ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 100 * PRAHA 15. 2. 1975 * ČÍSLO 1

TRANSLAČNÉ ŠTRUKTÚRY*) CENTRÁLNE A NECENTRÁLNE TRANSLAČNÉ ŠTRUKTÚRY

JAROSLAV LETTRICH, Žilina

(Došlo dňa 16. februára 1973)

ÚVOD

V [2] J. ANDRÉ skúmal tzv. translačné štruktúry. Translačnou štruktúrou $\mathfrak{T} = (\boldsymbol{P}, \mathscr{L})$ nazval incidenčnú štruktúru ($\boldsymbol{P}$ je množina bodov, $\mathscr{L}$ je množina priamok – podmnožín množiny $\boldsymbol{P}$), ktorá má vlastnosti:

(t1) Ku každým dvom rôznym bodom $a, b \in \boldsymbol{P}$ existuje (práve jedna) priamka $\boldsymbol{L} \in \mathscr{L}$, ktorá je incidentná s bodmi a, b.

(t2) Existuje rozklad množiny $\mathscr{L}$ priamok na triedy navzájom rovnobežných priamok tak, že ku každému bodu $a \in \boldsymbol{P}$ a každej priamke $\boldsymbol{L} \in \mathscr{L}$ existuje práve jedna priamka $\boldsymbol{L}' \in \mathscr{L}$ incidentná s bodom a a rovnobežná s priamkou $\boldsymbol{L}$.

(t3) Štruktúra $\mathfrak{T}$ obsahuje aspoň tri body neležiace na jednej priamke.

(t4) Každá priamka štruktúry $\mathfrak{T}$ obsahuje aspoň dva rôzne body.

(t5) Existuje grupa T translácií, tranzitívna na množine bodov štruktúry $\mathfrak{T}$.

Transláciou sa pritom rozumie každá kolineácia, ktorá necháva pevnými buď všetky, alebo žiaden bod štruktúry $\mathfrak{T}$ a ktorá každú priamku z $\mathscr{L}$ zobrazí na priamku s ňou rovnobežnú. Podľa vety 1.3 v [2] možno zostrojiť každú translačnú štruktúru z rozdelenia nejakej vhodnej grupy. Rozdelením $\mathscr{P}$ netriviálnej grupy $\boldsymbol{P}$ s neutrálnym prvkom o je systém vlastných netriviálnych (tj. od $\{o\}$ a $\boldsymbol{P}$ rôznych) podgrúp grupy $\boldsymbol{P}$, tzv. komponent rozdelenia $\mathscr{P}$, takých, že každý prvok grupy $\boldsymbol{P}$, rôzny od neutrálneho prvku, je obsiahnutý práve v jednej komponente z $\mathscr{P}$. Ak prvky nejakej abstraktnej grupy $\boldsymbol{P}$ pripúšťajúcej rozdelenie $\mathscr{P}$ vezmeme za body a pravé triedy rozkladu grupy $\boldsymbol{P}$ podľa komponent rozdelenia $\mathscr{P}$ grupy $\boldsymbol{P}$ za priamky, tak dostaneme translačnú štruktúru.

V tomto článku sa pojednáva o centrálnych a necentrálnych translačných štruktú-

*) Práca bola vyhotovená za vedenia V. HAVLA, ktorý mi tiež navrhol túto tému.

rach. Využívajú sa tu poznatky z [2] a [3] o translačných štruktúrach resp. o rozdeleniach abelovských grúp. Stade sú prevzaté aj všetky základné pojmy, s ktorými sa v článku pracuje.

V prvej časti je ukázané, ako možno zostrojiť každú – konečnú alebo nekonečnú centrálnu translačnú štruktúru, ktorá nie je translačnou rovinou. Príklad 1 je návodom na konštrukciu nekonečnej centrálnej translačnej štruktúry z rozdelenia $\mathscr{P}$, ktorého nosná grupa je pravým vektorovým priestorom dimenzie ∞ nad komutatívnym telesom F a ktorého komponenty sú jednodimenzionálne podpriestory tohoto vektorového priestoru. V konštrukcii 1 je daný postup na zostrojenie každej konečnej centrálnej translačnej štruktúry, v ktorej každá priamka obsahuje práve p ($p \geqq 2$ je prvočíslo) rôznych bodov a v ktorej každým bodom prechádza $(p^n - 1)/(p - 1)$ rôznych priamok, kde $n \geqq 2$ je dané prirodzené číslo. Nosná grupa $\mathbf{P}$ rozdelenia $\mathscr{P}$, z ktorého je táto štruktúra zostrojená, je direktným súčtom n cyklických grúp rádu p. Pri $n = 2$ je táto štruktúra translačnou rovinou.

Druhá časť tohoto článku je venovaná existencii necentrálnych translačných štruktúr. Sú v nej uvedené dve konkrétne neabelovské grupy, pripúšťajúce rozdelenia, z ktorých zostrojené translačné štruktúry sú necentrálne. Je to grupa zhodných zobrazení pravidelného 4-bokého dvojihlana na seba pozostávajúca z ôsmich prvkov a Frobeniova grupa permutácií 5-prvkovej množiny obsahujúca dvadsať prvkov. Obe tieto grupy patria do tried neabelovských grúp pripúšťajúcich rozdelenie, ktoré André spomína v [2] v poznámke za vetou 2.4.

1. KONŠTRUKCIA CENTRÁLNYCH TRANSLAČNÝCH ŠTRUKTÚR

Translácia τ z translačnej grupy T translačnej štruktúry $\mathfrak{T} = (\mathbf{P}, \mathscr{L})$ nazýva sa centrálnou, ak necháva pevnou (ako celok) nejakú priamku $L \in \mathscr{L}$ a všetky s ňou rovnobežné priamky a len tieto. Ak je každá translácia z translačnej grupy T translačnej štruktúry $\mathfrak{T}$ centrálna, potom translačnú štruktúru $\mathfrak{T}$ nazývame centrálnou. Ako bude uvedené aj v druhej časti, nie každá translačná štruktúra je centrálna. Podľa vety 2.4 v [2] je translačná štruktúra centrálnou vtedy a len vtedy, ak jej translačná grupa je abelovská. Teda každú centrálnu translačnú štruktúru možno zostrojiť z rozdelenia nejakej abelovskej grupy. Avšak nie každá abelovská grupa pripúšťa rozdelenie. Veta 1.1 v [3] hovorí, že (aditívna) abelovská grupa $\mathbf{P}$ (konečná alebo nekonečná) pripúšťa rozdelenie vtedy a len vtedy, ak:

(a) všetky nenulové prvky grupy $\mathbf{P}$ majú rovnaký rád a

(b) grupa $\mathbf{P}$ má hodnosť väčšiu ako 1.

