ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 100 * PRAHA 16. 5. 1975 * ČÍSLO 2

ON L^p-SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION $y'' = q(t)y$

MIROSLAV BARTUŠEK, Brno

(Received September 3, 1973)

1.1. Consider a differential equation

$$(q) \qquad y'' = q(t)\,y\,, \quad q \in C^0[a, b)\,, \quad b \leqq \infty\,, \quad q(t) < 0\,, \quad t \in [a, b)$$

where $C^n[a, b)$ (n being a non-negative integer) is the set of all continuous functions having continuous derivatives up to and including the order n on $[a, b)$.

Let y_1 be a non-trivial solution of (q) vanishing at $t \in [a, b)$ and y_2 a non-trivial one the derivative of which vanishes at t. If $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$, $\omega(t)$ is the first zero respectively of y_1, y_2', y_1', y_2 lying to the right from t, then φ, ψ, χ, ω is called the basic central dispersion of the 1-st, 2-nd, 3-rd, 4-th kind, respectively (briefly, dispersion of the 1-st, 2-nd, 3-rd, 4-th kind).

Throughout the paper we shall deal with oscillatory ($t \to b_-$) differential equations (i.e., every non-trivial solution has infinitely many zeros on every interval of the form $[t_0, b)$, $t_0 \in [a, b)$).

Let δ be the dispersion of the k-th kind, $k = 1, 2, 3, 4$. Then δ has the following properties (see [4] § 13)

$$(1) \qquad \begin{aligned} &1)\ \ \delta \in C^3[a, b) \ \text{ if } \ k = 1 \\ &\delta \in C^1[a, b) \ \text{ if } \ k = 2, 3 \text{ or } 4 \\ &2)\ \ \delta(t) > t \quad \text{on } [a, b) \\ &3)\ \ \delta'(t) > 0 \quad \text{on } [a, b) \\ &4)\ \ \lim_{t \to b_-} \delta(t) = b\,. \end{aligned}$$

Let n be a positive integer. If δ_n is the n-th iteration of the dispersion δ of the k-th kind, then δ_n has the same properties (1), see [4] § 13.

We shall need also some other properties of dispersions. Let y be a non-trivial solution of (q) and let φ_n, ψ_n be the n-th iteration of the dispersion φ, ψ of the 1-st or 2-nd kind, respectively. Then we have (see [4] § 13):

$$
(2) \qquad \begin{aligned}
\varphi_n'(t) &= y^2(\varphi_n(t))/y^2(t) && \text{for} \quad y(t) \neq 0 \\
&= y'^2(t)/y'^2(\varphi_n(t)) && \text{for} \quad y(t) = 0 \\
\psi_n'(t) &= \frac{q(t)}{q(\psi_n(t))} \cdot \frac{y'^2(\psi_n(t))}{y'^2(t)} && \text{for} \quad y'(t) \neq 0 \\
&= \frac{q(t)}{q(\psi_n(t))} \cdot \frac{y^2(t)}{y^2(\psi_n(t))} && \text{for} \quad y'(t) = 0 \,.
\end{aligned}
$$

1.2. First we summarize the results that we shall need in the sequel. See [1], [6], [2] (Theorems 5, 9, 10).

Theorem 1. *Let* (q), $q \in C^0[a, b)$, $q(t) < 0$, $t \in [a, b)$ *be an oscillatory* $(t \to b_-)$ *differential equation and* $\varphi_n(\psi_n)$ *the n-th iteration of its dispersion* φ (ψ) *of the first (second) kind. Let* $t_0 \in [a, b)$.

a) *Every solution of* (q) *is bounded on* $[t_0, b)$ *if and only if a constant N exists such that*

$$\varphi_n'(x) \leqq N \,, \quad x \in [t_0, \varphi(t_0)) \,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

b) *Every solution of* (q) *belongs to* $L^p[t_0, b)$, $p > 0$ *if and only if*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_0}^{\varphi(t_0)} [\varphi_n'(t)]^{1+p/2} \, dt < \infty$$

holds.

c) *If q is non-increasing (non-decreasing), then*

$$\frac{q(t)}{q(\delta(t))} \leqq \delta'(t) \leqq 1 \quad (\delta'(t) \geqq 1) \,, \quad t \in [a, b)$$

holds where δ *is the dispersion of the k-th kind of* (q), $k = 1, 2$.

d) *Let* $0 > q(t) \geqq \text{const} > -\infty$. *If there exists a solution y of* (q) *tending to zero for* $t \to b_-$, *then every solution of* (q) *linearly independent of y is unbounded on* $[a, b)$.

e) *Let* $0 > \text{const.} \geqq q(t) > -\infty$. *If there exists a solution y of* (q) *the derivative of which tends to zero* $t \to b_-$, *then the derivative of every solution of* (q) *linearly independent of y is unbounded on* $[a, b)$.

f) *Consider the following assertions on* $[a, b)$:

A) *The sequence of absolute values of local extremes of (the derivative of) an arbitrary solution of* (q) *is non-increasing.*

B) *The sequence of absolute values of local extremes of the derivative of an arbitrary solution (of an arbitrary solution) is non-decreasing.*

C) $\dfrac{q(\psi(t))}{q(t)}\,\psi'(t) \geqq 1$ *($\varphi(t) - t$ is non-decreasing).*

D) $\varphi(t) - t$ *is non-increasing* $\left(\dfrac{q(\psi(t))}{q(t)}\,\psi'(t) \leqq 1\right)$.

Then $A \Leftrightarrow C \Rightarrow D \Leftrightarrow B$ *holds.*

2. This paragraph deals with the relation of the dispersions of the 1-st and 2-nd kind of (q) and the property of every solution (of the derivative of every solution) of (q) to belong to $L^p[a, b)$, $p > 0$. Theorem 1b) gives the necessary and sufficient condition for every solution to belong to $L^p[a, b)$, $p > 0$. The situation for the derivative of an arbitrary solution is described by the following

Theorem 2. *Let* (q), $q \in C^0[a, b)$, $q(t) < 0$, $t \in [a, b)$ *be oscillatory on* $[a, b)$ *and let* ψ_n *be the n-th iteration of the dispersion* ψ *of the 2-nd kind. Then the derivative of every solution of* (q) *belongs to* $L^p[a, b)$, $p > 0$ *if and only if*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^{\psi(a)} |q(\psi_n(t))|^{p/2}\, \psi_n'(t)^{1+p/2}\, dt < \infty \tag{4}$$

holds.

Proof. Let the condition (4) be satisfied. According to (3) we have for an arbitrary solution y

$$\int_a^b |y'(t)|^p\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\psi_n(a)}^{\psi_{n+1}(a)} |y'(t)|^p\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^{\psi(a)} |y'(\psi_n)|^p\, \psi_n'\, dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^{\psi(a)} \psi_n'^{1+p/2} \left(|y'(t)|^2 \frac{|q(\psi_n)|}{|q(t)|}\right)^{p/2} dt \leqq M \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^{\psi(a)} |q(\psi_n(t))|^{p/2}\, \psi_n'^{1+p/2}\, dt < \infty$$

where

$$M = \max_{t \in [a, \psi(a)]} \left|\frac{y'^2(t)}{q(t)}\right|^{p/2}.$$

We can see that y' belongs to $L^p[a, b)$, $p > 0$. Let y' belong to $L^p[a, (b)$, $p > 0$ for an arbitrary solution y. Let y_1, y_2 be two linearly independent solutions of (q) such that $y_1' \neq 0$ on $[a, t_1]$, $y_2' \neq 0$ on $[t_1, \psi(a)]$, $t_1 = (a + \psi(a))/2$. Then

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^{\psi(a)} |q(\psi_n)|^{p/2}\, \psi_n'^{1+p/2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_a^{t_1} \left|\frac{y_1'(\psi_n)}{y_1'(t)}\right|^p |q(t)|^{p/2}\, \psi_n'\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{t_1}^{\psi(a)} \left|\frac{y_2'(\psi_n)}{y_2'(t)}\right|^p \cdot |q(t)|^{p/2}\, \psi_n'\, dt\right] \leqq M_1 \cdot \left(\int_a^b |y_1'|^p\, dt + \int_a^b |y_2'|^p\, dt\right) < \infty$$

where

$$M_1 = \max\left(\max_{t\in[a,t_1]}\left|\frac{q(t)}{y_1'^2(t)}\right|^{p/2}, \quad \max_{t\in[t_1,\psi(a)]}\left|\frac{q(t)}{y_2'^2(t)}\right|^{p/2}\right)$$

and we can see that the condition (4) is satisfied.

Lemma 1. *Let* (q), $q \in C^0[a, b)$, $q(t) < 0$, $t \in [a, b)$ *be oscillatory on* $[a, b)$ *and let* y *be an arbitrary solution. Let* $\varphi_n, \psi_n, \chi_n, \omega_n$ *be the n-th iteration of the dispersion* $\varphi, \psi, \chi, \omega$ *of the 1-st, 2-nd, 3-rd, 4-th kind, respectively. Let* $t_0, t_1 \in [a, b)$, $y(t_0) = 0$, $y'(t_1) = 0$.

a) *The solution* y *belongs to* $L^p[a, b)$, $p > 0$ *ij and only if*

(5) $$\sum_{n=0}^{\infty} |y(\chi_{n+1}(t_0))|^p (\varphi_{n+1}(t_0) - \varphi_n(t_0)) < \infty$$

holds.

b) *The derivative of* y *belongs to* $L^p[a, b)$, $p > 0$ *if and only if*

(6) $$\sum_{n=0}^{\infty} |y'(\omega_{n+1}(t_1))|^p (\psi_{n+1}(t_1) - \psi_n(t_1)) < \infty$$

holds.

Proof. a) Let y belong to $L^p[a, b)$, $p > 0$. Then

$$\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} |y(\chi_{n+1}(t_0))|^p (\varphi_{n+1}(t_0) - \varphi_n(t_0)) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{\varphi_n(t_0)}^{\chi_{n+1}(t_0)} (t - \varphi_n(t_0)) \frac{|y(\chi_{n+1}(t_0))|^p}{\chi_{n+1}(t_0) - \varphi_n(t_0)}\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{\chi_{n+1}(t_0)}^{\varphi_{n+1}(t_0)} (t - \varphi_{n+1}(t_0)) \frac{|y(\chi_{n+1}(t_0))|^p}{\chi_{n+1}(t_0) - \varphi_{n+1}(t_0)}\,dt\right] \leqq \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\varphi_n(t_0)}^{\varphi_{n+1}(t_0)} |y(t)|^p\,dt < \infty$$

(because $|y|^p$ has not smaller values on the interval $[\varphi_n(t_0), \chi_{n+1}(t_0)]$ or on $[\chi_{n+1}(t_0), \varphi_{n+1}(t_0)]$ than the function the graph of which is the line segment connecting the points $(\varphi_n(t_0), |y(\varphi_n(t_0))|^p)$ and $(\chi_{n+1}(t_0), |y(\chi_{n+1}(t_0))|^p)$ or $(\chi_{n+1}(t_0), |y(\chi_{n+1}(t_0))|^p)$ and $(\varphi_{n+1}(t_0), |y(\varphi_{n+1}(t_0))|^p)$, respectively. Thus we can see that (5) is valid.

Let (5) be valid. Then

$$\int_a^b |y(t)|^p\,dt = M + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\varphi_n(t_0)}^{\varphi_{n+1}(t_0)} |y(t)|^p\,dt \leqq M + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\varphi_n(t_0)}^{\varphi_{n+1}(t_0)} |y(\chi_{n+1}(t_0))|^p\,dt =$$

$$= M + \sum_{n=0}^{\infty} |y(\chi_{n+1}(t_0))|^p (\varphi_{n+1}(t_0) - \varphi_n(t_0)) < \infty\,, \quad M = \int_a^{t_0} |y(t)|^p\,dt$$

and the theorem is poved in this case.

b) The statement for y' can be proved in the same way. We only use ψ, ω instead of φ, χ.

Theorem 3. *Let* (q), $q \in C^0[a, \infty)$, $q(t) < 0$, $t \in [a, \infty)$ *be oscillatory on* $[a, \infty)$, *q monotone.*

a) *If there exists a solution y belonging to $L^p[a, \infty)$, $p > 0$, then* $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$.

b) *If every solution belongs to $L^p[a, \infty)$, $p > 0$, then every solution converges to zero for $t \to \infty$ and* $\lim_{t \to \infty} q(t) = -\infty$.

c) *If there exists a solution y such that y' belongs to $L^p[a, \infty)$, $p > 0$, then y' converges to zero for $t \to \infty$.*

d) *If the derivative of every solution belongs to $L^p[a, \infty)$, $p > 0$, then* $\lim_{t \to \infty} q(t) = 0$ *and the derivative of every solution tends to zero for $t \to \infty$.*

Proof. a) Let y be a non-trivial solution of (q) such that $y \in L^p[a, \infty)$, $p > 0$. Let $t_0 \in [a, \infty)$, $y(t_0) = 0$. According to Theorem 1c) f) the sequence of absolute values of local extremes of y is monotone. Hence $\lim_{n \to \infty} |y(\chi_n(t_0))| = M \geqq 0$ where χ_n is the n-th iteration of the dispersion χ of the 3-rd kind of (q). If $M = 0$, then $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$. If $M \neq 0$, then there exists a constant M_1 such that $|y(\chi_n(t_0))| \geqq M_1 > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ and according to Lemma 1 we have

$$\sum_{n=0}^{\infty} |y(\chi_{n+1}(t_0))|^p \left(\varphi_{n+1}(t_0) - \varphi_n(t_0)\right) \geqq M_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\varphi_{n+1}(t_0) - \varphi_n(t_0)\right) = \infty .$$

However, this contradicts our assumption.

c) This case can be proved in the same way as a).

b) d) The statement follows from a) c) and Theorem 1d) e).

Remark 1. A result of Bellman [3] § 6.8 concerns problems of this paragraph. Let $a \in C^0[t_0, \infty)$, $b \in C^0[t_0, \infty)$, $|b(t)| \leqq$ const. $< \infty$ for $t \in [t_0, \infty)$. Let $p > 1$ be a number and $p' = p/(p - 1)$. If every solution of $y'' = a(t)\, y$ belongs to $L^p[t_0, \infty)$ and $L^{p'}[t_0, \infty)$, then every solution of $y'' = (a(t) + b(t))\, y$ has the same property.

For $p = 2$ the statement $\lim_{t \to \infty} q(t) = -\infty$ from Theorem 3b) follows from this result by indirect proof: Let $\lim_{t \to \infty} q(t) = -C > -\infty$. Put $a(t) = q(t)$, $b(t) = -1 - q(t)$. Then every solution of $y'' = -y$ belongs to $L^2[t_0, \infty)$ but this is not true.

3. In the last paragraph we shall prove some new results concerning the existence of integral $\int_a^b y(t)\, dt$ where y is a non-trivial solution of (q).

Lemma 2. *Let* (q), $q \in C^0[a, b)$ *be oscillatory on* $[a, b)$ *and let* y *be its solution. Let* φ_n *be the n-th iteration of its dispersion* φ *of the* 1-*st kind.*

Let $t_0 \in [a, b)$. Then

$$\int_{t_0}^{b} y(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{t_0}^{\varphi(t_0)} \varphi_n'^{3/2}\, y(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{7}$$

Proof. According to (2) we have

$$\int_{t_0}^{b} y(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\varphi_n(t_0)}^{\varphi_{n+1}(t_0)} y(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_0}^{\varphi(t_0)} y(\varphi_n(t))\,\varphi_n'(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{t_0}^{\varphi(t_0)} \varphi_n'^{3/2}(t)\,y(t)\,\mathrm{d}t$$

and thus the stament is valid.

Theorem 4. *Let* (q), $q \in C^0[a, b)$, $b < \infty$ *be a differential equation,* q *non-increasing,* $\lim_{t\to b-} q(t) = -\infty$. *Let* y *be an arbitrary solution of* (q). *Then*

$$\left|\int_{a}^{b} y(t)\,\mathrm{d}t\right| = M_y = \text{const.} < \infty \tag{8}$$

holds.

Proof. As $\lim_{t\to b-} q(t) = -\infty$, the equation (q) is oscillatory on $[a, b)$. Let y be a non trivial solution of (q). Let $t_0 \in [a, b)$, $y(t_0) = 0$, $q(t) < 0$, $t \in [t_0, b)$. As $\varphi' \leqq 1$ on $[t_0, b)$ (see Theorem 1c)) we have

$$\left|\int_{t_0}^{\varphi(t_0)} \varphi_n'^{3/2}\, y(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqq \left|\int_{t_0}^{\varphi(t_0)} \varphi_{n-1}'(t)\, y(t)\,\mathrm{d}t\right|, \quad n = 2, 3, \ldots$$

and according to the alternating series test the infinite series in (7) converges if and only if

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{\varphi(t_0)} \varphi_n'^{3/2}(t)\,y(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{9}$$

holds. Hence $\int_a^b y(t)\,\mathrm{d}t$ converges iff the condition (9) is valid.

Let $c < 0$ be a number. As $\lim_{t\to b-} q(t) = -\infty$, there exists a number t_1, $t_1 \in [a, b)$ such that $q(t) < c$, $t \in [t_1, b)$. Then the Sturm Comparison Theorem for the equations (q) and $y'' = c \,.\, y$ implies $0 < \varphi(t) - t \leqq \pi/\sqrt{-c}$. Thus $\lim_{t\to b-} (\varphi(t) - t) = 0$. According to Theorem 1a) c) an arbitrary solution of (q) is bounded on $[a, b)$ and

$\varphi_n'(x) \leqq 1$, $x \in [a, b)$. There exists a constant $M > 0$ such that $|y(t)| \leqq M$, $t \in [a, b)$ holds and we have

$$0 \leqq \lim_{n\to\infty} \left| \int_{t_0}^{\varphi(t_0)} \varphi_n'^{3/2}(t)\, y(t)\, dt \right| \leqq \lim_{n\to\infty} M \int_{t_0}^{\varphi(t_0)} \varphi_n'(t)\, dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} M(\varphi_{n+1}(t_0) - \varphi_n(t_0)) = 0$$

(because $\lim_{t\to b_-} (\varphi(t) - t) = 0$, $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = b$).

Thus (9) is valid and the theorem is proved.

Remark 2. Theorem 4 is a generalization of a result in [5] XIV, § 3, where the assumptions are: $q \in C^0[a, b)$, q non-increasing, (q) oscillatory on $[a, b)$. However, (8) was proved only for solutions tending to zero for $t \to b_-$. Theorem 4 is a generalization of this result because if $\lim_{t\to b} q(t) = c$, $0 > c > -\infty$, then no non-trivial solution of (q) tends to zero for $t \to b_-$. This follows from the following argument:

Suppose that $\lim_{t\to b} y_1(t) = 0$. According to Theorem 1d) we have that the function y_2 is unbounded on $[a, b)$ where y_1, y_2 are linearly independent solutions of (q). Theorem 1c) gives $q(\psi(t))\, \psi'(t)/q(t) \geqq 1$, $t \in [a, b)$ where ψ is the dispersion of the 2-nd kind of (q). On the other hand it follows from Theorem 1f) that the sequence of absolute values of local extremes of y_2 is non-increasing and thus y_2 is bounded on $[a, b)$ which is a contradiction.

References

[1] *Bartušek M.:* Connection between Asymptotic Properties and Zeros of Solutions of $y'' = q(t)\,y$. Arch. Math. *3*, VIII, 1972, 113—124.

[2] *Bartušek M.:* On Asymptotic Properties and Distribution of Zeros of Solutions of $y'' = q(t)\,y$. Acta F.R.N. Univ. Comenian. To appear.

[3] *Belman R.:* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, Москва 1954.

[4] *Borůvka O.:* Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung. VEB Berlin 1967.

[5] *Hartman Ph.:* Ordinary Differential Equations. New York—London—Sydney, 1964.

[6] *Neuman F.:* Distribution of Zeros of Solutions of $y'' = q(t)\,y$ in Relation to Their Behaviour in Large. Acta Math. Acad. Scien. Hungaricae. *8* (1973) 177—185.

Author's address: 662 95 Brno, Janáčkovo nám. 2a (Přírodovědecká fakulta UJEP).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

A THEOREM ON 2-CONNECTED GRAPHS

LADISLAV NEBESKÝ, Praha

(Received October 12, 1973)

Let G be a graph. By $V(G)$ and $E(G)$ we denote the vertex set and the edge set of G, respectively. The number of elements of $V(G)$ is referred to as the order of G. We say that vertices r and s of G are independent if they are distinct and non-adjacent. If $u \in V(G)$, then by $\deg_G u$ we denote the degree of the vertex u in G.

We say that a connected graph G of order $p \geqq 3$ is 2-connected if for every $v \in V(G)$, the graph $G - v$ is connected. The terms not defined here can be found in BEHZAD and CHARTRAND [1].

We shall say that a vertex w of a 2-connected graph G is *weak* if $G - w$ is 2-connected. Theorem 2.10 in [1], due to A. KAUGARS, can be reformulated as follows: Every 2-connected graph contains either a weak vertex or a vertex of degree 2. We shall prove the following stronger result:

Theorem. *Every 2-connected graph of order $p \geqq 4$ contains either a pair of adjacent weak vertices or a pair of independent vertices of degree 2.*

Proof. The case $p = 4$ is obvious. Assume that $p = n \geqq 5$ and that the statement is proved for $4 \leqq p \leqq n - 1$. Let G be a 2-connected graph of order p. Assume that G contains no pair of adjacent weak vertices. We shall consider the following two possibilities:

(1) For every edge $x = u_0u_1$ of G, at least one of the vertices u_0 and u_1 is adjacent to a vertex of degree 2. Then G contains a vertex r_1 of degree 2 which is adjacent to distinct vertices r_0 and r_2. Assume that G contains no pair of independent vertices of degree 2. Then without loss of generality we can assume that $\deg_G r_0 \geqq 3$. If $\deg_G r_2 \geqq 3$, then by r we denote the vertex r_2; if $\deg_G r_2 = 2$, then by r we denote the vertex adjacent to r_2 and different from r_1. Obviously, $\deg_G r \geqq 3$. It is easily seen that if $s_1, s_2 \in V(G) - \{r_0, r_1, r_2, r\}$, then the vertices s_1 and s_2 are non-adjacent. As no vertex in the set $V(G) - \{r_0, r_1, r_2, r\}$ has degree 2, G contains a vertex of degree 1, which is a contradiction. This means that G contains a vertex s_1 of degree 2 such that the vertices r_1 and s_1 are independent.

(2) There is an edge $y = uu'$ of G such that neither u nor u' is adjacent to a vertex of degree 2. Without loss of generality we can assume that the vertex u is not a weak one. Thus $G - u$ is not 2-connected and there is a vertex v such that the graph $G - u - v$ is disconnected. It is easily seen that there exist subgraphs F_1 and F_2 of G such that $V(F_1) \cup V(F_2) = V(G)$, $V(F_1) \cap V(F_2) = \{u, v\}$, $3 \leqq |V(F_1)| \leqq |V(F_2)|$, $E(F_1) \cup E(F_2) = E(G)$, and $E(F_1) \cap E(F_2) = \emptyset$. As u is adjacent to no vertex of degree 2, $|V(F_1)| \geqq 4$. Hence $|V(G)| \geqq 6$.

Let $i \in \{1, 2\}$. We construct a graph G_i as follows: (a) if $\deg_{F_i} u = 1 = \deg_{F_i} v$, then $V(G_i) = V(F_i)$ and $E(G_i) = E(F_i) \cup \{uv\}$; (b) if either $\deg_{F_i} u > 1$ or $\deg_{F_i} v > 1$, then $V(G_i) = V(F_i) \cup \{w_i\}$ and $E(G_i) = E(F_i) \cup \{uw_i, vw_i\}$, where w_i is a vertex different from the vertices of F_i. Clearly, G_i is 2-connected. It is easily seen that for every vertex $t \in V(F_i)$, t is a weak vertex of G_i if and only if it is a weak vertex of G. This means that G_i contains no pair of adjacent weak vertices. As $5 \leqq |V(G_i| \leqq p - 1$, G_i contains a pair of independent vertices of degree 2. There is a vertex $t_i \in V(F_i) - \{u, v\}$ such that $\deg_{G_i} t_i = 2$. Obviously, $\deg_G t_i = 2$. As t_1 and t_2 are independent vertices of G, the proof is complete.

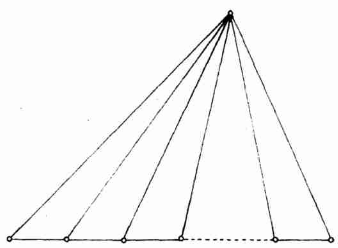


Fig. 1.

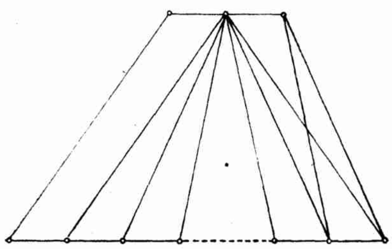


Fig. 2.

Remark. As follows from Fig. 1, for every integer $p \geqq 4$, there is a 2-connected graph of order p such that (i) it contains a pair of independent vertices of degree 2, (ii) it contains precisely two weak vertices, and (iii) the weak vertices are independent. As follows from Fig. 2, for every integer $p \geqq 6$, there is a 2-connected graph of order p such that (i) it contains a pair of adjacent weak vertices, (ii) it contains precisely two vertices of degree 2, and (iii) the vertices of degree 2 are adjacent.

Reference

[1] *M. Behzad* and *G. Chartrand:* Introduction to the Theory of Graphs. Allyn and Bacon, Inc., Boston 1971.

Author's address: 116 38 Praha 1, nám. Krasnoarmějců 2 (Filosofická fakulta Karlovy university).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

A NOTE ON COMPARISON OF TURING MACHINES WITH COMPUTERS

KAREL ČULÍK, Praha

(Received October 25, 1973)

Computers are devices using only functions the domain and range of which is perfectly determined (the movement of a scanning head in Turing machine is no function in this sense) and they are classified by the types and properties of functions used. Two sorts of tape-computers with suitable modifications of addresses are presented which simulate the activity of Turing machines.

1. ADDRESSED TURING MACHINES

A definition of Turing machine has two parts: the first concerns the syntax and the second the semantics, i.e. its activity.

With respect to the syntax (according to e.g. M. DAVIS [3]) a Turing machine is determined by a finite set Z of quadruples which have one of the following three forms

$$(q, a, q^*, a^*)\,, \tag{1}$$

$$(q, a, q^*, R)\,, \tag{2}$$

$$(q, a, q^*, L) \tag{3}$$

and which satisfy the following requirement

(4) no two different quadruples from Z have the same first and second member,

where $q, q^* \in Q$; $a, a^* \in A$; $A \cap \{R, L\} = \emptyset$ and $|Q| = n$. The elements of Q, A are called *inner states, basic symbols* respectively. There is one inner state $q_1 \in Q$ distinguished and called *initial* and one basic symbol $a_0 \in A$ called *blank space.*

The activity of Turing machine concerns a two-way-infinite tape divided into squares on which certain basic symbols are printed. Assuming well known determination of the activity in [3] a little modified way is used here. Let $N = \{..., -2,$

$-1, 0, +1, +2, \ldots\}$ be the set of all positive and negative integers, inclusively zero, which are assigned to the individual squares of the tape as their coordinates. The numbers from N may be considered as symbolic addresses of the corresponding squares-memory cells, because the tape plays a role of storage in any case. This is the reason why we are speaking about an *addressed Turing machine.*

Let TD be the set of all *tape descriptions* which are functions t such that

(5) Domain $t = N$, Range $t \subset A$ and there is only a finite number of integers $x \in N$ satisfying the inequality $t(x) \neq a_0$.

