedge p^\perp)$. Podle tvrzení 2) věty 2.1 z nerovnosti $t \wedge p \leqq p$ vyplývá $p = (t \wedge p) \vee [(t \wedge p)^\perp \wedge p] \leqq (t \wedge p) \vee t^\perp$, kde poslední nerovnost platí podle části 2) tohoto důkazu. Podobně $t \wedge p^\perp \leqq p^\perp$, takže $p^\perp = (t \wedge p^\perp) \vee [(t \wedge p^\perp)^\perp \wedge p^\perp] \leqq (t \wedge p^\perp) \vee t^\perp$.

4) Dokážeme, že $t = (t \wedge p) \vee (t \wedge p^\perp)$. Podle části 3) tohoto důkazu máme $t = (p \vee p^\perp) \wedge t \leqq [t^\perp \vee (t \wedge p) \vee (t \wedge p^\perp)] \wedge t$. Je zřejmé, že $(t \wedge p) \vee (t \wedge p^\perp) \leqq t$ a podle tvrzení 2) věty 2.1 a podle právě dokázaného proto platí $(t \wedge p) \vee (t \wedge p^\perp) = t \wedge [t^\perp \vee (t \wedge p) \vee (t \wedge p^\perp)] \geqq t$, tedy tvrzení platí.

5) Protože $q \leqq \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee s_i) = t = (t \wedge p) \vee (t \wedge p^\perp) = (\bigwedge_{i\in I} r_i) \vee (\bigwedge_{i\in I} s_i)$, stačí položit $r_0 = t \wedge p = \bigwedge_{i\in I} r_i$, $s_0 = t \wedge p^\perp = \bigwedge_{i\in I} s_i$ a prvé tvrzení věty je dokázáno.

6) Označme $u = (q \vee p^\perp) \wedge p$, $v = (q \vee p) \wedge p^\perp$. Dokážeme, že $u \leqq r_0$, $v \leqq s_0$. Platí $q \leqq \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee s_i) = t$. Podle části 1) tohoto důkazu pak $q \vee p^\perp \leqq t \vee p^\perp \leqq \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee s_i \vee p^\perp) = \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee p^\perp) = r_0 \vee p^\perp$. Podle tvrzení 4) věty 2.1 odtud plyne $u = (q \vee p^\perp) \wedge p \leqq (r_0 \vee p^\perp) \wedge p = r_0$. Zcela analogicky $q \leqq t$, tedy $q \vee p \leqq t \vee p \leqq \bigwedge_{i\in I}(p \vee s_i) = p \vee s_0$, takže $v = (q \vee p) \wedge p^\perp \leqq (p \vee s_0) \wedge p^\perp = s_0$.

7) Dokážeme, že $(u \vee p^\perp) \wedge (v \vee p) = u \vee v$. Protože $v \leqq p^\perp$, podle tvrzení 2) věty 2.1 platí $p^\perp = v \vee (v^\perp \wedge p^\perp) = v \vee (v \vee p)^\perp$. Odtud dostáváme $(u \vee p^\perp) \wedge (v \vee p) = [u \vee v \vee (v \vee p)^\perp] \wedge (v \vee p) = u \vee v$, kde poslední rovnost platí na základě toho, že $u \vee v \leqq p \vee v$ a na základě tvrzení 2) věty 2.1.

8) Dokážeme, že $q \leqq u \vee v$. Platí $p \leqq q \vee p$, $p^{\perp} \leqq q \vee p^{\perp}$, podle tvrzení 2) věty 2.1 je tudíž $q \vee p = p \vee [p^{\perp} \wedge (q \vee p)] = p \vee v$, $q \vee p^{\perp} = p^{\perp} \vee [p \wedge \wedge (q \vee p^{\perp})] = p^{\perp} \vee u$. Zřejmě $q \leqq (q \vee p^{\perp}) \wedge (q \vee p) = (p^{\perp} \vee u) \wedge (p \vee v) = = u \vee v$, kde poslední rovnost platí podle části 7) tohoto důkazu.

9) Protože $u \leqq p$, $v \leqq p^{\perp}$ a protože $q \leqq u \vee v$, podle prvého tvrzení dokazované věty platí $r_0 \leqq u$, $s_0 \leqq v$. Podle části 6) tohoto důkazu pak dostáváme $r_0 = u$, $s_0 = v$.

Věta je dokázána.