Hodnosťou grupy $\mathbf{P}$ sa pritom rozumie maximálny počet lineárne nezávislých prvkov grupy $\mathbf{P}$.

V ďalšom si bližšie všimneme rozdelenia abelovských grúp a zavedieme niekoľko pojmov.

Nech $\mathscr{P}$ je rozdelenie abelovskej grupy $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ nech je podgrupa grupy $\mathbf{P}$. Potom

$\mathscr{P} \cap \mathbf{Q}$ je množina všetkých podgrúp $\mathbf{X} \cap \mathbf{Q} \neq o$, kde $\mathbf{X}$ je komponenta z $\mathscr{P}$. Množina $\mathscr{P} \cap \mathbf{Q}$ je rozdelenie grupy $\mathbf{Q}$.

Podgrupa $\mathbf{U}$ grupy $\mathbf{P}$ (rozumie sa abelovskej) je $\mathscr{P}$-prípustnou podgrupou grupy $\mathbf{P}$, keď pre každú komponentu $\mathbf{X}$ rozdelenia $\mathscr{P}$ grupy $\mathbf{P}$ platí

$$\mathbf{U} \cap \mathbf{X} = o \quad \text{alebo} \quad \mathbf{U} \cap \mathbf{X} = \mathbf{X}.$$

Rozdelenie $\mathscr{P}$ abelovskej grupy $\mathbf{P}$ nazývame geometrickým rozdelením, ak každý súčet $\mathscr{P}$-prípustných podgrúp grupy $\mathbf{P}$ je opäť $\mathscr{P}$-prípustná podgrupa. Nutná a postačujúca podmienka k tomu, aby rozdelenie $\mathscr{P}$ grupy $\mathbf{P}$ bolo geometrickým rozdelením, je, aby súčet každých dvoch komponent z $\mathscr{P}$ bol $\mathscr{P}$-prípustnou podgrupou grupy $\mathbf{P}$. Geometrické rozdelenie $\mathscr{P}$ grupy $\mathbf{P}$ nazývame planárnym rozdelením, keď existujú dve rôzne komponenty $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathscr{P}$ také, že je $\mathbf{P} = \mathbf{U} + \mathbf{V}$. V opačnom prípade hovoríme o neplanárnom rozdelení. Geometrické rozdelenie $\mathscr{P}$ grupy $\mathbf{P}$ je planárne vtedy a len vtedy, ak pre každé dve rôzne komponenty $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathscr{P}$ platí $\mathbf{P} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$.

Planárne rozdelenia abelovských grúp André nazýva kongruenciami. Translačné štruktúry, zostrojené z planárnych rozdelení abelovských grúp, sú translačnými rovinami. V týchto sa každé dve nerovnobežné priamky nutne pretínajú, čo v obecných translačných štruktúrach neplatí. Preto translačné štruktúry (ktoré nie sú translačnými rovinami) budeme konštruovať z neplanárnych rozdelení abelovských grúp. O týchto rozdeleniach platí (veta 2.3 v [3]): Neplanárne rozdelenia sú práve množiny jednodimenzionálnych podpriestorov vektorového priestoru dimenzie aspoň tri nad (nie nutne komutatívnym) telesom.

V nasledujúcom príklade uvedieme konštrukciu nekonečnej centrálnej translačnej štruktúry.

Príklad 1. Nech F je ľubovolné komutatívne teleso s charakteristikou 0. Nulový a jednotkový prvok telesa F budeme označovať 0 resp. 1 ďalšie prvky $a, b, \ldots$. Nech $\mathscr{I}$ je množina indexov, λ_i $(i \in \mathscr{I})$ neurčité nad F a $\mathbf{P}[\lambda_i]_{\mathscr{I}} = \mathbf{P}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots]$ nech je okruh polynómov $f(\lambda_i)_{\mathscr{I}} = f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots)$, $g(\lambda_i)_{\mathscr{I}} = g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots)$, $\ldots$ neurčitých λ_i $(i \in \mathscr{I})$ s koeficientami z telesa F. Aditívnu grupu (zrejme abelovskú) tohoto okruhu označme $\mathbf{P}$; je to vlastne vektorový priestor nad telesom F. Nulovým vektorom priestoru $\mathbf{P}$ — neutrálnym prvkom grupy $\mathbf{P}$ je nulový polynóm $0 \in \mathbf{P}[\lambda_i]_{\mathscr{I}}$. Bázu vektorového priestoru $\mathbf{P}$ tvoria polynómy

$$\lambda_1^{n_1} \cdot \lambda_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_i^{n_i} \cdot \ldots,$$

kde všetky n_i sú nezáporné celé čísla. Teda $\dim \mathbf{P} = \infty$. Množinu všetkých jednodimenzionálnych podpriestorov $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \ldots$ priestoru $\mathbf{P}$ označme $\mathscr{P}$. Ukážeme, že $\mathscr{P}$ je rozdelenie grupy $\mathbf{P}$.

Každý podpriestor $\mathbf{U} \in \mathscr{P}$ priestoru $\mathbf{P}$ obsahuje spolu s nejakým polynómom $f(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \neq 0$ aj všetky polynómy $a \cdot f(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$, kde je $a \in F$, a žiadne iné. Preto môžeme označiť

$$\mathbf{U} = F \cdot f(\lambda_i)_{\mathscr{I}}.$$

Pri tomto označení vždy bude $f(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \neq 0$ ľubovolný polynóm z $\mathbf{U}$. Nulový polynóm 0 leží zřejme v každom podpriestore $\mathbf{U} \in \mathscr{P}$, lebo je $0 \,.\, f(\lambda_i)_{\mathscr{I}} = 0$ pre každý polynóm $f(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \in \mathbf{P}$. Každý nenulový polynóm $f(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$ z priestoru $\mathbf{P}$ leží práve v jednom podpriestore $\mathbf{U} \in \mathscr{P}$, lebo keby $f(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \in \mathbf{U}$ a súčasne $f(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \in \mathbf{V}$, kde $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathscr{P}$, tak by platilo

$$\mathbf{U} = F \,.\, f(\lambda_i)_{\mathscr{I}} = \mathbf{V} \,.$$

Rozdelenie $\mathscr{P}$ grupy $\mathbf{P}$ je zrejme neplanárne. Ak sú totiž $\mathbf{U} \neq \mathbf{V}$ dve ľubovolné komponenty rozdelenia $\mathscr{P}$, potom platí, že $\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$, lebo $\mathbf{U} \cap \mathbf{V} = 0$. Preto $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{V} = 2$, čiže $\mathbf{U} + \mathbf{V} \subset \mathbf{P}$.

Z rozdelenia $\mathscr{P}$ grupy $\mathbf{P}$ zostrojíme translačnú štruktúru $\mathfrak{T}$ nasledovne:

Bodmi štruktúry $\mathfrak{T}$ budú prvky grupy $\mathbf{P}$.

