Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

KONFIGURACE V ČTYŘROZMĚRNÉM PROSTORU ODVOZENÉ UŽITÍM ROVINNÝCH KONFIGURACÍ

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

(Došlo dne 19. listopadu 1973)

1. Úvod. V tomto článku dokážeme tuto zajímavou větu:

Věta. *Nechť v P_2 existuje konfigurace F_2 typu:*

$$(a_q, b_p),$$

potom v P_4 existuje konfigurace F_4 typu:

$$\begin{pmatrix} a^2 & 2q & q^2 & 2q \\ p & 2ab & q & q+1 \\ p^2 & 2p\,. & b^2 & 2 \\ ap & pb+a & b & 2b \end{pmatrix}$$

a konfigurace F_4' typu:

$$\begin{pmatrix} a^2 & 2q & 2 & 2q \\ p & 2ab & 1 & q+1 \\ a & b & 2a & q \\ ap & pb+a & p & 2b \end{pmatrix}.$$

2. Model 4-rozměrného prostoru. Zvolme v afinní rovině P_2 (P_2 budeme značit bodový prostor, jehož zaměřením je vektorový prostor dimenze 2 nad tělesem reálných čísel) uspořádanou dvojici soustav souřadnic O_1 a O_2. Přiřadíme-li nyní k bodu $A = [a_1, a_2, a_3. a_4] \in A_4$ (A_4 je aritmetickým modelem 4-rozměrného prostoru bodů tj. bodem je uspořádaná čtveřice reálných čísel) dvojici bodů A_1, A_2 roviny P_2 (označení $A = [A_1, A_2]$), kde $A_1 = [a_1, a_2]$ v O_1 a $A_2 = [a_3, a_4]$ v O_2, potom je zřejmé, že na množině všech takových dvojic bodů (označme tuto množinu M_4) lze stanovit příslušné operace tak, aby tato množina M_4 (s příslušnými vlastnostmi) byla modelem čtyřrozměrného afinního prostoru bodů, jehož jedním modelem je A_4 (pro tento model použijeme stejného označení — M_4). Pro naše úvahy potřebujeme vědět jak jsou určeny podprostory modelu M_4. K určování těchto podprostorů užijeme uvažovaný aritmetický model, přičemž budeme předpokládat, že umíme v tomto modelu pracovat (označení bodů, přímek, vektorů atd. je ve shodě s [1]).

1. Přímka. Přímka $p = \text{gen}\{A, \boldsymbol{U}\}$ má v A_4 tyto rovnice:

(1) $$x_1 = a_1 + tu_1\,, \quad x_2 = a_2 + tu_2\,, \quad x_3 = a_3 + tu_3\,, \quad x_4 = a_4 + tu_4\,.$$

V M_4 je přímkou dvojice množin bodů roviny P_2 určené jednak rovnicemi:

(2) $$x_1 = a_1 + tu_1\,, \quad x_2 = a_2 + tu_2$$

a jednak rovnicemi:

(3) $$x_3 = a_3 + tu_3\,, \quad x_4 = a_4 + tu_4\,.$$

Množině bodů určených rovnicemi (2) budeme říkat první obraz přímky a podobně množině (3) druhý obraz přímky (obecně první a druhý obraz podprostoru). Rovnice (1) určují přímku, jestliže vektor $\boldsymbol{U}$ je nenulový. Vektor $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2)$, kde $\boldsymbol{U}_1 = (u_1, u_2)$ v O_1 a $\boldsymbol{U}_2 = (u_3, u_4)$ v O_2 (vektorem $\boldsymbol{U}$ rozumíme zde uspořádanou dvojici množin tzv. ekvipolentních úseček, tj. vektor $\boldsymbol{U}_1 = (u_1, u_2)$ v O_1 znamená, že úsečka $\overrightarrow{O_1U_1}$, kde bod $U_1 = [u_1, u_2]$ v O_1, určuje vektor $\boldsymbol{U}_1$), je nenulový právě když aspoň jeden z vektorů $\boldsymbol{U}_1$ a $\boldsymbol{U}_2$ je nenulový. Můžeme definovat

Definice. Nechť $i \neq j$; $i, j = 1, 2$. Podmnožinu p množiny M_4 nazveme *přímkou*, platí-li $p = [p_1, p_2]$ a p_i je jediný bod tj. i-té obrazy bodů přímky p splývají v jediný bod a j-té obrazy vyplní přímku p_j.

