Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

SVATOPLUK FUČÍK (Сватоплук Фучик), Прага

(Поступило в редакцию 5. III. 1974 г.)

Статья является расширенным текстом доклада который автор прочитал на 4-ом чехословацко-советском совещании по теме „Применение функциональных методов и методов теории функций к проблемам математической физики". Совещание состоялось в зале Ректората Карлова университета в Праге, 27. XI. – 30. XI. 1973 г.

В этой статье дается информация о результатах группы математиков работающих на кафедре математического анализа Карлова университета в Праге и группы математиков работающих в отделении дифференциальных уравнений в частных производных Математического института чехословацкой академии наук. Эти группы работают на разных семинарах на кафедре и на семинаре И. Нечаса, в математическом институте.

В докладе не приведен полный список литературы по докладываемым проблемам и для простоты изложения результаты не формулированы в полной общности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи о существовании решений нелинейных интегральных уравнений и задачи о существовании решений краевых задач нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных связаны с исследованием нелинейных отображений между пространствами Банаха. В последние годы внимание ряда математиков привлек один специальный класс нелинейных операторов — монотонные операторы. Метод монотонных операторов является очень эффективным в теории существования решений нелинейных дифференциальных уравнений.

Прежде всего напомним основное определение и фундаментальный результат о монотонных операторах.

Оператор F (линейный или нелинейный) определенный на пространстве Банаха E, значения которого лежат в сопряженном пространстве E^*, называется *монотонным* на E, если для всех $x_1, x_2 \in E$ имеет место неравенство

$$(1.1) \qquad (x_1 - x_2, F(x_1) - F(x_2)) \geqq 0$$

((x, y) есть значение ограниченного линейного функционала $y \in E^*$ в точке $x \in E$).

Теорема 1. *Пусть в рефлексивном пространстве Банаха E задан непрерывный монотонный оператор F, удовлетворяющий условию*

$$(1.2) \qquad \lim_{\|x\| \to \infty} \frac{(x, F(x))}{\|x\|} = +\infty .$$

Тогда оператор F отображает пространство E на E^*.

Теорема 1 обобщается в следующих направлениях:

А) Предположение непрерывности ослабляется новыми типами непрерывности, например непрерывностью из сильной топологии пространства E в слабую топологию сопраженного пространства E^* (так называемая деминепрерывность), и другие — см. напр. [2, 6, 25].

Б) Предпологается что отображение F определено только на плотном множестве пространства E (см. напр. [2, 25]).

В) Определяются новые типы операторов которые обобщают класс монотонных отображений, напр. [32] и другие.

Во всех этих обобщениях предпологается, что отображения удовлетворяют условию (1.2). Такие отображения называются коэрцитивными.

2. АЛЬТЕРНАТИВА ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

С 1967 г. начинается исследование некоэрцитивных отображений. Этими проблемами будем заниматься в этом и в следующих параграфах.

Пусть теперь имеем два пространства Банаха X и Y и два отображения T и S пространства X в пространство Y. Будем заниматься вопросом о существовании решения уравнения

$$\lambda\, T(x) - S(x) = f ,$$

в зависимости от вещественного или комплексного параметра λ. Предположения на отображения T и S следующего типа: Отображение S предпологается вполне непрерывным и оператор T отображает X на Y. Можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть X и Y вещественные пространства Банаха, T нечетное гомеоморфные отображение пространства X на Y удовлетворяющее следующим условиям: Существуют $K > 0$, $a > 0$, $L > 0$ такие что*

$$L\|x\|^a \leqq \|T(x)\| \leqq K\|x\|^a\,, \quad x \in X\,; \tag{2.1}$$

$$T(tx) = t^a\, T(x)\,, \quad t > 0\,, \quad x \in X\,. \tag{2.2}$$

Пусть S и R нечетные вполне непрерывные отображения пространства X в пространство Y и пусть

$$S(tx) = t^a\, S(x)\,, \quad t > 0\,, \quad x \in X\,; \tag{2.3}$$

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|^a} = 0\,. \tag{2.4}$$

Тогда, если $\lambda \neq 0$ и уравнение

$$\lambda\, T(x) - S(x) = 0 \tag{2.5}$$

имеет только нулевое решение, то уравнение

$$\lambda\, T(x) - S(x) - R(x) = f \tag{2.6}$$

разрешимо для любой правой части $f \in Y$.

