ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 100 * PRAHA 21. 11. 1975 * ČÍSLO 4

VALUE DISTRIBUTION OF MEROMORPHIC FUNCTIONS AND THEIR DERIVATIVES

ALOIS KLÍČ, Praha

(Received January 23, 1974)

1. Definitions, basic theorems. In the whole paper, meromorphic functions are understood to be meromorphic in $\mathbf{C}$.

Let f be a meromorphic function, $n(r,f)$ let denote the number of poles of the function f that lie in the disc $|z| \leqq r$ and $n(r, a)$ let denote the number of roots of the equation $f(z) = a$ in the disc $|z| \leqq r$, each point counted with regard to its multiplicity. Usually it has been put $n(r,f) = n(r, \infty)$.

Let us set

$$N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,f) - n(0,f)}{t}\, dt + n(0,f) \ln r ,$$

$$N(r, a) = \int_0^r \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t}\, dt + n(0, a) \ln r ,$$

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi ,$$

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a|}\, d\varphi .$$

The function $T(r,f) = m(r,f) + N(r,f)$ is called *Nevanlinna characteristic function of f*. Further, let us denote by $\bar{n}(r,f)$ ($\bar{n}(r, a)$, $a \in \mathbf{C}$) the number of different poles (different roots of the equation $f(z) = a$, respectively) that lie in the disc $|z| \leqq r$.

Analogously we define

$$\bar{N}(r,f) = \int_0^r \frac{\bar{n}(t,f) - \bar{n}(0,f)}{t}\, dt + \bar{n}(0,f) \ln r ,$$

$$\bar{N}(r, a) = \int_0^r \frac{\bar{n}(t, a) - \bar{n}(0, a)}{t}\, dt + \bar{n}(0, a) \ln r .$$

1.1 Theorem. (First Main Theorem of the value distribution theory.) *For any meromorphic function f, the equation*

$$m(r, a) + N(r, a) = T(r, f) + \varepsilon(r, a)$$

holds for each $a \in \mathbf{C}$, where $\varepsilon(r, a) = O(1)$ for $r \to \infty$.

1.2 Theorem. (Second Main Theorem of the value distribution theory.) *Let f be a nonconstant meromorphic function. If $a_1, a_2, \ldots, a_q$, $q \geqq 1$, are mutually distinct finite or infinite complex numbers, then*

$$\sum_{\nu=1}^{q} m(r, a_\nu) \leqq 2\,T(r, f) - N_1(r) + S(r, f),$$

where $N_1(r) = N(r, 1/f') + 2\,N(r, f) - N(r, f')$ and the remainder $S(r, f)$ satisfies the following conditions: $S(r, f) = o\{T(r, f)\}$ with at most the exception of a set $\mathbf{E}$ of values (r) of finite Lebesgue measure. If f is of finite order, then $S(r, f) = o\{T(r, f)\}$ without exceptional intervals.

1.3 Definition. Let f be a meromorphic function, $a \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Let us set

$$\delta(a) = \delta(a, f) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{m(r, a)}{T(r, f)} = 1 - \varlimsup_{r \to \infty} \frac{N(r, a)}{T(r, f)},$$

$$\Theta(a) = \Theta(a, f) = 1 - \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\overline{N}(r, a)}{T(r, f)},$$

$$\vartheta(a) = \vartheta(a, f) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{N(r, a) - \overline{N}(r, a)}{T(r, f)}.$$

Recall that $\Theta(a) \geqq \delta(a) + \vartheta(a)$. The quantity $\delta(a)$ is called the *deficiency* of the value a, $\vartheta(a)$ is called the *ramification index* of the point a. The value a is called *deficient value* (or *Nevanlinna exceptional value*) if $\delta(a) > 0$.

If the equation $f(z) = a$, $a \in \mathbf{C}$, has only a finite number of roots, then the value a is called *Picard exceptional value*. The function f must be transcendental. It is clear that every *Picard exceptional value* is *Nevanlinna exceptional value*, but the contrary is not true.

In the following we shal need the following theorems ($S(r, f)$ has the same meaning as in Theorem 1.2):

1.4 Theorem. (Milloux, see [5] or [2].) *Let f be a meromorphic function, $k \in \mathbf{N}$ arbitrary. Then*

(1) $$T(r, f^{(k)}) \leqq (k + 1)\,T(r, f) + S(r, f).$$

1.5 Theorem. (See [5].) *Let f be a entire function, $k \in \mathbf{N}$ arbitrary. Then*

(2) $$T(r, f^{(k)}) \leqq T(r, f) + S(r, f).$$

1.6 Theorem. (See [8] or [4].) *Let f be a meromorphic function for which $S(r,f) = o\{T(r,f)\}$. Then*

$$\frac{1}{n+1} \sum_{a \neq \infty} \delta(a,f) \leqq \delta(0, f^{(n)}) \tag{3}$$

for arbitrary $n \in \mathbf{N}$.

1.7 Note. The relation $S(r,f) = o\{T(r,f)\}$ is valid for every function of finite order, but it need not be fulfilled for functions of infinite order.

1.8 Theorem. (Hayman, see [2].) *Let f be a transcendental meromorphic function, $k \in \mathbf{N}$ arbitrary. Then*

$$T(r,f) \leqq \left(2 + \frac{1}{k}\right) N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \left(2 + \frac{2}{k}\right) \overline{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - 1}\right) + S(r,f). \tag{4}$$

Corollary. *Either the function f assumes every finite value infinitely many times, or $f^{(k)}$ $(k \in \mathbf{N})$ assumes every nonzero finite value infinitely many times.*

1.9 Theorem. (Milloux, see [3], p. 132.) *Let f be a transcendental meromorphic function, $k \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{C}$, $b \neq 0$. Then*

$$\begin{aligned} T(r,f) \leqq{} & \overline{N}(r,f) + \\ & + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - b}\right) - N\left(r, \frac{f^{(k)} - b}{f^{(k+1)}}\right) + S(r,f). \end{aligned} \tag{5}$$

1.10 Theorem. (See [1], [2].) *Let f be a meromorphic function. Then the quantity $\Theta(a)$ vanishes for all except at most a countable set of values a. Furthermore,*

$$\sum_a \{\delta(a) + \vartheta(a)\} \leqq \sum_a \Theta(a) \leqq 2. \tag{6}$$

1.11 Note. In the proof of Theorem 2.2 we shall need the following inequality which was obtained when proving Theorem 1.2 (see [1], [4], [8]):

$$N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \sum_{\nu=1}^{q} m(r, a_\nu) + S(r,f) \leqq T(r,f') \leqq N(r,f') + m(r,f) + S(r,f). \tag{7}$$

Here $a_1, a_2, \ldots, a_q$ are arbitrary finite complex numbers.

2. Some generalizations of Polya-Saxer theorem. The following theorem was proved by Polya and Saxer (1923).

2.1 Theorem. (See [6].) *If an entire transcendental function has finite Picard exceptional value, then every its derivative assumes all finite nonzero values infinitely many times.*

The Nevanlinna theory is a tool for finer investigation in this direction, and with its help it is possible to prove theorems that generalize, in different ways, the Polya-Saxer theorem.

The following generalization of the Polya-Saxer theorem is a consequence of the inequality (3).

2.2 Theorem. *Let f be a meromorphic function for which $S(r,f) = o\{T(r,f)\}$ and $\delta(\infty, f) = 1$. If the function f has finite Nevanlinna exceptional value a (that means $\delta(a) > 0$), then every derivative of f assumes all finite nonzero values infinitely many times.*

Proof. First we shall prove (under our suppositions) that the relation $\delta(\infty, f) = 1$ implies the relation $\delta(\infty, f^{(k)}) = 1$, for arbitrary $k \in \mathbf{N}$. From the evident relation

$$\frac{N(r,f')}{T(r,f')} = \frac{N(r,f) + \bar{N}(r,f)}{T(r,f)} \cdot \frac{T(r,f)}{T(r,f')}$$

we get

$$1 - \delta(\infty, f') = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r,f')}{T(r,f')} \leqq [1 - \delta(\infty, f) + 1 - \Theta(\infty, f)] \varlimsup_{r\to\infty} \frac{T(r,f)}{T(r,f')}. \tag{8}$$

The inequality (7) yields a lower estimate for $\varliminf\limits_{r\to\infty} T(r,f')/T(r,f)$ (and thereby also an upper estimate for $\varlimsup\limits_{r\to\infty} T(r,f)/T(r,f')$). From the inequality (7) we obtain easily

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{T(r,f')}{T(r,f)} \geq \varliminf_{r\to\infty} \frac{N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \sum\limits_{1}^{q} m(r, a_\nu)}{T(r,f)} +$$

$$+ \varliminf_{r\to\infty} \frac{S(r,f)}{T(r,f)} \geq \varliminf_{r\to\infty} \frac{N\left(r, \frac{1}{f'}\right)}{T(r,f)} + \sum_{\nu=1}^{q} \delta(a_\nu, f).$$

According to the suppositions of our theorem it is $\delta(a) > 0$. If we choose $a_\nu = a$ for any ν, then $\varliminf\limits_{r\to\infty} T(r,f')/T(r,f) \geqq \delta(a) > 0$. Hence also

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{T(r,f)}{T(r,f')} = \frac{1}{\varliminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{T(r,f')}{T(r,f)}} < +\infty.$$

If $\delta(\infty, f) = 1$, then $\Theta(\infty, f) = 1$, and from the inequality (8) we get $\delta(\infty, f') = 1$. The validity of the relation $\delta(\infty, f^{(k)}) = 1$, for arbitrary $k \in \mathbf{N}$ is obtained by simple induction.

The relation (6) from Theorem 1.10 applied to $f^{(k)}$ gives, with respect to $\delta(\infty, f^{(k)}) = 1$,

$$\sum_{b \neq 0,\infty} \delta(b, f^{(k)}) + \delta(0, f^{(k)}) \leqq 1 .$$

From (3) we get

$$\sum_{b \neq 0,\infty} \delta(b, f^{(k)}) \leqq 1 - \frac{1}{k+1} \sum_{a \neq \infty} \delta(a, f) .$$

According to the suppositions, there exist $a \in \mathbf{C}$ that $\delta(a, f) > 0$. Then $\sum_{b \neq 0,\infty} \delta(b, f^{(k)}) < 1$. Thus $\delta(b, f^{(k)}) < 1$ for every finite nonzero complex value b. This implies that the function f assumes the value b infinitely many times, for the function f is transcendental.

The corollary of Theorem 1.8 yields a further generalization of the Polya-Saxer theorem.

2.3 Theorem. *Let f be a transcendental meromorphic function. If the function f has finite Picard exceptional value, then every derivative of f assumes all finite nonzero values infinitely many times.*

3. In this section some further generalizations of the Polya-Saxer theorem will be proved.

3.1 Theorem. *Let f be a transcendental meromorphic function for which $\overline{N}(r, f) = o\{T(r, f)\}$ (that means $\Theta(\infty, f) = 1$). If the function f has finite Nevanlinna exceptional value, then every derivative of f assumes all finite nonzero value infinitely many times.*

3.2 Theorem. *Let f be a transcendental meromorphic function for which $S(r, f) = o\{T(r, f)\}$ and $\Theta(\infty, f) = 1$. If $\delta(a, f) > 0$, $a \in \mathbf{C}$, then for every finite nonzero complex number b and arbitrary $k \in \mathbf{N}$, the inequality*

$$\delta(b, f^{(k)}) \leqq \Theta(b, f^{(k)}) \leqq 1 - \frac{\delta(a, f)}{k+1} \tag{9}$$

holds.

3.3 Theorem. *Let f be an entire transcendental function for which $S(r, f) = o\{T(r, f)\}$. If $\delta(a, f) > 0$, $a \in \mathbf{C}$, then for every finite nonzero complex number b and arbitrary $k \in \mathbf{N}$, the inequality*

$$\delta(b, f^{(k)}) \leqq \Theta(b, f^{(k)}) \leqq 1 - \delta(a, f) \tag{10}$$

holds.

Proof of Theorem 3.1. We use the inequality (5), choosing the notation so that $\delta(a, f) > 0$. Let us suppose that the equation $f^{(k)}(z) = b$ has only a finite number of roots.

Then

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - b}\right) = o\{T(r, f)\}.$$

Let us divide the inequality (5) by $T(r, f)$. We obtain the inequality

$$(11)\quad 1 \leqq \frac{\bar{N}(r, f)}{T(r, f)} + \frac{N\left(r, \dfrac{1}{f - a}\right)}{T(r, f)} + \frac{\bar{N}\left(r, \dfrac{1}{f^{(k)} - b}\right)}{T(r, f)} - \frac{\bar{N}\left(r, \dfrac{f^{(k)} - b}{f^{(k+1)}}\right)}{T(r, f)} + \frac{S(r, f)}{T(r, f)}.$$

In (11) we let $r \to \infty$, $r \notin \mathbf{E}$, where the set $\mathbf{E}$ has finite Lebesgue measure. The set $\mathbf{E}$ is "the exceptional set" from the Nevanlinna Second Main Theorem. Recall that $S(r, f) = o\{T(r, f)\}$ for $r \to \infty$, $r \notin \mathbf{E}$.

Since

$$\delta(a, f) > 0,$$

it is

$$(12)\quad \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N\left(r, \dfrac{1}{f - a}\right)}{T(r, f)} = A < 1.$$

According to our notation $\delta(a, f) = 1 - A$. From (11), (12) we obtain the inequality

$$1 \leqq \overline{\lim_{\substack{r \to \infty \\ r \notin E}}} \frac{N\left(r, \dfrac{1}{f - a}\right)}{T(r, f)} \leqq \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N\left(r, \dfrac{1}{f - a}\right)}{T(r, f)} = A.$$

This contradicts the inequality $A < 1$. Therefore the supposition that there is only a finite number of roots of the equation $f^{(k)}(z) = b$ is not correct, hence the function $f^{(k)}$ assumes the value b infinitely many times, QED.

Proof of Theorem 3.2. Again we use the inequality (5). Now we consider functions for which $S(r, f) = o\{T(r, f)\}$! From (11) we obtain the inequality

$$(13)\quad \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\bar{N}\left(r, \dfrac{1}{f^{(k)} - b}\right)}{T(r, f)} \geqq 1 - A.$$

The definition of the deficiency and the inequality (1) imply the following inequalities:

$$1 - A \leqq \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\bar{N}\left(r, \dfrac{1}{f^{(k)} - b}\right)}{T(r,f)} = (k+1) \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\bar{N}\left(r, \dfrac{1}{f^{(k)} - b}\right)}{(k+1)\,T(r,f) + S(r,f)} \leqq$$

$$\leqq (k+1) \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\bar{N}\left(r, \dfrac{1}{f^{(k)} - b}\right)}{T(r,f^{(k)})},$$

$$(k+1) - (k+1) \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\bar{N}\left(r, \dfrac{1}{f^{(k)} - b}\right)}{T(r,f^{(k)})} \leqq A + k = 1 - \delta(a,f) + k\,,$$

$$1 - \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\bar{N}\left(r, \dfrac{1}{f^{(k)} - b}\right)}{T(r,f^{(k)})} \leqq \frac{k + 1 - \delta(a,f)}{k+1} = 1 - \frac{\delta(a,f)}{k+1}.$$

The last inequality may be rewritten in the form

$$\delta(b, f^{(k)}) \leqq \Theta(b, f^{(k)}) \leqq 1 - \frac{\delta(a,f)}{k+1} \quad \text{QED}\,.$$

Proof of Theorem 3.3. The proof of the inequality (10) is analogous to that of the inequality (9), we only use the stricter inequality (2) instead of (1).

From the inequalities (13) and (2) we get

$$1 - A \leqq \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\bar{N}\left(r, \dfrac{1}{f^{(k)} - b}\right)}{T(r,f)} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\bar{N}\left(r, \dfrac{1}{f^{(k)} - b}\right)}{T(r,f) + S(r,f)} \leqq \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\bar{N}\left(r, \dfrac{1}{f^{(k)} - b}\right)}{T(r,f^{(k)})}.$$

Then

$$\Theta(b, f^{(k)}) \leqq A = 1 - \delta(a,f)\,,$$

which together with the well-known inequality $\delta(a) \leqq \Theta(a)$ yields (10), QED.

4. Remarks.

4.1. The supposition in Theorem 3.1 about the existence of finite Nevanlinna exceptional value is essential. It will be seen in the following

Assertion. *Let $f(z) = e^z + z$. Then $\delta(a,f) = 0$ is valid for every $a \in \mathbf{C}$, that means, f has not finite Nevanlinna exceptional value.*

The function f is entire, hence the second supposition of Theorem 3.1 is evidently fulfilled. Its derivative $f'(z) = e^z + 1$ never assumes the nonzero value 1.

Proof of the assertion. We use the theorem which supplies in the terms of covering sufficient conditions for the validity of $\delta(a, f) = 0$. First let us recall some concepts. Let $w = f(z)$ be an entire function. Let us denote by $\mathscr{F}$ the Riemann surface of the analytic function f^{-1}. Its ramification points lie just over the points $w_k \in \mathbf{C}$, $w_k = f(z_k)$, for which $f'(z_k) = 0$. Further let us denote by π the natural projection $\mathscr{F}$ on $\mathbf{C}$ ($\pi(\mathfrak{Z}) = w$, where $\mathfrak{Z}$ is the algebraic element of the analytic function f^{-1}, with the centre at w).

Now, the following theorem (see [3], p. 431) is valid:

Theorem. *Let $w = f(z)$ be an entire function, $\mathscr{F}$ the Riemann surface of f^{-1}, $a \in \mathbf{C}$ arbitrary. Let $\Lambda > 0$ and an η-neighbourhood $U(a, \eta)$ exist with the following properties: If $\mathscr{F}_\nu \subset \mathscr{F}$ is an arbitrary domain over $U(a, \eta)$ $(\pi(\mathscr{F}_\nu) = U(a, \eta))$, then over every point $w \in U(a, \eta)$ there lie just λ_ν points and $1 \leqq \lambda_\nu \leqq \Lambda$ (every ramification point of the order m is counted $(m-1)$-times). Then $\delta(a, f) = 0$.*

Now let us construct the Rieman surface $\mathscr{F}$ of the analytic function f^{-1}, where $f(z) = e^z + z$. It is $f'(z) = e^z + 1 = 0$ for $z_k = (2k+1)\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. The ramification points lie over $w_k = e^{z_k} + z_k = -1 + (2k+1)\pi i$. These ramification points are of the first order, for $f''(z) = e^z \neq 0$. The function $e^z + z$ maps conformally the strip (see [7], p. 481, example 7)

$$\Omega_k = \{z \in \mathbf{C},\ (2k-1)\pi < \operatorname{Im} z < (2k+1)\pi\}$$

onto $\mathbf{C} \setminus (p_1^{(k)} \cup p_2^{(k)})$, where

$$p_1^{(k)} = \{z \in \mathbf{C},\ z = x + (2k+1)\pi i,\ x \in (-\infty, -1\rangle\},$$
$$p_2^{(k)} = \{z \in \mathbf{C},\ z = x + (2k-1)\pi i,\ x \in (-\infty, -1\rangle\}.$$

Let $\mathscr{F}$ be constructed so that the k-st sheet $\mathscr{P}_k$ of the plane $\mathbf{C}$, which is cut along the rays $p_1^{(k)}$ a $p_2^{(k)}$, is connected in the usual way with the $(k+1)$-st sheet $\mathscr{P}_{k+1}$ along $p_2^{(k)}$ and with the $(k-1)$-st sheet $\mathscr{P}_{k-1}$ along $p_1^{(k)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. We obtain infinitely-many-sheeted surface. All domains lying over an arbitrary disc D with the centre at a point $w \neq w_k$, which contains none of the points w_k, are discs. All domains over an arbitrary disc D_k with the centre at w_k are discs except a single one which is a two-sheeted disc. In this domain, exactly two points lie over each point $w \in \mathsf{D}_k$. We can choose $\Lambda = 2$ or $\Lambda = 1$, hence the function $w = e^z + z$ has no Nevanlinna exceptional value.

4.2. Let us compare the suppositions of Theorems 2.2 and 3.1.

a. Theorem 2.2 applies only to functions with $S(r, f) = o\{T(r, f)\}$, while in Theorem 3.1 this condition does not appear.

b. The supposition $\Theta(\infty,f) = 1$ in Theorem 3.1 is weaker than the supposition $\delta(\infty,f) = 1$ in Theorem 2.2, for there exist functions (see [3], p. 517, Theorem 6.4) for which $\Theta(\infty,f) = 1$ and $\delta(\infty,f) < 1$.

4.3. Theorem 3.1 is a consequence of the inequalities (9), (10) for functions with $S(r,f) = o\{T(r,f)\}$. The inequalities (9), (10) say: The number of points at which the function f assumes the value $a \in \mathbf{C}$, is inversely proportional to the multiplicity with which an arbitrary derivative of f assumes every nonzero finite value b.

4.4 Corollary of Theorem 3.3. *Let f be a transcendental entire function for which $S(r,f) = o\{T(r,f)\}$. If there exists $a \in \mathbf{C}$ so that $\delta(a,f) = 1$, then*

$$\sum_{b \neq 0,\infty} \Theta(b, f^{(k)}) = 0 \tag{14}$$

for arbitrary $k \in \mathbf{N}$.

For a comparison we introduce a result due to Ullrich (see [4] or [8]). It is known that for entire functions the inequality

$$\sum_{a \neq \infty} \delta(a,f) \leqq \delta(0, f^{(k)}), \quad k \in \mathbf{N} \text{ arbitrary} \tag{3'}$$

holds, which is sharper then the inequality (3).

From (3'), analogously to the proof of Theorem 2.2 we obtain

$$\sum_{b \neq 0,\infty} \delta(b, f^{(k)}) \leqq 1 - \sum_{a \neq \infty} \delta(a,f).$$

Now, if $\sum_{a \neq 0} \delta(a,f) = 1$, then

$$\sum_{b \neq 0,\infty} \delta(b, f^{(k)}) = 0$$

for arbitrary $k \in \mathbf{N}$.

References

[1] *R. Nevanlinna:* Eindeutige analytische Funktionen, Berlin, 1953.
[2] *W. K. Hayman:* Meromorphic functions, Oxford, 1964.
[3] *A. A. Goldberg, I. V. Ostrovskij:* Распределение значений мероморфных функций, „Наука", Moscow 1970.
[4] *H. Wittich:* Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen, Springer-Verlag, 1955.
[5] *H. Milloux:* Les fonctions meromorphes et leurs dérivées, Paris, 1940.
[6] *W. Saxer:* Über die Picardschen Ausnahmeverte sukzessiver Derivierten, Math. Z., *17*, 1923.
[7] *I. Černý:* Základy analýzy v komplexním oboru, „Academia", Praha 1967.
[8] *E. Ullrich:* Über die Ableitung einer meromorphen Funktion, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl. 1929.

Author's address: 166 28 Praha 6, Suchbátarova 1905 (katedra matematiky VŠCHT Praha).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

ON TREE-COMPLETE GRAPHS

LADISLAV NEBESKÝ, Praha

(Received January 30, 1974)

If G_0 is a graph, then we denote by $V(G_0)$, $E(G_0)$, and $\Delta(G_0)$ the vertex set of G_0, the edge set of G_0, and the maximum degree of G_0, respectively; the number of vertices of G_0 is called the order of G_0. For the notions not defined here, see BEHZAD and CHARTRAND [2].

We shall say that a graph G of order p is *tree-complete* if for every tree T of order p there is a spanning subgraph T' of G such that the graphs T and T' are isomorphic. Obviously, every complete graph is tree-complete. In the present paper, we shall construct tree-complete graphs. First, we shall prove three lemmas.

Let F be a forest. A vertex u of F is said to be semi-terminal if either u is an end-vertex or there is an end-vertex v such that the vertices u and v lie in the same component and the maximum degree among the vertices lying on the $u - v$ path in F is two.

Lemma 1. *Let F be a forest. Then either $\Delta(F) \leqq 2$ or F contains a vertex u of degree $d \geqq 3$ such that u is adjacent to at least $d - 1$ semi-terminal vertices.*

Proof. Assume $\Delta(F) \geqq 3$. Then there is a component T of F such that $\Delta(T) \geqq 3$. This means that T contains a vertex u of degree $d \geqq 3$ such that for every vertex $v \in V(T)$ of degree $d' \geqq 3$, $e(u) \geqq e(v)$, where is the eccentricity of the vertex w in the tree T. Clearly, u is adjacent to at least $d - 1$ semi-terminal vertices of F.

Lemma 2. *Let T be a tree of order $p \geqq 4$. Then there are distinct vertices $v_1, \ldots$ $\ldots, v_{[p/4]}$ such that*

$$\Delta(T - v_1 - \ldots - v_{[p/4]}) \leqq 2 .$$

Proof. Let F be a forest. Assume that F contains a vertex v of degree $d \geqq 3$ such that at least $d - 1$ vertices adjacent to v are semi-terminal. If at least three semi-terminal vertices are adjacent to v, then v is referred to as an auxiliary vertex. If precisely two vertices adjacent to v are semi-terminal, then $d = 3$ and the only non-semi-terminal vertex adjacent to v is said to be auxiliary. If $\Delta(F) \leqq 2$, then an arbitrary vertex is said to be auxiliary.

Let v_1 be an auxiliary vertex of T. For every integer i, $1 \leqq i < [p/4]$, let v_{i+1} be an auxiliary vertex of the forest $T - v_1 - \ldots - v_i$. The inequality of the lemma follows.

Lemma 3. *Let $p \geqq 8$, p be an integer. Then there is a tree T of order p such that*

(1) *for every sequence of distinct vertices $u_1, \ldots, u_{[p/4]-1}$, $\Delta(T - u_1 - \ldots - u_{[p/4]-1}) \geqq 3$.*

Proof. Let $p = 4m + k$, where $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. We denote by T the tree in Fig. 1 (if $m \geqq 3$, then each of the vertices $s_3, \ldots, s_m$ has degree 4). It is easy to prove that T fulfils (1). Hence the lemma follows.

Let G be a graph. We denote by $\mathscr{H}_p(G)$ the graph with the vertex set $V(G) \cup V(G')$ and with the edge set

$$E(G) \cup E(G') \cup \{uv \mid u \in V(G),\ v \in V(G')\},$$

where G' is the path of order p, and $V(G) \cap V(G') = \emptyset$.

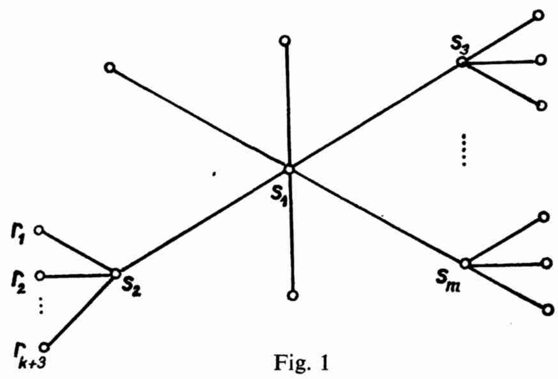

Fig. 1

Theorem 1. *Let p be an integer, $p \geqq 4$, and let G be a tree-complete graph of order n. Then the graph $\mathscr{H}_p(G)$ is tree-complete if and only if $n \geqq [(p - 1)/3]$.*

Proof. It is routine to prove that $n \geqq [(p - 1)/3]$ if and only if $n \geqq [(p + n)/4]$.

Let $n \geqq [(p + n)/4]$, and let G' be the same as in the definition of $\mathscr{H}_p(G)$. Consider a tree T of order $p + n$. Then there are distinct vertices $v_1, \ldots, v_n$ of T such that the forest $T - v_1 - \ldots - v_n$ is isomorphic to a spanning subgraph of G'. The subgraph of T induced by $\{v_1, \ldots, v_n\}$ is isomorphic to a spanning subgraph of G. Hence T is isomorphic to a spanning subgraph of $\mathscr{H}_p(G)$.

Let $n < [(p + n)/4]$. Then $p + n \geqq 8$. If the tree T in Fig. 1 has order $p + n$, then Lemma 3 implies that T is isomorphic to no spanning subgraph of $\mathscr{H}_p(G)$. Hence the theorem follows.

Obviously, every tree-complete graph is connected. Since a tree-complete graph contains both a spanning path and a spanning star, we get the following

Proposition. *Every tree-complete graph has at most two blocks.*

In the remainder of the paper we shall discuss tree-complete graphs with a cut-vertex.

Theorem 2. *Let G be a tree-complete graph of order p, and let B be a block of G having order n, where $n \leqq (p + 1)/2$. If $p \neq 8, 11$, then $n \leqq 3$. If $p = 8$, then $n \leqq 4$. If $p = 11$, then $n \leqq 5$ and $n \neq 4$.*

Proof. Let $n \geqq 4$. Obviously, $p \geqq 2n - 1 \geqq 7$. If $2n - 1 \leqq p \leqq 2n + 1$, then we denote by $T_{p,n}$ the tree in Fig. 2 (r_{p-2n+2}, t_n, and u_n are all the end-vertices). If $p \geqq 2n + 2$, then we denote by $T_{p,n}$ the tree in Fig. 3 (v_0, w_0, v_n, and w_n are all the end-vertices). It is not difficult to see that $T_{p,n}$ is isomorphic to no spanning subgraph of G, except the following cases: $p = 8$ and $n = 4$; $p = 9$ and $n = 4$; $p = 11$ and $n = 5$. If $p = 9$ and $n = 4$, then the subdivision graph of the star $K(1, 4)$ is isomorphic to no spanning subgraph of G. Hence the theorem follows.

Note that there is a tree-complete graph of order 8 which contains a block of order 4, and that there is a tree-complete graph or order 11 which contains a block of order 5.

Let G be a graph. We denote by $\mathscr{Y}_1(G)$ the graph G_1 with $V(G_1) = V(G) \cup \{u, v\}$ and with $E(G_1) = \{tu \mid t \in V(G)\} \cup \{uv\}$, where u and v are distinct vertices not belonging to G. We denote by $\mathscr{Y}_2(G)$ the graph G_2 with $V(G_2) = V(G_1) \cup \{w\}$ and with $E(G_2) = E(G_1) \cup \{uw, vw\}$, where $w \notin V(G_1)$.

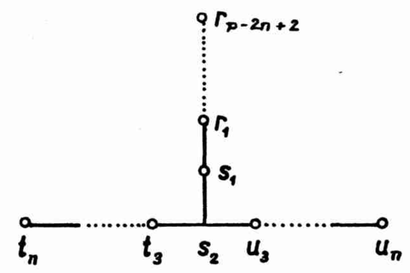

Fig. 2

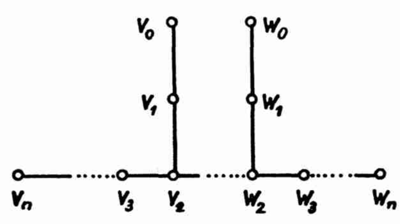

Fig. 3

Theorem 3. *Let $i \in \{1, 2\}$, and let G be a graph of order p such that every tree T_0 of order p with $\Delta(T_0) \leqq [(p + i)/2]$ is isomorphic to a spanning subgraph of G. Then $\mathscr{Y}_i(G)$ is tree-complete.*

Proof. Let T be a tree of order $p + i + 1$. A vertex of T adjacent to an end-vertex will be referred to as an e_1-vertex. A vertex of T adjacent either to at least two end-vertices or to an e_1-vertex of degree 2 will be referred to as an e_2-vertex. We denote by d_i the maximum degree among the e_i-vertices.

Let $i = 1$. The case $p \leqq 2$ is obvious. Assume that $p \geqq 3$. Consider an e_1-vertex r_1 of degree d_1 and an end-vertex s_1 adjacent to r_1. We have $\Delta(T - r_1 - s_1) \leqq \leqq [(p + 1)/2]$. As $T - r_1 - s_1$ is a forest, it is a spanning subgraph of a tree T_1 with $\Delta(T_1) = \max(2, \Delta(T - r_1 - s_1)) \leqq [(p + 1)/2]$. As T_1 is isomorphic to a spanning subgraph of G, $T - r_1 - s_1$ is also isomorphic to a spanning subgraph of G. Hence T is isomorphic to a spanning subgraph of $\mathscr{Y}_1(G)$.

Let $i = 2$. Consider an e_2-vertex r_2 of degree d_2, and distinct vertices s_2 and t_2 such that s_2 is adjacent to r_2, t_2 is an end-vertex, and either (a) s_2 is an end-vertex and t_2 is adjacent to r_2 or (b) s_2 is an e_1-vertex of degree 2 and t_2 is adjacent to s_2. We have $\Delta(T - r_2 - s_2 - t_2) \leqq [(p + 2)/2]$. Clearly, $T - r_2 - s_2 - t_2$ is a spanning subgraph of a tree T_2 with $\Delta(T_2) \leqq [(p + 2)/2]$. This means that $T - r_2 - - s_2 - t_2$ is isomorphic to a spanning subgraph of G. Hence T is isomorphic to a spanning subgraph of $\mathscr{Y}_2(G)$ and the proof is complete.

Note that – in a certain sense – the value $[(p + i)/2]$ in Theorem 3 is the best possible. This follows from Fig. 4 (for even $p + i + 1$) and from Fig. 5 (for odd $p + i + 1$).

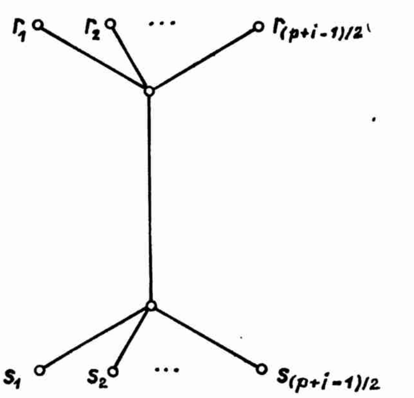

Fig. 4

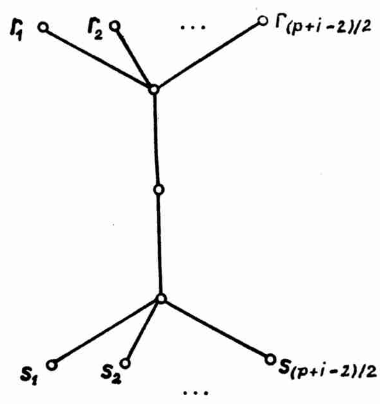

Fig. 5

Corollary 1. *Let G be a tree-complete graph. Then both $\mathscr{Y}_1(G)$ and $\mathscr{Y}_2(G)$ are tree-complete.*

We denote by D_1 and D_2 the trivial graph and the connected graph with exactly one edge. If p is a positive integer, then we denote by D_{p+2} the graph $\mathscr{Y}_1(D_p)$. As has been shown by Behzad and Chartrand [1], the graph D_p, $p \geqq 2$, is (up to isomorphism) the only connected graph of order p which contains precisely two vertices of the same degree.

Corollary 2. *The graph D_p is tree-complete, for every positive integer p.*

Corollary 2 has been proved by SEDLÁČEK [3]. The present author was inspired by J. Sedláček's result.

References

[1] *M. Behzad, G. Chartrand:* No graph is perfect. Amer. Math. Monthly 74 (1967), 962—963.

[2] *M. Behzad, G. Chartrand:* Introduction to the Theory of Graphs. Allyn and Bacon, Inc., Boston 1971.

[3] *J. Sedláček:* O perfektních a kvaziperfektních grafech. Čas. pěst. mat. *100* (1975), 135—141.

Author's address: 116 38 Praha 1, nám. Krasnoarmějců 2 (Filosofická fakulta Karlovy university).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

ORTOGONALITA NA MNOŽINÁCH

JAN HAVRDA, Praha

(Došlo dne 30. dubna 1974)

1. Tento článek se zabývá studiem a přirozeným zobecněním ortogonality, jak je známa např. z teorie Hilbertova prostoru. Při analýze této problematiky se užívá jazyka teorie svazů a zejména ortomodulárních svazů. Článek je rozdělen do dvou částí, z nichž prvá je pomocného charakteru, druhá je věnována vlastnímu tématu.

2. Je známo mnoho ekvivalentních definicí ortomodulárního svazu. Připomeňme si ty z nich, na něž se budeme v dalším výkladu odvolávat. Především, je-li $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ svaz s ortogonalitou, nazývá se *ortomodulární svaz*, právě když ke každým dvěma prvkům $p, q \in P$, $q \leqq p$, existuje prvek $r \in P$, $r \perp q$ tak, že $p = q \vee r$. Pak např. platí

2.1. Věta. *Buď $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ svaz s ortogonalitou. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1) *$\mathscr{P}$ je ortomodulární svaz.*

2) *Jsou-li $p, q \in P$, $q \leqq p$, potom $p = q \vee (q^\perp \wedge p)$.*

3) *Jsou-li $p, q \in P$, $q \leqq p$, $q^\perp \wedge p = 0$, potom $p = q$.*

4) *Jsou-li $p, q, r \in P$, $r \leqq q$, $p \leqq q^\perp$, potom $(r \vee p) \wedge q = r$.*

Důkaz. Implikace 2) $\Rightarrow$ 1) je zřejmá. Důkaz implikace 3) $\Rightarrow$ 2) je snadný. Dokážeme implikaci 1) $\Rightarrow$ 3). Nechť $q \leqq p$, $p = q \vee r$, kde $r \perp q$ čili $r \leqq q^\perp$. Jestliže $q^\perp \wedge p = 0$, pak $0 = p \wedge q^\perp = (q \vee r) \wedge q^\perp \geqq (q \wedge q^\perp) \vee (r \wedge q^\perp) = r$. Odtud $p = q$. Nyní dokážeme implikaci 4) $\Rightarrow$ 2). Je-li $q \leqq p$, platí $p^\perp \leqq q^\perp$, $q \leqq q$, takže podle tvrzení 4) máme $(p^\perp \vee q) \wedge q^\perp = p^\perp$ čili $p = q \vee (q^\perp \wedge p)$. Nakonec dokážeme ještě implikaci 2) $\Rightarrow$ 4). Nechť $r \leqq q$, $p \leqq q^\perp$. Potom $q^\perp \leqq r^\perp$ a podle tvrzení 2) máme $r^\perp = q^\perp \vee (q \wedge r^\perp)$ čili $r = q \wedge (q^\perp \vee r)$. Platí také $(r \vee p) \wedge q \leqq \leqq (r \vee q^\perp) \wedge q = r$. Na druhé straně $(r \vee p) \wedge q \geqq (r \wedge q) \vee (p \wedge q) = r$. Tedy vskutku $r = (r \vee p) \wedge q$.

2.2. Důsledek. *Je-li* $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ *ortomodulární svaz, jestliže* $p, q, r, s, t \in P$, $r \leqq q$, $t \leqq q$, $p \leqq q^\perp$, $s \leqq q^\perp$ *a jestliže* $r \vee p = t \vee s$, *pak* $r = t$ *a* $p = s$.

Z rovnosti $(r \vee p) \wedge q = (t \vee s) \wedge q$ a z tvrzení 4) věty 2.1 plyne $r = t$; analogicky z rovnosti $(r \vee p) \wedge q^\perp = (t \vee s) \wedge q^\perp$ plyne $p = s$.

Připomeňme, že je-li $\mathscr{P} = (P, \leqq, 0)$ svaz s nulou 0, prvek $p \in P$ se nazývá atom v $\mathscr{P}$, právě když $p \neq 0$ a jestliže $q \in P$, $q \neq 0$, $q \leqq p$, potom $q = p$. Jestliže ke každému prvku $q \in P$, $q \neq 0$, existuje atom p v $\mathscr{P}$ takový, že $p \leqq q$, nazývá se $\mathscr{P}$ atomický svaz.

2.3. Věta. *Buď* $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ *ortomodulární svaz,* $p \in P$, $0 \neq p \neq 1$; $r_1, r_2 \in P$ *buďte atomy v* $\mathscr{P}$ *takové, že* $r_1 \leqq p$, $r_2 \leqq p^\perp$. *Nechť* $q \in P$, $q \neq 0$, $q \wedge p = q \wedge p^\perp = 0$ *a nechť* $q \leqq r_1 \vee r_2$. *Potom* $r_1 \vee q = r_1 \vee r_2 = q \vee r_2$.

Důkaz rozdělíme na několik částí.

1) Dokážeme, že $(q \vee r_2) \wedge r_1 = (q \vee r_2) \wedge p = (q \vee r_2) \wedge r_2^\perp$ a $(r_1 \vee q) \wedge r_2 = (r_1 \vee q) \wedge p^\perp = (r_1 \vee q) \wedge r_1^\perp$. Protože $r_2 \leqq r_1^\perp$, podle tvrzení 2) věty 2.1 platí $r_1^\perp = r_2 \vee (r_2^\perp \wedge r_1^\perp)$ čili $r_1 = r_2^\perp \wedge (r_1 \vee r_2)$. Nyní $(q \vee r_2) \wedge p \geqq (q \vee r_2) \wedge r_1 = (q \vee r_2) \wedge r_2^\perp \wedge (r_1 \vee r_2) = (q \vee r_2) \wedge r_2^\perp \geqq (q \vee r_2) \wedge p$. Druhé tvrzení se dokáže analogicky.

2) Dokážeme, že $(q \vee r_1) \wedge r_2 = r_2$ a $(q \vee r_2) \wedge r_1 = r_1$. Protože $r_1 \leqq q \vee r_1$ a kdyby $r_1^\perp \wedge (q \vee r_1) = 0$, podle tvrzení 3) věty 2.1 by bylo $r_1 = q \vee r_1$, tedy $q \leqq r_1 \leqq p$, odkud $q \wedge p = q \neq 0$, což však odporuje předpokladu. Podle bodu 1) tohoto důkazu máme tak $0 \neq r_1^\perp \wedge (q \vee r_1) = (q \vee r_1) \wedge r_2 \leqq r_2$. Protože r_2 je atom v $\mathscr{P}$, dostáváme $r_2 = (q \vee r_1) \wedge r_2$. Druhé tvrzení se dokáže analogicky.

