Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

K POČTU RIEŠENÍ OPTICKEJ ROVNICE II

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 28. januára 1974)

V článku [1] bol pre počet $p(n)$ tzv. P-riešení optickej rovnice

$$\sum_{i=1}^{n} 1/x_i = 1\,, \quad n > 2 \tag{1}$$

($x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ sú prirodzené čísla) odvodený vzťah

$$p(n) \geqq (n-1)!/2\,. \tag{2}$$

Vzťah (2) vyplýva z odhadu pre počet $p_0(n)$ prolongabilných P-riešení rovnice (1) (pozri [2]), ak uvážime, že $p(n) \geqq p_0(n)$.

V tomto článku vzťah (2) zovšeobecníme pre rovnice

$$\sum_{i=1}^{n} 1/x_i = 1/a_0\,, \quad n > 2\,, \quad a_0 \geqq 1 \tag{3}$$

ktorej prolongabilné, P-riešenia sú určené podmienkami

$$x_i = a_{i-1} + k_{i-1}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,; \tag{4}$$

$$x_n = a_{n-1}\,, \quad a_i = a_{i-1} + a_{i-1}^2 \mid k_{i-1}\,; \quad a_{i-1} > k_{i-1}\,.$$

Veta 1. *Pre počet $p_0(n)$ prolongabilných P-riešeni rovnice (3) platí*

$$p_0(n) \geqq p_0(n_0)\,\frac{(n-1)!}{(n_0-1)!}\,, \quad 2 < n_0 \leqq n \tag{5}$$

Dôkaz. Obdobne ako vo vete 1 článku [1] sa aj tu dokáže, že pre rôzne postupnosti $\{k_j\}_{j=0}^{n-2}$ dostaneme rôzne P-riešenia rovnice (3). Z každého riešenia $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_{n-1} = a_{n-2}$ rovnice $\sum_{i=1}^{n-1} 1/x_i = 1/a_0$ dostaneme teda toľko P-riešení rovnice (3), koľko má a_{n-2}^2 deliteľov menších než a_{n-2}. Počet týchto deliteľov podľa lemy 1 v článku [1], ktorá platí i pre $a_0 > 1$, nie je menší než $n - 1$. Preto

$$(6) \qquad p_0(n_0) \geqq p_0(n_0 - 1)(n_0 - 1).$$

Úplnou indukciou podľa (6) ľahko dostaneme vzťah (5) čím je veta dokázaná

Veta 2. *Pre počet $p(n)$ všetkých P-riešení rovnice (3) platí*

$$p(n) \geqq p_0(n_0) \frac{(n-1)!}{(n_0-1)!}, \quad 2 < n_0 \leqq n,$$

kde $p_0(n_0)$ je počet prolongabilných P-riešení rovnice $\sum_{i=1}^{n_0} 1/x_i = 1/a_0$.

Táto veta vyplýva z vety 1 vzhľadom nato, že $p_0(n) \leqq p(n)$.

Príklad 1. Odhadnite počet P-riešení rovnice $\sum_{i=1}^{n} 1/x_i = 1/a_0$ pre $a_0 = 3, 4$.

Riešenie. 1. Odhad pre $a_0 = 3$ urobíme pomocou hodnoty $p_0(3)$, ktorú nájdeme v článku [2], $p_0(3) = 11$, a tak

$$p(n) \geqq \frac{11}{2}\left[(n-1)!\right], \quad n \geqq 3,$$

kým podľa článku [1] je $p(n) \geqq \frac{1}{2}(n-1)!$

2. Pre $a_0 = 4$ určíme $p_0(3)$:

$$a_1 = 4 + \frac{16}{k_0} = 20, 12; \quad k_0 = 1, 2,$$

$$a_2^{(1)} = 20 + \frac{400}{k_1} = 420, 220, 120, 100, 70, 60, 45; \quad k_1^{(1)} = 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16,$$

$$a_2^{(2)} = 12 + \frac{144}{k_1} = 156, 84, 60, 48, 36, 30, 28; \quad k_1^{(2)} = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, .$$

Teda $p_0(3) = 14$, takže

$$p(n) \geqq 7\left[(n-1)!\right], \quad n \geqq 3.$$

Príklad 2. Odhadnite počet P-riešení rovnice $\sum_{i=1}^{n} 1/x_i = 1$.

Riešenie. Podľa článku [3] je $p_0(4) = 6$ a tak

$$p(n) \geqq (n-1)!, \quad n \geqq 4.$$