Аналогично как в линейном случае число λ, для которого уравнение (2.5) имеет нетривиальное решение, называется собственным значением пары (T, S). Таким образом утверждение теоремы 2 является обобщением одной части известной альтернативы Фредгольма для линейных уравнений с впольне непрерывным отображениями. При тех-же предположениях как в теореме 2 имеет место следующее утверждение: Если уравнение (2.6) разрешимо для произвольной правой части $f \in Y$, многозначное отображение

$$A_\lambda^{-1}(f) = \{x \in X;\ \lambda\, T(x) - S(x) - R(x) = f\}$$

ограничено (т. е. для всякого $r > 0$ существует $\varrho > 0$ так, что $\|x\| \leqq \varrho$ если $\|\lambda\, T(x) - S(x) - R(x)\| \leqq r$) и

$$\sup_{x \in X} \|R(x)\| < \infty\,,$$

то λ не является собственным значением пары (T, S). Но это утверждение не обобщает полностью вторую часть классической альтернативы Фредгольма (кое-что об этом будет сказано еще в следующем параграфе). Ввиду этого, утверждения типа теоремы 2 будем также называть „альтернативами Фредгольма для нелинейных операторов". Первые результаты в этом нарпавлении получили независимо С. И. Похожаев [42] и И. Нечас [34]. Но сечас имеется уже много работ на эту тему (см. напр. литературные ссылки к второй главе книги [20]).

Доказательство теоремы 2 проводится следующими образом: Во-первых доказывается

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \|\lambda T(x) - S(x) - R(x)\| = \infty$$

если λ не является собственным значением пары (T, S). После этого используется известная теорема Борсука-Улама (см. [26]) о топологической степени вполне непрерывного и нечетного векторного поля и другие основыне утверждения о степени отображения.

Разные методы доказательств „нелинейных альтернатив Фредгольма" (при выпольнении разных условий) возможно разделить на три группы.

1) Доказывается, что последовательность приближений типа Галеркина уравнения (2.6) стремится в некотором смысле к решению этого уравнения. Первое доказательство, использующее этот метод, принадлежит С. И. Похожаеву [42]. Его результаты и метод доказательства были обобщены в работах [9, 41]. Отметим еще, что для применения абстрактных результатов полученых этим методом к теоремам о существовании слабых решений краевых задач нелинейных дифференциальных уравнений надо доказать, что в пространствах Соболева $W_p^k(\Omega)$ и их подпространствах полученных с помощю краевых условий (напр. в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)$ в случае задачи Дирихле) существуют базисы Шаудера. Этот факт был доказан для одномерного множества в [9], и с помощью теории интерполяции и общих результатов о существовании базиса Шаудера для множеств с достаточно гладкой границей в работе [13]. Результаты работы [13] усилены и обобщены на случай пространств Соболева-Слободецкого в [45]. В этом направлении еще существуют некоторые открытые проблемы. Все эти доказательства не конструктивные. Единственное конструктивное доказательство существования базиса Шаудера в пространствах Соболева было до настоящего времени дано в [4] только для случая когда Ω является N-мерным кубом. Поскольку доказано (см. [7]) существование сепарабельного пространства Банаха без базиса Шаудера, эти проблемы очень интересны.

2) Следующий метод существенно использует то обстоятельство, что рассматриваемые пространства Банаха комплексные. Предположения соответствующих теорем всегда гарантируют вещественность всех собственных значений пары (T, S). Если λ_0 не являетая собственным числом пары (T, S), то прежде всего доказывается существование решения $u(\xi)$ уравнения (2.6) с $\lambda = \lambda_0 + i\xi$, где $\xi \neq 0$ действительное и после этого показывается, что при $\xi \to 0$ $u(\xi)$ стремятся в некотором смысле к решению уравнения (2.6) с $\lambda = \lambda_0$. Это основные идеи работы [34].

3) Для доказательства альтернативы Фредгольма используются подходящие обобщения теоремы Борсука-Улама, см. напр. [29, 35, 36].

Дальше укажем примеры типичных уравнений, существование решений которых вытекает из теоремы 2.