2.9. Důsledek. *Nechť $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ je úplný ortomodulární svaz. Pak $\mathscr{P}$ je V-svaz tehdy a jen tehdy, když pro livobolné $p \in P$, $0 \neq p \neq 1$ a libovolný atom $q \in P$ takový, že neplatí $q \leqq p$ a neplatí $q \leqq p^{\perp}$, jsou $(q \vee p^{\perp}) \wedge p$ a $(q \vee p) \wedge p^{\perp}$ atomy v $\mathscr{P}$.*

2.10. Poznámka. Předpokládejme nyní, že $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ je úplný ortomodulární A-svaz. Buď $0 \neq p \in P$. Existuje atom $r_1 \in P$ tak, že $r_1 \leqq p$. Jestliže $r_1^{\perp} \wedge p = 0$, podle tvrzení 3) věty 2.1 pak $r_1 = p$. Nechť dále $0 \neq r_1^{\perp} \wedge p$. Existuje pak atom $r_2 \in P$ tak, že $r_2 \leqq r_1^{\perp} \wedge p$, tedy $r_1 \perp r_2$ a $r_2 \leqq p$. Tudíž $r_1 \vee r_2 \leqq p$. Jestliže $(r_1 \vee r_2)^{\perp} \wedge p = 0$, je jako dříve $r_1 \vee r_2 = p$. Jestliže $0 \neq (r_1 \vee r_2)^{\perp} \wedge p$, existuje atom $r_3 \in P$ tak, že $r_3 \leqq (r_1 \vee r_2)^{\perp} \wedge p$, tedy $r_3 \leqq p$ a $r_3 \leqq r_1^{\perp} \wedge r_2^{\perp}$ čili $r_3 \perp r_1$, $r_3 \perp r_2$. Ze Zornova lemmatu snadno vyplývá, že existuje maximální (vzhledem k množinové inkluzi) množina $\{r_i : i \in I\}$ po dvou ortogonálních atomů taková, že pro všechna $i \in I$ platí $r_i \leqq p$. Potom $p = \bigvee_{i \in I} r_i$. Kdyby totiž tomu tak nebylo, pak $\bigvee_{i \in I} r_i \leqq p$ a $0 \neq (\bigvee_{i \in I} r_i)^{\perp} \wedge p$. Popsaným již postupem bychom pak zjistili, že množina $\{r_i : i \in I\}$ není maximální.

2.11. Definice. Buď $\mathscr{P} = (P, \leqq, 0)$ svaz. Buďte $p, q \in P$. Říkáme, že *q pokrývá p*, píšeme $p \prec q$, jestliže $p \neq q$ a jestliže z toho, že $r \in P$, $p \leqq r \leqq q$, vyplývá, že buď $p = r$ nebo $r = q$. Jestliže pro každé $p \in P$ a každý atom $q \in P$ takový, že $p \wedge q = 0$ platí $p \prec p \vee q$, pak se svaz $\mathscr{P}$ nazývá *C-svaz*.

Je-li svaz s ortogonalitou $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ A-svaz a současně C-svaz, nazýváme jej *AC-svazem*.

2.12. Věta. *Nechť $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ je úplný ortomodulární svaz. Pak $\mathscr{P}$ je V-svaz tehdy a jen tehdy, když $\mathscr{P}$ je C-svaz.*

Důkaz. Nechť $\mathscr{P}$ je V-svaz, nechť $p \in P$, $q \in P$ buď atom v $\mathscr{P}$ takový, že $p \wedge q = 0$. Potom $p \neq p \vee q$ a $p \neq 1$. Je-li $p = 0$, je tvrzení zřejmé. Nechť proto $p \neq 0$. Buď $r \in P$, $p \leqq r \leqq p \vee q$ a nechť $p \neq r$. Platí

$$0 \neq p^{\perp} \wedge r \leqq p^{\perp} \wedge (p \vee q) = \begin{cases} q, & \text{je-li } q \leqq p^{\perp} \text{ podle tvrzení 4) věty 2.1} \\ \text{atom v } \mathscr{P}, & \text{je-li } q \wedge p^{\perp} = 0 \text{ podle důsledku 2.9.} \end{cases}$$

Odtud vyplývá, že $p^\perp \wedge r = p^\perp \wedge (p \vee q)$ a tento prvek je atom v $\mathscr{P}$. Protože $p \leqq r$, podle tvrzení 2) věty 2.1 máme $r = p \vee (p^\perp \wedge r) = p \vee [p^\perp \wedge (p \vee q)] = p \vee q$, neboť také $p \leqq p \vee q$. Je tudíž $\mathscr{P}$ C-svaz.