3) Dokážeme tvrzení věty. Protože $q \vee r_2 \leqq r_1 \vee r_2$ a protože podle bodu 2) tohoto důkazu platí $(q \vee r_2) \wedge r_1 = r_1$, máme $r_1 \leqq q \vee r_2$, tedy $r_1 \vee r_2 \leqq q \vee r_2$, odkud plyne, že $r_1 \vee r_2 = q \vee r_2$. Zbývající tvrzení se dokáže analogicky.

2.4. Důsledek. *Jsou-li splněny předpoklady věty* 2.3, *potom atomy* r_1, r_2 *jsou určeny jednoznačně.*

Důkaz. Buďte navíc $s_1, s_2 \in P$ atomy v $\mathscr{P}$ takové, že $s_1 \leqq p$, $s_2 \leqq p^\perp$ a nechť $q \leqq s_1 \vee s_2$. Z věty 2.3 pak vyplývají rovnosti $s_1 \vee s_2 = s_1 \vee q$, $r_1 \vee r_2 = r_1 \vee q$. Z těchto rovností dostáváme $s_1 \vee s_2 \vee r_1 = s_1 \vee q \vee r_1$, $r_1 \vee r_2 \vee s_1 = r_1 \vee q \vee s_1$, odkud máme $r_1 \vee s_1 \vee s_2 = r_1 \vee s_1 \vee r_2$. Protože $r_1 \vee s_1 \leqq p$, $r_2 \leqq p^\perp$, podle tvrzení 4) věty 2.1 platí $s_2 = (r_1 \vee s_1 \vee s_2) \wedge p^\perp = (r_1 \vee s_1 \vee r_2) \wedge p^\perp = r_2$. Podobně se dokáže, že $s_1 = r_1$.

2.5. Definice. Nechť $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ je svaz s ortogonalitou. Jestliže ke každému atomu $q \in P$ a ke každému $p \in P$, $0 \neq p \neq 1$, $q \wedge p = q \wedge p^\perp = 0$, existují atomy $r_1, r_2 \in P$, $r_1 \leqq p$, $r_2 \leqq p^\perp$ tak, že $q \leqq r_1 \vee r_2$, pak se svaz $\mathscr{P}$ *nazývá V-svaz.*

Z důsledku 2.4 ihned vyplývá, že pro ortomodulární V-svaz $\mathscr{P}$ platí, že atomy r_1, r_2 z definice 2.5 jsou určeny jednoznačně. Atomický svaz s ortogonalitou $\mathscr{P} =$

$= (P, \leqq, 1, \perp)$ budeme nazývat *A-svaz*. Atomický svaz s ortogonalitou $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$, který je současně V-svaz, budeme nazývat *AV-svaz*.

2.6. Věta. *Nechť $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ je ortomodulární V-svaz. Nechť $r_1, r_2 \in P$ jsou atomy v $\mathscr{P}$ takové, že $r_1 \neq r_2$. Pak existuje atom $r_3 \in P$ takový, že $r_1 \perp r_3$ (čili $r_1 \leqq r_3^\perp$) a platí $r_1 \vee r_2 = r_1 \vee r_3$.*

Důkaz. Jestliže $r_1 \perp r_2$, stačí položit $r_3 = r_2$. Nechť proto nadále neplatí $r_1 \perp r_2$, tedy neplatí $r_2 \leqq r_1^\perp$. Odtud $r_2 \wedge r_1^\perp = 0$ a zřejmě $0 \neq r_1 \neq 1$. Podle definice 2.5 existuje atom $r_3 \leqq r_1^\perp$ tak, že $r_2 \leqq r_1 \vee r_3$. Nyní užitím věty 2.3 dostáváme $r_1 \vee r_2 = r_1 \vee r_3\ (= r_2 \vee r_3)$.

Podobná dokázané větě je další věta.

2.7. Věta. *Nechť $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ je ortomodulární V-svaz. Nechť $r_1, r_2 \in P$ jsou atomy v $\mathscr{P}$ takové, že $r_1 \perp r_2$. Buď $r_3 \in P$ atom v $\mathscr{P}$ takový, že $r_1 \neq r_3 \neq r_2$ a že $r_3 \leqq r_1 \vee r_2$. Pak existuje v $\mathscr{P}$ atom r_4 tak, že $r_3 \perp r_4$ a platí $r_1 \vee r_2 = r_3 \vee r_4$.*

Důkaz rozdělíme na několik částí.

1) Dokážeme, že neplatí $r_1 \leqq r_3^\perp$ a že neplatí $r_2 \leqq r_3^\perp$. Kdyby totiž $r_1 \leqq r_3^\perp$, pak $r_3 \leqq r_1^\perp$. Protože $r_3 \leqq r_1 \vee r_2$, podle tvrzení 4) a 2) věty 2.1 platí $r_2 = (r_1 \vee r_2) \wedge r_1^\perp = \{r_3 \vee [r_3^\perp \wedge (r_1 \vee r_2)]\} \wedge r_1^\perp \geqq r_3 \vee \{[r_3^\perp \wedge (r_1 \vee r_2)] \wedge r_1^\perp\} \geqq r_3$, což odporuje předpokladu. Podobně, kdyby $r_2 \leqq r_3^\perp$, potom $r_3 \leqq r_2^\perp$ a potom $r_1 = (r_1 \vee r_2) \wedge r_2^\perp = \{r_3 \vee [r_3^\perp \wedge (r_1 \vee r_2)]\} \wedge r_2^\perp \geqq r_3 \vee \{[r_3^\perp \wedge (r_1 \vee r_2)] \wedge r_2^\perp\} \geqq r_3$, což také odporuje předpokladu.

2) Protože $r_1 \wedge r_3 = 0 = r_1 \wedge r_3^\perp$, $0 \neq r_3 \neq 1$, podle definice 2.5 existuje atom $r_4 \leqq r_3^\perp$ tak, že $r_1 \leqq r_3 \vee r_4$. Protože $r_2 \wedge r_3 = 0 = r_2 \wedge r_3^\perp$, podle definice 2.5 existuje atom $r_5 \leqq r_3^\perp$ tak, že $r_2 \leqq r_3 \vee r_5$. Podle věty 2.3 platí $r_1 \vee r_3 = r_3 \vee r_4 = r_1 \vee r_4$, $r_2 \vee r_3 = r_3 \vee r_5 = r_2 \vee r_5$. Odtud plyne $r_1 \vee r_2 = r_1 \vee r_2 \vee r_3 = r_3 \vee r_4 \vee r_5\ (= r_1 \vee r_2 \vee r_4 \vee r_5)$.

3) Dokážeme, že $r_1 \vee r_3 = r_2 \vee r_3$ a že $r_4 = r_5$ a tím bude důkaz proveden. Platí $r_3 \leqq r_1 \vee r_2$, $r_1 \leqq r_1$, $r_2 \leqq r_1^\perp$, $r_3 \wedge r_1 = 0$ a podle bodu 1) tohoto důkazu též $r_3 \wedge r_1^\perp = 0$. Podle věty 2.3 pak $r_1 \vee r_3 = r_1 \vee r_2 = r_2 \vee r_3$. Podle bodu 2) tohoto důkazu však platí $r_1 \vee r_3 = r_3 \vee r_4$, $r_2 \vee r_3 = r_3 \vee r_5$, tedy $r_3 \vee r_4 = r_3 \vee r_5$. Užitím tvrzení 4) věty 2.1 dostáváme $r_4 = (r_3 \vee r_4) \wedge r_3^\perp = (r_3 \vee r_5) \wedge r_3^\perp = r_5$.

2.8. Věta. *Nechť $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ je úplný ortomodulární svaz, $p \in P$, $0 \neq p \neq 1$. Nechť $q \in P$ je takový atom v $\mathscr{P}$, že neplatí $q \leqq p$ a neplatí $q \leqq p^\perp$. Nechť $\{(r_i, s_i) : i \in I\}$ je systém všech $r_i \in P$, $s_i \in P$, $r_i \leqq p$, $s_i \leqq p^\perp$ takových, že $q \leqq r_i \vee s_i$. Pak mezi r_i, $i \in I$ resp. s_i, $i \in I$ existuje nejmenší prvek r_0 resp. s_0 tak, že $q \leqq r_0 \vee s_0$. Přitom $r_0 = (q \vee p^\perp) \wedge p$, $s_0 = (q \vee p) \wedge p^\perp$.*

Důkaz. Množina I je neprázdná, neboť pro $r_i = p$, $s_i = p^{\perp}$ máme $q \leqq p \vee p^{\perp}$.

1) Dokážeme, že $\bigwedge_{i\in I}(r_i \vee p^{\perp}) = (\bigwedge_{i\in I} r_i) \vee p^{\perp}$, $\bigwedge_{i\in I}(p \vee s_i) = p \vee (\bigwedge_{i\in I} s_i)$. Podle tvrzení 2) věty 2.1 z nerovnosti $p^{\perp} \leqq r_i^{\perp}$ vyplývá, že pro všechna $i \in I$ platí $r_i^{\perp} = p^{\perp} \vee (p \wedge r_i^{\perp})$. Odtud $(\bigvee_{i\in I} r_i^{\perp}) \wedge p = [p^{\perp} \vee \bigvee_{i\in I}(p \wedge r_i^{\perp})] \wedge p = \bigvee_{i\in I}(p \wedge r_i^{\perp})$, kde poslední rovnost plyne opět z tvrzení 2) věty 2.1 a toho, že $\bigvee_{i\in I}(p \wedge r_i^{\perp}) \leqq p$. Tím je prvé tvrzení dokázáno. Protože dále $s_i \leqq p^{\perp}$, platí podobně $s_i = p^{\perp} \wedge (s_i \vee p)$ pro všechna $i \in I$. Odtud $(\bigwedge_{i\in I} s_i) \vee p = [p^{\perp} \wedge \bigwedge_{i\in I}(s_i \vee p)] \vee p = \bigwedge_{i\in I}(s_i \vee p)$, neboť $p \leqq \bigwedge_{i\in I}(s_i \vee p)$.

2) Označme $t = \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee s_i)$. Dokážeme, že $p \wedge (p \wedge t)^{\perp} \leqq t^{\perp}$ a $p^{\perp} \wedge (p^{\perp} \wedge t)^{\perp} \leqq t^{\perp}$. Podle tvrzení 4) věty 2.1 platí $p \wedge t = \bigwedge_{i\in I} r_i$ a $p^{\perp} \wedge t = \bigwedge_{i\in I} s_i$. Zřejmě $t = \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee s_i) \leqq \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee p^{\perp}) = (\bigwedge_{i\in I} r_i) \vee p^{\perp}$, kde poslední rovnost platí podle bodu 1) tohoto důkazu. Prvé tvrzení je dokázáno. Dále $t = \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee s_i) \leqq \bigwedge_{i\in I}(p \vee s_i) = p \vee (\bigwedge_{i\in I} s_i) = p \vee (p^{\perp} \wedge t)$.

3) Dokážeme, že $p \leqq t^{\perp} \vee (t \wedge p)$ a $p^{\perp} \leqq t^{\perp} \vee (t \wedge p^{\perp})$. Podle tvrzení 2) věty 2.1 z nerovnosti $t \wedge p \leqq p$ vyplývá $p = (t \wedge p) \vee [(t \wedge p)^{\perp} \wedge p] \leqq (t \wedge p) \vee t^{\perp}$, kde poslední nerovnost platí podle části 2) tohoto důkazu. Podobně $t \wedge p^{\perp} \leqq p^{\perp}$, takže $p^{\perp} = (t \wedge p^{\perp}) \vee [(t \wedge p^{\perp})^{\perp} \wedge p^{\perp}] \leqq (t \wedge p^{\perp}) \vee t^{\perp}$.

4) Dokážeme, že $t = (t \wedge p) \vee (t \wedge p^{\perp})$. Podle části 3) tohoto důkazu máme $t = (p \vee p^{\perp}) \wedge t \leqq [t^{\perp} \vee (t \wedge p) \vee (t \wedge p^{\perp})] \wedge t$. Je zřejmé, že $(t \wedge p) \vee (t \wedge p^{\perp}) \leqq t$ a podle tvrzení 2) věty 2.1 a podle právě dokázaného proto platí $(t \wedge p) \vee (t \wedge p^{\perp}) = t \wedge [t^{\perp} \vee (t \wedge p) \vee (t \wedge p^{\perp})] \geqq t$, tedy tvrzení platí.

5) Protože $q \leqq \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee s_i) = t = (t \wedge p) \vee (t \wedge p^{\perp}) = (\bigwedge_{i\in I} r_i) \vee (\bigwedge_{i\in I} s_i)$, stačí položit $r_0 = t \wedge p = \bigwedge_{i\in I} r_i$, $s_0 = t \wedge p^{\perp} = \bigwedge_{i\in I} s_i$ a prvé tvrzení věty je dokázáno.

6) Označme $u = (q \vee p^{\perp}) \wedge p$, $v = (q \vee p) \wedge p^{\perp}$. Dokážeme, že $u \leqq r_0$, $v \leqq s_0$. Platí $q \leqq \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee s_i) = t$. Podle části 1) tohoto důkazu pak $q \vee p^{\perp} \leqq t \vee p^{\perp} \leqq \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee s_i \vee p^{\perp}) = \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee p^{\perp}) = r_0 \vee p^{\perp}$. Podle tvrzení 4) věty 2.1 odtud plyne $u = (q \vee p^{\perp}) \wedge p \leqq (r_0 \vee p^{\perp}) \wedge p = r_0$. Zcela analogicky $q \leqq t$, tedy $q \vee p \leqq t \vee p \leqq \bigwedge_{i\in I}(p \vee s_i) = p \vee s_0$, takže $v = (q \vee p) \wedge p^{\perp} \leqq (p \vee s_0) \wedge p^{\perp} = s_0$.

7) Dokážeme, že $(u \vee p^{\perp}) \wedge (v \vee p) = u \vee v$. Protože $v \leqq p^{\perp}$, podle tvrzení 2) věty 2.1 platí $p^{\perp} = v \vee (v^{\perp} \wedge p^{\perp}) = v \vee (v \vee p)^{\perp}$. Odtud dostáváme $(u \vee p^{\perp}) \wedge (v \vee p) = [u \vee v \vee (v \vee p)^{\perp}] \wedge (v \vee p) = u \vee v$, kde poslední rovnost platí na základě toho, že $u \vee v \leqq p \vee v$ a na základě tvrzení 2) věty 2.1.

8) Dokážeme, že $q \leqq u \vee v$. Platí $p \leqq q \vee p$, $p^{\perp} \leqq q \vee p^{\perp}$, podle tvrzení 2) věty 2.1 je tudíž $q \vee p = p \vee [p^{\perp} \wedge (q \vee p)] = p \vee v$, $q \vee p^{\perp} = p^{\perp} \vee [p \wedge \wedge (q \vee p^{\perp})] = p^{\perp} \vee u$. Zřejmě $q \leqq (q \vee p^{\perp}) \wedge (q \vee p) = (p^{\perp} \vee u) \wedge (p \vee v) = = u \vee v$, kde poslední rovnost platí podle části 7) tohoto důkazu.

9) Protože $u \leqq p$, $v \leqq p^{\perp}$ a protože $q \leqq u \vee v$, podle prvého tvrzení dokazované věty platí $r_0 \leqq u$, $s_0 \leqq v$. Podle části 6) tohoto důkazu pak dostáváme $r_0 = u$, $s_0 = v$.

Věta je dokázána.

2.9. Důsledek. *Nechť* $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ *je úplný ortomodulární svaz. Pak* $\mathscr{P}$ *je V-svaz tehdy a jen tehdy, když pro livobolné* $p \in P$, $0 \neq p \neq 1$ *a libovolný atom* $q \in P$ *takový, že neplatí* $q \leqq p$ *a neplatí* $q \leqq p^{\perp}$, *jsou* $(q \vee p^{\perp}) \wedge p$ *a* $(q \vee p) \wedge p^{\perp}$ *atomy v* $\mathscr{P}$.

2.10. Poznámka. Předpokládejme nyní, že $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ je úplný ortomodulární A-svaz. Buď $0 \neq p \in P$. Existuje atom $r_1 \in P$ tak, že $r_1 \leqq p$. Jestliže $r_1^{\perp} \wedge p = 0$, podle tvrzení 3) věty 2.1 pak $r_1 = p$. Nechť dále $0 \neq r_1^{\perp} \wedge p$. Existuje pak atom $r_2 \in P$ tak, že $r_2 \leqq r_1^{\perp} \wedge p$, tedy $r_1 \perp r_2$ a $r_2 \leqq p$. Tudíž $r_1 \vee r_2 \leqq p$. Jestliže $(r_1 \vee r_2)^{\perp} \wedge p = 0$, je jako dříve $r_1 \vee r_2 = p$. Jestliže $0 \neq (r_1 \vee r_2)^{\perp} \wedge p$, existuje atom $r_3 \in P$ tak, že $r_3 \leqq (r_1 \vee r_2)^{\perp} \wedge p$, tedy $r_3 \leqq p$ a $r_3 \leqq r_1^{\perp} \wedge r_2^{\perp}$ čili $r_3 \perp r_1$, $r_3 \perp r_2$. Ze Zornova lemmatu snadno vyplývá, že existuje maximální (vzhledem k množinové inkluzi) množina $\{r_i : i \in I\}$ po dvou ortogonálních atomů taková, že pro všechna $i \in I$ platí $r_i \leqq p$. Potom $p = \bigvee_{i \in I} r_i$. Kdyby totiž tomu tak nebylo, pak $\bigvee_{i \in I} r_i \leqq p$ a $0 \neq (\bigvee_{i \in I} r_i)^{\perp} \wedge p$. Popsaným již postupem bychom pak zjistili, že množina $\{r_i : i \in I\}$ není maximální.

2.11. Definice. Buď $\mathscr{P} = (P, \leqq, 0)$ svaz. Buďte $p, q \in P$. Říkáme, že *q pokrývá p*, píšeme $p \prec q$, jestliže $p \neq q$ a jestliže z toho, že $r \in P$, $p \leqq r \leqq q$, vyplývá, že buď $p = r$ nebo $r = q$. Jestliže pro každé $p \in P$ a každý atom $q \in P$ takový, že $p \wedge q = 0$ platí $p \prec p \vee q$, pak se svaz $\mathscr{P}$ nazývá *C-svaz*.

Je-li svaz s ortogonalitou $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ A-svaz a současně C-svaz, nazýváme jej *AC-svazem*.

2.12. Věta. *Nechť* $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ *je úplný ortomodulární svaz. Pak* $\mathscr{P}$ *je V-svaz tehdy a jen tehdy, když* $\mathscr{P}$ *je C-svaz.*

Důkaz. Nechť $\mathscr{P}$ je V-svaz, nechť $p \in P$, $q \in P$ buď atom v $\mathscr{P}$ takový, že $p \wedge q = 0$. Potom $p \neq p \vee q$ a $p \neq 1$. Je-li $p = 0$, je tvrzení zřejmé. Nechť proto $p \neq 0$. Buď $r \in P$, $p \leqq r \leqq p \vee q$ a nechť $p \neq r$. Platí

$$0 \neq p^{\perp} \wedge r \leqq p^{\perp} \wedge (p \vee q) = \begin{cases} q, & \text{je-li } q \leqq p^{\perp} \text{ podle tvrzení 4) věty 2.1} \\ \text{atom v } \mathscr{P}, & \text{je-li } q \wedge p^{\perp} = 0 \text{ podle důsledku 2.9.} \end{cases}$$

Odtud vyplývá, že $p^\perp \wedge r = p^\perp \wedge (p \vee q)$ a tento prvek je atom v $\mathscr{P}$. Protože $p \leqq r$, podle tvrzení 2) věty 2.1 máme $r = p \vee (p^\perp \wedge r) = p \vee [p^\perp \wedge (p \vee q)] = p \vee q$, neboť také $p \leqq p \vee q$. Je tudíž $\mathscr{P}$ C-svaz.

Nechť naopak $\mathscr{P}$ je C-svaz. Buď $p \in P$, $0 \neq p \neq 1$, $q \in P$ buď atom v $\mathscr{P}$ takový, že $p \wedge q = p^\perp \wedge q = 0$. Podle definice 2.11 platí $p \prec p \vee q$, $p^\perp \prec p^\perp \vee q$, odkud podle tvrzení 3) věty 2.1 máme $p^\perp \wedge (p \vee q) \neq 0 \neq p \vee (p^\perp \wedge q)$. Nechť $r \in P$, $0 \neq r \leqq p \wedge (p^\perp \vee q)$. Protože $r \leqq p^\perp \vee q$, platí $p^\perp \leqq r \vee p^\perp \leqq p^\perp \vee q$, Protože $\mathscr{P}$ je C-svaz platí, že buď $p^\perp = r \vee p^\perp$ nebo $r \vee p^\perp = p^\perp \vee q$. Kdyby $p^\perp = r \vee p^\perp$, bylo by $r \leqq p^\perp$ a protože $r \leqq p$, dostali bychom $r = 0$, což je ve sporu s předpokladem. Tedy $r \vee p^\perp = p^\perp \vee q$. Z nerovnosti $r \leqq p$ a z tvrzení 2) věty 2.1 plyne $r = p \wedge (r \vee p^\perp) = p \wedge (p^\perp \vee q)$ a proto tento prvek je atom v $\mathscr{P}$. Podobně se dokáže, že také $p^\perp \wedge (p \vee q)$ je atom v $\mathscr{P}$. Podle důsledku 2.9 je $\mathscr{P}$ V-svaz.

3. Zde zavedeme definicí 3.1 základní pojem tohoto článku. Budeme uvažovat množinu Ω, o níž nadále budeme předpokládat, že je neprázdná. Na této množině zavedeme binární relaci $\perp$, kterou budeme nazývat ortogonalita a jejíž vlastnosti ne náhodou připomínají naše představy o kolmosti úseček např. v rovině.

3.1. Definice. Buď Ω daná množina a nechť je na ní definována binární relace $\perp$, splňující následující požadavky:

a) Jestliže $x, y \in \Omega$, $x \perp y$, potom $y \perp x$.

b) Existuje prvek $o \in \Omega$ tak, že pro všechna $x \in \Omega$ platí $o \perp x$.

c) Jestliže pro $x \in \Omega$ platí $x \perp x$, potom $x = o$.

Pak říkáme, že na množině Ω je definována *ortogonalita* $\perp$, což budeme zapisovat ve tvaru $(\Omega, \perp)$. O prvcích $x, y \in \Omega$, pro které platí $x \perp y$, budeme říkat, že jsou *ortogonální*.

Buď $x \in \Omega$, $\emptyset \neq A \subset \Omega$. Definujeme $x \perp A$, právě když $x \perp y$ pro všechna $y \in A$. Označme $A^\perp = \{x \in \Omega : x \perp A\}$.

Snadno nahlédneme, že platí

3.2. Lemma. *Buď dáno* $(\Omega, \perp)$. *Potom*

1) $\{o\}^\perp = \Omega$; $\Omega^\perp = \{o\}$.

2) *Jestliže* $\emptyset \neq A \subset \Omega$, *potom* $o \in A^\perp$.

3) *Jestliže* $\emptyset \neq A \subset \Omega$, *potom* $A \subset (A^\perp)^\perp = A^{\perp\perp}$ *(označení)*.

4) *Jestliže* $A, B \subset \Omega$, $\emptyset \neq A \subset B$, *potom* $B^\perp \subset A^\perp$.

5) *Jestliže* $\emptyset \neq A \subset \Omega$, *potom* $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.

Označme $S = \{A \subset \Omega : \emptyset \neq A = A^{\perp\perp}\}$, $T = \{A^\perp : \emptyset \neq A \subset \Omega\}$.

3.3. Věta. *Platí:*

1) $S = T$.

2) $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ *je úplný svaz s ortogonalitou. Přitom pro* $A_i \in S$, $i \in I$ *platí* $\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$, $\bigvee_{i \in I} A_i = (\bigcap_{i \in I} A_i^{\perp})^{\perp}$ *a dále* $0 = \{o\}$, $1 = \Omega$.

Důkaz. 1) Je-li $A \in S$, je $A = (A^{\perp})^{\perp} = B^{\perp}$, kde $B = A^{\perp} \neq \emptyset$. Tedy $A \in T$. Je-li $A \in T$, je $A = B^{\perp}$, kde $\emptyset \neq B \subset \Omega$. Podle tvrzení 5) lemmatu 3.2 platí $A^{\perp\perp} = B^{\perp\perp\perp} = B^{\perp} = A$, tedy $A \in S$, 2) Podle 1) lemmatu 3.2 platí $\{o\} \in S$, $\Omega \in S$ a podle 2) lemmatu 3.2 je $\{o\}$ v $\mathscr{S}$ nejmenší prvek, Ω je zřejmě v $\mathscr{S}$ největší prvek. Dále pro $A \in S$ v důsledku podmínky c) definice 3.1 platí, že $A \cap A^{\perp} = \{o\}$.

Jestliže I je neprázdná množina indexů a $A_i \in S$ pro $i \in I$, dokážeme, že $\bigcap_{i \in I} A_i \in S$, tedy $\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$. Jednak v důsledku 3) lemmatu 3.2 platí $\bigcap_{i \in I} A_i \subset (\bigcap_{i \in I} A_i)^{\perp\perp}$. Dále $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_j$ pro $j \in I$, tedy podle 4) lemmatu 3.2 je $A_j^{\perp} \subset (\bigcap_{i \in I} A_i)^{\perp}$, odkud $(\bigcap_{i \in I} A_i)^{\perp\perp} \subset A_j^{\perp\perp} = A_j$ pro $j \in I$, tedy $(\bigcap_{i \in I} A_i)^{\perp\perp} \subset \bigcap_{j \in I} A_j$.

Jestliže opět I je neprázdná množina indexů, dokážeme, že pro $A_i \in S$, $i \in I$ platí $\bigvee_{i \in I} A_i = (\bigcap_{i \in I} A_i^{\perp})^{\perp}$. Platí $\bigcap_{i \in I} A_i^{\perp} \subset A_j^{\perp}$, $j \in I$, tedy $A_j = A_j^{\perp\perp} \subset (\bigcap_{i \in I} A_i^{\perp})^{\perp}$ pro $j \in I$. Je-li dále $A \in S$ a $A_i \subset A$ pro $i \in I$, potom $A^{\perp} \subset A_i^{\perp}$, $i \in I$, tedy $A^{\perp} \subset \bigcap_{i \in I} A_i^{\perp}$, odkud $(\bigcap_{i \in I} A_i^{\perp})^{\perp} \subset A^{\perp\perp} = A$.

Jestliže $A \in S$, pak $A \vee A^{\perp} = (A^{\perp} \cap A)^{\perp} = \{o\}^{\perp} = \Omega$.

3.4. Poznámka. Je-li dáno $(\Omega, \perp)$, indukovaný úplný svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ a $\emptyset \neq A \subset \Omega$, pak v $\mathscr{S}$ existuje nejmenší prvek B takový, že $A \subset B$. Buď $\{A_i : A \subset A_i\ A_i \in S,\ i \in I\}$. Tento systém obsahuje např. Ω. Platí $A_i^{\perp} \subset A^{\perp}$ pro $i \in I$, odtud $\bigvee_{i \in I} A_i^{\perp} \subset A^{\perp}$, z čehož $A^{\perp\perp} \subset (\bigvee_{i \in I} A_i^{\perp})^{\perp} = \bigcap_{i \in I} A_i = B$. Protože $A \subset A^{\perp\perp}$, platí $B \subset A^{\perp\perp}$, tudíž $B = A^{\perp\perp}$.

3.5. Poznámka. Buď dáno $(\Omega, \perp)$, indukovaný svaz $\mathscr{S}$ buď $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$. Nechť $A, B \in S$. Potom $A \perp B$ (čili $A \subset B^{\perp}$) tehdy a jen tehdy, když pro všechna $x \in A$ a všechna $y \in B$ platí $x \perp y$. Snadno též nahlédneme, že jestliže $A_i \in S$ pro $i \in I$, $x \perp A_i$ pro $i \in I$ a $y \in \bigvee_{i \in I} A_i$, potom $x \perp y$.

3.6. Věta. *Buď dána množina* Ω, $o \in \Omega$. *Buď* $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ *úplný svaz s ortogonalitou podmnožin množiny* Ω *takový, že:*

1) $\{o\}$ *je v* $\mathscr{S}$ *nejmenší prvek.*

2) *Je-li* I *neprázdná množina indexů,* $A_i \in S$ *pro* $i \in I$, *potom* $\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$.

Pro $x, y \in \Omega$ kladme $x \top y$ právě když existuje $A \in S$ tak, že $x \in A$ a $y \in A^{\perp}$. Potom relace $\top$ je ortogonalita na Ω a jí indukovaný úplný svaz s ortogonalitou $(T, \subset, \Omega, \top)$ je shodný s $\mathcal{S}$.

Důkaz. Ukážeme, že relace $\top$ vyhovuje definici 3.1 Axiom a) vyplývá z toho, že pro $A \in S$ platí $A^{\perp\perp} = A$. Axiom b) plyne z předpokladu 1) dokazované věty. Axiom c) plyne z toho, že pro $A \in S$ platí $A \cap A^{\perp} = \{o\}$.

Nyní dokážeme, že $S = T$. Buď $C \in S$; protože $C^{\perp} \in S$, pro všechna $x \in C$ a všechna $y \in C^{\perp}$ platí $x \top y$. Odtud vyplývá, že $C^{\perp} \subset C^{\top}$. Buď $y_0 \in C^{\top}$, tedy pro všechna $x \in C$ platí $x \top y_0$. Ke každému $x \in C$ existuje $A_x \in S$ tak, že $x \in A_x$ a $y_0 \in A_x^{\perp}$. Odtud $y_0 \in \bigcap_{x \in C} A_x^{\perp}$. Dále $C \subset \bigcup_{x \in C} A_x \subset \bigvee_{x \in C} A_x = (\bigcap_{x \in C} A_x^{\perp})^{\perp}$, odkud $y_0 \in \bigcap_{x \in C} A_x^{\perp} \subset C^{\perp}$ čili $C^{\top} \subset C^{\perp}$, tedy $C^{\perp} = C^{\top} \in T$. Buď nyní naopak $C \in T$. Existuje nejmenší prvek $A \in S$ tak, že $C \subset A$. Potom $A^{\perp} = A^{\top} \subset C^{\top}$. Buď $y_0 \in C^{\top}$. Tedy $y_0 \top x$ pro všechna $x \in C$. Proto ke každému $x \in C$ existuje $A_x \in S$ tak, že $x \in A_x$ a $y_0 \in A_x^{\perp}$, z čehož vyplývá, že $y_0 \in \bigcap_{x \in C} A_x^{\perp}$. Dále $C \subset \bigcup_{x \in C} A_x \subset \bigvee_{x \in C} A_x = (\bigcap_{x \in C} A_x^{\perp})^{\perp} \in S$. Proto $A \subset (\bigcap_{x \in C} A_x^{\perp})^{\perp}$, takže $y_0 \in \bigcap_{x \in C} A_x^{\perp} \subset A^{\perp}$ a tudíž $C^{\top} \subset A^{\perp}$. Proto $C^{\top} = A^{\perp}$, odkud $A = (C^{\top})^{\perp} = (C^{\top})^{\top} = C$ a tím je věta dokázána.

3.7. Poznámka. Buď dáno $(\Omega, \perp)$. Jsou-li $x, y \in \Omega$ a $x \perp y$, položme $R(x, y) = 0$, jestliže neplatí $x \perp y$ (budeme psát $x \not\perp y$), položme $R(x, y) = 1$. Potom takto definované zobrazení $R : \Omega \times \Omega \to G$, kde G značí množinu komplexních čísel, má tyto základní vlastnosti:

a) Pro všechna $x, y \in \Omega$ platí $R(x, y) = \overline{R(y, x)}$ (pruh značí číslo komplexně sdružené).

b) $R(o, o) = 0$; pro každé $x \in \Omega$, $x \neq o$ platí $R(x, x) > 0$.

c) Pro všechna $x, y \in \Omega$ platí $|R(x, y)|^2 \leqq R(x, x) R(y, y)$.

Z vlastností c) a b) ihned vyplývá, že pro všechna $x \in \Omega$ platí $R(o, x) = R(x, o) = 0$.

Zobrazení $R : \Omega \times \Omega \to G$, které má vlastnosti a), b), c), nazveme kvaziskalárním součinem a dvojici (Ω, R) prostorem s kvaziskalárním součinem. Je-li naopak dán prostor (Ω, R), potom pro $x, y \in \Omega$ definujme $x \perp y$, právě když $R(x, y) = 0$. Pak je na množině Ω definována ortogonalita. Kdybychom pro $x, y \in \Omega$ kladli $x \perp y$, právě když $\operatorname{Re} R(x, y) \leqq 0$, na množině Ω je opět definována (ovšem tentokráte jiná) ortogonalita.

Jestliže např. (Ω, ϱ) je metrický prostor, $o \in \Omega$, pak zobrazení $R : \Omega \times \Omega \to G$ definované pro $x, y \in \Omega$ rovností $R(x, y) = \varrho^2(o, x) - \varrho^2(x, y) + \varrho^2(y, o)$, je kvaziskalární součin.

Jestliže Ω je Hilbertův prostor, R skalární součin (R je samozřejmě též kvaziskalární součin) a klademe-li pro $x, y \in \Omega$, $x \perp y$ právě když $R(x, y) = 0$, indukovaný svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ je dobře známý úplný ortomodulární AV-svaz (podle věty 2.12 též AC-svaz). Klademe-li však pro $x, y \in \Omega$ $x \perp y$ právě když $\operatorname{Re} R(x, y) \leqq 0$, indukovaný svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ je úplný AV-svaz, jehož nosič S je tvořen právě všemi uzavřenými konvexními kuželi s vrcholem v počátku (viz práci [1]); tento svaz není ortomodulární a není C-svazem.

Poslední dva příklady svazů $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ jsou A-svazy a dokonce pro každé $x \in \Omega$, $x \neq o$, platí, že $\{x\}^{\perp\perp}$ je atom v $\mathscr{S}$. Platí

3.8. Věta. *Buď dáno $(\Omega, \perp)$, nechť $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$. Jestliže $A \in S$ je atom v $\mathscr{S}$, $x \in A$, $x \neq o$, potom $\{x\}^{\perp\perp} = A$.*

Důkaz. Protože $x \in \{x\}^{\perp\perp}$, platí $\{x\}^{\perp\perp} \neq \{o\}$. Dále $\{x\} \subset A$, tedy $A^{\perp} \subset \{x\}^{\perp}$, odkud $\{x\}^{\perp\perp} \subset A$, proto $\{x\}^{\perp\perp} = A$.

Existují však svazy $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$, které nejsou atomické.

3.9. Příklad. Nechť $\Omega = \{o, \ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots, \ldots, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \ldots\}$ a nechť $o \perp x$ pro všechna $x \in \Omega$ a dále $\omega_i \perp \tau_j$ pro všechna $j \leqq i$, i celé. Potom $S = \{\{o\}, \Omega; \ldots$ $\ldots; \{o, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots\}, \{\ldots, \tau_{-2}, \tau_{-1}, o\}; \{o, \omega_0, \omega_1, \ldots\}, \{\ldots, \tau_{-1}, \tau_0, o\}; \{o, \omega_1, \omega_2, \ldots\}, \{\ldots, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, o\}; \ldots\}$. Zde svaz $\mathscr{S}$ neobsahuje ani jeden atom.

3.10. Věta. *Buď dáno $(\Omega, \perp)$, $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1) *$\mathscr{S}$ je atomický svaz.*

2) *Ke každé podmnožině $B \subset \Omega$, $B \neq \emptyset$, $B^{\perp} \neq \{o\}$, existuje $x \in B^{\perp}$, $x \neq o$ tak, že pro všechna $y \in \{x\}^{\perp\perp}$, $y \neq o$ platí $\{y\}^{\perp} \subset \{x\}^{\perp}$.*

Důkaz. Dokážeme implikaci 1) $\Rightarrow$ 2). Buď $\emptyset \neq B \subset \Omega$, $B^{\perp} \neq \{o\}$. Potom $B^{\perp} \in S$ a existuje atom A v $\mathscr{S}$ tak, že $A \subset B^{\perp}$. Existuje $x \in A$, $x \neq o$. Podle věty 3.8 platí $\{x\}^{\perp\perp} = A$, platí též $x \in B$. Opět podle věty 3.8 pro každé $y \in \{x\}^{\perp\perp}$, $y \neq o$ platí též $\{y\}^{\perp\perp} = \{x^{\perp\perp}\}$ čili $\{y\}^{\perp} = \{x\}^{\perp}$, tedy $\{y\}^{\perp} \subset \{x\}^{\perp}$.

Dokážeme implikaci 2) $\Rightarrow$ 1). Buď $C \in S$, $C \neq \{o\}$. Existuje $B \subset \Omega$, $B \neq \emptyset$ tak, že $C = B^{\perp}$, Nechť $x \in B^{\perp}$, $x \neq o$ vyhovuje předpokladu. Zřejmě $\{o\} \neq \{x\}^{\perp\perp} \subset C$. Dokážeme, že $\{x\}^{\perp\perp} \in S$ je atom v $\mathscr{S}$. Buď $A \in S$, $A \neq \{o\}$, $A \subset \{x\}^{\perp\perp}$ a nechť $y \in A$, $y \neq o$. Potom $\{x\}^{\perp} \subset A^{\perp} \subset \{y\}^{\perp}$. Protože $y \in \{x\}^{\perp\perp}$ a protože podle předpokladu $\{y\}^{\perp} \subset \{x\}^{\perp}$, dostáváme $\{x\}^{\perp} = A^{\perp} = \{y\}^{\perp}$, tedy $\{x\}^{\perp\perp} = A$.

3.11. Příklad. Buď $\Omega = \{o, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ a nechť $o \perp \omega_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, 5$, $\omega_1 \perp \omega_2 \perp \omega_3 \perp \omega_4 \perp \omega_5$. Potom $S = \{\{o\}, \Omega; \{o, \omega_2\}, \{o, \omega_1, \omega_3\}; \{o, \omega_3\}, \{o, \omega_2, \omega_4\}; \{o, \omega_4\}, \{o, \omega_3, \omega_5\}\}$. Svaz $\mathscr{S}$ je zde atomický, avšak např. $\{\omega_1\}^{\perp\perp} = \{o, \omega_1, \omega_3\}$ není atom v $\mathscr{S}$.

Formulujeme následující axiom

Axiom A. Buď dáno $(\Omega, \perp)$. nechť $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$. Pro každé $x \in \Omega$, $x \neq o$, je $\{x\}^{\perp\perp}$ atom v $\mathscr{S}$.

Zřejmě svaz $\mathscr{S}$ splňující axiom A je A-svaz.

3.12. Věta. *Nechť je dáno $(\Omega, \perp)$, svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ nechť splňuje axiom* A. *Buď $A \in S$, $x \in \Omega$, $x \neq o$. Potom $A \cap \{x\}^{\perp\perp} = \{o\}$ tehdy a jen tehdy, když $x \notin A$.*

Důkaz snadno plyne z věty 3.8.

3.13. Věta. *Buď dáno $(\Omega, \perp)$, $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ nechť splňuje axiom* A. *Označme $\mathscr{A}$ resp. $\mathscr{B}$ množinu všech atomů resp. antiatomů svazu $\mathscr{S}$. Potom platí:*

1) *Je-li $A \in S$, $A \neq \{o\}$ a jestliže $\{A_i\}$, $i \in I$ je systém všech atomů v $\mathscr{S}$ takových, že $A_i \subset A$, $i \in I$, potom $A = \bigvee_{i \in I} A_i$.*

2) *Je-li $A \in S$, $A \neq \Omega$ a jestliže $\{B_j\}$, $j \in J$ je systém všech antiatomů v $\mathscr{S}$ takových, že $A \subset B_j$, $j \in J$, potom $A = \bigcap_{j \in J} B_j$.*

3) *Existuje prosté zobrazení f množiny $\mathscr{A}$ na množinu $\mathscr{B}$ takové, že:*

3,1) *Jsou-li $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$, $A_1 \subset f(A_2)$, pak $A_2 \subset f(A_1)$;*

3,2) *Jestliže $A \in \mathscr{A}$, potom $A \cap f(A) = \{o\}$.*

Důkaz. Tvrzení 1) a 2) se snadno dokážou sporem. Dále pro $A \in \mathscr{A}$ stačí položit $f(A) = A^{\perp}$ a tvrzení 3,1) a 3,2) toto zobrazení splňuje.

Následující věta je v jistém smyslu opakem věty 3.13.

3.14. Věta. *Buď Ω množina, $o \in \Omega$; $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \{o\})$ buď úplný atomický a antiatomický svaz podmnožin množiny Ω, v němž infimum je dáno množinovým průnikem a který má největší prvek Ω a nejmenší prvek $\{o\}$. Označme $\mathscr{A}$ resp. $\mathscr{B}$ systém všech atomů resp. antiatomů svazu $\mathscr{S}$. Dále nechť svaz $\mathscr{S}$ splňuje podmínky* 1), 2), 3) *věty* 3.13. *Potom ve svazu $\mathscr{S}$ lze zavést ortogonalitu.*

Důkaz. Položíme $\{o\}^{\perp} = \Omega$; je-li $A \in S$, $A \neq \{o\}$, $A = \bigvee_{i \in I} A_i$, kde $A_i \in \mathscr{A}$ pro $i \in I$, položíme $A^{\perp} = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$. Platí $A^{\perp} \in S$.

1) Dokážeme, že $\Omega^{\perp} = \{o\}$. Totiž platí $\Omega = \bigvee_{A \in \mathscr{A}} A$, odkud $\Omega^{\perp} = \bigcap_{A \in \mathscr{A}} f(A)$. Kdyby $\bigcap_{A \in \mathscr{A}} f(A) \neq \{o\}$, existoval by atom $C \in \mathscr{A}$ tak, že $C \subset \bigcap_{A \in \mathscr{A}} f(A)$, tedy $C \subset f(A)$ pro všechna $A \in \mathscr{A}$, speciálně $C \subset f(C)$. To však odporuje předpokladu 3,2) z věty 3.13.