With respect to (5) let N_t be the shortest interval of N such that if $x \in N - N_t$ then $t(x) = a_0$. Then $t|_{N_t}$ is called *finite tape description.*

In virtue of (4), the following two binary functions may be determined for the given set Z (by the enumeration of the corresponding triples):

(6) $\varphi = \{((q, a); q^*)$; there exists a quadruple in Z such that q, a, q^* is its first, second, third member respectively$\}$,

and

(7) $\psi = \{((q, a); a^*)$; there exists a quadruple in Z of the form (1) such that q, a, a^* is its first, second, fourth member respectively$\}$.

Now each instantaneous description (see [3]) of the Turing machine Z is determined by a triple $[t, x, q]$ where $t \in TD$, $x \in N$ and $q \in Q$, because by x is determined which square is scanned and by $t(x)$ which symbol is printed in the square scanned. The next instantaneous description $[t^*, x^*, q^*]$ is defined recurrently as follows:

a) if q, $t(x)$ is the first, second member respectively, in a quadruple of T which has the form (p) where $1 \leqq p \leqq 3$, then the condition (p^*) holds, where

(1*) $$t^*(i) = t(i) \text{ for each } i \neq x \text{ where } i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \text{ and}$$
$$t^*(x) = \psi(q, t(x))\,; \quad x^* = x \text{ and } q^* = \varphi(q, t(x))\,;$$

(2*) $$t^* = t\,; \quad x^* = x + 1 \quad \text{and} \quad q^* = \varphi(q, t(x))\,;$$

(3*) $$t^* = t\,; \quad x^* = x - 1 \quad \text{and} \quad q^* = \varphi(q, t(x))\,;$$

b) if there does not exist a quadruple of Z such that q, $t(x)$ is its first, second member respectively, then the activity is stopped and t is called *final tape description*;

c) the initial instantaneous description $[t, x, q]$ satisfies $q = q_1$.

The machine Z computes the string function $F_Z = \{(t_0|_{N_{t_0}}, t|_{N_t})$; t_0 is an initial instantaneous description and t is the corresponding final state description$\}$ because, obviously, by $t_0|_{N_{t_0}}$ and $t|_{N_t}$ a pair of finite strings over A is uniquely determined.

If a number function should be computed by a Turing machine Z then all the required numbers must be expressed in well known way by repeating one distinguished symbol, i.e. certain coding and decoding is assumed such that one number may occupy many neighbouring squares, or, one number is stored at many addresses simultaneously. If also negative integers, rational numbers and r-tuples of such numbers are required further coding and decoding conventions must be added.

2. COMPUTERS AND THEIR PROGRAMS

Using sligthly modified and simplified definitions and notations of [1] and [2], a computer may be characterized as follows: $\mathbf{Cptr} = \langle \mathbf{Obj}, \mathbf{Adr}, \mathbf{Fct} \rangle$, where $\mathbf{Obj}$ is a set of *basic objects* the computer is dealing with, $\mathbf{Adr}$ is a set of *basic addresses* (or names, or identifiers etc.) and $\mathbf{Fct}$ is a set of *basic functions* such that if $f \in \mathbf{Fct}$ then Domain $f \subset \mathbf{Obj}^n \times \mathbf{Adr}^m$ for certain integers $0 \leqq n, m$, and Range $f \subset \mathbf{Obj} \cup \mathbf{Adr}$. If there exists a function $f \in \mathbf{Fct}$ with $n \geqq 1$ and $m \geqq 1$ then the computer is called of a *mixed type*, otherwise, i.e. if always either $n = 0$ or $m = 0$, of a *pure type.* If $f \in \mathbf{Fct}$ then there are the following four possibilities in computers of a pure type:

(8) Domain $f \subset \mathbf{Obj}^n$, $n \geqq 1$, and Range $f \subset \mathbf{Obj}$ (then f is called *operation*);

(9) Domain $f \subset \mathbf{Obj}^n$, $n \geqq 1$, and Range $f \subset \mathbf{Adr}$ (then f is called *condition*);

(10) Domain $f \subset \mathbf{Adr}^m$, $m \geqq 1$, and Range $f \subset \mathbf{Adr}$ (then f is called *address modification*);

and finally

(11) Domain $f \subset \mathbf{Adr}^m$, $m \geqq 1$, and Range $f \subset \mathbf{Obj}$.

In [1] the computer is said to be simple if $\mathbf{Fct} = \mathbf{Opr}$ where $\mathbf{Opr}$ is the set of all operations, and it is called conditional if $\mathbf{Fct} = \mathbf{Opr} \cup \mathbf{Cond}$ where $\mathbf{Cond} \neq \emptyset$ and $\mathbf{Cond}$ is the set of all conditions. Here the conditional computers with address modifications (i.e. if $\mathbf{Fct} = \mathbf{Opr} \cup \mathbf{Cond} \cup \mathbf{Mod}$, where $\mathbf{Mod} \neq \emptyset$ and $\mathbf{Mod}$ is the set of all address modifications) will be considered.

Further the following derived concepts must be added to the characterization of a computer:

$\mathbf{Com}$ is the set of all commands which are strings of symbols of one of the following forms:

(12) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =: x_0$, where "$f$" $\in \mathbf{SymbOpr}$ and $x_i \in \mathbf{Adr}$ for $i = 0, 1, \ldots, n$;

(13) $x =: y$, where $x, y \in \mathbf{Adr}$;

(14) $\mathbf{Stop}$;

(15) $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, where "g" $\in \mathbf{SymbCond}$ and $x_i \in \mathbf{Adr}$ for $i = 1, 2, \ldots, n$;

(16) x, where $x \in \mathbf{Adr}$;

(17) $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) =: x_0$, where "$h$" $\in$ ***SymbMod*** and $x_i \in$ ***Adr*** for

$i = 0, 1, \ldots, n$;

(18_1) $\boldsymbol{\sigma}(x) =: y$, where $x, y \in$ ***Adr*** and $\boldsymbol{\sigma}$ is a new symbol,

(18_2) $y =: \boldsymbol{\sigma}(x)$, where $x, y \in$ ***Adr***, $\boldsymbol{\sigma}$ is a new symbol,

where ***SymbOpr***, ***SymbCond***, ***SymbMod*** is the set of names of all elements in ***Opr***, ***Cond***, ***Mod*** respectively such that always there is a one-to-one correspondence between names and functions, and "$=:$" is usual assignement symbol.

In simple computers only commands of forms (12)–(14) are required, in conditional computers the commands of the form (15) and (16) are added (which are conditional and unconditional jumps respectively), and if some modifications of addresses are admitted also the commands of forms (17) and (18) are necessary.

Further

Sta $= \{\sigma; \sigma$ is a function such that Domain $\sigma =$ ***Adr*** and Range $\sigma \subset$ ***Obj*** $\cup$ $\cup$ ***Adr*** $\cup$ ***Com***$\}$ is the set of all states of storage (in simple and conditional computers it is possible to restrict the states σ to a special case when Range $\sigma \subset$ ***Obj***);

AdrCom is the set of strings called addressed commands, which are couples $\langle a; C \rangle$, where $a \in$ ***Adr*** and $C \in$ ***Com*** (such that the address "a" does not occur in the command "C"; for this reason in [1] and [2] a special set of labels or markers is introduced by which the command are labelled and which are the only values of conditions);

Prog is the set of all programs which are finite sequences P of the form $P = (K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(p)})$, where $K^{(i)} \in$ ***Com*** $\cup$ ***AdrCom*** for each $i = 1, 2, \ldots, p$.

The activity of the computer ***Cptr*** under consideration for the program P and for an initial state of storage $\sigma_0 \in$ ***Sta*** consists in an iterative application of commands (or addressed commands) occurring in P to the current state of storage in the order from the left to the right unless by conditional commands (15) and (16) a new address, and therefore a new addressed command, is determined. It is sufficient to define the next state of storage $\sigma_i = C_i\sigma_{i-1}$ for the current state σ_i to which the command C_i is applied (or executed), and the next command C_{i+1} where $i > 0$. The cases (12)–(18) must be distinguished:

(12*) $C_i = (f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =: x_0)$ and C_i is contained in $K^{(j)}$, where $1 \leqq j < p$ (if $j = p$ then after application of C_i the activity is finished, because no C_{i+1} is determined); if $(\sigma_{i-1}(x_1), \sigma_{i-1}(x_2), \ldots, \sigma_{i-1}(x_n)) \in$ Domain f (otherwise the activity is finished) then $\sigma_i(z) =_{\mathrm{df}} \sigma_{i-1}(z)$ for each $z \in$ ***Adr*** $- \{x_0\}$ and $\sigma_i(x_0) =_{\mathrm{df}} f(\sigma_{i-1}(x_1), \sigma_{i-1}(x_2), \ldots, \sigma_{i-1}(x_n))$, and C_{i+1} is that command contained in $K^{(j+1)}$;

(13*) $C_i = (x =: y)$ and C_i is contained in $K^{(j)}$, where $1 \leqq j < p$ (if $j = p$ then after application of C_i the activity is finished); then $\sigma_i(z) =_{df} \sigma_{i-1}(z)$ for each $z \in \mathbf{Adr} - \{y\}$ and $\sigma_i(y) =_{df} \sigma_{i-1}(x)$, and C_{i+1} is that command contained in $K^{(j+1)}$;

(14*) $C_i = \mathbf{Stop}$; then the activity is finished and stopped and the state σ_{i-1} is called final or resulting state of storage;

(15*) $C_i = (g(x_1, x_2, \ldots, x_n))$; if $(\sigma_{i-1}(x_1), \sigma_{i-1}(x_2), \ldots, \sigma_{i-1}(x_n)) \in$ Domain g and if there exists $K^{(j)}$, $1 \leqq j \leqq p$, which contains the address $g(\sigma_{i-1}(x_1), \ldots$ $\ldots, \sigma_{i-1}(x_n))$ (otherwise the activity is finished) then C_{i+1} is that command contained in $K^{(j)}$, and $\sigma_i = \sigma_{i-1}$;

(16*) $C_i = (x)$; if there exists $K^{(j)}$, $1 \leqq j \leqq p$, which contains the address x (otherwise the activity is finished), then C_{i+1} is that command contained in $K^{(j)}$, and $\sigma_i = \sigma_{i-1}$;

(17*) arises from (12*) by replacement of "f" by "h";

(18_1^*) $C_i = (\boldsymbol{\sigma}(x) =: y)$ and C_i is contained in $K^{(j)}$, where $1 \leqq j < p$ (if $j = p$ then after application of C_i the activity is finished); if $\sigma_{i-1}(x) \in \mathbf{Adr}$ (otherwise the activity is finished) then $\sigma_i(z) =_{df} \sigma_{i-1}(z)$ for each $z \in \mathbf{Adr} - \{y\}$ and $\sigma_i(y) =_{df} \sigma_{i-1}(\sigma_{i-1}(x)) = \sigma_{i-1}^2(x)$, and C_{i+1} is that command which is contained in $K^{(j+1)}$;

(18_2^*) $C_i = (y =: \boldsymbol{\sigma}(x))$ and C_i is contained in $K^{(j)}$, where $1 \leqq j < p$ (if $j = p$ then after the application of C_i the activity is finished); if $\sigma_{i-1}(x) \in \mathbf{Adr}$ (otherwise the activity is finished) then $\sigma_i(z) =_{df} \sigma_{i-1}(z)$ for each $z \in \mathbf{Adr} -$ $- \{\sigma_{i-1}(x)\}$ and $\sigma_i(\sigma_{i-1}(x)) =_{df} \sigma_{i-1}(y)$, and C_{i+1} is that command contained in the $K^{(j+1)}$.

Although the commands of the form (18) are sufficient for our simulation of all Turing machines it should be noted that they may be generalized in a natural way to the form

(19) $\boldsymbol{\sigma}^k(x) =: y$, where $x, y \in \mathbf{Adr}$, $\boldsymbol{\sigma}$ is a new symbol as in (18_1) and $k \geqq 2$ is an arbitrary integer.

It is conjectured that this general case is close to the "***ref***"-mechanism in *ALGOL68* [5].

The computer **Cptr** computes the state function $F_{\mathbf{Cptr},P} = \{(\sigma_0; \sigma_i); \sigma_i$ is the final state of storage of **Cptr** which corresponds to the initial state σ_0 in accordance with the program $P\}$, because it assigns states of storage again to states of storage.

Usually there are prescribed input and output addresses to each program P, e.g. $I_P = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\} \subset \mathbf{Adr}$ and $O_P = \{y_1, y_2, \ldots, y_s\} \subset \mathbf{Adr}$ respectively, and therefore another function $f_{\mathbf{Cptr},P} = \{(\sigma_0|_{I_P}; \sigma_i|_{O_P}); (\sigma_0; \sigma_i) \in F_{\mathbf{Cptr},P}\}$ is called *computable in* $\mathbf{Cptr}$ *by* P, under the condition that Range $\sigma_0|_{I_P} \subset \mathbf{Obj}$ and Range $\sigma_i|_{O_P} \subset \mathbf{Obj}$, which means that s r-ary functions (=operations) in $\mathbf{Obj}$ are computed (if, e.g. the order of input and output addresses is fixed).

Thus the crucial theoretical question is to decide whether or not an arbitrary function f^* such that Domain $f^* \subset \mathbf{Obj}^r$ and Range $f^* \subset \mathbf{Obj}$ (i.e. if $s = 1$) is computable in the prescribed $\mathbf{Cptr}$, i.e. whether or not there exists a program P such that $f^* = f_{\mathbf{Cptr},P}$, and if the answer is positive, to construct the required program P. In fact, always the function f^* under consideration must be determined by a "program" or by an "algorithm" using some other functions assumed as known and computable, and therefore the crucial practical question is to "translate" the given "program" for one "computer" into program for the second computer.

3. DIFFERENCES BETWEEN TURING MACHINES AND COMPUTERS

(i) A computer has finite storage represented by the set $\mathbf{Adr}$ but an addressed Turing machine has an infinite storage represented by the set N.

(ii) The storage of a computer has no structure, i.e. all addresses are equivalent each to other because they are all available in any instant (the differences between the registers and other memory cells of main storage of real computers and differences between different sorts of storage as magnetic tape, drum, digs, etc. can but need not be taken in account here), but in each Turing machine its memory has tape structure where in next instant only two neighbouring addresses, and the current address itself, are available.

(iii) The basic objects which are stored at the addresses in computers may be essentially more complex than the basic symbols stored at the addresses of a tape in Turing machines, where also basic objects are stored at many neighbouring addresses. Here is a deep difference in the concept of address.

(iv) In computers it is possible to admit an infinite number of basic objects without any change of the programs, but it has different meaning to admit infinite number of basic symbols in Turing machines.

(v) There is distinguished the computer from its programs, but in Turing machine both these concepts are mixed up in a set of quadruples Z.

In other words, in computers the determination of basic functions (which belong to hard-ware) is separated from that of programs (which belong to soft-ware), but in Turing machines both these parts are mixed up.

(vi) The string functions F_Z and the state functions $F_{\mathbf{Cptr},P}$ or $f_{\mathbf{Cptr},P}$ cannot be compared in any reasonable way because of (iii), i.e. F_Z concerns the sequences of addresses of arbitrary lengths but $f_{\mathbf{Cptr},P}$ concerns fixed sets of addresses.

(vii) In computers the basic operations and conditions may be arbitrary functions of many variables (in real computers they are binary functions usually), i.e. the objects stored at many different addresses must be used simultaneously, but in Turing machines only unary operations are used, because only one square is scanned.

It follows by (vii) that it is impossible to replace a computer by one single Turing machine; it would be necessary to have several Turing machines together with their composition, or to have a universal Turing machine.

By (iii) it is also impossible to replace a Turing machine by one computer, unless a specialized storage is required, i.e. which have the same tape structure as that of Turing machines has.

Therefore in the following sections certain specialized tape-computers are considered. Then $F_{\boldsymbol{Cptr},P}$ will be a string function and it may be compared with F_Z for the Turing machine Z.

4. THE FIRST TAPE-COMPUTER AND ITS SIMULATING PROGRAM

Now to an arbitrary addressed Turing machine Z with the tape N the tape-computer $\boldsymbol{Cptr}_1 = \langle \boldsymbol{Obj}_1, \boldsymbol{Adr}_1, \boldsymbol{Fct}_1 \rangle$ of mixed type is constructed in the following way.

First of all in accordance with Sect. 1 let us introduce the following unary relation in 4-valued logic (i.e. a decomposition of a set into 4 subsets) with values $m_1, m_2, m_3, m_4 \in \boldsymbol{Adr}$:

(20) $\varrho =_{\mathrm{df}} \{((q, a); m_p)$; there exists a quadruple in Z of the form (p), where $1 \leqq p \leqq 3$, such that q, a is its first, second member respectively$\} \cup \{((q, a); m_4)$; there does not exist a quadruple in Z such that q, a is its first, second member respectively$\}$.

In other words ϱ is a function such that Domain $\varrho = Q \times A$, Range $\varrho \subset \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ and such that a decomposition of $Q \times A$ in at most four classes is determined. Three of these classes correspond to the cases (1), (2) and (3) mentioned in Sect. 1, and the fourth class contains pairs (q, a) for which neither φ nor ψ is defined.

Thus we define: $\boldsymbol{Obj}_1 = A \cup Q$; $\boldsymbol{Adr}_1 = N \cup \{r_N, r'_N, r_Q, r'_Q\} \cup \{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4\}$, i.e. to the tape-store N some auxiliary addresses – e.g. registers – are added; $\boldsymbol{Fct}_1 = \{\varphi, \psi, \varrho, +1, -1\}$, where "+1" and "−1" means the addition of plus one and minus one defined in N respectively; $\boldsymbol{Sta}_1 = \{\sigma$; there exists $t \in TD$ such that $\sigma(x) = t(x)$ for each $x \in N$, $\sigma(r_N) \in N$, $\sigma(r'_N) \in A$, $\sigma(r_Q) \in Q$, $\sigma(r'_Q) \in Q$ and $\sigma(m_p) \in \boldsymbol{Com}$ for $p = 0, 1, 2, 3, 4\}$; the initial state σ_0 satisfies $\sigma_0(r_Q) = q_1$. Finally let us take the following program:

$$
\begin{aligned}
P_1 = (\langle m_0;\ & \sigma(r_N) =: r'_N\rangle,\quad \varrho(r_Q, r'_N),\\
& \langle m_1;\ \varphi(r_Q, r'_N) =: r'_Q\rangle,\quad \psi(r_Q, r'_N) =: r'_N,\quad r'_Q =: r_Q,\quad m_0,\\
& \langle m_2;\ \varphi(r_Q, r'_N) =: r_Q\rangle,\quad r_N + 1 =: r_N,\quad m_0,\\
& \langle m_3;\ \varphi(r_Q, r'_N) =: r_Q\rangle,\quad r_N - 1 =: r_N,\quad m_0,\\
& \langle m_4;\ \boldsymbol{Stop}\rangle).
\end{aligned}
$$

Lemma 1. *The tape-computer* $\mathbf{Cptr}_1$ *by the program* P_1 *simulates the activity of the Turing machine Z and therefore* $F_{\mathbf{Cptr}_1, P_1} = F_Z$.

Proof. If $[t, x, q]$ is an initial instantaneous description of the addressed Turing machine Z, i.e. $q = q_1$, then as the corresponding initial state σ_0 for $\mathbf{Cptr}_1$ the following one must be chosen: $\sigma_0(r_N) = x$ and $\sigma_0(y) = t(y)$ for $y \in N$. Further the simulation is clear step by step.

The unsufficiency of this tape-computer consists in the fact, that we are interested in a string function F_Z such that the strings on N consist only of the basic symbols from A and the inner states from Q are not addmitted. Therefore an other tape-computer will be introduced.

5. THE SECOND TAPE-COMPUTER AND ITS SIMULATING PROGRAM

The tape-computer $\mathbf{Cptr}_2 = \langle \mathbf{Obj}_2, \mathbf{Adr}_2, \mathbf{Fct}_2 \rangle$ differ from $\mathbf{Cptr}_1$ by considering of Q as a subset of the set of addresses, by which follows the necessity to modify the set of functions as follows:

(6*) $g_q = \{(a; q^*)$; there exists a quadruple in Z such that q, a, q^* is its first, second, third member respectively$\}$ for each $q \in Q$;

(7*) $f_q = \{(a; a^*)$; there exists a quadruple in Z of the form (1) such that q, a, a^* is its first, second, fourth member respectively$\}$ for each $q \in Q$;

(20*) $h_q = \{(a; m_q^{(p)})$; there exists a quadruple in Z of the form (p), where $1 \leqq p \leqq$ $\leqq 3$, such that q, a is its first, second member respectively$\} \cup \{(a; m_q^{(4)})$; there does not exist a quadruple in Z such that q, a is its first, second member respectively$\}$ for each $q \in Q$.

It is important to mention explicitely, that the functions g_q, f_q, h_q for $q \in Q$ arised by suitable partialization of the function φ, ψ, ϱ respectively.

Let Q_g, Q_f, Q_h be the set of all states $q \in Q$ such that $g_q \neq \emptyset$, $f_q \neq \emptyset$, $h_q \neq \emptyset$ is valid respectively. Therefore $Q_g \cap Q_h = \emptyset$ and $Q_f \subset Q_g$.

Thus we define: $\mathbf{Obj}_2 = A$; $\mathbf{Adr}_2 = N \cup Q \cup \{r_N, r'_N\} \cup \{m_q^{(p)};\ q \in Q$ a $p =$ $= 1, 2, 3, 4\}$; $\mathbf{Fct}_2 = \mathbf{Opr}_2 \cup \mathbf{Cond}_2 \cup \mathbf{Mod}_2$, where $\mathbf{Opr}_2 = \{f_q; q \in Q_f\}$, $\mathbf{Cond}_2 =$ $= \{g_q;\ q \in Q_g\} \cup \{h_q;\ q \in Q_h\}$ and $\mathbf{Mod}_2 = \{+1, -1\}$; $\mathbf{Sta}_2 = \{\sigma$; there exists $t \in TD$ such that $\sigma(x) = t(x)$ for each $x \in N$, $\sigma(r_N) \in N$, $\sigma(r'_N) \in N$, $\sigma(q) \in \mathbf{Com}$ for each $q \in Q$ and $\sigma(m_q^{(p)}) \in \mathbf{Com}$ for each $q \in Q$ and $p = 1, 2, 3, 4\}$; the initial state σ_0 satisfies $\sigma_0(x) = t$.

Finally let us take the following program, if $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$:

$$
\begin{aligned}
P_2 = (&\langle q_1;\ \sigma(r_N) =: r'_N\rangle\,,\quad h_{q_1}(r'_N)\,,\\
&\qquad \langle m^{(1)}_{q_1};\ f_{q_1}(r'_N) =: \sigma(r_N)\rangle\,,\quad g_{q_1}(r'_N)\,,\\
&\qquad \langle m^{(2)}_{q_1};\ r_N + 1 =: r_N\rangle\,,\quad g_{q_1}(r'_N)\,,\\
&\qquad \langle m^{(3)}_{q_1};\ r_N - 1 =: r_N\rangle\,,\quad g_{q_1}(r'_N)\,,\\
&\qquad \langle m^{(4)}_{q_1};\ \mathbf{STOP}\rangle\,,\\
&\langle q_2;\ \sigma(r_N) =: r'_N\rangle,\ h_{q_2}(r'_N)\,,\\
&\qquad \langle m^{(1)}_{q_2};\ f_{q_2}(r'_N) =: \sigma(r_N)\rangle\,,\quad g_{q_2}(r'_N)\,,\\
&\qquad \vdots\\
&\qquad \langle m^{(4)}_{q_{n-1}};\ \mathbf{STOP}\rangle\,,\\
&\langle q_n;\ \sigma(r_N) =: r'_N\rangle\,,\quad h_{q_n}(r'_N)\,,\\
&\qquad \langle m^{(1)}_{q_n};\ f_{q_n}(r'_N) =: \sigma(r_N)\rangle\,,\quad g_{q_n}(r'_N)\,,\\
&\qquad \langle m^{(2)}_{q_n};\ r_N + 1 =: r_N\rangle\,,\quad g_{q_n}(r'_N)\,,\\
&\qquad \langle m^{(3)}_{q_n};\ r_N - 1 =: r_N\rangle\,,\quad g_{q_n}(r'_N)\,,\\
&\qquad \langle m^{(4)}_{q_n};\ \mathbf{STOP}\rangle)\,,
\end{aligned}
$$

where each group of commands starting with $\langle q_i;\ \sigma(r_N) =: r'_N\rangle$ is superfluous if $q_i \notin Q_h$.

Lemma 2. *The tape-computer* $\mathbf{Cptr}_2$ *by the program* P_2 *simulates the activity of the Turing machine* Z *and therefore* $F_{\mathbf{Cptr}_2, P_2} = F_Z$.

Proof. If $[t, x, q_1]$ is an initial instantaneous description of the addressed Turing machine Z, then the corresponding initial state σ_0 for the $\mathbf{Cptr}_2$ must be chosen as follows: $\sigma_0(r_N) = x$ and $\sigma_0(y) = t(y)$ for each $y \in N$. Further if, e.g. the quadruple (q_1, a_1, q_2, a_2) of the type (1) is applied to $[t, x, q_1]$, where $t(x) = a_1$, then by (1*) the next instantaneous description $[t^*, x^*, q_1^*]$ satisfies: $t^*(i) = t(i)$ for $i \in N - \{x\}$ and $t^*(x) = \psi(q_1, a_1) = a_2$ (which follows by (7)); $x^* = x$ and $q_1^* = \varphi(q_1, a_1) = q_2$ (which follows by (6)). On the other hand according to the P_2 the first command $\sigma(r_N) =: r'_N$ must be applied, where $\sigma = \sigma_0$ (as the current state at the beginning is the initial state σ_0) and therefore by (18_1^*) one gets $\sigma_1(z) = {}_{\mathrm{df}}\sigma_0(z)$ for each $z \in \mathbf{Adr} - \{r'_N\}$ and $\sigma_1(r'_N) = {}_{\mathrm{df}}\sigma_0^2(r_N) = a_1$. Further the next conditional command $h_{q_1}(r'_N)$ is applied and therefore by (15*) $\sigma_2 = \sigma_1$ and by (20*) $h_{q_1}(a_1) = m^{(1)}_{q_1}$. Thus the next command to be executed is $f_{q_1}(r'_N) =: \sigma(r_N)$, where by (7*) $f_{q_1}(a_1) = a_2$ and $\sigma_2(r_N) = \sigma_1(r_N) = \sigma_0(r_N) = x$. Therefore by (12*) $\sigma_3(z) = \sigma_2(z)$ for each $z \in \mathbf{Adr} - \{x\}$ and $\sigma_3(x) = {}_{\mathrm{df}}f_{q_1}(\sigma_2(r'_N)) = a_1$. Now the next command to be executed is $g_{q_1}(r'_N)$, where according to (6*), $g_{q_1}(a_1) = q_2$, and by (15*) $\sigma_4 = \sigma_3$, which means that as the next command will be executed that one addressed by "q_2". Moreover it is clear that $\sigma_4(i) = t^*(i)$ for each $i \in N$ and $\sigma_4(r_N) = x = x^*$ again. Taking all other possibilities one establishes the required simulation correspondence step by step.

It follows by the lemmas:

Theorem. *Each function computable by a Turing machine is computable by a tape-computer of the type* $\mathbf{Cptr}_1$ *and also of the type* $\mathbf{Cptr}_2$.