Пример 1. Пусть Ω ограниченная область в пространстве R_N с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Ищется слабое решение задачи Дирихле

$$-\lambda\Delta u - u\,\frac{|u|^s}{1+|u|^s} = f \quad \text{на} \quad \Omega(s>0)\,, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

для $f \in L_2(\Omega)$, т. е. ищем $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ такое чтобы для произвольного $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ выполнялось интегральное тождество

$$\lambda \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{|u|^s}{1+|u|^s}\,uv\,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\,\mathrm{d}x\,.$$

Это уравнение разрешимо для произвольного $f \in L_2(\Omega)$ если уравнение

$$\lambda \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)\,,$$

обладает только нулевым решением, что имеет место для $\lambda \neq 1/\lambda_k$, где последовательност $\{\lambda_k\}$ является стектром задачи Дирихле для уравнения $-\Delta u - \lambda u = 0$.

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу

$$-\lambda \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^3 - |u|^{m-1}\,u = f \quad \text{на} \quad \Omega \quad u|_{\partial\Omega} = 0\,. \tag{2.7}$$

Для $1 \leqq m < 3$ она имеет слабое решение $u \in \mathring{W}_4^1(\Omega)$ для произвольного $f \in (\mathring{W}_4^1(\Omega))^*$ если только $\lambda \neq 0$. В случае $m = 3$ задача (2.7) слабо разрешима, если задача

$$-\lambda \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^3 - u^3 = 0 \quad \text{на} \quad \Omega \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.8}$$

имеет только нулевое слабое решение.

Пример 3. Пусть g непрерывная нечетная вещественная и ограниченная функция на $(-\infty, +\infty)$. Тогда задача

$$\begin{gathered} \lambda u'' + u + g(u) = f \quad \text{на} \quad (0, \pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{gathered} \tag{2.9}$$

слабо разрешима (разрешима) для произвольного $f \in L_2(0, \pi)$ $(f \in C\langle 0, \pi \rangle)$ если $\lambda \neq 1/n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Из утверждений типа теоремы 2 возникают две новые проблемы.

I. Во первых, как было уже сказано, теорема 2 не является полным аналогом альтернативы Фредгольма. Остается еще решать следующую задачу: для каких правых частей $f \in Y$ разрешимо уравнение (2.6) в случае, когда λ является собственным значением пары (T, S). Некоторые ответы на этот вопрос даны в § 3.

II. Требуется выяснить структуру множества всех собственных значений пары (T, S) нелинейных операторов.

3. ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть отображения T, S, R удовлетворяют условиям теоремы 2 и пусть λ является собственным значением пары (T, S). Тогда решение задачи I из конца § 2 в случае $a \neq 1$ очень сложно (в работе [19] приведен пример, показывающий, что до сих пор не ясны никакие общие свойства множества правых частей для которых существует решение уравнения (2.6). Но для $a = 1$ уже некоторые результаты в этом направлении имеются. Первым из них является работа [31], где получены необходимые и достаточные требования на $f \in L_2(\Omega)$, чтобы краевая задача

$$L(u) + g(u) = f \quad \text{на} \quad \Omega \qquad (3.1)$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

была слабо разрешима, где L линейный самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка такой что задача Дирихле

$$L(u) = 0 \quad \text{на} \quad \Omega \qquad (3.2)$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

имеет одномерное пространство решений, функция g непрерывна на вещественной оси и существуют конечные пределы

$$\lim_{\xi \to \infty} g(\xi) = g(+\infty)\,, \quad \lim_{\xi \to -\infty} g(\xi) = g(-\infty)$$

и

$$g(-\infty) < g(\xi) < g(+\infty)\,, \quad \xi \in R_1\,.$$

Тогда для слабой разрешимости задачи (3.1) необходимо и достаточно, чтобы для функции $f \in L_2(\Omega)$ были выполнены неравенства

$$g(-\infty)\int_{\Omega_+}|w| + g(+\infty)\int_{\Omega_-}|w| < \int_\Omega fw < g(+\infty)\int_{\Omega_+}|w| + g(-\infty)\int_{\Omega_-}|w| \qquad (*)$$