Poznámka. Přímka bude i pro $p = [p_1, p_2]$ (první i druhé obrazy vyplní celou přímku) a body $A = [A_1, A_2]$, $B = [B_1, B_2]$ a $C = [C_1, C_2]$ leží na přímce, platí-li, že body A_1, B_1, C_1 leží na přímce p_1, A_2, B_2, C_2 leží na přímce p_2 a dělící poměry $(A_1B_1C_1)$ a $(A_2B_2C_2)$ se rovnají. V našich úvahách tyto přímky nepotřebujeme a proto se zde tímto případem nebudeme zabývat.

Uvědomme si, že platí, jestliže je p_1 libovolný bod roviny P_2 a p_2 je libovolná přímka roviny P_2, potom existuje jediná přímka v M_4 jejíž první obraz je bod p_1 a druhý obraz je přímka p_2. Hledejme rovnice (1) pro tuto přímku. Bod p_1 má jednoznačně určené souřadnice v soustavě O_1 – např. $p_1 = P_1 = [p_1, p_2]$. Přímka p_2 je také jednoznačně určena svými rovnicemi v O_2 – např. $p_2 = \text{gen}\{P_2, \boldsymbol{U}\}$, kde $P_2 = [p_3, p_4]$ a $\boldsymbol{U} = (u_3, u_4)$. Rovnice (1) pro tuto přímku p jsou:

(4) $$x_1 = p_1\,, \quad x_2 = p_2\,, \quad x_3 = p_3 + tu_3\,; \quad x_4 = p_4 + tu_4\,.$$

Podobně dokážeme existenci jediné přímky v případě, že bod je druhý obraz a přímka je její první obraz.

2. Rovina. Rovina $\alpha = \text{gen}\{A, \mathbf{U}, \mathbf{V}\}$ má v A_4 rovnice:

$$(5) \qquad x_1 = a_1 + ru_1 + sv_1\,, \quad x_2 = a_2 + ru_2 + sv_2\,, \quad x_3 = a_3 + ru_3 + sv_3\,,$$
$$x_4 = a_4 + ru_4 + sv_4\,.$$

Definice. Nechť $i \neq j$; $i, j = 1, 2$. Podmnožinu α množiny M_4 nazveme *rovinou* platí-li jedna z těchto možností:

a) $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]$ a α_i je jediný bod tj. i-té obrazy bodů roviny α splývají v jediný bod a j-té obrazy vyplní rovinu $\alpha_j = P_2$.

b) $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]$, přičemž α_1 i α_2 jsou přímky tj. první obrazy bodů roviny vyplní přímku α_1 a právě tak druhé obrazy vyplní přímku α_2.

Poznámka. Pro rovinu mohou nastat ještě další případy, které zde neuvádíme.

Z rovnic (5) zřejmě vyplývá:

Případ ad a) nastává: 1) Je-li $\mathbf{U}_1 = (u_1, u_2) = \emptyset$ a $\mathbf{V}_1 = (v_1, v_2) = \emptyset$. Dále platí, že vektory $\mathbf{U}_2 = (u_3, u_4)$ a $\mathbf{V}_2 = (v_3, v_4)$ musí být lineárně nezávislé (nekolineární), neboť v opačném případě rovnice (5) neurčují rovinu.

2) Jestliže $\mathbf{U}_1$ a $\mathbf{V}_1$ jsou nekolineární a $\mathbf{U}_2$ i $\mathbf{V}_2$ jsou nulové.

Jestliže vektory $\mathbf{U}_1$ a $\mathbf{V}_1$ jsou kolineární, $\mathbf{U}_2$ a $\mathbf{V}_2$ jsou také kolineární, ale vektory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsou nekolineární, potom nastává případ ad b).

Přenecháme čtenáři, aby si dokázal, že ve všech těchto případech toto platí i obráceně tj. libovolnou volbou příslušných elementů v P_2 dostáváme jedinou rovinu v M_4.

3. Trojrozměrný prostor (nadrovina): Nadrovina ${}_3M = \text{gen}\{A, \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}\}$ má v A_4 rovnice:

$$(6) \qquad x_1 = a_1 + t_1u_1 + t_2v_1 + t_3w_1\,, \quad x_2 = a_2 + t_1u_2 + t_2v_2 + t_3w_2\,,$$
$$x_3 = a_3 + t_1u_3 + t_2v_3 + t_3w_3\,, \quad x_4 = a_4 + t_1u_4 + t_2v_4 + t_3w_4\,.$$

Definice. Nechť $i \neq j$; $i, j = 1, 2$. Podmnožinu ${}_3M$ množiny M_4 nazveme *nadrovinou,* platí-li ${}_3M = [{}_3M_1, {}_3M_2]$ a ${}_3M_i$ je jediná přímka tj. i-té obrazy bodů nadroviny ${}_3M$ vyplní přímku a j-té obrazy vyplní rovinu ${}_3M_j = P_2$.