Priamkami štruktúry $\mathfrak{T}$ nazveme pravé triedy $\mathbf{U} + p(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$, $\mathbf{V} + q(\lambda_i)_{\mathscr{I}}, \dots$ $(p(\lambda_i)_{\mathscr{I}}, q(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \in \mathbf{P})$ rozkladu grupy $\mathbf{P}$ podľa podgrúp $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \dots$ z rozdelenia $\mathscr{P}$.

Dve priamky $\mathbf{U} + p(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$, $\mathbf{V} + q(\lambda_i)_{\mathscr{I}}(\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathscr{P}; p(\lambda_i)_{\mathscr{I}}, q(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \in \mathbf{P})$ zo štruktúry $\mathfrak{T}$ nazveme navzájom rovnobežnými vtedy a len vtedy, keď je $\mathbf{U} = \mathbf{V}$.

Transláciami v štruktúre $\mathfrak{T}$ budú zobrazenia $\overline{t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}}$ grupy $\mathbf{P}$ na seba, definované vzťahom

$$[x(\lambda_i)_{\mathscr{I}}]\, \overline{t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}} = x(\lambda_i)_{\mathscr{I}} + t(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \,, \tag{1}$$

pričom $t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$, $x(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$ sú prvky grupy $\mathbf{P}$.

Ľahko overíme, že sú splnené axiomy **(t1)** až **(t5)**:

Nech $f(\lambda_i)_{\mathscr{I}}, g(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \in \mathbf{P}$ sú ľubovolné rôzne body. Potom množina $F \,.\, [f(\lambda_i)_{\mathscr{I}} - g(\lambda_i)_{\mathscr{I}}] + g(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$ je jediná priamka, spájajúca body $f(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$, $g(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$, takže $\mathfrak{T}$ je incidenčná štruktúra a platí aj **(t1)**. Pretože $\mathbf{U} + q(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$, $\mathbf{U} \in \mathscr{P}$, $q(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \in \mathbf{P}$, je jediná priamka, idúca daným bodom $q(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$ rovnobežne s danou priamkou $\mathbf{U} + p(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$, kde $p(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \in \mathbf{P}$, tak je splnený axiom **(t2)**.

V množine $\mathbf{P}$ existujú tři body 0, 1, λ_i (i je nejaký prvok z množiny $\mathscr{I}$), ktoré neležia na jednej priamke, čiže v štruktúre $\mathfrak{T}$ platí tiež axiom **(t3)**.

Platnosť axiomu **(t4)** vyplýva zo skutočnosti, že v telese F existujú najmenej dva prvky 0 a 1.

Každé zo zobrazení $\overline{t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}}$, pričom $t(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \in \mathbf{P}$, definované vzťahom (1), nenechá pevným žiaden bod z $\mathbf{P}$, ak $t(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \neq 0$ a fixuje každý bod z $\mathbf{P}$, ak $t(\lambda_i)_{\mathscr{I}} = 0$. Priamka $\mathbf{U} + p(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$ v zobrazení $\overline{t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}}$ prejde do priamky $\mathbf{U} + [p(\lambda_i)_{\mathscr{I}} + t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}]$, tj. do priamky rovnobežnej s $\mathbf{U} + p(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$. Preto je $\overline{t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}}$ naozaj transláciou v štruktúre $\mathfrak{T}$. Množinu všetkých translácií $\overline{t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}}$ definovaných vzťahom (1) označme T. Pre každé $\overline{t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}}, \overline{u(\lambda_i)_{\mathscr{I}}} \in \mathrm{T}$ a každý bod $x(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \in \mathbf{P}$ je splnená rovnosť

$$[x(\lambda_i)_{\mathscr{I}}]\, \overline{t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}\, u(\lambda_i)_{\mathscr{I}}} = x(\lambda_i)_{\mathscr{I}} + [t(\lambda_i)_{\mathscr{I}} + u(\lambda_i)_{\mathscr{I}}] = [x(\lambda_i)_{\mathscr{I}}]\, \overline{(t(\lambda_i)_{\mathscr{I}} + u(\lambda_i)_{\mathscr{I}})}, \tag{2}$$

preto zobrazenie $\varphi : t(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \to \overline{t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}}$ je izomorfizmus abelovskej grupy $\mathbf{P}$ na množinu T s operáciou násobenia — skladania translácií — a teda aj T je abelovská grupa. Ku každým dvom bodom $f(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$, $g(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \in \boldsymbol{P}$ existuje práve jedna translácia

$$\overline{g(\lambda_i)_{\mathscr{I}} - f(\lambda_i)_{\mathscr{I}}} \in \mathrm{T}\,,$$

ktorá zobrazuje bod $f(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$ do bodu $g(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$. Z toho vyplýva, že v štruktúre $\mathfrak{T}$ je splnený aj axiom **(t5)**.

Translačná štruktúra $\mathfrak{T}$, ktorú sme tu dostali, určite nie je translačnou rovinou, pretože v nej existujú nerovnobežné priamky, ktoré sa nepretínajú. Dokonca platí, že každým bodom $p(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \in \boldsymbol{P}$, neležiacim na priamke $\boldsymbol{U} + q(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$ ($\boldsymbol{U} \in \mathscr{P}$, $q(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \in \boldsymbol{P}$), prechádza (najmenej jedna) priamka $\boldsymbol{V} + p(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$ ($\boldsymbol{V} \in \mathscr{P}$), ktorá nepretína priamku $\boldsymbol{U} + q(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$. Ak je $\boldsymbol{U} = F\,.\,f(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$, $f(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \in \boldsymbol{P}$, potom bude $\boldsymbol{V} = F\,.\,g(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$, kde $g(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \in \boldsymbol{P}$ stačí zvoliť napríklad tak, aby polynómy $f(\lambda_i)_{\mathscr{I}} + q(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$ a $g(\lambda_i)_{\mathscr{I}} + p(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$ nemali rovnaký stupeň.