2) Nechť $A, B \in S$, $A \subset B$. Dokážeme, že $B^{\perp} \subset A^{\perp}$. Je-li $A = \{o\}$, je $B^{\perp} \subset \Omega = \{o\}^{\perp} = A^{\perp}$. Nechť dále $A \neq \{o\}$, $A = \bigvee_{i \in I} A_i$, kde $A_i \in \mathscr{A}$ pro $i \in I$. Potom $B = \bigvee_{i \in I} A_i \vee \bigvee_{j \in J} A'_j$, kde $A'_j \in \mathscr{A}$ pro $j \in J$. Odtud $B^{\perp} = \bigcap_{i \in I} f(A_i) \cap \bigcap_{j \in J} f(A'_j) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i) = A^{\perp}$.

3) Nechť $A \in S$. Dokážeme, že $A \cap A^{\perp} = \{o\}$. Avšak pro $A = \{o\}$ nebo $A = \Omega$ je toto tvrzení zřejmé. Nechť tedy $\{o\} \neq A \neq \Omega$. Kdyby $A \cap A^{\perp} \neq \{o\}$, existoval by atom $C \in \mathscr{A}$ tak, že $C \subset A \cap A^{\perp}$, tedy $C \subset A$, $C \subset A^{\perp}$. Podle části 2) tohoto důkazu platí $A^{\perp\perp} \subset C^{\perp}$. Je-li tedy $A = \bigvee_{i \in I} A_i$, kde $A_i \in \mathscr{A}$ pro $i \in I$, pak $\bigcap_{i \in I} f(A_i) = A^{\perp} = \bigvee_{j \in J} A'_j$, kde $A'_j \in \mathscr{A}$ pro $j \in J$. Odtud $A^{\perp\perp} = \bigcap_{j \in J} f(A'_j)$. Avšak $A'_j \subset f(A_i)$ pro všechna $j \in J$ a všechna $i \in I$. Podle 3,1) věty 3.13 odtud plyne $A_i \subset f(A_j)$ pro všechna $i \in I$ a všechna $j \in J$, takže $A = \bigvee_{i \in I} A_i \subset \bigcap_{j \in J} f(A'_j) = A^{\perp\perp}$. Tedy máme $C \subset A \subset A^{\perp\perp} \subset C^{\perp} = f(C)$, odkud $C = C \cap f(C)$, což odporuje předpokladu 3,2) z věty 3.13.

4) Pro $A \in S$ dokážeme, že $A = A^{\perp\perp}$. Pro $A = \{o\}$ nebo $A = \Omega$ je tvrzení zřejmé. V bodě 3) tohoto důkazu jsme již zjistili, že pro $A \in S$, $\{o\} \neq A \neq \Omega$ platí $A \subset A^{\perp\perp}$. Buď dále $A \neq \Omega$. Platí $A = \bigcap_{i \in I} B_i$, kde $B_i \in \mathscr{B}$ pro $i \in I$. Platí též $A = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$, kde $B_i = f(A_i)$, $A_i \in \mathscr{A}$ pro $i \in I$. Jelikož $(\bigvee_{i \in I} A_i)^{\perp} = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$, je $A = (\bigvee_{i \in I} A_i)^{\perp}$. Protože pro všechna $B \in S$ platí $B \subset B^{\perp\perp}$ podle bodu 2) tohoto důkazu máme $B^{\perp\perp\perp} \subset B^{\perp}$; avšak také $B^{\perp} \subset B^{\perp\perp\perp}$, tedy pro všechna $B \in S$ platí $B^{\perp} = B^{\perp\perp\perp}$. Odtud $A = (\bigvee_{i \in I} A_i)^{\perp} = (\bigvee_{i \in I} A_i)^{\perp\perp\perp} = A^{\perp\perp}$.

3.15. Poznámka. Splňuje-li svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \{o\})$ předpoklady věty 3.14, lze v něm zavést ortogonalitu. Dostaneme tak svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ s ortogonalitou. Ten indukuje podle věty 3.6 ortogonalitu $\perp$ na množině Ω. Lze potom pro $x \in \Omega$ uvažovat např. $\{x\}^{\perp\perp}$. Avšak svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ nemusí splňovat axiom A. Buď totiž $\Omega = \{o, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $S = \{\{o\}, \Omega; \{o, \omega_1\}, \{o, \omega_2\}\}$. Zde $\mathscr{A} = \mathscr{B} = \{\{o, \omega_1\}, \{o, \omega_2\}\}$. Položme $f(\{o, \omega_1\}) = \{o, \omega_2\}$, $f(\{o, \omega_2\}) = \{o, \omega_1\}$. Předpoklady věty 3.14 jsou splněny a v souladu s jejím důkazem položíme $\{o, \omega_1\}^{\perp} = f(\{o, \omega_1\}) = \{o, \omega_2\}$, $\{o, \omega_2\}^{\perp} = f(\{o, \omega_2\}) = \{o, \omega_1\}$ a dále $\{o\}^{\perp} = \Omega$, $\Omega^{\perp} = \{o\}$. Odtud plyne ortogonalita $\perp$ na množině Ω: $o \perp \omega_i$ pro $i = 1, 2, 3$; $\omega_1 \perp \omega_2$. Je sice $\omega_3 \in \Omega$, avšak $\{\omega_3\}^{\perp\perp} = \Omega$, což není atom v $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$. Kdybychom však doplnili předpoklady věty 3.14 o podmínku, že ke každému $x \in \Omega$ existuje atom $A_x \in \mathscr{A}$ tak, že $x \in A_x$, svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ by splňoval axiom A. Totiž potom při $x \neq o$ máme $x \in A_x$, odkud $\{o\} \neq \{x\}^{\perp\perp} \subset A_x$ tedy $\{x\}^{\perp\perp} = A_x$.

3.16. Příklad. Buď $\Omega = \{o, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Nechť $o \perp \omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, $\omega_3 \perp \omega_5 \perp \omega_6 \perp \omega_1 \perp \omega_2 \perp \omega_6 \perp \omega_3 \perp \omega_4 \perp \omega_5$, $\omega_6 \perp \omega_4$. Potom $S = \{\{o\}, \Omega; \{o, \omega_1\}, \{o, \omega_2, \omega_6\}; \{o, \omega_2\}, \{o, \omega_1, \omega_6\}; \{o, \omega_3\}, \{o, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}; \{o, \omega_4\}, \{o, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}; \{o, \omega_5\}, \{o, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}; \{o, \omega_6\}, \{o, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}; \{o, \omega_3, \omega_4\}, \{o, \omega_5, \omega_6\}; \{o, \omega_3, \omega_5\}, \{o, \omega_4, \omega_6\}; \{o, \omega_3, \omega_6\}, \{o, \omega_4, \omega_5\}\}$. Zde svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ je ortomodulární A-svaz splňující aciom A. Platí zde $\{o, \omega_1\} \vee \vee \{o, \omega_2\} = \{o, \omega_3\} \vee \{o, \omega_4\} \vee \{o, \omega_5\} = \{o, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Protože tedy neplatí tvrzení věty 2.7, vyplývá odtud, že $\mathscr{S}$ není V-svaz. Toto však lze ukázat přímo. Volme $A = \{o, \omega_3\}$, pak $A^{\perp} = \{o, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ a atom $C = \{o, \omega_1\}$. Platí $\{o, \omega_3\} \vee \{o, \omega_4\} = \{o, \omega_3, \omega_4\}$, $\{o, \omega_3\} \vee \{o, \omega_5\} = \{o, \omega_3, \omega_5\}$, $\{o, \omega_3\} \vee \vee \{o, \omega_6\} = \{o, \omega_3, \omega_6\}$ a C neleží pod žádným z těchto spojení. Najdeme podle věty 2.8 minimální prvek $A_0 \subset A$ a minimální prvek $B_0 \subset A^{\perp}$ tak, aby $C \subset A_0 \vee \vee B_0$. Platí $A_0 = (C \vee A^{\perp}) \cap A = \{o, \omega_3\}$, $B_0 = (C \vee A) \cap A^{\perp} = \{o, \omega_4, \omega_5\}$. Potom $A_0 \vee B_0 = \{o, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Je rovněž patrno, že B_0 není atom v $\mathcal{S}$.

Formulujme následující axiom.

Axiom V. Buď dáno $(\Omega, \perp)$, $\mathcal{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$. Buď $A \in S$, $\{o\} \neq A \neq \Omega$; nechť $x \in \Omega$, $x \notin A$, $x \notin A^{\perp}$. Potom existují atomy A_1, A_2 v $\mathcal{S}$, $A_1 \subset A$, $A_2 \subset A^{\perp}$ tak, že $x \in A_1 \vee A_2$.

Svaz $\mathcal{S}$ z příkladu 3.16 nesplňuje axiom V. Splňuje-li však svaz $\mathcal{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ asiom A i axiom V, na základě věty 3.12 je AV-svazem; je-li ortomodulární, je podle věty 2.12 též AC-svazem. Svaz $\mathcal{S}$ uzavřených konvexních kuželů s vrcholem v počátku v Hilbertově prostoru splňuje axiom V. Atomy A_1, A_2 z axiomu V však nejsou jednoznačně určeny ($\mathcal{S}$ není ortomodulární). Rovněž svaz $\mathcal{S}$ (uzavřených) podprostorů Hilbertova prostoru splňuje axiom V. Atomy A_1, A_2 z axiomu V jsou určeny jednoznačně ($\mathcal{S}$ je ortomodulární).

Je zřejmé, že řadu tvrzení z odstavce 2. lze pomocí věty 3.12 a axiomů A a V snadno přeformulovat. Např. platí (nutná podmínka ortomodularity svazu $\mathcal{S}$):

3.17. Věta. *Buď dáno $(\Omega, \perp)$, svaz $\mathcal{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ nechť splňuje axiom* A. *Je-li $\mathcal{S}$ ortomodulární svaz, $\{o\} \neq A \in S$, A není atom v $\mathcal{S}$, pak k libovolnému $x \in A$, $x \neq o$ existuje $y \in A$, $y \neq o$ tak, že $x \perp y$.*

Důkaz. Pro $x \in A$, $x \neq o$ platí $\{x\}^{\perp\perp} \subset A$. Kdyby $\{x\}^{\perp} \cap A = \{o\}$, bylo by $\{x\}^{\perp\perp} = A$, tedy A by byl atom v $\mathcal{S}$. Existuje proto $y \in \{x\}^{\perp} \cap A$, $y \neq o$, tedy $y \in A$, $y \in \{x\}^{\perp}$, tedy $x \perp y$.

Na základě uvedených výsledků je zřejmá následující věta (nutná a postačující podmínka ortomodularity svazu $\mathcal{S}$).

3.18. Věta. *Buď dáno $(\Omega, \perp)$, svaz $\mathcal{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ nechť splňuje axiom* A. *Pak $\mathcal{S}$ je ortomodulární tehdy a jen tehdy, když pro libovolné $A, B \in S$, $\{o\} \neq A \subset \subset B$ platí: Existují po dvou ortogonální prvky $x_i \in \Omega$ pro $i \in I$ tak, že $A = \bigvee_{i \in I} \{x_i\}^{\perp\perp}$ a po dvou ortogonální prvky $y_j \in \Omega$ pro $j \in J$takové, že $x_i \perp y_j$ pro všechna $i \in I$, $j \in J$ tak, že $B = \bigvee_{i \in I} \{x_i\}^{\perp\perp} \vee \bigvee_{j \in J} \{y_j\}^{\perp\perp}$.*

Literatura

[1] *Havrda J.:* K zobecnění pojmu projektor, Čas. pěst. mat., roč. *98* (1973), Praha, 265—268.

[2] *Maeda F., Maeda S.:* Theory of Symmetric Lattices, Springer-Verlag, Berlin 1970.

Adresa autora: 166 27 Praha 6 - Dejvice, Suchbátarova 2 (katedra matematiky FEL ČVUT).

Summary

ORTHOGONALITY ON SETS

JAN HAVRDA, Praha

The article deals with a certain natural generalization of the concept of orthogonality, as is known e.g. from the Hilbert space theory. The article is divided into two parts. The first part is of preparatory character, the second one is devoted to the problem itself. Henceforth the terminology of lattice theory will be used.

1. If $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ stands for an orthocomplemented lattice, then $\mathscr{P}$ is orthomodular if and only if

$$p, q, r \in P\,, \quad r \leqq q\,, \quad p \leqq q^{\perp} \quad \text{implies} \quad (r \vee p) \wedge q = r\,.$$

Moreover, in this case if $p, q, r, s, t \in P$, $r \leqq q$, $t \leqq q$, $p \leqq q^{\perp}$, $s \leqq q^{\perp}$ and $r \vee p = t \vee s$, then $r = t$ and $p = s$.

Let $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ be an orthomodular lattice. Let $p \in P$, $0 \neq p \neq 1$ and r, s be atoms of $\mathscr{P}$ such that $r \leqq p$, $s \leqq p^{\perp}$. If $q \in P$ such that $q \neq 0$, $q \wedge p = q \wedge p^{\perp} = 0$ and $q \leqq r \vee s$, then $r \vee q = r \vee s = q \vee s$. The above assumptions concerning r and s determine the atoms r, s uniquely.

An orthocomplemented lattice $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ is called a V-lattice if it satisfies the following condition: For every atom q of $\mathscr{P}$ and for every p of $\mathscr{P}$ such that $0 \neq p \neq 1$, $q \wedge p = q \wedge p^{\perp} = 0$ there exist atoms r and s of $\mathscr{P}$ such that $r \leqq p$, $s \leqq p^{\perp}$, and $q \leqq r \vee s$.

If the V-lattice is orthomodular, then the atoms r and s are uniquely determined.

If $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ is an orthomodular V-lattice and if $r \neq s$ are atoms of $\mathscr{P}$, then there exists an atom t of $\mathscr{P}$ such that $r \perp t$ and $r \vee s = r \vee t$. Moreover, if r and s are atoms of $\mathscr{P}$ such that $r \perp s$ and t is an atom of $\mathscr{P}$ such that $r \neq t \neq s$ and $t \leqq r \vee s$, then there exists an atom u of $\mathscr{P}$ such that $t \perp u$ and the equality $r \vee s = t \vee u$ holds.

In a complete orthomodular lattice $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$, assume that q is an atom such that $q \nleqq p$ and $q \nleqq p^{\perp}$. If $\{(r_i, s_i) : i \in I\}$ is a system of all r_i and s_i of $\mathscr{P}$ such that $r_i \leqq p$, $s_i \leqq p^{\perp}$ and $q \leqq r_i \vee s_i$ for all $i \in I$, then there is a least element r_0 or s_0 among r_i, $i \in I$, or among s_i, $i \in I$, respectively. Moreover, we have $r_0 = (q \vee p^{\perp}) \wedge p$ and $s_0 = (q \vee p) \wedge p^{\perp}$.

A complete orthomodular lattice $\mathscr{P}$ is a V-lattice if and only if the following statement is true: For an arbitrary element p of $\mathscr{P}$, $0 \neq p \neq 1$ and for an arbitrary atom q of $\mathscr{P}$ such that $q \nleqq p$ and $q \nleqq p^{\perp}$, the elements $(q \vee p^{\perp}) \wedge p$ and $(q \vee p) \wedge p^{\perp}$ are atoms of $\mathscr{P}$.

A complete orthomodular lattice $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ is a V-lattice if and only if it has the covering property.

2. Let a binary relation $\perp$ be defined on a nonempty set Ω satisfying the following axioms:

(A I) $\perp$ is symmetric.

(A II) There is an element o of Ω such that $o \perp x$ for all x of Ω.

(A III) If $x \perp x$ for x of Ω then $x = o$.

In this case we say that on Ω orthogonality $\perp$ is defined, and we write $(\Omega, \perp)$. Two elements x and y of Ω are called orthogonal if $x \perp y$. For an element x of Ω and for any nonempty subset A of Ω the symbol $x \perp A$ means that $x \perp y$ for all y of A. Put $A^{\perp} = \{x \in \Omega : x \perp A\}$.

The following statements are valid:

(i) $\{o\}^{\perp} = \Omega$ and $\Omega^{\perp} = \{o\}$;

(ii) If $A \subset \Omega$ is nonempty then $o \in A^{\perp}$;

(iii) If $A \subset \Omega$ is nonempty then $A \subset A^{\perp\perp}$ (here the symbol $A^{\perp\perp}$ is used for $(A^{\perp})^{\perp}$; similarly $A^{\perp\perp\perp}$ for $(A^{\perp\perp})^{\perp}$);

(iv) If $A \subset \Omega$ is nonempty and $A \subset B \subset \Omega$, then $B^{\perp} \subset A^{\perp}$;

(v) If $A \subset \Omega$ is nonempty, then $A^{\perp} = A^{\perp\perp\perp}$;

Putting in the sequel $S = \{A \subset \Omega : \emptyset \neq A = A^{\perp\perp}\}$ and $T = \{A^{\perp} : \emptyset \neq A \subset \Omega\}$, we have

(vi) $S = T$;

(vii) $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ is a complete orthocomplemented lattice, where

$$\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i\,, \quad \bigvee_{i \in I} A_i = \Big(\bigcap_{i \in I} A_i^{\perp}\Big)^{\perp}\,, \quad 0 = \{o\}\,,$$

$1 = \Omega$ for $A_i \in S$, $i \in I$.

Let $(\Omega, \perp)$ and $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ be given. For any nonempty $A \subset \Omega$ there is a least element B of $\mathscr{S}$ such that $A \subset B$. Moreover, $B = A^{\perp\perp}$.

If $A, B \in S$, then $A \perp B$ (i.e. $A \subset B^{\perp}$) if and only if $x \perp y$ for all $x \in A$ and $y \in B$.

Given a set Ω and an element $o \in \Omega$, let $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ be a complete orthocomplemented lattice of subsets of the set Ω such that

(i) $\{o\}$ is a least element of $\mathscr{S}$;

(ii) If I is any nonempty set and $A_i \in S$ for $i \in I$, then $\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$.

We define a binary relation $\top$ on Ω by: $x \top y$ if and only if there is $A \in S$ such that $x \in A$ and $y \in A^{\perp}$. The relation $\top$ defined above is an orthogonality on Ω and the complete orthocomplemented lattice $(T, \subset, \Omega, \top)$ coincides with the lattice $\mathscr{S}$.

Given $(\Omega, \perp)$, we define for $x, y \in \Omega$

$$R(x, y) = 0 \quad \text{for} \quad x \perp y\,, \quad R(x, y) = 1 \quad \text{otherwise}\,.$$

The mapping $R : \Omega \times \Omega \to G$ (here G stands for the set of all complex numbers) has the following basic properties:

(a) $R(x, y) = \overline{R(y, x)}$ for every $x, y \in \Omega$ (here bar denotes the complex conjugate);

(b) $R(o, o) = 0$ and $R(x, x) > 0$ for every $x \in \Omega$, $x \neq o$;

(c) $|R(x, y)|^2 \leqq R(x, x) \,.\, R(y, y)$ for all $x, y \in \Omega$.

It is evident that $R(o, x) = R(x, o) = 0$ for all $x \in \Omega$.

A mapping $R : \Omega \times \Omega \to G$ is said to be a quasiscalar product if it satisfies conditions (a)–(c). A pair (Ω, R) is called a space with quasiscalar product.

Conversely: given a space with quasiscalar product (Ω, R), we can define a binary relation $\perp$ on Ω by: $x \perp y$ if and only if $R(x, y) = 0$. Then $\perp$ is an orthogonality on Ω. Another orthogonality on Ω is defined by: $x \perp y$ if and only if $\mathrm{Re}\,(R(x, y)) \leqq 0$ (here Re denotes the real part of a complex number).

If Ω is a Hilbert space and R is a scalar (also quasiscalar) product, then the first definition leads to the well-known case. The second definition produces the lattice $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$, where S the system of all closed convex cones with the vertices situated at the origin; this is an example of a complete atomic V-lattice which is not orthomodular and also not a C-lattice (cf. [1]).

If $(\Omega, \perp)$ and $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ are given and A is an atom of $\mathscr{S}$, then $A = \{x\}^{\perp\perp}$ for every $x \in A$, $x \neq o$.

The following statements are equivalent:

1) $\mathscr{S}$ is an atomic lattice.

2) For every nonempty subset $B \subset \Omega$, $B^{\perp} \neq \{o\}$ there is $x \in B^{\perp}$, $x \neq o$ such that $\{y\}^{\perp} \subset \{x\}^{\perp}$ for all $y \in \{x\}^{\perp\perp}$, $y \neq o$.

Axiom (A). Given $(\Omega, \perp)$ and $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$, then $\{x\}^{\perp\perp}$ is an atom of $\mathscr{S}$ for every $x \in \Omega$, $x \neq o$.

If (A) takes place for $\mathscr{S}$, then $\mathscr{S}$ is an atomic lattice. Moreover, if $A \in S$, $x \in \Omega$, $x \neq o$, then $A \cap \{x\}^{\perp\perp} = \{o\}$ if and only if $x \notin A$.

For a nonempty set Ω and $o \in \Omega$ let $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \{o\})$ be a complete atomic and antiatomic lattice of subsets of Ω in which the meet is given by the set theoretical intersection having Ω and $\{o\}$ for the greatest and the least element, respectively. Put $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ for the system of all atoms and antiatoms, respectively. An orthogonality in $\mathscr{S}$ can be introduced if the following conditions are satisfied.

1) Let $A \in S$, $A \neq \{o\}$. If $\{A_i\}$, $i \in I$ is the system of all atoms of $\mathscr{S}$ such that $A_i \subset A$ for all $i \in I$, then $A = \bigvee_{i \in I} A_i$.

2) Let $A \in S$, $A \neq \Omega$. If $\{B_j\}$, $j \in J$ is the system of all antiatoms of $\mathscr{S}$ such that $A \subset B_j$ for all $j \in J$, then $A = \bigcap_{j \in J} B_j$.

3) There is a bijection f of $\mathscr{A}$ onto $\mathscr{B}$ such that

$$A_1, A_2 \in \mathscr{A}\,, \quad A_1 \subset f(A_2) \quad \text{imply} \quad A_2 \subset f(A_1)\,. \tag{3.1}$$

$$A \in \mathscr{A} \quad \text{implies} \quad A \cap f(A) = \{o\}\,. \tag{3.2}$$

Axiom (V). Let $(\Omega, \perp)$ and $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ be given. Let $A \in S$, $\{o\} \neq A \neq \Omega$ and $x \in \Omega$, $x \notin A$, $x \notin A^{\perp}$. Then there are atoms A_1 and A_2 of $\mathscr{S}$ such that $A_1 \subset A$, $A_2 \subset A^{\perp}$, and $x \in A_1 \vee A_2$.

Numerous results of the first part of the article can be used when assuming that the lattice $\mathscr{S}$ satisfies the axiom (A) or (V).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

COMPATIBLE RELATIONS ON ALGEBRAS

IVAN CHAJDA, Přerov, and BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Received May 8, 1974)

The concept of tolerance relation compatible with a given algebra is studied in [3], [4], [5]. A tolerance relation is (according to [1], [2]) a reflexive and symmetric binary relation. Here we shall extend the definition of compatibility onto relations which are not tolerances in general.

Let an algebra $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ with finitary operations be given. (Here A denotes the set of elements of $\mathfrak{A}$ and $\mathscr{F}$ denotes the set of operations.) Let ϱ be a binary relation on A. We say that ϱ is compatible with the algebra $\mathfrak{A}$, if and only if the following condition is satisfied: If $f \in \mathscr{F}$ is an n-ary operation (n is a positive integer), $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ are elements of A, $(x_i, y_i) \in \varrho$ for $i = 1, \ldots, n$, then $(f(x_1, \ldots, x_n), f(y_1, \ldots, y_n)) \in \varrho$.

We shall prove several theorems; some of them are generalizations of the results from [3] and [4]. When we speak about an algebra, we always mean an algebra in which all operations are finitary.

Even an empty relation on A can be considered a relation compatible with $\mathfrak{A}$. If ϱ is a binary relation on a set A, then by ϱ^* we denote the relation $\{(y, x) \mid x \in A, y \in A, (x, y) \in \varrho\}$.

Theorem 1. *Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ be an algebra, let ϱ_1, ϱ_2 be two relations on A compatible with $\mathfrak{A}$. Then $\varrho_1 \cap \varrho_2$, ϱ^* are relations compatible with $\mathfrak{A}$.*

Proof. Let $f \in \mathscr{F}$ be an n-ary operation, let $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ be elements of A such that $(x_i, y_i) \in \varrho_1 \cap \varrho_2$ for $i = 1, \ldots, n$. As $(x_i, y_i) \in \varrho_1$ for $i = 1, \ldots, n$, we have $(f(x_1, \ldots, x_n), f(y_1, \ldots, y_n)) \in \varrho_1$. As $(x_i, y_i) \in \varrho_2$ for $i = 1, \ldots, n$, we have $(f(x_1, \ldots, x_n), f(y_1, \ldots, y_n)) \in \varrho_2$. Thus $(f(x_1, \ldots, x_n), f(y_1, \ldots, y_n)) \in \varrho_1 \cap \varrho_2$ and $\varrho_1 \cap \varrho_2$ is a relation compatible with $\mathfrak{A}$. The assertion for ϱ^* is evident.

Theorem 2. *Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ be an algebra, let ϱ be a reflexive relation on A compatible with $\mathfrak{A}$. Then $\varrho \cap \varrho^*$ is a tolerance compatible with $\mathfrak{A}$.*

Proof. The reflexivity and the symmetry of $\varrho \cap \varrho^*$ is evident. Its compatibility with $\mathfrak{A}$ follows from Theorem 1.

Theorem 3. *Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ be an algebra, let ϱ be a reflexive and transitive relation (i.e. a quasi-ordering) on A compatible with $\mathfrak{A}$. Then $\varrho \cap \varrho^*$ is a congruence on $\mathfrak{A}$.*

Proof is analogous to that of Theorem 2.

Let the product $\varrho_1 \varrho_2$ of two binary relations ϱ_1, ϱ_2 on the same set A be defined so that $(x, y) \in \varrho_1 \varrho_2$ for $x \in A$, $y \in A$, if and only if there exists $z \in A$ such that $(x, z) \in \varrho_1$, $(z, y) \in \varrho_2$. We can define also the n-th power of a binary relation ϱ so that $\varrho^n = \varrho$ for $n = 1$ and $\varrho^n = \varrho \varrho^{n-1}$ for $n \geqq 2$.

It is easy to prove the following

Theorem 4. *Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ be an algebra, let ϱ_1, ϱ_2 be two relations on A compatible with $\mathfrak{A}$. Then their product $\varrho_1 \varrho_2$ is compatible with $\mathfrak{A}$.*

Now we shall prove

Theorem 5. *Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ be an algebra, let $\{\varrho_j\}_{j=1}^{\infty}$ be a sequence of compatible relations on $\mathfrak{A}$ such that $\varrho_j \subseteq \varrho_{j+1}$ for every positive integer j. Then $\bigcup_{j=1}^{\infty} \varrho_j = \varrho$ is compatible relation on $\mathfrak{A}$.*

Proof. Let $f \in F$ be an n-ary operation, let $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ be elements of A such that $(x_i, y_i) \in \varrho$ for each $i = 1, \ldots, n$. Then for each $i = 1, \ldots, n$ we have $(x_i, y_i) \in \varrho_{j(i)}$ for a positive integer $j(i)$. Let $j = \max\limits_{1 \leqq i \leqq n} j(i)$. Then $(x_i, y_i) \in \varrho_j$ for each $i = 1, \ldots, n$ and thus $(f(x_1, \ldots, x_n), f(y_1, \ldots, y_n)) \in \varrho_j \subseteq \varrho$.

Theorem 6. *Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ be an algebra, let ϱ be a reflexive relation on A compatible with $\mathfrak{A}$. Then the transitive hull ϱ_T of ϱ is compatible with $\mathfrak{A}$.*

Proof. We have $\varrho_T = \bigcup_{j=1}^{\infty} \varrho^j$. According to Theorem 4 the relation ϱ^j is compatible with A for every positive integer j. As ϱ is reflexive, we have $\varrho^j \subseteq \varrho^{j+1}$ for every positive integer j. Thus according to Theorem 5 the relation $\varrho_T = \bigcup_{i=1}^{\infty} \varrho^j$ is compatible with $\mathfrak{A}$.

Example 1. This example will show us that:

1) the reflexive hull and the symmetric hull of a relation compatible with $\mathfrak{A}$ need not be compatible with $\mathfrak{A}$;

2) the union of two relations compatible with $\mathfrak{A}$ need not be compatible with $\mathfrak{A}$.

Let $\mathfrak{A}$ be the semigroup with elements a, b, c, d, e, f, g, h given by the following Cayley table:

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	e	h	h	e	h	h	h
b	e	b	f	h	e	f	h	h
c	h	f	c	g	h	f	g	h
d	h	h	g	d	h	h	g	h
e	e	e	h	h	e	h	h	h
f	h	f	f	h	h	f	h	h
g	h	h	g	g	h	h	g	h
h	h	h	h	h	h	h	h	h

Let $\varrho = \{(a, c), (b, d), (e, g)\}$. This is a compatible relation on $\mathfrak{A}$. The reflexive hull ϱ_R of ϱ is not compatible with $\mathfrak{A}$; we have $(a, c) \in \varrho_R$, $(c, c) \in \varrho_R$, $ac = h$, $cc = c$, but $(h, c) \notin \varrho_R$. This is also an example that the union of two compatible relations on $\mathfrak{A}$ need not be a compatible relation on $\mathfrak{A}$, because the reflexive hull of ϱ is the union of ϱ and of the relation of equality on A which is evidently also compatible with $\mathfrak{A}$. Also the symmetric hull $\varrho \cup \varrho^* = \{(a, c), (c, a), (b, d), (d, b), (e, g), (g, e)\}$ is not compatible with $\mathfrak{A}$. We have $(a, c) \in \varrho \cup \varrho^*$, $(d, b) \in \varrho \cup \varrho^*$, $ad = h$, $cb = f$, but $(h, f) \notin \varrho \cup \varrho^*$.

Example 2. This example will show that the reflexivity of ϱ in Theorem 6 is substantial.

Let $\mathfrak{A}$ be the semigroup with elements a, b, c, d, e, f given by the following Cayley table:

	a	b	c	d	e	f
a	a	d	f	d	f	f
b	d	b	e	d	e	f
c	f	e	c	f	e	f
d	d	d	f	d	f	f
e	f	e	e	f	e	f
f	f	f	f	f	f	f

Let $\varrho = \{(a, b), (b, c), (d, e)\}$. This is a compatible relation on A, evidently not reflexive. The transitive hull of ϱ is $\varrho_T = \{(a, b), (b, c), (a, c), (d, e)\}$. We have $(a, b) \in \varrho_T$, $(a, c) \in \varrho_T$, $aa = a$, $bc = e$, but $(a, e) \notin \varrho_T$. Thus ϱ_T is not compatible with $\mathfrak{A}$.

Theorem 7. *Let $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ be an algebra, let ϱ be a relation on A compatible with $\mathfrak{A}$. Let e be an idempotent element of $\mathfrak{A}$ (i.e. such an element that $f(e, e, \ldots, e) =$*

$= e$ *for each* $f \in \mathscr{F}$). *The set* A_e *of all elements* $x \in A$ *such that* $(e, x) \in \varrho$ *forms a subalgebra of* $\mathfrak{A}$.

Proof. For $i = 1, \ldots, n$ let $x_i \in A_e$, this means $(e, x_i) \in \varrho$. If $f \in F$ is an n-ary operation, then $(e, f(x_1, \ldots, x_n)) = (f(e, \ldots, e), f(x_1, \ldots, x_n)) \in \varrho$, because ϱ is compatible with $\mathfrak{A}$. This means $f(x_1, \ldots, x_n) \in A_e$. As the elements $x_1, \ldots, x_n$ and the operation f were chosen arbitrarily, A_e forms a subalgebra of $\mathfrak{A}$.

Corollary 1. *Let* L *be a lattice (or semilattice), let* ϱ *be a compatible relation on* L. *Then for each* $x \in L$ *the set* L_x *of all elements* $y \in L$ *such that* $(x, y) \in \varrho$ *forms a sublattice (or subsemilattice respectively) of* L.

Remark. Theorem 7 implies immediately Theorem 11 from [3].

Theorem 8. *Let* G *be a group, let* ϱ *be a compatible relation on* G. *Let* ϱ *be reflexive. The set* N *of all* $x \in G$ *satisfying* $(e, x) \in \varrho$ *is a normal subgroup of* G. *(The symbol* e *denotes the unit of* G.)

Proof. From Theorem 7 it follows that set N is a subgroup of G. Let $x \in N$, i.e. $(e, x) \in \varrho$. From the reflexivity of ϱ we obtain $(z, z) \in \varrho$ and $(z^{-1}, z^{-1}) \in \varrho$ for arbitrary $z \in G$. From the compatibility of ϱ we obtain finally $(e, z^{-1}xz) = (z^{-1}ez, z^{-1}xz) \in \varrho$, thus $z^{-1}xz \in N$. Therefore N is a normal subgroup of G.

Remark. In [4] it is proved that each compatible relation on a group which is reflexive and symmetric is also transitive, i.e., it is a congruence.

Theorem 9. *Let* G *be an involutory group (i.e.* $x^2 = e$ *for each* $x \in G$, *where* e *is the unit of* G), *let* ϱ *be a reflexive compatible relation on* G. *Then* ϱ *is a congruence relation on* G.

Proof. Let $(x, y) \in \varrho$ for $x \in G$, $y \in G$. From the reflexivity of ϱ we have $(x^{-1}, x^{-1}) \in \varrho$, $(y^{-1}, y^{-1}) \in \varrho$ and from the compatibility of ϱ we have $(e, x^{-1}y) = (x^{-1}x, x^{-1}y) \in \varrho$ and thus $(y^{-1}, x^{-1}) = (ey^{-1}, x^{-1}yy^{-1}) \in \varrho$. But G is an involutory group; this means $y^{-1} = y$, $x^{-1} = x$, thus $(x, y) \in \varrho$ implies $(y, x) \in \varrho$. By the theorem in [4] quoted in the above remark ϱ is a congruence on G.

Theorem 10. *Let* $L(\vee)$ *be a complete* $\vee$*-semilattice, let* ϱ *be a compatible relation on* $L(\vee)$. *Denote* $M(x) = \bigvee_{(x,y) \leq \varrho} y$ *for* $x \in L(\vee)$. *The mapping* M *which assigns the element* $M(x)$ *to any* $x \in L(\vee)$ *is an isotone mapping of* $L(\vee)$ *into itself.*

Proof. Let $x \in L(\vee)$, let ϱ be a compatible relation on $L(\vee)$. The existence of $M(x)$ for each $x \in L(\vee)$ follows from the completeness of $L(\vee)$. Let $x \leqq y$, i.e. $x \vee y = y$. From the definition of $M(x)$ we have $(x, M(x)) \in \varrho$, $(y, M(y)) \in \varrho$ (because $L(\vee)$ is complete) and from the compatibility of ϱ we obtain $(x \vee y,$

$M(x) \vee M(y)) \in \varrho$ therefore $M(x) \vee M(y)$ is one factor in the join $\bigvee_{(x \vee y, z) \in \varrho} z =$ $= M(x \vee y)$. This means $M(x) \vee M(y) \leqq M(x \vee y)$. But $x \vee y = y$ and thus $M(x) \vee M(y) \leqq M(y)$, which means $M(x) \leqq M(y)$.

Corollary 2. *Let $L(\wedge)$ be a complete $\wedge$-semilattice, let ϱ be a compatible relation on $L(\wedge)$. Denote $m(x) = \bigwedge_{(x,y) \in \varrho} y$ for $x \in L(\wedge)$. The mapping m which assigns the element $m(x)$ to any $x \in L(\wedge)$ is an isotone mapping of $L(\wedge)$ into itself.*

Proof of Corollary 2 is dual to that of Theorem 10.

Corollary 3. *Let L be a complete lattice, let ϱ be a compatible relation on L. Let $M(x)$ and $m(x)$ be defined as in Theorem 11 and Corollary 2. The mappings $M : x \to M(x)$, $m : x \to m(x)$ are isotone mappings of L into itself.*

Theorem 11. *Let S be a semigroup, let ϱ be a compatible relation on S, let T be a subsemigroup of S. The set ϱT of all elements $x \in S$ such that $(x, x') \in \varrho$ for some $x' \in T$ is a subsemigroup of S.*

Proof. Let $x \in \varrho T$, $y \in \varrho T$. Then there exist elements $x' \in T$, $y' \in T$ such that $(x, x') \in \varrho$, $(y, y') \in \varrho$. From the compatibility of ϱ we have $(xy, x'y') \in \varrho$. But $x'y' \in T$, because T is a subsemigroup of S, thus $xy \in \varrho T$ and ϱT is a subsemigroup of S.

Theorem 12. *Let S be a semigroup, let ϱ be a compatible relation on S. Let ϱ be reflexive. Let T be an ideal of S (right or left or two-sided). The set ϱT defined in Theorem 11 is an ideal of the semigroup S (right or left or two-sided, respectively).*

Proof. Let $x \in \varrho T$, let T be a left ideal of S. There exists $x' \in T$ such that $(x, x') \in \varrho$. Let $y \in S$; from the reflexivity of ϱ we have $(y, y) \in \varrho$. From $(x, x') \in \varrho$ and $(y, y) \in \varrho$ we obtain $(xy, x'y) \in \varrho$. But $x'y \in T$, because T is a left ideal of S. Therefore $xy \in \varrho T$ and ϱT is a left ideal of S. Analogously for right and two-sided ideals.

Theorem 13. *Let R be a ring, let ϱ be a compatible relation on R, let O be the zero element of R. Let ϱ be reflexive. The set R_0 of all $x \in R$ such that $(O, x) \in \varrho$ (or $(x, O) \in \varrho$) is an ideal of R.*

Proof follows immediately from Theorems 12, 8 and 1.

For a ring whose additive group is involutory, the assumption that ϱ is reflexive is unnecessary. We obtain

Corollary 4. *Let R be a ring whose additive group is involutory, let ϱ be a compatible relation on R. The set R_0 of all $x \in R$ for which $(O, x) \in \varrho$ (or $(x, O) \in \varrho$) holds (where O is the zero element of R) is a subring of the ring R.*

References

[1] *M. A. Arbib:* Tolerance Automata. Kybernetika *3* (1967), 223—233.
[2] *E. C. Zeeman:* The Topology of the Brain and Visual Perception. In: The Topology of 3-Manifolds. Ed. by M. K. Fort, pp. 240—256.
[3] *B. Zelinka:* Tolerance in Algebraic Structures. Czech. Math. J. *20* (1970), 179—183.
[4] *B. Zelinka:* Tolerance in Algebraic Structures II. Czech. Math. J. *25* (1975), 175—178.
[5] *I. Chajda* and *B. Zelinka:* Tolerance Relations in Lattices. Czech. Math. J. (to appear).

Authors' addresses: I. Chajda, 750 00 Přerov, tř. Lidových milicí 290, B. Zelinka, 461 17 Liberec 1, Komenského 2 (katedra matematiky VŠST).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

DIAMETRICALLY CRITICAL TOURNAMENTS

JÁN PLESNÍK, Bratislava

(Received June 20, 1974)

In the whole paper, all notions not defined here will be used in the sense of [1]. Given a *tournament* T, $V(T)$ and $E(T)$ denote its *point set* and *line set*, respectively. For a set $M \subset V(T)$, $T(M)$ denotes the *induced subgraph* (*subtournament*) of T with point set M. If $u, v \in V(T)$, then the distance from u to v is denoted by $d_T(u, v)$. (Distinguish from the definition given in [2].) The *diameter* of T is denoted by $d(T)$.

The paper [3] deals with diametrically critical graphs and digraphs in general. In this paper we shall study e-critical (i.e. line-critical) and v-critical (i.e. point-critical) tournaments defined in the same way. A *tournament* T with a finite diameter d is called *e-critical* (*v-critical*) if $d(T - x) > d$ for any line $x \in E(T)$ ($d(T - u) > d$ for any point $u \in V(T)$, respectively). A line $x \in E(T)$ is said to be *superfluous* if $d(T - x) = d(T)$. Hence a tournament is e-critical if and only if no its line is superfluous. A common name for both the e-critical and the v-critical tournaments is that in the title of the paper. It is the purpose of this note to study the diametrically critical (mainly e-critical) finite tournaments.

In Figs. 1, 2 and 3 all e-critical tournaments with $p \leqq 6$ points are shown. This can be proved e.g. by exhaustion using a list of all tournaments with $p \leqq 6$ points (e.g. [2], pp. 91–95). In the sequel, however, we shall give also a reasonable proof of this assertion. As can be seen, these three tournaments are also v-critical tournaments with diameter 2. Thus according to the following theorem we can construct infinitely many e-critical as well as v-critical tournaments with diameter 2.

Theorem 1. *Let T be a tournament with $p > 1$ points, where $V(T) = \{v_1, v_2, \ldots \ldots, v_p\}$. Let $\bar{T}$ be a tournament with $p + 2$ points, where $V(\bar{T}) = V(T) \cup \{u', u''\}$ and $E(\bar{T}) = E(T) \cup \{u'u'', v_1u', v_2u', \ldots, v_pu', u''v_1, u''v_2, \ldots, u''v_p\}$* (cf. Fig. 4). *Then T is e-critical (v-critical) with diameter 2 if and only if $\bar{T}$ is e-critical (v-critical, respectively) with diameter 2.*

The proof is obvious.