для всякого ненулевого решения w задачи (3.2), где

$$\Omega_\pm = \{x \in \Omega;\ w(x) \gtrless 0\}\,.$$

(Для элементарного доказательства этой теоремы см. [24].) Аналогичное необходимое и достаточное условие доказано в работе [46], если размерность пространства решений задачи (3.2) больше единицы. Абстрактную схему для получения результатов такого типа указал И. Нечас в [40], где доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть A линейное ограниченное самосопряженное фредгольмовское*[1]) *отображение в вещественном пространстве Гильберта H и пусть ядро* $\operatorname{Ker}[A]$ *оператора A нетривиально. Пусть N нелинейное вполне непрерывное отображение пространства H в H такое что*

$$\sup_{u \in H} \|N(u)\| < \infty .$$

Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ существует $t(\varepsilon) > 0$ так что

$$|(N(tw + v), w) - L(w)| < \varepsilon \tag{3.3}$$

при произвольном $w \in \operatorname{Ker}[A]$, $\|w\| = 1$, $v \in H$, $\|v\| \leqq r$ и $t \geqq t(\varepsilon)$.

Тогда если

$$(N(u), w) < L(w), \quad w \in \operatorname{Ker}[A], \quad u \in H,$$

то для разрешимости уравнения

$$A(u) + N(u) = h \tag{3.4}$$

необходимо и достаточно, чтобы неравенство

$$L(w) > (h, w)$$

было выполнено для произвольного $w \in \operatorname{Ker}[A]$, $\|w\| = 1$.

Главным шагом доказательства теоремы 3 является отыскание системы уравнений, существование решения которой эквивалентно существованию решения уравнения (3.4). Существование решения новой системы уравнений доказывается с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке вполне непрерывного отератора.

Теорема 3 обобщается в следующих направлениях:

а) Предполагается, что существуют постоянные $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\delta > 0$ так что

$$\|N(u)\| \leqq \alpha + \beta\|u\|^{\delta}, \quad u \in H.$$

[1]) Линейное отображение A называется фредгольмовским, если размерность его ядра конечна, область значений $\operatorname{Im}[A]$ замкнута в H и размерность факторпространства $H/\operatorname{Im}[A]$ тоже конечна.

При выполнении некоторых условий получается:

если $\delta \in (0, 1)$ то уравнение (3.4) разрешимо при любой правой части (см. [14]);

если $\delta = 1$ и постоянная β достаточно малая (ограничение зависит от нижней грани абсолютных значений ненулевых точек спектра оператора A) то уравнение (3.4) снова разрешимо для произвольной правой части (см. [10]);

если $\delta > 1$ то можно доказать, что уравнение (3.4) разрешимо для правых частей с достаточно малой нормой (см. [11]).

б) Предполагается, что оператор A определен только на плотном множестве некоторого пространства Банаха X которое отображает в пространство Y, причем A не обязательно ограниченный. С помощью этого обобщения можно получить существование классических решений краевых задач (см. [11]).

в) Условие (3.3) теоремы 3 ослабляется и ищется решение задачи (3.4) для любого f из области значений оператора A (см. [12]).

В конце этого параграфа проиллюстрируем абстрактные результаты об области значений нелинейных операторов на примере краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, причем следует отметить, что это делается только для простоты изложения, так как результаты можно применить к дифференциальным уравнениям в частных производных.

Пример 3 (продолжение). Будем рассматривать краевую задачу из примера 3 с $\lambda = 1$.

А. Если функция g удовлетворяет условиям из начала этого параграфа, то формула (*) является достаточным и необходимым условием разрешимости задачи (2.9) ($w = \sin x$).

Б. Если функция g нечетная,

$$\lim_{\xi \to 0} g(\xi) = \infty ,$$

и выполняется неравенство

$$|g(\xi)| \leqq c_1 + c_2 |\xi|^\delta , \tag{3.5}$$

где $\delta \in (0, 1)$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, то задача (2.9) слабо разрешима для произвольного $f \in L_2(0, \pi)$ (см. [14]).

В. Если неравенство (3.5) справедливо с $\delta = 1$, то в случае

$$0 < c_2 < \tfrac{3}{4} \sqrt{(\pi)}\, [\sqrt{(2)}\, (\sqrt{(\pi)} + 8)]^{-1}$$

краевая задача (2.9) опять слабо разрешима для произвольного $f \in L_2(0, \pi)$ (см. [10]).