Nechť naopak $\mathscr{P}$ je C-svaz. Buď $p \in P$, $0 \neq p \neq 1$, $q \in P$ buď atom v $\mathscr{P}$ takový, že $p \wedge q = p^\perp \wedge q = 0$. Podle definice 2.11 platí $p \prec p \vee q$, $p^\perp \prec p^\perp \vee q$, odkud podle tvrzení 3) věty 2.1 máme $p^\perp \wedge (p \vee q) \neq 0 \neq p \vee (p^\perp \wedge q)$. Nechť $r \in P$, $0 \neq r \leqq p \wedge (p^\perp \vee q)$. Protože $r \leqq p^\perp \vee q$, platí $p^\perp \leqq r \vee p^\perp \leqq p^\perp \vee q$, Protože $\mathscr{P}$ je C-svaz platí, že buď $p^\perp = r \vee p^\perp$ nebo $r \vee p^\perp = p^\perp \vee q$. Kdyby $p^\perp = r \vee p^\perp$, bylo by $r \leqq p^\perp$ a protože $r \leqq p$, dostali bychom $r = 0$, což je ve sporu s předpokladem. Tedy $r \vee p^\perp = p^\perp \vee q$. Z nerovnosti $r \leqq p$ a z tvrzení 2) věty 2.1 plyne $r = p \wedge (r \vee p^\perp) = p \wedge (p^\perp \vee q)$ a proto tento prvek je atom v $\mathscr{P}$. Podobně se dokáže, že také $p^\perp \wedge (p \vee q)$ je atom v $\mathscr{P}$. Podle důsledku 2.9 je $\mathscr{P}$ V-svaz.

3. Zde zavedeme definicí 3.1 základní pojem tohoto článku. Budeme uvažovat množinu Ω, o níž nadále budeme předpokládat, že je neprázdná. Na této množině zavedeme binární relaci $\perp$, kterou budeme nazývat ortogonalita a jejíž vlastnosti ne náhodou připomínají naše představy o kolmosti úseček např. v rovině.

3.1. Definice. Buď Ω daná množina a nechť je na ní definována binární relace $\perp$, splňující následující požadavky:

a) Jestliže $x, y \in \Omega$, $x \perp y$, potom $y \perp x$.

b) Existuje prvek $o \in \Omega$ tak, že pro všechna $x \in \Omega$ platí $o \perp x$.

c) Jestliže pro $x \in \Omega$ platí $x \perp x$, potom $x = o$.

Pak říkáme, že na množině Ω je definována *ortogonalita* $\perp$, což budeme zapisovat ve tvaru $(\Omega, \perp)$. O prvcích $x, y \in \Omega$, pro které platí $x \perp y$, budeme říkat, že jsou *ortogonální.*

Buď $x \in \Omega$, $\emptyset \neq A \subset \Omega$. Definujeme $x \perp A$, právě když $x \perp y$ pro všechna $y \in A$. Označme $A^\perp = \{x \in \Omega : x \perp A\}$.

Snadno nahlédneme, že platí

3.2. Lemma. *Buď dáno* $(\Omega, \perp)$. *Potom*

1) $\{o\}^\perp = \Omega$; $\Omega^\perp = \{o\}$.

2) *Jestliže* $\emptyset \neq A \subset \Omega$, *potom* $o \in A^\perp$.

3) *Jestliže* $\emptyset \neq A \subset \Omega$, *potom* $A \subset (A^\perp)^\perp = A^{\perp\perp}$ *(označení).*

4) *Jestliže* $A, B \subset \Omega$, $\emptyset \neq A \subset B$, *potom* $B^\perp \subset A^\perp$.

5) *Jestliže* $\emptyset \neq A \subset \Omega$, *potom* $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.

Označme $S = \{A \subset \Omega : \emptyset \neq A = A^{\perp\perp}\}$, $T = \{A^\perp : \emptyset \neq A \subset \Omega\}$.

3.3. Věta. *Platí:*

1) $S = T$.

2) $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ *je úplný svaz s ortogonalitou. Přitom pro* $A_i \in S$, $i \in I$ *platí* $\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$, $\bigvee_{i \in I} A_i = \left(\bigcap_{i \in I} A_i^{\perp}\right)^{\perp}$ *a dále* $0 = \{o\}$, $1 = \Omega$.

Důkaz. 1) Je-li $A \in S$, je $A = (A^{\perp})^{\perp} = B^{\perp}$, kde $B = A^{\perp} \neq \emptyset$. Tedy $A \in T$. Je-li $A \in T$, je $A = B^{\perp}$, kde $\emptyset \neq B \subset \Omega$. Podle tvrzení 5) lemmatu 3.2 platí $A^{\perp\perp} = B^{\perp\perp\perp} = B^{\perp} = A$, tedy $A \in S$, 2) Podle 1) lemmatu 3.2 platí $\{o\} \in S$, $\Omega \in S$ a podle 2) lemmatu 3.2 je $\{o\}$ v $\mathscr{S}$ nejmenší prvek, Ω je zřejmě v $\mathscr{S}$ největší prvek. Dále pro $A \in S$ v důsledku podmínky c) definice 3.1 platí, že $A \cap A^{\perp} = \{o\}$.

Jestliže I je neprázdná množina indexů a $A_i \in S$ pro $i \in I$, dokážeme, že $\bigcap_{i \in I} A_i \in S$, tedy $\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$. Jednak v důsledku 3) lemmatu 3.2 platí $\bigcap_{i \in I} A_i \subset \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{\perp\perp}$. Dále $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_j$ pro $j \in I$, tedy podle 4) lemmatu 3.2 je $A_j^{\perp} \subset \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{\perp}$, odkud $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{\perp\perp} \subset A_j^{\perp\perp} = A_j$ pro $j \in I$, tedy $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{\perp\perp} \subset \bigcap_{j \in I} A_j$.