Zostrojená translačná štruktúra $\mathfrak{T}$ je centrálna, lebo nosná grupa $\boldsymbol{P}$ rozdelenia $\mathscr{P}$, z ktorého sme ju dostali, je abelovská. Každá neidentická translácia $\overline{t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}} \in \mathrm{T}$ je naozaj centrálnou. Translácia $\overline{t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}}$ totiž necháva pevnou (ako celok) priamku $\boldsymbol{U} = F\,.\,t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$ lebo platí

$$[F\,.\,t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}]\,\overline{t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}} = F\,.\,t(\lambda_i)_{\mathscr{I}} + t(\lambda_i)_{\mathscr{I}} = F\,.\,t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}\,.$$

Každá priamka $\boldsymbol{U} + p(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$, $p(\lambda_i)_{\mathscr{I}} \in \boldsymbol{P}$, rovnobežná s priamkou $\boldsymbol{U} = F\,.\,t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}$, zostáva tiež pevnou (ako celok) v translácii $\overline{t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}}$, keďže (vzhľadom na asociatívnosť a komutatívnosť sčítania v grupe $\boldsymbol{P}$) platí:

$$[F\,.\,t(\lambda_i)_{\mathscr{I}} + p(\lambda_i)_{\mathscr{I}}]\,\overline{t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}} = [F\,.\,t(\lambda_i)_{\mathscr{I}} + p(\lambda_i)_{\mathscr{I}}] + t(\lambda_i)_{\mathscr{I}} =$$
$$= [F\,.\,t(\lambda_i)_{\mathscr{I}} + t(\lambda_i)_{\mathscr{I}}] + p(\lambda_i)_{\mathscr{I}} = F\,.\,t(\lambda_i)_{\mathscr{I}} + p(\lambda_i)_{\mathscr{I}}\,.$$

O rozdeleniach konečných abelovských grúp André v [2] uvádza (veta 4.5): Medzi konečnými abelovskými grupami pripúšťajú rozdelenie práve tie, ktoré nie sú cyklické a sú elementárne abelovské, tj. všetky nenulové prvky majú rovnaký prvočíselný rád p. Preto k určeniu všetkých konečných centrálnych translačných štruktúr stačí poznať všetky konečné necyklické abelovské grupy typu $(p, p, \ldots, p)$, kde p je prvočíslo. Každú takúto grupu $\boldsymbol{P}$ dostaneme ako direktný súčet konečného počtu n ($n \geqq 2$) cyklických grúp prvočíselného rádu p (s aditívne zapísanou operáciou). Všetky cyklické podgrupy rádu p grupy $\boldsymbol{P}$ tvoria potom rozdelenie $\mathscr{P}$ grupy $\boldsymbol{P}$. Teraz uvedieme ich konštrukciu.

Konštrukcia 1. Nech $p \geqq 2$ je dané prvočíslo a $n \geqq 2$ prirodzené číslo. Ďalej nech $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_n$ sú cyklické grupy (s aditívne zapísanou operáciou) rádu p a nech o_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) je neutrálny — nulový prvok grupy $\boldsymbol{A}_i$. Ak $a_i \neq o_i$ je ľubovolný prvok grupy $\boldsymbol{A}_i$, potom zrejme pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ je

$$\boldsymbol{A}_i = (\{a_i, 2a_i, \ldots, ma_i, \ldots, (p-1)\,a_i, pa_i = o_i\}, +)\,,$$

kde ma_i (m je prirodzené číslo, $1 \leqq m \leqq p$) značí súčet m rovnakých sčítancov a_i. Pripomenieme niektoré známe vlastnosti cyklických grúp (prvočíselného) rádu p, ktoré budeme v ďalšom potrebovať:

a) Každý prvok $a_i \neq o_i$ cyklickej grupy $\boldsymbol{A}_i$ prvočíselného rádu p má tiež rád p.

b) Ak k je celé, m prirodzené číslo, pričom $1 \leqq m \leqq p$, a $a_i \neq o_i$ je ľubovolný prvok cyklickej grupy $\boldsymbol{A}_i$ rádu p, potom $ka_i = ma_i$ vtedy a len vtedy, ak $k - m \equiv \equiv 0 \pmod p$. Preto môžeme písať $o_i = 0a_i$, kde 0 je celé číslo.

c) Opačný prvok k prvku ma_i (m je celé číslo) cyklickej grupy $\boldsymbol{A}_i$ je $-ma_i$.

d) Ak r, s sú celé čísla a $a_i \neq o_i$ je ľubovolný prvok cyklickej grupy $\boldsymbol{A}_i$ rádu p, potom

$$ra_i + sa_i = (r + s)\, a_i = ma_i\,,$$

$$r(sa_i) = (rs)\, a_i = na_i\,,$$

kde pre nezáporné celé čísla $m, n \leqq p - 1$ platí:

$$m \equiv r + s \pmod p\,, \quad n \equiv rs \pmod p\,.$$

e) Každá konečná cyklická grupa $\boldsymbol{A}_i$ je abelovská.

Označme $\boldsymbol{P}$ množinu všetkých možných usporiadaných n-tíc $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n), \ldots$, kde $a_i, b_i, \ldots$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) sú ľuvobolné prvky z cyklickej grupy $\boldsymbol{A}_i$ rádu p. Súčet každých dvoch prvkov $a, b \in \boldsymbol{P}$ definujme nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned}(3) \qquad a + b &= (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)\,.\end{aligned}$$

Zo vzťahu (3) vyplýva, že súčet každých dvoch prvkov z množiny $\boldsymbol{P}$ je opäť prvok množiny $\boldsymbol{P}$. Ľahko overíme, že pre takto definovanú operáciu sčítania v množine $\boldsymbol{P}$ je splnený asociatívny a komutatívny zákon, takže $(\boldsymbol{P}, +)$ je abelovská grupa s neutrálnym prvkom $o = (o_1, o_2, \ldots, o_n)$. Opačným prvkom k prvku $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ z grupy $(\boldsymbol{P}, +)$ je prvok

$$-a = -(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)\,.$$

Súčet m (m je prirodzené číslo) rovnakých prvkov $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ z grupy $(\boldsymbol{P}, +)$ označíme tiež $ma = m(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, pričom podľa (3) platí:

$$m(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ma_1, ma_2, \ldots, ma_n)\,.$$

Rád grupy $(\boldsymbol{P}, +)$ je zrejme rovný p^n. Každý prvok $a \neq o$ z grupy $(\boldsymbol{P}, +)$ má rád p, preto $(\boldsymbol{P}, +)$ nie je cyklická grupa.

Nech $\boldsymbol{A}'_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, je podgrupa grupy $(\boldsymbol{P}, +)$, pozostávajúca z n-tíc

$$(o_1, o_2, \ldots, o_{i-1}, a_i, o_{i-1}, \ldots, o_n)\,,$$

kde a_i je prvok cyklickej grupy $\mathbf{A}_i$. Grupa $(\mathbf{P}, +)$ je potom direktným súčtom všetkých svojich podgrúp $\mathbf{A}'_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, lebo každé dve rôzne podgrupy $\mathbf{A}'_i$, $\mathbf{A}'_j$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ majú spoločný práve jeden prvok – neutrálny prvok o a každý prvok $a \neq o$ grupy $(\mathbf{P}, +)$ sa dá jednoznačhe vyjadriť v tvare súčtu prvkov po jednom vybratých z podgrúp $\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_2, \dots, \mathbf{A}'_n$:

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) =$$
$$= (a_1, o_2, \dots, o_n) + (o_1, a_2, o_3, \dots, o_n) + \dots + (o_1, o_2, \dots, o_{n-1}, a_n).$$

Každá podgrupa $\mathbf{A}'_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ grupy $(\mathbf{P}, +)$ je zrejme izomorfná s cyklickou grupou $\mathbf{A}_i$ a preto môžeme hovoriť, že grupa $(\mathbf{P}, +)$ je diretkným súčtom cyklických grúp $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$.