Г. Пусть существует $\eta > 0$ так, что

$$\lim_{\xi \to 0+} \frac{\min\limits_{\zeta \in \langle \eta, 1/\xi \rangle} g(\zeta)}{\xi} > \frac{2M}{\pi},$$

$$\lim_{\xi \to 0+} \frac{\min\limits_{\zeta \in \langle (-1/\xi), -\eta \rangle} g(\zeta)}{\xi} < -\frac{2M}{\pi},$$

где

$$M = \sup_{\xi \in R_1} |g(\xi)| < \infty .$$

Тогда для произвольного $f \in L_2(0, \pi)$, удовлетворяющего условию

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = 0 ,$$

существует слабое решение $u \in \mathring{W}_2^1(0, \pi)$ задачи (2.9) (см. [12]).

4. ОЦЕНКИ СНИЗУ КОЛИЧЕСТВА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этом и в следующем параграфе мы обратим внимание на задачу II из конца § 2.

Изучение структуры множества всех собственных значений пары нелинейных операторов было начато в тридцатых годах советскими математиками Л. А. Люстерником и С. Г. Шнирельманом (см. [33]). Они доказали, что при выполнении некоторых условий, существует по крайней мере стремящаяся к нулю последовательность неотрицательных собственных значений нелинейных операторов (f', g'), где f' и g' производные Фреше функционалов f и g определенных на пространстве Гильберта H, точнее говоря, для любого $r > 0$, существует по крайней мере счетное множество вещественных чисел λ, для которых задача

$$\lambda f'(x) - g'(x) = 0 , \quad x \in M_r(f) = \{u \in H;\ f(u) = r\} \tag{4.1}$$

разрешима. Доказательство этого результата основано на изучении топологического инварианта — категории множества, который был введен С. Г. Шнирельманом. (Для доказательства см. тоже [26].) Аналогичное утверждение для функционалов f, g определенных на пространстве Банаха, доказал грузинский математик Э. С. Цитланадзе (см. [5]). Теория Люстерника и Шнирельмана для случая пространств Банаха продолжена и развита в работах [1, 3, 16]. В работе [16] идея доказательства основана на теореме о неявных функциях и получен следующий результат.

Теорема 4. *Пусть X безконечномерное рефлексивное пространство Банаха с базисом Шаудера*[2]). *Пусть $r > 0$ и f, g два вещественных функционала, определенные и имеющие производные Фреше f', g' на X. Предпологается, что выполнены следующие условия:*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$(x, f'(x)) > 0 \text{ для } x \in X,\ x \neq 0;$$

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty;$$

$$\inf_{x \in M_r(f)} (x, f'(x)) = c_1 > 0;$$

отображения f', g' : $X \to X^*$ равномерно непрерывные;

$$g(x) \geqq 0,\ x \in X;$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

отображение g' усиленно непрерывное (т. е. оно непрерывно из слабой топологии пространства X в сильную топологию пространства X^*);

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

если $x_n \rightharpoonup x$ (слабо), $f'(x_n) \to z$ (сильно), то $x_n \to x$.

Тогда существует последовательность попарно различных точек $x_n \in X$ такая, что

$$g'(x_n) - \frac{(x_n, g'(x_n))}{(x_n, f'(x_n))} f'(x_n) = 0\,,$$

$$0 < g(x_n) \searrow 0\,, \quad x_n \rightharpoonup 0\,, \quad f(x_n) = r\,.$$

Пример 2 (продолжение). Краевая задача (2.8) обладает нетривиальным решением по крайней мере для счетного множества вещественных чисел λ.

5. ОЦЕНКИ СВЕРХУ КОЛИЧЕСТВА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В общем случае метод Люстерника и Шнирельмана и его обобщения не дают все собственные значения пары (f', g') нелинейных операторов (см. пример в работе [19]). Возникает поэтому вопрос, при каких дополнительных условиях множество Λ всех параметров λ для которых задача (4.1) имеет решение является последовательностью. На этот вопрос дан первый ответ в работе

---

[2]) С теоретической точки зрения можно предполагать немножко меньше чем существование базиса Шаудера.

[37], где рассмотрена краевая задача для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения специального вида — уравнения типа задачи (2.8) при $N = 1$ (см. тоже [38, 39]). Обобщение на уравнения четвертого порядка рассмотрены с этой точки зрения в работах [27, 28, 39].