The reason for giving this theorem (and both preceeding lemmas also) is to clarify deep differences between computers and Turing machines. It is shown by them that for the simulation purpose of Turing machines the computers must be provided not only by an infinite memory but moreover by a tape-structured infinite memory which requires two infinite functions = address modifications "+1" and "−1". It seems to be highly unconstructivistic and, of course not realizable, to allow any infinite function in the base of a computer itself. Moreover both tape-computers show explicitely that during the computation several functions $\sigma \in \mathbf{Sta}$ must be used, although not explicitly, which probably may have unpredictible properties. This is also no support for the strict constructivistic point of view.

6. CONCLUSIONS

In order to underline the differences between Turing machines and computers it shoulded be remind a note concerning certain classifications of computers in Sect. 2. In general it is unclear how important role is played by the commands of the types (18_1) and (18_2). In any case there is a conjecture that these types of commands are necessary in each complete simulation of Turing machines and therefore that they represent a special tool in constructing of functions. These commands are not expressible using the usual flow-diagrams and therefore it may be conjectured that the functions computed by Turing machines cannot be simulated by flow-diagrams only.

On the other hand it remains open to extend the above mentioned simulation to the universal Turing machine too.

With respect to a classification concerning the functions required by the computer it is clear, that there are many Turing machines simulated by just one-tape-computer using many different programs. The value of these classifications remains unclear because it is easy to provide each tape-computer by all possible unary operations which may be defined in the set A (if A is finite).

The fact that in $\mathbf{Cptr}_2$ only unary operations (and in fact also only unary conditions and modifications) are required, shows that within all the frame of Turing machines or of mentioned tape-computers some important tools are included, or are added by further conventions, if the functions of unary variables should be evaluated.

Moreover in [4] even a more extremal case occurs if all the operations are constant functions, i.e. functions without any variable.

For all the mentioned differences between Turing machines and computers a strong feeling must arise that the recent computer problems cannot be solved using the concepts concerning Turing machines but that the new direct concepts of computers are necessary to introduce and investigate.

References

[1] *Čulík, K.* and *M. A. Arbib*, Sequential and Jumping Machines and their relation to computers, Acta Informatica *2* (1973), 162—171.

[2] *Čulík, K.*, Structural similarity of programs and some concepts of algorithmic method, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems *75*, Springer 1972.

[3] *Davis, M.*, Computability and Unsolvability, McGraw-Hill, N.Y. 1958.

[4] *Wagner, E. G.*, On the structure of programming languages, or, six languages for Turing Machines, 45—53, IEEE conference record of 1967 eight annual symposium on switching and automata theory.

[5] *Wijngaarden, A. van, Mailloux, B. J., Peck, J. E. L., Koster, C. H. A.*, ALGOL 68, Math. Centrum, Amsterdam 1968.

Author's address: 602 00 Brno, Čápkova 31.

KONFIGURACE V ČTYŘROZMĚRNÉM PROSTORU ODVOZENÉ UŽITÍM ROVINNÝCH KONFIGURACÍ

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

(Došlo dne 19. listopadu 1973)

1. Úvod. V tomto článku dokážeme tuto zajímavou větu:

Věta. *Nechť v P_2 existuje konfigurace F_2 typu:*

$$(a_q, b_p),$$

potom v P_4 existuje konfigurace F_4 typu:

$$\begin{pmatrix} a^2 & 2q & q^2 & 2q \\ p & 2ab & q & q+1 \\ p^2 & 2p & b^2 & 2 \\ ap & pb+a & b & 2b \end{pmatrix}$$

a konfigurace F'_4 typu:

$$\begin{pmatrix} a^2 & 2q & 2 & 2q \\ p & 2ab & 1 & q+1 \\ a & b & 2a & q \\ ap & pb+a & p & 2b \end{pmatrix}.$$

2. Model 4-rozměrného prostoru. Zvolme v afinní rovině P_2 (P_2 budeme značit bodový prostor, jehož zaměřením je vektorový prostor dimenze 2 nad tělesem reálných čísel) uspořádanou dvojici soustav souřadnic O_1 a O_2. Přiřadíme-li nyní k bodu $A = [a_1, a_2, a_3. a_4] \in A_4$ (A_4 je aritmetickým modelem 4-rozměrného prostoru bodů tj. bodem je uspořádaná čtveřice reálných čísel) dvojici bodů A_1, A_2 roviny P_2 (označení $A = [A_1, A_2]$), kde $A_1 = [a_1, a_2]$ v O_1 a $A_2 = [a_3, a_4]$ v O_2, potom je zřejmé, že na množině všech takových dvojic bodů (označme tuto množinu M_4) lze stanovit příslušné operace tak, aby tato množina M_4 (s příslušnými vlastnostmi) byla modelem čtyřrozměrného afinního prostoru bodů, jehož jedním modelem je A_4 (pro tento model použijeme stejného označení — M_4). Pro naše úvahy potřebujeme vědět jak jsou určeny podprostory modelu M_4. K určování těchto podprostorů užijeme uvažovaný aritmetický model, přičemž budeme předpokládat, že umíme v tomto modelu pracovat (označení bodů, přímek, vektorů atd. je ve shodě s [1]).

1. Přímka. Přímka $p = \text{gen}\,\{A, \mathbf{U}\}$ má v A_4 tyto rovnice:

$$x_1 = a_1 + tu_1\,, \quad x_2 = a_2 + tu_2\,, \quad x_3 = a_3 + tu_3\,, \quad x_4 = a_4 + tu_4\,. \tag{1}$$

V M_4 je přímkou dvojice množin bodů roviny P_2 určené jednak rovnicemi:

$$x_1 = a_1 + tu_1\,, \quad x_2 = a_2 + tu_2 \tag{2}$$

a jednak rovnicemi:

$$x_3 = a_3 + tu_3\,, \quad x_4 = a_4 + tu_4\,. \tag{3}$$

Množině bodů určených rovnicemi (2) budeme říkat první obraz přímky a podobně množině (3) druhý obraz přímky (obecně první a druhý obraz podprostoru). Rovnice (1) určují přímku, jestliže vektor $\mathbf{U}$ je nenulový. Vektor $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$, kde $\mathbf{U}_1 = (u_1, u_2)$ v O_1 a $\mathbf{U}_2 = (u_3, u_4)$ v O_2 (vektorem $\mathbf{U}$ rozumíme zde uspořádanou dvojici množin tzv. ekvipolentních úseček, tj. vektor $\mathbf{U}_1 = (u_1, u_2)$ v O_1 znamená, že úsečka $\overrightarrow{O_1U_1}$, kde bod $U_1 = [u_1, u_2]$ v O_1, určuje vektor $\mathbf{U}_1$), je nenulový právě když aspoň jeden z vektorů $\mathbf{U}_1$ a $\mathbf{U}_2$ je nenulový. Můžeme definovat

Definice. Nechť $i \neq j$; $i, j = 1, 2$. Podmnožinu p množiny M_4 nazveme *přímkou*, platí-li $p = [p_1, p_2]$ a p_i je jediný bod tj. i-té obrazy bodů přímky p splývají v jediný bod a j-té obrazy vyplní přímku p_j.

Poznámka. Přímka bude i pro $p = [p_1, p_2]$ (první i druhé obrazy vyplní celou přímku) a body $A = [A_1, A_2]$, $B = [B_1, B_2]$ a $C = [C_1, C_2]$ leží na přímce, platí-li, že body A_1, B_1, C_1 leží na přímce p_1, A_2, B_2, C_2 leží na přímce p_2 a dělící poměry $(A_1B_1C_1)$ a $(A_2B_2C_2)$ se rovnají. V našich úvahách tyto přímky nepotřebujeme a proto se zde tímto případem nebudeme zabývat.

Uvědomme si, že platí, jestliže je p_1 libovolný bod roviny P_2 a p_2 je libovolná přímka roviny P_2, potom existuje jediná přímka v M_4 jejíž první obraz je bod p_1 a druhý obraz je přímka p_2. Hledejme rovnice (1) pro tuto přímku. Bod p_1 má jednoznačně určené souřadnice v soustavě O_1 – např. $p_1 = P_1 = [p_1, p_2]$. Přímka p_2 je také jednoznačně určena svými rovnicemi v O_2 – např. $p_2 = \text{gen}\,\{P_2, \mathbf{U}\}$, kde $P_2 = [p_3, p_4]$ a $\mathbf{U} = (u_3, u_4)$. Rovnice (1) pro tuto přímku p jsou:

$$x_1 = p_1\,, \quad x_2 = p_2\,, \quad x_3 = p_3 + tu_3\,; \quad x_4 = p_4 + tu_4\,. \tag{4}$$

Podobně dokážeme existenci jediné přímky v případě, že bod je druhý obraz a přímka je její první obraz.

2. Rovina. Rovina $\alpha = \text{gen}\{A, \mathbf{U}, \mathbf{V}\}$ má v A_4 rovnice:

$$(5) \qquad x_1 = a_1 + ru_1 + sv_1\,, \quad x_2 = a_2 + ru_2 + sv_2\,, \quad x_3 = a_3 + ru_3 + sv_3\,,$$
$$x_4 = a_4 + ru_4 + sv_4\,.$$

Definice. Nechť $i \neq j$; $i, j = 1, 2$. Podmnožinu α množiny M_4 nazveme *rovinou* platí-li jedna z těchto možností:

a) $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]$ a α_i je jediný bod tj. i-té obrazy bodů roviny α splývají v jediný bod a j-té obrazy vyplní rovinu $\alpha_j = P_2$.

b) $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]$, přičemž α_1 i α_2 jsou přímky tj. první obrazy bodů roviny vyplní přímku α_1 a právě tak druhé obrazy vyplní přímku α_2.

Poznámka. Pro rovinu mohou nastat ještě další případy, které zde neuvádíme.

Z rovnic (5) zřejmě vyplývá:

Případ ad a) nastává: 1) Je-li $\mathbf{U}_1 = (u_1, u_2) = \emptyset$ a $\mathbf{V}_1 = (v_1, v_2) = \emptyset$. Dále platí, že vektory $\mathbf{U}_2 = (u_3, u_4)$ a $\mathbf{V}_2 = (v_3, v_4)$ musí být lineárně nezávislé (nekolineární), neboť v opačném případě rovnice (5) neurčují rovinu.

2) Jestliže $\mathbf{U}_1$ a $\mathbf{V}_1$ jsou nekolineární a $\mathbf{U}_2$ i $\mathbf{V}_2$ jsou nulové.

Jestliže vektory $\mathbf{U}_1$ a $\mathbf{V}_1$ jsou kolineární, $\mathbf{U}_2$ a $\mathbf{V}_2$ jsou také kolineární, ale vektory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsou nekolineární, potom nastává případ ad b).

Přenecháme čtenáři, aby si dokázal, že ve všech těchto případech toto platí i obráceně tj. libovolnou volbou příslušných elementů v P_2 dostáváme jedinou rovinu v M_4.

3. Trojrozměrný prostor (nadrovina): Nadrovina ${}_3M = \text{gen}\{A, \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}\}$ má v A_4 rovnice:

$$(6) \qquad x_1 = a_1 + t_1u_1 + t_2v_1 + t_3w_1\,, \quad x_2 = a_2 + t_1u_2 + t_2v_2 + t_3w_2\,,$$
$$x_3 = a_3 + t_1u_3 + t_2v_3 + t_3w_3\,, \quad x_4 = a_4 + t_1u_4 + t_2v_4 + t_3w_4\,.$$

Definice. Nechť $i \neq j$; $i, j = 1, 2$. Podmnožinu ${}_3M$ množiny M_4 nazveme *nadrovinou*, platí-li ${}_3M = [{}_3M_1, {}_3M_2]$ a ${}_3M_i$ je jediná přímka tj. i-té obrazy bodů nadroviny ${}_3M$ vyplní přímku a j-té obrazy vyplní rovinu ${}_3M_j = P_2$.

Poznámka. Pro nadrovinu nastává ještě další případ, který opět neuvádíme.

Z rovnic (6) je hned vidět, že případ z předcházející definice nastává jestliže:

1) Vektory $\mathbf{U}_1 = (u_1, u_2)$, $\mathbf{V}_1 = (v_1, v_2)$ a $\mathbf{W}_1 = (w_1, w_2)$ jsou kolineární tj. všechny jsou nenulovým násobkem jednoho z nich.

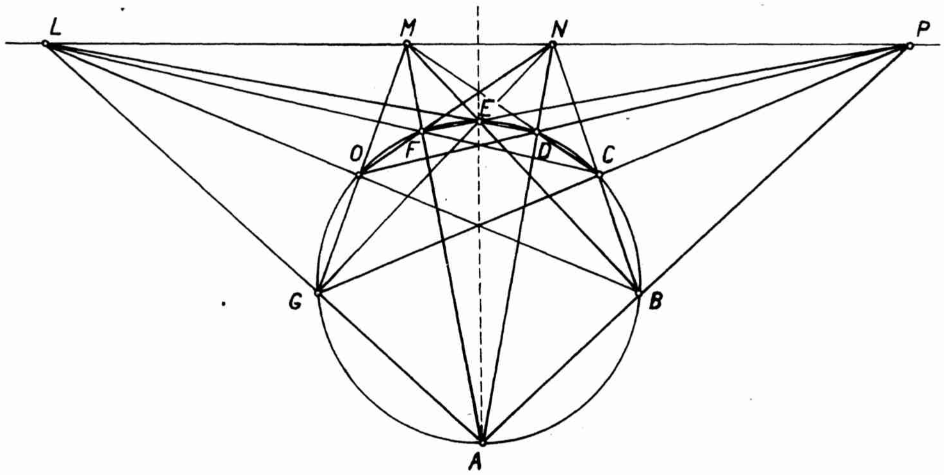
2) Vektory $\mathbf{U}_2 = (u_3, u_4)$, $\mathbf{V}_2 = (v_3, v_4)$ a $\mathbf{W}_2 = (w_3, w_4)$ jsou kolineární.

Přenecháme čtenáři, aby opět uvážil, že lze v P_2 zvolit libovolnou přímku za jeden obraz trojrozměrného prostoru. Dále pak platí, že dvojice bodů P_2 leží v tomto prostoru, jestliže její příslušný obraz leží na zvolené přímce a tedy pro druhý obraz není žádná další podmínka.

3. Konfigurace v M_4. Dokažme nyní tuto pomocnou větu:

Lemma. *V M_4 existuje konfigurace K_4 (co rozumíme konfigurací najde čtenář např. v [2]) typu:*

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} 144 & 8 & 16 & 8 \\ 3 & 384 & 4 & 5 \\ 9 & 6 & 256 & 2 \\ 36 & 60 & 16 & 32 \end{pmatrix}.$$



Důkaz Na obr. je sestrojena známá rovinná konfigurace K_2 typu: $(12_4, 16_3)$ (její odvození najde čtenář např. v [3]). Uvažujme nyní M_4, kde příslušná rovina P_2 je rovina ve které je narýsován zvolený obrázek. Nechť body konfigurace K_4 jsou určeny body konfigurace K_2 tj. bodem K_4 je každá uspořádaná dvojice bodů konfigurace K_2. Těchto dvojic je zřejmě $12^2 = 144$. Za přímky K_4 zvolíme všechny přímky M_4 jejichž jedním obrazem je jediný bod konfigurace K_2 a druhým obrazem jediná přímka konfigurace K_2. Každý bod konfigurace K_2 je jedním obrazem celkem šestnácti přímek K_4 (K_2 má právě 16 přímek) a tedy přímek konfigurace K_4 je $2 \,.\, 12 \,.\, 16 = 384$. Na každé této přímce leží právě tři body K_4 a každým bodem K_4 prochází zřejmě 8 těchto přímek (např. na přímce $[A, ED]$ leží body $[A, D]$, $[A, E]$ a $[A, L]$ – bodem $[A, B]$ prochází přímky: $[A, BO]$, $[A, BE]$, $[A, BC]$, $[A, AB]$, $[AG, B]$, $[AF, B]$, $[AD, B]$ a $[AB, B]$). Rovinou konfigurace K_4 zvolíme každou uspořádanou dvojici přímek konfigurace K_2 (tj. rovinu určenou ad c)). Těchto dvojic je zřejmě)$6^2 = 256$, v každé této rovině zřejmě leží právě $3^2 = 9$ bodů konfigurace K_4 1např. v $\alpha = [EG, AF]$ leží body: $[G, A]$, $[G, F]$, $[G, M]$, $[E, A]$, $[E, F]$, $[E, M]$,

$[N, A]$, $[N, F]$ a $[N, M]$) a dále v každé této rovině leží $2 . 3 = 6$ přímek K_4 (příslušné přímky obsahují právě 6 bodů konfigurace K_2 a každý tento bod je právě jedním obrazem jediné přímky). Protože každým bodem K_2 procházejí právě čtyři přímky K_2, prochází každým bodem K_4 $4 . 4 = 16$ rovin K_4 a každou přímkou K_4 prochází právě 4 roviny této konfigurace. Nadrovin (uvažujeme nadroviny určené ad a) i b)) konfigurace K_4 je 32, neboť každá přímka K_2 může být prvým nebo druhým obrazem nadroviny. V každé nadrovině leží 36 bodů dané K_4, neboť celkem 12 bodů dané K_4 má svůj jeden obraz v jediném bodě (K_2) dané přímky (K_2). Uvažujme nyní nadrovinu jejíž prvý obraz je přímka AD. Celkem 16 přímek ležící v této nadrovině má za svůj první obraz bod A, 16 přímek má první obraz v bodě D a v bodě N má první obraz dalších šestnáct přímek. V této nadrovině leží ještě dalších dvanáct přímek jejichž prvý obraz je přímka AD a tedy v dané nadrovině leží celkem 60 přímek naší konfigurace. Toto zřejmě platí pro každou nadrovinu. V uvažované nadrovině leží právě 16 rovin konfigurace K_4, neboť všechny tyto roviny mají prvý obraz v přímce AD. Opět zřejmě toto platí pro každou nadrovinu. Každým bodem prochází 8 nadrovin (např. bodem $[A, B]$ procházejí nadroviny jejichž prvým obrazem je přímka AG, AF, AD a AB a nadroviny jejichž druhým obrazem je přímka AB, BO, BE, BC), každou přímkou prochází $4 + 1 = 5$ nadrovin (bodem K_2, který je jedním obrazem přímky K_4 procházejí 4 přímky K_2 a tyto přímky můžeme zvolit za příslušný obraz nadroviny – pátou nadrovinu dostaneme tak že přímku K_2 jež je obrazem dané přímky K_4 zvolíme za příslušný obraz nadroviny) a každou rovinou procházejí zřejmě dvě nadroviny. Tím jsme dostali všechna čísla v matici (7) a lemma je dokázané.

Nyní přistoupíme k d ů k a z u v ě t y. Bodem konfigurace F_4 je každá dvojice bodů konfigurace F_2, přímkou F_4 je bod a přímka F_2, rovinou F_4 je dvojice přímek F_2 a nadrovinou konfigurace F_4 je přímka konfigurace F_2 a rovina P_2. Při důkazu existence konfigurace F_4 zobecníme postup při odvozování konfigurace K_4. Všechny výsledky jsou zřejmé a proto je jenom zaznamenáme. Bodů konfigurace je a^2, přímek je $2ab$, rovin b^2 a nadrovin je $2b$. Daným bodem prochází $2q$ přímek, q^2 rovin a $2q$ nadrovin. Danou přímkou prochází q rovin a $q + 1$ nadrovin. Rovinou prochází dvě nadroviny. V nadrovině leží b rovin, $pb + a$ přímek a ap bodů. V rovině leží $2p$ přímek a p^2 bodů. Na přímce leží p bodů.

Uvažujme nyní konfiguraci F'_4. Body, přímky a nadroviny jsou v F'_4 stejné jako v F_4. V F'_4 uvažujme roviny určené ad a) tj. rovinou konfigurace F'_4 je bod F_2 a rovina P_2. Matice konfigurace F'_1 se liší od matice konfigurace F_4 v třetím sloupci a řádku. Snadnou úvahou zjistíme, že platí:

1) Rovin konfigurace F'_4 je $2a$, každým bodem prochází dvě tyto roviny a každou přímkou prochází jediná taková rovina.

2) V dané rovině zřejmě leží a bodů a b přímek.

3) Danou rovinou prochází q nadrovin a v každé nadrovině leží p těchto rovin.

Tím jsme dokázali platnost naší věty v M_4. Incidence podprostorů je afinní invariant a proto odvozené konfigurace existují v každém modelu afinního prostoru bodů jehož zaměření je vektorový prostor dimenze 4 nad tělesem reálných čísel — označení P_4.

Závěrečná poznámka. V minulosti byla odvozena celá řada různých konfigurací v euklidovské rovině rozšířené o nevlastní a komplexní elementy. Naše věta platí pro všechny tyto konfigurace, jestliže jejich body jsou vlastní a reálné.

Literatura

[1] *Vladimír Blažek:* Analytická geometrie, učební texty, vydala PF Ústí n. L. 1970.

[2] *Jaromír Krys:* r-rozměrné konfigurace, Čas. pro pěst. matematiky *96* (1971) str. 339—345.

[3] *Jaromír Krys:* Konfigurace bodů rovinné kubiky, Čas. pro pěst. matematiky *96* (1969) str. 282—289.

Adresa autora: 501 91 Hradec Králové, Leninovo nám. 301 (Pedagogická fakulta).

Zusamenfassung

KONFIGURATIONEN IM VIERDIMENSIONALEN RAUM MITTELS DER EBENEN KONFIGURATIONEN HERGELEITET

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

Im Artikel wird folgender Satz bewiesen:

In E_2 (der Punktraum, der dem Vektorraum der Dimension 2 über dem Körper reeler Zahlen entspricht) existiere eine Konfiguration vom Typ (a_p, b_q), dann existieren in E_4 die Konfigurationen

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} a^2 & 2q & q^2 & 2q \\ p & 2ab & q & q+1 \\ p^2 & 2p & b^2 & 2 \\ ap & bp+a & b & 2b \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} a^2 & 2q & 2 & 2q \\ p & 2ab & 1 & q+1 \\ a & b & 2a & q \\ ap & bp+a & p & 2b \end{pmatrix}.$$

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

O PERFEKTNÍCH A KVAZIPERFEKTNÍCH GRAFECH

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

(Došlo dne 30. listopadu 1973)

Nebude-li jinak výslovně uvedeno, všechny grafy v tomto článku jsou konečné a neorientované, nemají smyčky a jsou bez násobných hran. Pojmy, jež zde nejsou definovány, se najdou např. v [1], [8] a [9]. Je triviální, že neexistuje graf na n uzlech ($n \geqq 2$) takový, že každé dva různé uzly mají různý stupeň.*) M. BEHZAD a G. CHARTRAND [2] reservovali pro něj název *perfektní* graf. Dále graf $\mathcal{G}$ s alespoň dvěma uzly nazvali *kvaziperfektním*, existují-li v $\mathcal{G}$ právě dva uzly u a v téhož stupně; tyto uzly u a v můžeme nazvat *význačnými*. Behzad a Chartrand ukázali, že pro každé $n \geqq 2$ existují právě dva neizomorfní kvaziperfektní grafy na n uzlech, jeden souvislý a druhý nesouvislý. V souvislém grafu mají význačné uzly stupeň $[\frac{1}{2}n]$, v nesouvislém $[\frac{1}{2}(n-1)]$. Přitom $[x]$ značí celou část reálného čísla x, tj. největší celé číslo m takové, že $m \leqq x$; dále klademe $\{x\} = -[-x]$. Několik dalších vlastností kvaziperfektních grafů popsal nedávno L. NEBESKÝ [7].

V těchto řádcích si všimneme podrobněji souvislého kvaziperfektního grafu na n uzlech, jejž budeme označovat $\mathcal{D}_n$ ($n \geqq 2$). Nejprve určíme počet koster $k(\mathcal{D}_n)$ grafu $\mathcal{D}_n$.

Věta 1. *Platí*

$$k(\mathcal{D}_n) = \frac{(n-1)!}{\{\frac{1}{2}n\}}.$$

D ů k a z. Použijeme známé determinantové metody – viz např. [4], str. 92. Je-li n sudé (tedy $n = 2r$), postupujeme takto: očíslujeme uzly grafu $\mathcal{D}_n$ tak, že pro $s < r$ uzel stupně s dostane pořadové číslo s, význačné uzly dostanou čísla r, $r+1$ (v libovolném pořadí) a pro $s > r$ uzel stupně s nechť má číslo $s+1$. Sestrojíme matici $A = (a_{ij})$ tak, že pro $i \neq j$ klademe $a_{ij} = -1$ nebo 0 podle toho, existuje-li v $\mathcal{D}_n$ hrana ij nebo nikoli; dále klademe $a_{ii} = \mathrm{st}\, i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.**)

*) Srovnej též cvičení II. 2,3 a II. 2,4 na str. 33 autorovy knížky [9].

**) st u značí stupeň uzlu u.

Podle věty 1 z práce [7] má matice A tento tvar: V hlavní diagonále (shora dolů) jsou po řadě čísla $1, 2, 3, \ldots, r, r, r + 1, r + 2, \ldots, 2r - 1$. Prvky vedlejší diagonály jsou čísla -1. Nediagonální prvky jsou buď 0 nebo -1 podle toho, jsou-li nad vedlejší diagonálou nebo pod ní. Nyní libovolný hlavní minor matice A se rovná hledanému počtu koster. Výpočet dává

$$k(\mathscr{D}_n) = \frac{(n-1)!}{r}$$

a obdobná úvaha pro liché číslo $n = 2r + 1$ vede ke vzorci

$$k(\mathscr{D}_n) = \frac{(n-1)!}{r+1}.$$

Tím je důkaz podán.

U koster grafu $\mathscr{D}_n$ zůstaneme i v další větě. Pro stručnost vyjádření píšeme $\mathscr{G}_1 \cong \mathscr{G}_2$, jsou-li grafy $\mathscr{G}_1$ a $\mathscr{G}_2$ izomorfní.

Věta 2. *Nechť $\mathscr{S}$ je libovolný strom na n uzlech $(n \geqq 2)$. Potom existuje kostra $\mathscr{K}$ grafu $\mathscr{D}_n$ tak, že $\mathscr{K} \cong \mathscr{S}$.*

Důkaz.*) Pro $n = 2$ a 3 je tvrzení zřejmé. Nechť $n \geqq 4$ a předpokládejme, že pro $n - 2$ tvrzení platí. Zvolme dva sousední uzly u, v stromu $\mathscr{S}$ na n uzlech tak, že u je uzel koncový a nechť w_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ jsou všichni další sousedé uzlu v. Každá komponenta grafu $\mathscr{L} = \mathscr{S} - \{u, v\}$ je strom. Při $m > 1$ doplňme $\mathscr{L}$ hranami $w_i w_{i+1}$ (pro $i = 1, 2, \ldots, m - 1$), čímž vznikne strom $\mathscr{S}_0$ na $n - 2$ uzlech; při $m = 1$ klademe $\mathscr{S}_0 = \mathscr{L}$. Podle indukčního předpokladu existuje kostra $\mathscr{K}^*$ grafu $\mathscr{D}_{n-2}$ taková, že $\mathscr{K}^* \cong \mathscr{S}_0$. Pro každé i nechť v tomto izomorfismu uzel w_i přejde do w_i^*. Vypusťme nyní z $\mathscr{K}^*$ hrany $w_i^* w_{i+1}^*$ $(i = 1, 2, \ldots, m - 1)$, uzel $(n - 1)$-ního stupně v grafu $\mathscr{D}_n$, do něhož je $\mathscr{D}_{n-2}$ vnořen, spojme s každým w_i^* a též s koncovým uzlem grafu $\mathscr{D}_n$. Vznikne tak hledaná kostra a důkaz je podán.

Označme $f_n(z)$ chromatický mnohočlen grafu $\mathscr{D}_n$. Definice chromatického mnohočlenu se najde např. ve druhém díle knihy [8], str. 215.