Pretože rád grupy $(\mathbf{P}, +)$ je p^n a rád každého jej nenulového prvku a je p, obsahuje grupa $(\mathbf{P}, +)$ práve q cyklických podgrúp $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_q$ rádu p, kde

$$q = \frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

Tieto podgrupy tvoria rozdelenie $\mathscr{P}$ grupy $(\mathbf{P}, +)$, lebo každé dve rôzne podgrupy $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{P}_j$ $(i, j = 1, 2, \dots, q)$ majú spoločný len neutrálny prvok $o \in (\mathbf{P}, +)$ a každý prvok $a \neq o$ z grupy $(\mathbf{P}, +)$ patrí práve do jednej z podgrúp $\mathbf{P}_i$ – komponent rozdelenia $\mathscr{P}$, konkrétne do podgrupy, vytvorenej prirodzenými násobkami ma $(1 \leqq m \leqq p)$ tohoto prvku a.

Z rozdelenia $\mathscr{P}$ s nosnou grupou $(\mathbf{P}, +)$ zostrojíme translačnú štruktúru $\mathfrak{T}$ rovnakým spôsobom ako v príklade 1:

Bodmi štruktúry $\mathfrak{T}$ budú prvky grupy $(\mathbf{P}, +)$.

Primkami štruktúry $\mathfrak{T}$ nazveme pravé triedy $\mathbf{P}_i + a$ $(\mathbf{P}_i \in \mathscr{P}, a \in \mathbf{P})$ rozkladu grupy $(\mathbf{P}, +)$ podľa podgrúp $\mathbf{P}_i$ $(i = 1, 2, \dots, q)$ z rozdelenia $\mathscr{P}$.

Rovnobežnosť priamok štruktúry $\mathfrak{T}$ budeme definovať takto: Dve priamky $\mathbf{P}_i + a$, $\mathbf{P}_j + b$ $(\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j \in \mathscr{P}; a, b \in \mathbf{P})$ nazveme navzájom rovnobežnými vtedy a len vtedy, keď $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_j$.

Ukážeme, že štruktúra $\mathfrak{T}$ s práve definovanými bodmi, priamkami a rovnobežnosťou priamok spĺňa axiómy **(t1)** až **(t5)**:

Ak $a \neq b$, $a, b \in \mathbf{P}$, sú ľubovolné body, potom existuje práve jedna priamka $\mathbf{P}_k + a$, ktorá je s nimi incidentná, pričom $\mathbf{P}_k \in \mathscr{P}$ je cyklická grupa s generujúcim prvkom $b - a$. To ale znamená, že $\mathfrak{T}$ je incidenčná štruktúra a platí v nej **(t1)**.

Bodom $a \in \mathbf{P}$ prechádza práve jedna rovnobežka $\mathbf{P}_i + a$ s priamkou $\mathbf{P}_i + b$ $(b \in \mathbf{P}, \mathbf{P}_i \in \mathscr{P})$, teda je splnený axióm **(t2)**.

Pretože podľa predpokladu je $p \geqq 2$, každá priamka štruktúry $\mathfrak{T}$ obsahuje najmenej dva body, takže v $\mathfrak{T}$ platí **(t4)**.

Keďže je $n \geqq 2$ (opäť podľa predpokladu), existujú aspoň dve (dokonca najmenej tri) priamky idúce bodom o. Každá z nich má ešte ďalší bod rôzny od o a preto platí aj **(t3)**.

Platnosť **(t5)** dokážeme nasledovne:

Ku každému prvku $t \in \boldsymbol{P}$ priradíme zobrazenie $\bar{t}$ také, že pre každý bod $x \in \boldsymbol{P}$ platí

$$(4) \qquad x\bar{t} = x + t\,.$$

Ak je $t \neq o$, potom zobrazeníe $\bar{t}$ nenechá pevným žiaden bod a každú priamku $\boldsymbol{P}_i + a$ ($\boldsymbol{P}_i \in \mathscr{P}$, $a \in \boldsymbol{P}$) zobrazí na priamku $\boldsymbol{P}_i + (a + t)$, rovnobežnú s priamkou $\boldsymbol{P}_i + a$, teda $\bar{t}$ je translácia. Množina T všetkých takto definovaných translácií štruktúry $\mathfrak{T}$ je (vzhľadom na operáciu skladania) abelovská grupa, čo vyplýva z izomorfizmu $\varphi : t \to \bar{t}$ grupy $(\boldsymbol{P}, +)$ na množinu T. Translačná grupa T je tranzitívna na množine $\boldsymbol{P}$ bodov štruktúry $\mathfrak{T}$, pretože ku každým dvom bodom $a, b \in \boldsymbol{P}$ existuje práve jedna translácia $\overline{b - a}$ z grupy T, ktorá zobrazí bod a do bodu b.

Pretože nosná grupa $(\boldsymbol{P}, +)$ rozdelenia $\mathscr{P}$ je abelovská, zostrojená translačná štruktúra musí byť centrálna. Ukážeme, že naozaj je každá neidentická translácia z grupy T centrálnou. Ak je $\bar{t} \in$ T neidentická translácia (priradená k prvku $t \in \boldsymbol{P}$, $t \neq o$, v izomorfizme φ), potom $\bar{t}$ nechá pevnou (ako celok) priamku $\boldsymbol{P}_k \in \mathscr{P}$, kde $\boldsymbol{P}_k$ je cyklická grupa generovaná prvkom t. Každá priamka $\boldsymbol{P}_k + a$ ($a \in \boldsymbol{P}$) zostane tiež pevná (ako celok) v translácii $\bar{t}$, lebo

$$(\boldsymbol{P}_k + a)\,\bar{t} = (\boldsymbol{P}_k + a) + t = (\boldsymbol{P}_k + t) + a = \boldsymbol{P}_k + a\,,$$

takže $\bar{t}$ je centrálna.

Priamym výpočtom dá se overiť, že pri $n = 2$ je rozdelenie $\mathscr{P}$ planárne a teda translačná štruktúra z neho zostrojená je translačnou rovinou.