Jestliže opět I je neprázdná množina indexů, dokážeme, že pro $A_i \in S$, $i \in I$ platí $\bigvee_{i \in I} A_i = \left(\bigcap_{i \in I} A_i^{\perp}\right)^{\perp}$. Platí $\bigcap_{i \in I} A_i^{\perp} \subset A_j^{\perp}$, $j \in I$, tedy $A_j = A_j^{\perp\perp} \subset \left(\bigcap_{i \in I} A_i^{\perp}\right)^{\perp}$ pro $j \in I$. Je-li dále $A \in S$ a $A_i \subset A$ pro $i \in I$, potom $A^{\perp} \subset A_i^{\perp}$, $i \in I$, tedy $A^{\perp} \subset \bigcap_{i \in I} A_i^{\perp}$, odkud $\left(\bigcap_{i \in I} A_i^{\perp}\right)^{\perp} \subset A^{\perp\perp} = A$.

Jestliže $A \in S$, pak $A \vee A^{\perp} = (A^{\perp} \cap A)^{\perp} = \{o\}^{\perp} = \Omega$.

3.4. Poznámka. Je-li dáno $(\Omega, \perp)$, indukovaný úplný svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ a $\emptyset \neq A \subset \Omega$, pak v $\mathscr{S}$ existuje nejmenší prvek B takový, že $A \subset B$. Buď $\{A_i : A \subset A_i$ $A_i \in S$, $i \in I\}$. Tento systém obsahuje např. Ω. Platí $A_i^{\perp} \subset A^{\perp}$ pro $i \in I$, odtud $\bigvee_{i \in I} A_i^{\perp} \subset A^{\perp}$, z čehož $A^{\perp\perp} \subset \left(\bigvee_{i \in I} A_i^{\perp}\right)^{\perp} = \bigcap_{i \in I} A_i = B$. Protože $A \subset A^{\perp\perp}$, platí $B \subset A^{\perp\perp}$, tudíž $B = A^{\perp\perp}$.

3.5. Poznámka. Buď dáno $(\Omega, \perp)$, indukovaný svaz $\mathscr{S}$ buď $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$. Nechť $A, B \in S$. Potom $A \perp B$ (čili $A \subset B^{\perp}$) tehdy a jen tehdy, když pro všechna $x \in A$ a všechna $y \in B$ platí $x \perp y$. Snadno též nahlédneme, že jestliže $A_i \in S$ pro $i \in I$, $x \perp A_i$ pro $i \in I$ a $y \in \bigvee_{i \in I} A_i$, potom $x \perp y$.

3.6. Věta. *Buď dána množina* Ω, $o \in \Omega$. *Buď* $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ *úplný svaz s ortogonalitou podmnožin množiny* Ω *takový, že:*

1) $\{o\}$ *je v* $\mathscr{S}$ *nejmenší prvek.*

2) *Je-li* I *neprázdná množina indexů,* $A_i \in S$ *pro* $i \in I$, *potom* $\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$.

Pro $x, y \in \Omega$ kladme $x \top y$ právě když existuje $A \in S$ tak, že $x \in A$ a $y \in A^\perp$. Potom relace $\top$ je ortogonalita na Ω a jí indukovaný úplný svaz s ortogonalitou $(T, \subset, \Omega, \top)$ je shodný s $\mathcal{S}$.

Důkaz. Ukážeme, že relace $\top$ vyhovuje definici 3.1 Axiom a) vyplývá z toho, že pro $A \in S$ platí $A^{\perp\perp} = A$. Axiom b) plyne z předpokladu 1) dokazované věty. Axiom c) plyne z toho, že pro $A \in S$ platí $A \cap A^\perp = \{o\}$.

Nyní dokážeme, že $S = T$. Buď $C \in S$; protože $C^\perp \in S$, pro všechna $x \in C$ a všechna $y \in C^\perp$ platí $x \top y$. Odtud vyplývá, že $C^\perp \subset C^\top$. Buď $y_0 \in C^\top$, tedy pro všechna $x \in C$ platí $x \top y_0$. Ke každému $x \in C$ existuje $A_x \in S$ tak, že $x \in A_x$ a $y_0 \in A_x^\perp$. Odtud $y_0 \in \bigcap_{x \in C} A_x^\perp$. Dále $C \subset \bigcup_{x\in C} A_x \subset \bigvee_{x\in C} A_x = (\bigcap_{x\in C} A_x^\perp)^\perp$, odkud $y_0 \in \bigcap_{x\in C} A_x^\perp \subset C^\perp$ čili $C^\top \subset C^\perp$, tedy $C^\perp = C^\top \in T$. Buď nyní naopak $C \in T$. Existuje nejmenší prvek $A \in S$ tak, že $C \subset A$. Potom $A^\perp = A^\top \subset C^\top$. Buď $y_0 \in C^\top$. Tedy $y_0 \top x$ pro všechna $x \in C$. Proto ke každému $x \in C$ existuje $A_x \in S$ tak, že $x \in A_x$ a $y_0 \in A_x^\perp$, z čehož vyplývá, že $y_0 \in \bigcap_{x\in C} A_x^\perp$. Dále $C \subset \bigcup_{x\in C} A_x \subset \bigvee_{x\in C} A_x = (\bigcap_{x\in C} A_x^\perp)^\perp \in S$. Proto $A \subset (\bigcap_{x\in C} A_x^\perp)^\perp$, takže $y_0 \in \bigcap_{x\in C} A_x^\perp \subset A^\perp$ a tudíž $C^\top \subset A^\perp$. Proto $C^\top = A^\perp$, odkud $A = (C^\top)^\perp = (C^\top)^\top = C$ a tím je věta dokázána.