В дальнейшем нам понадобится понятие вещественно-аналитического функционала φ, определенного на банаховом пространстве X, т. е. такого функционала, который в окрестности любой точки пространства X разлагается в сходящийся ряд Тейлора.

Теорема 5 (см. [19]). *Пусть H вещественное сепарабельное пространство Гильберта со скалярным произведением $(.,.)$. Предположим, что f и g вещественно-аналитические функционалы на пространстве H, удовлетворяющие следующим условиям:*

$f(0) = 0$, $f(u) > 0$ *для* $u \neq 0$;

существует непрерывная положительная и неубывающая функция $c_1(t)$ в промежутке $(0, \infty)$ *такая, что*

$$\mathrm{d}^2 f(u, h, h) \geqq c_1(f(u)) \, \|h\|^2$$

для произвольных $u, h \in H$ ($\mathrm{d}^2 f$ *вторая производная Фреше*);

производная f' отображает ограниченные множества на ограниченные;

множество $M_r(f)$ ограниченное;

отображение g' усиленно непрерывное;

$g(0) = 0$, $g'(0) = 0$.

Обозначим через B множество всех решений задачи (4.1).

Тогда $g(B) \setminus \{0\}$ изолированное множество и только 0 *может быть его точкой сгущения.*

Если функционал f однородный степени a и функционал g однородный степени b, то

$$g(B) = \frac{b}{a} \, . \, r \, . \, \Lambda \, .$$

Из этого вытекает ответ на наш вопрос: Если функционалы f и g однородны (не обязательно той-же степени) и выполнены условия теорем 4 и 5, то множество Λ является последовательностью положительных чисел, которая стремится к нулю.

При доказательстве теоремы 5 используется „обобщенное отнощение Релея“:

$$\varphi(u) = \frac{g(u)}{[f(u)]^{\beta(u)}} \, ,$$

где

$$\beta(u) = \frac{(g'(u), f'(u))}{g(u)\,\|f'(u)\|^2}.$$

Легко получается, что $g(A \cap M_r(f)) = g(B)$, где A есть множество критических точек функционала φ, т. е.

$$A = \{x \in H \setminus \{0\}\ ;\quad \varphi'(x) = 0\}.$$

Для множества критических значений $\varphi(A)$ надо доказать, что оно счетно. Это сделано в работе [17] с помощью конечномерного аналога этого утверждения из работы [43]. Результаты из работ [17, 43] очень похожи на классические теоремы. Морса-Сарда для вещественных функций конечного числа переменных.

Утверждение теоремы 5 можно доказать тоже в случае, когда функционалы f и g определены на пространстве Банаха, но формулировка условий и доказательство существенно сложнее (см. [18]). В случае неоднородных функционалов можно доказать, что существует дискретное множество R параметров r такое, что для $r \in (0, \infty) \setminus R$ множество Λ является последовательностью стремящейся к нулю (для случая конечномерного пространства H смотри [44], для случая бесконечномерного пространства H результаты еще не публикованы).

В случае, когда функционалы f и g не гладкие (как это требуется в теореме 5), можно использовать результат из работы [15] (который основан на утверждении из [30]), где доказано, что множество $g(B) \setminus \{0\}$ имеет некоторую (зависит от дифференцируемости функционалов f и g) меру Хаусдорфа равную нулю.

Пример 4. Рассматривается краевая задача

$$-\lambda \Delta u + u^3 = 0 \quad \text{на} \quad \Omega \qquad (5.1)$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $\Omega \subset R_3$ ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Тогда существует последовательность Λ положительных чисел с точкой сгущения 0 такая, что на единичной сфере пространства $\mathring{W}_1^2(\Omega)$ существует слабое решение задачи (5.1) тогда и только тогда когда $\lambda \in \Lambda$.

Замечания. а) Результаты из § 4 и § 5 можно применить тоже к теории бифуркации нелинечный операторов (см. [22]). Примеры в этом докладе даны только для краевых задач для дифференциальных уравнений. Можно привести тоже примеры интегральных уравнений (см. [21]) и краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений (см. [23]).

б) С результатами приведенными в §§ 2, 4, 5 можно детально познакомится в книге [20].