Note that the tournament in Fig. 3 can be constructed from the tournament of Fig. 1 by Theorem 1. A tournament $\overline{T}$ is said to be *reducible* if there is a tournament T such that T and $\overline{T}$ both satisfy the assumptions of Theorem 1; in the opposite case $\overline{T}$ is said to be *irreducible*. So the tournaments of Figs. 1 and 2 are irreducible while the tournament of Fig. 3 is reducible.

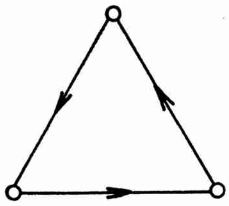

Fig. 1.

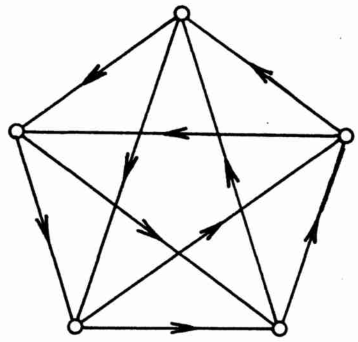

Fig. 2.

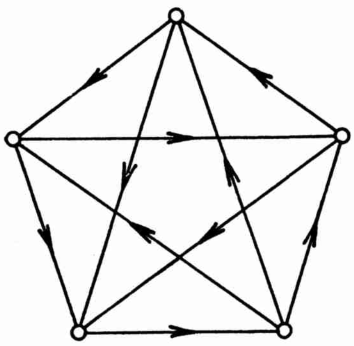

Fig. 3.

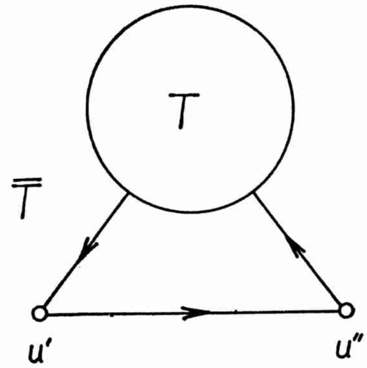

Fig. 4.

Theorem 2. *Except for the two tournaments of Figs.* 1 *and* 2 *every e-critical tournament with diameter* 2 *is reducible.*

Proof. Consider an e-critical tournament T with a diameter $d \geqq 2$. Let $w_1, w_2 \in V(T)$ and $x \in E(T)$ be such that

$$d_{T-x}(w_1, w_2) > d \tag{1}$$

with

$$d_T(w_1, w_2) = \min_{y \in E(T)} \min_{\substack{u,v \in V(T) \\ d_{T-y}(u,v) > d}} d_T(u, v)\,. \tag{2}$$

Put

(3) $$m = d_T(w_1, w_2).$$

The shortest $w_1 - w_2$ path is of the form $u_0u_1 \dots u_m$, where $u_0 = w_1$, $u_m = w_2$ and $x = u_ku_{k+1}$ for some k with $0 \leqq k \leqq m - 1$. The set $V' = V(T) - \{u_0, u_1, \dots \dots, u_m\}$ can be decomposed into the following four classes:

$$A = \{v \in V' \mid w_1v,\ w_2v \in E(T)\}, \quad B = \{v \in V' \mid vw_1,\ vw_2 \in E(T)\},$$
$$C = \{v \in V' \mid vw_1,\ w_2v \in E(T)\}, \quad D = \{v \in V' \mid w_1v,\ vw_2 \in E(T)\}.$$

According to (1) we have

(4) $$D = \emptyset$$

and obviously

(5) $$1 \leqq m \leqq d.$$

After this general introduction we shall suppose that T is an e-critical tournament with diameter $d = 2$. So by (5) it is sufficient to consider the following three cases.

(I) $m = 1$.

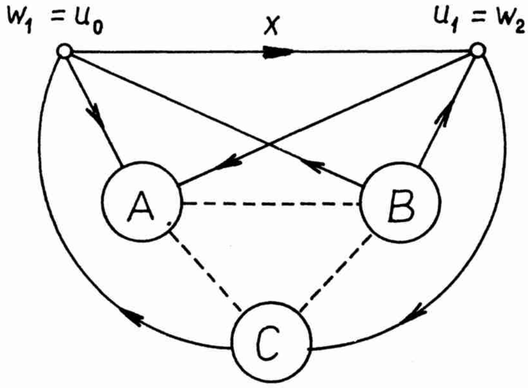

Fig. 5.

It can be easily seen (cf. Fig. 5) that if $A = \emptyset$ and $B \neq \emptyset$, then $d_T(u_0, b) > 2$ for any $b \in B$. Analogously if $A \neq \emptyset$ and $B = \emptyset$, then $d_T(a, u_1) > 2$ for any $a \in A$. If $A = \emptyset = B$, then either $|C| = 1$ and we have the tournament from Fig. 1, or $|C| > 1$ and T is reducible. Therefore we can assume

(6) $$A \neq \emptyset \neq B.$$

If $C = \emptyset$, then $d_T(u_1, u_0) > 2$ and therefore

(7) $$C \neq \emptyset.$$

One sees that for any line $u_1 a$, where $a \in A$, at least one of the following two assertions is true:

(i) $d_{T-u_1 a}(u_1, a) > 2$,

(ii) there is $b \in B$ with $d_{T-u_1 a}(u_1, b) > 2$.

As T is a tournament, there is at most one $a \in A$ with (i) but without (ii). If such a point a exists, then it is denoted by a_0 and we have immediately

(8) *for any* $a \in A - \{a_0\}$ *it is* $a_0 a \in E(T)$,

(9) *for any* $c \in C$ *it is* $a_0 c \in E(T)$,

(10) *there is at least one* $b \in B$ *with* $a_0 b \in E(T)$ (for otherwise $d_T(a_0, u_1) > 2$).

Thus for any $a \in A - \{a_0\}$ the assertion (ii) holds. Choose arbitrarily one of such points b and denote it by $f(a)$. In this way we have defined a mapping $f : A - \{a_0\} \to B$. Obviously

(11) *for any* $a \in A - \{a_0\}$ *we have* $af(a) \in E(T)$, *but* $a' f(a) \notin E(T)$ *whenever* $a' \in A - \{a\}$. *Especially* $f(a) \neq f(a')$ *whenever* $a \neq a'$.

Further we see that

(12) *for any* $f(a)$ *and any* $c \in C$ *it is* $f(a)\, c \in E(T)$.

Now we shall consider the lines bu_0 for $b \in B$. One can find out that there is at most one $b \in B$ with $d_{T-bu_0}(b, u_0) > 2$ and with $d_{T-bu_0}(a, u_0) \leqq 2$ for any $a \in A$. Denoting this point b (if any) by b_0, we see that

(13) *for any* $b \in B - \{b_0\}$ *it is* $bb_0 \in E(T)$,

(14) *for any* $c \in C$ *it is* $cb_0 \in E(T)$,

(15) *there is at least one* $a \in A$ *with* $ab_0 \in E(T)$ (for otherwise $d_T(u_0, b_0) > 2$).

Thus for any $b \in B - \{b_0\}$ there is $a \in A$ with $d_{T-bu_0}(a, u_0) > 2$. One of such points a can be chosen arbitrarily and denoted by $g(b)$. For this mapping $g : B - \{b_0\} \to A$, we have

(16) *for any* $b \in B - \{b_0\}$ *it is* $g(b)\, b \in E(T)$, *but* $g(b)\, b' \notin E(T)$ *whenever* $b' \in B - \{b\}$. *Especially,* $g(b) \neq g(b')$ *whenever* $b \neq b'$.

Further we have

(17) *for any* $g(b)$ *and any* $c \in C$ *it is* $cg(b) \in E(T)$.

Now we assert that

(18) *there is no point* $b \in B - \{b_0\}$ *with* $a_0 = g(b)$.

In the opposite case the assertion (17) contradicts (9) (see also (7)). Analogously we have

(19) *there is no point* $a \in A - \{a_0\}$ *with* $f(a) = b_0$.

Put $A - \{a_0\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ and $B - \{b_0\} = \{b_1, b_2, \ldots, b_s\}$. There are the following five possibilities (a) to (e):

(a) *Neither* a_0 *nor* b_0 *exist.* Then $r \geqq 1$ and $s \geqq 1$ (cf. (6)). Without loss of generality we can put $f(a_i) = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ (see (11)). Then by (16) we have $g(b_j) = a_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$, $r = s$ and there is no line $a_i b_j$ except for the case $i = j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, s)$.

(b) *The point* a_0 *exists but the point* b_0 *does not exist.* Then we can assume $a_0 b_1 \in E(T)$ (see (10)) and $f(a_i) = b_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ (cf. (11)). However, $g(b_1) \neq a_0$ by (18) and $g(b_1) \neq a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ by (16), i.e. $g(b_1)$ is not defined and therefore the case (b) is not possible.

(c) *The point* b_0 *exists but the point* a_0 *does not exist.* This case is not possible. The proof is similar to that of (b) and can be left to the reader.

(d) *The points* a_0 *and* b_0 *both exist and* $a_0 b_0 \in E(T)$. Then we can assume $f(a_i) = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ (see (11)). The case $s > r$ is not possible ($g(b_{r+1})$ would not exist by (16)). Hence $r = s$. Further, according to (11) and (16) we have $f(a_i) = b_i$, $g(b_i) = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ and there is no line $a_i b_j$ except for the case $i = j$ $(i, j = 0, 1, \ldots, s)$.

(e) *The points* a_0 *and* b_0 *both exist and* $a_0 b_0 \notin E(T)$. We can assume $a_0 b_1 \in E(T)$ (see (10)) and $a_1 b_0 \in E(T)$ (see (15)). Then by (11) we can assume $f(a_i) = b_i$ $(i = 2, 3, \ldots, r)$. According to (16) the case $s > r$ is impossible ($g(b_{r+1})$ would not exist). Thus $r = s$ and $g(b_i) = a_i$ $(i = 2, 3, \ldots, s)$. Then $f(a_1) = b_0$ (cf. (11)) which contradicts (19). Hence the case (e) is not possible.

Thus there are only two possible cases, namely (a) and (d). According to (9), (12), (14) and (17) we obtain the direction of every line connecting C with A or B. So the illustration in Fig. 6 can be used for both cases (a) and (d). (Note that there is no line $a_i b_j$ with $i \neq j$ $(i, j = 0, 1, \ldots, s)$.) Now we assert

(20) *if for some* i *and* j *both the lines* $a_i a_j$ *and* $b_i b_j$ *exist, then the line* $b_i a_j$ *is superfluous.*

This fact can be easily verified with the aid of Fig. 6. Indeed, for any $a \in A - \{a_0\}$ and $b \in B - \{b_0\}$ there are paths $b_i u_0 a$, $b u_0 a_j$, $a_i a_j$ and $b_i b_j$ not containing the line $b_i a_j$. Further we assert that

(21) *$T(A)$ and $T(B)$ are acyclic tournaments and moreover, if we put a_i for b_i ($i = 0, 1. \ldots, s$), then $T(A)$ and $T(B)$ appear to be mutually converse tournaments.*

Indeed, if $T(A)$ contains a cycle, then it contains also a cycle of length 3, say, $a_i a_j a_k a_i$. Then by (20) we have $b_j b_i \in E(T)$. However, then the line $b_j a_i$ appears to be superfluous (cf. Fig. 6). (Note that the paths $b_j b_i$ and $a_j a_k a_i$ exist.)

Now we are going to consider the cases (a) and (d).

The case (a). Consider the sink (see (21)), say, a_n in $T(A)$. Then b_n is the source in $T(B)$ and we see that T is reducible (put $a_n = u'$ and $b_n = u''$ in Theorem 1) which contradicts our assumption.

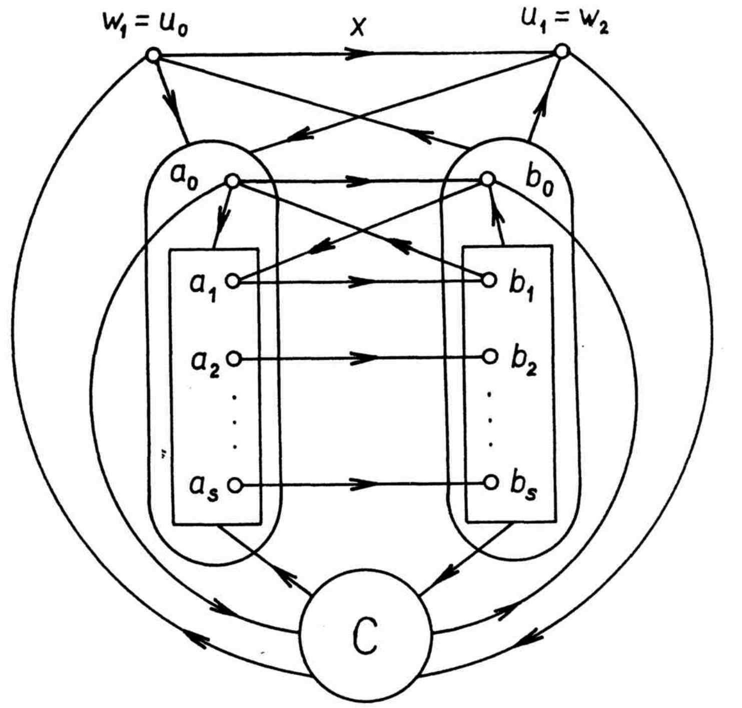

Fig. 6.

The case (d). At first let us consider the case $s = 0$. If $|C| = 1$, then we obtain the tournament in Fig. 2. If $|C| > 1$, then there are $c, c' \in C$ with $c'c \in E(T)$ and the line $a_0 c$ appears to be superfluous as can be easily seen. If $s \geqq 1$, then using the same proof as in the case (a) we can show that T is reducible.

This completes the proof of the case (I).

(II) $m = 2$ and $k = 0$.

Then T contains the line $y = u_2u_0$ and we have $d_{T-y}(u_1, u_0) > 2$ or $d_{T-y}(u_2, u_1) > 2$ (cf. Fig. 7). In the first case we have $bu_1 \in E(T)$ for any $b \in B$. If we put $x' = u_1u_2$, then $d_{T-x'}(u_1, u_2) > 2$ which contradicts our assumption on m (see (2) and (3)). The other possibility gives $u_1a \in E(T)$ for any $a \in A$. Then, however, $d_{T-x}(u_0, u_1) > 2$ which contradicts (2) and (3) again. So the case (II) is impossible.

(III) $m = 2$ and $k = 1$.

Like (II) this case appears to be impossible, too.

This completes the proof of Theorem 2.

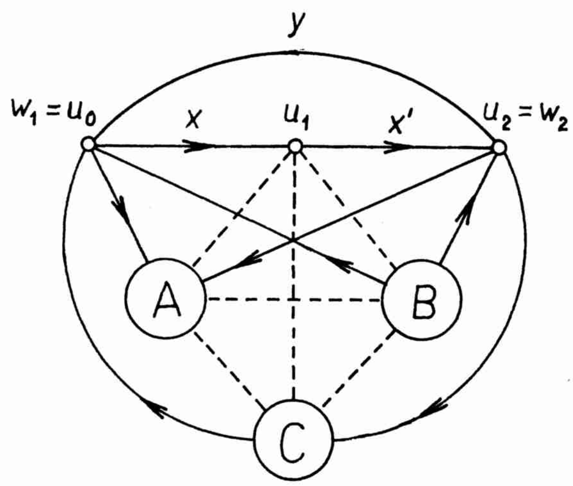

Fig. 7.

Corollary 2.1. *There is no e-critical tournament with diameter* 2 *and with even number of points.*

Corollary 2.2. *There is exactly one e-critical tournament with diameter* 2 *and with three points. For every odd* $p \geqq 5$, *there are exactly two e-critical tournaments with diameter* 2 *and with* p *points.*

Proof. It is sufficient to show that for any tournament $\bar{T}$ constructed by Theorem 1, there is exactly one tournament T from which $\bar{T}$ can be constructed. This follows, however, from the properties of the points u' and u''.

Corollary 2.3. *Every e-critical tournament with diameter* 2 *is v-critical.*

The converse of Corollary 2.3 is not true, however, This can be seen with the aid of the tournament T from Fig. 8. T has diameter 2. Since $d_{T-v_1}(v_6, v_3) > 2$,

$d_{T-v_2}(v_4, v_3) > 2$ and analogously (owing to the symmetry) for all other points, T is v-critical. However, $d(T - v_1v_2) = 2$, i.e., T is not e-critical.

Note that there is no v-critical tournament with four points. Using the tournament from Fig. 8, Theorem 1 and Corollaries 2.2 and 2.3, we have

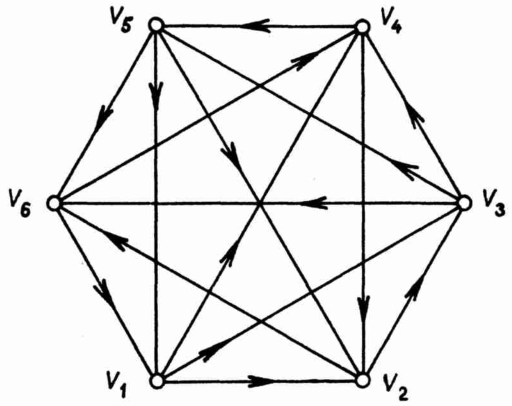

Fig. 8.

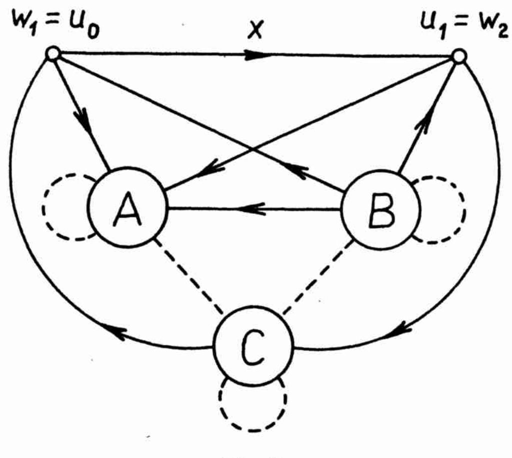

Fig. 9.

Theorem 3. *For $p = 3$ and any integer $p \geqq 5$, there exists a v-critical tournament with diameter 2 and with p points.*

All examples of e-critical tournaments that we have given up to here are with diameter 2. The following theorem justifies this fact.

Theorem 4. *There is no e-critical tournament with diameter $d \geqq 3$.*

Proof. Assume that there is an e-critical tournament T with a diameter $d \geqq 3$. Repeating the reasoning in the beginning of the proof of Theorem 2, we can obtain

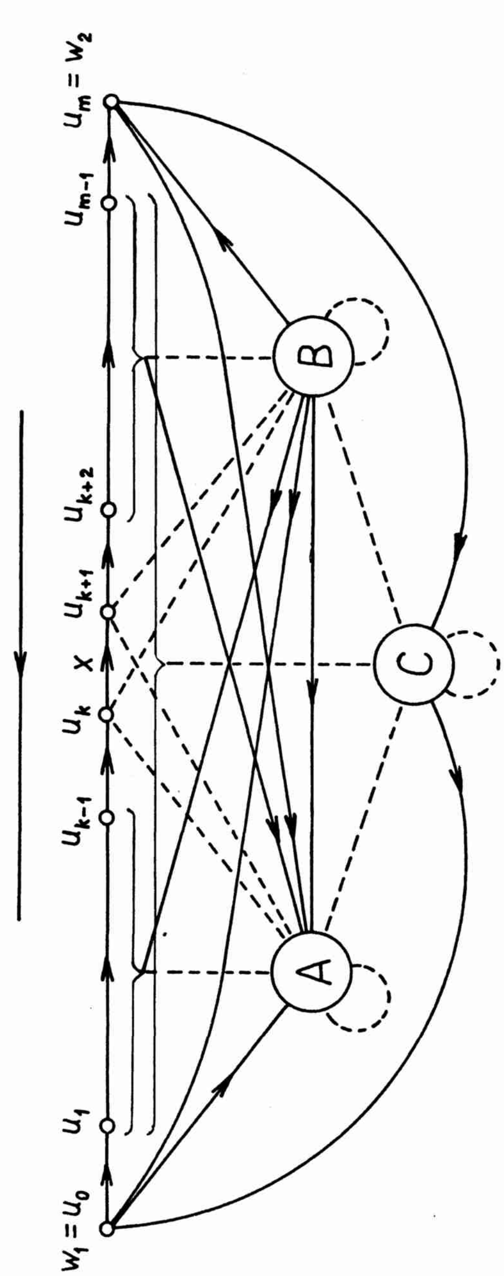

Fig. 10.

(1) to (5). As $d \geqq 3$, there is no line ab with $a \in A$ and $b \in B$. Now it is sufficient to consider the following two cases.

(I) $m = 1$ (cf. Fig. 9).

(The dashed lines in Fig. 9 represent lines with unknown direction.) It is clear that $C \neq \emptyset$ (for otherwise $d_T(u_1, u_0) = \infty$). If $A \cup B = \emptyset$, then either $|C| > 1$ and any line $c_1 c_2$ ($c_1, c_2 \in C$) is superfluous or $|C| = 1$ and $d(T) = 2$ which is impossible, too. Therefore $A \cup B \neq \emptyset$. If $A = \emptyset$, then any line bu_0 where $b \in B$ is superfluous as can be verified (cf. Fig. 9). If $B = \emptyset$, then any line $u_1 a$ where $a \in A$ is superfluous. Thus $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, and $C \neq \emptyset$. Then, however, any line ba, where $a \in A$ and $b \in B$, appears to be superfluous. Hence the case $m = 1$ is impossible.

(II) $m \geqq 2$.

As the path $u_0 u_1 \dots u_m$ is a shortest $w_1 - w_2$ path, there is no line $u_i u_j$ whenever $j - i \geqq 2$. According to (1), there is no line $u_i b$ with $i \leqq k - 1$, $b \in B$, and no line au_j with $a \in A$, $j \geqq k + 2$. These facts are illustrated by Fig. 10. (In this figure, any full line has priority over a dashed line, e.g. if $k = 0$, then all lines $u_k a$ with $a \in A$ exist.) If $A = \emptyset$, then $d_{T - u_0 u_1}(u_0, u_1) = \infty$, i.e., by (2) and (3) we have $m = 1$ which contradicts our assumption. Therefore $A \neq \emptyset$. Analogously $B \neq \emptyset$ (for otherwise it would be $d_{T - u_{m-1} u_m}(u_{m-1}, u_m) = \infty$).

Now we assert that any line $z = b_0 a_0$, where $a_0 \in A$ and $b_0 \in B$, is superfluous. As $d_{T-z}(b, a) \leqq 2$ for any $a \in A$ and any $b \in B$, it is sufficient to verify that

(i) for any path of the form $b_0 a_0 v$, where $v \notin A$, there is a $b_0 - v$ path of length not exceeding 2 and not containing the line z. This is clear (cf. Fig. 10) except the case $v = u_{k+1}$ with $k + 1 = m - 1$. In this case, however, there is no line $u_k w$ with $w \in B$ (existence of such line would contradict (1)). Thus $b_0 u_k u_{k+1}$ is the required path.

(ii) for any path of the form $v b_0 a_0$, where $v \notin B$ there is a $v - a_0$ path of length not exceeding 2 and not containing the line z. This can be easily verified (cf. Fig. 10) except the case $v = u_1 = u_k$. In this case, however, there is no line wu_2 with $w \in A$ (see (1)). So we can take the path $u_1 u_2 a_0$.

Hence neither the case $m \geqq 2$ is possible and the theorem is proved.

Thus we have the full characterization of all e-critical tournaments. Nevertheless, we have not succeeded in proving or disproving the existence of a v-critical tournament with diameter $d \geqq 3$. We conjecture that there exists an integer d_0 such that there is no v-critical tournament with diameter $d \geqq d_0$.

References

[1] *Harary, F.:* Graph theory. Addison-Wesley, Reading 1969.

[2] *Moon, J. W.:* Topics on tournaments. Holt, Rinehart and Winston, New York 1968.

[3] *Plesník, J.:* Critical graphs of given diameter. Acta Fac. R. N. Univ. Math. *30* (1975), 71–93.

Author's address: 816 31 Bratislava, Mlynská dolina, (Prírodovedecká fakulta UK).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

ON A CERTAIN DISTANCE BETWEEN ISOMORPHISM CLASSES OF GRAPHS

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Received June 24, 1974)

In [1] V. G. VIZING advanced the problem to find a criterion for recognizing whether two given graphs with n vertices each are isomorphic to subgraphs of the same graph with $n + 1$ vertices. Here we shall study this problem more generally.

Theorem 1. *Let n be a positive integer, k a non-negative integer. Let G_1 and G_2 be two graphs, each with n vertices. Then the following two assertions are equivalent:*

(1) *There exists a graph G with at most $n + k$ vertices having two induced subgraphs G'_1 and G'_2 such that $G'_1 \cong G_1$, $G'_2 \cong G_2$.*

(2) *There exist isomorphic graphs G''_1, G''_2, each with at least $n - k$ vertices, such that G''_1 is an induced subgraph of G_1 and G''_2 is an induced subgraph of G_2.*

Remark. The graphs mentioned in this theorem may be directed or undirected, with or without loops and multiple edges.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2). If two sets with n elements each are subsets of a set with at most $n + k$ elements, then their intersection has evidently at least $n - k$ elements. Thus the intersection of vertex sets of G'_1 and G'_2 has at least $n - k$ elements; this set induces a subgraph G'' of G and of both G'_1 and G'_2 and is isomorphic to a subgraph G''_1 of G_1 and to a subgraph G''_2 of G_2.

(2) $\Rightarrow$ (1). For the sake of simplicity assume G_1 and G_2 vertex-disjoint. (This is no substantial restriction, because we deal with isomorphism.) Let φ be an isomorphic mapping of G''_1 onto G''_2. We identify each vertex v of G''_1 with its image $\varphi(v)$. The graph obtained from G_1 and G_2 in this way will be denoted by G; evidently it has at most $n + k$ vertices. If we put $G'_1 = G_1$, $G'_2 = G_2$, the proof is complete.

On the system $\mathcal{S}_n$ of all isomorphism classes of undirected graphs with n vertices without loops and multiple edges we can introduce a distance δ defined so that if $\mathfrak{G}_1 \in \mathcal{S}_n$, $\mathfrak{G}_2 \in \mathcal{S}_n$ and $n + k$ is the least possible number of vertices of a graph containing induced subgraphs from the classes $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$, then $\delta(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) = k$. (An isomorphism class of graphs is the class of all graphs isomorphic to a given graph.)

Theorem 2. *Let $\mathcal{S}_n$ be the system of all isomorphism classes of undirected graphs with n vertices without loops and multiple edges. If $\mathfrak{G}_1 \in \mathcal{S}_n$, $\mathfrak{G}_2 \in \mathcal{S}_n$ and $n + k$ is the least possible number of vertices of a graph containing induced subgraphs from the classes $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$, then denote $\delta(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) = k$. The system $\mathcal{S}_n$ with the functional δ is a metric space.*

Proof. If $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2$, then the least possible number of vertices of a graph containing subgraphs from $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$ is n, because such a graph is an arbitrary graph from $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2$ and it has n vertices. Thus $\delta(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) = 0$. Now if $\delta(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) = 0$, there exists a graph with n vertices containing induced subgraphs from $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$. Each graph from a class of $\mathcal{S}_n$ has n vertices and a graph with n vertices contains exactly one induced subgraph with n vertices, namely itself. Therefore this graph belongs to both $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$ and thus $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2$. The equality $\delta(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) = \delta(\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_1)$ for any $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ follows from the definition of δ. Now let $\mathfrak{G}_1 \in S_n$, $\mathfrak{G}_2 \in S_n$, $\mathfrak{G}_3 \in S_n$ and let $\delta(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) = k_{12}$, $\delta(\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3) = k_{23}$. There exists a graph G_{12} with $n + k_{12}$ vertices containing induced subgraphs $G_1 \in \mathfrak{G}_1$, $G_2 \in \mathfrak{G}_2$ and a graph G_{23} with $n + k_{23}$ vertices containing induced subgraphs $H_2 \in \mathfrak{G}_2$, $H_3 \in \mathfrak{G}_3$. As both G_2 and H_2 belong to $\mathfrak{G}_2$, we have $G_2 \cong H_2$ and there exists an isomorphic mapping ψ of G_2 onto H_2. This is an isomorphic mapping from G_{12} into G_{23}. By identifying u with $\psi(u)$ for each vertex u of G_2 from G_{12} and G_{23} we obtain a graph G. This graph has $(n + k_{12}) + (n + k_{23}) - n = n + k_{12} + k_{23}$ vertices and contains $G_1 \in \mathfrak{G}_1$ and $H_3 \in \mathfrak{G}_3$ as induced subgraphs. This means

$$\delta(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_3) \leqq k_{12} + k_{23} = \delta(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) + \delta(\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3),$$

which is the triangle inequality for δ.

Theorem 3. *Let $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ be two isomorphism classes from $\mathcal{S}_n$. ($\mathcal{S}_n$ and δ have the same meaning as in Theorem 2.) Let $\overline{\mathfrak{G}}_1$ or $\overline{\mathfrak{G}}_2$ be the isomorphism class consisting of complements to the graphs of $\mathfrak{G}_1$ or $\mathfrak{G}_2$, respectively. Then*

$$\delta(\overline{\mathfrak{G}}_1, \overline{\mathfrak{G}}_2) = \delta(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2).$$

Proof. There exists a graph G with $n + \delta(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ vertices containing induced subgraphs $G_1 \in \mathfrak{G}_1$, $G_2 \in \mathfrak{G}_2$. Then the complement $\bar{G}$ of G contains induced subgraphs $\bar{G}_1, \bar{G}_2$ which are complements of G_1, G_2 respectively. It has also $n + \delta(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ vertices and $\bar{G}_1 \in \overline{\mathfrak{G}}_1$, $\bar{G}_2 \in \overline{\mathfrak{G}}_2$, thus $\delta(\overline{\mathfrak{G}}_1, \overline{\mathfrak{G}}_2) \leqq \delta(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$. On the other hand, interchanging $\mathfrak{G}_1, \overline{\mathfrak{G}}_1$ and $\mathfrak{G}_2, \overline{\mathfrak{G}}_2$ in our argument we obtain $\delta(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) \leqq \delta(\overline{\mathfrak{G}}_1, \overline{\mathfrak{G}}_2)$ and thus $\delta(\overline{\mathfrak{G}}_1, \overline{\mathfrak{G}}_2) = \delta(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$.

Consider a graph $\mathscr{D}_n$ whose vertex set is $\mathscr{S}_n$ and in which two vertices $\mathfrak{G}_1 \in \mathscr{S}_n$, $\mathfrak{G}_2 \in \mathscr{S}_n$ are adjacent if and only if $\delta(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) = 1$. It is easy to prove that the distance of vertices in $\mathscr{D}_n$ is δ. The diameter of $\mathscr{D}_n$ is $n - 1$; this is the distance between the isomorphism class consisting of complete graphs and the isomorphism class consisting of graphs without edges. The distance between any other pair of vertices is less than $n - 1$, because if a graph G_1 has edges and is not complete, it contains both kinds of two-vertex subgraphs and thus there exists its two-vertex subgraph which is isomorphic to a subgraph of an arbitrary other graph G_2. (All considered graphs have n vertices.) According to Theorem 1 then there exists a graph with at most $2n - 2$ vertices containing induced subgraphs isomorphic to G_1 and G_2.

We have restricted our consideration to undirected graphs without loops and multiple edges. Nevertheless, Theorem 1 and Theorem 2 remain valid even if we consider undirected graphs with loops and multiple edges or directed graphs. In Theorem 3 we must consider graphs without loops and multiple edges; otherwise we could not speak about complements. If instead of $\mathscr{S}_n$ we consider the set of all isomorphism classes of graphs which may contain loops, then for the diameter of the corresponding graph we obtain the value n instead of $n - 1$; this is the distance between the isomorphism class consisting of some graphs with n vertices without loops and the isomorphism class consisting of some graphs with n vertices with a loop at each vertex.

The investigation of $\mathscr{D}_n$ seems to be very difficult, because for greater values of n it is difficult even to determine its vertex set. According to Theorem 3 we can assert that there exists an automorphism of $\mathscr{D}_n$ which maps each isomorphism class $\mathfrak{G}$ onto the isomorphism class $\overline{\mathfrak{G}}$ consisting of the complements of graphs from $\mathfrak{G}$. It would be interesting to find the radius of $\mathscr{D}_n$.

Reference

[1] *В. Г. Визинг:* Некоторые нерещенные задачи в теории графов. Успехи мат. наук *23* (1968), 117—134.

Author's address: 461 17 Liberec 1, Komenského 2, (Katedra matematiky Vysoké školy strojní a textilní).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

FREDHOLM RADIUS OF A POTENTIAL THEORETIC OPERATOR FOR CONVEX SETS

IVAN NETUKA, Praha

(Received July 1, 1974)

Introduction. The use of the method of integral equations for solving boundary value problems for the Laplace equation dates back to the end of the nineteenth century. In that period, however, very strong smoothness restrictions on boundaries of domains in question were imposed. In 1919, J. RADON [10] studied the Dirichlet and the Neumann problems for plane domains bounded by curves of bounded rotation, not necessarily smooth. He investigated properties of the corresponding integral operator and evaluated its Fredholm radius (for the definition see below) in dependence on the character of angular points of the curve. General results for the plane case were obtained by J. KRÁL [2] 1965 (compare also [5] where further references are found). The Neumann problem with a weak characterization of the boundary values was investigated by J. Král [3] 1966 and JU. D. BURAGO, V. G. MAZJA [1] 1967 for general domains in high-dimensional Euclidean spaces.

In order to recall briefly some results of [3] we adopt the following notation. Suppose that M is an arbitrary open set with compact boundary $\partial M \neq \emptyset$ in the Euclidean m-space R^m $(m > 1)$. Given $x \in R^m$, $\theta \in \Gamma = \{z \in R^m; |z| = 1\}$ and $0 < r \leqq +\infty$, let $n_r^M(\theta, x)$ stand for the total number of all points $y \in H_\theta^r(x) = \{x + \varrho\theta;\ 0 < \varrho < r\}$ such that every neighborhood of y meets both $H_\theta^r(x) \cap M$ and $H_\theta^r(x) - M$ in a set of positive linear measure. (Such a point y is termed a hit of $H_\theta^r(x)$ on M.) The function $\theta \mapsto n_r^M(\theta, x)$ is a Baire function and one may put

$$v_r^M(x) = \int_\Gamma n_r^M(\theta, x)\, \mathrm{d}H_{m-1}(\theta)$$

where H_{m-1} denotes the $(m-1)$-dimensional Hausdorff measure. We shall denote

$$V_0^M = \lim_{r \to 0+} \sup_{y \in \partial M} v_r^M(y)\,.$$

Let us fix now an open set G with compact boundary $B \neq \emptyset$ and denote by $C'(B)$ the Banach space of all finite signed Borel measures with support in B. With each $\mu \in C'(B)$ we associate its potential

$$U\mu(x) = \int_B p(x - y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

corresponding to the kernel $p(z) = |z|^{2-m}/(m - 2)$ or $p(z) = \log(1/|z|)$ according to $m > 2$ or $m = 2$ and we form the distribution $N_G U\mu$ (termed the generalized normal derivative of $U\mu$) over the space $\mathscr{D}$ of all infinitely differentiable functions φ with compact support in R^m defining

$$\langle \varphi, N_G U\mu \rangle = \int_G \operatorname{grad} \varphi(x) \,.\, \operatorname{grad} U\mu(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

It follows from the results of [3], [4] that

$$V_0^G < \infty \tag{1}$$

is a necessary and sufficient condition for the representability of $N_G U\mu$ by means of an element of $C'(B)$ for any $\mu \in C'(B)$. In connection with the applicability of the Riesz-Schauder theory to the operator equation

$$N_G U\mu = \nu \tag{2}$$

over $C'(B)$ (under the hypothesis (1)) it is useful to write (2) in the form

$$[\tfrac{1}{2}AI' + (N_G U - \tfrac{1}{2}AI')]\,\mu = \nu$$

(where $A = H_{m-1}(\Gamma)$ and I' stands for the identity operator on $C'(B)$) and consider the quantity

$$\omega(N_G U - \tfrac{1}{2}AI') = \inf_Q \|N_G U - \tfrac{1}{2}AI' - Q\| \tag{3}$$

where Q varies over the space of all compact operators acting on $C'(B)$. Note that the reciprocal value of the quantity (3) is usually called the Fredholm radius of the operator $N_G U - \frac{1}{2}AI'$ and that the inequality

$$\omega(N_G U - \tfrac{1}{2}AI') < \tfrac{1}{2}A$$

permits one to apply the Fredholm theorems to the equation (2). The quantity (3) is evaluated in [3] in terms of $v_r^G(x)$ and the m-dimensional density $d_G(x)$ of the set G at x and also the relations between analytical properties of the operator $N_G U - \frac{1}{2}AI'$ and geometrical properties of G are studied there. If, in particular, the interior of the closure $\bar{G}$ of G coincides with G, then

$$\omega(N_G U - \tfrac{1}{2}AI') = V_0^G$$

(see [3], Lemma 3.4, Theorem 3.6 and [8], Lemma 30, Theorems 27, 29).

The main objective of this note is to evaluate $\omega(N_G U - \frac{1}{2}AI')$ in terms of d_G for convex G, which shows that boundary value problems for convex sets can always be treated by means of the Fredholm method. This follows from the following

Theorem. *Let $G \subset R^m$ be an open convex set with compact boundary $B \neq \emptyset$. Then there is $y_0 \in B$ such that*

$$\omega(N_G U - \tfrac{1}{2}AI') = \sup_{y \in B} A(\tfrac{1}{2} - d_G(y)) = A(\tfrac{1}{2} - d_G(y_0)) < \tfrac{1}{2}A . \tag{4}$$

Corollary. *The operator $N_G U - \frac{1}{2}AI'$ is compact if and only if $d_G(y) = \frac{1}{2}$ for any $y \in B$.*

The formula (4) represents an m-dimensional analog for convex sets of Radon's result on the Fredholm radius of the corresponding operator for sets bounded by curves of bounded rotation (cf. also [11], Chap. V, No. 91).

The relations between convexity of a set and positiveness of an operator of the generalized double layer potential is also studied and sets for which the equality $v_\infty^M = Ad_M$ holds on ∂M are characterized (see Theorems 11 and 14).

1. Notation. For an open set $M \subset R^m$ and $z \in R^m$ we denote

$$Q^M(z) = \{\theta \in \Gamma;\ H_\theta^\infty(z) \cap M \neq \emptyset\}$$

and define

$$a^M(z) = H_{m-1}(Q^m(z)) .$$

In what follows, G will be a set satisfying the hypotheses of the above theorem. It is clear that it suffices to prove (4) under the additional assumption that G contains the origin. Hence we shall suppose that $0 \in G$ and for $\varrho > 0$ we set

$$G_\varrho = \{\varrho y;\ y \in G\} .$$

2. Lemma. *Let $0 < \sigma \leqq \tau \leqq 1$ and $x \in R^m$. Then*

$$a^{G_\tau}(x) \geqq a^{G_\sigma}(x) , \quad \lim_{\varrho \to 1-} a^{G_\varrho}(x) = a^G(x) .$$

Proof follows easily from the relations $Q^{G_\tau}(x) \supset Q^{G_\sigma}(x)$ and

$$\bigcup_{\varrho \in (0,1)} Q^{G_\varrho}(x) = Q^G(x) .$$

3. Lemma. *If $\varrho \in (0, 1)$, then the function a^{G_ϱ} is continuous on $R^m - \overline{G_\varrho}$.*

Proof. Since G_ϱ is convex, we have

$$a^{G_\varrho}(x) = \tfrac{1}{2}v_\infty^{G_\varrho}(x) \leqq \tfrac{1}{2}A , \quad x \in R^m - \overline{G_\varrho} .$$

Using formula (2.16) of Lemma 2.12 in [3], we obtain

$$a^{G_\varrho}(x) = \frac{1}{2}\int_{\partial G_\varrho} \frac{|n(y).(y-x)|}{|y-x|^m}\, \mathrm{d}H_{m-1}(y)\,, \quad x \in R^m - \overline{G_\varrho}\,,$$

which shows that the function a^{G_ϱ} is continuous on $R^m - \overline{G_\varrho}$. (We have denoted by $n(y)$ the Federer normal of G_ϱ at y.)

4. Proposition. *a^G is a lower semicontinuous function on R^m.*

Proof. It follows from Lemmas 2, 3 that the restriction of a^G to $R^m - G$ is a lower semicontinuous function. Since we have for any $z \in G$ and $x \in R^m$

$$a^G(x) \leqq A = a^G(z)\,,$$

we see that a^G is lower semicontinuous on R^m.

5. Corollary. *d_G is a lower semicontinuous function on B and there is $y_0 \in B$ such that*

$$\inf_{y \in B} d_G(y) = d(y_0) > 0\,.$$

Proof. Proposition 2.6 and Lemma 2.7 in [3] imply the equality

$$a^G(x) = A\, d_G(x)\,, \quad x \in B\,. \tag{5}$$

By Proposition 4, d_G is a lower semicontinuous function on B and, consequently, there is $y_0 \in B$ such that $\inf_{y \in B} d_G(y) = d_G(y_0)$. By Lemma 2,

$$d_G(y_0) \geqq A^{-1}\, a^{G_\sigma}(y_0) > 0$$

for any $\sigma \in (0, 1)$.

6. Lemma. *For any $\varepsilon > 0$ there is $\varrho > 1$ such that for each $z \in B$ the inequality*

$$a^G(\varrho z) \geqq A \inf_{y \in B} d_G(y) - \varepsilon \tag{6}$$

holds.