Věta 3. *Platí*

$$f_n(z) = z\left(z - \frac{n}{2}\right)^{[n/2]-[(n-1)/2]} \prod_{i=1}^{[(n-1)/2]} (z - i)^2 .$$

Důkaz. Zřejmě je $f_2(z) = z(z - 1)$, $f_3(z) = z(z - 1)^2$ a pro každé přirozené číslo $n \geqq 2$ platí

$$f_{n+2}(z) = z(z - 1) f_n(z - 1), \tag{1}$$

*) Během recensního řízení zjednodušil L. Nebeský důkaz věty 2 tak, jak jej zde s jeho laskavým svolením uvádím.

jak plyne z této úvahy: Je-li z (dostatečně velké) přirozené číslo a barvíme-li přípustným způsobem z barvami uzly grafu $\mathscr{D}_{n+2}$, pak pro obarvení jeho koncového uzlu u máme z možností, na jeho souseda v zbývá $z - 1$ možnost a pro obarvení všech uzlů grafu $\mathscr{D}_{n+2} - \{u, v\}$ celkem $f_n(z - 1)$ možností. Z (1) pak už plyne žádaný vztah.

Ještě několik poznámek k větě 3. Předně je vidět, že při $n \geqq 5$ není $\mathscr{D}_n$ jediným grafem, jehož chromatický mnohočlen je $f_n(z)$. Dále známe-li $f_n(z)$, určíme chromatické číslo $\chi(\mathscr{D}_n)$ grafu $\mathscr{D}_n$ tím, že najdeme nejmenší přirozené číslo z_0, pro něž $f_n(z_0) > 0$. Je vidět, že

$$\chi(\mathscr{D}_n) = \left\{\frac{n+1}{2}\right\}$$

ve shodě s tím, co uvádí L. Nebeský [7]. Při čísle $\chi(\mathscr{G})$ jde o barvení uzlů grafu $\mathscr{G}$ a proto se v literatuře někdy obšírněji nazývá $\chi(\mathscr{G})$ *uzlovým* chromatickým číslem (vertex chromatic number). *Hranové* chromatické číslo $\chi_1(\mathscr{G})$ grafu $\mathscr{G}$ (s aspoň jednou hranou) je minimální počet barev nutný k obarvení hran grafu $\mathscr{G}$ tak, že každé dvě hrany se společným uzlem jsou obarveny různě. Podle známé Vizingovy věty pro každý graf $\mathscr{G}$ (s aspoň jednou hranou) je $\chi_1(\mathscr{G}) = \varrho$ nebo $\varrho + 1$, kde ϱ je maximální stupeň uzlu v $\mathscr{G}$. *Totální* chromatické číslo $\chi_2(\mathscr{G})$ je minimální počet barev nutných k obarvení uzlů a hran grafu $\mathscr{G}$ tak, že každé dva sousední uzly jsou obarveny různě, každé dvě hrany se společným uzlem dostanou odlišné barvy a totéž platí o každé dvojici hrana a uzel s ní incidentní. O hranových a totálních chromatických číslech viz např. [1].

Věta 4. *Platí*

a) $\chi_1(\mathscr{D}_n) = n - 1$;

b) $\chi_2(\mathscr{D}_2) = 3$, $\chi_2(\mathscr{D}_n) = n$ *pro* $n \geqq 3$.

Důkaz. a) Případy $n = 2$ a 3 jsou jasné. Je-li $n \geqq 4$, označme uzly grafu $\mathscr{D}_n$ po řadě $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tak, že st $u_n = n - 1$, st $u_{n-1} = 1$. Protože $\chi_1(\mathscr{D}_n) \geqq n - 1$, stačí ukázat, že k obarvení vystačíme s $n - 1$ barvami. Nejprve přiřadíme hraně $u_n u_i$ zbytkovou třídu (mod $n - 1$), v níž leží číslo i ($i = 1, 2, \ldots, n - 1$); budeme ji značit $\mathfrak{Z}_i$. Pak hraně $u_i u_j$ ($1 \leqq i < j \leqq n - 2$) přiřadíme třídu $\mathfrak{Z}_{i+j}$. Je vidět, že toto obarvení splňuje žádané podmínky.

b) Popíšeme jen případ $n \geqq 4$ a uzly nechť jsou tak označeny jako v odstavci a). Vzhledem ke vztahu $\chi_2(\mathscr{D}_n) \geqq n$ stačí, obarvíme-li uzly a hrany n barvami. Uzlu u_n přiřadíme zbytkovou třídu $\mathfrak{Z}_1$ (mod n) a každé z hran $u_n u_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n - 1$) zbytkovou třídu $\mathfrak{Z}_{i+1}$ (mod n). Uzly u_i ($i = 1, 2, \ldots, n - 2$) nechť dostanou po řadě třídy $\mathfrak{Z}_{i+2}$ a uzel u_{n-1} třídu $\mathfrak{Z}_2$ (mod n). Konečně každá ze hran $u_i u_j$ ($1 \leqq i < j \leqq$ $\leqq n - 2$) nechť má přiřazenou třídu $\mathfrak{Z}_{i+j+2}$ (mod n). Snadno i zde ověříme, že jsou splněny podmínky pro totální chromatické číslo a důkaz je podán.

Často studovanými charakteristikami konečného grafu $\mathscr{G}$ jsou čísla $\beta(\mathscr{G})$ a $\beta_1(\mathscr{G})$ jejichž definice nyní připomeneme. Nechť U_0 je množina některých uzlů grafu $\mathscr{G}$ taková, že pro žádné $x \in U_0$, $y \in U_0$ neexistuje hrana xy; pak U_0 se nazývá (*uzlově*) *nezávislá* množina. Maximální ze všech U_0 nechť je označena $U_{max}(\mathscr{G})$. Nyní položíme

$$|U_{max}(\mathscr{G})| = \beta(\mathscr{G}) \tag{2}$$

a počet všech $U_{max}(\mathscr{G})$, pro něž platí (2), označíme $p(\mathscr{G})$. V anglické literatuře se $\beta(\mathscr{G})$ často nazývá (vertex) independence number. Podobně nechť H_0 je množina některých hran z $\mathscr{G}$ taková, že pro žádné $h \in H_0$, $k \in H_0$ nemají h, k společný uzel. Říkáme, že H_0 je (*hranově*) *nezávislá* a maximální ze všech H_0 označíme $H_{max}(\mathscr{G})$. Klademe

$$|H_{max}(\mathscr{G})| = \beta_1(\mathscr{G}) \tag{3}$$

a počet všech $H_{max}(\mathscr{G})$ splňujících (3) označme $p_1(\mathscr{G})$. Číslo $\beta_1(\mathscr{G})$ bývá nazýváno (edge) independence number (viz též [1], str. 145).

Věta 5. *Platí*

a) $\beta(\mathscr{D}_n) = [\frac{1}{2}(n + 1)]$; *pro n liché je* $p(\mathscr{D}_n) = 1$, *pro n sudé je* $p(\mathscr{D}_n) = 2$.

b) $\beta_1(\mathscr{D}_n) = [\frac{1}{2}n]$; *pro n liché je* $p_1(\mathscr{D}_n) = 2^{(n-1)/2}$, *pro n sudé je* $p_1(\mathscr{D}_n) = 1$.*)

Důkaz. a) Nejprve k číslu $\beta(\mathscr{D}_n)$. Pro $n = 2$ a 3 je vztah zřejmý. Nechť $n \geqq 4$ a nechť tvrzení platí pro indexy 2, 3, ..., $n - 2$. Kdyby bylo

$$\beta(\mathscr{D}_n) > \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

pak (při označení uzlů jako v důkaze věty 4) vytvořme $\mathscr{D}_{n-2} = \mathscr{D}_n - \{u_n, u_{n-1}\}$. Protože z u_n, u_{n-1} nejvýše jeden může patřit do $U_{max}(\mathscr{D}_n)$, bylo by též

$$\beta(\mathscr{D}_{n-2}) > \left[\frac{n-1}{2}\right],$$

což je spor. Že platí rovnost, o tom se přesvědčíme, když $U_{max}(\mathscr{D}_{n-2})$ doplníme prvkem u_{n-1}.

Nyní ukážeme, že při $n \geqq 4$ uzel u_{n-1} musí patřit do každého $U_{max}(\mathscr{D}_n)$. Předpokládejme opak. Pak ze vztahu $u_n \in U_{max}(\mathscr{D}_n)$ by plynulo $U_{max}(\mathscr{D}_n) = \{u_n\}$, což není možné. Tedy máme důsledek

$$\beta(\mathscr{D}_{n-2}) = \left[\frac{n+1}{2}\right]$$

a to je spor.

*) Srovnej též důsledek 1 v práci [7].

Obraťme se nyní k hodnotám $p(\mathscr{D}_n)$. Pro $n = 2$ a 3 je tvrzení zřejmé. Nechť $n \geqq 4$ a nechť n je liché. Dejme tomu, že je to nejmenší liché číslo té vlastnosti, že $p(\mathscr{D}_n) > 1$. Protože u_{n-1} patří do každého $U_{\max}(\mathscr{D}_n)$, je též $p(\mathscr{D}_n - \{u_n, u_{n-1}\}) > 1$ (spor). Podobně pro n sudé.

b) Zase nejprve k číslu $\beta_1(\mathscr{D}_n)$. Případy $n = 2$ a 3 jsou zřejmé a nechť tedy $n \geqq 4$. Nechť tvrzení platí pro $2, 3, \ldots, n - 2$ a nechť

$$\beta_1(\mathscr{D}_n) > \left[\frac{n}{2}\right].$$

Protože nejvýše jedna ze hran incidentních s u_n může patřit do $H_{\max}(\mathscr{D}_n)$, bylo by pak též

$$\beta_1(\mathscr{D}_n - \{u_n, u_{n-1}\}) > \left[\frac{n-2}{2}\right],$$

což je spor. Rovnost ve vzorci pro $\beta_1(\mathscr{D}_n)$ ověříme tím, že $H_{\max}(\mathscr{D}_n - \{u_n, u_{n-1}\})$ doplníme hranou $u_n u_{n-1}$.

Je vidět, že při $n \geqq 4$ jedna hrana incidentní s u_n patří do $H_{\max}(\mathscr{D}_n)$. Kdyby žádná tam nepatřila, bylo by

$$\beta_1(\mathscr{D}_{n-2}) = \left[\frac{n}{2}\right],$$

což není možné.

Studujme nyní $p_1(\mathscr{D}_n)$. Pro $n = 2$ a 3 je věc zřejmá. Předpokládejme $n \geqq 4$, n liché a nechť tvrzení platí pro $2, 3, \ldots, n - 2$. Každá množina $H_{\max}(\mathscr{D}_n)$ se dá dvěma způsoby vytvořit z $H_{\max}(\mathscr{D}_n - \{u_n, u_{n-1}\})$ tím, že přidáme jednu hranu: Buď přidáme $u_n u_{n-1}$ nebo $u_j u_n$, kde u_j je ten uzel z $\mathscr{D}_n - \{u_n, u_{n-1}\}$, jenž neinciduje se žádnou hranou ležící v $H_{\max}(\mathscr{D}_n - \{u_n, u_{n-1}\})$. Je tedy

$$p_1(\mathscr{D}_n) = 2p_1(\mathscr{D}_{n-2}) = 2^{(n-1)/2}.$$

Je-li n sudé ($n \geqq 4$), jedinou $H_{\max}(\mathscr{D}_n)$ dostaneme, doplníme-li jedinou $H_{\max}(\mathscr{D}_n - \{u_n, u_{n-1}\})$ hranou u_n, u_{n-1}. Důkaz je podán.

Než opustíme problematiku perfektních a kvaziperfektních grafů, ještě několik poznámek. Graf $\mathscr{D}_n$ (pro $n \geqq 2$) má právě dva automorfismy: identický a dále ten, jenž význačné uzly u, v grafu $\mathscr{D}_n$ převádí jeden ve druhý a ostatní zachovává. To je snadný důsledek věty 1 z práce [7]. Přeneseme-li však definici kvaziperfektního grafu i na grafy nekonečné, snadno sestrojíme v této třídě souvislý graf mající jediný automorfismus (identický). Další naše poznámka se týká multigrafů. Omezíme se na konečné neorientované multigrafy bez smyček, v nichž každé dva uzly jsou propojeny nejvýše dvěma hranami. Přeneseme-li sem pojem perfektnosti, je snadno vidět, že při $n \geqq 3$ tu vždy existuje souvislý perfektní multigraf na n uzlech. Při $n \geqq 4$ není jeho struktura určena jednoznačně.

Perfektní a kvaziperfektní grafy nás mohou inspirovat ke studiu příbuzných otázek. Definici kvaziperfektního grafu můžeme totiž modifikovat např. tak, aby v grafu byly tři význačné uzly mající stejný stupeň a ostatní stupně aby byly různé (viz práci [3]*)). Ještě v jiné variantě může počet požadovaných význačných uzlů být ovšem i větší než tři. Přirozeně nás může napadnout i otázka, jaké vlastnosti mají grafy se dvěma páry význačných uzlů atd. Nadhozené otázky se dají studovat užitím známé *Havlovy věty* [6], jež často v literatuře bývá omylem připisována S. L. HAKIMIMU [5].

Literatura

[1] *M. Behzad - G. Chartrand:* Introduction to the theory of graphs, Allyn and Bacon Inc. Boston 1971.

[2] *M. Behzad - G. Chartrand:* No graph is perfect, Amer. Math. Monthly *74* (1967), 962—963.

[3] *V. N. Bhat:* Characterization of 3-perfect graphical degree sequences, Graph Theory Newsletter, Vol. *1*, No 4 (1972), Abstract 5.

[4] *K. Čulík - V. Doležal - M. Fiedler:* Kombinatorická analýza v praxi, Praha 1967.

[5] *S. L. Hakimi:* On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph, J. SIAM, *10* (1962), 496—506.

[6] *V. Havel:* Poznámka o existenci konečných grafů, Časopis pro pěstování matematiky *80* (1955), 477—480.

[7] *L. Nebeský:* On connected graphs containing exactly two points of the same degree, Časopis pro pěstování matematiky *98* (1973), 305—306.

[8] *H. Sachs:* Einführung in die Theorie der endlichen Graphen I., Leipzig 1970, II., Leipzig 1972.

[9] *J. Sedláček:* Kombinatorika v teorii a praxi (Úvod do teorie grafů), Praha 1964.

Adresa autora: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Summary

ON PERFECT AND QUASIPERFECT GRAPHS

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

A finite graph is said to be *quasiperfect* if it contains exactly two vertices of the same degree. M. Behzad and G. Chartrand [2] showed that for each $n \geqq 2$ there is exactly one connected quasiperfect graph $\mathscr{D}_n$ on n vertices. If x is a real number, then $[x]$ denotes the greatest integer m such that $m \leqq x$; further $\{x\} = -[-x]$. Let $k(\mathscr{D}_n)$ be the number of all trees spanning the graph $\mathscr{D}_n$. A graph $\mathscr{G}$ on n vertices is called *tree-complete* if for every tree $\mathscr{T}_1$ on n vertices there is a tree $\mathscr{T}_2$ spanning

*) Doplněno v korektuře 4. 12. 1974 C.—G. d'AMBLY publikoval mezitím práci o grafech s právě třemi význačnými uzly [Publ. Math. Debrecen *21* (1974), 15—29].

the graph $\mathscr{G}$ such that $\mathscr{T}_1$ and $\mathscr{T}_2$ are isomorphic. Let $f_n(z)$ be the chromatic polynomial of $\mathscr{D}_n$. Let $\chi_1(\mathscr{D}_n)$ and $\chi_2(\mathscr{D}_n)$ be the edge chromatic number of $\mathscr{D}_n$ and the total chromatic number of $\mathscr{D}_n$ respectively. Finally let $\beta(\mathscr{D}_n)$, $\beta_1(\mathscr{D}_n)$, $p(\mathscr{D}_n)$ and $p_1(\mathscr{D}_n)$ be the vertex independence number, the edge independence number, the number of all maximal independent vertex sets and the number of all maximal independent edge sets respectively.

Theorem 1.

$$k(\mathscr{D}_n) = \frac{(n-1)!}{\{n/2\}}.$$

Theorem 2. *The graph $\mathscr{D}_n$ is tree-complete.*

Theorem 3.

$$f_n(z) = z\left(z - \frac{n}{2}\right)^{[n/2]-[(n-1)/2]} \prod_{i=1}^{[(n-1)/2]} (z-i)^2.$$

Theorem 4.

a) $\chi_1(\mathscr{D}_n) = n - 1$;

b) $\chi_2(\mathscr{D}_2) = 3$, $\chi_2(\mathscr{D}_n) = n$ *for* $n \geqq 3$.

Theorem 5.

a) $\beta(\mathscr{D}_n) = \left[\frac{n+1}{2}\right]$; $p(\mathscr{D}_n) = 1$

if n is odd and $p(\mathscr{D}_n) = 2$ if n is even.

b) $\beta_1(\mathscr{D}_n) = \left[\frac{n}{2}\right]$; $p_1(\mathscr{D}_n) = 2^{(n-1)/2}$

*if n is odd and $p_1(\mathscr{D}_n) = 1$ if n is even.**)

*) See also [7], Corollary 1.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

HOMOMORPHISMEN VON PROJEKTIVEN RÄUMEN UND VERALLGEMEINERTE SEMILINEARE ABBILDUNGEN

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingegangen am 21. Dezember 1973)

In der Arbeit [6] definierte F. RADÓ nichtinjektive Kollineationen projektiver Räume und verallgemeinerte semilineare Abbildungen der Vektorräume. Er bewies den Fundamentalsatz für nichtinjektive Kollineationen: *Jede verallgemeinerte semilineare Abbildung von Vektorräumen induziert eine nichtinjektive Kollineation der entsprechenden projektiven Räume und jede nichtinjektive Kollineation ist durch irgendeine verallgemeinerte semilineare Abbildung induziert.* Zum Beweis wurde das Prinzip des Beweises vom Fundamentalsatz der projektiven Geometrie von [4] benutzt. Die Ergebnisse von [6] sind eine Verallgemeinerung einiger Ergebnisse von [2], [3].

Die vorliegende Arbeit knüpft an [6] an. In der Definition 3 wird der Begriff einer nichtinjektiven Kollineation von [6] so verallgemeinert, dass einige einschränkende Bedingungen der Definition 3,1 von [6] beseitigt werden. Die Abbildung von der Definition 3 wird Homomorphismus projektiver Räume genannt. Mittels der Definition 2 wird der Begriff einer verallgemeinerten semilinearen Abbildung von Vektorräumen in einem allgemeinerem Sinne als in der Definition 2,1 von [6] eingeführt. Ferner wird dann bewiesen, dass jede verallgemeinerte semilineare Abbildung von Vektorräumen einen Homomorphismus der entsprechenden projektiven Räume induziert und dass jeder Homomorphismus projektiver Räume durch eine verallgemeinerte semilineare Abbildung induziert wird. Zum Beweis dieser Behauptung wird das Beweisschema des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie von [1] benutzt.

Definition 1. Ein Unterring R des (nicht notwendig komutativen) Körpers F wird total in F genannt, falls $t \in F \setminus R \Rightarrow t^{-1} \in R$ gilt.

Satz 1. *Es sei R ein totaler Unterring in F. Dann ist*

$$R_0 = \{t \in R \mid t \neq 0,\ t^{-1} \notin R\} \cup \{0\}$$

ein beiderseitiges Maximalideal in R und R/R_0 ist ein Körper.

Satz 2. *Sei R ein totaler Unterring in F und sei $R^* = R \setminus R_0$. Sei $t_i \in F$, $t_i \neq 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann existiert ein Element $f \in F$ derart, dass $ft_i \in R$ für alle $i \in \in \{1, \ldots, n\}$ und $ft_j \in R^*$ für zumindest ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist.*

Die Beweise der Sätze 1, 2 sind in [5] durchgeführt.

Es sei ein Vektorraum A beliebiger Dimension über dem (nicht notwendig kommutativen) Körper F gegeben. Den, durch das Element $x \in A$, $x \neq 0$ generierten Unterraum in A, bezeichnen wir mit Fx.

Satz 3. *Für beliebige linear unabhängige Elemente x, y, z des Vektorraumes A gilt*

(a) $F(y - z) = (Fy + Fz) \cap [F(x - y) + F(x - z)]$,

(b) $F(x - y - z) = [F(x - y) + Fz] \cap [F(x - z) + Fy]$,

(c) $F(y + z) = [Fy + Fz] \cap [F(x - y - z) + Fx]$.

Der Beweis ist in [1] angeführt.

Definition 2. Es seien A, B Vektorräume über den Körpern F, G; sei R ein totaler Unterring im Körper F, $R_0 = \{t \in R \mid t \neq 0, t^{-1} \notin R\} \cup \{0\}$ und W ein Modul über dem Ring R, $W \subseteqq A$.

Das Abbildungspaar (φ, σ), $\varphi : R \to G$, $\sigma : W \to B$ wird eine verallgemeinerte semilineare Abbildung der Vektorräume A, B mit Rücksicht auf den Modul W genannt, wenn folgendes gilt:

1. $(x + y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma$, $\forall x, y \in W$.

2. $(tx)^\sigma = t^\varphi x^\sigma$, $\forall t \in R$, $\forall x \in W$.

3. $t^\varphi = 0 \Leftrightarrow t \in R_0$.

4. In jedem Unterraum $Fx \subseteqq A$, $x \neq 0$ existiert ein Element y derart, dass $y^\sigma \neq 0$ ist.

5. In jedem Unterraum $V \subseteqq A$, $\dim V = 2$ existieren Elemente $u, v \in W$ für welche u^σ und v^σ in B linear unabhängig sind.

6. Es existieren $x, y, z \in W$ so, dass $x^\sigma, y^\sigma, z^\sigma$ in B linear unabhängig sind.

Satz 4. *Die Abbildung φ von der Definition 2 ist ein Homomorphismus des Ringes R.*

Beweis. Es existiert ein Element $x \in W$, $x^\sigma \neq 0$. Nach den Eigenschaften 1,2 von der Definition 2 ergeben sich für beliebige $t_1, t_2 \in R$ die Beziehungen:

$[(t_1 + t_2) x]^\sigma = (t_1 + t_2)^\varphi x^\sigma = (t_1 x + t_2 x)^\sigma = (t_1 x)^\sigma + (t_2 x)^\sigma = t_1^\varphi x^\sigma + t_2^\varphi x^\sigma = (t_1^\varphi + t_2^\varphi) x^\sigma$. Daher ist $(t_1 + t_2)^\varphi = t_1^\varphi + t_2^\varphi$. Ferner ist $[(t_1 t_2) x]^\sigma = (t_1 t_2)^\varphi x^\sigma = [t_1(t_2 x)]^\sigma = t_1^\varphi (t_2 x)^\sigma = t_1^\varphi t_2^\varphi x^\sigma$ und deswegen auch $(t_1 t_2)^\varphi = t_1^\varphi t_2^\varphi$.

Bezeichnen wir $W_0 = \{u \in W \mid u^\sigma = 0\}$, $W^* = \{u \in W \mid u^\sigma \neq 0\}$. Es gilt $tu \in W_0$, $\forall t \in R$, $\forall u \in W_0$. W_0 ist dann ein Untermodul in W. Ferner ist $tu \in W_0$, $\forall t \in R_0$, $\forall u \in W$ und $tu \in W^*$, $\forall t \in R^*$, $\forall u \in W^*$. Es sei $u \in W^*$, $t \in F \setminus R$ und setze man voraus, dass $tu \in W$ ist. Dann ist $t^{-1} \in R_0$ und $(t^{-1}tu)^\sigma = u^\sigma = (t^{-1})^\varphi (tx)^\sigma = 0$, dieses liefert aber einen Widerspruch, nachdem $u^\sigma \neq 0$ ist.

Bemerkung 1. Der Definition 2 nach ist $\operatorname{Ker}(\varphi) = R_0$ und deswegen ist R^φ mit R/R_0 isomorph und nach dem Satz 1 ist R^φ ein Körper. W^σ ist dann ein Vektorraum über dem Körper R^φ.

Bezeichnen wir $P(A)$, $P(B)$ die projektiven Räume, welche als die Verbände der Unterräume der Vektorräume A, B definiert sind. Die Unterräume der Dimension 1 in A, B werden Punkte und die Unterräume der Dimension 2 werden Geraden der projektiven Räume $P(A)$, $P(B)$ genannt. Die Mengen der Punkte in $P(A)$, $P(B)$ bezeichnen wir der Reihe nach $\mathscr{B}(A)$, $\mathscr{B}(B)$.

Definition 3. Die Abbildung $\varkappa : \mathscr{B}(A) \to \mathscr{B}(B)$ wird Homomorphismus der projektiven Räume $P(A)$, $P(B)$ genannt, wenn diese den folgenden Bedingungen genügt:

1. Wenn die Punkte $P, Q, R \in \mathscr{B}(A)$ an irgendeiner Geraden in $P(A)$ liegen, dann liegen die Punkte $P^\varkappa$, $Q^\varkappa$, $R^\varkappa$ auf der Geraden in $P(B)$.

2. Auf jeder Geraden in $P(A)$ liegen Punkte P, Q, R, für welche $P^\varkappa \neq Q^\varkappa \neq R^\varkappa \neq P^\varkappa$ gilt.

3. Es existieren Punkte $X, Y, Z \in \mathscr{B}(A)$ so dass $X^\varkappa, Y^\varkappa, Z^\varkappa$ nicht auf einer Geraden in $P(B)$ liegen.

Satz 5. *Jede verallgemeinerte semilineare Abbildung (φ, σ) der Vektorräume A, B mit Rücksicht auf den Modul W induziert einen Homomorphismus der projektiven Räume $P(A)$, $P(B)$ mittels der Vorschrift $(Fx)^\varkappa = Gx^\sigma$, $\forall x \in W^*$.*

Beweis. 1. $\varkappa$ ist eine Abbildung von $\mathscr{B}(A)$ in $\mathscr{B}(B)$: Sei $X \in \mathscr{B}(A)$ ein beliebiger Punkt. Nach 4 von der Definition 2 existiert $x \in W^*$, $X = Fx$. Setzen wir voraus, dass $Fx = Fy$, $y \in W^*$ gilt. Dann ist $y = tx$, $t \in F$ und daher folgt $t \in R^*$. Nach 2 von der Definition 2 ist $y^\sigma = (tx)^\sigma = t^\varphi x^\sigma$, wo $t^\varphi \in G$, $t^\varphi \neq 0$ und demzufolge gilt $Gx^\sigma = (Fx)^\varkappa = Gy^\sigma = (Fy)^\varkappa$.

2. Die Abbildung $\varkappa$ hat die Eigenschaft 1 von der Definition 3: Gegeben seien drei Punkte Fu, Fx, Fy, welche auf einer Geraden in $P(A)$ liegen. Wenn z. B. $(Fx)^\varkappa = (Fy)^\varkappa$ ist, dann ist die Bedingung 1 offenbar erfüllt. Setzen wir also voraus, dass $(Fx)^\varkappa \neq (Fy)^\varkappa \neq (Fu)^\varkappa \neq (Fx)^\varkappa$ ist. Die Elemente x, y wählen wir so dass $x, y \in W^*$ ist. Nachdem $Fu \subseteq Fx + Fy$ ist, gibt es Elemente $t_1, t_2 \in F$ so dass $u = t_1x + t_2y$. Voraussetzungsgemäss ist $Fu \neq Fx, Fy$ und daher $t_1, t_2 \neq 0$. Nach dem Satz 2 existiert ein $t \in F$ so dass $tt_1 \in R$, $tt_2 \in R$ und z. B. $tt_1 \in R^*$. Dann ist $tu = tt_1x + tt_2y$, $tu \in W$ und $(tu)^\sigma = (tt_1)^\varphi x^\sigma + (tt_2)^\varphi y^\sigma$. Nachdem $(tt_1)^\varphi \neq 0$ und $Gx^\sigma \neq Gy^\sigma$

ist, gilt $(tu)^\sigma \neq 0$ und $G(tu)^\sigma \subseteqq Gx^\sigma + Gy^\sigma$. Dieses bedeutet, dass $(Fu)^\varkappa = (Ftu)^\varkappa \subseteqq \subseteqq (Fx)^\varkappa + (Fy)^\varkappa$ gilt.