3.7. Poznámka. Buď dáno $(\Omega, \perp)$. Jsou-li $x, y \in \Omega$ a $x \perp y$, položme $R(x, y) = 0$, jestliže neplatí $x \perp y$ (budeme psát $x \not\perp y$), položme $R(x, y) = 1$. Potom takto definované zobrazení $R : \Omega \times \Omega \to G$, kde G značí množinu komplexních čísel, má tyto základní vlastnosti:

a) Pro všechna $x, y \in \Omega$ platí $R(x, y) = \overline{R(y, x)}$ (pruh značí číslo komplexně sdružené).

b) $R(o, o) = 0$; pro každé $x \in \Omega$, $x \neq o$ platí $R(x, x) > 0$.

c) Pro všechna $x, y \in \Omega$ platí $|R(x, y)|^2 \leqq R(x, x)\, R(y, y)$.

Z vlastností c) a b) ihned vyplývá, že pro všechna $x \in \Omega$ platí $R(o, x) = R(x, o) = 0$.

Zobrazení $R : \Omega \times \Omega \to G$, které má vlastnosti a), b), c), nazveme kvaziskalárním součinem a dvojici (Ω, R) prostorem s kvaziskalárním součinem. Je-li naopak dán prostor (Ω, R), potom pro $x, y \in \Omega$ definujme $x \perp y$, právě když $R(x, y) = 0$. Pak je na množině Ω definována ortogonalita. Kdybychom pro $x, y \in \Omega$ kladli $x \perp y$, právě když $\operatorname{Re} R(x, y) \leqq 0$, na množině Ω je opět definována (ovšem tentokráte jiná) ortogonalita.

Jestliže např. (Ω, ϱ) je metrický prostor, $o \in \Omega$, pak zobrazení $R : \Omega \times \Omega \to G$ definované pro $x, y \in \Omega$ rovností $R(x, y) = \varrho^2(o, x) - \varrho^2(x, y) + \varrho^2(y, o)$, je kvaziskalární součin.

Jestliže Ω je Hilbertův prostor, R skalární součin (R je samozřejmě též kvaziskalární součin) a klademe-li pro $x, y \in \Omega$, $x \perp y$ právě když $R(x, y) = 0$, indukovaný svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ je dobře známý úplný ortomodulární AV-svaz (podle věty 2.12 též AC-svaz). Klademe-li však pro $x, y \in \Omega$ $x \perp y$ právě když $\operatorname{Re} R(x, y) \leqq 0$, indukovaný svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ je úplný AV-svaz, jehož nosič S je tvořen právě všemi uzavřenými konvexními kuželi s vrcholem v počátku (viz práci [1]); tento svaz není ortomodulární a není C-svazem.

Poslední dva příklady svazů $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ jsou A-svazy a dokonce pro každé $x \in \Omega$, $x \neq o$, platí, že $\{x\}^{\perp\perp}$ je atom v $\mathscr{S}$. Platí

3.8. Věta. *Buď dáno $(\Omega, \perp)$, nechť $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$. Jestliže $A \in S$ je atom v $\mathscr{S}$, $x \in A$, $x \neq o$, potom $\{x\}^{\perp\perp} = A$.*

Důkaz. Protože $x \in \{x\}^{\perp\perp}$, platí $\{x\}^{\perp\perp} \neq \{o\}$. Dále $\{x\} \subset A$, tedy $A^{\perp} \subset \{x\}^{\perp}$, odkud $\{x\}^{\perp\perp} \subset A$, proto $\{x\}^{\perp\perp} = A$.

Existují však svazy $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$, které nejsou atomické.