Proof. Suppose that the assertion of the lemma is false. Then there is an $\varepsilon > 0$ and points $y_n \in B$ such that for $z_n = (1 + 1/n)\, y_n$ we have

$$a^G(z_n) < A \inf_{y \in B} d_G(y) - \varepsilon\,.$$

Since the set B is compact we may suppose $y_n \to y_0 \in B$. Then $z_n \to y_0$ and

$$\liminf_{n \to \infty} a^G(z_n) \leqq A \inf_{y \in B} d_G(y) - \varepsilon \leqq A\, d_G(y_0) - \varepsilon\,,$$

which contradicts the fact that a^G is lower semicontinuous at y_0 (see also (5)).

7. Proof of the theorem. We know (see Lemma 3.4, Theorem 3.6 in [3] and Theorems 27,29 and Lemma 30 in [8]) that

$$\omega(N_G U - \tfrac{1}{2}AI') = \lim_{r\to 0+} \sup_{y\in B} v_r^G(y) =$$

$$= \lim_{r\to 0+} \sup_{y\in B} [A|\tfrac{1}{2} - d_G(y)| + v_r^G(y)] \geqq \sup_{y\in B} A(\tfrac{1}{2} - d_G(y)) .$$

Hence in order to prove (4) it is sufficient to establish only the inequality

$$\sup_{y\in B} A(\tfrac{1}{2} - d_G(y)) \geqq \lim_{r\to 0+} \sup_{y\in B} v_r^G(y) \tag{7}$$

because the rest follows by Corollary 5.

Fix $\varepsilon > 0$ and choose $\varrho > 1$ by Lemma 6. Since ∂G_ϱ and $\bar{G}$ are disjoint compact sets we can find $r > 0$ such that

$$\operatorname{dist}(y, \bar{G}) \geqq r\varrho$$

for any $y \in \partial G_\varrho$. Consider now $z \in B$. The set G_ϱ being convex, there is a closed half-space P such that $\varrho z \in \partial P$ and $G_\varrho \subset P$. If $\theta \in \Gamma$ is chosen in such a way that $H_\theta^\infty(\varrho z) \cap \cap P = \emptyset$, then $H_\theta^\infty(\varrho z) \cap G_\varrho = \emptyset$. Further, if $\theta \in \Gamma$ and $H_\theta^\infty(\varrho z) \cap G \neq \emptyset$, then $H_\theta^{\varrho r}(\varrho z) \subset G_\varrho$. Hence for these θ's there is no hit of $H_\theta^{\varrho r}(\varrho z)$ on G_ϱ and we conclude that

$$v_{\varrho r}^{G_\varrho}(\varrho z) \leqq \tfrac{1}{2}A - a^G(\varrho z) . \tag{8}$$

Since obviously $v_{\varrho r}^{G_\varrho}(\varrho z) = v_r^G(z)$, (8) and (6) yield

$$v_r^G(z) \leqq \tfrac{1}{2}A - a^G(\varrho z) \leqq \tfrac{1}{2}A - A \inf_{y\in B} d_G(y) + \varepsilon .$$

Consequently,

$$\lim_{r\to 0+} \sup_{y\in B} v_r^G(y) \leqq \sup_{y\in B} v_r^G(y) \leqq \sup_{y\in B} A(\tfrac{1}{2} - d_G(y)) + \varepsilon$$

which proves (7).

The proof of the theorem is complete.

8. Notation. For $x \in R^m$ and $r > 0$ we denote $\Omega_r(x) = \{z \in R^m; |x - z| < r\}$. In the rest of this note we shall suppose that M is a non-empty open set with compact boundary,

$$\partial M = \partial(R^m - \bar{M}) \tag{9}$$

and

$$V_0^M < \infty . \tag{10}$$

Note that by [4], remark on p. 596, (10) implies

$$\sup_{y \in \partial M} v_\infty^M(y) < \infty .$$

$\mathscr{B}$ will stand for the Banach space of all bounded Baire functions on ∂M equipped with the usual supremum norm. Fix $z \in R^m$ and $\theta \in \Gamma$. As in [3] we put for $t > 0$

$$s(t; z, \theta) = \sigma \ (= \pm 1),$$

if there is $\delta > 0$ such that

$$z + (t + \sigma\tau)\,\theta \in R^m - M\,, \quad z + (t - \sigma\tau)\,\theta \in M$$

for a.e. $\tau \in (0, \delta)$; otherwise we set $s(t; z, \theta) = 0$. Of course, if $s(t; z, \theta) \neq 0$, then $z + t\theta$ is a hit of $H_\theta^\infty(z)$ on M. Consequently, we can define as in Lemma 2.5 of [3] for any $f \in \mathscr{B}$

$$Wf(z) = \int_\Gamma \{\sum_{t>0} f(z + t\theta)\, s(t; z, \theta)\}\, \mathrm{d}H_{m-1}(\theta)\,, \quad z \in \partial M\,.$$

It turns out that the function $z \mapsto Wf(z)$ is a bounded Baire function and

$$W : f \mapsto Wf$$

is a bounded linear operator acting on $\mathscr{B}$ (see [3], Sec. 2 and [7], Sec. 7). It should be noted here that Wf is a generalized double layer potential – see Sec. 2 in [3].

Let us finally denote by f_0 the function identically equal to 1 on ∂M and recall that, by Lemma 2.2 in [3],

(11) $$v_\infty^M(z) = \sup \{|W g(z)|;\ g \in \mathscr{B},\ |g| \leqq 1\}$$

and

(12) $$A\, d_M(z) = Wf_0(z)$$

provided M is bounded (see Proposition 2.6 and Lemma 2.7 in [3]).

9. Lemma. *Let $D \subset R^m$ be an open bounded set, $z \in R^m$ and let H_1 stand for the linear measure. For $\theta \in \Gamma$ define*

$$g(\theta) = H_1(H_\theta^\infty(z) \cap D)\,.$$

Then g is a lower semicontinuous function on Γ.

Proof. Fix $\theta_0 \in \Gamma$ and $c < g(\theta_0)$. There is a finite number of disjoint closed segments contained in $H_{\theta_0}^\infty(z) \cap D$ such that the sum of lengths of these segments exceeds c. Obviously, for any $\theta \in \Gamma$ belonging to a suitably chosen neighborhood of θ_0 we have $g(\theta) > c$.

10. Lemma. *Suppose that the set M is not convex. Then there is $z \in \partial M$ with $d_M(z) = \frac{1}{2}$, a Borel set $\Gamma_z \subset \Gamma$, $H_{m-1}(\Gamma_z) > 0$, and a strictly positive real function φ defined on Γ_z such that*

$$M_z = \{z + \varphi(\theta)\,\theta;\ \theta \in \Gamma_z\}$$

is a Borel subset of ∂M and $s(\varphi(\theta); z, \theta) = -1$ for any $\theta \in \Gamma_z$.

Proof. Since M is not convex, (9) holds and the set

$$\{x \in \partial M;\ d_M(x) = \tfrac{1}{2}\}$$

is dense in ∂M (see Lemma 14 in [8]), we can find $z \in \partial M$ with $d_M(z) = \frac{1}{2}$, $\theta_1 \in \Gamma$, $0 < t^0 < t^1$ and $r > 0$ such that

$$\Omega_r(z + t^0\theta_1) \subset R^m - \overline{M}\,, \quad \Omega_r(z + t^1\theta_1) \subset M\,.$$

According to the hypothesis $v_\infty^M(z) < \infty$ so that

$$n_\infty^M(\theta, z) < \infty \tag{13}$$

for H_{m-1} — a.e. $\theta \in \Gamma$. Let $\Gamma_2 \subset \Gamma$ be a Borel set such that $H_{m-1}(\Gamma_2) = 0$ and that for each $\theta \in \Gamma - \Gamma_2$ the relation (13) holds. Observe that for these θ's the set $H_\theta^\infty(z) \cap \cap M$ is H_1-equivalent to a finite union of disjoint open segments. Denote

$$\Gamma_1 = \{\theta \in \Gamma;\ H_\theta^\infty(z) \cap \Omega_r(z + t^1\theta_1) \neq \emptyset\}$$

and put $\Gamma_z = \Gamma_1 - \Gamma_2$. Obviously, Γ_z is a Borel set and $H_{m-1}(\Gamma_z) > 0$.

Let us now fix $\theta \in \Gamma_z$ and put

$$\varphi(\theta) = \sup\,\{t > t^0;\ \{z + \varrho\theta;\ \varrho \in (t^0, t)\} \cap M = \emptyset\}\,.$$

Of course, $t^0 < \varphi(\theta) < t^1$ and one easily verifies that $z + \varphi(\theta)\,\theta$ is a hit of $H_\theta^\infty(z)$ on M and there is $\delta > 0$ such that

$$H_1(\{z + t\theta;\ \varphi(\theta) < t < t + \delta\} - M) = 0\,.$$

Consequently, $s(\varphi(\theta); z, \theta) = -1$ for each $\theta \in \Gamma_z$.

We intend to show that φ is a Baire function on Γ_z. The proof of this fact is patterned after Mařík's proof of Lemmas 27, 28 in [6].

For $0 < a < b$ we denote $\Omega_{a,b} = \Omega_b(z) - \overline{\Omega_a(z)}$ and

$$N_{a,b} = \{\theta \in \Gamma_z;\ H_1(H_\theta^\infty(z) \cap M \cap \Omega_{a,b}) = b - a\}\,.$$

It follows from Lemma 9 (applied to $D = M \cap \Omega_{a,b}$) that $N_{a,b}$ is a Borel set. One easily verifies that for any $c \in R^1$,

$$\{\theta \in \Gamma_z;\ \varphi(\theta) < c\} = \bigcup_{a,b} N_{a,b}$$

where a, b are rational, $t^0 < a < b < c$. We see that φ is a Baire function and the function ψ on $\Gamma_z \times R^1$ defined by

$$\psi([\theta, t]) = |\varphi(\theta) - t|$$

is consequently a Baire function on $\Gamma_z \times R^1$. Consider now the mapping

$$\Phi : \Gamma \times (0, \infty) \to R^m - \{z\}$$

defined by

$$\Phi([\theta, t]) = z + t\theta .$$

Then Φ is a homeomorphism and $\Phi(\psi_{-1}(0))$ is thus a Borel subset of R^m. Putting $M_z = \Phi(\psi_{-1}(0))$, we check easily that z, Γ_z, φ, M_z have the desired properties.

11. Theorem. *The following conditions are equivalent to each other:*

(i) *M is convex.*

(ii) *The operator W is positive.*

Proof. If M is convex, then evidently $s(t; z, \theta) \geqq 0$ for any $z \in \partial M$, $t > 0$, $\theta \in \Gamma$. Consequently, $Wf \geqq 0$ on ∂M provided $f \in \mathscr{B}$, $f \geqq 0$ on ∂M.

Let M be non-convex and let z, M_z, Γ_z, φ have the same meaning as in Lemma 10. Denote by f_1 the function equal to 1 on M_z and zero elsewhere on ∂M. Then, by Lemma 10, $f_1 \in \mathscr{B}$ and since $H_{m-1}(\Gamma_z) > 0$,

$$(14)\qquad Wf_1(z) = \int_{\Gamma_z} f_1(z + \varphi(\theta)\,\theta)\, s(\varphi(\theta); z, \theta)\, \mathrm{d}H_{m-1}(\theta) = -H_{m-1}(\Gamma_z) < 0$$

and we conclude that W is not a positive operator.

The proof of the theorem is complete.

12. Remark. Note that if M is not convex and f_1 has the same meaning as above, then Wf_1 is strictly negative on a set of positive H_{m-1} measure. Indeed, observing that $\Omega_{t^0}(z) \cap \overline{M_z} = \emptyset$, we assert that Wf_1 is continuous on $\Omega_{t^0}(z)$ (cf. Lemma 2.12 in [3]) and (14) implies that Wf_1 is strictly negative on a ball Ω with centre z. $H_{m-1}(\Omega \cap \partial M) > 0$ follows from the proof of Lemma 14 in [8] (see inequality (45)).

13. Lemma. *Suppose that M is bounded and non-convex. Then there is $z \in \partial M$ such that*

$$(15)\qquad v_\infty^M(z) > A\, d_M(z) = \tfrac{1}{2}A .$$

Proof. Let us take z as in Lemma 10 and let f_1 have the same meaning as above. We have $d_M(z) = \frac{1}{2}$ and $|f_0 - 2f_1| \leqq 1$ (recall that $f_0 \equiv 1$ on ∂M). Since $Wf_1(z) < 0$ (see (14)) we conclude

$$Wf_0(z) < W(f_0 - 2f_1)(z) \leqq \sup\{|Wg(z)|;\ g \in \mathscr{B},\ |g| \leqq 1\} .$$

This yields (15) by (11) and (12).

14. Theorem. *The following conditions are equivalent.*

(i) $v_\infty^M(z) = A\, d_M(z)$ *for any* $z \in \partial M$.

(ii) *Either* M *is convex or* $M' = R^m - \overline{M}$ *is convex and* $d_M(z) = \frac{1}{2}$ *for any* $z \in \partial M$.

Proof. Let us start with the following remark. Since both M and M' are non-void, we have $v_\infty^M(z) > 0$ for any $z \in \partial M$. Consequently, if either (i) holds or $d_M = \frac{1}{2}$ on ∂M, then the m-dimensional Lebesgue measure of ∂M is zero. Indeed, in the other case, by the well-known density theorem, there would be at least one $z \in \partial M$ with $d_M(z) = 0$. It follows that

$$d_{M'}(z) = 1 - d_M(z)\,, \quad v_\infty^{M'}(z) = v_\infty^M(z)\,, \quad z \in \partial M\,, \tag{16}$$

by Proposition 1.6 in [3].

First we shall suppose that M is convex. Then, by Theorem 11, W is a positive operator. Consequently,

$$Wf_0(z) = \sup\{|Wg(z)|;\ g \in \mathscr{B},\ |g| \leqq 1\}$$

and (i) follows by (11) and (12).

Let M' be convex and $d_M(z) = \frac{1}{2}$ whenever $z \in \partial M = \partial M'$. We have just proved that

$$v_\infty^{M'}(z) = A\, d_{M'}(z)\,, \quad z \in \partial M'\,,$$

and (i) is a consequence of (16). This completes the proof of the implication (ii) $\Rightarrow$ (i).

Suppose now that (i) is true. If M is bounded, then M is necessarily convex, since otherwise (i) would be violated in virtue of Lemma 13. It remains to consider the case that M is unbounded. In this case M' is bounded and, if non-convex,

$$v_\infty^M(z) = v_\infty^{M'}(z) > A\, d_{M'}(z) = \tfrac{1}{2}A = A\, d_M(z)$$

for a suitable $z \in \partial M' = \partial M$ – a contradiction. We conclude that M' is convex. Since we have already established (ii) $\Rightarrow$ (i) we have by (16)

$$v_\infty^{M'}(z) = A\, d_{M'}(z) = A(1 - d_M(z))\,, \quad z \in \partial M\,,$$

and, by the hypothesis,

$$v_\infty^M(z) = A\, d_M(z)\,, \quad z \in \partial M\,.$$

Using (16) once more, we obtain

$$A\, d_M(z) = A(1 - d_M(z))\,,$$

which yields $d_M(z) = \frac{1}{2}$ for any $z \in \partial M$.

The proof of the theorem is complete.

15. Remark. Let us note here one easy corollary of the theorem stated in the introduction and Propositions 17 and 25 in [9]: Let $G \neq \emptyset$ be an arbitrary open bounded convex set. If for $z \in G$, μ_z stands for the harmonic measure with respect to G and z, then μ_z and the restriction of H_{m-1} to ∂G are mutually absolutely continuous measures.

References

[1] *Ju. D. Burago* and *V. G. Mazja:* Some problems in potential theory and function theory for regions with irregular boundaries (Russian), Zapiski nauč. sem. Leningrad otd. MIAN *3* (1967).

[2] *J. Král:* The Fredholm radius of an operator in potential theory, Czechoslovak Math. J. *90 (15)* (1965), 454—473, 565—588.

[3] *J. Král:* The Fredholm method in potential theory, Trans. Amer. Math. Soc. *125* (1966), 511—547.

[4] *J. Král:* Flows of heat and the Fourier problem, Czechoslovak Math. J. *20* (*95*) (1970), 556—598.

[5] *J. Král, I. Netuka* and *J. Veselý:* Potential theory II (Czech), Lecture Note SPN, Praha, 1972.

[6] *J. Mařík:* The surface integral, Czechoslovak. Math. J. *6* (*81*) (1956), 522—558.

[7] *I. Netuka:* Generalized Robin problem in potential theory, Czechoslovak Math. J. *22* (*97*) (1972), 312—324.

[8] *I. Netuka:* An operator connected with the third boundary value problem in potential theory, Czechoslovak Math. J. *22* (*97*) (1972), 462—489.

[9] *I. Netuka:* Double layer potentials and the Dirichlet problem, Czechoslovak Math. J. *24* (*99*) (1974), 59—73.

[10] *J. Radon:* Über die Randwertaufgaben beim logaritmischen Potential, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien (2a) *128* (1919), 1123—1167.

[11] *F. Riesz* and *B. Sz. Nagy:* Leçons d'analyse fonctionnelle, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.

Author's address: 118 00 Praha 1, Malostranské n. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

REPER SÍTĚ NA PLOŠE V TROJROZMĚRNÉM AFINNÍM PROSTORU

PAVLA BAJÁKOVÁ, Brno

(Došlo dne 1. října 1974)

1. Studium křivek na ploše v trojrozměrném prostoru patří k základním tématům diferenciální geometrie. R. N. ŠČERBAKOV k této problematice přistupuje z nového hlediska. Ščerbakovova reperu lze s výhodou použít ke studiu libovolné konjugované sítě. Při řešení některých geometrických problémů se však ukázala potřeba užívat reperu, který je invariantně připojen nikoliv ke konjugované, ale k obecné síti křivek na ploše. Vhodnou modifikací Ščerbakovova postupu sestrojil takový reper v trojrozměrném projektivním prostoru I. KOLÁŘ [1]. Podobnými úvahami se v případě ekviafinního prostoru zabývala L. MARKOVÁ [2].

V tomto článku je užitím Cartanových metod konstruován kanonický reper obecné sítě křivek na ploše v trojrozměrném afinním prostoru.

Reper v trojrozměrném afinním prostoru A^3 je tvořen bodem M s polohovým vektorem $\boldsymbol{M}$ a třemi lineárně nezávislými vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Obecný pohyblivý reper R závisí na třech souřadnicích bodu M a devíti souřadnicích vektorů $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, tedy na dvanácti parametrech. Relativní komponenty ω^i a ω_i^k pohyblivého reperu jsou určeny rovnicemi

$$(1) \qquad d\boldsymbol{M} = \omega^i \mathbf{e}_i\,, \quad d\mathbf{e}_i = \omega_i^k \mathbf{e}_k\,; \quad i, k = 1, 2, 3\,.$$

V nich ω^i, ω_i^k jsou Pfaffovy formy v diferenciálech parametrů, na nichž závisí reper R. Splňují rovnice struktury

$$(2) \qquad d\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i\,, \quad d\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k\,; \quad i, j, k = 1, 2, 3\,.$$

V prostoru A^3 uvažujme libovolnou nerozvinutelnou plochu opsanou bodem P s polohovým vektorem $\boldsymbol{P}$, kde $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(u, v)$ je vektorová funkce dvou argumentů. Ke každému bodu P přiřadíme pohyblivý reper tak, že jeho vrchol M splyne s bodem P. Tento reper R_9 závisí na dvou hlavních parametrech u, v a devíti parametrech vedlejších. Jako obvykle označme δ diferencování takové, že $\delta u = 0$, $\delta v = 0$. Tedy

$$\delta \mathbf{M} = e^i \mathbf{e}_i\,, \quad \delta \mathbf{e}_i = e_i^k \mathbf{e}_k\,; \quad i, k = 1, 2, 3\,.$$

Při uvedené volbě reperu jsou formy ω^1, ω^2, ω^3 hlavní.

Reper R_9 budeme nyní volit tak, aby vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ležely v tečné rovině plochy $\mathbf{P}(u, v)$. Tento požadavek je vyjádřen rovnicí

$$\omega^3 = 0\,. \tag{3}$$

Vnějším diferencováním této rovnice a užitím Cartanova lemmatu dostaneme

$$\omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2\,, \quad \omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2\,, \tag{4}$$

z čehož je vidět, že Pfaffovy formy ω_1^3, ω_2^3 jsou hlavní. Získali jsme tak reper R_7.

Prodloužením rovnic (4) obdržíme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}a - a(2\omega_1^1 - \omega_3^3) - 2b\omega_1^2 &= m\omega^1 + n\omega^2\,, \\ \mathrm{d}b - b(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3) - a\omega_2^1 - c\omega_1^2 &= n\omega^1 + p\omega^2\,, \\ \mathrm{d}c - c(2\omega_2^2 - \omega_3^3) - 2b\omega_2^1 &= p\omega^1 + q\omega^2\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Při změně vedlejších parametrů platí

$$\begin{aligned} \delta a &= a(2e_1^1 - e_3^3) + 2be_1^2\,, \\ \delta b &= b(e_1^1 + e_2^2 - e_3^3) + ae_2^1 + ce_1^2\,, \\ \delta c &= c(2e_2^2 - e_3^3) + 2be_2^1\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Z rovnic (6) je především vidět, že volba $a = b = c = 0$ má invariantní charakter. Body, v nichž by byly splněny rovnice $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, vyloučíme z naší úvahy.

2. Na ploše mějme libovolnou síť $\mathbf{S} = \{S_1, S_2\}$, kde S_1, S_2 jsou vrstvy sítě $\mathbf{S}$. Předpokládejme, že síť neobsahuje žádnou vrstvu asymptotických křivek. Uvažujeme-li okolí jistého bodu plochy, bude C_i $(i = 1, 2)$ značit křivku vrstvy S_i procházející tímto bodem. Ke každému bodu sítě $\mathbf{S}$ přiřadíme reper R_7, který budeme specialisovat tak, aby přímka $(M, \mathbf{e}_1)$, resp. $(M, \mathbf{e}_2)$ byla tečnou křivky jdoucí bodem M a náležící vrstvě S_1, resp. S_2 sítě $\mathbf{S}$. Přímky $(M, \mathbf{e}_1)$, $(M, \mathbf{e}_2)$ budou nyní pevné, takže

$$[\delta \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] = 0\,, \quad [\delta \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2] = 0\,.$$

Odtud plyne $e_1^2 = e_2^1 = 0$ a tedy Pfaffovy formy ω_1^2, ω_2^1 jsou hlavní. Položíme-li

$$\omega_1^2 = \lambda\omega^1 + \mu\omega^2\,, \quad \omega_2^1 = \nu\omega^1 + \varrho\omega^2\,, \tag{7}$$

dostaneme reper R_5. Vzhledem k tomuto reperu má síť S diferenciální rovnici

$$\omega^1\omega^2 = 0\,.$$

Budeme ji proto nazývat *parametrickou sítí.*

V dalším budeme předpokládat, že parametrická síť S není konjugovaná. Tento předpoklad je vyjádřen vztahem $b \neq 0$, jak je vidět z rovnice

$$a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2 = 0$$

asymptotických křivek na ploše $\mathbf{P}(u, v)$.

Prodloužením rovnic (7) dostaneme

$$\begin{aligned} &d\lambda + \lambda(\omega_2^2 - 2\omega_1^1) - \mu\omega_1^2 + a\omega_3^2 = e\omega^1 + f\omega^2\,,\\ &d\mu - \mu\omega_1^1 - \lambda\omega_2^1 + b\omega_3^2 \quad = f\omega^1 + g\omega^2\,,\\ &d\nu - \nu\omega_2^2 - \varrho\omega_1^2 + b\omega_3^1 \quad = h\omega^1 + k\omega^2\,,\\ &d\varrho + \varrho(\omega_1^1 - 2\omega_2^2) - \nu\omega_2^1 + c\omega_3^1 = k\omega^1 + l\omega^2\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Při změně vedlejších parametrů tedy platí

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= \lambda(2e_1^1 - e_2^2) - ae_3^2\,,\\ \delta\mu &= \mu e_1^1 - be_3^2\,,\\ \delta\nu &= \nu e_2^2 - be_3^1\,,\\ \delta\varrho &= \varrho(2e_2^2 - e_1^1) - ce_3^1\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Přejděme nyní k další specialisaci reperu. Vektor $\mathbf{e}_3$ budeme volit rovnoběžně se směrovým vektorem $\mathbf{e}$ průsečnice oskulačních rovin křivek $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$.

Oskulační rovina parametrické křivky $\omega^1 = 0$, resp. $\omega^2 = 0$ v bodě M je určena vektory $d_2\mathbf{M}$, $d_2^2\mathbf{M}$, resp. $d_1\mathbf{M}$, $d_1^2\mathbf{M}$, přičemž index 1, resp. 2 značí diferencování podél křivky $\omega^2 = 0$, resp. $\omega^1 = 0$. Uvažovaná volba je vyjádřena rovnicemi

$$(d_1^2\mathbf{M}, d_1\mathbf{M}, \mathbf{e}_3) = 0\,, \quad (d_2^2\mathbf{M}, d_2\mathbf{M}, \mathbf{e}_3) = 0\,,$$

z nichž $\lambda = 0$, $\varrho = 0$. Z (9) plyne $e_3^1 = 0$, $e_3^2 = 0$, takže formy ω_3^1, ω_3^2 jsou hlavní. Obdržíme tak reper R_3, který závisí na dvou hlavních a třech vedlejších parametrech. Pro tento reper získáme z rovnic (7) a (8) vztahy

$$\omega_1^2 = \mu\omega^2\,, \quad \omega_3^1 = \frac{k + \nu^2}{c}\,\omega^1 + \frac{1}{c}\,\omega^2\,,$$

$$\omega_2^1 = \nu\omega^1\,, \quad \omega_3^2 = \frac{e}{a}\,\omega^1 + \frac{f + \mu^2}{a}\,\omega^2\,.$$

Situace v reperu R_3 je přehledně vyjádřena rovnicemi

$$\delta \mathbf{e}_1 = e_1^1 \mathbf{e}_1 , \quad \delta \mathbf{e}_2 = e_2^2 \mathbf{e}_2 , \quad \delta \mathbf{e}_3 = e_3^3 \mathbf{e}_3 .$$

Vidíme, že vedlejší parametry ovlivňují jen normalisaci vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, směry vektorů závisí na hlavních parametrech u, v. Proto další specialisace reperu R_3 budou voleny tak, aby normalisovaly vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Normalisujme nejprve vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

Uvažujme kongruenci vytvořenou přímkami $(M, \mathbf{e}_1)$. Bod $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{M} + x\mathbf{e}_1$ je ohniskem kongruence právě tehdy, když $[\mathrm{d}\boldsymbol{F}, \mathbf{e}_1] = 0$. Z této podmínky dostaneme dvě rovnice

$$x\omega_1^3 = 0 , \quad \omega^2 + x\omega_1^2 = 0 .$$

Řešení $x = 0$ první rovnice určuje bod M a druhá rovnice dává $1 + x\mu = 0$. Druhým ohniskem je tedy bod

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{M} - \frac{1}{\mu} \mathbf{e}_1 .$$

Nyní uvažujme kongruenci přímek $(M, \mathbf{e}_2)$. Analogicky vyjde pro druhé ohnisko $\boldsymbol{F}_2$ této kongruence vztah

$$\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{M} - \frac{1}{\nu} \mathbf{e}_2 .$$

Vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ budeme normalisovat tak, aby

$$\mathbf{e}_1 = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{F}_1 , \quad \mathbf{e}_2 = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{F}_2 .$$

Této normalisaci odpovídá volba $\mu = \nu = 1$ a z (9) plyne $e_2^2 = e_1^1 = 0$. V získaném reperu R_1 jsou kromě formy ω_3^3 již všechny formy hlavní a platí:

$$\omega_1^2 = \omega^2 , \quad \omega_3^1 = \frac{k+1}{c} \omega^1 + \frac{1}{c} \omega^2 , \tag{10}$$

$$\omega_2^1 = \omega^1 , \quad \omega_3^2 = \frac{e}{a} \omega^1 + \frac{f+1}{a} \omega^2 ,$$

$$\omega_1^1 = \left(\frac{e}{a} b - f\right) \omega^1 + \left(\frac{f+1}{a} b - g\right) \omega^2,$$

$$\omega_2^2 = \left(\frac{k+1}{c} b - h\right) \omega^2 + \left(\frac{1}{c} b - k\right) \omega^2 .$$

Z (6) obdržíme

$$\delta a = - ae_3^3 , \quad \delta b = - be_3^3 , \quad \delta c = - ce_3^3 . \tag{11}$$

Zbývá normalisovat vektor $\mathbf{e}_3$. Za tím účelem uvažujme přímkovou plochu P_1 vytvořenou tečnami křivek vrstvy S_2 podél křivky C_1 a analogicky vytvořenou přímkovou plochu P_2. Plochy P_1, P_2 jsou nerozvinutelné, poněvadž síť S není podle předpokladu konjugovaná. Dále uvažujme kvadriku, která má dotyk prvního řádu s plochami P_1 a P_2 podél příslušných tečen křivek vrstev S_1 a S_2 jdoucích bodem M. Rovnici tečny ke křivce vrstvy S_i předpokládejme ve tvaru

$$\mathbf{R} = \mathbf{M} + \lambda \mathbf{e}_i \,; \quad i = 1, 2 \,, \tag{12}$$

z něhož

$$\mathrm{d}\mathbf{R} = \mathrm{d}\mathbf{M} + \mathrm{d}\lambda \mathbf{e}_i + \lambda \, \mathrm{d}\mathbf{e}_i \,; \quad i = 1, 2 \,. \tag{13}$$

Rovnici hledané kvadriky v lokálních souřadnicích můžeme uvažovat ve tvaru

$$f(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + 2l(\mathbf{X}) + a_{00} = 0 \,, \tag{14}$$

kde f je bilineární symetrická forma a l lineární forma. Přitom pro $\mathbf{X} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ klademe $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = a_{ik} = a_{ki}$, $l(\mathbf{e}_i) = a_{i0}$. Diferencováním (14) obdržíme podmínku dotyku prvního řádu

$$f(\mathbf{X}, \mathrm{d}\mathbf{X}) + l(\mathrm{d}\mathbf{X}) = 0 \,. \tag{15}$$

Do (14) dosadíme výraz (12) a srovnáme koeficienty u mocnin λ. Dostaneme:

$$f(\mathbf{M}, \mathbf{M}) + 2l(\mathbf{M}) + a_{00} = 0 \,, \quad f(\mathbf{M}, \mathbf{e}_i) + l(\mathbf{e}_i) = 0 \,, \quad f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 0 \,,$$

kde $i = 1, 2$. Dosadíme-li do (15) z (12) a (13), přičemž dbáme toho, aby tečna (12) ke křivce jedné vrstvy sítě byla vždy vedena bodem křivky druhé vrstvy sítě, obdržíme:

$$\begin{aligned} & f(\mathrm{d}\mathbf{M}, \mathrm{d}\mathbf{M}) = 0 \,, \\ & f(\mathbf{M}, \mathrm{d}\mathbf{e}_i) + 2f(\mathrm{d}\mathbf{M}, \mathbf{e}_i) + f(\mathrm{d}\mathbf{M}, \mathrm{d}\mathbf{e}_i) = 0 \,, \\ & 2f(\mathbf{e}_i, \mathrm{d}\mathbf{e}_i) + f(\mathrm{d}\mathbf{e}_i, \mathrm{d}\mathbf{e}_i) + l(\mathrm{d}\mathbf{e}_i) = 0 \,; \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

a užitím (1)

$$\begin{aligned} & l(\mathbf{e}_i) \, \omega^i = 0 \,, \\ & f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \, \omega^i + l(\mathbf{e}_3) \, \omega_k^3 = 0 \,; \quad i, k = 1, 2 \,, \quad i \neq k \,, \\ & f(\mathbf{e}_i, \mathrm{d}\mathbf{e}_i) = 0 \,; \quad i = 1, 2 \,. \end{aligned}$$

Z předcházejících rovnic dostaneme $a_{00} = a_{11} = a_{22} = a_{10} = a_{20} = 0$, $a_{12} = -ba_{30}$, $a_{13} = a_{30}$. $a_{23} = a_{30}$; dále volíme $a_{30} = 1$. Získáme svazek kvadrik

$$a_{33}z^2 - 2bxy + 2xz + 2yz + 2z = 0 \,,$$

který nazveme *svazkem základních kvadrik sítě* S. Uvedený svazek obsahuje pro $a_{33} = -2/b$ paraboloid o rovnici

$$-z^2 - b^2xy + bxz + byz + bz = 0 \,.$$

Jeho průsečíky s přímkou $(M, \mathbf{e}_3)$ jsou $\mathbf{M}$ a $\mathbf{Z} = \mathbf{M} + b\mathbf{e}_3$. Volme $b = 1$, takže

$$\mathbf{Z} = \mathbf{M} + \mathbf{e}_3 .$$

Touto volbou jsme provedli poslední specialisaci reperu a získali tak kanonický reper pro plochu s danou sítí S. Z (11) obdržíme $e_3^3 = 0$ a z (5) po dosazení vztahů (10) vyjde

$$\omega_3^3 = \omega^1 \left[n + \left(\frac{e}{a} - f \right) + \left(\frac{k+1}{c} - h \right) + av \right] + $$
$$+ \omega^2 \left[p + \left(\frac{f+1}{a} - g \right) + \left(\frac{1}{c} - k \right) + c\mu \right].$$

Kanonický reper sítě S je tedy

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{M} &= \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 , \\
\mathrm{d}\mathbf{e}_1 &= (A\omega^1 + B\omega^2)\,\mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + (a\omega^1 + \omega^2)\,\mathbf{e}_3 , \\
\mathrm{d}\mathbf{e}_2 &= \omega^1 \mathbf{e}_1 + (C\omega^1 + D\omega^2)\,\mathbf{e}_2 + (\omega^1 + c\omega^2)\,\mathbf{e}_3 , \\
\mathrm{d}\mathbf{e}_3 &= (E\omega^1 + F\omega^2)\,\mathbf{e}_1 + (G\omega^1 + H\omega^2)\,\mathbf{e}_2 + (K\omega^1 + L\omega^2)\,\mathbf{e}_3 ,
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
A &= \frac{e}{a} - f , & B &= \frac{f+1}{a} - g , \\
C &= \frac{k+1}{c} - h , & D &= \frac{1}{c} - k , \\
E &= C + h , & F &= D + k , \\
G &= A + f , & H &= B + g , \\
K &= A + C + n + av , & L &= B + D + p + c\mu .
\end{aligned}$$

Síť na ploše je definována soustavou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
(16) \qquad & \omega^3 = 0 , \\
& \omega_1^1 = A\omega^1 + B\omega^2 , \quad \omega_2^1 = \omega^1 , \quad \omega_3^1 = E\omega^1 + F\omega^2 , \\
& \omega_1^2 = \omega^2 , \quad \omega_2^2 = C\omega^1 + D\omega^2 , \quad \omega_3^2 = G\omega^1 + H\omega^2 , \\
& \omega_1^3 = a\omega^1 + \omega^2 , \quad \omega_2^3 = \omega^1 + c\omega^2 , \quad \omega_3^3 = K\omega^1 + L\omega^2 .
\end{aligned}$$

Vnějším diferencováním této soustavy rovnic obdržíme vnější kvadratické relace

$$\begin{aligned}
dA \wedge \omega^1 + dB \wedge \omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega^2(A - AB - B + BC + aF - E - 1), \\
dC \wedge \omega^1 + dD \wedge \omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega^2(C + CD - D - BC + cG + H + 1), \\
dE \wedge \omega^1 + dF \wedge \omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega^2(-AF + KF + CF - F + E - EL - H), \\
dG \wedge \omega^1 + dH \wedge \omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega^2(DG - LG - BG + G - H + KH + E), \\
dK \wedge \omega^1 + dL \wedge \omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega^2(E - aF - cG - KB + LC - H + K - L), \\
da \wedge \omega^1 &= \omega^1 \wedge \omega^2(A - 2aB + aL + a - K + C - 2), \\
dc \wedge \omega^1 &= \omega^1 \wedge \omega^2(L + 2cC - cK - c - D - B + 2)
\end{aligned}$$

a konečně rovnice

$$1 = D - F + cE, \quad 1 = A + G + aH.$$

V obvyklém označení je $q = 10$, $s_1 = 7$, $s_2 = 3$, $Q = 13$, $N = 13$. Protože $Q = N$, je soustava (16) v involuci a její řešení závisí na třech libovolných funkcích dvou proměnných.

Literatura

[1] *Kolář I.:* Užití Cartanových metod ke studiu obecné sítě křivek na ploše v trojrozměrném projektivním prostoru. Rozpravy Československé akademie věd, ročník *77*, sešit 5, 1967.

[2] *Marková L.:* Konstrukce kanonického reperu sítě na ploše v ekviafinním trojrozměrném prostoru. Časopis pro pěstování matematiky, sešit *96*, 1971, str. 133—144.

[3] *Щербаков Р. Н.*: Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск 1960.

Adresa autorky: 602 00 Brno, Hilleho 6 (Vysoké učení technické).

Zusammenfassung

DAS BEWEGLICHE BEZUGSSYSTEM DES NETZES AUF EINER FLÄCHE IM DREIDIMENSIONALEN AFFINEN RAUM

PAVLA BAJÁKOVÁ, Brno

In diesem Artikel wird mittels der Cartanschen Methoden das kanonische bewegliche Bezugssystem des allgemeinen Netzes von Kurven auf einer Fläche im dreidimensionalen affinen Raum konstruiert. Bei der angegebenen Konstruktion ist das bewegliche Bezugssystem dem Netz schon in der ersten Etappe der Spezialisierung zugeordnet. Die Spezialisierungen des beweglichen Bezugssystems sind geometrisch charakterisiert.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

HARMONICKÉ FUNKCE A VĚTY O PRŮMĚRU

IVAN NETUKA, Praha

(Došlo dne 16. srpna 1974)

Od doby, kdy S. LAPLACE odvodil, že potenciál gravitačního pole hmotného tělesa splňuje jistou diferenciální rovnici (později pojmenovanou jeho jménem), uplynulo takřka 200 let. Funkce splňující Laplaceovu rovnici byly v minulém století nazvány lordem Kelvinem harmonické funkce a jejich studium se stalo předmětem teorie potenciálu. O harmonických funkcích byly napsány stovky vědeckých prací a desítky knih a z teorie potenciálu, která tvořila zpočátku kapitolu matematické fyziky, se stala velmi rozvinutá samostatná matematická disciplína, která ovlivnila řadu oblastí matematiky.

Naším cílem je všimnout si pozoruhodné vlastnosti harmonických funkcí vyjádřené Gaussovou větou o aritmetickém průměru (viz věta 2). Vzniká otázka, do jaké míry je tato vlastnost charakteristická pro harmonické funkce a v jakém smyslu platí „obrácení" Gaussovy věty. Přesto že první výsledky z této problematiky byly známy již na počátku tohoto století, v posledních letech se objevila řada prací, které podávají zcela nové výsledky v tomto směru. Pokusíme se předložit přehled této problematiky a uvedeme hlavní výsledky (většinou bez důkazů), kterých bylo dosaženo.

Abychom mohli výsledky přesně formulovat, zavedeme nejprve označení, kterého budeme užívat, a připomeneme důležité definice.

Pro přirozené číslo m znamená E_m m-rozměrný euklidovský prostor a pro množinu $M \subset E_m$ označíme $\overline{M}$, ∂M a $\operatorname{int} M$ uzávěr, hranici a vnitřek množiny M. Je-li $x \in E_m$ a $M \subset E_m$, $d(x, M)$ značí vzdálenost bodu x od množiny M. Pro $y \in E_m$ a $r > 0$ označíme $\Omega_r(y) = \{z; |z - y| < r\}$ (koule) a $\Gamma_r(y) = \partial\Omega_r(y)$. Povrch jednotkové koule označíme σ_m, její objem α_m. Poznamenejme, že $\sigma_m = m\alpha_m$ a povrch koule $\Omega_r(y)$ je roven $\sigma_m r^{m-1}$; dále platí $\mu_m(\Omega_r(y)) = \alpha_m r^m$, kde μ_m je m-rozměrná Lebesgueova míra v E_m. Je-li funkce u lebesgueovsky integrovatelná na kouli $\Omega = \Omega_r(y)$, položíme

$$A(u; y, r) = \frac{1}{\alpha_m r^m} \int_\Omega u \, d\mu_m .$$

Podobně pro funkci u integrovatelnou vzhledem k plošné míře σ na $\partial\Omega$ označíme

$$L(u; y, r) = \frac{1}{\sigma_m r^{m-1}} \int_{\partial\Omega} u \, d\sigma .$$

(O elementárním zavedení plošného integrálu přes hranici koule se čtenář může poučit v [45].) Číslo $A(u; y, r)$ (resp. $L(u; y, r)$) budeme nazývat objemovým (resp. sférickým) průměrem funkce u přes kouli $\Omega_r(y)$ (resp. přes sféru $\Gamma_r(y)$). Pro $m = 1$ je ovšem $L(u; y, r)$ aritmetickým průměrem čísel $u(y + r)$ a $u(y - r)$.

Zopakujeme si ještě definici a základní vlastnosti harmonických funkcí. Nechť $G \subset E_m$ je otevřená množina a nechť u je funkce na G. Říkáme, že funkce u je harmonická na G, je-li tam spojitá a pro každé $x \in G$ platí

$$\Delta u(x) := \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} = 0 . \tag{1}$$

(Kromě spojitosti žádáme tedy jen, aby napsané derivace existovaly a platila Laplaceova rovnice (1).) Pro $m = 1$ znamená ovšem (1) rovnici $u'' = 0$, takže v $G \subset E_1$ jsou harmonické právě všechny funkce, které jsou lineární na každém intervalu obsaženém v G.

O harmonických funkcích a o různých vlastnostech průměrů se čtenář může poučit např. v [45], [53], [35], [9], [43]; pro naše účely postačí připomenout následující větu o vyjádření harmonické funkce Poissonovým integrálem.