3. Die Abbildung $\varkappa$ hat die Eigenschaft 2 von der Definition 3: Es sei eine beliebige Gerade p in $P(A)$, d. h. ein Unterraum der Dimension 2 in A, gegeben. Nach 5 von der Definition 2 existieren $u, v \in W^* \cap p$ so dass $Gu^\sigma \neq Gv^\sigma$, d. h. auch $(Fu)^\varkappa \neq (Fv)^\varkappa$ ist. Es gilt ebenfalls $Fu \neq Fv$ und demzufolge ist $u - v \neq 0$. Dann ist $[F(u - v)]^\varkappa = G(u - v)^\sigma = G(u^\sigma - v^\sigma)$. Nachdem $G(u^\sigma - v^\sigma) \neq Gu^\sigma, Gv^\sigma$ ist, gilt $(Fu)^\varkappa \neq (Fv)^\varkappa \neq [F(u - v)]^\varkappa \neq (Fu)^\varkappa$.

4. Die Eigenschaft 3 von der Definition 3 folgt sofort von der Voraussetzung 6 in der Definition 2 und von der Definition der Abbildung $\varkappa$.

Theorem. *Jeder Homomorphismus der projektiven Räume $P(A)$, $P(B)$ ist durch eine verallgemeinerte semilineare Abbildung der Vektorräume A, B mit Rücksicht auf einen gewissen Modul W induziert.*

Bemerkung 2. Der Beweis des Theorems ist ziemlich unfangreich, deswegen beweisen wir zuerst die Gültigkeit einiger Sätze, von denen dann die Behauptung des Theorems folgen wird. Weiterhin werden wir voraussetzen, dass $\varkappa$ ein Homomorphismus der projektiven Räume $P(A)$, $P(B)$ ist.

Satz 6. *Es seien Punkte $Fx, Fu \in \mathscr{B}(A)$ so gegeben, dass $(Fx)^\varkappa \neq (Fu)^\varkappa \neq [F(x - u)]^\varkappa \neq (Fx)^\varkappa$ ist. Setze man $(Fx)^\varkappa = Gx'$. Es existiert ein einziges Element $u' = h(x, x', u) \in B$, $u' \neq 0$ so dass $(Fu)^\varkappa = Gu'$, $[F(x - u)]^\varkappa = G(x' - u')$ gilt.*

Beweis. Nachdem $F(x - u) \subseteqq Fx + Fu$ gilt, ist nach 1 von der Definition 3 $[F(x - u)]^\varkappa \subseteqq (Fx)^\varkappa + (Fu)^\varkappa$. Wir setzen $[F(x - u)]^\varkappa = Ga$. Dann existieren $t \in G$, $b \in (Fu)^\varkappa$ so dass $a = tx' - b$ ist. Nachdem $Ga \neq Gx'$, $(Fu)^\varkappa$ ist, gilt $t \neq 0$, $b \neq 0$. Setzen wir $u' = t^{-1}b$. Dann ist $u' \neq 0$ und $(Fu)^\varkappa = Gu'$. Ausserdem gilt $[F(x - u)]^\varkappa = Ga = Gt^{-1}a = G(x' - u')$.

Es existiere in B ein Element u'' so dass $(Fu)^\varkappa = Gu''$, $[F(x - u)]^\varkappa = G(x' - u'')$ ist. Dann ist $Gu'' = Gu'$, $G(x' - u') = G(x' - u'')$ und es existieren $t_1, t_2 \in G$, $t_1, t_2 \neq 0$ so dass $u' = t_1u''$, $x' - u' = t_2(x' - u'') = x' - t_1u''$ ist. Daher ergibt sich $(t_2 - 1)\, x' = (t_2 - t_1)\, u''$. Nachdem $(Fx)^\varkappa \neq (Fu)^\varkappa$ ist, gilt $Gx' \neq Gu''$ und $t_1 = t_2 = 1$. Deswegen ist $u' = u''$.

Bemerkung 3. Wenn $(Fx)^\varkappa \neq (Fu)^\varkappa$ und $[F(x - u)]^\varkappa = (Fx)^\varkappa$ ist, dann setzen wir $h(x, x', u) = 0$. Für $u = 0$ setzen wir ebenfalls $h(x, x', 0) = 0$.

Satz 7. *Für die Punkte Fx, Fu seien die Forderungen des Satzes 6 erfüllt. Dann gilt $u' = h(x, x', u)$ genau dann, wenn $x' = h(u, u', x)$ ist.*

Der Beweis folgt unmittelbar vom Satz 6.

Satz 8. *Es seien die Punkte* $Fa, Fb, Fc \in \mathscr{B}(A)$ *mit den folgenden Eigenschaften gegeben:* $(Fa)^\times = Ga'$, $(Fa)^\times, (Fb)^\times, (Fc)^\times$ *liegen auf keiner Geraden in* $P(B)$, $[F(a - b)]^\times \neq (Fa)^\times, (Fb)^\times$ *und* $[F(a - c)]^\times \neq (Fc)^\times$. *Setzen wir* $b' = h(a, a', b)$. *Dann existieren die Werte* $h(a, a', c)$, $h(b, b', c)$ *und es gilt* $h(a, a', c) = h(b, b', c)$.

Beweis. 1. Setzen wir voraus, dass $[F(a - c)]^\times \neq (Fa)^\times$ ist. Dann ist $(Fa)^\times \neq (Fc)^\times \neq [F(a - c)]^\times \neq (Fa)^\times$. Nach dem Satz 6 gibt es ein einziges Element $c' = h(a, a', c) \in B$, $c' \neq 0$. Dabei gilt $(Fa)^\times = Ga'$, $(Fb)^\times = Gb'$, $(Fc)^\times = Gc'$, $[F(a - b)]^\times = G(a' - b')$, $[F(a - c)]^\times = G(a' - c')$. Die Elemente a, b, c sind in A linear unabhängig und demzufolge gilt nach dem Satz 3 (a) $F(b - c) = (Fb + Fc) \cap [F(a - b) + F(a - c)]$. Nach 1 von der Definition 3 gilt dann $[F(b - c)]^\times \subseteqq (Fb)^\times + (Fc)^\times$, $[F(b - c)]^\times \subseteqq [F(a - b)]^\times + [F(a - c)]^\times$. Nachdem $(Fc)^\times \nsubseteqq [F(a - b)]^\times + [F(a - c)]^\times$ ist, gilt $[F(b - c)]^\times = [(Fb)^\times + (Fc)^\times] \cap [(F(a - b))^\times + (F(a - c))^\times] = (Gb' + Gc') \cap [G(a' - b') + G(a' - c')]$. Die Elemente a', b', c' sind in B linear unabhängig und nach dem Satz 3 (a) gilt: $(Gb' + Gc') \cap [G(a' - b') + G(a' - c')] = G(b' - c')$ und daher $[F(b - c)]^\times = G(b' - c')$. Nachdem $G(b' - c') \neq Gb', Gc'$ ist, gilt $[F(b - c)]^\times \neq (Fb)^\times, (Fc)^\times$ und nach dem Satz 6 ist es möglich den Wert $h(b, b', c)$ eindeutig zu bestimmen. Dabei gilt $(Fb)^\times = Gb'$, $(Fc)^\times = Gc'$, $[F(b - c)]^\times = G(b' - c')$ und nach dem Satz 6 ist $c' = h(b, b', c)$.

2. Setzen wir voraus, dass $[F(a - c)]^\times = (Fa)^\times$ ist. Nach der Bemerkung 3 ist $h(a, a', c) = 0$. Nach dem Satz 3 (a) gilt $[F(b - c)]^\times \subseteqq [F(a - c)]^\times + [F(a - b)]^\times = (Fa)^\times + (Fb)^\times$, $[F(b - c)]^\times \subseteqq (Fc)^\times + (Fb)^\times$. Nachdem $(Fc)^\times + (Fb)^\times \neq (Fa)^\times + (Fb)^\times$ ist, gilt $[F(b - c)]^\times = (Fb)^\times$ und $h(b, b', c) = 0$.

Nach 3 von der Definition 3 existieren Punkte $X, Y, Z \in \mathscr{B}(A)$ derart, dass $X^\times, Y^\times, Z^\times$ nicht auf einer Geraden in $P(B)$ liegen. Setzen wir $X = Fx$, $X^\times = Gx'$. Auf der Geraden $X + Y$ existiert nach 2 von der Definition 3 soein Punkt R, dass $X^\times \neq Y^\times \neq R^\times \neq X^\times$ ist. Dann existiert ein Element $y \in A$ so dass $Y = Fy$, $R = F(x - y)$ ist. Nach dem Satz 6 existiert ferner ein einziges Element $y' = h(x, x', y) \in B$, $y' \neq 0$ so dass $(Fy)^\times = Gy'$, $[F(x - y)]^\times = G(x' - y')$ ist. Ähnlicherweise gibt es auf der Geraden $X + Z$ einen Punkt Q derart, dass $X^\times \neq Z^\times \neq Q^\times \neq X^\times$ ist und es existiert ein Element $z \in A$, für welches $Z = Fz$, $Q = F(x - z)$. Nach dem Satz 6 existiert wieder ein Element $z' = h(x, x', z) \in B$, $z' \neq 0$ so dass $(Fz)^\times = Gz'$, $[F(x - z)]^\times = G(x' - z')$ ist. Nach dem Satz 8 existiert dann $h(y, y', z)$ und es gilt $h(x, x', z) = h(y, y', z) = z'$. Unter der Anwendung des Satzes 7 ergibt sich ferner $x' = h(y, y', x) = h(z, z', x)$, $y' = h(x, x', y) = h(z, z', y)$. Weiterhin werden wir voraussetzen, dass die Punkte X, Y, Z, die Elemente x, x' und y, y', z, z' festgewählt sind.

Mit Hilfe der Punkte Fx, Fy definieren wir die Mengen W, W^*, W_0 durch die folgende Konstruktion:

Es sei $u \in A$, $u \neq 0$.

1. Wenn $(Fu)^\times \neq (Fx)^\times$ ist, dann ist

$$u \in W \Leftrightarrow [F(x-u)]^\times \neq (Fu)^\times ,$$

$$u \in W^* \Leftrightarrow [F(x-u)]^\times \neq (Fu)^\times, (Fx)^\times ,$$

$$u \in W_0 \Leftrightarrow [F(x-u)]^\times = (Fx)^\times .$$

2. Wenn $(Fu)^\times = (Fx)^\times$ ist, dann ist

$$u \in W \Leftrightarrow [F(y-u)]^\times \neq (Fu)^\times ,$$

$$u \in W^* \Leftrightarrow [F(y-u)]^\times \neq (Fu)^\times, (Fy)^\times ,$$

$$u \in W_0 \Leftrightarrow [F(y-u)]^\times = (Fy)^\times .$$

Im Falle $u = 0$ setzen wir $u \in W_0$.

Bemerkung 4. Offenbar gilt $W = W^* \cup W_0$, $W^* \cap W_0 = \emptyset$. Nach dem Satz 6 und der Bemerkung 3 existiert für jedes Element $u \in W$ ein Element $h(x, x', u) \in B$ bzw. $h(y, y', u) \in B$. Wenn z. B. $(Fu)^\times \neq (Fx)^\times$ ist, dann ist $h(x, x', u) \neq 0$ im Fall $u \in W^*$ und im Fall $u \in W_0$ ist $h(x, x', u) = 0$.

Satz 9. *Für jeden Punkt $U \in \mathscr{B}(A)$ existiert ein Element $u \in W^*$ so dass $U = Fu$ ist.*

Beweis. Es gilt entweder $X^\times \neq U^\times$ oder $Y^\times \neq U^\times$. Setzen wir voraus, dass $X^\times \neq U^\times$ ist. Auf der Geraden $X + U$ existiert ein Punkt R so dass $X^\times \neq U^\times \neq R^\times \neq X^\times$ ist. Dann existiert ein Eelement $u \in A$, für welches $U = Fu$, $R = F(x-u)$ gilt. Nachdem $[F(x-u)]^\times \neq (Fu)^\times, (Fx)^\times$ ist, gilt $u \in W^*$.

Satz 10. *Es sei $u \in W$, $u \neq 0$ gegeben. Wenn $(Fu)^\times \neq (Fx)^\times, (Fy)^\times$ ist, dann existieren Werte $u' = h(x, x', u)$, $h(y, y', u)$ und es gilt $h(x, x', u) = h(y, y', u)$.*

Beweis. Da $(Fu)^\times \neq (Fx)^\times$, $u \in W$ ist, existiert nach der Bemerkung 4 ein Element $u' = h(x, x', u)$.

Setzen wir voraus, dass $(Fu)^\times \nsubseteq (Fx)^\times + (Fy)^\times$ ist. Nach dem Satz 8 existiert ein Element $h(y, y', u)$ und es gilt $u' = h(x, x', u) = h(y, y', u)$. Setzen wir voraus, dass $(Fu)^\times \subseteqq (Fx)^\times + (Fy)^\times$ ist. Dann ist $(Fu)^\times \nsubseteq (Fx)^\times + (Fz)^\times$. Es gilt $[F(x-z)]^\times \neq (Fx)^\times, (Fz)^\times$ und da $u \in W$, $(Fu)^\times \neq (Fx)^\times$ ist, ist auch $[F(x-u)]^\times \neq$ $\neq (Fu)^\times$. Nach dem Satz 8 ist dann $h(x, x', u) = h(z, z', u)$. Daher folgt $[F(z-u)]^\times \neq$ $\neq (Fz)^\times$, wobei $[F(y-z)]^\times \neq (Fy)^\times, (Fz)^\times$ ist. Nachdem $h(x, x', z) = h(y, y', z) =$ $= z'$ ist, ist nach dem Satz 8 dann $h(z, z', u) = h(y, y', u)$ und wir bekommen schliesslich $h(x, x', u) = h(y, y', u)$.

Bemerkung 5. Nach einer Umtauschung der Punkte Fx, Fy, Fz im Satz 10 ergibt sich: Falls $(Fu)^* \neq (Fx)^*, (Fz)^*$ bzw. $(Fu)^* \neq (Fy)^*, (Fz)^*$ ist, dann ist $h(x, x', u) = h(z, z', u)$ bzw. $h(y, y', u) = h(z, z', u)$. Wenn $u \in W$, $u \neq 0$ ist, dann existieren zumindest zwei von den Werten $h(x, x', u)$, $h(y, y', u)$, $h(z, z', u)$ die dann einander gleich sind. Im Falle $u \in W^*$ ist dieser geimeinsame Wert von Null verschieden und für $u \in W_0$ ist gleich Null. Im Falle $u = 0$ ist $h(x, x', u) = h(y, y', u) = h(z, z', u) = 0$.

Satz 11. *W ist eine Untergruppe der additiven Gruppe A und W_0 ist eine Untergruppe in W.*

Beweis. I. Wir beweisen, dass W eine Untergruppe in A ist.

1. Es sei $a \in W$, $a \neq 0$. Der Punkt $(Fa)^*$ gehört zumindest einer der Geraden $(Fx)^* + (Fy)^*$, $(Fx)^* + (Fz)^*$, $(Fy)^* + (Fz)^*$ nicht an; setzen wir z. B. voraus, dass $(Fa)^* \nsubseteq (Fx)^* + (Fy)^*$ ist. Da $a \in W$ ist, gilt $[F(x - a)]^* \neq (Fa)^*$ und nach dem Satz 8 ist auch $[F(y - a)]^* \neq (Fa)^*$. Setzen wir $q = y - x - a$. Vom Satz 3 ergibt sich

$$Fq = [F(y - x) + Fa] \cap [F(y - a) + Fx]\,, \tag{1}$$

$$F(x + a) = (Fx + Fa) \cap (Fq + Fy)\,. \tag{2}$$

Setzen wir voraus, dass $[F(x + a)]^* = (Fa)^*$ gilt. Nachdem $F(x + a) \subseteqq Fx + Fa$ ist, gilt $[F(x + a)]^* \subseteqq (Fx)^* + (Fa)^*$ und demzufolge ist $[F(x + a)]^* \neq (Fy)^*$. Von (2) bekommen wir $(Fq)^* \subseteqq (Fy)^* + [F(x + a)]^* = (Fy)^* + (Fa)^*$. Nachdem $[F(y - a)]^* \neq (Fa)^*$ ist, ist $(Fy)^* + (Fa)^* = [F(y - a)]^* + (Fa)^*$ und $(Fq)^* \subseteqq (Fa)^* + [F(y - a)]^*$. Nach (1) ist $(Fq)^* \subseteqq (Fx)^* + [F(y - a)]^*$. Da $(Fa)^* + [F(y - a)]^* \neq (Fx)^* + [F(y - a)]^*$ ist, gilt $(Fq)^* = [F(y - a)]^*$. Nach (1) ist ferner $(Fq)^* \subseteqq [F(y - x)]^* + (Fa)^*$, d. h. $[F(y - a)]^* \subseteqq [F(y - x)]^* + (Fa)^*$. Daher ist $[F(y - x)]^* \subseteqq (Fa)^* + [F(y - a)]^* = (Fa)^* + (Fy)^*$. Zugleich gilt $[F(y - x)]^* \subseteqq (Fx)^* + (Fy)^*$. Nachdem $(Fx)^* + (Fy)^* \neq (Fa)^* + (Fy)^*$ ist, gilt $[F(y - x)]^* = (Fy)^*$. Dieses ist aber ein Widerspruch. Es gilt also $[F(x + a)]^* \neq (Fa)^*$ und daher ist $-a \in W$.

2. Es sei $a, b \in W$, $a, b \neq 0$.

a) Setzen wir voraus, dass $(Fa)^* \neq (Fb)^*$ ist. Von den Punkten $(Fx)^*, (Fy)^*, (Fz)^*$ liegt zumindest einer, z. B. $(Fx)^*$, nicht auf der Geraden $(Fa)^* + (Fb)^*$. Ferner gilt entweder $[F(a + b)]^* \neq (Fa)^*$ oder $[F(a + b)]^* \neq (Fb)^*$. Es sei $[F(a + b)]^* \neq (Fa)^*$. Setzen wir $q = x - (a + b)$ und setzen voraus, dass $(Fq)^* = [F(a + b)]^*$ ist. Dann ist $(Fa)^* + [F(a + b)]^* = (Fa)^* + (Fb)^* = (Fa)^* + (Fq)^*$. Nach dem Satz 3(b) ist $Fq \subseteqq F(x - b) + Fa$ und deswegen ist $(Fq)^* \subseteqq [F(x - b)]^* + (Fa)^*$. Daher ergibt sich $[F(x - b)]^* \subseteqq (Fa)^* + (Fq)^* = (Fa)^* + (Fb)^*$. Zugleich ist $[F(x - b)]^* \subseteqq (Fx)^* + (Fb)^*$. Nachdem $(Fa)^* + (Fb)^* \neq (Fx)^* + (Fb)^*$ ist, ist $[F(x - b)]^* = (Fb)^*$. Dieses widerspricht aber der Voraussetzung $b \in W$. Es gilt also $[F(a + b)]^* \neq [F(x - (a + b))]^*$ und daher ist $a + b \in W$.

b) Setzen wir voraus, dass $(Fa)^{\times} = (Fb)^{\times}$ ist und sei $(Fx)^{\times} \neq (Fa)^{\times}$. Nachdem $a \in W$ ist, gilt $[F(x - a)]^{\times} \neq (Fa)^{\times}$ und deswegen ist auch $[F(x - a)]^{\times} \neq (Fb)^{\times}$. Nach den Fällen 1, 2a) ist $x - a \in W$ und auch $(x - a) - b \in W$. Wenn $[F(x - (a + b))]^{\times} = (Fx)^{\times}$ gilt, dann ist $a + b \in W_0$. Es sei $[F(x - (a + b))]^{\times} \neq (Fx)^{\times}$. Nach 1,2a) ist $x - (x + a + b) = a + b \in W$.

II. Wir beweisen, dass W_0 eine Untergruppe in W ist.

1. Es sei $a \in W_0$, $a \neq 0$. $(Fa)^{\times}$ gehört zumindest einer der Geraden $(Fx)^{\times} + (Fy)^{\times}$, $(Fx)^{\times} + (Fz)^{\times}$, $(Fy)^{\times} + (Fz)^{\times}$ nicht an; setzen wir voraus, dass $(Fa)^{\times}$ nicht auf $(Fx)^{\times} + (Fy)^{\times}$ liegt. Dann ist $[F(x - a)]^{\times} = (Fx)^{\times}$ und nach dem Satz 8 auch $[F(y - a)]^{\times} = (Fy)^{\times}$. Setzen wir $q = y - x - a$. Nach dem Satz 3(b) ist $Fq = [F(y - x) + Fa] \cap [F(y - a) + Fx]$. Nachdem $[F(y - x)]^{\times} + (Fa)^{\times} \neq (Fy)^{\times} + (Fx)^{\times}$ und $(Fx)^{\times} + (Fy)^{\times} = (Fx)^{\times} + [F(y - a)]^{\times} = (Fx)^{\times} + [F(y - x)]^{\times}$ ist, gilt $(Fq)^{\times} = [(F(y - x))^{\times} + (Fa)^{\times}] \cap [(F(y - a))^{\times} + (Fx)^{\times}] = [F(y - x)]^{\times}$. Nach dem Satz 3(c) ist $F(x + a) = (Fx + Fa) \cap (Fq + Fy)$ und demzufolge ist $[F(x + a)]^{\times} = [(Fx)^{\times} + (Fa)^{\times}] \cap [(F(y - x))^{\times} + (Fy)^{\times}] = F(x)^{\times}$. Daher folgt $-a \in W_0$.

2a) Es sei $a \in W^*$, $b \in W$, $b \neq 0$ und sei $(Fa)^{\times} \neq (Fb)^{\times}$. Dann ist $a + b \in W^*$: Einer der Punkte $(Fx)^{\times}, (Fy)^{\times}, (Fz)^{\times}$ liegt nicht auf der Geraden $(Fa)^{\times} + (Fb)^{\times}$; setzen wir voraus, dass dieser der Punkt $(Fx)^{\times}$ ist. Nach der Voraussetzung ist $[F(x - a)]^{\times} \neq (Fx)^{\times}$. Setzen wir $q = x - a - b$ und setzen voraus, dass $(Fq)^{\times} = (Fx)^{\times}$ ist. Nach dem Satz 3(b) ist $Fq \subseteqq Fb + F(x - a)$ und daher ist $(Fq)^{\times} \subseteqq (Fb)^{\times} + [F(x - a)]^{\times}$. Es gilt aber $(Fb)^{\times} + (Fx)^{\times} = (Fb)^{\times} + (Fq)^{\times}$ und nachdem $[F(x - a)]^{\times} \subseteqq (Fb)^{\times} + (Fq)^{\times}$ ist, gilt $[F(x - a)]^{\times} \subseteqq (Fb)^{\times} + (Fx)^{\times}$. Zugleich aber ist $[F(x - a)]^{\times} \subseteqq (Fa)^{\times} + (Fx)^{\times}$ und deswegen ist $[F(x - a)]^{\times} = (Fx)^{\times}$ und daher ein Widerspruch. Es gilt $[F(x - (a + b))]^{\times} \neq (Fx)^{\times}$ und also ist $a + b \in W^*$.

b) Es sei $a \in W_0$, $a \neq 0$, $b \in W^*$ beliebig vorgegeben. Dann ist $a + b \in W^*$: Es sei z. B. $(Fx)^{\times} \neq (Fa)^{\times}, (Fb)^{\times}$. Es gilt $[F(x - a)]^{\times} = (Fx)^{\times}$, $[F(x - b)]^{\times} \neq (Fx)^{\times}$. Ferner ist $[F(x + a)]^{\times} = (Fx)^{\times}$, nachdem $-a \in W_0$ ist. Nach dem Fall a) ist $x + a \in W^*$. Da $-x \in W$ ist, ist auch $b - x \in W$. Es gilt $[F(x + a)]^{\times} = (Fx)^{\times} \neq [F(b - x)]^{\times}$ und nach a) ist $(x + a) + (b - x) \in W^*$. Daher ist $a + b \in W^*$.

c) Sei $a, b \in W_0$ beliebig und wir setzen $c = a + b$. Falls $c \in W^*$ ist, dann ist $a = c - b$, wo $-b \in W_0$ ist. Nach dem Fall b) ist $a \in W^*$ und dieses ist ein Widerspruch. Es gilt also $a + b \in W_0$.

Bezeichnen wir $R = \{t \in F \mid ty \in W\}$, $R_0 = \{t \in F \mid ty \in W_0\}$ und $R^* = R \setminus R_0$.

Satz 12. *Es gilt*: 1. $tu \in W$, $\forall t \in R$, $\forall u \in W$. 2. $tu \in W_0$, $\forall t \in R_0$, $\forall u \in W$. 3. $tu \in W_0$, $\forall t \in R$, $\forall u \in W_0$.

Beweis. Für $u = 0$ bzw. $t = 0$ gilt die Behauptung. Setzen wir voraus, dass $t \neq 0$, $u \neq 0$ ist.

1. Es sei $t \in R$, $u \in W$ gegeben.

a) Setzen wir voraus, dass $(Fu)^* \nsubseteq (Fx)^* + (Fy)^*$ ist. Nachdem $u \in W$ ist, gilt $[F(x - u)]^* \neq (Fu)^*$ und auch

(1) $$[F(y - u)]^* \neq (Fu)^* .$$

Da $ty \in W$ ist, gilt

(2) $$[F(x - ty)]^* \neq (Fty)^* = (Fy)^* .$$

Wir setzen voraus, dass

(3) $$[F(x + tu)]^* = (Fu)^*$$

gilt. Die Elemente $t^{-1}x$, y, u sind linear unabhängig, darum ist nach dem Satz 3

(4) $$F(y - t^{-1}x - u) = [F(y - t^{-1}x) + Fu] \cap [F(y - u) + Ft^{-1}x] ,$$

(5) $$F(t^{-1}x + u) = (Ft^{-1}x + Fu) \cap [F(y - t^{-1}x - u) + Fy] .$$

Setzen wir $q = y - t^{-1}x - u$. Nachdem $[F(t^{-1}x + u)]^* = [F(x + tu)]^* \neq (Fy)^*$ ist, gilt nach (5) $(Fq)^* \subseteq (Fy)^* + [F(x + tu)]^*$. Nach (3) ist dann $(Fq)^* \subseteq$ $\subseteq (Fy)^* + (Fu)^*$ und nach (1) ist $(Fq)^* \subseteq (Fu)^* + [F(y - u)]^*$. Nach (4) ist $(Fq)^* \subseteq [F(y - u)]^* + (Fx)^*$. Demzufolge ist $(Fq)^* = [(Fu)^* + (F(y - u))^*] \cap$ $\cap [(F(y - u))^* + (Fx)^*] = [F(y - u)]^*$. Nach (1) ist also $(Fq)^* \neq (Fu)^*$. Nach (4) ergibt sich $[F(y - t^{-1}x)]^* = [F(x - ty)]^* \subseteq (Fq)^* + (Fu)^* = [F(y - u)]^* +$ $+ (Fu)^* = (Fy)^* + (Fu)^*$. Nachdem $[F(x - ty)]^* \subseteq (Fx)^* + (Fy)^*$ ist, gilt $[F(x - ty)]^* = [(Fx)^* + (Fy)^*] \cap [(Fy)^* + (Fu)^*] = (Fy)^*$. Dieses ist aber mit (2) im Widerspruch und deswegen (3) gilt nicht. Von der Beziehung $[F(x + tu)]^* \neq$ $\neq (Fu)^* = (Ftu)^*$ folgt $-tu \in W$ und nach dem Satz 11 ist $tu \in W$.

b) Setzen wir voraus, dass $(Fu)^* \subseteq (Fx)^* + (Fy)^*$ ist. Es sei $(Fu)^* \neq (Fy)^*$. Dann ist $(Fu)^* \nsubseteq (Fy)^* + (Fz)^*$. Den Beweis führen wir analog wie im Teil a) durch, eben der Punkt Fx wird durch den Punkt Fz ersetzt. Falls $(Fu)^* = (Fy)^*$ gilt, dann ist $(Fu)^* \nsubseteq (Fx)^* + (Fz)^*$. Da nach dem Teil a) $tz \in W$ ist, kann der Beweis soeben wie in a) durchgeführt werden, nur der Punkt Fy wird durch den Punkt Fz ersetzt.