2. O EXISTENCII NECENTRÁLNYCH TRANSLAČNÝCH ŠTRUKTÚR

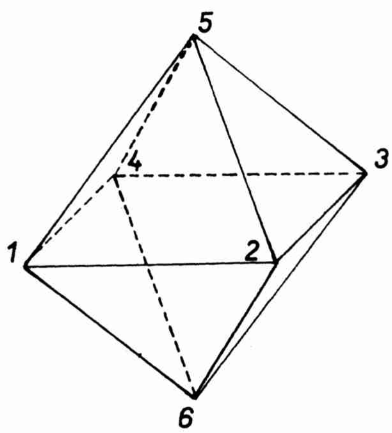
Už na začiatku 1. časti tohoto článku sme povedali, že translačná štruktúra nemusí byť nutne centrálnou, čiže nemusí byť centrálnou každá jej translácia. Existujú totiž translačné štruktúry s neabelovskou translačnou grupou, tj. existujú neabelovské grupy, ktoré pripúšťajú rozdelenie. J. André v [2] (poznámka za vetou 2.4) spomína dve skupiny takýchto grúp: Grupy $\boldsymbol{D}_{2n}$ zhodných zobrazení pravidelného dvojihlana (ktorého podstava je pravidelný n-uholník) na seba*) a Frobeniove grupy permutácií nejakej konečnej množiny S. V tejto časti článku uvedieme po jednej konkrétnej grupe z oboch spomínaných skupín — grupu $\boldsymbol{D}_8$ zhodných zobrazení pravidelného dvojihlana so štvorcovou podstavou a Frobeniovu grupu permutácií množiny S pozostávajúcej z piatich prvkov.

*) Jedná sa o tzv. Dieedergruppen, uvedená vlastnosť ktorých vyplýva z úvah M. SUZUKIHO v [4]. Suzuki však tieto grupy v [4] neuvádza.

a) Nech je daný pravidelný 4-boký dvojhlan. Vrcholy jeho podstavy označme 1, 2, 3, 4 a vrcholy súmerné podľa roviny podstavy zasa 5, 6.
Uvažujme všetky zhodné zobrazenia uvedeného dvojihlana na seba, tj.: otočenia ihlana okolo osi $\overline{56}$ ihlana o uhly 90°, 180°, 270° a 360°; osové súmernosti ihlana podľa uhlopriečok $\overline{13}$ a $\overline{24}$ jeho podstavy; osové súmernosti ihlana podľa osí strán $\overline{12}$, $\overline{34}$ a $\overline{14}$, $\overline{23}$ jeho podstavy

Všetky tieto zobrazenia sú vlastne permutácie množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ vrcholov ihlana a môžeme ich zapísať v tvare súčinov cyklov:

$$a_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6), \quad a_2 = (1234)(5)(6),$$
$$a_3 = (13)(24)(5)(6), \quad a_4 = (1432)(5)(6),$$
$$a_5 = (1)(3)(24)(55), \quad a_6 = (13)(2)(4)(56),$$
$$a_7 = (14)(23)(56), \quad a_8 = (12)(34)(56).$$



Priamym výpočtom sa presvedčíme, že množina $\mathbf{D}_8 = \{a_i\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ s operáciou násobenia – skladania permutácií tvorí grupu s neutrálnym prvkom a_1. Grupová operácia v $\mathbf{D}_8$ je prehľadne popísaná nasledujúcou tabuľkou:

Tabuľka 1.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_2	a_2	a_3	a_4	a_1	a_7	a_8	a_6	a_5
a_3	a_3	a_4	a_1	a_2	a_6	a_5	a_8	a_7
a_4	a_4	a_1	a_2	a_3	a_8	a_7	a_5	a_6
a_5	a_5	a_8	a_6	a_7	a_1	a_3	a_4	a_2
a_6	a_6	a_7	a_5	a_8	a_3	a_1	a_2	a_4
a_7	a_7	a_5	a_8	a_6	a_2	a_4	a_1	a_3
a_8	a_8	a_6	a_7	a_5	a_4	a_2	a_3	a_1

Z tejto tabuľky hneď vidieť, že grupa $\mathbf{D}_8$ je neabelovská, lebo napr. $a_2a_5 = a_7 \neq a_8 = a_5a_2$.

Zostrojme teraz rozdelenie $\mathscr{D}$ grupy $\boldsymbol{D}_8$. Použitím tabuľky 1 ľahko zistíme, že množiny

$$\boldsymbol{A}_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \{a_1, a_5\}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \{a_1, a_6\},$$
$$\boldsymbol{A}_4 = \{a_1, a_7\}, \quad \boldsymbol{A}_5 = \{a_1, a_8\}$$

sú podgrupy grupy $\boldsymbol{D}_8$, vyhovujúce vlastnostiam grupového rozdelenia, pretože každé dve majú spoločný práve jeden prvok a_1 a každý prvok a_i $(i = 2, 3, \ldots, 8)$ leží práve v jednej podgrupe $\boldsymbol{A}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, 5)$. Preto je

$$\mathscr{D} = \{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4, \boldsymbol{A}_5\}.$$

Z rozdelenia $\mathscr{D}$ grupy $\boldsymbol{D}_8$ zostrojíme translačnú štruktúru $\mathfrak{T}$ podobne ako v 1. časti článku:

Bodmi štruktúry $\mathfrak{T}$ budú prvky grupy $\boldsymbol{D}_8$.

Priamkami štruktúry $\mathfrak{T}$ nazveme pravé triedy rozkladu grupy $\boldsymbol{D}_8$ podľa podgrúp $\boldsymbol{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ z rozdelenia $\mathscr{D}$:

$$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4, \boldsymbol{A}_5, \{a_5, a_6, a_7, a_8\}, \{a_2, a_5\}, \{a_2, a_6\}, \{a_2, a_7\}, \{a_2, a_8\},$$
$$\{a_3, a_5\}, \{a_3, a_6\}, \{a_3, a_7\}, \{a_3, a_8\}, \{a_4, a_5\}, \{a_4, a_6\}, \{a_4, a_7\}, \{a_4, a_8\}.$$

Rovnobežnosť priamok v štruktúre $\mathfrak{T}$ budeme definovať rozkladom množiny všetkých priamok na triedy navzájom rovnobežných priamok:

$$\boldsymbol{A}_1, \{a_5, a_6, a_7, a_8\};$$
$$\boldsymbol{A}_2, \{a_2, a_8\}, \{a_3, a_6\}, \{a_4, a_7\};$$
$$\boldsymbol{A}_3, \{a_2, a_7\}, \{a_3, a_5\}, \{a_4, a_8\};$$
$$\boldsymbol{A}_4, \{a_2, a_5\}, \{a_3, a_8\}, \{a_4, a_6\};$$
$$\boldsymbol{A}_5, \{a_2, a_6\}, \{a_3, a_7\}, \{a_4, a_5\}.$$