Věta 1. *Nechť funkce u je harmonická funkce na otevřené množině obsahující uzávěr koule $\Omega = \Omega_r(y)$ a nechť $x \in \Omega$. Potom*

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_m r} \int_{\partial\Omega} \frac{r^2 - |y - x|^2}{|z - x|^m} \, u(z) \, d\sigma(z) . \tag{2}$$

Poissonův integrál vyjadřuje tedy hodnotu harmonické funkce v každém bodě koule Ω pomocí známých hodnot na $\partial\Omega$. Důkaz věty lze nalézt např. v [45], [35]. Položíme-li speciálně $x = y$, dostáváme následující větu.

Věta 2. *Nechť funkce u je harmonická v otevřené množině $G \subset E_m$. Potom pro každou kouli $\Omega = \Omega_r(x)$, pro niž $\bar{\Omega} \subset G$, platí*

$$u(x) = L(u; x, r) . \tag{3}$$

Jinak řečeno, hodnota harmonické funkce ve středu koule je rovna průměru hodnot na hranici. Věta 2 se v literatuře uvádí často jako Gaussova věta o aritmetickém průměru harmonických funkcí. Citujme zde obecnější větu, kterou C. F. Gauss uvádí ve své práci z r. 1840 (viz [30], str. 222):

Lehrsatz. *Bedeutet V das Potential einer wie immer vertheilten Masse in dem Elemente einer mit dem Halbmesser R beschriebenen Kugelfläche* ds, *so wird, durch die ganze Kugelfläche integrirt,*

$$\int V \, \mathrm{d}s = 4\pi(RM^0 + RRV^0)$$

wenn man mit M^0 die ganze im Innern der Kugel befindliche Masse, mit V^0 das Potential der ausserhalb befindlichen Masse in Mittelpunkt der Kugel bezeichnet, und dabei die Massen, die etwa auf der Oberfläche der Kugel stetig vertheilt sein mögen, nach Belieben den äussern oder innern Massen zuordnet.

Pro případ, že uvnitř uvažované koule není žádná hmota, dostáváme (pro E_3) rovnost (3). Přestože věta 2 bývá spojována s Gaussovým jménem, byla známa dříve. Objevuje se v práci S. EARNSHAWA (Cambr. Trans. 7, str. 97) v roce 1839 (viz [19], str. 480).

Z (3) ihned dostaneme (integrací) následující verzi věty 2 pro objemové průměry.

Věta 3. *Za předpokladů z věty 2 platí*

$$u(x) = A(u; x, r) . \tag{4}$$

Poznamenejme, že někteří autoři požadují v definici harmonické funkce, aby u měla spojité parciální derivace 2. řádu. Potom lze větu 2 dokázat bez užití Poissonova integrálu na základě věty o vyjádření hladké funkce pomocí tří potenciálů (srv. [35]).

Pozoruhodná vlastnost harmonických funkcí vyjádřená ve větách 2, 3 nás přivádí k následující otázce: Jak vypadají všechny funkce, které mají vlastnost průměru (3) nebo (4)?

Zamysleme se nejprve nad touto otázkou pro případ E_1. Snadno je vidět, že každá funkce f definovaná v E_1, pro niž $f(0) = 0$, má vlastnost sférického průměru, právě když splňuje Cauchyovu funkcionální rovnici

$$f(x + y) = f(x) + f(y) , \quad x, y \in E_1 . \tag{5}$$

Nelze očekávat, že každá funkce splňující (5) bude harmonická (tj. lineární), neboť víme, že existují nespojitá (dokonce neměřitelná) řešení rovnice (5) (viz [40]). Na druhé straně však každé spojité řešení (5) je již lineární funkce. Speciálně tedy spojité funkce, mající vlastnost průměru, jsou lineární. Jak vypadá tato situace v prostorech vyšší dimenze? Je zajímavé, že vlastnost průměru vymezuje mezi spojitými funkcemi právě funkce harmonické.

Věta 4. *Nechť G je otevřená podmnožina v E_m a u je spojitá funkce na G. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *u je harmonická v G;*

(ii) *pro každé $t \in G$ a každé r, $0 < r < d(t, \partial G)$, platí*

$$u(t) = L(u; t, r) ;$$

(iii) *pro každé* $t \in G$ *a každé* r, $0 < r < d(t, \partial G)$, *platí*

$$u(t) = A(u; t, r);$$

(iv) *pro každé* $t \in G$ *a každé* $r > 0$, $0 < r < d(t, \partial G)$, *platí*

$$L(u; t, r) = A(u; t, r).$$

Je užitečné si uvědomit, že pro případ souvislé množiny G a funkce u s vlastností (ii) (resp. (iii)) platí následující ostrý princip maxima a minima: Jestliže u nabývá buď maxima nebo minima v některém bodě z G, potom je konstantní. Je-li totiž M např. množina všech bodů z G, v nichž u nabývá svého maxima, je M uzavřená v G (u je spojitá) a z (ii) (resp. (iii)) plyne, že M je otevřená. Je tedy buď $M = \emptyset$ nebo $M = G$.

Při důkazu implikace (ii) $\Rightarrow$ (i) (resp. (iii) $\Rightarrow$ (i)) lze postupovat nyní takto: Zvolíme libovolně $y \in G$ a $R > 0$ tak, aby $\overline{\Omega_R(y)} \subset G$. Stačí ověřit, že u je harmonická na $\Omega \doteq \Omega_R(y)$. K tomu účelu položme

$$v(x) = \frac{1}{\sigma_m R} \int_{\partial\Omega} \frac{R^2 - |y - x|^2}{|z - x|^m} u(z) \, d\sigma(z), \quad x \in \Omega,$$

a uvažujme funkci w, která je rovna 0 na $\partial\Omega$ a $u - v$ na Ω. Výše uvedený princip maxima a minima dává $w = 0$ v Ω, tedy u je harmonická v Ω (dodejme ještě, že w je spojitá na $\bar{\Omega}$ — to plyne z vlastností Poissonova integrálu).

Všimněme si, že věta 5 dává ekvivalentní definici harmonických funkcí, v níž se nevyskytují žádné podmínky na diferenciální vlastnosti. O implikacích (ii) $\Rightarrow$ (i), (iii) $\Rightarrow$ (i) se často mluví jako o obrácení věty o průměru pro harmonické funkce.

Patrně první obrácení věty o průměru se objevuje v r. 1906 v práci P. Koebea [46], jehož větu ocitujeme:

Satz. *Ist u eine in der Ebene oder im Raume erklärte stetige reele Funktion, welche inbezug auf jede ganz im Innern des Definitionsbereiches liegende Kreisfläche bzw. Kugel die erwähnte Gaußsche Mittelwerteigenschaft besitzt, so ist u eine Potentialfunktion.*

Nezávisle podobnou větu dokázal r. 1909 E. Levi [49] (mimochodem bratr známého italského matematika Beppo Leviho) za obecnějších předpokladů, než spojitosti funkce u; další oslabení pochází od L. Tonelliho [66]; viz také H. Lebesgue [48] 1912. Důkaz implikace (iv) $\Rightarrow$ (i) z věty 4 lze nalézt v [5]. Různé důkazy obrácení věty o průměru se vyskytují např. v [9], [13], [44]. Poznamenejme, že větu 4 lze v různých směrech ještě zlepšit. Dá se říci, že ve většině dalšího textu chceme ukázat, v jakém smyslu je to možné.

Začněme několika drobnostmi. Místo podmínky (ii) lze uvažovat podmínku (srv. [61], [50]) (ii') *pro každé* $s \in G$ *existuje posloupnost* $\{r_n\}$ *kladných čísel taková, že* $\lim r_n = 0$ *a pro všechna n platí*

$$u(s) = L(u; s, r_n);$$

nebo podmínkou

(ii″) *existuje hustá podmnožina* $H \subset G$ *(tj.* $\bar{H} = G$*) tak, že pro každé* $s \in H$ *a každé* r, $0 < r < d(s, \partial G)$, *platí*

$$u(s) = L(u; s, r).$$

Předpoklad spojitosti z věty 4 lze také oslabit. Pro platnost (iii) ⇒ (i) stačí, aby u byla lebesgueovsky integrovatelná na každé uzavřené kouli obsažené v G (srv. [9], [66]).

V souvislosti s větou 4 můžeme formulovat dva různé problémy. (Pro jednoduchost předpokládejme, že u je spojitá na otevřené množině $G \subset E_m$.)

Problém 1. *Nechť* $S \subset G$ *a nechť pro každé* $s \in S$ *a každé* r, $0 < r < d(s, \partial G)$, *platí* $u(s) = L(u; s, r)$. *Jak „velká" musí být množina S, abychom mohli usoudit, že u harmonická?*

Problém 2. *Pro „kolik" poloměrů r musíme v každém bodě* $s \in G$ *požadovat platnost rovnosti* $u(s) = L(u; s, r)$, *aby u byla harmonická?*

V souvislosti s problémem 1 jsme uvedli, že hustá podmnožina je dostatečně „velká". Daleko hezčí větu však dokázal pro případ $G = E_m$ L. Flatto [25] 1965.

Věta 5. *Nechť u je spojitá funkce v* E_m *a nechť* $S \subset E_m$. *Předpokládejme, že* $\operatorname{int} \bar{S} \neq \emptyset$ *(tj. S není řídká). Jestliže pro každé* $s \in S$ *a každé* $r > 0$ *platí*

$$u(s) = L(u; s, r),$$

potom je u harmonická v E_m.

Vrátíme se k problému 2 a budeme poněkud přesnější. V roce 1956 formuloval J. Mařík [52] následující úlohu:

Úloha. *Rozhodněte, zda platí tato věta: Buď f spojitá funkce na množině G, která je otevřená v* E_m. *Nechť ke každému* $s \in G$ *existuje* $r > 0$ *tak, že* $\Omega_r(s) \subset G$ *a* $f(s) = A(f; s, r)$. *Potom je funkce f harmonická na množině G.*

V [54] 1969 je sestrojen příklad, který ukazuje, že uvedená věta neplatí. V tomto příkladě je $G = E_m$ a prohlédneme-li si konstrukci, vidíme, že pro některá s je třeba zvolit příslušné r „hodně" malé a pro jiná naopak „hodně" velké. Nic se ovšem nezachrání, ani když budeme požadovat, aby příslušný poloměr byl pro všechny body stejný. Tuto situaci ilustruje následující příklad v E_1. Nechť $\gamma = \alpha + i\beta$, je (nenulový) kořen rovnice

$$\frac{\sin \gamma r_0}{\gamma r_0} = 1$$

(kde $r_0 > 0$ je předem zadaný „poloměr"). Potom pro funkci

$$q(t) = e^{-\beta t} \cos \alpha t$$

(která není lineární!) platí

$$q(\eta) = \frac{1}{2r_0} \int_{\eta - r_0}^{\eta + r_0} q(\xi) \, d\xi \,, \quad \eta \in E_1 \,.$$

Položíme-li např. $u(x) = u(x_1, \ldots, x_m) = q(x_1)$, spočteme, že platí $u(x) = L(u; x, r_0)$ pro všechna $x \in E_m$ (viz [13], str. 280). Vidíme, že informace o sférickém či objemovém průměru (spojité funkce v E_m) pro jeden poloměr v každém bodě nestačí k tomu, abychom mohli tvrdit, že u je harmonická. Nic se dokonce nezmění, požadujeme-li, aby množina G byla omezená a u spojitá omezená na G. Lze například sestrojit funkci f (viz [13], str. 281), která je omezená a spojitá na intervalu $(a, b) \subset E_1$, nelineární, a přitom pro každé $x \in (a, b)$ existuje r tak, že $a < x - r < x + r < b$ a

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(f(x + r) + f(x - r)) \,.$$

Pro zmíněnou funkci neexistují $\lim_{x \to a+} f(x)$, $\lim_{x \to b-} f(x)$ a později uvidíme, že to není náhoda.

K problematice vět „s jedním poloměrem" se ještě vrátíme. Zatím si budeme pamatovat, že bez dodatečných předpokladů je jeden poloměr nedostačující. Je překvapivé, že dva poloměry již poskytují dostatečnou informaci. Přesněji to vyjadřuje tato pozoruhodná věta.

Věta 6. *Pro každé $m \geqq 2$ přirozené existuje konečná množina $K(m)$ tak, že platí následující tvrzení: Nechť u je spojitá funkce v E_m, a, b různá kladná reálná čísla. Jestliže pro každé $x \in E_m$ platí*

$$u(x) = L(u; x, a) = L(u; x, b)$$

a $a/b \notin K(m)$, potom u je harmonická v E_m.

Tuto větu dokázal J. Delsarte [15], (1958) (srv. [16], [17]), jiný důkaz podal L. Flatto [25]. Oba důkazy jsou velmi netriviální a užívají náročného aparátu. Delsarte popisuje $K(m)$ (zdůrazněme, že $K(m)$ nezávisí na funkci u!) jako množinu kořenů jisté speciální funkce a tvrdí, že $K(3) = \emptyset$, tedy v E_3 platí věta bez výjimek. Problém, zda pro ostatní m je $K(m) = \emptyset$, se zdá být zatím neřešený.

Při vyšetřování vět uvedeného typu se setkáváme s parciální diferenciální rovnicí hyperbolického typu (Darbouxova rovnice), která úzce souvisí se sférickými průměry. Zmíněná souvislost je popsána v následující větě, jejíž důkaz je uveden například v [13], str. 639.

Věta 7. *Nechť funkce u má spojité parciální derivace druhého řádu v E_m, $m \geqq 2$. Pro $(x, r) \in E_m \times (0, \infty)$ položme $v(x, r) = L(u; x, r)$. Potom pro $(x, r) \in E_m \times \times (0, \infty)$ platí*

$$-\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 v(x, r)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v(x, r)}{\partial r^2} + \frac{m-1}{r} \frac{\partial v(x, r)}{\partial r} = 0 .$$

Věty delsartovského typu jsou vyšetřovány v článku L. ZALCMANA [71] 1972. Zformulujeme je (stejně jako v uvedeném článku) pro případ E_2. Autor uvádí, že věty platí také pro prostory vyšší dimenze. V následující větě je S_0 (resp. S_1) množina všech poměrů z_j/z_k, kde z_j, $z_k \neq 0$ jsou komplexní čísla taková, že $J_0(z_j) = J_0(z_k) = 1$ (resp. $J_1(z_j)/z_j = J_1(z_k)/z_k = \frac{1}{2}$). Přitom J_0, J_1 jsou Besselovy funkce. Důležité je, že „výjimečné" množiny S_0, S_1 jsou spočetné.

Věta 8. *Nechť funkce u je lebesgueovsky integrovatelná na každé kompaktní podmnožině roviny E_2, a, b nechť jsou kladná různá čísla.*

Jestliže pro skoro všechna $x \in E_2$ (vzhledem k μ_2) platí

$$u(x) = L(u; x, a) = L(u; x, b)$$

(resp.

$$u(x) = A(u; x, a) = A(u; x, b))$$

a $a/b \notin S_0$ (resp. S_1), *potom existuje funkce $\tilde{u}$ harmonická v E_2 tak, že $\tilde{u} = u$ μ_2-skoro všude v E_2.*

Později uvidíme, že podobná věta platí také pro holomorfní funkce. Nyní se však vrátíme zpět k větám „s jedním poloměrem". Abychom si udělali představu, jaké věty platí, bude vhodné zavést následující definice. V dalším bude stále G neprázdná oblast v E_m. Funkci δ definovanou na G nazveme G-přípustnou, když pro každé $x \in G$ je $0 < \delta(x) \leqq d(x, \partial G)$. Lebesgueovsky měřitelná funkce u na G se nazývá δ-harmonická, jestliže pro každé $x \in G$ je

$$u(x) = A(u; x, \delta(x))$$

(předpokládáme tedy, že u je integrovatelná na každé kouli $\Omega_{\delta(x)}(x)$). Z věty 3 plyne, že každá harmonická nezáporná funkce na G je δ-harmonická pro libovolnou G-přípustnou funkci δ. (Každá harmonická funkce je δ-harmonická pro každou funkci δ splňující $0 < \delta(x) < d(x, \partial G)$.) Nyní můžeme formulovat následující problém:

Problém. *Za jakých předpokladů na G, δ a u platí, že δ-harmonická funkce u je harmonická?*

Ptáme se tedy, za jakých předpokladů platí obrácení Gaussovy věty „s jedním poloměrem".

Již víme, že předpoklady $G = E_m$, u spojitá, nestačí. Také dokonce nestačí $G = E_1$, u nekonečně diferencovatelná a δ konstantní (příklad na str. 396). V dalším uvedeme řadu různých postačujících podmínek k tomu, aby δ-harmonická funkce byla harmonická.

Začneme následujícím tvrzením, které dokázal F. HUCKEMANN [38] 1954 (viz též str. 22 v [51]).

Věta 9. *Nechť*

a) $G = (-1, 1)$;

b) *δ je libovolná G-přípustná funkce;*

c) *u je spojitá δ-harmonická funkce taková, že existují*

$$\lim_{x \to 1-} \int_0^x u(t)\,dt\,, \qquad \lim_{x \to -1+} \int_x^0 u(t)\,dt$$

(event. nevlastní).
Potom je funkce u lineární.

Dříve, než zformulujeme další větu, připomeňme následující definici. Oblast $G \subset E_m$ se nazývá regulární, jestliže pro každou spojitou funkci h na ∂G existuje řešení Dirichletovy úlohy příslušné okrajové podmínce h a množině G (tj. funkci h lze spojitě rozšířit na $\bar{G}$, přičemž toto rozšíření je harmonické na G).

Věta 10. *Nechť*

a) *$G \subset E_m$ je omezená regulární oblast;*

b) *δ je libovolná G-přípustná funkce;*

c) *u je stejnoměrně spojitá δ-harmonická funkce na G.*

Potom je u harmonická funkce na G.

Poznamenejme, že požadavek stejnoměrné spojitosti je ekvivalentní podmínce, že existuje spojité rozšíření $\tilde{u}$ funkce u na $\bar{G}$. Naznačme si myšlenku důkazu této věty. Nechť v je řešení Dirichletovy úlohy příslušné okrajové podmínce $\tilde{u}$ a uvažujme funkci $w = v - \tilde{u}$. Funkce w je spojitá na $\bar{G}$, anuluje se na hranici a

$$w(x) = A(w; x, \delta(x))\,, \quad x \in G\,.$$

Nechť F je množina všech $y \in \bar{G}$, pro něž $w(y) = \max w(\bar{G})$. Kdyby $F \subset G$, zvolili bychom v množině F bod x_0, který má nejbližší vzdálenost k ∂G (F je uzavřená!). Potom by ale bylo $w(x_0) > A(w; x_0, \delta(x_0))$, což není možné. Tedy $F \cap \partial G \neq 0$ a tedy $w \leqq 0$. Zbytek důkazu je snadný. (Srv. s úvahou za větou 4.)

První tvrzení typu vět s „jedním" poloměrem se patrně vyskytuje u V. VOLTERRY [69] 1909. Věta podobná větě 10 (se sférickými průměry) je dokázána v [13], str. 279, obecnější případ vyšetřuje O. D. KELLOG [42] 1934.

Předpoklady, kladené ve větě 10 na G a u jsou velmi silné (a také důkaz byl snadný). První hlubší tvrzení o δ-harmonických funkcích dokázali metodami ergodické teorie M. A. ACKOGLU a R. W. SHARPE v [1] 1968, kteří navázali na FELLERŮV výsledek z [23].

Věta 11. *Nechť*

a) *G je otevřený jednotkový kruh v E_2;*

b) $\delta(x) = 1 - \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$ *pro každé* $x = (x_1, x_2) \in G$;

c) *u je omezená δ-harmonická funkce v G.*

Potom funkce u je harmonická v G.

(Průměry se tedy počítají přes maximání kruh obsažený v G.)

V následujících větách se vyskytuje předpoklad, že ∂G je třídy C_1 (resp. lipschitzovská). Velmi zhruba řečeno to znamená, že lokálně se dá ∂G (při vhodné volbě souřadnic) popsat grafem funkce $(m - 1)$ proměnných, která má spojité parciální derivace prvního řádu (resp. je lipschitzovská).

Další věta náleží J. R. Baxterovi [4] 1972. Důkaz je náročný a navazuje na metody užité v [1].

Věta 12. *Nechť*

a) *G je omezená oblast s hranicí třídy C_1;*

b) $\alpha > 0$ *a δ je G-přípustná měřitelná funkce, pro niž*

$$\delta(x) \geqq \alpha d(x, \partial G) ;$$

c) *u je omezená δ-harmonická funkce.*

Potom u je harmonická v G.

Poslední tři věty o δ-harmonických funkcích jsou dokázány pravděpodobnostními metodami. Poznamenejme, že není nikterak překvapivé, že v souvislosti s harmonickými funkcemi se dostáváme do oblasti teorie pravděpodobnosti. V současné době jsou dosti detailně známy hluboké souvislosti teorie potenciálu a teorie pravděpodobnosti. Zájemce, který by se chtěl seznámit s těmito souvislostmi, odkazujeme pro první informaci např. na článek [12], kde je uvedena příslušná motivace.

Věta, která následuje, pochází od W. A. Veeche [67] 1973 a zobecňuje Baxterův výsledek.

Věta 13. *Nechť*

a) *G je omezená oblast v E_m s lipschitzovskou hranicí;*

b) *δ je G-přípustná funkce taková, že* $\inf \delta(K) > 0$ *pro každou kompaktní podmnožinu* $K \subset G$;

c) *u je δ-harmonická funkce, pro niž existuje harmonická funkce v na G tak, že* $|u| \leqq v$.

Potom je funkce u harmonická na G.

Další tvrzení je zajímavé tím, že se nepředpokládá nic o množině G. Věta byla dokázána D. Heathem, S. Oreyem (viz [11] 1972) a také zobecňuje větu Baxtera.

Věta 14. *Nechť*

a) *G je libovolná oblast v E_m;*

b) *Existuje funkce g kladná na G a čísla $M \geqq 1$, $\varepsilon > 0$ tak, že $|g(x) - g(y)| \leqq M|x - y|$ pro každé $x, y \in G$, funkce δ je měřitelná na G a*

$$\varepsilon\, g(x) \leqq \delta(x) \leqq g(x) \leqq d(x, \partial G)\,, \quad x \in G\,;$$

c) *u je omezená δ-harmonická funkce na G.*

Potom je funkce u harmonická na G.

S výjimkou věty 13 jsme se setkali s předpokladem omezenosti funkce u. W. A. Veechovi [68] 1974 se podařilo dokázat tuto větu pro libovolné nezáporné funkce:

Věta 15. *Nechť*

a) *G je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí;*

b) *existuje $\alpha > 0$ a funkce r na G tak, že $0 < r(x) \leqq d(x, \partial G)$ na G a*

$$\alpha\, r(x) \leqq \delta(x) \leqq (1 - \alpha)\, r(x)$$

a

$$|r(x) - r(y)| \leqq |x - y|\,, \quad x, y \in G\,;$$

c) *u je konečná nezáporná δ-harmonická funkce na G.*

Potom u je harmonická na G.

Předpoklad, že ∂G je lipschitzovská, se vyskytuje v souvislosti s metodou, kterou W. A. Veech užívá. Metoda se opírá o vlastnosti Martinovy hranice, o níž za obecnějších předpokladů nejsou známy potřebné informace. Není bez zajímavosti, že při důkazu vět 13 a 15 se lze omezit na borelovské funkce u a δ. Ukazuje to následující věta z [67].

Věta 16. *Nechť u je nezáporná δ-harmonická funkce v množině G (δ je libovolná G-přípustná funkce). Potom existují borelovské funkce u_0 a δ_0 tak, že $u_0 \geqq 0$, $u_0 = u$ skoro všude v G, $\delta \leqq \delta_0$ a funkce u_0 je δ_0-harmonická.*

Uveďme zde ještě zmínku o výsledcích S. Alinhace [3] 1972, který metodami klasické analýzy obdržel výsledky podobného druhu, jako ve větách 12–15. Výchozím bodem jeho úvah je jisté zobecnění Darbouxovy rovnice. Předpokládá hladkost hranice, lipschitzovskost δ a uvažuje u z jistých Sobolevových prostorů. Ve skutečnosti však pracuje s obecnějšími průměry než objemovými.

Přestože je známa řada výsledků o δ-harmonických funkcích, stále zůstává otevřena (viz [68])

Veechova domněnka. *Nechť*

a) *G je omezená oblast;*

b) *δ je G-přípustná funkce, pro niž* $\inf \delta(K) > 0$ *pro každou kompaktní část* $K \subset G$;

c) *u je konečná nezáporná δ-harmonická funkce.*

Potom je u harmonické na G.

Uveďme ještě větu zcela jiného typu, která ukazuje, jak pomocí průměrů lze charakterizovat harmonické funkce.

Věta 17. *Nechť u je spojitá funkce v otevřené množině $G \subset E_m$. Potom u je harmonická tehdy a jen tehdy, když pro každé $x \in G$ platí*

$$\tilde{\Delta} u(x) = 0\,, \tag{6}$$

kde

$$\tilde{\Delta} u(x) = \lim_{r \to 0+} 2m \frac{L(u; x, r) - u(x)}{r^2}\,.$$

Důkaz této věty lze nalézt například v [9]. Tato věta bývá spojována se jménem W. Blaschke [6] 1916. Je zajímavé, že již v r. 1914 byla dokázána M. Plancherelem [56]. Plyne však z následující věty, kterou S. Zaremba publikoval v [73] 1905 (srv. s poznámkou v [37]).

Věta 18. *Nechť G je otevřená podmnožina E_m. Nechť $\mathscr{L}$ je lineární prostor spojitých funkcí takový, že $C^2(G) \subset \mathscr{L}$. Buď Φ lineární operátor, který každé funkci $u \in \mathscr{L}$ přiřazuje konečnou funkci Φu na G tak, že platí:*

1) *Je-li $u \in C^2(G)$, potom*

$$\Phi u(x) = \Delta u(x)\,, \qquad x \in G\,;$$

2) *Jestliže $u \in \mathscr{L}$ nabývá svého maxima (resp. minima) v bodě $x_0 \in G$, potom $\Phi\, u(x_0) \leqq 0$ (resp. $\Phi\, u(x_0) \geqq 0$).*

Jestliže $v \in \mathscr{L}$ a $\Phi v = 0$ na G, potom je funkce v harmonická na G.

Poznamenejme, že operátor $\tilde{\Delta}$, zavedený ve větě 17, splňuje předpoklady věty 18 (srv. [9]); $\mathscr{L}$ je ovšem množina všech spojitých funkcí, pro něž existuje limita v (6). Věta 17 je tedy důsledkem věty 18. Jako jiný příklad operátoru Φ uveďme (viz [9])

$$\Phi_1 u(x) = \lim_{r \to 0+} \frac{2(m + 2)\,(A(u; x, r) - u(x))}{r^2}$$

(prostor $\mathscr{L}$ se definuje podobně, jako nahoře). Poznamenejme, že operátory $\tilde{\Delta}$, Φ_1 se studují v souvislosti se subharmonickými funkcemi (viz např. [59], [60]).

Na okamžik nyní opustíme harmonické funkce a všimneme si krátce vět podobného typu pro funkce holomorfní v komplexní rovině E. Mezi harmonickými funkcemi v otevřené množině $G \subset E_2$ a holomorfními funkcemi v G je velmi těsná souvislost. Především reálná a imaginární část funkce holomorfní v G jsou harmonické funkce v G (plyne z Cauchyových-Riemannových podmínek). Je-li však dána harmonická funkce u v G, není vždy možno nalézt harmonickou funkci v v G tak, aby $u + iv$ byla holomorfní (stačí volit

$$G = E_2 - \{[0, 0]\}, \quad u(x) = u(x_1, x_2) = \log \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}.$$

Na druhé straně je to možné, když G je kruh (viz [45]) (nebo jednoduše souvislá oblast). Lze tedy říci, že každá harmonická funkce je lokálně reálnou částí jisté holomorfní funkce. Snadno lze nahlédnout, že příslušná funkce v (konjugovaná funkce) je určena jednoznačně až na konstantu.

Jednou ze základních vět analýzy v komplexním oboru je Cauchyova věta (viz např. [14]).

Věta 19. *Nechť funkce f je holomorfní v otevřené množině $G \subset E$ a nechť φ je Jordanova křivka konečné délky v G, jejíž vnitřek leží v G. Potom*

$$\int_\varphi f \, dz = 0.$$

Místo abychom formulovali Morrerovu větu (viz např. [61], [34]), která je v jistém smyslu obrácením Cauchyovy věty, uveďme následující zobecnění Morrerovy věty (viz [71]).

Věta 20. *Nechť $\{r_n\}$ je klesající posloupnost kladných čísel s limitou nula a nechť $\Gamma_n(z)$ $(z \in E)$ je kružnice o středu z a poloměru r_n. Předpokládejme, že $G \subset E$ je oblast a f je komplexní funkce definovaná na G a lebesgueovsky integrovatelná na každé kompaktní podmnožině G. Nechť pro skoro všechna $z \in G$ platí*

$$\int_{\Gamma_n(z)} f(\zeta) \, d\zeta = 0$$

pro každé n, pro něž $r_n < d(z, \partial G)$.

Potom existuje funkce $\tilde{f}$ holomorfní v G tak, že $f = \tilde{f}$ skoro všude v G.

Nyní si ovšem můžeme položit analogické otázky, jako v případě harmonických funkcí. Následující věta (v níž K_1 je množina všech podílů z/w, kde z, w jsou kladné kořeny Besselovy funkce J_1) připomíná „delsartovské" věty 6, 8 pro harmonické funkce. Větu dokázal L. Zalcman [71] 1972.

Věta 21. *Nechť komplexní funkce f je lebesgueovsky integrovatelná na každé kompaktní podmnožině E. Předpokládejme, že r_1, r_2 jsou různá reálná kladná čísla taková, že rovnost*

$$\int_{\Gamma_{r_j}(z)} f(\zeta) \, d\zeta = 0 \tag{7}$$

platí pro $j = 1, 2$ a skoro všechna $z \in E$. Jestliže $r_1/r_2 \notin K_1$, potom existuje funkce $\tilde{f}$ holomorfní v E tak, že $f = \tilde{f}$ skoro všude v E.

Na první pohled by se zdálo, že výjimečná množina K_1 se ve větě objevila jen z důvodu užité metody důkazu. Věta je hezká tím, že tomu tak není. Pišme $z = \xi + i\eta$ a zvolme libovolně $\alpha > 0$. Potom zvolme čísla $r_1, r_2, \ldots$ tak, aby $r_n\alpha$ byly všechny kladné kořeny funkce J_1. Konečně definujme v E funkci

$$g(z) = \exp(i\alpha\eta).$$

Lze dokázat [71], že pro každé j a každé $z \in E$ platí

$$\int_{\Gamma_{r_j}(z)} g(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Funkce g přitom není zřejmě holomorfní. Odtud je ihned vidět, že výjimečnou množinu K_1 nejen nelze vyloučit, ale ani zmenšit. Zároveň je vidět, že větu 21 nelze vylepšit v tom smyslu, že bychom požadovali pro každé $z \in E$ nulový integrál pouze pro jednu kružnici (předem zvoleného poloměru). (Stačí vhodně zvolit α.) Poznamenejme ještě, že kdybychom ve větě 21 předpokládali f spojitou, stačilo by požadovat (7) pro z z husté podmnožiny E.

V analogii mezi harmonickými funkcemi a holomorfními funkcemi musíme však být opatrní. Již jsme poznamenali, že spojitá funkce f na kruhu $\overline{\Omega_1(0)}$ bude harmonická na $\Omega_1(0)$, jestliže pro každé $z \in \Omega_1(0)$ existuje $\delta(z) \in (0, 1 - |z|\rangle$ tak, že

$$f(z) = L(f; z, \delta(z)).$$

Jestliže však f je spojitá komplexní funkce na $\overline{\Omega_1(0)}$ taková, že pro každé $z \in \Omega_1(0)$ existuje $\varepsilon(z)$ tak, že $0 < \varepsilon(z) \leqq 1 - |z|$ a

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon(z)}(z)} f(\zeta)\, d\zeta = 0, \tag{8}$$

nemusí ještě být takové funkce holomorfní v $\Omega_1(0)$. Stačí volit libovolnou spojitou funkci, která není identicky rovna nule a má nosič v $\Omega_{1/4}(0)$. Řešení následujícího problému není známo [71]:

Problém. *Rozhodněte, zda platí tato věta: Nechť f je spojitá komplexní funkce na $\overline{\Omega_1(0)}$. Buď $\varepsilon : z \mapsto \varepsilon(z)$ spojitá reálná funkce na $\Omega_1(0)$ taková, že $0 < \varepsilon(z) \leqq 1 - |z|$ pro všechna $z \in \Omega_1(0)$. Je-li splněna rovnost (8) pro každé $z \in \Omega_1(0)$, potom je funkce f holomorfní v $\Omega_1(0)$.*

Po této malé odbočce do komplexního oboru se vraťme opět k harmonickým funkcím v E_m. Z věty 3 se snadno odvodí následující tvrzení.

Věta 22. *Pro každou funkci u harmonickou a integrovatelnou na kouli* $\Omega = \Omega_r(x_0) \subset E_m$ *platí*

$$u(x_0) = \frac{1}{\mu_m(\Omega)} \int_\Omega u(x) \, d\mu_m(x) .$$

V souvislosti s touto větou definujme následující pojem. Nechť $G \subset E_m$ je otevřená neprázdná podmnožina konečné míry a nechť $x_0 \in G$. Bod x_0 nazveme harmonickým středem G, jestliže pro každou funkci u harmonickou a integrovatelnou na G platí

$$u(x_0) = \frac{1}{\mu_m(G)} \int_G u(x) \, d\mu_m(x) .$$

Viděli jsme, že střed koule je jejím harmonickým středem. Můžeme se ptát, jak vypadají množiny, pro něž existuje harmonický střed. Mohou to být ještě jiná tělesa než koule?

Tato otázka byla zkoumána W. Brödelem [10] 1939 pro konvexní množiny v E_2 (viz citaci [26]; práce [10] mi byla nedostupná) a A. Friedmanem a W. Littmanem v [26] 1962. Výsledky této práce jsou poněkud komplikované a nebudeme je zde uvádět. Poznamenejme, že autoři vyžadují jistou hladkost hranice a uvažují problém trochu složitější. Kromě objemových průměrů vyšetřují případ povrchových průměrů a nakonec zkoumají podobné problémy pro rovnici pro vedení tepla a vlnovou rovnici. Nyní uvedeme výsledky čtyř prací (v žádné z nich není zmínka o [10] a [26]), které se týkají problematiky harmonického středu.

Zajímavé tvrzení dokázal metodami komplexní proměnné (reprodukční jádra, konformní zobrazení) B. Epstein [20] 1962 (srv. s obecnější formulací v [7] 1965).

Věta 23. *Nechť* $G \neq \emptyset$ *je jednoduše souvislá oblast konečné míry v* E_2. *Předpokládejme, že* $x_0 \in G$ *je harmonický střed* G. *Potom* G *je kruh o středu* x_0.

I když chronologicky následuje práce [21], všimněme si výsledků, které dokázali M. Goldstein a W. H. Ow [32] 1971. Tato práce navazuje na [20] a všímá si jen rovinného případu. Ve větě 23 byla jednoduchá souvislost vynucena užitou metodou důkazu. V práci [32] je však ukázáno, že pokud hranice G je nesouvislá a není příliš „roztrhaná", množina G nemá harmonický střed. Dříve, než větu zformulujeme, připomeňme, že vlastním kontinuem v E_2 rozumíme uzavřenou souvislou množinu obsahující více než jeden bod.

Věta 24. *Nechť* $G \subset E_2$ *je oblast konečné míry a nechť* ∂G *má alespoň dvě různé komponenty, které jsou vlastní kontinua. Potom neexistuje harmonický střed množiny* G.

Poznamenejme, že autoři dokazují poněkud více, než je ve větě uvedeno a zobecňují Epsteinův výsledek (viz následující věta).

Věta 25. *Nechť $G \neq \emptyset$ je oblast konečné míry v E_2. Nechť ∂G má alespoň jednu komponentu, která je vlastní kontinuum. Jestliže x_0 je harmonickým středem množiny G, potom je G kruh o středu x_0.*

Problém (v rovině) tedy není zatím touto větou řešen pro množiny, jejichž hranice, názorně řečeno, je velmi „roztrhaná". Metody užité v [32] se opírají o vlastnosti reprodukčních jader a holomorfních funkcí na Riemannových plochách.

B. Epstein a M. M. Schiffer [21] 1965 se věnovali otázce harmonického středu v prostorech vyšší dimenze.

Věta 26. *Nechť $G \neq \emptyset$ je oblast konečné míry v E_m $(m \geqq 2)$ a nechť* $\operatorname{int}(E_m - G) \neq \emptyset$. *Předpokládejme, že x_0 je harmonický střed množiny G. Potom G je koule o středu x_0.*

Důkaz provádějí autoři pro $m = 3$ (není řečeno, jak se modifikuje důkaz pro $m = 2$) a v důkaze užívají kulové inverze (proto předpoklad $\operatorname{int}(E_m - G) \neq \emptyset$).

Poslední věta, kterou uvedeme, zobecňuje předchozí výsledky.

Věta 27. *Nechť $G \subset E_m$ $(m \geqq 2)$ je neprázdná oblast konečné míry. Nechť x_0 je harmonický střed množiny G. Potom G je koule o středu x_0.*

Tato věta je elegantně dokázána Ü. Kuranem v [47] 1972. Naznačme si její důkaz[1]). Nechť $x_1 \in E_m - G$ je bod, který má nejbližší vzdálenost od bodu x_0; buď $r = |x_1 - x_0|$ a $\Omega = \Omega_r(x_0)$. Stačí dokázat, že $\Omega = G$.

Postupujme sporem. Jestliže $G - \Omega \neq \emptyset$, potom $0 < \mu_m(G - \bar{\Omega}) < \infty$ a pro každou funkci h harmonickou a integrovatelnou na G, pro niž $h(x_0) = 0$, musí platit

$$\int_{G-\bar{\Omega}} h \, d\mu_m = 0 \,, \tag{9}$$

neboť

$$0 = h(x_0) = \int_G h \, d\mu_m = \int_{G-\bar{\Omega}} h \, d\mu_m + \int_\Omega h \, d\mu_m = \int_{G-\bar{\Omega}} h \, d\mu_m \,.$$

Zvolíme-li ovšem $h(x) = K(x) - K(x_0)$, kde

$$K(x) = \frac{|x - x_0|^2 - r^2}{|x_1 - x|^m} \,,$$

je $h(x_0) = 0$ a h je harmonická, integrovatelná a kladná na $G - \bar{\Omega}$, což je spor s (9). (Zároveň si všimněme, že jsme v důkaze nepotřebovali, že G je souvislá.)

Uvedenými větami však není ani zdaleka problematika průměrů vyčerpána. Různé typy vět o průměru a jejich obrácení jsou známa pro obecnější parciální diferenciální rovnice než rovnice Laplaceova a také pro různé třídy funkcí (ne nutně

---

[1]) Na zjednodušení jedné úvahy v Kuranově důkaze mne upozornil V. Souček.

řešení rovnic). Vyšetřují se také jiné množiny než koule a obecnější míry než objemová míra na kouli a plošná míra na sféře. Zájemce o různá zobecnění odkazujeme kromě v textu uvedených citací na následující práce (v nichž lze nalézt další literaturu z příbuzné tematiky): [2], [8], [18], [22], [24], [27], [28], [29], [31], [33], [36], [39], [41], [55], [57], [58], [62], [63], [64], [65], [70], [72], [74] – [80].[2])

Je pozoruhodné, že tyto problémy zasahují do nejrůznějších oblastí matematiky a jejich řešení vyžaduje různorodý aparát. Vedle teorie parciálních diferenciálních rovnic a distribucí se setkáváme s metodami komplexní analýzy, ale také s algebraickými metodami, metodami teorie potenciálu, funkcionálních rovnic, náhodných procesů, ergodické teorie atd.

Literatura

[1] *M. A. Ackoglu, R. W. Sharpe:* Ergodic theory and boundaries, Trans. Amer. Math. Soc. *132* (1968), 447—460.

[2] *J. Aczél, H. Haruki, M. A. McKiernan, G. N. Sakovič:* General and regular solutions of functional equations characterizing harmonic polynomials, Aequationes Math. *1* (1968), 37—53.

[3] *S. Alinhac:* Une caractérisation des fonctions harmoniques dans un ouvert borné par des properiétés de moyenne sur certaines boules, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A—B *275* (1972), 29—31.

[4] *J. R. Baxter:* Restricted mean values and harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc. *167* (1972), 451—463.

[5] *E. F. Beckenbach, M. Reade:* Mean values and harmonic polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. *53* (1943), 230—238.

[6] *W. Blaschke:* Ein Mittelwertsatz und eine kennzeichnende Eigenschaft des logaritmischen Potentials, Ber. Ver. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig *68* (1916), 3—7.

[7] *A. K. Bose:* Functions satisfying a weighted average property, Trans. Amer. Math. Soc. *118* (1965), 472—487.

[8] *J. Bramble, L. E. Payne:* Mean value theorems for polyharmonic functions, Amer. Math. Monthly *73* (1966), 124—127.

[9] *M. Brelot:* Éléments de la théorie classique du potential, CDU, Paris, 1969.

[10] *W. Brödel:* Funktionen mit Gaussischen Mittelwerteigenschaften für konvexe Kurven und Bereiche, Deutsche Math. *4* (1939), 3—15.

[11] *A. Brunel:* Propriété restreinte de valeur moyenne caractérisant les fonctions harmoniques bornées sur un ouvert R^n (selon D. Heath et L. Orey), Exposé N° XIV, Séminaire Goulaouic-Schwartz, Paris, 1971—72.

[12] *Z. Cisielski, Z. Semadeni:* Przegląd niektórych nowszych metod w teorii potencjału III, Prace matematyczne *11* (1967), 99—128.