2. Es sei $t \in R_0$, $u \in W$ gegeben.

a) Setzen wir voraus, dass $(Fu)^* \nsubseteq (Fx)^* + (Fy)^*$ ist. Nachdem $t \in R_0$ ist, ist $ty \in W_0$ und deswegen ist $[F(x - ty)]^* = (Fx)^*$. Setzen wir $q = y - t^{-1}x - u$. Nach (4) ist $(Fq)^* \subseteq [F(x - ty)]^* + (Fu)^* = (Fx)^* + (Fu)^*$ und $(Fq)^* \subseteq [F(y -$ $- u)]^* + (Fx)^*$. Nachdem $u \in W$ ist, gilt $[F(y - u)]^* \neq (Fu)^*$ und demzufolge ist $(Fx)^* + (Fu)^* \neq [F(y - u)]^* + (Fx)^*$. Daher ist dann $(Fq)^* = [(Fx)^* + (Fu)^*] \cap$ $\cap [(F(y - u))^* + (Fx)^*] = (Fx)^*$. Nach (5) ist $(Fq)^* \subseteq (Fy)^* + [F(x + tu)]^*$ und also ist $[F(x + tu)]^* \subseteq (Fy)^* + (Fx)^*$. Zugleich ist $[F(x + tu)]^* \subseteq (Fx)^* + (Fu)^*$

und also ist $[F(x + tu)]^* = [(Fy)^* + (Fx)^*] \cap [(Fx)^* + (Fu)^*] = (Fx)^*$. Dieses bedeutet aber, dass $-tu \in W_0$ ist und nach dem Satz 11 ist $tu \in W_0$.

b) Setzen wir voraus, dass $(Fu)^* \subseteqq (Fx)^* + (Fy)^*$ ist. Den Beweis führen wir bei der Benutzung des Ergebnisses von a) analog wie im Falle 1b) durch.

3. Es sei $t \in R$, $u \in W_0$ gegeben.

a) Setzen wir voraus, dass $(Fu)^* \nsubseteq (Fx)^* + (Fy)^*$ ist. Dann ist $[F(x - ty)]^* \neq (Fy)^*$, $[F(x - u)]^* = (Fx)^*$ und auch $(Fy)^* = [F(y - u)]^*$. Setzen wir wieder $q = y - t^{-1}x - u$. Nach (4) ist $(Fq)^* \subseteqq [F(x - ty)]^* + (Fu)^*$. Nachdem $[F(x - ty)]^* \neq (Fy)^*$ ist, gilt $[F(x - ty)]^* + (Fu)^* \neq (Fu)^* + (Fy)^*$ und daher ist dann $(Fq)^* \neq (Fy)^*$, $[F(y - u)]^*$. Nach (4), (5) gilt $(Fx)^* = [(Fq)^* + (F(y - u))^*] \cap [(Fx)^* + (Fu)^*] = [(Fq)^* + (Fy)^*] \cap [(Fx)^* + (Fy)^*] = [F(x + tu)]^*$. Deswegen ist $-tu \in W_0$ und nach dem Satz 11 ist $tu \in W_0$.

b) Wenn $(Fu)^* \subseteqq (Fx)^* + (Fy)^*$ ist, dann führen wir den Beweis ähnlich wie in 1b) durch.

Satz 13. *R ist ein totaler Ring im Körper F, $R_0 = \{t \in R \mid t \neq 0,\ t^{-1} \notin R\} \cup \{0\}$.*

Beweis. 1. R ist ein Ring: Es sei $t_1, t_2 \in R$. Dann ist $t_1 y$, $t_2 y \in W$. Nach dem Satz 11 ist $t_1 y + t_2 y = (t_1 + t_2)\, y \in W$ und daher ist $t_1 + t_2 \in R$. Nachdem $t_1 y \in W$, $t_2 \in R$ ist, ist nach dem Satz 12 $t_2(t_1 y) = (t_1 t_2)\, y \in W$ und daher ist $t_1 t_2 \in R$.

2. R ist ein totaler Ring in F: Es sei $t \in F \setminus R$ gegeben. Dann ist $ty \notin W$ und ebenfalls $tx \notin W$. Dieses bedeutet, dass $[F(y - tx)]^* = [F(x - t^{-1}y)]^* = (Fx)^*$ gilt. Daher folgt $t^{-1}y \in W_0$ und $t^{-1} \in R_0$. Es sei ein beliebiges Element $t \in R_0$, $t \neq 0$ gegeben. Dann ist $ty \in W_0$ und nach dem Satz 12 auch $tx \in W_0$. Darum ist $[F(y - tx)]^* = (Fy)^*$. Es ist aber $[F(y - tx)]^* = [F(x - t^{-1}y)]^* = (Fy)^* = (Ft^{-1}y)^*$. Daher ist dann $t^{-1}y \notin W$ und $t^{-1} \notin R$.

Bemerkung 6. Nach dem Satz 1 ist R_0 ein Maximalideal in R und $R \setminus R_0$ ist ein Körper. Nach dem Satz 12 ist $tu \in W$ für alle $t \in R$, $u \in W$. Nach der Einführung dieser äusseren Operation ist W ein Modul über dem Ring R und W_0 ist ein Untermodul des Moduls W.

Satz 14. *Es sei $a, b \in W$; $a, b \neq 0$ und sei*

1. $(Fx)^* \nsubseteq (Fa)^* + (Fb)^*$ *im Falle* $(Fa)^* \neq (Fb)^*$,
2. $(Fx)^* \neq (Fa)^*$ *im Falle* $(Fa)^* = (Fb)^*$.

Dann ist $h(x, x', a + b) = h(x, x', a) + h(x, x', b)$.

Beweis. Setzen wir voraus, dass $(Fa)^* \neq (Fb)^*$ ist.

a) Wenn $a, b \in W_0$, dann ist $a + b \in W_0$ und es gilt $h(x, x', a) = h(x, x', b) = h(x, x', a + b) = 0$ und also ist $h(x, x', a + b) = h(x, x', a) + h(x, x', b)$.

b) Es sei $a \in W^*$, $b \in W^*$. Setzen wir $a' = h(x, x', a)$, $b' = h(x, x', b)$. Dann ist nach dem Satz 6 $(Fa)^* = Ga'$, $(Fb)^* = Gb'$, $[F(x - a)]^* = G(x' - a')$, $[F(x - b)]^* = G(x' - b')$, wobei $[F(x - a)]^* \neq (Fx)^*, (Fa)^*$ ist. Die Elemente x', a', b', sind in B linear unabhängig und die Elemente x, a, b sind linear unabhängig in A. Nach dem Satz 3b) ist $F(x - a - b) = [F(x - a) + Fb] \cap [F(x - b) + Fa]$. Es gilt $[F(x - a)]^* \neq (Fb)^*$, $[F(x - b)]^* \neq (Fa)^*$. Nachdem $[F(x - a)]^* \neq (Fx)^*, (Fb)^*$ ist, gilt $[F(x - a)]^* + (Fb)^* \neq [F(x - b)]^* + (Fa)^*$ und demzufolge ist $[F(x - a - b)]^* = [(F(x - a))^* + (Fb)^*] \cap [(F(x - b))^* + (Fa)^*] = [G(x' - a') + Gb'] \cap [G(x' - b') + Ga'] = G(x' - a' - b')$. Nach dem Satz 3c) ist $F(a + b) = (Fa + Fb) \cap [F(x - a - b) + Fx]$. Es gilt $(Fa)^* \neq (Fb)^*$. Nach dem Teil II, 2, b) des Beweises des Satzes 11 ist $a + b \in W^*$ und demzufolge ist $[F(x - (a + b))]^* \neq (Fx)^*$. Offenbar ist $(Fa)^* + (Fb)^* \neq [F(x - a - b)]^* + (Fx)^*$ und deswegen $[F(a + b)]^* = [(Fa)^* + (Fb)^*] \cap [(F(x - a - b))^* + (Fx)^*] = (Ga' + Gb') \cap [G(x' - a' - b') + Gx'] = G(a' + b')$. Es gilt also $(Fx)^* = Gx'$, $[F(a + b)]^* = G(a' + b')$, $[F(x - (a + b))]^* = G(x' - (a' + b'))$. Nach dem Satz 6 ist dann $h(x, x', a + b) = h(x, x', a) + h(x, x', b) = a' + b'$.

c) Es sei $a \in W^*$, $b \in W_0$. Dann ist $(Fa)^* = Ga'$, $[F(x - a)]^* = G(x' - a')$, $[F(x - b)]^* = (Fx)^*$, $b' = 0$. Setzen wir $q = x - (a + b)$. Nach dem Satz 3 gilt dann $(Fq)^* \subseteqq (Fa)^* + [F(x - b)]^* = (Fa)^* + (Fx)^* = (Fa)^* + [F(x - a)]^*$ und $(Fq)^* \subseteqq (Fb)^* + [F(x - a)]^*$. Daher ist $(Fq)^* = [F(x - a)]^* = G(x' - a') = [F(x - (a + b))]^*$. Ferner ist nach dem Satz 3 $[F(a + b)]^* \subseteqq (Fa)^* + (Fb)^*$, $[F(a + b)]^* \subseteqq (Fq)^* + (Fx)^* = [F(x - a)]^* + (Fx)^* = (Fa)^* + (Fx)^*$. Daher ist $[F(a + b)]^* = (Fa)^* = Ga'$. Nach dem Satz 6 ist dann $h(x, x', a + b) = h(x, x', a)$. Nachdem $h(x, x', b) = 0$ ist, gilt $h(x, x', a + b) = h(x, x', a) + h(x, x', b)$.

2. Setzen wir voraus, dass $(Fa)^* = (Fb)^*$. Für zumindest einen der Punkte Fy, Fz — sei es der Punkt Fy — gilt $(Fa)^* \neq (Fy)^*$. Dann liegt der Punkt $(Fx)^*$ nicht auf der Geraden $(Fa)^* + (Fy)^*$ und nach dem Fall 1 ist $h(x, x', a + y) = h(x, x', y) + h(x, x', a)$. Nachdem $-a \in W$ ist, gilt $[F(a + y)]^* \neq (Fa)^*$. Der Punkt $(Fx)^*$ liegt nicht auf der Geraden $(Fb)^* + [F(a + y)]^*$ und deswegen ist wieder nach dem Fall 1 $h(x, x', b) + h(x, x', a + y) = h(x, x', a + b + y)$.

a) Es sei $a + b = 0$. Dann ist nach dem vorherigen $h(x, x', a) + h(x, x', b) + h(x, x', y) = h(x, x', a + b + y) = h(x, x', y)$. Daher ist $h(x, x', a) + h(x, x', b) = 0 = h(x, x', a + b)$.

b) Es sei $a + b \neq 0$. Nachdem $[F(a + b)]^* \neq (Fy)^*$ ist, gilt nach dem Fall 1 $h(x, x', y) + h(x, x', a + b) = h(x, x', a + b + y)$. Nach dem Einsetzen von den vorangehenden Beziehungen ergibt sich $h(x, x', y) + h(x, x', a + b) = h(x, x', y) + h(x, x', a) + h(x, x', b)$. Es gilt also $h(x, x', a) + h(x, x', b) = h(x, x', a + b)$.

Bemerkung 7. Der Satz 14 gilt auch für $q = 0$. Dann ist $h(x, x', a) = 0$ und $h(x, x', a + b) = h(x, x', b) = h(x, x', a) + h(x, x', b)$. Ähnlicherweise auch für den

Fall $b = 0$. Wenn der Punkt Fy bzw. Fz den Forderungen des Satzes 14 für Fx genügt, dann beweist man ähnlich, dass $h(y, y', a + b) = h(y, y', a) + h(y, y', b)$ bzw. $h(z, z', a + b) = h(z, z', a) + h(z, z', b)$ gilt.

Für ein beliebiges Element $u \in W$ sind nach der Bemerkung 5 zumindest zwei der Werte $h(x, x', u)$, $h(y, y', u)$, $h(z, z', u)$ definiert und diese sind einander gleich. Diesen gemeinsamen Wert bezeichnen wir mit u^σ. σ ist eine Abbildung der Menge W in B und für $u \in W^*$ gilt nach dem Satz 6 die Beziehung $(Fu)^\varkappa = Gu^\sigma$.

a) Es gilt $(a + b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma$, $\forall a, b \in W$: Zwischen den Punkten Fx, Fy, Fz existiert zumindest einer, z. B. Fy, für welchen $(Fy)^\varkappa \not\subseteq (Fa)^\varkappa + (Fb)^\varkappa$ im Falle $(Fa)^\varkappa \neq (Fb)^\varkappa$ und $(Fy)^\varkappa \neq (Fa)^\varkappa$ im Falle $(Fa)^\varkappa = (Fb)^\varkappa$ gilt. Nach dem Satz 14 und der Bemerkung 7 ist $h(y, y', a + b) = h(y, y', a) + h(y, y', b)$, d. h. $(a + b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma$.

b) Es seien $u \in W^*$, $t \in R^*$ beliebige Elemente. Dann ist $tu \in W^*$ und es gilt $(Fu)^\varkappa = Gu^\sigma = (Ftu)^\varkappa = G(tu)^\sigma$. Es existiert ein einziges Element $g(t, u) \in G$, $g(t, u) \neq 0$ derart, dass $(tu)^\sigma = g(t, u)\, u^\sigma$ ist. Wenn $t \in R_0$ ist, dann setzen wir $g(t, u) = 0$ für ein beliebiges $u \in W^*$. Nachdem dann $tu \in W_0$ ist, gilt $(tu)^\sigma = 0$, $g(t, u)\, u^\sigma = 0$ d. h. $(tu)^\sigma = g(t, u)\, u^\sigma$.

Für beliebige $t \in R$ und $u, v \in W^*$ gilt $g(t, u) = g(t, v)$: Wenn $t \in R_0$ ist, dann ist $g(t, u) = g(t, v) = 0$. Sei $t \in R^*$. Setzen wir zuerst voraus, dass $(Fu)^\varkappa \neq (Fv)^\varkappa$ ist. Nach dem Teil II 2 a) des Beweises des Satzes 11 ist $u + v \in W^*$ und $g(t, u + v)\, u^\sigma + g(t, u + v)\, v^\sigma = g(t, u + v)\, (u^\sigma + v^\sigma) = g(t, u + v)\, (u + v)^\sigma = [t(u + v)]^\sigma = (tu + tv)^\sigma = (tu)^\sigma + (tv)^\sigma = g(t, u)\, u^\sigma + g(t, v)\, v^\sigma$. So bekommen wir $[g(t, u + v) - g(t, u)]\, u^\sigma = [g(t, v) - g(t, u + v)]\, v^\sigma$. Da $Gu^\sigma \neq Gv^\sigma$ ist, gilt $g(t, u) = g(t, u + v) = g(t, v)$. Es sei $(Fu)^\varkappa = (Fv)^\varkappa$. Es existiert ein Punkt, z. B. Fx derart, dass $(Fu)^\varkappa \neq (Fx)^\varkappa$ ist. Nach dem obigen ist dann $g(t, u) = g(t, x) = g(t, v)$. Für jedes $t \in R$ bezeichnen wir $t^\varphi = g(t, u)$, wo $u \in W^*$ ist. Dann ist φ eine Abbildung von R in G und $t^\varphi = 0$ genau dann, wenn $t \in R_0$ ist. Nach dem Vorangehendem ist $(tu)^\sigma = t^\varphi u^\sigma$, $\forall t \in R$, $\forall u \in W^*$. Es sei $t \in R$, $u \in W_0$. Dann ist $tu \in W_0$ und $(tu)^\sigma = t^\varphi u^\sigma = 0$. Es gilt also $(tu)^\sigma = t^\varphi u^\sigma$, $\forall t \in R$, $\forall u \in W$.

Das Paar (φ, σ) ist eine verallgemeinerte semilineare Abbildung der Vektorräume A, B mit Rücksicht auf den Modul W: Nach dem Satz 13 und der Bemerkung 6 ist W ein Modul über dem totalen Ring R im Körper F, $W \subsetneqq A$ und $R_0 = \{t \in R \mid t \neq 0, t^{-1} \notin R\} \cup \{0\}$. σ ist eine Abbildung von W in B und φ ist eine Abbildung von R in G. Nach a) ist $(a + b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma$, $\forall a, b \in W$, nach b) gilt $(tx)^\sigma = t^\varphi x^\sigma$, $\forall t \in R$, $\forall x \in W$ und $t^\varphi = 0 \Leftrightarrow t \in R_0$. Vom Satz 9 folgt die Bedingung 4 von der Definition 2. Jede Gerade von $P(A)$ ist ein Unterraum der Dimension 2 in A. Von der Forderung 2 der Definition 3 folgt deswegen die Bedingung 5 der Definition 2 und nach 3 von der Definition 3 gilt 6 von der Definition 2.

Die verallgemeinerte semilineare Abbildung (φ, σ) induziert den gegebenen Homomorphismus $\varkappa$ der projektiven Räume $P(A)$, $P(B)$, nachdem $(Fu)^\varkappa = Gu^\sigma$, $\forall u \in W^*$ gilt. Damit ist unser Theorem bewiesen.

Literatur

[1] *Baer, R.:* Linear algebra and projective geometry. New York, 1952.

[2] *Klingenberg, W.:* Projektive Geometrien mit Homomorphismus, Math. Ann., *132*, 180—200, 1956.

[3] *Klingenberg, W.:* Projektive Geometrie und lineare Algebra über verallgemeinerten Bewertungsringen. Oxford: Proc. Coll. Utrecht, 1959: Algebraical and topological foundations of geometry, 99—107, 1962.

[4] *Lüneburg, H.:* Über die Struktursätze der projektiven Geometrie, Arch. Math., *17*, 206—209, 1966.

[5] *Radó, F.:* Non-injective collineations on some sets in Desarguesian projective planes and extension of non-commutative valuations, Aequat. Math., *4*, 307—321, 1970.

[6] *Radó, F.:* Darstellung nicht-injektiver Kollineationen eines projektiven Raumes durch verallgemeinerte semilineare Abbildungen, Math. Zeitschr., *110*, 153—170, 1969.

Anschrift des Verfassers: 771 46 Olomouc, Leninova 26 (Přírodovědecká fakulta UP).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

ON HADWIGER NUMBER OF A GRAPH

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Received January 17, 1974)

In this paper, by the word graph we always mean a finite undirected graph without loops and multiple edges.

We say that a graph G can be contracted onto a graph G' if and only if G' can be obtained from G by a finite number of the following operations:

(1) deleting an edge;

(2) deleting an isolated vertex;

(3) identifying two adjacent vertices, i.e., substituting two adjacent vertices x and y by a new vertex adjacent exactly with those vertices which were adjacent at least with one of the vertices x and y.

If we speak about contracting an edge, we mean the operation (3), where x and y are the end vertices of the edge in question.

The Hadwiger number $\eta(G)$ of a graph G is the maximal number of vertices of a complete graph onto which the graph G can be contracted.

V. G. VIZING in [2] suggests the following problem:

Let the degree of each vertex of a graph G be at least k. Is then true that $\eta(G) \to \infty$ when $k \to \infty$?

We shall prove a theorem whose corollary will solve this problem affirmatively. For this purpose we define the relative edge number of a graph G to be m/n, where m is the number of edges and n is the number of vertices of G. The symbol Γx will denote the set of vertices of the graph G which are adjacent with a vertex x of this graph (following [1]).

First we prove

Lemma. *Let G be a graph, r its relative edge number, k the minimal degree of a vertex of G. Then*

$$2r \geqq k .$$

Proof. Let n be the number of vertices of G and m the number of its edges. If $d_1, \ldots, d_n$ are degrees of the vertices of G, then

$$m = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} d_i .$$

For each $i = 1, \ldots, n$ we have $d_i \geqq k$, therefore

$$m \geqq \tfrac{1}{2} nk .$$

However, on the other hand,

$$m = nr,$$

which implies

$$2r \geqq k .$$

Now we prove

Theorem 1. *Let r be a non-negative rational number, let $\eta^*(r)$ be the least possible Hadwiger number of a graph whose relative edge number is greater than or equal to r. Then*

$$\lim_{r \to \infty} \eta^*(r) = \infty .$$

Proof. We shall prove the theorem by contradiction. Suppose that the assertion is not true. The function $\eta^*(r)$ is evidently a non-decreasing function defined on the set of all non-negative rational numbers and its values are positive integers. As it does not tend to infinity, there must exist a non-negative rational number r_0 such that

$$\eta^*(r) = \eta^*(r_0)$$

for each rational $r \geqq r_0$. Take this number r_0 and put $r_1 = 3r_0$. We have obviously $\eta^*(r_1) = \eta^*(r_0)$; denote this number by N_0. There exist graphs whose relative edge number is greater than or equal to r_1 and whose Hadwiger number is equal to N_0. Let G be a graph with these properties and with the minimal possible number of vertices; let this number be n. Let e be an edge of G, let its end vertices be v_1 and v_2. Let G' be the graph obtained from G by contracting the edge e, let v be the vertex of G' obtained from v_1 and v_2 by this contraction. The graph G' has $n - 1$ vertices. The minimality of n implies that either G' has the relative edge number less than r_1, or the Hadwiger number of G' is different from N_0. However, if G' had the relative edge number greater than or equal to r_1, its Hadwiger number would be at least $\eta^*(r_1) = N_0$. But the Hadwiger number of G' cannot exceed the Hadwiger number of G (if G' can be contracted onto a complete graph, then evidently G can be contracted onto the same graph, starting by contracting G onto G'), therefore it would be N_0, which would be a contradiction with the minimality of n. Thus the relative edge number of G' must be less than r_1. Let e_0 be the number of edges of the induced subgraph of G obtained by deleting v_1 and v_2 and all edges incident with these vertices. Let $e_1 = |\Gamma v_1 \dot{-} (\Gamma v_2 \cup \{v_2\})|$, $e_2 = |\Gamma v_2 \dot{-} (\Gamma v_1 \cup \{v_1\})|$, $e_3 = |\Gamma v_1 \cap \Gamma v_2|$. The degree of v_1 is $e_1 + e_3 + 1$, the degree of v_2 is $e_2 + e_3 + 1$ in G. The degree of v in G' is $e_1 + e_2 + e_3$. The number of edges of G is $e_0 + e_1 + e_2 + 2e_3 + 1$, the number of edges of G' is $e_0 + e_1 + e_2 + e_3$. From our considerations on the relative edge number we have

$$e_0 + e_1 + e_2 + 2e_3 + 1 \geqq nr_1 ,$$

$$e_0 + e_1 + e_2 + e_3 < (n - 1) r_1 .$$

This implies

$$e_3 > r_1 - 1 .$$

As e_3 is an integer, we may write

$$e_3 \geqq]r_1[- 1 ,$$

where the symbol $]a[$ for each real number a denotes the least integer which is greater than or equal to a (the so-called "post-office function"). As $e_3 = |\Gamma v_1 \cap \Gamma v_2|$, this means that the edge e is contained at least in $]r_1[- 1$ triangles of G. As the edge e was chosen arbitrarily, this holds for each edge of G. Now let u be a vertex of G. If T is a triangle of G containing u, then the edge of T opposite to u is an edge of the subgraph $H_0(u)$ of G induced by the set Γu. Let $v \in \Gamma u$. The edge uv is contained at least in $]r_1[- 1$ triangles of G; these triangles obviously contain u. This means that the degree of v in $H_0(u)$ is at least $]r_1[- 1$. As v was chosen arbitrarily from $H_0(u)$, this holds for each vertex of $H_0(u)$. It follows from Lemma that the relative edge number of $H_0(u)$ is at least $\frac{1}{2}(]r_1[- 1) = \frac{1}{2}(]3r_0[- 1)$. As evidently $r_0 > 2$, this is greater than r_0 and therefore the Hadwiger number of $H_0(u)$ is at least N_0. This means that $H_0(u)$ can be contracted onto a complete graph with N_0 vertices. Now let $H(u)$ be the subgraph of G induced by the set $\{u\} \cup \Gamma u$. The graph $H_0(u)$ is an induced subgraph of $H(u)$ and the vertex u is joined in $H(u)$ with all vertices of $H_0(u)$. Thus if we contract $H_0(u)$ onto a complete graph with N_0 vertices, the graph $H(u)$ will be contracted by this contraction onto a complete graph with $N_0 + 1$ vertices. Therefore the Hadwiger number of $H(u)$ is at least $N_0 + 1$. However, as $H(u)$ is a subgraph of G, the Hadwiger number of G is also at least $N_0 + 1$, which is a contradiction.

Corollary. *Let $\eta^{**}(k)$ be the least possible Hadwiger number of a graph in which the minimal degree of a vertex is k. Then*

$$\lim_{k \to \infty} \eta^{**}(k) = \infty .$$

According to Lemma $r \geqq \frac{1}{2}k$, therefore if k tends to infinity, then so does r.

Now we shall study the function $\lambda_k(n)$ which denotes the maximal possible number of edges of a graph with n vertices and with the Hadwiger number k. This study was also suggested by V. G. Vizing [2]. In [3] it is conjectured that

$$\lambda_k(n) = (k - 1) n - \binom{k}{2}$$

for any two positive integers n and k, where $n \geqq k$. This conjecture was proved in [3] for k equal to 1, 2 and 3 and for an arbitrary $n \geqq k$. Here we shall not prove this conjecture, but we shall prove that the right-hand side of this equality is a lower estimate for $\lambda_k(n)$.

Theorem 2. *Let $\lambda_k(n)$ be the maximal possible number of edges of a graph with n vertices and with the Hadwiger number k. Then*

$$\lambda_k(n) \geqq (k - 1)\, n - \binom{k}{2}$$

for any two positive integers n and k such that $n \geqq k$.

Remark. For $n < k$, evidently any graph with n vertices has the Hadwiger number less than k.