Použitím tabuľky 1 môžeme ľahko overiť, že v štruktúre $\mathfrak{T}$ s takto definovanými bodmi, priamkami a rovnobežnosťou priamok sú splnené axiómy **(t1)** až **(t4)**. Platnosť axiómu **(t5)** ukážeme takto: Ku každém prvku $a_i \in \boldsymbol{D}_8$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ priradíme zobrazenie $\bar{a}_i$ grupy $\boldsymbol{D}_8$ na seba, v ktorom pre každý prvok $a_j \in \boldsymbol{D}_8$ $(j = 1, 2, \ldots, 8)$ platí

$$a_j\bar{a}_i = a_j a_i. \tag{5}$$

Ľahko sa zistí (užitím tabuľky 1), že zobrazenie $\bar{a}_1$ je identita a že každé zo zobrazení $\bar{a}_i$ $(i = 2, 3, \ldots, 8)$ nenechá pevným žiaden bod štruktúry $\mathfrak{T}$ a každú priamku štruktúry $\mathfrak{T}$ zobrazí na priamku s ňou rovnobežnú, tj. že je transláciou štruktúry $\mathfrak{T}$. Množinu všetkých translácií $\bar{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ označme T. Priradenie $\varphi : a_i \to \bar{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ je izomorfizmus grupy $\boldsymbol{D}_8$ na množinu T s operáciou skladania zobrazení a preto T je tiež grupou. Grupa T je tranzitívna na množine bodov štruktúry $\mathfrak{T}$, lebo ku každým dvom bodom a_i, $a_j \in \mathbf{D}_8$ existuje jediná translácia

$$\overline{a_i^{-1}a_j} \in \mathrm{T},$$

ktorá zobrazí bod a_i do bodu a_j.

Zostrojená translačná štruktúra $\mathfrak{T}$ nie je translačnou rovinou. Z rozkladu množiny priamok štruktúry $\mathfrak{T}$ na triedy navzájom rovnobežných priamok vidíme, že v štruktúre $\mathfrak{T}$ existujú priamky, ktoré nie sú rovnobežné a sa nepretínajú. Takými sú napr. tieto priamky: $\{a_2, a_8\}$ a $\{a_3, a_5\}$.

Obráťme teraz pozornosť na centrálne translácie translačnej štruktúry $\mathfrak{T}$. Translácie $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ z grupy T nechávajú pevnými (ako celok) obe priamky $\mathbf{A}_1$, $\{a_5, a_6, a_7, a_8\}$, vytvárajúce jednu triedu rovnobežiek v štruktúre $\mathfrak{T}$, preto sú centrálne. Naproti tomu žiadna z translácií $\bar{a}_5$, $\bar{a}_6$, $\bar{a}_7$, $\bar{a}_8$ nenechá pevnými (ako celok) všetky priamky jednej triedy navzájom rovnobežných priamok štruktúry $\mathfrak{T}$. Napr. translácia $\bar{a}_5$ necháva pevnými (ako celok) priamky $\mathbf{A}_2$, $\{a_3, a_6\}$, ale priamky $\{_2, a_8\}$, $\{a_4, a_7\}$ z tej istej triedy rovnobežiek prevádza jednu do druhej. Pretože nie všetky translácie z translačnej grupy T translačnej štruktúry $\mathfrak{T}$ sú centrálne, je štruktúra $\mathfrak{T}$ necentrálna.

b) V tomto odstavci zostrojíme translačnú štruktúru z rozdelenia tzv. Frobeniovej grupy.

Definícia. Grupu $\mathbf{P}$ permutácií nejakej konečnej množiny S symbolov $i, j, \ldots$ nazývame *Frobeniovou grupou*, ak má nasledujúcu vlastnosť:

(**F**) Ak pre prvky $i \neq j$ množiny S a permutáciu $a \in \mathbf{P}$ platí $ia = i$ a súčasne $ja = j$, potom je a identická permutácia 1.

Z tejto definície vyplýva, že každá permutácia z grupy $\mathbf{P}$ je jednoznačne určená svojím účinkom na dva prvky z množiny S. Ak totiž permutácie $a, b \in \mathbf{P}$ majú rovnaký účinok na prvky $i \neq j$ z množiny S, tj. $ia = ib$, $ja = jb$, potom platí

$$iab^{-1} = i \quad \text{a súčasne} \quad jab^{-1} = j\,.$$

$\mathbf{P}$ je grupa, preto aj ab^{-1} je permutácia z $\mathbf{P}$. Podľa definície musí byť $ab^{-1} = 1$, to znamená $a = b$.

Nech je daná množina $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Zostrojíme Frobeniovu grupu permutácií tejto množiny S. Grupa $\mathbf{P}$ bude pozostávať práve z týchto permutácií:

1. identickej permutácie 1;
2. permutácií

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

ktoré premiestňujú všetky prvky množiny S;

3. permutácií

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad d_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

ktoré nechávajú na mieste práve jeden prvok množiny S.

Označme:

$$\boldsymbol{A} = \{1, a_1, a_2, a_3, a_4\},$$
$$\boldsymbol{B} = \{1, b_1, b_2, b_3\},$$
$$\boldsymbol{C} = \{1, c_1, c_2, c_3\},$$
$$\boldsymbol{D} = \{1, d_1, d_2, d_3\},$$
$$\boldsymbol{E} = \{1, e_1, e_2, e_3\},$$
$$\boldsymbol{F} = \{1, f_1, f_2, f_3\}.$$

Priamym výpočtom sa môžeme presvedčiť, že zjednotenie

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D} \cup \boldsymbol{E} \cup \boldsymbol{F}$$

je naozaj hľadaná Frobeniova grupa permutácií množiny $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Operácia násobenia – skladania permutácií v $\boldsymbol{P}$ je prehľadne popísaná v tabuľke 2 na nasledujúcej strane. Z tejto tabuľky hneď vidíme, že grupa $\boldsymbol{P}$ nie je abelovská, lebo je napr. $b_1c_1 = f_2$ a $c_1b_1 = e_3$.

Použitím tabuľky 2 ľahko overíme, že podmnožiny $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ grupy $\boldsymbol{P}$ sú (abelovskými) podgrupami grupy $\boldsymbol{P}$. Každé dve z nich majú spoločnú len identickú permutáciu 1. Každý prvok grupy $\boldsymbol{P}$, rôzny od 1, patrí práve do jednej z podgrúp $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$, preto $\mathscr{P} = \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}\}$ je rozdelenie grupy $\boldsymbol{P}$.

Z rozdelenia $\mathscr{P}$ grupy $\boldsymbol{P}$ zostrojíme translačnú štruktúru $\mathfrak{T}$ podobne ako v predchádzajúcich príkladoch:

Bodmi štruktúry $\mathfrak{T}$ budú prvky grupy $\boldsymbol{P}$.