3.9. Příklad. Nechť $\Omega = \{o, \ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots, \ldots, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \ldots\}$ a nechť $o \perp x$ pro všechna $x \in \Omega$ a dále $\omega_i \perp \tau_j$ pro všechna $j \leqq i$, i celé. Potom $S = \{\{o\}, \Omega; \ldots \ldots; \{o, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots\}, \{\ldots, \tau_{-2}, \tau_{-1}, o\}; \{o, \omega_0, \omega_1, \ldots\}, \{\ldots, \tau_{-1}, \tau_0, o\}; \{o, \omega_1, \omega_2, \ldots\}, \{\ldots, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, o\}; \ldots\}$. Zde svaz $\mathscr{S}$ neobsahuje ani jeden atom.

3.10. Věta. *Buď dáno $(\Omega, \perp)$, $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1) *$\mathscr{S}$ je atomický svaz.*

2) *Ke každé podmnožině $B \subset \Omega$, $B \neq \emptyset$, $B^{\perp} \neq \{o\}$, existuje $x \in B^{\perp}$, $x \neq o$ tak, že pro všechna $y \in \{x\}^{\perp\perp}$, $y \neq o$ platí $\{y\}^{\perp} \subset \{x\}^{\perp}$.*

Důkaz. Dokážeme implikaci 1) $\Rightarrow$ 2). Buď $\emptyset \neq B \subset \Omega$, $B^{\perp} \neq \{o\}$. Potom $B^{\perp} \in S$ a existuje atom A v $\mathscr{S}$ tak, že $A \subset B^{\perp}$. Existuje $x \in A$, $x \neq o$. Podle věty 3.8 platí $\{x\}^{\perp\perp} = A$, platí též $x \in B$. Opět podle věty 3.8 pro každé $y \in \{x\}^{\perp\perp}$, $y \neq o$ platí též $\{y\}^{\perp\perp} = \{x^{\perp\perp}\}$ čili $\{y\}^{\perp} = \{x\}^{\perp}$, tedy $\{y\}^{\perp} \subset \{x\}^{\perp}$.

Dokážeme implikaci 2) $\Rightarrow$ 1). Buď $C \in S$, $C \neq \{o\}$. Existuje $B \subset \Omega$, $B \neq \emptyset$ tak, že $C = B^{\perp}$, Nechť $x \in B^{\perp}$, $x \neq o$ vyhovuje předpokladu. Zřejmě $\{o\} \neq \{x\}^{\perp\perp} \subset C$. Dokážeme, že $\{x\}^{\perp\perp} \in S$ je atom v $\mathscr{S}$. Buď $A \in S$, $A \neq \{o\}$, $A \subset \{x\}^{\perp\perp}$ a nechť $y \in A$, $y \neq o$. Potom $\{x\}^{\perp} \subset A^{\perp} \subset \{y\}^{\perp}$. Protože $y \in \{x\}^{\perp\perp}$ a protože podle předpokladu $\{y\}^{\perp} \subset \{x\}^{\perp}$, dostáváme $\{x\}^{\perp} = A^{\perp} = \{y\}^{\perp}$, tedy $\{x\}^{\perp\perp} = A$.

3.11. Příklad. Buď $\Omega = \{o, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ a nechť $o \perp \omega_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, 5$, $\omega_1 \perp \omega_2 \perp \omega_3 \perp \omega_4 \perp \omega_5$. Potom $S = \{\{o\}, \Omega; \{o, \omega_2\}, \{o, \omega_1, \omega_3\}; \{o, \omega_3\}, \{o, \omega_2, \omega_4\}; \{o, \omega_4\}, \{o, \omega_3, \omega_5\}\}$. Svaz $\mathscr{S}$ je zde atomický, avšak např. $\{\omega_1\}^{\perp\perp} = \{o, \omega_1, \omega_3\}$ není atom v $\mathscr{S}$.

Formulujeme následující axiom

Axiom A. Buď dáno $(\Omega, \perp)$. nechť $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$. Pro každé $x \in \Omega$, $x \neq o$, je $\{x\}^{\perp\perp}$ atom v $\mathscr{S}$.

Zřejmě svaz $\mathscr{S}$ splňující axiom A je A-svaz.

3.12. Věta. *Nechť je dáno $(\Omega, \perp)$, svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ nechť splňuje axiom* A. *Buď $A \in S$, $x \in \Omega$, $x \neq o$. Potom $A \cap \{x\}^{\perp\perp} = \{o\}$ tehdy a jen tehdy, když $x \notin A$.*

Důkaz snadno plyne z věty 3.8.