Proof. Let k and n be two positive integers, $n \geqq k$. Let P_{n-k+1} be a simple path of the length $n - k + 1$, let K_{k-2} be a complete graph with $k - 2$ vertices (if $k \geqq 2$; for $k < 2$ the proof is trivial). Let P_{n-k+1} and K_{k-2} be vertex-disjoint. Let $G_k(n)$ be the graph obtained from P_{n-k+1} and K_{k-2} by joining each vertex of P_{n-k+1} with each vertex of K_{k-2} by an edge. We shall prove that $G_k(n)$ has the Hadwiger number k. If we contract P_{n-k+1} onto a graph consisting of one edge and its end vertices (this is possible because P_{n-k+1} is a path), the graph $G_k(n)$ will be contracted onto a complete graph with k vertices. Therefore

$$\eta(G_k(n)) \geqq k\,.$$

The Hadwiger number of P_{n-k+1} is evidently 2, the Hadwiger number of K_{k-2} is $k - 2$. As the vertex set of $G_k(n)$ is the union of the vertex sets of P_{n-k+1} and K_{k-2}, the Hadwiger number of $G_k(n)$ evidently cannot exceed the sum of Hadwiger numbers of these graphs, which is k. Therefore

$$\eta(G_k(n)) = k\,.$$

The graph $G_k(n)$ has n vertices and $(k - 1)\, n - \binom{k}{2}$ edges. We have proved that a graph with n vertices and $(k - 1)\, n - \binom{k}{2}$ edges can have the Hadwiger number equal to k, therefore

$$\lambda_k(n) \geqq (k - 1)\, n - \binom{k}{2}.$$

Now we shall return to the function $\eta^*(r)$.

Theorem 3. *Let $\eta^*(r)$ be the least possible Hadwiger number of a graph whose relative edge number is greater than or equal to r. Then*

$$\eta^*(r) \leqq [r] + 2$$

for each non-negative rational number r.

Proof. Let r be a non-negative rational number. Put $k = [r] + 2$. Now let n be an integer such that

$$n \geqq \frac{\binom{[r+2]}{2}}{[r] - r + 1}. \tag{4}$$

Construct the graph $G_k(n)$ from the proof of Theorem 2. This graph has n vertices and $([r] + 1)\, n - \binom{[r] + 2}{2}$ edges; its Hadwiger number is $[r] + 2$. The relative edge number of $G_k(n)$ is $[r] + 1 - \binom{[r] + 2}{2}/n$; according to (4) this is greater than or equal to r. We have a graph with the relative edge number greater than or equal to r and with the Hadwiger number $[r] + 2$. This means that

$$\eta^*(r) \leqq [r] + 2\,.$$

Thus we have obtained an upper estimate for $\eta^*(r)$. From the proof of Theorem 1 we see that

$$\eta^*(3r) \geqq \eta^*(r) + 1\,,$$

therefore $\eta^*(r)$ has the lower estimate $c \log r$, where c is a positive constant. Thus

$$c \log r \leqq \eta^*(r) \leqq [r] + 2\,.$$

Conjecture. $\eta^*(r) = [r] + 2$.

From the results of [3] it follows that this conjecture is true for $0 \leqq r < 3$.

References

[1] *C. Berge:* Théorie des graphes et ses applications. Paris 1958.

[2] *В. Г. Визинг:* Некоторые нерешенные задачи в теории графов. Успехи мат. наук 23 (1968), 117—134.

[3] *B. Zelinka:* On some graph-theoretical problems of V. G. Vizing. Čas. pěst. mat. *98* (1973), 56—66.

Author's address: 461 17 Liberec 1, Komenského 2 (Katedra matematiky Vysoké školy strojní a textilní).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

PERIODIC SOLUTIONS OF THE EQUATION $x''(t) + g(x(t)) = p(t)$

SVATOPLUK FUČÍK and VLADIMÍR LOVICAR, Praha

(Received February 5, 1974)

1. INTRODUCTION, NOTATION AND MAIN RESULTS

Let R_N denote the N-dimensional Euclidean space with the usual norm. Let I be a compact nonempty interval in R_1. The following notation will be used:

$C^k(I)$ will denote the space of the functions which are k-times continuously differentiable on I (at the end-points of the interval I we mean of course the one-sided derivatives). For the sake of simplicity we use the notation $C^0(I) = C(I)$.

$L_1(I)$ will denote the space of all measurable functions u such that $|u|$ is integrable in the sense of Lebesgue, with the usual norm

$$\|u\| = \int_I |u(t)| \, dt .$$

Definition. Let $p \in L_1(I)$ and let g be a continuous real-valued function defined on the whole real line R_1. A function $x \in C^1(I)$ is said to be *a solution in the sense of Carathéodory* of the equation

$$x''(t) + g(x(t)) = p(t) \tag{1.1}$$

on the interval I if for any $a, t \in I$ it holds

$$x(t) = x(a) + (t - a)\, x'(a) + \int_a^t (t - s)\,(p(s) - g(x(s)))\, ds \tag{1.2}$$

or equivalently

$$x(t) = x(a) + (t - a)\, x'(a) + \int_a^t \left(\int_a^\tau (p(s) - g(x(s)))\, ds\right) d\tau . \tag{1.2'}$$

It is easy to see that x is a solution of (1.1) in the sense of Carathéodory if and only if x' is absolutely continuous and satisfies the equation (1.1) for almost all $t \in I$. Analogously, if $p \in C(I)$ then for the solution x of (1.1) in the sense of Carathéodory we immediately obtain $x \in C^2(I)$ and in this case the function x satisfies the equation (1.1) at any point of the interval I.

For our convenience put $J = \langle 0, 1 \rangle$.

This paper contains the following results:

Theorem 1. *Let a, b, c, d be real numbers and let g be a continuous real-valued function defined on R_1 and such that*

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \frac{g(\xi)}{\xi} = +\infty . \tag{1.3}$$

Then the boundary value problem

$$\begin{gathered} x''(t) + g(x(t)) = p(t), \quad t \in J, \\ ax(0) + bx'(0) = 0, \quad cx(1) + dx'(1) = 0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

has for each $p \in L_1(J)$ infinite number of distinct solutions in the sense of Carathéodory.

Corollary 1. *Under the assumptions of Theorem 1 the boundary value problem (1.4) has for each $p \in C(J)$ infinite number of distinct solutions.*

Theorem 2. *Let the function g satisfy the assumptions of Theorem 1. Then for any right hand side $p \in L_1(J)$ the periodic problem*

$$\begin{gathered} x''(t) + g(x(t)) = p(t), \\ x(0) = x(1), \quad x'(0) = x'(1) \end{gathered} \tag{1.5}$$

has at least one solution in the sense of Carathéodory.

Corollary 2. *Under the assumptions of Theorem 2 the periodic problem (1.5) has at least one solution for each $p \in C(J)$.*

At first the authors believed the result obtained in Theorem 1 to be new. After the preliminary communication (see [6]) was published ŠTEFAN SCHWABIK informed us that the same result has been obtained by H. EHRMANN (see [4]), who used also essentially the same method of proof. Since the proof of Theorem 2 requires the same auxiliary lemmas we present here also Theorem 1. By the authors' best knowledge the assertion of Theorem 2 has not been published until now under such general assumptions. Several authors considered the case of a special right hand side (see e.g. [2]) or introduced some additional assumptions (see e.g. [5], [7], [8]). For instance, in [7] it is proved that the equation (1.1) with $g(\xi) = 2\xi^3$ has a periodic solution with the period 1 provided the function p satisfies the following conditions:

p is even on R_1,

p', p'' are continuous on R_1,

p has the period 1.

$\int_J p(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Note that the proofs of Corollaries can be obtained immediately from Theorems by applying the remark following Definition and thus they are omitted. The proofs of Theorems are based on the shooting method. Moreover, in the proof of Theorem 2 we use a certain fixed point theorem (see Lemma 9) the proof of which follows from the properties of Brouwer's topological degree of mapping (see e.g. [1]).

The authors are very much indebted to ŠTEFAN SCHWABIK for his advice, comments, bibliography and terminology remarks.

2. AUXILIARY LEMMAS

Let g be a function satisfying the assumptions of Theorem 1. For $h \in (0, 1\rangle$ and $\xi \in R_1$ define

$$g_h(\xi) = \frac{1}{2h} \int_{\xi-h}^{\xi+h} g(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,. \tag{2.1}$$

Obviously the functions g_h satisfy on R_1 locally the Lipschitz condition. Moreover, it is easy to see that there exist nonnegative functions γ_1, γ_2 on R_1 and positive numbers ξ_0, m such that

$$\gamma_1(\xi) \leqq \frac{g_h(\xi)}{\xi} \leqq \gamma_2(\xi)$$

for all $|\xi| > \xi_0$ and $h \in (0, 1\rangle$,

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \gamma_1(\xi) = +\infty\,,$$

$$\gamma_1(\xi) \geqq 1 \quad \text{for} \quad |\xi| \geqq \xi_0$$

and

$$|g_h(\xi)| \leqq m$$

for $|\xi| \leqq \xi_0$ and $h \in (0, 1\rangle$.

Denote by $M = M(\gamma_1, \gamma_2, \xi_0, m)$ the set of all functions f defined on R_1 and satisfying the following conditions:

(i) f is locally lipschitzian on R_1;

(ii) $\gamma_1(\xi) \leqq f(\xi)/\xi \leqq \gamma_2(\xi)$ for $|\xi| > \xi_0$;

(iii) $|f(\xi)| \leqq m$ for $|\xi| \leqq \xi_0$.

We shall consider the family of ordinary differential equations of the first order

$$v'(t) = h(t, v(t)), \tag{2.2$_{f,p}$}$$

where

$$v(t) = [x(t), y(t)],$$

$$h(t, v(t)) = [y(t),\ p(t) - f(x(t))],$$

$$f \in M, \quad p \in L_1(J).$$

In accordance with the definition of a solution in the sense of Carathéodory of the equation (1.1) on the interval $I \subset R_1$ we define that a continuous vector valued function $v_{f,p}(t) = [x_{f,p}(t), y_{f,p}(t)]$ is a solution of $(2.2)_{f,p}$ in the sense of Carathéodory on I if for arbitrary $a, t \in I$ it holds

$$x_{f,p}(t) = x_{f,p}(a) + \int_a^t y_{f,p}(s)\,ds,$$

$$y_{f,p}(t) = y_{f,p}(a) + \int_a^t (p(s) - f(x_{f,p}(s)))\,ds.$$

For $\xi \in R_1$ and $f \in M$ denote

$$G_f(\xi) = \int_0^\xi f(s)\,ds. \tag{2.3}$$

Lemma 1. *Let $v_{f,p} = [x_{f,p}, y_{f,p}]$ be a solution of $(2.2)_{f,p}$ (in the sense of Carathéodory) on the interval $I \subset J$. Then for any $a, t \in I$ it holds*

$$y_{f,p}^2(t) + 2G_f(x_{f,p}(t)) = y_{f,p}^2(a) + 2G_f(x_{f,p}(a)) + \\ + 2\int_a^t p(s)\,y_{f,p}(s)\,ds. \tag{2.4}$$

(The proof is trivial.)

Lemma 2. *Let G_f be a function defined by (2.3). Then there exists a constant $k \geqq 0$ such that the inequality*

$$G_f(\xi) \geqq \frac{\xi^2}{2} - k \tag{2.5}$$

holds for each $\xi \in R_1$ and $f \in M$.

Moreover, for $\xi \in R_1$ it is

$$(2.6) \qquad |G_f(\xi)| \leqq m\xi_0 + |\xi| \int_{\xi_0}^{|\xi|} \gamma_2(s)\,ds\,.$$

Proof. It follows from the definition of the set M that $f(s) \geqq s$ for $|s| \geqq \xi_0$ and $f \in M$. Hence for $|\xi| \geqq \xi_0$ we have

$$G_f(\xi) = \int_0^{\xi} f(s)\,ds = \int_0^{\xi_0 \operatorname{sgn} \xi} f(s)\,ds + \int_{\xi_0 \operatorname{sgn} \xi}^{\xi} f(s)\,ds \geqq \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi_0^2}{2} + \int_0^{\xi_0 \operatorname{sgn} \xi} f(s)\,ds$$

which implies (2.5) with

$$k = \frac{\xi_0^2}{2} + m\xi_0\,.$$

The proof of the other part of the assertion is analogous.

Under the assumption (i) in the definition of the set M there exists for an arbitrary initial value $u \in R_2$ a unique solution $v_{f,p,u}(t)$ (in the sense of Carathéodory) of the equation $(2.2)_{f \in M,p}$ satisfying $v_{f,p,u}(0) = u$ which is defined on the maximal interval $J_{f,p,u} \subset J$ with $0 \in J_{f,p,u}$ (see e.g. [3, Chapter II]). For $u \in R_2$ and $t \in J_{f,p,u}$ put

$$(2.7) \qquad V_{f,p}(t, u) = v_{f,p,u}(t)\,.$$

Lemma 3. *Let $p \in L_1(J)$ and $f \in M$. Then the function $V_{f,p}$ defined by the relation (2.7) is defined on $J \times R_2$ and is a continuous mapping from $J \times R_2$ into R_2.*

Proof. First let us show that the mapping $V_{f,p}$ is defined on $J \times R_2$ (i.e., $J_{f,p,u} = J$ for any $u \in R_2$, $f \in M$ and $p \in L_1(J)$). To this end it is sufficient to prove an appropriate apriori estimate for weak solutions of the equation $(2.2)_{f,p}$.

Let $v_{f,p} = [x_{f,p}, y_{f,p}]$ be a weak solution of $(2.2)_{f,p}$ on an interval $I \subset J$, $0 \in I$, which satisfies the initial condition $v_{f,p,u}(0) = u = [u_1, u_2]$. In virtue of Lemma 1 for any $t \in I$ it holds

$$(2.8) \qquad y_{f,p}^2(t) + 2G_f(x_{f,p}(t)) = u_2^2 + 2G_f(u_1) + 2\int_0^t p(s)\,y_{f,p}(s)\,ds\,.$$

Let us denote

$$(2.9) \qquad z_{f,p}(t) = \sup\{|y_{f,p}(s)|;\ s \in \langle 0, t\rangle\}\,, \quad t \in I\,.$$

Then we obtain from (2.8) and from Lemma 2

$$y_{f,p}^2(t) \leqq (u_2^2 + 2G_f(u_1) + 2k) + 2z_{f,p}(t)\left(\int_0^t |p(s)|\,ds\right)$$

for $t \in I$. This implies by an elementary calculation the estimate

$$\text{(2.10)} \qquad y_{f,p}^2(t) \leqq z_{f,p}^2(t) \leqq$$
$$\leqq (1-\varepsilon_0)^{-1}(u_2^2 + 2G_f(u_1) + 2k) + \varepsilon_0(1-\varepsilon_0)^{-1}\left(\int_0^t |p(s)|\,ds\right)^2$$

for $t \in I$ and $\varepsilon_0 \in (0, 1)$.

From (2.8), (2.10) and from Lemma 2 one can easily obtain also the estimate

$$\text{(2.11)} \qquad x_{f,p}^2(t) \leqq$$
$$\leqq (1 + (1-\varepsilon_0)^{-1})(u_2^2 + 2G_f(u_1) + 2k) + (1 + \varepsilon_0^{-1}(1-\varepsilon_0)^{-1})\left(\int_0^t |p(s)|\,ds\right)^2.$$

It follows from (2.10), (2.11) and [3, Chapter II] that the mapping $V_{f,p}$ is defined on $J \times R_2$. Continuity of $V_{f,p}$ follows from the assumption (i) in the definition of the set M.

Now let us denote (for $f \in M$ and $p \in L_1(J)$) by $d_{f,p}$ a function defined on R_2 by

$$\text{(2.12)} \qquad d_{f,p}(u) = \inf\{|V_{f,p}(t, u)|;\ t \in J\}.$$

Then it holds

Lemma 4. $\lim_{|u| \to \infty} d_{f,p}(u) = +\infty$ *uniformly with respect to $f \in M$ and p from any boudend subset of $L_1(J)$, i.e., for any bounded set $U \subset L_1(J)$ and arbitrary $K > 0$ there exists $\tau > 0$ such that $d_{f,p}(u) > K$ for each $|u| \geqq \tau$, $f \in M$ and $p \in U$.*

Proof. Let $U = \{p \in L_1(J);\ \|p\| \leqq c\}$ and let $v_{f,p} = [x_{f,p}, y_{f,p}]$ be a weak solution of $(2.2)_{f,p}$ on the interval J with $v_{f,p}(0) = u = [u_1, u_2]$. Then from (2.8) we obtain

$$\text{(2.13)} \qquad y_{f,p}^2(t) + 2\,G_f(x_{f,p}(t)) \geqq u_2^2 + 2\,G_f(u_1) - 2\,z_{f,p}(t)\int_0^t |p(s)|\,ds$$

for $t \in J$, where the function $z_{f,p}$ is defined by (2.9). Let $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ be fixed. Then from (2.10), (2.13) we have for any $\varepsilon_1 > 0$ and $f \in M$

$$\text{(2.14)} \qquad y_{f,p}^2(t) + 2\,G_f(x_{f,p}(t)) \geqq (1 - \varepsilon_1(1-\varepsilon_0)^{-1})(u_2^2 + 2\,G_f(u_1)) - K_2,$$

where

$$\text{(2.15)} \qquad K_2 = 2\,\varepsilon_1(1-\varepsilon_0)^{-1}\,k + (\varepsilon_1\varepsilon_0^{-1}(1-\varepsilon_0)^{-1} + \varepsilon_1^{-1})\,c^2.$$

Let $\varepsilon_1 > 0$ be fixed and such that

$$K_1 = (1 - \varepsilon_1(1 - \varepsilon_0)^{-1}) > 0 .$$

Further let us denote by δ_f the function defined on R_2 by

$$\delta_f([x, y]) = y^2 + 2\,G_f(x)\,, \quad [x, y] \in R_2 .$$

The relation (2.14) implies

$$\text{(2.16)} \qquad \delta_f(V_{f,p}(t, u)) \geqq K_1\, \delta_f(u) - K_2 \geqq K_1 u_1^2 + K_1 u_2^2 - K_1 k - K_2$$

for $u \in R_2$, $t \in J$, $f \in M$, $p \in U$.

Suppose that there exist $K > 0$, $U \subset L_1(J)$ a bounded set, $f_n \in M$, $p_n \in U$, $t_n \in J$, $u_n \in R_2$ such that $|u_n| \to \infty$ and

$$d_{f_n,p_n}(u_n) \leqq |V_{f_n,p_n}(t_n, u_n)| < K .$$

Since δ_f is continuous on R_2 we conclude that the sequence $\{\delta_{f_n}(V_{f_n,p_n}(t_n, u_n))\}$ is bounded which is a contradiction with (2.16).

Remark 1. Put

$$D_{f,p}(u) = \sup\,\{|V_{f,p}(t, u)|;\ t \in J\}$$

for $f \in M$, $p \in L_1(J)$ and $u \in R_2$. Then from (2.10), (2.11) and Lemma 2 the following inequality immediately follows:

$$|D_{f,p}(u)|^2 \leqq (1 + 2(1 - \varepsilon_0)^{-1}\left(u_2^2 + 2m\xi_0 + 2|u_1| \int_{\xi_0}^{|u_1|} \gamma_2(s)\,\mathrm{d}s + 2k\right) +$$
$$+ (1 + 2\varepsilon_0^{-1}(1 - \varepsilon)^{-1})\left(\int_0^1 |p(s)|\,\mathrm{d}s\right)^2 .$$

As usual, denote for an arbitrary nonzero complex number $z \in \mathbf{C}$

$$\operatorname{Arg} z = \left\{x \in R_1;\ e^{-ix} = \frac{z}{|z|}\right\}.$$

In the sequel we need the following.

Lemma 5. *Let X be a topological space and let F be a continuous complex valued function defined on $J \times X$ satisfying $F(t, u) \neq 0$ for an arbitrary $[t, u] \in J \times X$. Then for any $u \in X$ there exists a continuous real valued function ψ_u on J such that*

$$\psi_u(t) \in \operatorname{Arg} F(t, u)\,, \quad t \in J .$$

Moreover, for an arbitrary $u \in X$ the value

$$\Psi(u) = \omega_u(1) - \omega_u(0)$$

is independent of the choice of a continuous function ω_u on J with $\omega_u(t) \in \operatorname{Arg} F(t, u)$, $t \in J$, and the mapping Ψ is continuous on X.

Proof. The assertions of Lemma except possibly the continuity of the function Ψ are well-known from the classical complex analysis. Now we shall prove the continuity of Ψ. Let $u_0 \in X$ be fixed and let $a = \min\{|F(t, u_0)|;\ t \in J\}$. Let $\varepsilon > 0$ be arbitrary and choose $\eta \in (0, a)$ such that

$$2 \arcsin \frac{\eta}{a} < \varepsilon .$$

Then there exists a neighborhood $U(u_0, \eta) \subset X$ of the point u_0 such that $|F(t, u) - F(t, u_0)| < \eta$ for each $t \in J$ and $u \in U(u_0, \eta)$ (this is true in virtue of the continuity of F and the compactness of J). For an arbitrary $u \in U(u_0, \eta)$ there exists a continuous function $\psi_u(t) \in \operatorname{Arg} F(t, u)$, $t \in J$ such that

$$|\psi_u(0) - \psi_{u_0}(0)| < \arcsin \frac{\eta}{a}, \tag{2.17}$$

where ψ_{u_0} is an arbitrary continuous function on J such that $\psi_{u_0}(t) \in \operatorname{Arg} F(t, u_0)$, $t \in J$. We shall prove that

$$|\psi_u(t) - \psi_{u_0}(t)| < \arcsin \frac{\eta}{a}$$

for each $t \in J$ and $u \in U(u_0, \eta)$. Suppose that there exist $t_1 \in J$ and $u_1 \in U(u_0, \eta)$ such that $|\psi_{u_1}(t_1) - \psi_{u_0}(t_1)| \geqq \arcsin(\eta/a)$. With respect to (2.17) there exists $t_0 \in (0, t_1)$ such that $|\psi_{u_1}(t_0) - \psi_{u_0}(t_0)| = \arcsin(\eta/a)$ and thus

$$\begin{aligned} |F(t_0, u_1) - F(t_0, u_0)| &= \\ = \big|\, |F(t_0, u_1)| - |F(t_0, u_0)| \exp\left(-i(\psi_{u_0}(t_0) - \psi_{u_1}(t_0))\right)\big| &\geqq \\ \geqq |F(t_0, u_0)|\, |\sin(\psi_{u_0}(t_0) - \psi_{u_1}(t_0))| &\geqq \frac{\eta}{a} a = \eta \end{aligned}$$

which is a contradiction. So we have

$$|\Psi(u) - \Psi(u_0)| = |\psi_u(1) - \psi_u(0) + \psi_{u_0}(1) - \psi_{u_0}(0)| < 2 \arcsin \frac{\eta}{a} < \varepsilon$$

for an arbitrary $u \in U(u_0, \eta)$.

According to Lemma 4 there exists $r_0 > 0$ such that $|V_{f,p}(t, u)| \geqq 1$ for arbitrary $t \in J$, $|u| \geqq r_0$, $f \in M$ and $\|p\| \leqq \bar{q}$. Let us denote

$$X_{r_0} = \{u \in R_2;\ |u| \geqq r_0\}\ .$$

It follows from Lemma 5 that for any $f \in M$, $p \in L_1(J)$, $\|p\| \leqq \bar{q}$ and $u \in X_{r_0}$ there exists a continuous function $\varphi_{f,p,u}$ on the interval J such that

$$(2.18) \qquad V_{f,p}(t, u) = |V_{f,p}(t, u)|\,[\cos \varphi_{f,p,u}(t),\ -\sin \varphi_{f,p,u}(t)]$$

and the real valued function

$$(2.19) \qquad \Phi_{f,p}(u) = \varphi_{f,p,u}(1) - \varphi_{f,p,u}(0)$$

is continuous on X_{r_0}.

Lemma 6. *Let $p \in L_1(J)$. Then*

$$\lim_{|u| \to \infty} \Phi_{f,p}(u) = +\infty$$

uniformly with respect to $f \in M$.

Proof. Let $p_n \in C(J)$ be such a sequence that $\lim_{n\to\infty} \|p_n - p\| = 0$. Thus

$$\sup_{n=1,2,\ldots} \int_0^1 |p_n(s)|\, ds = \bar{q} < +\infty\ .$$

Let $u \in X_{r_0}$ and let $\varphi_{f,p_n,u}$ be a continuous real valued function defined on J such that (2.18) holds. Then it is easy to see that $\varphi_{f,p_n,u}$ is continuously differentiable on J and satisfies the differential equation

$$(2.20) \qquad \varphi'_{f,p_n,u}(t) = q_{f,p_n,u}(t, \varphi_{f,p_n,u}(t)) - r^{-1}_{f,p_n,u}(t)\, p_n(t) \cos \varphi_{f,p_n,u}(t)\ ,$$

where $q_{f,p_n,u}(t, \varphi) = \sin^2 \varphi + r^{-1}_{f,p_n,u}(t)\, f(r_{f,p_n,u}(t) \cos \varphi) \cos \varphi$ and $r_{f,p_n,u}(t) = |V_{f,p_n}(t, u)|$ (hence $r_{f,p_n,u}(t) \geqq d_{f,p_n}(u)$), $(t \in J,\ \varphi \in R_1)$. Further, let us denote by $\varkappa_{f,p_n,u}$ the function defined by

$$\varkappa_{f,p_n,u}(\psi) = \inf\{s^{-1} f(s \cos \psi) \cos \psi;\ s \geqq d_{f,p_n}(u)\}\ .$$

An easy calculation shows that also the function $\varkappa_{f,p_n,u}$ is continuous. For $d_{f,p_n}(u) \,.\, |\cos \psi| \geqq \xi_0$ we have by the above

$$\varkappa_{f,p_n,u}(\psi) \geqq \gamma_1(d_{f,p_n}(u)\, |\cos \psi|) \cos^2 \psi\ .$$

If $d_{f,p_n}(u)\, |\cos \psi| \leqq \xi_0$ then for $s \in \langle d_{f,p_n}(u), |\cos \psi|^{-1}\, \xi_0 \rangle$ it holds $|s^{-1} f(s \cos \psi) \,.\, \cos \psi| \leqq m\, d^{-1}_{f,p_n}(u)$, where $m > 0$ is a constant from the condition (iii) in the definition of the set M. Since for $s \geqq \xi_0 |\cos \psi|^{-1}$ it is $s^{-1} f(s \cos \psi) \cos \psi \geqq \cos^2 \psi \geqq 0$ we conclude that for $d_{f,p_n}(u)\, |\cos \psi| \leqq \xi_0$ it holds $\varkappa_{f,p_n,u}(\psi) \geqq -m\, d^{-1}_{f,p_n}(u)$.