[13] *R. Courant, D. Hilbert:* Mathematical methods of Physics, vol. II, Interscience Pub., New York, 1966.

[14] *I. Černý:* Základy analysy v komplexním oboru, Academia, Praha, 1967.

[15] *J. Delsarte:* Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A—B *246* (1958), 1358—1360.

---

[2]) Citace [74]—[80] byly doplněny v průběhu recenzního řízení.

[16] *J. Delsarte, J. L. Lions:* Moyennes généralisées, Comment. Math. Helv. *33* (1959), 59—69.

[17] *J. Delsarte:* Lectures on topics in mean periodic functions and the two-radius theorem, Tata Inst. Fund. Research, Bombay, 1961.

[18] *J. Deny:* Familles fondamentales. Noyaux associés, Ann. Inst. Fourier *3* (1951), 73—101.

[19] Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, II. Band, 3.1., Teubner-Verlag, 1899—1916.

[20] *B. Epstein:* On the mean value property of harmonic functions, Proc. Amer. Math. Soc. *13* (1962), 830.

[21] *B. Epstein, M. M. Schiffer:* On the mean-value property of harmonic functions, J. Analyse Math. *14* (1965), 109—111.

[22] *G. C. Evans:* On potentials of positive mass, Trans. Amer. Math. Soc. *37* (1935), 226—253.

[23] *W. Feller:* Boundaries induced by non-negative matrices, Trans. Amer. Math. Soc. *83* (1956), 19—54.

[24] *L. Flatto:* Functions with a mean value property, J. Math. Mech. *10* (1961), 11—18.

[25] *L. Flatto:* The converse of Gauss's theorem for harmonic functions, J. Differential Equations *1* (1965), 483—490.

[26] *A. Friedman, W. Littman:* Bodies for which harmonic functions satisfy the mean value property, Trans. Amer. Math. Soc. *102* (1962), 147—166.

[27] *A. Friedman, W. Littman:* Functions satisfying the mean value property, Trans. Amer. Math. Soc. *102* (1962), 167—180.

[28] *W. Fulks:* An approximate Gauss mean value theorem, Pac. J. Math. *14* (1964), 513—516.

[29] *A. M. Garsia:* A note on the mean value property, Trans. Amer. Math. Soc. *102* (1962), 181—186.

[30] *C. F. Gauss:* Algemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrtem Verhältnisse des Quadrats der Entfernung Wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte, 1840, Werke, 5. Band, Göttingen, 1867.

[31] *R. Godement:* Une généralisation du théorème de la moyenne pour les fonctions harmoniques, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A—B *234* (1952), 2137—2139.

[32] *M. Goldstein, W. H. Ow:* On the mean-value property of harmonic functions, Proc. Amer. Math. Soc. *29* (1971), 341—344.

[33] *J. W. Green:* Mean values of harmonic functions on homothetic curves, Pac. J. Math. *6* (1956), 279—282.

[34] *M. Heins:* Complex function theory, Academic Press, New York, 1968.

[35] *L. L. Helms:* Introduction to potential theory, Wiley-Interscience, New York, 1969.

[36] *M. R. Hirschfeld:* Sur les fonctions μ-harmoniques dans un espace localement compact mesuré, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A—B *262* (1966), 174—176.

[37] *E. Hopf:* Bemerkungen zur Aufgabe 49, Jber. Deutsch. Math. Verein. 39 (1930), 2. Teil, 5—7.

[38] *F. Huckemann:* On the one circle problem for harmonic functions, J. London Math. Soc. 29 (1954), 491—497.

[39] *G. Choquet, J. Deny:* Sur quelques propriétés de moyenne caractéristiques des fonctions harmoniques et polyharmoniques, Bull. Soc. Math. France *72* (1944), 118—140.

[40] *V. Jarník:* Diferenciální počet II, NČSAV, Praha, 1956.

[41] *F. John:* Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, Interscience Publishers, New York, 1955.

[42] *O. D. Kellog:* Converses of Gauss's theorem on the arithmetic mean, Trans. Amer. Math. Soc. *36* (1934), 227—242.

[43] *C. D. Kellog:* Les moyennes arithmétiques dans la théorie du potentiel, L'Enseignement Math. *27* (1928), 14—26.

[44] *O. D. Kellog:* Foundations of Potential Theory, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[45] *J. Král, I. Netuka, J. Veselý:* Teorie potenticálu II, SPN, Praha, 1972.
[46] *P. Koebe:* Herleitung der partiellen Differentialgleichungen der Potentialfunktion aus deren Integraleigenschaft, Sitzungsber. Berlin. Math. Gessellschaft *5* (1906), 39—42.
[47] *Ü. Kuran:* On the mean value property of harmonic functions, Bull. London Math. Soc. *4* (1972), 311—312.
[48] *H. Lebesgue:* Sur le théorème de la moyenne de Gauss, Bull. Soc. Math. France *40* (1912), 16—17.
[49] *E. Levi:* Sopra una proprietà caratteristica delle funzione armoniche, Atti della Reale Acad. Lincei *18* (1909), 10—15.
[50] *J. L. Littlewood:* On the definition of a subharmonic function, J. London Math. Soc. *2* (1927), 189—192.
[51] *J. L. Littlewood:* Some problems in real and complex analysis, Hath. Math. Monographs, Massachusetts, 1968.
[52] *J. Mařík:* Úloha č. 10, Časopis Pěst. Mat. *81* (1956), 470.
[53] *J. Mařík:* Dirichletova úloha, Časopis Pěst. Mat. *82* (1957), 257—282.
[54] *I. Netuka:* Řešení úlohy č. 10, Časopis Pěst. Mat. *94* (1969), 223—225.
[55] *M. Parreau:* Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann, Ann. Inst. Fourier *3* (1951), 103—197.
[56] *M. Plancherel:* Les problèmes de Cantor et de du Bois-Reymond, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. *31* (1914), 223—262.
[57] *H. Poritsky:* On operations permutable with the Laplacian, Amer. J. Math. *54* (1932), 667—691.
[58] *H. Poritsky:* Generalizations of the Gauss law of spherical mean, Trans. Amer. Math. Soc. *43* (1938), 199—225.
[59] *I. Privaloff:* On a theorem of S. Saks, Mat. Sb. *9 (51)* (1941), 457—460.
[60] *S. Saks:* On the operators Blaschke and Privaloff for subharmonic functions, Mat. Sb. *9 (51)* (1941), 451—456.
[61] *S. Saks, A. Zykmund:* Analytic functions, PWN, Warszawa, 1965.
[62] *K. T. Smith:* Mean values and continuty cf Riesz potentials, Comm. Pure Appl. Math. *9* (1956), 569—576.
[63] *E. Smyrnélis:* Sur les moyennes des fonctions paraboliques, Bull. Sci. Math. *93* (1969), 163—173.
[64] *E. Smyrnélis:* Mesures normales et fonctions harmoniques, Bull. Sci. Math. *95* (1971), 197—207.
[65] *J. M. Thompson:* Distribution of mass for averages of Newtonian potential functions, Bull. Amer. Math. Soc. *41* (1935), 744—752.
[66] *L. Tonelli:* Sopra una proprietà caratteristica delle funzione armoniche, Atti della Reale Acad. Lincei *18* (1909), 557—582.
[67] *W. A. Veech:* A zero — one law for a class of random walks and a converse to Gauss mean value theorem, Ann. of Math. *97* (1973), 189—216.
[68] *W. A. Veech:* A converse to the mean value theorem for harmonic functions (preprint).
[69] *V. Volterra:* Alcune osservazioni sopra proprietà atte ad individuare una funzione, Atti della Reale Acad. Lincei *18* (1909), 263—266.
[70] *J. L. Walsh:* A mean value theorem for polynomials and harmonic polynomials, Bull. Amer. Math. Soc. *42* (1936), 923—930.
[71] *L. Zalcman:* Analyticity and the Pompeiue problem, Arch. Rational Mech. Anal. *47* (1972), 237—254.
[72] *L. Zalcman:* Mean values and differential equations, Israel J. Math. *14* (1973), 339—353.
[73] *S. Zaremba:* Contributions à la théorie d'une équation fonctionnelle de la physique, Rend. Circ. Mat. Palermo (1905), 140.

[74] *S. Alinhac:* Une caractérisation des fonctions harmoniques dans un ouvert par certaines propriétés de moyenne, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. *18* (1973), 1465—1472.
[75] *S. C. Chu:* On a mean value property for solutions of a wave equation, Amer. Math. Monthly *74* (1967), 711—713.
[76] *M. Nicolescu:* Une propriété caractéristique de moyenne des solutions régulières de l'équation de la chaleur, Com. Acad. R. P. Romåne *2* (1952), 677—679.
[77] *M. Nicolescu:* Sur une propriété caractéristique de moyenne des fonctions polycaloriques, Com. Acad. R. P. Romåne *4* (1954), 551—554.
[78] *M. Nicolescu:* Propriété de moyenne des fonctions harmoniques bornées dans un demi-plan ou dans un angle droit, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. *1* (1956), 43—50.
[79] *M. Nicolescu:* Sur les moyennes généralisées successives d'une fonction, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. *6* (1961), 429—441; Mathematica (Cluj) *4* (*27*) (1962), 107—121.
[80] *D. P. Stanford:* Functions satisfying a mean value property at their zeros, Amer. Math. Monthly *80* (1973), 665—667.
[81] *J. Barta:* Some mean value theorems in the potential theory, Acta Tech. Acad. Sci. Hungar. *75* (1973), 3—11.

Adresa autora: 118 00 Praha 1, Malostranské n. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

ALOIS KLÍČ, Praha: *Value distribution of meromorphic functions and their derivatives*. (Rozložení hodnot meromorfních funkcí a jejich derivací.)

V článku jsou uvedena některá zobecnění této Polyaovy-Saxerovy věty: Má-li celá transcendentní funkce konečnou Picardovu výjimečnou hodnotu, potom každá její derivace nabývá všech konečných nenulových hodnot nekonečněkrát.

LADISLAV NEBESKÝ, Praha: *On tree-complete graphs*. (O stromově úplných grafech.)

Řekneme, že graf o $p \geqq 1$ uzlech je stromově úplný, když pro kterýkoli strom S o p uzlech existuje podgraf grafu G, který je se stromem S izomorfní. V článku jsou dokázány tři věty o stromově úplných grafech.

IVAN CHAJDA, Přerov, BOHDAN ZELINKA, Liberec: *Compatible relations on algebras*. (Kompatibilní relace na algebrách.)

Buď $\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{F} \rangle$ algebra s finitními operacemi a ϱ binární relace na A. Řekneme, že ϱ je kompatibilní s algebrou $\mathfrak{A}$ právě když platí: Jestliže $f \in \mathscr{F}$ je n-ární operace (n je kladné celé číslo), $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ jsou prvky A, $(x_i, y_i) \in \varrho$ pro $i = 1, \ldots, n$, pak $(f(x_1, \ldots, x_n), f(y_1, \ldots, y_n)) \in \varrho$. V článku jsou studovány vlastnosti takových kompatibilních relací. Některé výsledky jsou zobecněním dřívějších výsledků autorů.

JÁN PLESNÍK, Bratislava: *Diametrically critical tournaments*. (Diametricky kritické turnaje.

Ak vylučením nejakej hrany (uzlu) turnaja T vzraste jeho priemer, potom povieme, že T je e-kritický (v-kritický). V článku je dokázaná existencia e-kritických a v-kritických turnajov s priemerom 2 a neexistencia e-kritických turnajov s väčším priemerom.

BOHDAN ZELINKA, Liberec: *On a certain distance between isomorphism classes of graphs*. (O vzdálenosti mezi isomorfními třídami grafů.)

V článku je zavedena vzdálenost mezi izomorfními třídami grafů, které mají stejný počet vrcholů a jsou studovány její vlastnosti.

IVAN NETUKA, Praha: *Fredholm radius of a potential theoretic operator for convex sets*. (Fredholmův poloměr operátoru souvisejícího s teorií potenciálu na konvexních množinách.)

Vyšetřování Neumannovy a Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici vede k jisté operátorové rovnici. V práci je vyčíslen Fredholmův poloměr příslušného operátoru pomocí geometrických veličin pro konvexní množiny. Z uvedeného výsledku vyplývá, že na konvexních množinách lze vždy řešit okrajové úlohy Fredholomovou metodou. Dále se v práci studuje vztah mezi konvexitou oblasti a nezáporností operátoru zobecněného potenciálu dvojvrstvy.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

RECENSE

COMPUTING METHODS IN APPLIED SCIENCES AND ENGINEERING. Part 1 & 2. Edited by R. Glowinski and J. L. Lions. Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1974. 497 a 434 stran, cena 34 a 30 DM. (Lecture Notes in Computer Science Vol. 10 & 11.)

Recenzovaná publikace je sborník přednášek, které byly prosloveny na symposiu Colloque International sur les Méthodes de Calcul Scientifique et Technique, konaném od 17. do 21. prosince 1973 ve Versailles. Pořadatelem symposia byl Institut de Recherche d'Informatique et d'Automatique (IRIA) pod záštitou IFIP. Zasedání se zúčastnilo asi 400 vědců a techniků z řady zemí.

Sborník obsahuje ve dvou svazcích celkem 39 přednášek z různých tématických okruhů. Většina autorů přednášek je z Francie. Velmi silně jsou ve sborníku zastoupeny USA, takže zhruba polovina příspěvků je ve francouštině, polovina v angličtině. Socialistické země reprezentují pouze G. I. Marčuk a V. V. Šajdurov z Novosibirska.

Přednášky jsou rozděleny podle témat do 8 skupin, jejichž názvy jsou: Všeobecné, Konečné prvky, Nelineární úlohy, Obvody a polovodiče, Mechanika kontinua, Úlohy o vlnění, Optimální řízení, Filtrace a identifikace. Charakter příspěvků ve sborníku je stejně různorodý jako jejich témata. Lze tu nalézt jak přednášky spíše teoretické, tak informace o řešení konkrétních úloh z technické praxe.

Referovat zde o jednotlivých přednáškách není vzhledem k rozsahu recenze možné a nebylo by patrně ani příliš účelné. Snad jen jako ilustraci, která může napovědět něco o odborné úrovni účastníků konference aspoň tomu, kdo někdy slyšel o metodě konečných prvků, uveďme jména autorů přednášek z tohoto oddílu sborníku. Jsou to J. M. Boisserie, P. G. Ciarlet, J. Douglas, T. Dupont, B. Fraeijs de Veubeke, B. M. Irons, P. Jamet, P. A. Raviart, G. Strang, M. F. Wheeler, O. C. Zienkiewicz.

Publikace zřejmě byla pořízena fotografickou cestou z předloh, dodaných autory. Vzhledem k tomu není v několika případech čitelnost vpisovaných vzorců a kvalita obrázků prvotřídní. Vcelku se dá říci, že recenzovaný sborník bude velmi užitečný pro celou řadu specialistů, kteří pracují v různých odvětvích aplikované a numerické matematiky.

Karel Segeth, Praha

R. Nevanlinna: ANALYTIC FUNCTIONS, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 162. svazek knižnice die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, 373 stran, 76 DM.

Proslulá Nevanlinnova učebnice Eindeutige analytische Funktionen vychází již ve 3. vydání, tentokrát jako revidovaný anglický překlad 2. německého vydání z r. 1953.

Jádrem knihy je výklad Nevanlinnovy teorie rozložení hodnot meromorfních funkcí. Pokusme se naznačit, oč v této teorii jde. Budiž f meromorfní funkce v kruhu $|z| < R \leqq \infty$. Označme $N(r, a)$ průměrnou hustotu jejích kořenů v kruhu $|z| \leqq r < R$, tj. $\int_0^r ((n(r, a) - n(0, a))/r)\, dr + n(0, a) \log r$, kde $n(r, a)$ je počet kořenů f v kruhu $|z| \leqq r < R$, $m(r, a)$ jakousi střední míru odchylky hodnot funkce f od hodnoty a na kružnici $|z| = r < R$, tj. pro a konečné

$(1/2\pi)\int_0^{2\pi}\log^+(1/|f(re^{i\theta})-a|)\,d\theta$, $(1/2\pi)\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta$ pro $a=\infty$, a konečně $T(r)=N(r,\infty)+m(r,\infty)$. Budiž speciálně $f(z)$ celistvá funkce e^z. Pro ni zřejmě $N(r,a)=0$, $m(r,a)=r/\pi$ pro $a=0,\infty$ a výpočet ukazuje $m(r,a)=O(1)$ pro $a\neq 0,\infty$. Elementárním odhadem spojeným s užitím Stirlingovy formule dostaneme $N(r,a)=r/\pi+O(1)$ pro $a\neq 0,\infty$. Je tedy $N(r,a)+m(r,a)=T(r)+O(1)$ pro všechna a. Tento fakt platí pro libovolnou meromorfní f a tvoří obsah první základní Nevanlinnovy věty. Zkoumáme-li tedy meromorfní funkci f nejen s hlediska zda a jak často nabývá komplexní hodnoty a, ale vezmeme-li v úvahu i jistou rychlost s jakou se f k a blíží, vidíme, že všechna komplexní čísla jsou vůči f rovnocenná. První základní věta udává přesný výraz pro tuto pozoruhodnou vlastnost meromorfních funkcí a zároveň horní odhad pro veličinu $N(r,a)$ a tím i pro počet kořenů rovnice $f(z)=a$. Všimněme si dále, že v hořejším příkladě je ve většině případů $N(r,a)$ podstatně větší než $m(r,a)$. Výjimku tvoří jen dvě hodnoty, totiž $a=0,\infty$. Také tento fakt, tj. jistý dolní odhad veličiny $N(r,a)$, platí obecně, samozřejmě s výjimkou těch funkcí, pro něž je $T(r)$ omezená funkce; ty jsou pro $R=\infty$ konstantní a v případě $R<\infty$ tvoří celou třídu s velmi zajímavými vlastnostmi. Jeho přesná početní formulace není zdaleka jednoduchá a tvoří obsah druhé základní Nevanlinnovy věty. Zatímco první základní věta spočívá v podstatě v přepsání a nové interpretaci Poissonova-Jensenova vzorce, leží druhá základní věta velmi hluboko, její důkaz je velmi těžký a plynou z ní dalekosáhlé důsledky. Tak např. jako velmi speciální případ obsahuje Picardovu větu i její zpřesnění pro celé funkce konečného řádu, podané Borelem.

Popišme nyní ve stručnosti obsah knihy. V kap. I. jde o konstrukci automorfních funkcí, jež nabývají všech hodnot s výjimkou $p\geqq 2$ konečných hodnot $a_1,\ldots,a_p$, ekvivalentně o konstrukci konformního zobrazení universální nakrývací plochy roviny s p vyňatými body na jednotkový kruh (rovinu v případě $p=2$). Poněvadž universální nakrývací plocha libovolné Riemannovy plochy je jednoduše souvislá Riemannova plocha, je existence hledaného konformního zobrazení velmi speciálním případem obecné věty o uniformisaci. V případě $p=3$, tj. pro modulární funkci, lze však její existenci dokázat známým způsobem jen pomocí Riemannovy věty o konformním zobrazení rovinných oblastí kombinované s prodlužováním pomocí principu symetrie. Pro $p>3$ není už situace tak jednoduchá a autor nastiňuje myšlenku důkazu Koebeho metodou. V závěru je ukázáno, jak lze pomocí těchto prostředků sestrojit příslušné funkce v p-násobně souvislých Jordanových oblastech. V kap. II. je řešena Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici s omezenou hraniční podmínkou, jež je spojitá až na konečně mnoho bodů. O oblasti se předpokládá, že je ohraničena $p\geqq 1$ Jordanovými křivkami. Pro $p=1$ vyjde existence pomocí konformního zobrazení na kruh, kde je k dispozici Poissonův integrál. Pro $p>1$ se užije konformního zobrazení universální nakrývací plochy oblasti z kap. I. a Poissonova integrálu. I když je tato metoda pro $p>3$ značně komplikovaná a je omezena jen na rovinu, je užitečné seznámit se s ní i pro ty, kteří ovládají dnes běžné metody teorie potenciálu. Na základě existence řešení Dirichletovy úlohy se pak konstruuje v těchto oblastech harmonická míra, Greenova funkce a studují se topologické vlastnosti křivek, na nichž je harmonická míra konstantní. Existenční věty z prvních dvou hlav tvoří základní aparát, o nějž se opírá celá kniha. Další dvě hlavy tvoří jednotný celek. V kap. III. jsou klasické výsledky, mj. Hadamardova věta o třech kruzích, Phragménovy-Lindelöfovy věty, Loewnerovo lemma, věty Landauova a Schottkyho vyloženy jako důsledky obecných majorisačních principů: principu harmonické resp. hyperbolické míry. V kap. IV. je zkoumána otázka, jak se deformují eukleidovské vztahy v oblasti dané třídy, jestliže ji (nebo její universální nakrývací plochu) zobrazíme na nějakou kanonickou oblast, např. na kruh, pás apod. V podstatě jde o vztah mezi harmonickou či hyperbolickou mírou a eukleidovskou mírou, neboť harmonická i hyperbolická míra je invariantní vůči konfromnímu zobrazení a jejich vztah k euklidovské míře v jednotkovém kruhu je znám přímo na základě jejich definice. Tyto otázky jsou velmi konkrétně a do značné hloubky studovány zejména v souvislosti s tzv. Carlemannovou-Millouxovou úlohou a s Ahlforsovými větami o deformaci při konformním zobrazení na pás. V kap. V. jsou zavedeny a studovány (kompaktní) množiny nulové harmonické míry a nulové kapacity a je ukázáno, že oba tyto pojmy splývají. Je vyjasněna souvislost těchto pojmů s Greenovou funkcí a logaritmickým potenciálem a dále souvislost s Hausdorffovými mírami odvozenými od libovolných spojitých neklesajících funkcí. Tyto vztahy jsou pronikavě osvětleny na příkladě obecných Cantorových diskontinuí. Kap. VI.—XIII. jsou věnovány Nevanlinnově teorii. V kap. VI. je vyložena první Nevanlinnova věta, geometrická interpretace charakteristiky $T(r)$, podaná Ahlforsem a Shimizu a Cartanova věta o konvexitě. Kap. VII. pojednává o třídě funkcí meromorfních v $|z| < 1$, jež mají omezenou charakteristiku $T(r)$. Je uvedena jejich charakterisace jakožto podílů funkcí omezených a holomorfních v $|z| < 1$, z níž plynou jejich hluboké hraniční vlastnosti. V závěru jsou udány aplikace na konformní zobrazení. V kap. VIII. je vybudována teorie růstu meromorfních funkcí, jež zobecňuje a z nového hlediska osvětluje klasickou klasifikaci celých funkcí, založenou na asymptotickém chování maxima modulu na kružnicích se středem v počátku. Celá IX. kap. je věnována formulaci a důkazu druhé Nevanlinnovy věty. Autor se v tomto vydání znovu vrátil k centrálnímu bodu své teorie a kromě diferenciálně geometrického důkazu uvádí i svůj původní tzv. elementární důkaz. Je obdivuhodné, s jakou jasností a přehledností jsou vyloženy jak základní ideje důkazu, tak i jeho technika, vyžadující velmi obtížné výpočty a vysoce důvtipné odhady. Mistrovský výklad dokonale koresponduje s dalekosáhlým významem této věty. Z ní je v kap. X. odvozena věta o defektech, jež velmi názorně ukazuje hloubku Nevanlinnovy teorie: nejenže obsahuje Picardovu větu jako velmi speciální případ, ale umožňuje velmi jemně rozlišovat mezi relativními hustotami, s nimiž daná meromorfní funkce nabývá různých hodnot. Poslední tři kapitoly jsou věnovány geometrickému pojetí teorie rozložení hodnot. V kap. XI. jsou studovány (jednoduše souvislé) Riemannovy plochy analytických funkcí inversních k funkcím meromorfním v dané jednoduše souvislé rovinné oblasti a jejich hraniční body (věta Iversenova a Grossova) a velmi detailně jejich různé podtřídy. Kap. XII. je věnována problému typu otevřené (tj. nekompaktní) Riemannovy plochy. Jde o to rozhodnout na základě jejích topologických a metrických vlastností, zda ji lze konfromně zobrazit na rovinu (parabolický typ) či na jednotkový kruh (hyperbolický typ). Z tohoto hlediska jsou věty o defektech meromorfní funkce f chápány jako výroky o charakteru rozvětvení Riemannovy plochy analytické funkce inversní k f. Vyvrcholením tohoto pojetí je výklad Ahlforsova zobecnění teorie rozložení hodnot v kap. XIII., jež spočívá v přímém studiu nakrývacích ploch, pro něž jsou axiomaticky formulovány jisté metrické vlastnosti. V této abstraktní situaci jsou vysloveny a dokázány základní Nevanlinnovy věty a ukázány aplikace na konformní zobrazení jednoduše souvislých Riemannových ploch.

Po technické stránce spočívala revise v novém přehlednějším očíslování vzorců a odstavců. Recensent má pocit, že jazyk anglického překladu místy nekoresponduje s úrovní knihy, jež, i přes obtížnost četby, zůstává dosud nepřekonaným a stále podnětným výkladem krásné a hluboké teorie.

Jaroslav Fuka, Praha

L. Sario, M. Nakai: CLASSIFICATION THEORY OF RIEMANN SURFACES, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 164, Springer-Verlag Berlin—Heidelberg—New York, 446 stran, cena DM 98,—.

Jde o velkoryse koncipovanou monografii o problému klasifikace Riemannových ploch. Klasifikačním principem je triviálnost speciálních tříd holomorfních či harmonických funkcí na dané (nekompaktní) Riemannově ploše. Tak např. O_{AD} resp. O_{HB} resp. O_G je třída Riemannových ploch, na nichž neexistují nekonstantní holomorfní funkce s konečným Dirichletovým integrálem resp. nekonstantní omezené harmonické funkce resp. Greenova funkce, atp. V teorii klasifikace Riemannových ploch se studují vztahy inkluse mezi O-třídami Riemannových ploch. Toto studium vzniklo z klasické Riemannovy věty (formulované jím pro jednoduše souvislé nakrývací plochy nad rovinou), z problému typu (viz předchozí recenzi) a z problému existence Greenovy funkce, jehož význam uvádí již Riemann ve své disertaci.

V kap. I. jsou studovány holomorfní funkce s konečným Dirichletovým integrálem, tj. různé metody, jež umožňují zařadit danou Riemannovu plochu do třídy O_{AD}. V kap. II. jsou tyto otázky studovány pro jiné třídy holomorfních funkcí, zejména pro omezené funkce. Kap. III. a IV. jsou věnovány studiu harmonických funkcí, a to kap. III. třídě O_{HD} a kap. IV. ostatním třídám harmonických funkcí, zejména omezeným funkcím. Základním nástrojem je v kap. III. tzv. Roydenova kompaktifikace Riemannovy plochy R, jež umožňuje vůbec formulovat Dirichletovu úlohu (s okrajovými podmínkami na Roydenově hranici R) a za druhé podat její řešení ve tvaru integrálu z hraničních hodnot podle harmonické míry. Analogickou roli hraje v kap. IV. tzv. Wienerova kompaktifikace dané Riemannovy plochy. Kap. V. je věnována studiu funkcí s logaritmickými singularitami, tj. zejména třídě O_G. $R \in O_G$ se nazývá parabolického typu a v rovinném případě splývá O_G s O_{HD}.

Konečně v kap. VI. jsou zkoumány funkce s Iversenovou vlastností, tj. zhruba řečeno ty meromorfní funkce na dané Riemannově ploše, jejichž chování vně libovolného kompaktu je analogické chování obyčejných meromorfních funkcí v okolí podstatné singularity. V dodatku jsou studovány zcela nové a nečekané jevy, jež vznikají při pokusu přenést vyloženou teorii na vícedimensionální Riemannovy variety. Zatímco v kap. I.—VI. je problematika rozpitvána do nejmenších podrobností, je úkolem dodatku spíše upozornit čtenáře na spoustu problémů spojených s přechodem k vyšším dimensím.

Tento schematický přehled nemůže zachytit bohatost obsahu a hloubku a obtížnost teorie, která je zbudována na velmi jemných a důmyslných konstrukcích příkladů a protipříkladů. V nich je, vedle principu klasifikace, jehož idea krystalizovala několik desítek let, největší cena a život monografie. Tyto příklady jasně ilustrují intuitivně zcela nečekané chování Riemannových ploch nekonečného rodu na rozdíl od bezprostřednímu názoru nejpřístupnějších rovinných oblastí. Tak např. pro rovinné oblasti (dokonce pro Riemannovy plochy konečného rodu) navzájem splývají třídy O_G, O_{HP} (P znamená positivní), O_{HB}, O_{HD}. Pro plochy nekonečného rodu naproti tomu platí jen $O_G \subset O_{HP} \subset O_{HB} \subset O_{HD}$, přičemž všechny inkluze jsou ostré. Existuje tedy např. Riemannova plocha (nekonečného rodu), na níž neexistuje nekonstantní omezená harmonická funkce, avšak existuje na ní nekonstantní zdola omezená (positivní) harmonická funkce! Východiskem ke konstrukci tohoto a analogických příkladů je Tôkiho příklad Riemannovy plochy, na níž neexistuje nekonstantní harmonická funkce s konečným Dirichletovým integrálem, avšak existuje na ní nekonstantní omezená harmonická funkce. Autoři pokládají Tôkiho příklad za jeden z nejvýznamnějších výkonů v teorii klasifikace. Z velké řady dalších pozoruhodných příkladů uveďme ještě Garnettův příklad kompaktu, který má kladnou lineární míru leč nulovou analytickou kapacitu (jde o zjednodušení původní Vituškinovy konstrukce) a jednoduchý, ale pro celou teorii klasifikace závažný Myrbergův příklad Riemannovy plochy $R \in O_{AB}$, kterou lze konformně vložit do jiné Riemannovy plochy R' tak, že komplement jejího obrazu má v R' vnitřní body.

Kniha se pěkně čte. Před každou kapitolou a paragrafem je stručný výklad jejich obsahu a v úvodu jsou jako motivace uvedeny (bez důkazu) příklady a problémy ze všech kapitol i dodatku. Všechny hlavní výsledky 400-stránkové monografie jsou schematicky zachyceny na jediné stránce (str. IX.) v „tabulce ostrých inkluzí". Kniha tvoří jediný harmonický celek, který neobsahuje isolované výsledky.

Jaroslav Fuka, Praha

L. Sario, K. Oikawa: CAPACITY FUNCTIONS, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 149, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 361 stran, cena DM 96,—.

Budiž G jednoduše souvislá rovinná oblast, jejíž hranice v rozšířené rovině je bod resp. vlastní kontinuum. Je-li φ libovolné (prosté) konformní zobrazení G do rozšířené roviny, pak podle Riemannovy věty je hranice oblasti $\varphi(G)$ zase bod resp. vlastní kontinuum. Podstatně jiná situace nastává pro nekonečně násobně souvislé oblasti. Je-li totiž $G \subset C$ oblast konečné (dvojrozměrné) Lebesgueovy míry, jejíž hranice v rozšířené rovině je totálně nesouvislá, pak ji lze konformně zobrazit dovnitř jednotkového kruhu, přičemž bod ∞ se „roztáhne" na celou jednotkovou kružnici.

Je-li nyní G libovolná rovinná oblast, pak její hraniční komponenta se nazývá jemná resp. hrubá (v anglické terminologii weak, resp. strong), jestliže při libovolném konformním zobrazení oblasti G přejde vždy v bod resp. kontinuum, a nestabilní (unstable), jestliže není ani jemná ani hrubá. Vzniká problém charakterizovat každý z těchto typů v konformně invariantních termínech závisejících jen na dané oblasti G.

Jasný přehled tohoto problému podal M. H. Stone na pražském topologickém symposiu v r. 1961. Prostředkem k jeho řešení jsou kapacitní funkce a kapacity, zavedené L. Sariem v r. 1954. Nulovost kapacity hranice či její části vyjadřuje, že tato část degeneruje v jediný bod. Recenzovaná monografie je prvním systematickým výkladem teorie kapacitních funkcí a jejich aplikací v geometrické teorii analytických funkcí.

Kniha sestává ze tří částí. Část I., nazvaná Analytická teorie, je věnována vybudování aparátu kapacitních funkcí a kapacit na libovolných Riemannových plochách. Jde tu o dalekosáhlé zobecnění klasického pojmu rovnovážného potenciálu a (logaritmické) kapacity.

V druhé části, nazvané Geometrická teorie, je vyjasněna hluboká souvislost mezi teorií z části I. a konformním zobrazením rovinné oblasti na různé typy kanonických oblastí: rovina s paralelními výřezy, kruh nebo mezikruží s radiálními či „cirkulárními" výřezy a na extremální oblasti uvedených typů (tento pojem zužuje příslušnou třídu kanonických oblastí jen pro oblasti nekonečněnásobně souvislé), zavedené Koebem.

Třetí část, nazvaná Nulové třídy, je věnována dvěma tématům. První z nich je charakterizace a vlastnosti těch O-tříd (viz předchozí recenzi) Riemannových ploch, jež souvisejí s kapacitními funkcemi. Intuitivně jsou tyto třídy svázány s problémy odstranitelnosti singularit, hraničního chování funkcí a prodlužitelnosti Riemannových ploch. V případě Riemannových ploch nekonečného rodu tato intuice selhává: triviálnost třídy funkcí nemá nutně za následek „malost" hranice (viz Myrbergův příklad, uvedený v předchozí recenzi). Druhé téma je věnováno praktickým testům, jak např. rozhodnout, zda daná hraniční komponenta je jemná, nestabilní atp. Kniha obsahuje dva dodatky. V prvním z nich je vyložena Ahlforsova-Beurlingova teorie extremální délky a v druhém klasická teorie rovnovážného (logaritmického) potenciálu. Ke knize je připojeno 31 problémů jako cvičení (v řadě případů jde o publikované výsledky) a seznam 10 v textu formulovaných otevřených problémů.

Jaroslav Fuka, Praha

Schecher, Heinz: FUNKTIONELLER AUFBAU DIGITALER RECHENANLAGEN. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1973. 273 stran (z toho 254 stran textu), 178 obrázků, cena 16,80 DM.

Posuzovaná kniha by mohla mít výstižný podtitul „O technickém vybavení počítačů od A po Z", jak ukazuje její obsah, který je dále heslovitě uveden:

1. kap.: Logické členy (kombinační) a jejich schematické značky — relé, spínače, DTL, TTL, ECL, integrované obvody MOS-FET.

2. kap.: „Výstavba jednoduchých stavebních skupin z logických členů" — klopné obvody asynchronní RS, T a JK, synchronní JK a D, „Master-Slave", monostabilní, astabilní, Schmittovy; čítače a posuvné registry.

3. kap.: Aritmetická jednotka — reprezentace záporných čísel, seriová sčítačka, půlsčítačka, úplná sčítačka, paralelní sčítačka (střádačového typu a „carry-look-ahead"), šestnáctková soustava, násobení, dělení, kódy, desítková sčítačka, aritmetické operace v desítkové soustavě, pohyblivá řádová čárka.

4. kap.: Řízení aritmetických operací — pomocí posuvného registru, čítače a mikroprogramu v ROM; ROM s magnetickými jádry a polovodičovou maticí.

5. kap.: Řadič — činnost při provádění typických instrukcí bez modifikace adres i s ní, zvláštní registry (pro návrat z podprogramu — LIFO, registr příznaků).

6. kap.: Paměť (operační) — základní pojmy, zabezpečení informací, fyzikální vlastnosti feritových jader, výběr jader, vinutí, pravoúhlost hysterezních smyček, impulzní diagramy, zapojení zapisovacích zesilovačů a výběrových obvodů.

7. kap.: Paralelní činnost jednotek — všeobecný úvod, paralelní činnost bloků feritové paměti, kanály („standardní" a „rychlé", jejich výstavba, řízení a spojení s operační pamětí).

8. kap.: Spolupráce operační a „záložní" paměti — stránkování, segmentace, polovodičové paměti (bipolární a MOS), asociativní paměti.

9. kap.: Periferní zařízení — velkokapacitní feritové paměti, paměti bubnové, diskové, magn. páskové a magn. štítkové, snímače a děrovače děrné pásky a děrných štítků, tiskárny, souřadnicové zapisovače, převodníky, psací stroje, obrazovkové displeje, satelitní počítače, terminály, zařízení pro čtení znaků.

Je tedy vidět, že první věta této recenze byla oprávněná. Stejně oprávněná je jistě otázka, zda lze tuto látku vtěsnat na 254 stran (včetně předmluvy a úvodu). Snad by to bylo možné, kdyby se autor omezil pouze na základní informace. Ten však často zabíhá do detailů. Potom mu nezbývá místo pro vysvětlení důležitých pojmů a principů. Tak např. hned v prvé kapitole začíná názorně s ovládáním zvonku a končí u obvodů MOS-FET, aniž by někde bylo vysvětleno, co je to logický součet nebo součin. Jiný příklad: čtenář se nedozví co je Karnaughova mapa a co je ALGOL-68, ačkoliv je autor používá (str. 30 a 66).

Výklad není příliš systematický. Např. na str. 18 je uveden čítač v kódu BCD, ale definice tohoto kódu je uvedena až na str. 46.

Kniha je opatřena rejstříkem. Vyhledání hesla je však někdy problematické. Tak např. heslo „Lichtstift" je třeba hledat pod písmenem „B" (Bildschrimgeräte). Heslo „Hintergrundspeicher" se mi vůbec nepodařilo nalézt, ačkoliv je dost důležité. Naproti tomu lze nalézt heslo „Kritischer Pegel", které lze stěží pokládat v daném kontextu za důležité.

Na závěr lze říci, že velmi zajímavá osnova nebyla v knize zpracována právě nejlépe.

Alois Pluháček, Třebařov

Nathan Jacobson: BASIC ALGEBRA I. W. H. Freeman and Company, San Francisco 1974. Stran XVI + 472, cena $ 13.95.

Knihu napsal známý specialista v teorii Lieových algeber, který v současné době je profesorem na Yale University. Je autorem vysoce respektované trojsvazkové učebnice *Lectures in Abstract Algebra* (1951, 1953 resp. 1964). Od vydání těchto knih však došlo k mnoha pozoruhodným událostem v matematice, které ovlivnily algebru: byl to např. mohutný rozvoje teorie kategorií, homologické algebry, teorie modulů. Autorovým záměrem je, aby v prvním dílu byly zahrnuty ty partie algebry, které mohou být doceněny začínajícím studentem. Mnoho předkládaného materiálu má historickou — tj. klasickou — příchuť a vede k ocenění velkého přínosu 19. století pro rozvoj algebry. Výklad je však podán nejmodernějšími mocnými prostředky; je motivován problémy, pro které může mít porozumění i začínající student, probíraná témata však jdou do hloubky, která není obvyklá v jiných učebnicích a která tedy klade značné nároky na studentův talent a koncentraci při studiu. Kniha má být učebnicí algebry, která následuje ihned po lineární algebře. Text je doplněn velkou řadou cvičení. Vzhledem k autorově reputaci a kvalitě knihy by se s ní měli seznámit minimálně přednášející algebry na vysokých školách; nepochybně v ní najdou mnoho konkrétního materiálu a poučné pro ně bude i jeho zpracování.

Nyní k obsahu knihy. V *Úvodu* o teorii množin a přirozených číslech je uveden materiál, který řada čtenářů bude znát: algebra množin, matematická indukce, relace ekvivalence, komutativní diagramy, základní věta aritmetiky. První kapitola *Monoidy a grupy* začíná pojmem monoidu a grupy transformací a sleduje tak historický vývoj. Podrobně je studován pojem homomorfismu a pojem grupy, operující na množině. Specielní pozornost je věnována konečným grupám, teorie vrcholí důkazem Sylowových vět. Druhá kapitola *Okruhy* začíná příklady a definicemi speciálních okruhů (např. obory integrity a tělesa), pokračuje se teorií ideálů, faktorokruhů, homomorfismů, těles zlomků, polynomiálních okruhů, hlavních a eukleidovských oborů. Hlavním předmětem třetí kapitoly *Moduly* je teorie struktury konečně generovaných modulů a její aplikace na abelovské grupy a kanonické tvary matic. Je dokázána věta o struktuře modulů, věta o invarianci, prostudován okruh endomorfismů modulu. Čtvrtá kapitola *Galoisova teorie* pojednává o dvou klasických otázkách: řešení rovnic a konstrukce pravítkem a kružítkem. Nejprve se doplní teorie konečných grup z první kapitoly tak, aby bylo možno dokázat Galoisovo kriterium pro řešitelnost rovnice. Autor podává i důkaz transcendentnosti čísla π. V závěru kapitoly se Galoisova teorie používá k odvození hlavních vět o konečných tělesech a k důkazu vět o primitivních elementech a normálních basích; dokazují se i hlavní věty o normách a stopách. Jedním z hlavních příkladů textu je nalezení n-úhelníků, konstruovatelných kružítkem a pravítkem. Kapitola pátá *Reálné polynomiální rovnice* pojednává o těchto rovnicích nad reálnými uzavřenými tělesy. Dokazuje se Sturmova věta, Eukleidův algoritmus, ukazuje se proces eliminace a Seidenbergova metoda pro rozhodnutí existence bodu algebraické křivky $f(x, y) = 0$. Závěrem se podle Tarskiho ukazuje maximálně možné zobecnění Sturmovy věty.