3.13. Věta. *Buď dáno $(\Omega, \perp)$, $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ nechť splňuje axiom* A. *Označme $\mathscr{A}$ resp. $\mathscr{B}$ množinu všech atomů resp. antiatomů svazu $\mathscr{S}$. Potom platí:*

1) *Je-li $A \in S$, $A \neq \{o\}$ a jestliže $\{A_i\}$, $i \in I$ je systém všech atomů v $\mathscr{S}$ takových, že $A_i \subset A$, $i \in I$, potom $A = \bigvee_{i \in I} A_i$.*

2) *Je-li $A \in S$, $A \neq \Omega$ a jestliže $\{B_j\}$, $j \in J$ je systém všech antiatomů v $\mathscr{S}$ takových, že $A \subset B_j$, $j \in J$, potom $A = \bigcap_{j \in J} B_j$.*

3) *Existuje prosté zobrazení f množiny $\mathscr{A}$ na množinu $\mathscr{B}$ takové, že:*

3,1) *Jsou-li $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$, $A_1 \subset f(A_2)$, pak $A_2 \subset f(A_1)$;*

3,2) *Jestliže $A \in \mathscr{A}$, potom $A \cap f(A) = \{o\}$.*

Důkaz. Tvrzení 1) a 2) se snadno dokážou sporem. Dále pro $A \in \mathscr{A}$ stačí položit $f(A) = A^{\perp}$ a tvrzení 3,1) a 3,2) toto zobrazení splňuje.

Následující věta je v jistém smyslu opakem věty 3.13.

3.14. Věta. *Buď Ω množina, $o \in \Omega$; $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \{o\})$ buď úplný atomický a antiatomický svaz podmnožin množiny Ω, v němž infimum je dáno množinovým průnikem a který má největší prvek Ω a nejmenší prvek $\{o\}$. Označme $\mathscr{A}$ resp. $\mathscr{B}$ systém všech atomů resp. antiatomů svazu $\mathscr{S}$. Dále nechť svaz $\mathscr{S}$ splňuje podmínky* 1), 2), 3) *věty* 3.13. *Potom ve svazu $\mathscr{S}$ lze zavést ortogonalitu.*

Důkaz. Položíme $\{o\}^{\perp} = \Omega$; je-li $A \in S$, $A \neq \{o\}$, $A = \bigvee_{i \in I} A_i$, kde $A_i \in \mathscr{A}$ pro $i \in I$, položíme $A^{\perp} = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$. Platí $A^{\perp} \in S$.

1) Dokážeme, že $\Omega^{\perp} = \{o\}$. Totiž platí $\Omega = \bigvee_{A \in \mathscr{A}} A$, odkud $\Omega^{\perp} = \bigcap_{A \in \mathscr{A}} f(A)$. Kdyby $\bigcap_{A \in \mathscr{A}} f(A) \neq \{o\}$, existoval by atom $C \in \mathscr{A}$ tak, že $C \subset \bigcap_{A \in \mathscr{A}} f(A)$, tedy $C \subset f(A)$ pro všechna $A \in \mathscr{A}$, speciálně $C \subset f(C)$. To však odporuje předpokladu 3,2) z věty 3.13.

2) Nechť $A, B \in S$, $A \subset B$. Dokážeme, že $B^{\perp} \subset A^{\perp}$. Je-li $A = \{o\}$, je $B^{\perp} \subset \Omega = \{o\}^{\perp} = A^{\perp}$. Nechť dále $A \neq \{o\}$, $A = \bigvee_{i \in I} A_i$, kde $A_i \in \mathscr{A}$ pro $i \in I$. Potom $B = \bigvee_{i \in I} A_i \vee \bigvee_{j \in J} A'_j$, kde $A'_j \in \mathscr{A}$ pro $j \in J$. Odtud $B^{\perp} = \bigcap_{i \in I} f(A_i) \cap \bigcap_{j \in J} f(A'_j) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i) = A^{\perp}$.

3) Nechť $A \in S$. Dokážeme, že $A \cap A^{\perp} = \{o\}$. Avšak pro $A = \{o\}$ nebo $A = \Omega$ je toto tvrzení zřejmé. Nechť tedy $\{o\} \neq A \neq \Omega$. Kdyby $A \cap A^{\perp} \neq \{o\}$, existoval by atom $C \in \mathscr{A}$ tak, že $C \subset A \cap A^{\perp}$, tedy $C \subset A$, $C \subset A^{\perp}$. Podle části 2) tohoto důkazu platí $A^{\perp\perp} \subset C^{\perp}$. Je-li tedy $A = \bigvee_{i \in I} A_i$, kde $A_i \in \mathscr{A}$ pro $i \in I$, pak $\bigcap_{i \in I} f(A_i) = A^{\perp} = \bigvee_{j \in J} A'_j$, kde $A'_j \in \mathscr{A}$ pro $j \in J$. Odtud $A^{\perp\perp} = \bigcap_{j \in J} f(A'_j)$. Avšak $A'_j \subset f(A_i)$ pro všechna $j \in J$ a všechna $i \in I$. Podle 3,1) věty 3.13 odtud plyne $A_i \subset f(A_j)$ pro všechna $i \in I$ a všechna $j \in J$, takže $A = \bigvee_{i \in I} A_i \subset \bigcap_{j \in J} f(A'_j) = A^{\perp\perp}$. Tedy máme $C \subset A \subset A^{\perp\perp} \subset C^{\perp} = f(C)$, odkud $C = C \cap f(C)$, což odporuje předpokladu 3,2) z věty 3.13.