Poznámka. Pro nadrovinu nastává ještě další případ, který opět neuvádíme.

Z rovnic (6) je hned vidět, že případ z předcházející definice nastává jestliže:

1) Vektory $\mathbf{U}_1 = (u_1, u_2)$, $\mathbf{V}_1 = (v_1, v_2)$ a $\mathbf{W}_1 = (w_1, w_2)$ jsou kolineární tj. všechny jsou nenulovým násobkem jednoho z nich.

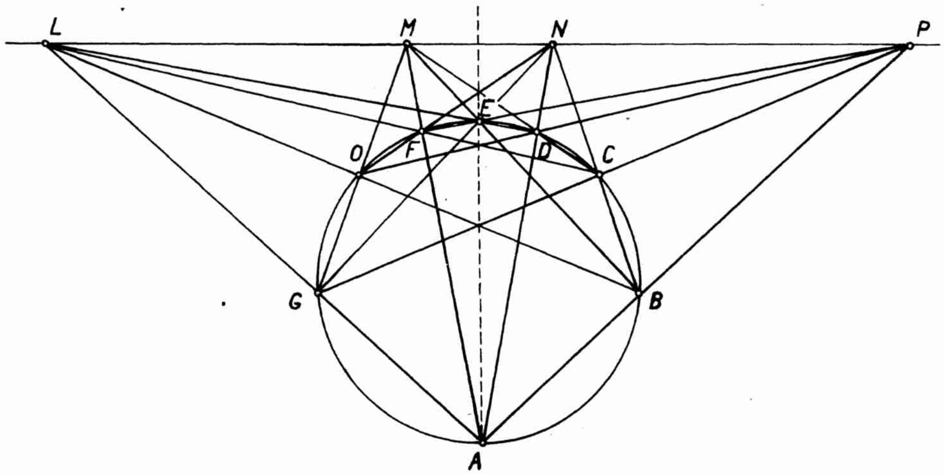
2) Vektory $\mathbf{U}_2 = (u_3, u_4)$, $\mathbf{V}_2 = (v_3, v_4)$ a $\mathbf{W}_2 = (w_3, w_4)$ jsou kolineární.

Přenecháme čtenáři, aby opět uvážil, že lze v P_2 zvolit libovolnou přímku za jeden obraz trojrozměrného prostoru. Dále pak platí, že dvojice bodů P_2 leží v tomto prostoru, jestliže její příslušný obraz leží na zvolené přímce a tedy pro druhý obraz není žádná další podmínka.

3. Konfigurace v M_4. Dokažme nyní tuto pomocnou větu:

Lemma. *V M_4 existuje konfigurace K_4 (co rozumíme konfigurací najde čtenář např. v [2]) typu:*

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} 144 & 8 & 16 & 8 \\ 3 & 384 & 4 & 5 \\ 9 & 6 & 256 & 2 \\ 36 & 60 & 16 & 32 \end{pmatrix}.$$



D ů k a z Na obr. je sestrojena známá rovinná konfigurace K_2 typu: $(12_4, 16_3)$ (její odvození najde čtenář např. v [3]). Uvažujme nyní M_4, kde příslušná rovina P_2 je rovina ve které je narýsován zvolený obrázek. Nechť body konfigurace K_4 jsou určeny body konfigurace K_2 tj. bodem K_4 je každá uspořádaná dvojice bodů konfigurace K_2. Těchto dvojic je zřejmě $12^2 = 144$. Za přímky K_4 zvolíme všechny přímky M_4 jejichž jedním obrazem je jediný bod konfigurace K_2 a druhým obrazem jediná přímka konfigurace K_2. Každý bod konfigurace K_2 je jedním obrazem celkem šestnácti přímek K_4 (K_2 má právě 16 přímek) a tedy přímek konfigurace K_4 je $2 \cdot 12 \cdot 16 = 384$. Na každé této přímce leží právě tři body K_4 a každým bodem K_4 prochází zřejmě 8 těchto přímek (např. na přímce $[A, ED]$ leží body $[A, D]$, $[A, E]$ a $[A, L]$ – bodem $[A, B]$ prochází přímky: $[A, BO]$, $[A, BE]$, $[A, BC]$, $[A, AB]$, $[AG, B]$, $[AF, B]$, $[AD, B]$ a $[AB, B]$). Rovinou konfigurace K_4 zvolíme každou uspořádanou dvojici přímek konfigurace K_2 (tj. rovinu určenou ad c)). Těchto dvojic je zřejmě $16^2 = 256$, v každé této rovině zřejmě leží právě $3^2 = 9$ bodů konfigurace K_4 např. v $\alpha = [EG, AF]$ leží body: $[G, A]$, $[G, F]$, $[G, M]$, $[E, A]$, $[E, F]$, $[E, M]$,