První část šesté kapitoly *Metrické vektorové prostory a klasické grupy* probírá základy teorie kvadratických resp. alternujících forem nad libovolným tělesem, což zahrnuje Sylvesterovu větu o inerciálním indexu. Je dokázána Cartanova-Dieudonného věta o rozkladu ortogonální transformace na symetrie. Druhá část kapitoly je věnována struktuře klasických grup: lineární, ortogonální a symplektické. Výklad je podán jednotnou metodou, pocházející od Iwasawy a Tamagawy. Jsou stanoveny řády těchto grup nad konečnými tělesy. V sedmé kapitole *Algebry nad tělesy* se probírá asociativní a neasociativní případ. Vnější algebry se aplikují na teorii determinantů. Z hlavních neasociativních algeber jsou uvedeny Lieovy a Jordanovy algebry. Kapitola končí řešením Hurwitzova problému o existenci identit tvaru $\Sigma x_i^2 \, . \, \Sigma y_i^2 = \Sigma z_i^2$, $z_i = \Sigma a_{ijk} x_j y_k$, nalezením všech komposičních algeber (tj. neasociativních algeber s 1 a kvadratickou formou Q takovou, že $Q(xy) = Q(x)\, Q(y)$) a Frobeniovou a Wedderburnovou větou. Konečně krátká osmá kapitola *Svazy a Booleovy algebry* probírá Jordanovu-Hölderovu větu, fundamentální větu projektivní geometrie a Stoneovu větu o ekvivalenci pojmu Booleovy algebry a Booleova okruhu.

Alois Švec, Praha

B. L. van der Waerden: EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRAISCHE GEOMETRIE. 2. vydání. Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Bd. 51. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1973. Stran VII + 280, cena 42,— DM.

První vydání této knihy vyšlo v r. 1939, nynější vydání je nezměněný přetisk prvního vydání. Názvy jednotlivých kapitol: *Projektivní geometrie n-rozměrného prostoru, Algebraické funkce, Rovinné algebraické křivky, Algebraické variety, Algebraické korespondence a jejich užití, Pojem násobnosti, Lineární řady, Noetherova základní věta a její důsledky, Analýza singularit rovinné křivky.*

Kniha je geometrům velmi dobře známa, takže ji není třeba inzerovat; je dokonale zpracovanou učebnicí tzv. klasické algebraické geometrie. K druhému vydání jsou přidruženy dva články; prvním je *Der Zusammenhangssatz und der Multiplizitätsbegriff*, publikovaný v Math. Ann. *193*, 89—108 (1971). Druhý, pod názvem *The Foundation of Algebraic Geometry from Severi to André Weil*, je v podstatě autorovou přednáškou na kongresu v Nice v r. 1970 a zabývá se vývojem pojmu obecného bodu a specializace.

Alois Švec, Praha

Wilhelm Klingenberg: EINE VORLESUNG ÜBER DIFFERENTIALGEOMETRIE (Heidelberger Taschenbücher Nr. 107). Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1973. Str. 135, obr. 30, cena DM 14,80.

Knižka vznikla z autorových přednášek pro studenty středních semestrů. V předmluvě autor píše, že byl silně ovlivněn skriptem „Differential Geometry", které v roce 1954 vydal S. S. Chern. Na toho zase velmi působil W. Blaschke, u kterého v letech 1934—1935 studoval. A tak se v Klingenbergově knížce odráží i pojetí a rozvržení, která se poprvé objevila v Blaschkeho knize „Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie I: Elementare Differentialgeometrie" z roku 1921 (5. vyd. 1973, podstatně doplněné a přepracované K. Leichtweissem).

Po úvodní kapitole (str. 1—6) následuje kapitola 1 s tradiční elementární teorií křivek (Frenetův n-hran atd., str. 7—16) a kapitola 2 (str. 17—24) s geometrií ve velkém rovinných čar. V lokální teorii ploch (kap. 3, str. 25—56) jsou první a druhá základní forma; křivky na ploše; křivosti; rovnice Weingartenovy, Gaussovy a Mainardiho-Codazziho; speciální plochy (velmi názorně jsou nakresleny plochy centrální k dané ploše nebo průběh hlavních čar na trojosém elipsoidu i v okolí jeho kruhových bodů aj.). Kapitola 4 (str. 57—68) o lokální teorii vnitřní geometrie ploch zahrnuje paralelní posun, geodetické křivky a plochy konstantní křivosti. Dvojdimensionální Riemannova geometrie (kap. 5, str. 69—95) po studiu geodetických souřadnic ústí v diferencovatelné variety a diferenciální formy. Nejrozsáhlejší je poslední kapitola 6 (str. 96—129) o teorii ploch ve velkém: vejčité plochy, Gaussova-Bonnetova věta, geodetiky na ploše aj.

Knížka obsahuje velmi mnoho látky v sevřeném, úsporném slohu i stylizaci a upozorňuje na řadu problémů, k nimž se soustřeďuje dokonce současné úsilí. Příkladem může být zobecnění Plateauova problému na plochy nenulové konstantní anebo proměnné předepsané střední křivosti. I když je knížka skoupá na motivace, bude výborným úvodem do diferenciální geometrie, mistrně spojujícím starší látku s novou problematikou a otevřenými otázkami.

Zbyněk Nádeník, Praha

Wolfgang Walter: EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DER DISTRIBUTIONEN, 2. upravené vydání. Bibliographisches Institut Mannheim, Wien, Zürich B. I.-Wissenschaftsverlag 1974, VIII + 211 str., cena 18,— DM.

Stručný úvod do teorie distribucí na základě definicí L. Schwartze. Knížka obsahuje definici distribuce, základní početní výkony s distribucemi, zabývá se také topologickými otázkami v prostoru distribucí, přímým součinem a konvolucí distribucí. Jsou uvedeny některé souvislosti s diferenciálními rovnicemi, zejména parciálními. Závěr knihy obsahuje Fourierovy řady distribucí, Fourierovu transformaci, větu Paleyovu-Wienerovu a paragraf o Sobolevových prostorech.

Knížku lze doporučit všem, kteří chtějí získat základní informaci o distribucích z hlediska funkcionální analýzy. U nás taková kniha rozhodně chybí.

Štefan Schwabik, Praha

H. Rademacher: TOPICS IN ANALYTIC NUMBER THEORY, Springer Verlag 1973 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 169). Stran 320, cena 88,— DM.

Rukopis této knihy byl nalezen v rukopisné pozůstalosti prof. Rademachera po jeho smrti v r. 1969. Úkolu připravit knihu do tisku se ujala trojice bývalých posluchačů prof. Rademachera, dnes známých pracovníků v teorii čísel: E. Grosswald, J. Lehner a M. Newman. Zájemci o teorii čísel tak dostávají do rukou výsledek mnohaleté autorovy práce (prof. Rademacher začal pracovat na knize asi v r. 1944).

Recenzovaná kniha se svým zaměřením odlišuje od všech podobně zaměřených monografií, které vyšly v posledních deseti, dvaceti letech. Kromě tradičního materiálu z analytické teorie čísel — rozložení prvočísel a Riemannova funkce dzeta — obsahuje řadu (možno říci klasických) partií, které většinou byly doposud porůznu roztroušeny. Kniha v podstatě zahrnuje ty části analytické teorie čísel, v nichž výsledky dostáváme užitím rozličných identit mezi jistými speciálními funkcemi, nebo pomocí jejich vlastností. Více snad bude patrné z následujícího stručného přehledu obsahu knihy.

Prvá — analytická — část (kapitoly 1—5) obsahuje vybudování potřebných pomocných prostředků: Bernoulliho polynomy a čísla, funkce gamma, sumační formule (Eulerova-Mac Laurinova i Poissonova) — vše s odvozením základních vlastností ev. s použitím, věta Phragmén-Lindelöfova (s řadou aplikací).

Druhá část je věnována vybudování teorie některých speciálních funkcí se zřetelem k aplikacím v teorii čísel. Kapitoly šestá a sedmá obsahují standardní látku o Riemannově dzeta funkci a větě o rozložení prvočísel. Prvočíselná věta je však dokázána jen v elementárním tvaru (varianta obvyklého postupu s využitím Riemannovy-Lebesgueovy věty a věty Tauberova typu) a vztah mezi polohou nulových bodů Riemannovy dzeta funkce a odhadem zbytku v prvočíselné větě je probrán jen v obecné poloze bez odvození konkrétních výsledků. Osmá kapitola probírá Eisensteinovy řady, vztahy k Weierstrassově $\wp$-funkci, Lambertovy řady, modulární formy, Dedekindovu funkci — vše jen v elementárních základech pro potřebu kapitoly deváté, která obsahuje studium základních vlastností Dedekindových součtů, včetně zákona reciprocity.

Závěrečné kapitoly této druhé části, kapitoly desátá a jedenáctá obsahují základní vlastnosti funkcí theta a funkcí eliptických. Jako výsledky jsou zde odvozeny věty o reprezentaci čísel součtem čtverců (Jacobiho věta a analogické výsledky pro součty 2, 6, 8, 10 a 12 čtverců).

Knihu uzavírají dvě méně obsáhlé (po dvou kapitolách) části, věnované technice formálních mocninných řad (s aplikacemi v oblasti tzv. partitions včetně odvození Ramanujanových tvrzení) a kruhové metodě (Hardyho-Ramanujanova věta, aplikace na modulární formy kladné dimense).

Kniha je pochopitelně poplatná autorovu zaměření a obsahuje řadu jeho původních výsledků i z posledních let. Je psána velmi pečlivě a srozumitelně. Pro čtenáře nespecialistu bude asi nepříjemné, že autor klade snad příliš velký důraz na odvození (i třeba jen „početní") řady formulí a vztahů bez naznačení cíle. Knihu lze však bezpochyby doporučit jako základní přehled po teorii důležitých speciálních funkcí a jejich aplikacích na teorii čísel.

Břetislav Novák, Praha

F. L. Bauer, G. Goos: INFORMATIK, 2. díl, Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1971 (Heidelberger Taschenbücher sv. 91, Sammlung Informatik), stran XII + 200 (70 obr.), cena brož. výtisku DM 12,80.

Druhý díl informatiky přímo navazuje na díl první (i číslováním kapitol). Zahrnuje celkem čtyři kapitoly a dodatek.

5. kapitola (str. 1—43) je nadepsána *„Dynamické přidělování paměti"* a navazuje na otázky nadhozené již v kapitole 3, a to na úrovni strojově zaměřeného jazyka. Je podrobně pojednáno o třech hlavních tématech.

Především je podán popis využití zásobníkové paměti při blokové struktuře programů, která se charakterizuje takto: v pořadí, jak jednotlivé bloky začínají, se jim přiřadí přirozená čísla (jedničkou počínaje) a pak se před pořadové číslo bloku postupně předřadí pořadové číslo bezprostředně nadřazeného bloku atd., až se skončí u předřazeného čísla 1, které je pořadovým číslem celého programu. Pak se snadno objasňuje princip relativních adres, když je k disposici dostatečný počet indexových registrů, a to i pro případ polí.

Dále je pojednáno o procedurách a to zcela obecně. Zjednodušený případ „překopírování" (z kapitoly 3) je zde již opuštěn a místo něho je přijata dohoda, že každá deklarace procedury se považuje za blok, takže její očíslování a zařazení v celé blokové struktuře je pevně stanoveno (se všemi požadovanými důsledky). V případě rekursivních procedur se místo o různých exemplářích téže procedury hovoří o různých jejích „inkarnacích".

Konečně třetí a poslední téma je přidělování paměti bez předpokladů o blokové struktuře a bez využití zásobníkové paměti, tedy když jde prostě o hromadu (heap) paměťových buněk (třeba při garbage collection), potřebných při uložení složitějších (strukturovaných) hodnot. Při tom se při výkladu používá tzv. fantasijních jmen, zavedených v 1. dílu, která souvisí se symboly *loc* a *heap* v ALGOLu 68.

6. kapitola (str. 44—99) je nadepsána „*Vedlejší paměti a spojení s vnějším světem, základní programy*" a její převážná část obsahuje technický popis různých druhů pamětí, popis vstupních a výstupních zařízení i přenosových kanálů, vše ovšem s ohledem na využití terminologie ALGOLu 68. Při tom se popisují principy stránkování paměti, které odpovídá rozdělení knihy na stránky a řádky (a tvoření svazků z několika knih). Řádek stránky je právě celkem, který může být přenášen najednou. S hlediska úloh na zpracování dat jsou údaje děleny do záznamů (record), z nichž jsou sestaveny stránky, knihy a svazky jako množiny záznamů (file = data set), které mohou mít různou strukturu. Takto se přejde k popisu základních pojmů operačních systémů, ale ve velmi obecné rovině. Rovněž o překladači je pojednáno jen obecně (a pouze na dvou stránkách).

7. kapitola (str. 100—144) je nadepsána „*Automaty a formální jazyky*". Velice stručně jsou uvedeny základní pojmy teorie automatů (bez výstupů a s výstupem), opřené o pojem pologrupy. Formální jazyky jsou stručně popsány ve shodě s Chomského hierarchií. Zvláště podrobně je pojednáno o syntaktické analýze. Proto je vyšetřována regulární gramatika a zaveden pojem zásobníkového automatu a operátorové a precedenční gramatiky. Tato kapitola má být předpokladem pro formální studium programovacích jazyků v kapitole 8.

Poslední 8. kapitola (str. 145—173) je nadepsána „*Syntaktická a sémantická definice algoritmických jazyků*". O syntaktické definici algoritmického jazyka se jednoduše říká, že je určena množinou příslušných popisovacích pravidel (produkcí) příslušné gramatiky. Pokud jde o sémantiku, zdůrazňuje se, že syntax musí odpovídat významu, což je srozumitelné a zřejmé u aritmetického výrazu. Pro případ aritmetického výrazu (nebo obecně termu) se také definice sémantiky redukuje na jeho převedení do bezzávorkového zápisu. V tomto případě se hovoří o operativní sémantice v, níž se však vůbec neuvažuje o vlastních významech jednotlivých operačních symbolů (jak je to běžné v teorii programových schémat). Dále je zmínka o sémantice McCarthyho, který již zavádí další pojem, totiž stav (paměti či proměnných), ale namítá se, že se takto nevystačí u paralelního či kolaterálního zpracování. Konečně jsou uvedeny základní pojmy sémantiky podle Floyda a Hoarea, která rovněž užívá pojmu stavu paměti ξ a navíc připouští různé výroky Q o něm, takže se píše $\xi \vdash Q$, aby se vyjádřilo, že za stavu ξ platí výrok Q. Jestliže se vykonáním nějakého příkazu (neboli operace S) stav ξ změní na stav ξS, může se stát, že platí: $\xi \vdash Q \Rightarrow \Rightarrow \xi S \vdash Q$, tj. že operace S nehcává „vlastnost" Q nezměněnu.

Dále je — zase velice obecně — pojednáno o překladu z algoritmických jazyků do jazyků strojových (jen 2 a půl strany) a nakonec jsou velmi stručně charakterizovány některé programovací jazyky. Při tom se uvažují následující tři kritéria: (I) je programovací jazyk přístupný? (jednoduchý případ nemá platit za složitosti, které jsou zavedeny pro případy složitější); (II) vede programovací jazyk uživatele k tomu, aby svůj program sestavil přehledně? (III) vede programovací jazyk uživatele k tomu, aby vyloučil, případně rozeznal chyby? Jsou uvedeny velice stručné poznámky o programovacích jazycích ALGOL 68, ALGOL 60, EULER a SIMULA 67.

Dodatek (str. 175—191) má název „*K dějinám informatiky*" a začíná Leibnizem. Uvádí se v něm řada jmen badatelů 17. až 19. století, kteří se pokoušeli o mechanizované počítání, až nakonec jsou uvedena jména konstruktérů prvních počítačů koncem války v USA. Kromě toho jsou však připojeny i stručné dějiny kryptologie a signalizace a také velice stručné dějiny automatů a algoritmů.

Nakonec je připojen seznam literatury (rovněž navazující číslováním na 1. díl), věcný resjtřík a dvě stránky oprav a chyb.

Kniha byla sepsána jako úvodní přehled, což je v matematické literatuře neobvyklé. Je to kniha nematematická, tj. nejsou v ní žádné matematické definice ani věty či důkazy, takže se nedá číst matematicky. Plní však své poslání, protože uvádí do současné problematiky počítačů a podává přehled současných pojmů a termínů. Zavedení německé terminologie do tohoto nového oboru bylo nepochybně rovněž jedním z cílů, které si autoři vytkli.

Karel Čulík, Brno

Martin Golubitsky, Victor Guillemin: STABLE MAPPINGS AND THEIR SINGULARITIES, Graduate Texts in Mathematics 14, Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin 1974. X + 209 stran. Cena 21,10 DM.

Autoři napsali tuto knihu s cílem vyložit studentům vyšších ročníků hezký a poměrně přístupný obor moderní matematiky — teorii singularit stabilních diferencovatelných zobrazení.

Úvodní kapitola obsahuje standardní výklad základního materiálu o hladkých (tj. nekonečně diferencovatelných) varietách a zobrazeních, tečných prostorech a libovolných vektorových bandlech. V 2. kapitole je podán velmi ucelený a hluboký výklad otázek transversality. Nejprve se dokazuje Sardova věta. Pak se definují prostory $J^k(X, Y)$ všech k-jetů z hladké variety X do hladké variety Y, $k = 1, 2, \ldots$, pomocí nichž se na prostoru $C^\infty(X, Y)$ všech hladkých zobrazení z X do Y zavádí Whitneyho C^∞-topologie (jiné topologie na $C^\infty(X, Y)$ se v knize neuvažují). Ukazuje se, že $C^\infty(X, Y)$ je Baireův prostor (každá jeho residuální podmnožina je hustá, přičemž residuální množina se definuje jako průnik spočetně mnoha otevřených a hustých množin). Pak se dokazuje Thomova věta o transversalitě: množina všech hladkých zobrazení z X do Y, jejichž k-tá jetová prolongace je transversální k dané podvarietě v $J^k(X, Y)$, je residuální. Dokazuje se i o něco obecnější multijetová věta o transversalitě, která právě v teorii singularit nachází podstatné aplikace. Těmito prostředky se pak snadno odvozují Whitneyho věty o imersi a vložení a věta o existenci Morseových funkcí. Kapitola končí důkazem existence tubulárního okolí dané podvariety. Na začátku 3. kapitoly se vedle stability hladkých zobrazení definuje i infinitesimální stabilita, z níž se později odvodí efektivní algoritmus pro vyšetřování stability. Pak se provádí srovnání obou pojmů v jazyce Frechetových variet (který je vůbec v teorii singularit heuristicky velice důležitý) a ukazuje se, že kdyby pro Frechetovy prostory platila věta o implicitní funkci, pak při kompaktním X by z ní ihned plynula ekvivalence stability a infinitesimální stability. Taková věta o implicitní funkci však neplatí a zmíněná ekvivalence bude zcela jiným způsobem (pomocí Malgrangeovy preparační věty) dokázána až v 5. kapitole, ale autoři věnují zbytek 3. kapitoly tomu, že pomocí podmínky pro infinitesimální stabilitu dokazují stabilitu řady geometricky zajímavých zobrazení: submersí, Morseových funkcí s různými kritickými hodnotami, prostých imersí, imersí s normálními průseky (normal crossings) a submersí s přehyby (with folds). 4. kapitola je věnována odvození několika technických vět, které jsou potřebné k důkazu věty o ekvivalenci. Neprve se uvažují funkce analytické, kde se Weierstrassova věta o dělení, jejímž speciálním případem je Weierstrassova preparační věta, dokazuje celkem snadno technikou Cauchyho ntegrálu. Důkaz analogických tvrzení pro hladké funkce, tj. Matherovy věty o dělení a Malgrangeovy preparační věty, je podstatně obtížnější a autoři volí důkaz Nirenbergův, který probíhá paralelně k analytickému případu a opírá se o jeho lemma o extensi. Ve zbytku kapitoly se provádějí příbuzné algebraické úvahy týkající se morfismů modulů s tzv. Weierstrassovou vlastností, čímž se dostává obecnější algebraická verze preparační věty. Důkaz věty o ekvivalenci stability a infinitesimální stability v 5. kapitole se provádí tak, že se zformuluje několik dalších pojmů stability (homotopická stabilita, stabilita vzhledem ke k-parametrickým deformacím, transversální stabilita), které jsou zajímavé i samy o sobě, a postupným odvozením řetězce vztahů mezi nimi se ukáže, že při kompaktním X jsou všechny tyto pojmy vzájemně ekvivalentní. Dokazují se rovněž obě základní věty o „konečnosti" problému stability: a) infinitesimální stabilita je charakterizována podmínkou řádu nejvýše dim Y, b) jestliže zobrazení je simultánně lokálně stabilní na všech konečných podmnožinách obsahujících nejvýše dim $Y + 1$ bodů, pak je stabilní.

Poslední dvě kapitoly jsou věnovány otázce klasifikace singularit a obsahují hojnost vhodně volených příkladů v nižších dimensích, které jsou nezbytné k hlubšímu proniknutí do celé problematiky. Část výkladu se přitom přesouvá do cvičení. V 6. kapitole se probírá původní Thomova klasifikace zdokonalená Boardmanem. Ukazuje se tu rovněž, že neplatí hypotéza, v niž se po jistou dobu věřilo, že stabilní zobrazení vždy tvoří hustou podmnožinou. V knize se dokazuje, že pokud dim $X =$ dim Y je čtverec přirozeného čísla většího než 2, pak stabilní zobrazení nejsou hustá. Bez důkazu se dále uvádějí Matherovy nerovnosti, které popisují všechny dvojice (dim X, dim Y), pro něž stabilní zobrazení nejsou hustá. V 7. kapitole se zavádí pojem lokálního okruhu germu zobrazení, který je jiným nástrojem ke klasifikaci singularit. Bez důkazu se uvádí Matherova věta, podle níž dvě stabilní singularity jsou ekvivalentní právě tehdy, jsou-li jejich lokální okruhy algebraicky isomorfní. Věty se však nepoužívá, ale určitá část této teorie se dále vykládá podrobně. Jako zobecnění lokálního okruhu germu zobrazení se zavádí pojem lokálního okruhu dotyku dvou podvariet stejné dimense ve společném bodě. V duchu tohoto přístupu se pak definuje dotyková ekvivalence dvou germů zobrazení, která určuje tzv. dotykové třídy singularit. Dokazuje se, že dvě singularity patří téže dotykové třídě právě tehdy, jsou-li jejich lokální okruhy isomorfní. Dále se popisuje charakter konečných singularit, tj. singularit, jejichž lokální okruh má konečnou dimensi nad $\mathbf{R}$, a pro některé z nich se nacházejí kanonické tvary. V některých nižších dimensích se pak podává úplná klasifikace všech stabilních singularit. V závěrečném dodatku se dokazuje, že orbity Lieovy transformační grupy jsou vnořené (immersed) podvariety, což bylo v předchozím textu několikrát použito.

Recenzovaná kniha je první a zatím jedinou učebnicí singularit, je psána živě a poutavě a je nepochybně zdařilá. Autoři dokázali vybrat nejdůležitější části dnes již značně rozpracované teorie (z toho základního chybí snad jen pojem Jacobiho ideálu germu zobrazení a problematika dostatečných jetů) a přitom vyložit i řadu výsledků, kterých bylo dosaženo teprve nedávno. Nové metody jsou vždy ukázány v celé své mohutnosti, některé věty se však neformulují v plné obecnosti, ale autoři se s pedagogickým taktem vyhýbají místům, která jsou pouze technicky komplikovaná. Mimo rámec knihy leží pochopitelně souvislosti mezi teorií singularit a algebraickou topologií. Knihu lze doporučit jak aspirantům, tak i všem zájemcům z řad matematiků.

Ivan Kolář, Brno

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

ZPRÁVY

K ŠESŤDESIATINÁM PROFESORA ANTONA HUŤU

ŠTEFAN MALINA, Bratislava

Prof. RNDr. ANTON HUŤA, CSc., narodil sa dňa 3. júla 1915 v Kluži (Rumunsko) ako syn učiteľa. Stredoškolské štúdium ukončil v roku 1934 na gymnáziu v Bratislave. Jeho matematické nadanie sa prejavilo aj vo voľbe smeru vysokoškolského štúdia.

Ako prvý zo slovenských študentov hneď po maturite zapísal si poistnú matematiku a matematickú štatistiku na Oddelení špeciálnych náuk na Českom vysokom učení technickom v Prahe. Toto štúdium s úspechom skončil v roku 1936. Pre ťažkosti spojené s možnosťou zamestnania, ale aj pre jeho lásku k učiteľskému povolaniu prameniaciu v rodinnom učiteľskom prostredí, začína hneď študovať matematiku a fyziku na vtedajšej Prírodovedeckej fakulte Univerzity Karlovej v Prahe. Ako veľmi usilovný a nadaný študent stačí vykonať I. štátnu skúšku z obidvoch zvolených predmetov ešte v roku 1938 pred štátnou skúšobnou komisiou v Prahe. V dôsledku násilneho uzavretia českých vysokých škôl je nútený ukončiť vysokoškolské štúdia v Bratislave. V roku 1941 úspešne absolvuje II. štátnu skúšku a v roku 1943 predkladá rigoróznu prácu, vykoná prísne rigorózne skúšky u nestora slovenských matematikov akademika SAV Jura Hronca a je promovaný na doktora prírodných vied (RNDr.).

Už skôr spomínaný veľmi dobrý vzťah k učiteľskému povolaniu a k tomu ešte jeho mimoriadne taktný vzťah k študentom a k spolupracovníkom je konkretizovaný v jeho učiteľskej dráhe. Už v roku 1939 pôsobí ako výpomocný učiteľ na bratislavskej reálke, potom 13 mesiacov v Robotníckej poisťovni v Bratislave ako poistný matematik, ale v roku 1940 znovu sa vracia do školských služieb. Po svojom krátkom pôsobení na gymnáziu stáva sa od decembra 1940 asitentom akademika SAV Jura Hronca a s ním v spolupráci s neveľkým počtom nemenovaných ďalších slovenských matematikov začínajú klásť základy matematickej vedy na Slovensku.

V životnej púti Prof. Huťu sa zračí aj cesta budovania matematiky na Slovensku, ktorá sa plne rozvinula v podmienkach socialistickej spoločnosti v oslobodenom Československu v účinnej spolupráci matematikov oboch našich bratských národov Čechov a Slovákov.

Prof. Huťa bol prvým vysokoškolským učiteľom matematiky ustanoveným na matematickom pracovisku Univerzity v Bratislave, pretože v tom čase iní slovenskí matematici pôsobiaci na vysokých školách boli ustanovení na Slovenskej vysokej škole technickej, kde externe pôsobil určitý čas aj Prof. Huťa. Vedecko-pedagogické a vedecké hodnosti nadobudol ako vysokoškolský učiteľ na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského v Bratislave. Podľa vtedajších platných predpisov bol v roku 1952 menovaný zástupcom docenta, v roku 1953 docentom, v roku 1959 získal vedeckú hodnosť kandidáta fyzikálno-matematických vied, v roku 1965 bol ustanovený zástupcom profesora a v roku 1966 bol vymenovaný mimoriadnym profesorom Prírodovedekckej fakulty UK pre odbor matematika.

Počas svojho pôsobenia na PFUK má podstatný vplyv na tvorbu matematických pracovísk zameraných na aplikácie matematiky, matematickú štatistiku a numerickú matematiku. Už v roku 1953 bol vedúcim Ústavu aplikovanej matematiky a matematickej štatistiky PFUK. Od roku 1968 viedol katedru matematiky PFUK a od roku 1970 vedie Katedru numerickej matematiky a matematickej štatistiky Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského v Bratislave.

V stredobode jeho pedagogickej činnosti sú prednášky a semináre z odboru numerická matematika a matematická štatistika pričom je všeobecne uznávaným odborníkom z aplikovanej matematiky. Jeho široký rozhľad a hlboké znalosti z týchto a príbuzných vedných odborov uspôsobujú ho konať prednášky na vysokej odbornej a pedagogickej úrovni, o ktoré je vždy záujem nielen medzi riadnymi študentami, ale aj medzi vedeckými pracovníkmi iných odborov, ktorí potrebujú najmä aplikovanú matematiku a matematickú štatistiku vo svojej práci. Široké spektrum jeho matematickej erudície bude zrejmejšie ak vymenujem aspoň názvy jeho prednášok: Numerické a grafické metódy, Vybrané partie z matematiky pre štatistikov, Matematické prístroje, Počet pravdepodobnosti (praktická časť), Teória pravdepodobnosti (teoretická časť: teória miery a Lebesgueov integrál), Prehľad analýzy, Algebraická analýza, Proseminár z algebry, Približné metódy analýzy, Základy matematickej štatistiky, Štatistika pre biológov, Aplikovaná matematika pre chemikov, Matematická štatistika I. a II., Štatistická kontrola akosti, Vybrané kapitoly z aplikovanej matematiky, Analýza rozptylu, Teória náhodných výberov, Testovanie a overovanie hypotéz, Úvod do elektrónkových počítacích strojov, Špeciálne funkcie, Vybrané kapitoly z aplikovanej matematiky, Kombinatorická analýza, Vybrané partie zo štatistiky.

Pokiaľ ide o oblasť jeho vedeckej činnosti tú je vidieť z prílohy, v ktorej sú uvedené nielen jeho vedecké práce ale aj ich účinnosť vo vedeckom svete, ktorá je dokumentovaná veľkou citáciou najmä zahraničných autorov a začlenením výsledkov jeho prác do učebníc. Z jeho 11 prác sú to dve práce z numerického riešenia diferenciálnych rovníc Runge-Kuttovou metódou, ktoré vyvolali mimoriadne kladný medzinárodný ohlas. Je nám známe, že boli citované v najmenej 25 východných aj západných odborných matematických časopisoch, ďalej v najmenej 7 vedeckých knihách a citované na najmenej 11 matematických kongresoch (v ZSSR, PĽR, RĽR, ČSSR, Veľkej Británii, USA, Taliansku atď.). Spomínané práce o numerickom riešení diferenciálnych rovníc a ich ohlas vo vedeckom svete dali podnet na zaradenie týchto partií matematiky do dlhodobej štátnej úlohy, na ktorej Prof. Huťa se svojim kolektívom pracuje. Pre študentov napísal študijnu literatúru.

Jeho široký styk s praxou podmienený jeho hlbokými znalosťami možností aplikácie matematiky je veľmi priaznivo oceňovaný, tak ako sme sa už skôr zmienili, vedcami z iných oborov. Preto títo odborníci vyhľadávajú a dožadujú sa jeho spolupráce. Za 30 rokov jeho činnosti poskytol takúto pomoc vyše 35 výskumným ústavom, priemyslu, ústavom SAV a ČSAV, katedrám UK, SVŠT a VŠE, klinikám, technickým oddeleniam povereníctiev a ministerstiev, biologickým a zdravotníckym ústavom a pod.

Prof. Huťa už od r. 1952 je členom štátnych skúšobných komisií, rigoróznych komisií, komisií pre nadobúdanie vedeckých hodností CSc. a DrSc. Zúčastnil sa mnohých našich aj medzinárodných matematických kongresov a sympózií, kde predniesol rad referátov.

Osobitne si ceníme prácu Prof. Huťu pri výchove mladých vedeckých pracovníkov najmä pokiaľ ide o výchovu ašpirantov z odboru matematická štatistika a numerická matematika. Priaznivý ohlas na jeho činnosť je zrejmý aj z toho, že je často vyžadovaný za oponenta kandidátskych a habilitačných prác z pracovísk z celého územia ČSSR.

Činnosť Prof. Huťu bola v r. 1965 ocenená medailou UK z príležitosti jeho 50. narodenín a v r. 1969 štátnym vyznamenaním „Za vynikajúcu prácu" z príležitosti 50. ročného jubilea UK a 500. ročného jubilea Akademie Istropolitany.

Jeho kladný, ba zanietený postoj k šíreniu záujmu o matematiku a matematiky samotnej je vidieť z toho, že už od maturity, t. j. od r. 1932, je neprerušene členom a zanieteným funkcionárom JČSMF. Za túto prácu dostal v roku 1962 medailu JČSMF z príležitosti 100 ročného jubilea Jednoty. Je jedným z najstarších žijúcich členov JČSMF na Slovensku. Aj lekári si vážia účinnosť jeho práce v svojom obore a preto ho v roku 1969 prijali za člena vedeckej spoločnosti čsl. lekárov J. E. Purkyně.

Nie je možné na tak malom možnom priestore opísať všetku blahodárnu činnosť, výsledky práce a zásluhy o rozvoj aplikovanej matematiky a matematiky vôbec nášho vzácneho jubilanta. Dovoľte mi preto zaželať nášmu jubilantovi, ktorý je všeobecne známy ako veľmi pracovitý, skromný a mimoriadne ušľachtilý človek, predošetkým veľa, veľa zdravia, osobnej a pracovnej aktivity.

Veľmi si ceníme Vašu prácu.

ZOZNAM PRÁC PROFESORA A. HUŤU

Vedecké práce

[1] Zovšeobecnenie opráv štatistických momentov. Sborník prác Prírodovedeckej fakulty, Bratislava 1946, str. 3—32.

[2] O funkcii T_k. Technický sborník, Bratislava 1950, str. 44—55.

[3] Une amélioration de la méthode de Runge-Kutta-Nyström pour la résolution numérique des équations différentielles du premier ordre. Acta fac. RNUC, Tom I. Fasc. IV—VI. 1956, str. 201—224.

[4] Contribution à la formule de sixième ordre dans la méthode de Runge-Kutta-Nyström. Acta fac. RNUC, Tom II. Fasc. I—II. 1957, str. 21—24.

[5] Über das formulae Ausdrücken des partikulären Integrals einer Differentialgleichung durch die Koeffizienten der gegeben Gleichung. Acta fac. RNUC, IV-3-5, 1959, str. 133—146.

[6] Formálne vyjadrenie partikulárneho integrálu dif. rovnice pomocou koeficientov danej rovnice. 1960. (V knihe J. Hronec: Diferenciálne rovnice I, SAV Bratislava, Druhé vydanie, str. 431—443.) (Slovenské spracovanie práce sub 5.)

[7] Eine Bemerkung zur Zerlegung der natürlichen Zahlen. Acta fac. RNUC. Tom. *IX.*, Fasc. II. 1964, str. 57—62.

[8] Die Beurteilung des therapeutischen Effektes der Antibiotika bei Tularämie. Wiener Medizinische Wochenschrift Viedeň, 1966, str. 308—311. (Spolupráca na výskumnej práci lekárov Kleibl, Bilíková, Klinda.)

[9] Die Möglichkeiten neuer Zutrite in der klinischen Zytostatikabewertung. Zborník IV. Conferentia Hungarica pro Therapia et Investigatione in Pharmacologia, Budapest 1968. (Spolupráca na výskumnej práci lekárov Černý, Winkler, Šándor, Haľko, Ujházy, Uhríková, Petrek, Koza.)

[10] Contribution to the Numerical Solution of Differential Equations by Means of Runge-Kutta Formulas with Newton-Cotes Numbers Weights. Acta fac. RNUC, Mathematica XXVIII — 1972, str. 51—65.

[11] Eine Verallgemeinerung des Runge-Kutta Verfahrens zur numerischen Lösung der Gleichung $y' = f(x, y)$. ZAMM 54, T*221* (1974) GAMM-Tagung München 1973.

Iné odborné práce

[1] O dichotomickom triedení. Príroda, Turč. Martin 1948, str. 75—79.

[2] Gaussova krivka ako pomôcka prírodných vied. Príroda, Turč. Martin 1949, str. 115—120.

[3] Základy počtu pravdepodobnosti. Vysokoškolské učebné texty. Slov. pedagog. nakladateľstvo, Bratislava 1953, str. 86.

[4] Matematická štatistika vo výskumníctve. Slov. ústav pre techn. a ekon. informácie, Bratislava, 1956, str. 93.

[5] Numerické riešenie dif. rovníc a sústav dif. rovníc prvého rádu. (V knihe J. Hronec: Diferenciálne rovnice I., SAV Bratislava, 1956, str. 350—366.)

V tomto zozname nie sú uvedené recenzie odborných kníh a prác, správy o štátnej úlohe a príležitostné články.

OSLAVA OSMDESÁTÝCH NAROZENIN PROF. PHDR. JOSEFA KAUCKÉHO

Dne 15. května 1975 uspořádala brněnská pobočka JČSMF slavnostní schůzi na počest osmdesátých narozenin prof. PhDr. JOSEFA KAUCKÉHO. Za bohaté účasti matematické veřejnosti o životě a díle jubilanta promluvil prof. RNDr. MIROSLAV NOVOTNÝ, DrSc. Prof. RNDr. MILAN KOLIBIAR, DrSc. z UK v Bratislavě vyzvedl zejména zásluhy prof. J. Kauckého o rozvoj matematiky na Slovensku. K přání všeho nejlepšího jubilantovi do dalších let se připojil jménem děkana strojní fakulty VUT v Brně prof. RNDr. MILOŠ ZLÁMAL, DrSc. a za brněnskou pobočku JČSMF prof. RNDr. ROSTISLAV KOŠŤÁL. Slavnostní schůze byla zakončena projevem jubilanta.

František Neuman, Brno

ČTVRTSTOLETÍ MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Chtěli bychom upozornit matematickou veřejnost, že ve školním roce 1975—76 probíhá v naší republice už 25. ročník celostátní soutěže, jež je známá pod názvem matematická olympiáda. Za uplynulou dobu se vykonal obrovský kus práce, organizovaly se přednášky pro středoškolské studenty, vydávala se pro ně přístupná literatura a hlavně se sestavovaly úlohy. Prvním předsedou Ústředního výboru matematické olympiády byl prof. dr. František Vyčichlo, od 2. do 15. ročníku vykonával tuto funkci akademik Josef Novák a od 16. ročníku je předsedou doc. Jan Vyšín, CSc. Ze slovenských matematiků se o soutěž zasloužil zvláště akademik Jur Hronec, který byl místopředsedou ÚVMO pro osm ročníků až do své smrti r. 1959. Listujeme-li starými materiály, nacházíme tu mezi vítězi jména, jež mají dnes v matematické obci dobrý zvuk (Juraj Bosák, Evžen Kindler, Oldřich Kowalski, Břetislav Novák a další).

Do nového čtvrtstoletí přejeme olympiádě hodně pěkných úloh a také mnoho nadaných a vtipných řešitelů.

Jiří Sedláček, Praha

ČESKOSLOVENSKO-ŠVÉDSKÝ SEMINÁŘ O APLIKACÍCH MATEMATIKY

Ve dnech 17.—21. března 1975 se v Praze konal československo-švédský seminář o aplikacích matematiky. Jeho uspořádáním byl pověřen Matematický ústav ČSAV; přednáškové místnosti propůjčila strojní fakulta ČVUT.

Semináře se zúčastnilo 9 švédských a 42 československých odborníků. Tématicky byl seminář zaměřen jednak k problematice numerické matematiky, jednak k aplikacím matematických a matematicko-statistických metod v dopravě, biologii a zemědělství.

Na semináři byly předneseny tyto referáty:

O. AXELSSON: *On some problems in connection with Galerkin methods for the numerical solution of heat conduction equations,*

G. DAHLQUIST: *Recent work on stiff differential equations,*

S. ERLANDER: *Applications of mathematical and statistical models in the field of road traffic and safety,*

L. FOLKESSON: *Use of mathematical programming in Swedish agricultural planning,*

H. O. KREISS: *Initial boundary value problems for hyperbolic partial differential equations,*

I. NÅSELL: *A mathematical model of schistosomiasis with snail latency,*

T. THEDÉEN: *Some probability models for road traffic,*

J. ČERNÝ (VÚD Žilina): *Recent research activity in the Department of Mathematical Methods of the Research Institute for Transport and Traffic,*

M. FIEDLER (MÚ ČSAV): *Numerical algebra in Czechoslovakia* (a survey),
J. HABR (EÚ ČSAV): *Recent tendencies in the development of mathematical methods applied in economics in Czechoslovakia,*
I. HLAVÁČEK (MÚ ČSAV): *On the conjugate finite element method for parabolic equations,*
P. LÁNSKÝ (VÚD Praha): *The models of road traffic,*
M. PRÁGER (MÚ ČSAV): *Recent research in numerical analysis,*
Z. ROTH, E. ŠVANDOVÁ (Institut hygieny a epidemiologie, Praha): *A simple model for the development of turberculous disease following infection with tubercle bacili.*

Celkově bylo prosloveno 7 hodinových a 7 půlhodinových referátů. Jak referáty švédských hostí tak i koreferáty čs. účastníků vzbudily živý zájem a daly podnět k plodné diskusi. Vedle oficiálního programu měla ovšem velký význam i neformální osobní setkání účastníků z obou zemí, kteří si tak mohli vyměnit své poznatky a zkušenosti v oblastech přímého zájmu.

Součástí programu pro švédské hosty byly též návštěvy některých výzkumných pracovišť: Laboratoř počítacích strojů v Brně, Prírodovedecká fakulta University Komenského v Bratislavě, Ústav technickej kybernetiky SAV v Bratislavě, Vysoká škola strojní a elektrotechnická v Plzni, Výskumný ústav dopravný v Žilině, Vysoká škola zemědělská v Praze, Výzkumný ústav ekonomiky zemědělství a výživy ČSAZ v Praze.

Význam semináře ocenil též předseda ČSAV s. akademik J. Kožešník, který přijal švédské hosty dne 17. března 1975 a zúčastnil se také slavnostní večeře dne 18. března 1975.

Pražský seminář navázal na obdobný švédsko-československý seminář, který se v r. 1973 konal ve Stockholmu. Úspěšný průběh obou seminářů láká k vyslovení naděje, že se podaří udržet tradici těchto vzájemných setkání matematiků Švédska a ČSSR i v budoucnosti.

František Zítek, Praha

OZNÁMENÍ

Mezinárodní matematické centrum S. Banacha ve Varšavě pořádá ve dnech 11. února až 11. června 1976 semestr o teorii pravděpodobnosti. Na programu semestru jsou: limitní věty teorie pravděpodobnosti, teorie martingálů a náhodná pole.

Semestr je určen pro kandidáty věd a pracovníky, kteří se připravují z této oblasti na vědeckou práci. Celý pobyt vysílaného pracovníka hradí vysílající pracoviště. Účast pracovníků z ČSSR na programu schvaluje Vědecké kolegium matematiky ČSAV.

Redakce