Tabuľka 2.

	1	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	d_1	d_2	d_3	e_1	e_2	e_3	f_1	f_2	f_3
1	1	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	d_1	d_2	d_3	e_1	e_2	e_3	f_1	f_2	f_3
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	1	e_2	c_2	d_3	e_1	d_1	f_1	e_3	b_1	f_3	b_3	c_3	f_2	d_2	b_2	c_1
a_2	a_2	a_3	a_4	1	a_1	c_3	d_1	f_3	b_3	e_3	d_2	f_2	e_2	c_1	d_3	f_1	b_2	b_1	c_2	e_1
a_3	a_3	a_4	1	a_1	a_2	f_1	e_3	c_1	d_3	f_2	b_1	b_2	c_3	e_1	f_3	d_2	c_2	e_2	d_1	b_3
a_4	a_4	1	a_1	a_2	a_3	d_2	f_2	e_1	f_3	b_2	e_2	c_2	f_1	b_3	c_1	b_1	d_1	c_3	e_3	d_3
b_1	b_1	f_1	e_2	d_2	c_3	b_3	1	b_2	f_2	a_3	d_3	a_1	f_3	e_3	d_1	c_1	a_4	e_1	a_2	c_2
b_2	b_2	d_1	f_2	c_2	e_3	1	b_3	b_1	e_2	f_3	a_4	e_1	a_3	c_3	f_1	a_2	d_3	a_1	c_1	d_2
b_3	b_3	e_1	c_1	f_3	d_3	b_2	b_1	1	a_2	d_2	e_3	f_1	c_2	a_4	a_1	f_2	c_3	d_1	e_2	a_3
c_1	c_1	f_3	d_3	b_3	e_1	e_3	f_1	a_3	1	c_3	c_2	e_2	f_3	a_2	a_4	d_1	b_1	b_2	d_2	a_1
c_2	c_2	e_3	b_2	d_1	f_2	a_1	d_3	e_2	c_3	c_1	1	b_3	a_4	f_1	d_2	a_3	f_3	a_2	e_1	b_1
c_3	c_3	b_1	f_1	e_2	d_2	f_3	a_2	d_1	c_2	1	c_1	a_3	e_1	b_2	f_2	b_3	a_1	d_3	a_4	e_3
d_1	d_1	f_2	c_2	e_3	b_2	a_2	f_3	c_3	f_1	e_1	a_1	d_3	1	d_2	b_1	a_4	c_1	a_3	b_3	e_2
d_2	d_2	c_3	b_1	f_1	e_2	e_1	a_4	f_2	e_3	a_2	b_3	1	d_3	d_1	c_2	f_3	a_3	c_1	a_1	b_2
d_3	d_3	b_3	e_1	c_1	f_3	c_2	e_2	a_1	a_3	b_1	f_2	d_2	d_1	1	a_2	b_2	f_1	e_3	c_3	a_4
e_1	e_1	c_1	f_3	d_3	b_3	f_2	d_2	a_4	a_1	f_1	d_1	c_3	b_2	a_3	1	e_3	e_2	c_2	b_1	a_2
e_2	e_2	d_2	c_3	b_1	f_1	d_3	a_1	c_2	b_2	a_4	f_3	a_2	c_1	f_2	e_3	e_1	1	b_3	a_3	d_1
e_3	e_3	b_2	d_1	f_2	c_2	a_3	c_1	f_1	d_2	b_3	a_2	f_3	a_1	b_1	e_2	1	e_1	a_4	d_3	c_3
f_1	f_1	e_2	d_2	c_3	b_1	c_1	a_3	e_3	d_1	a_1	e_1	a_4	b_3	c_2	b_2	d_3	a_2	f_3	1	f_2
f_2	f_2	c_2	e_3	b_2	d_1	a_4	e_1	d_2	b_1	d_3	a_3	c_1	a_2	e_2	c_3	a_1	b_3	1	f_3	f_1
f_3	f_3	d_3	b_3	e_1	c_1	d_1	c_3	a_2	a_4	e_2	b_2	b_1	e_3	a_1	a_3	c_2	d_2	f_2	f_1	1

Priamkami štruktúry $\mathfrak{T}$ nazveme pravé triedy rozkladu grupy $\boldsymbol{P}$ podľa podgrúp z rozdelenia $\mathscr{P}$.

Rovnobežnosť priamok štruktúry $\mathfrak{T}$ určíme rozkladom množiny všetkých priamok na triedy navzájom rovnobežných priamok. Budú to tieto triedy:

A, $\{b_1, c_3, d_2, e_2, f_1\}$, $\{b_2, c_2, d_1, e_2, f_2\}$, $\{b_3, c_1, d_3, e_1, f_3\}$;

B, $\{a_1, d_1, e_1, f_1\}$, $\{a_2, c_1, e_2, f_2\}$, $\{a_3, c_2, d_2, f_3\}$, $\{a_4, c_3, d_3, e_3\}$;

C, $\{a_1, b_1, e_3, f_3\}$, $\{a_2, b_2, d_3, f_1\}$, $\{a_3, b_3, d_1, e_2\}$, $\{a_4, d_2, e_1, f_2\}$;

D, $\{a_1, b_3, c_3, f_2\}$, $\{a_2, b_1, c_2, e_1\}$, $\{a_3, c_1, e_3, f_1\}$, $\{a_4, b_2, e_2, f_3\}$;

E, $\{a_1, b_2, c_1, d_2\}$, $\{a_2, c_3, d_1, f_3\}$, $\{a_3, b_1, d_3, f_2\}$, $\{a_4, b_3, c_2, f_1\}$;

F, $\{a_1, c_2, d_3, e_2\}$, $\{a_2, b_3, d_2, e_3\}$, $\{a_3, b_2, c_3, e_1\}$, $\{a_4, b_1, c_1, d_1\}$.

Použitím tabuľky 2 dá sa ľahko ukázať, že v štruktúre $\mathfrak{T}$ s vyššie definovanými bodmi, priamkami a rovnobežnosťou priamok platia axiómy **(t1)** až **(t4)**. Ukážeme len platnosť axiómy **(t5)**: Ku každému prvku $t \in \boldsymbol{P}$ priradíme zobrazenie $\bar{t}$ grupy $\boldsymbol{P}$ na seba, definované vzťahom

$$x\bar{t} = xt \quad \text{pre všetky} \quad x \in \boldsymbol{P} . \tag{6}$$

Je zrejmé, že $\bar{1}$ je identické zobrazenie. Použitím tabuľky 2 môžeme overiť, že každé zobrazenie $\bar{t}$, kde $t \neq 1$, nenechá pevným žiaden bod štruktúry $\mathfrak{T}$ a každú priamku