$[N, A]$, $[N, F]$ a $[N, M]$) a dále v každé této rovině leží 2 . 3 = 6 přímek K_4 (příslušné přímky obsahují právě 6 bodů konfigurace K_2 a každý tento bod je právě jedním obrazem jediné přímky). Protože každým bodem K_2 procházejí právě čtyři přímky K_2, prochází každým bodem K_4 4 . 4 = 16 rovin K_4 a každou přímkou K_4 prochází právě 4 roviny této konfigurace. Nadrovin (uvažujeme nadroviny určené ad a) i b)) konfigurace K_4 je 32, neboť každá přímka K_2 může být prvým nebo druhým obrazem nadroviny. V každé nadrovině leží 36 bodů dané K_4, neboť celkem 12 bodů dané K_4 má svůj jeden obraz v jediném bodě (K_2) dané přímky (K_2). Uvažujme nyní nadrovinu jejíž prvý obraz je přímka AD. Celkem 16 přímek ležící v této nadrovině má za svůj první obraz bod A, 16 přímek má první obraz v bodě D a v bodě N má první obraz dalších šestnáct přímek. V této nadrovině leží ještě dalších dvanáct přímek jejichž prvý obraz je přímka AD a tedy v dané nadrovině leží celkem 60 přímek naší konfigurace. Toto zřejmě platí pro každou nadrovinu. V uvažované nadrovině leží právě 16 rovin konfigurace K_4, neboť všechny tyto roviny mají prvý obraz v přímce AD. Opět zřejmě toto platí pro každou nadrovinu. Každým bodem prochází 8 nadrovin (např. bodem $[A, B]$ procházejí nadroviny jejichž prvým obrazem je přímka AG, AF, AD a AB a nadroviny jejichž druhým obrazem je přímka AB, BO, BE, BC), každou přímkou prochází 4 + 1 = 5 nadrovin (bodem K_2, který je jedním obrazem přímky K_4 procházejí 4 přímky K_2 a tyto přímky můžeme zvolit za příslušný obraz nadroviny – pátou nadrovinu dostaneme tak že přímku K_2 jež je obrazem dané přímky K_4 zvolíme za příslušný obraz nadroviny) a každou rovinou procházejí zřejmě dvě nadroviny. Tím jsme dostali všechna čísla v matici (7) a lemma je dokázané.

Nyní přistoupíme k d ů k a z u v ě t y. Bodem konfigurace F_4 je každá dvojice bodů konfigurace F_2, přímkou F_4 je bod a přímka F_2, rovinou F_4 je dvojice přímek F_2 a nadrovinou konfigurace F_4 je přímka konfigurace F_2 a rovina P_2. Při důkazu existence konfigurace F_4 zobecníme postup při odvozování konfigurace K_4. Všechny výsledky jsou zřejmé a proto je jenom zaznamenáme. Bodů konfigurace je a^2, přímek je $2ab$, rovin b^2 a nadrovin je $2b$. Daným bodem prochází $2q$ přímek, q^2 rovin a $2q$ nadrovin. Danou přímkou prochází q rovin a $q + 1$ nadrovin. Rovinou prochází dvě nadroviny. V nadrovině leží b rovin, $pb + a$ přímek a ap bodů. V rovině leží $2p$ přímek a p^2 bodů. Na přímce leží p bodů.

Uvažujme nyní konfiguraci F'_4. Body, přímky a nadroviny jsou v F'_4 stejné jako v F_4. V F'_4 uvažujme roviny určené ad a) tj. rovinou konfigurace F'_4 je bod F_2 a rovina P_2. Matice konfigurace F'_1 se liší od matice konfigurace F_4 v třetím sloupci a řádku. Snadnou úvahou zjistíme, že platí:

1) Rovin konfigurace F'_4 je $2a$, každým bodem prochází dvě tyto roviny a každou přímkou prochází jediná taková rovina.

2) V dané rovině zřejmě leží a bodů a b přímek.

3) Danou rovinou prochází q nadrovin a v každé nadrovině leží p těchto rovin.