4) Pro $A \in S$ dokážeme, že $A = A^{\perp\perp}$. Pro $A = \{o\}$ nebo $A = \Omega$ je tvrzení zřejmé. V bodě 3) tohoto důkazu jsme již zjistili, že pro $A \in S$, $\{o\} \neq A \neq \Omega$ platí $A \subset A^{\perp\perp}$. Buď dále $A \neq \Omega$. Platí $A = \bigcap_{i \in I} B_i$, kde $B_i \in \mathscr{B}$ pro $i \in I$. Platí též $A = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$, kde $B_i = f(A_i)$, $A_i \in \mathscr{A}$ pro $i \in I$. Jelikož $(\bigvee_{i \in I} A_i)^{\perp} = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$, je $A = (\bigvee_{i \in I} A_i)^{\perp}$. Protože pro všechna $B \in S$ platí $B \subset B^{\perp\perp}$ podle bodu 2) tohoto důkazu máme $B^{\perp\perp\perp} \subset B^{\perp}$; avšak také $B^{\perp} \subset B^{\perp\perp\perp}$, tedy pro všechna $B \in S$ platí $B^{\perp} = B^{\perp\perp\perp}$. Odtud $A = (\bigvee_{i \in I} A_i)^{\perp} = (\bigvee_{i \in I} A_i)^{\perp\perp\perp} = A^{\perp\perp}$.

3.15. Poznámka. Splňuje-li svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \{o\})$ předpoklady věty 3.14, lze v něm zavést ortogonalitu. Dostaneme tak svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ s ortogonalitou. Ten indukuje podle věty 3.6 ortogonalitu $\perp$ na množině Ω. Lze potom pro $x \in \Omega$ uvažovat např. $\{x\}^{\perp\perp}$. Avšak svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ nemusí splňovat axiom A. Buď totiž $\Omega = \{o, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $S = \{\{o\}, \Omega; \{o, \omega_1\}, \{o, \omega_2\}\}$. Zde $\mathscr{A} = \mathscr{B} = \{\{o, \omega_1\}, \{o, \omega_2\}\}$. Položme $f(\{o, \omega_1\}) = \{o, \omega_2\}$, $f(\{o, \omega_2\}) = \{o, \omega_1\}$. Předpoklady věty 3.14 jsou splněny a v souladu s jejím důkazem položíme $\{o, \omega_1\}^{\perp} = f(\{o, \omega_1\}) = \{o, \omega_2\}$, $\{o, \omega_2\}^{\perp} = f(\{o, \omega_2\}) = \{o, \omega_1\}$ a dále $\{o\}^{\perp} = \Omega$, $\Omega^{\perp} = \{o\}$. Odtud plyne ortogonalita $\perp$ na množině Ω: $o \perp \omega_i$ pro $i = 1, 2, 3$; $\omega_1 \perp \omega_2$. Je sice $\omega_3 \in \Omega$, avšak $\{\omega_3\}^{\perp\perp} = \Omega$, což není atom v $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$. Kdybychom však doplnili předpoklady věty 3.14 o podmínku, že ke každému $x \in \Omega$ existuje atom $A_x \in \mathscr{A}$ tak, že $x \in A_x$, svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ by splňoval axiom A. Totiž potom při $x \neq o$ máme $x \in A_x$, odkud $\{o\} \neq \{x\}^{\perp\perp} \subset A_x$ tedy $\{x\}^{\perp\perp} = A_x$.

3.16. Příklad. Buď $\Omega = \{o, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Nechť $o \perp \omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, $\omega_3 \perp \omega_5 \perp \omega_6 \perp \omega_1 \perp \omega_2 \perp \omega_6 \perp \omega_3 \perp \omega_4 \perp \omega_5$, $\omega_6 \perp \omega_4$. Potom $S = \{\{o\}, \Omega; \{o, \omega_1\}, \{o, \omega_2, \omega_6\}; \{o, \omega_2\}, \{o, \omega_1, \omega_6\}; \{o, \omega_3\}, \{o, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}; \{o, \omega_4\}, \{o, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}; \{o, \omega_5\}, \{o, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}; \{o, \omega_6\}, \{o, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}; \{o, \omega_3, \omega_4\}, \{o, \omega_5, \omega_6\}; \{o, \omega_3, \omega_5\}, \{o, \omega_4, \omega_6\}; \{o, \omega_3, \omega_6\}, \{o, \omega_4, \omega_5\}\}$. Zde svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ je ortomodulární A-svaz splňující aciom A. Platí zde $\{o, \omega_1\} \vee \{o, \omega_2\} = \{o, \omega_3\} \vee \{o, \omega_4\} \vee \{o, \omega_5\} = \{o, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Protože tedy neplatí tvrzení věty 2.7, vyplývá odtud, že $\mathscr{S}$ není V-svaz. Toto však lze ukázat