Thus we obtain the following relations:

a) For $d_{f,p_n}(u)\,|\cos\psi| \leqq \xi_0$ we have

$$\sin^2\psi + \varkappa_{f,p_n,u}(\psi) \geqq 1 - \xi_0^2\, d_{f,p_n}^{-2}(u) - m\, d_{f,p_n}^{-1}(u)\,;$$

b) For $d_{f,p_n}(u)\,|\cos\psi| \geqq \xi_0$ we have

$$\sin^2\psi + \varkappa_{f,p_n,u}(\psi) \geqq 1\,.$$

In other words, there exist $r_1 \geqq r_0$ and $c > 0$ such that

$$\sin^2\psi + \varkappa_{f,p_n,u}(\psi) - c \geqq c > 0$$

for each $|u| \geqq r_1$, $\psi \in R_1$, $f \in M$ and $n = 1, 2, \ldots$. Let us compare the differential equation (2.20) with the equation

$$\psi'_{f,p_n,u}(t) = \sin^2\psi_{f,p_n,u}(t) + \varkappa_{f,p_n,u}(\psi_{f,p_n,u}(t)) - c - d_{f,p_n}^{-1}(u)\,|p_n(t)| \tag{2.21}$$

with the initial condition $\psi_{f,p_n,u}(0) = \varphi_{f,p_n,u}(0)$. An elementary comparison theorem from the theory of differential equations yields

$$\varphi_{f,p_n,u}(1) - \varphi_{f,p_n,u}(0) \geqq \psi_{f,p_n,u}(1) - \psi_{f,p_n,u}(0)\,. \tag{2.22}$$

However, from (2.21) we have the simple relation

$$\int_{\psi_{f,p_n,u}(0)}^{\psi_{f,p_n,u}(1)} \frac{d\psi}{\sin^2\psi + \varkappa_{f,p_n,u}(\psi) - c} =$$
$$= 1 - \int_0^1 \frac{d_{f,p_n}^{-1}(u)\,|p_n(t)|}{\sin^2\psi_{f,p_n,u}(t) + \varkappa_{f,p_n,u}(\psi_{f,p_n,u}(t)) - c}\,dt$$

which implies

$$\int_{\psi_{f,p_n,u}(0)}^{\psi_{f,p_n,u}(1)} \frac{d\psi}{\sin^2\psi + \varkappa_{f,p_n,u}(\psi) - c} \geqq 1 - c^{-1}\, d_{f,p_n}^{-1}(u) \left(\int_0^1 |p_n(t)|\,dt\right) \geqq \tag{2.23}$$
$$\geqq 1 - c^{-1}\, d_{f,p_n}^{-1}(u)\,\bar{q}$$

for $|u| \geqq r_1$, $f \in M$ and $n = 1, 2, \ldots$. Since $\varkappa_{f,p_n,u}$ and sin are 2π – periodic functions, it follows from (2.23) that

$$\psi_{f,p_n,u}(1) - \psi_{f,p_n,u}(0) \geqq 2\pi(1 - c^{-1}\, d_{f,p_n}^{-1}(u)\,\bar{q})\,. \tag{2.24}$$
$$\cdot \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sin^2\psi + \varkappa_{f,p_n,u}(\psi) - c}\right)^{-1} - 2\pi$$

for arbitrary $f \in M$, $|u| \geqq r_1$ and $n = 1, 2, \ldots$. Hence we shall show that for any $\varepsilon > 0$ there exists $r_2 > r_1$ such that

$$(2.25) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sin^2 \psi + \varkappa_{f,p_n,u}(\psi) - c} < \varepsilon$$

provided $|u| \geqq r_2$, $f \in M$ and $n = 1, 2, \ldots$. Let $\varepsilon > 0$ be arbitrary but fixed. There exist $\eta > 0$ and $\xi_1 > \xi_0$ such that

$$(2.26) \quad \int_{\{\psi \in (0,2\pi);\, |\cos\psi| < \tau\}} \frac{d\psi}{\sin^2 \psi + \varkappa_{f,p_n,u}(\psi) - c} \leqq \int_{\{\psi \in (0,2\pi);\, |\cos\psi| < \tau\}} \frac{1}{c}\, d\psi < \frac{\varepsilon}{2}$$

for $|u| \geqq r_1$, $f \in M$, $n = 1, 2, \ldots$, and

$$(2.27) \qquad \eta^2 \gamma_1(\xi_1) - c \geqq \frac{4\pi}{\varepsilon}$$

Thus for $\psi \in (0, 2\pi)$ such that $|\cos \psi| \geqq \eta$, for $|u| \geqq r_1$ with $d_{f,p_n}(u) \geqq \eta^{-1}\xi_1$ and for $n = 1, 2, \ldots$ we have $\sin^2 \psi + \varkappa_{f,p_n,u}(\psi) - c \geqq \eta^2 \gamma_1(\xi_1) - c$ and hence

$$(2.28) \qquad \int_{\{\psi \in (0,2\pi);\, |\cos\psi| \geqq \eta\}} \frac{d\psi}{\sin^2 \psi + \varkappa_{f,p_n,u}(\psi) - c} \leqq \frac{2\pi}{\eta^2 \gamma_1(\xi_1) - c}.$$

Let $r_2 \geqq r_1$ be such that $d_{f,p_n}(u) \geqq \eta^{-1}\xi_1$ for $n = 1, 2, \ldots$, $f \in M$ and $|u| \geqq r_2$. The relations (2.25)–(2.28) imply

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sin^2 \psi + \varkappa_{f,p_n,u}(\psi) - c} < \varepsilon$$

for arbitrary $n = 1, 2, \ldots$, $f \in M$ and $|u| \geqq r_2$, which together with (2.24) and (2.22) implies:

For an arbitrary $K > 0$ there exists $r_2 > 0$ such that

$$\Phi_{f,p_n}(u) > K \quad \text{for} \quad f \in M\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,, \quad \text{and} \quad |u| \geqq r_2\,.$$

Now it is easy to see that to complete the proof it is sufficient to show that $\lim_{n\to\infty} \Phi_{f,p_n}(u) = \Phi_{f,p}(u)$ for each $|u| \geqq r_0$ and $f \in M$. This fact follows from Lemma 5 for if $|u| \geqq r_0$, $f \in M$ then the mapping

$$[t, p] \mapsto V_{f,p}(t, u)$$

is continuous and non-vanishing on $J \times L_1(J)$ and thus (with respect to the assertion of Lemma 5) the mapping

$$p \mapsto \Phi_{f,p}(u)$$

is continuous on $L_1(J)$.

Lemma 7. *Let $\varrho > r_0$. Denote*

$$K(\varrho) = \sup \{D_{f,p}(u);\ f \in M,\ p \in L_1(J),\ \|p\|_{L_1(J)} < \varrho,\ u \in R_2,\ r_0 \leqq |u| \leqq \varrho\}$$

and $\bar{\gamma}_2(\varrho) = \max \{\gamma_2(s);\ |s| \leqq K(\varrho)\}$. *Then*

$$\Phi_{f,p}(u) \leqq 1 + \bar{\gamma}_2(\varrho) + m + \int_0^1 |p(s)| \, ds$$

provided $f \in M,\ r_0 \leqq |u| \leqq \varrho,\ \int_0^1 |p(s)| \, ds < \varrho$.

Proof. Let $p_n \in C(J)$ be such that $\lim_{n\to\infty} \|p_n - p\| = 0$. Let the notation introduced in (2.20) be observed. Then

$$q_{f,p_n,u}(t, \varphi) - r^{-1}_{f,p_n,u}(t)\, p_n(t) \cos \varphi \leqq$$
$$\leqq 1 + \gamma_2(d_{f,p_n}(u)\, |\cos \varphi|) + \frac{m}{d_{f,p_n}(u)} + \frac{|p_n(t)|}{d_{f,p_n}(u)} \leqq$$
$$\leqq 1 + \bar{\gamma}_2(\varrho) + m + |p_n(t)| \, .$$

Comparing the differential equation (2.20) with the initial problem

$$\zeta'_{f,p_n,u}(t) = 1 + \bar{\gamma}_2(\varrho) + m + |p_n(t)|$$
$$\zeta_{f,p_n,u}(0) = \varphi_{f,pn,u}(0)$$

we conclude

$$1 + \bar{\gamma}_2(\varrho) + m + \int_0^1 |p_n(t)| \, dt = \zeta_{f,p_n,u}(1) - \zeta_{f,p_n,u}(0) \geqq$$
$$\geqq \varphi_{f,p_n,u}(1) - \varphi_{f,p_n,u}(0) = \Phi_{f,p_n}(u) \, .$$

Letting n tend to infinity we obtain our assertion.

3. BOUNDARY VALUE PROBLEM

Let $p \in L_1(J)$ be fixed. Let a, b, c, d be real numbers and consider the boundary value problem

$$(3.1)_f \qquad x''(t) + f(x(t)) = p(t) \, ,$$
$$ax(0) + bx'(0) = 0 \, , \quad cx(1) + dx'(1) = 0 \, ,$$

where $f \in M$.

We shall suppose that both vectors $\omega_1 = [a, b]$, $\omega_2 = [c, d]$ are nonzero (in the other cases the existence of $(3.1)_f$ a solution of in the sense of Carathéodory is obvious). Let $\psi_1, \psi_2 \in R_1$ satisfy

$$\omega_1 = |\omega_1| [\cos \psi_1, \ -\sin \psi_1], \quad \omega_2 = |\omega_2| [\cos \psi_2, \ -\sin \psi_2].$$

It is easy to see that the set of all solutions (in the sense of Carathéodory) of the boundary value problem $(3.1)_f$ equals to the set of all solutions $x(t)$ of the initial problem

$$(3.2)_f \qquad x''(t) + f(x(t)) = p(t), \quad [x(0), x'(0)] = u = |u| [\cos \varphi_1, \ -\sin \varphi_1]$$

such that ($V_{f,p}(t, u)$ is defined by the relation (2.7))

$$V_{f,p}(1, u) = |V_{f,p}(1, u)| [\cos \varphi_2, \ -\sin \varphi_2],$$

where φ_1, φ_2 satisfy the relations

$$\varphi_1 = \psi_1 + (2n_1 + 1)\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = \psi_2 + (2n_2 + 1)\frac{\pi}{2}$$

for some integers n_1, n_2.

Let r_0 be a positive number defined above Lemma 6.

Lemma 8. *There exists a positive integer n_0 with the following property: For each $n \geqq n_0$ and $f \in M$ there exists $s_{n,f} \geqq r_0$ such that if $f \in M$ then $(3.1)_f$ has a solution $x_{n,f,p}$ (in the sense of Carathéodory) with*

$$[x_{n,f,p}(0), \ x'_{n,f,p}(0)] = s_{n,f}\left[\cos\left(\psi_1 + \frac{\pi}{2}\right), \ -\sin\left(\psi_1 + \frac{\pi}{2}\right)\right] = u_{s_n,f}$$

and it is $\Phi_{f,p}(u_{s_n,f}) = \psi_1 - \psi_2 + n\pi$, $n \geqq n_0$, $f \in M$.

Proof. Set $u_s = s[\cos(\psi_1 + \frac{1}{2}\pi), \ -\sin(\psi_1 + \frac{1}{2}\pi)]$. The function $s \mapsto \Phi_{f,p}(u_s)$ is defined and continuous on $\langle r_0, \infty)$ and it is

$$V_{f,p}(1, u_s) = |V_{f,p}(1, u_s)| \left[\cos\left(\psi_1 + \frac{\pi}{2} + \Phi_{f,p}(u_s)\right), \quad -\sin\left(\psi_1 + \frac{\pi}{2} + \Phi_{f,p}(u_s)\right)\right].$$

This means (with respect to the note before Lemma) that any u_s for which $\Phi_{f,p}(u_s) = \psi_1 - \psi_2 + n\pi$ (n is an integer) defines a solution in the sense of Carathéodory of the boundary value problem $(2.29)_f$.

Let n_0 be such an integer that $\Phi_{f,p}(u_{r_0}) < \psi_1 - \psi_2 + n_0\pi$ for each $f \in M$ (this is possible according to Lemma 7). Since $\lim_{s \to \infty} \Phi_{f,p}(u_s) = \infty$ uniformly with respect to $f \in M$, for each $n \geqq n_0$ and $f \in M$ there exists $u_{s_n,f}$ such that

$$\Phi_{f,p}(u_{s_n,f}) = \psi_1 - \psi_2 + n\pi.$$

Proof of Theorem 1. Let n_0 be the positive integer the existence of which is guaranteed by Lemma 8. Let $n \geqq n_0$ be fixed. Then for each g_h defined by (2.1) there exists a solution $x_{n,g_h,p}$ of $(2.29)_{g_h}$ satisfying

$$[x_{n,g_h,p}(0),\ x'_{n,g_h,p}(0)] = u_{s_n,g_h}\,,$$

$$\Phi_{g_h,p}(u_{s_n,g_h}) = \psi_1 - \psi_2 + n\pi\,.$$

With respect to the assertion of Lemma 7 the set $\{u_{s_n,g_h}\}_{h\in(0,1)}$ is bounded. Now from Remark 1 it follows that $\{x_{n,g_h,p}\}_{h\in(0,1)}$ is a bounded set in the space $C^1(J)$. Thus there exists a sequence $h_k \searrow 0$ such that

$$x_k = x_{n,g_{h_k},p} \to x \quad \text{in} \quad C(J)$$

and

$$u_k = u_{s_n,g_{h_k}} \to u \quad \text{in} \quad R_2\,.$$

Moreover, the functions $s \mapsto g_{h_k}(x_k(s))$ are bounded independently of $k = 1, 2, \ldots$ and $\lim_{k\to\infty} g_{h_k}(x_k(s)) = g(x(s))$ for each $s \in J$. If in the relation

$$x_k(t) = [u_1]_k + t[u_2]_k + \int_0^t (t-s)\,(p(s) - g_{h_k}(x_k(s)))\,\mathrm{d}s$$

k tends to infinity we obtain (using Lebesgue's Dominated Convergence Theorem) that $x \in C^1(J)$ and this verifies (1.2) with $a = 0$ and $I = J$.

The proof of Theorem 1 is complete.

4. PERIODIC PROBLEM

If $K \subset R_N$ is a compact set denote by $G_\infty(K)$ the unbounded component of the et $R_N \setminus K$.

Lemma 9. *Let $F : R_N \to R_N$ be a continuous mapping defined on R_N. Let $\mathfrak{M}$ be a compact subset of R_N. Suppose*

a) $0 \notin \mathfrak{M}$,

b) $0 \notin G_\infty(\mathfrak{M})$,

c) *for each $u \in \mathfrak{M}$ it is*

$$F(u) = \frac{(F(u), u)}{(u, u)}\,u\,,$$

where $(.,.)$ denotes the usual inner product in R_N.

Then there exists at least one point $x_0 \in R_N$ such that $F(x_0) = x_0$.
(Note that from the assumption b) it immediately follows that $\mathfrak{M}$ is nonempty.)

Proof. Let us denote

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{u \in \mathfrak{M}\,;\ \ F(u) = \frac{(F(u), u)}{(u, u)}\, u\,,\ \ (F(u), u) \geqq (u, u)\right\},$$

$$\mathfrak{M}_2 = \left\{u \in \mathfrak{M}\,;\ \ F(u) = \frac{(F(u), u)}{(u, u)}\, u\,,\ \ (F(u), u) \leqq (u, u)\right\}.$$

If $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \neq \emptyset$ then F has clearly a fixed point in $\mathfrak{M}$. Hence let us suppose that $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = \emptyset$.

First let us show that $0 \notin G_\infty(\mathfrak{M}_j)$ at least for one $j = 1, 2$. Indeed, let U be such a component of the set $R_N \setminus \mathfrak{M}$ which contains 0. Since $\partial U \subset \mathfrak{M}$, $\partial U = H_1 \cup H_2$, where $H_j = \partial U \cap \mathfrak{M}_j$, $j = 1, 2$. If $0 \in G_\infty(\mathfrak{M}_j)$ $(j = 1, 2)$ then $0 \in G_\infty(H_j)$ $(j = 1, 2)$ and hence there exist continuous functions v_j on J with values in R_N such that $v_j(0) = 0$, $v_j(t) \notin H_j$ for $t \in J$ and $|v_j(1)| > \sup\{|u|;\ u \in \mathfrak{M}\}$ $(j = 1, 2)$ and, moreover, $v_1(1) = v_2(1) = v$. Let us define a function h from $J \times \partial U$ into $R_N \setminus \{0\}$ by

$$h(t, u) = \begin{cases} u - v_1(t) & t \in J\,, \quad u \in H_1 \\ u - v_2(t) & t \in J\,, \quad u \in H_2\,. \end{cases}$$

Then h is a homotopy in $R_N \setminus \{0\}$ between the identity mapping E and the mapping $E - v$ and hence by the well-known theorem from the theory of Brouwer's topological degree (see e.g. [1]) it is $\mathrm{d}(E, U, 0) = \mathrm{d}(E - v, U, 0) = 0$ which is a contradiction with the assumption $0 \notin G_\infty(\mathfrak{M})$. Let us suppose for the sake fo brevity that $0 \notin G_\infty(\mathfrak{M}_1)$ (the other case may be proved in the same way). Let V be a component of the set $R_N \setminus \mathfrak{M}_1$ for which $0 \in V$. Let us define the mapping h_1 from $J \times \partial V$ into $R_N \setminus \{0\}$ by

$$h_1(t, u) = tu - (1 - t)(u - F(u))\,.$$

It is easy to see that h_1 is a homotopy in $R_N \setminus \{0\}$ between the mappings E and $F - E$ and hence $\mathrm{d}(F - E, V, 0) = \mathrm{d}(E, V, 0) = 1$. Since Brouwer's degree of the mapping $F - E$ is nonzero there exists $u_0 \in V$ such that $F(u_0) = u_0$.

Proof of Theorem 2. Let g satisfy locally the Lipschitz condition. Let us denote by F the mapping from R_2 into R_2 defined by $F(u) = V_{g,p}(1, u)$. The mapping F is continuous on R_2. Since $\lim_{|u| \to \infty} \Phi_{g,p}(u) = +\infty$ there exists $\varrho > r_0$ such that

$$\inf\{\Phi_{g,p}(u);\ |u| = \varrho\} - \sup\{\Phi_{g,p}(u);\ |u| = r_0\} \geqq 2\pi\,.$$

Further let us set

$$\mathfrak{M} = \left\{u \in R_2;\ r_0 \leqq |u| \leqq \varrho \ \text{ and }\ F(u) = \frac{(F(u), u)}{(u, u)}\, u\right\}.$$

It is clear that $\mathfrak{M}$ is a compact subset of R_2 and the assumptions a) and c) of Lemma 9 are satisfied. Let us show that $0 \notin G_\infty(\mathfrak{M})$. Let v be an arbitrary continuous function from J into R_2 such that $v(0) = 0$ and $|v(1)| > \varrho$. Let us set $t_1 = \sup\{t \in J; |v(t)| = r_0\}$, $t_2 = \inf\{t \in J;\ t > t_1,\ |v(t)| = \varrho\}$. Then for $t \in \langle t_1, t_2\rangle$ it is $r_0 \leqq |v(t)| \leqq \varrho$. The function $t \mapsto \Phi_{g,p}(v(t))$ is continuous on $\langle t_1, t_2\rangle$, $\Phi_{g,p}(v(t_2)) - \Phi_{g,p}(v(t_1)) \geqq 2\pi$ and hence there exists $t_0 \in \langle t_1, t_2\rangle$ and an integer n_0 such that $\Phi_{g,p}(v(t_0)) = 2\pi n_0$. If $v(t_0) = |v(t_0)|\,[\cos\varphi_0, -\sin\varphi_0]$; then $F(v(t_0)) = |F(v(t_0))| \,.\, [\cos(\varphi_0 - \Phi_{g,p}(v(t_0))), -\sin(\varphi_0 - \Phi_{g,p}(v(t_0)))] = |F(v(t_0))|\,|v(t_0)|^{-1}\,v(t_0)$ and so $v(t_0) \in \mathfrak{M}$.

Thus every continuous curve connecting 0 and a point outside of $\mathfrak{M}$ with the norm at least ϱ intersects the set $\mathfrak{M}$. This fact implies $0 \notin G_\infty(\mathfrak{M})$.

According to the assertion of Lemma 9, the mapping F has at least one fixed point which proves Theorem 2 in the case of locally lipschitzian function g. If g is a continuous function we can use the same procedure as in the end of Section 3.

References

[1] *L. Bers, Topology.* Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University 1956—57.

[2] *L. Cesari,* Functional Analysis and periodic solutions of nonlinear differential equations, Contributions to differential equations, *I,* 1963, 149—187.

[3] *E. A. Coddington - N. Levinson,* Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill Book Comp. Inc. York—Toronto—London 1955, Russian translation Moscow 1958.

[4] *H. Ehrmann,* Über die Existenz der Lösungen von Randwertaufgaben bei gewöhnlicher nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Annalen *134,* 1957, 167—194.

[5] *H. Ehrmann,* Nachweis periodischer Lösungen bei gewissen nichtlinearen Schwingungsdifferentialgleichungen, Arch. Rat. Mech. Anal. *1,* 1957/58, 124—138.

[6] *S. Fučík - V. Lovicar,* Boundary value and periodic problem for the equation $x''(t) + g(x(t)) = p(t)$, Comment. Math. Univ. Carolinae *15,* 1974, 351—355 (preliminary communication).

[7] *A. M. Micheletti,* Le soluzioni periodiche dell' equazione differenziale non lineare $x''(t) + 2\,x^3(t) = f(t)$, Ann. Univ. Ferrara *12,* 1967, 103—119.

[8] *G. R. Morris,* A differential equation for undamped forced nonlinear oscillation, Proc. Cambridge Phl. Soc. *51,* 1955, p. 297, *54,* 1958, p. 426, *62,* 1965, p. 133, *61,* 1965, p. 157.

Authors' addresses: Svatopluk Fučík, 186 00 Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta UK); Vladimír Lovicar, 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

A REMARK ON TRANSITIVITY OF OPERATOR ALGEBRAS

JAROSLAV ZEMÁNEK, Praha

(Received February 15, 1974)

Let H be a Hilbert space, $B(H)$ the algebra of all bounded linear operators in H, and $\mathfrak{A}$ a C*-subalgebra strongly dense in $B(H)$. If an operator $B \in B(H)$, a finite set of vectors $x_1, \ldots, x_n$ in H, and a number $\varepsilon > 0$ are arbitrarily given then by the definition of the strong operator topology there is an element $A \in \mathfrak{A}$ such that $|Ax_i - Bx_i| < \varepsilon$ for $i = 1, \ldots, n$. The Kaplansky density theorem (see [2], p. 43) asserts that A can be chosen with $|A| \leqq |B|$. On the other hand, it follows from a result proved here that there exists an operator $C \in \mathfrak{A}$ such that $|C| \leqq |B| + \varepsilon$ only, but $Cx_i = Bx_i$ for $i = 1, \ldots, n$. Clearly for this purpose it will suffice to suppose $x_1, \ldots, x_n$ orthonormal, and we shall do so henceforth.

Given another set of vectors $y_1, \ldots, y_n$ there are, of course, operators in $B(H)$ transforming x_i into y_i for $i = 1, \ldots, n$. The norm of any such operator must be clearly $\geqq \beta$ where

$$\beta = \sup |\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n|$$

is taken over all complex λ_j with $|\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2 = 1$. It is obvious that the operator V defined by the formula

$$Vz = (z, x_1)\, y_1 + \ldots + (z, x_n)\, y_n\,, \quad z \in H$$

has norm $|V| = \beta$ and satisfies $Vx_i = y_i$ for $i = 1, \ldots, n$. However, V need not lie in $\mathfrak{A}$. We shall show in Theorem 2 that, for each $\varepsilon > 0$, there exists an operator T in $\mathfrak{A}$ such that $Tx_i = y_i$ for $i = 1, \ldots, n$, and $|T| \leqq \beta + \varepsilon$. Clearly this estimate is the best possible. Transitivity of strongly dense C*-algebras has been proved first by R. V. KADISON [3]. In the present remark, we use a method suggested for that purpose by V. PTÁK [5], obtaining thereby a significant simplification of the proof as well as an improvement of the estimate in Dixmier's book [1], p. 43–44.

The case $n = 1$ has been solved by V. Pták [5] and the general case goes similarly. It is based on the Pták Induction Theorem recently obtained in [4]; see also [5], [6] where further important applications to various problems of analysis are described.

For the present remark a somewhat special version of the induction theorem will be quite sufficient. It is formulated as Theorem 1 below after some necessary definitions.

If (E, d) is a metric space and $x \in E$, we denote by $U(x, r)$ the set $U(x, r) = \{y \in E; d(y, x) \leqq r\}$, r being a positive number. Let $R = \{r; 0 < r < t\}$ be an interval with $t > 0$ fixed. Assume that for each $r \in R$ a set $W(r) \subset E$ is given and put

$$W(0) = \bigcap_{s>0} (\bigcup_{r \leqq s} W(r))^{-} .$$

It can be easily seen that $W(0)$ is in fact the set of those $x \in E$ for which there are a sequence $r_n \to 0$ and points $x_n \in W(r_n)$ with $x_n \to x$. In this situation we can state

Theorem 1. *Let (E, d) be complete. Let $0 < k < 1$ be fixed. Suppose the implication*

$$x \in W(r) \Rightarrow U(x, r) \cap W(kr) \neq \emptyset$$

to be true for any $r \in R$. If at least one of the sets $W(r)$, $r \in R$ is non-void, then so is $W(0)$.

The proof is straightforward and can be found in any of [4], [5], [6]. Now we can state

Theorem 2. *Let $\mathfrak{A}$ be a strongly dense C^*-subalgebra of $B(H)$ Let $x_1, \ldots, x_n$ be orthonormal vectors and let $y_1, \ldots, y_n$ be given vectors in H; denote by β the lowest possible norm of an operator in $B(H)$ taking x_i into y_i for $i = 1, \ldots, n$. Then, for each $\varepsilon > 0$, there exists an operator C in $\mathfrak{A}$ such that $Cx_i = y_i$ for $i = 1, \ldots, n$, and $|C| \leqq \beta + \varepsilon$.*

Proof. Clearly we may assume $\beta = 1$. Let $\varepsilon > 0$ be given. Put $k = \varepsilon/(1 + \varepsilon)$, and for each $0 < r < 1$ construct a set $W(r)$ in $\mathfrak{A}$ as follows

$$W(r) = \{T \in \mathfrak{A};\ |T| \leqq (1 + \varepsilon)(1 - r),\ |Tx_i - y_i| < r/n \text{ for } i = 1, \ldots n\} .$$

We have to verify the implication assumed in Theorem 1. Hence take a $T \in W(r)$. Define an operator S by the formula

$$Sz = (z, x_1)(y_1 - Tx_1) + \ldots + (z, x_n)(y_n - Tx_n), \quad z \in H .$$

Then $S \in B(H)$, $|S| \leqq r$, and $Sx_i = y_i - Tx_i$. By the Kaplansky density theorem there is a $Q \in \mathfrak{A}$ such that $|Q| \leqq r$ and $|Qx_i - Sx_i| < kr/n$ for $i = 1, \ldots, n$. Then the sum $T + Q$ lies in $\mathfrak{A} \cap U(T, r)$; moreover it belongs to $W(kr)$ since

$$|T + Q| \leqq |T| + |Q| \leqq (1 + \varepsilon)(1 - r) + r = (1 + \varepsilon)(1 - kr)$$

and

$$|(T + Q)x_i - y_i| \leqq |Tx_i - y_i + Sx_i| + |Qx_i - Sx_i| < 0 + kr/n = kr/n$$

for $i = 1, \ldots, n$.

Also $W(k)$ is non-void since the operator V can be approximated, in virtue of the Kaplansky density theorem again, by an element $W \in \mathfrak{A}$ of norm not exceeding 1 in such a way that $|Wx_i - Vx_i| < k/n$, $i = 1, \ldots, n$. In view of $(1 + \varepsilon)(1 - k) = 1$ and $Vx_i = y_i$, this W belongs to $W(k)$.

By Theorem 1 the set $W(0)$ is non-void, and any element $C \in W(0)$ is clearly a solution. Thus the theorem is proved.

References

1] *J. Dixmier:* Les C*-algèbres et leurs représentations, Paris 1964.

2] *J. Dixmier:* Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (Algèbres de von Neumann), Paris 1969.

[3] *R. V. Kadison:* Irreducible operator algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. USA *43* (1957), 273—276.

[4] *V. Pták:* Deux théorèmes de factorisation, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris *278* (1974), sér. A, 1091—1094.

[5] *V. Pták:* A theorem of the closed graph type, Manuscripta Math. *13* (1974), 109—130.

[6] *V. Pták:* A quantitative refinement of the closed graph theorem, Czech. Math. J. *24* (1974), 503—506.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25, ČSSR (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

SVATOPLUK FUČÍK (Сватоплук Фучик), Прага

(Поступило в редакцию 5. III. 1974 г.)

Статья является расширенным текстом доклада который автор прочитал на 4-ом чехословацко-советском совещании по теме „Применение функциональных методов и методов теории функций к проблемам математической физики". Совещание состоялось в зале Ректората Карлова университета в Праге, 27. XI. – 30. XI. 1973 г.

В этой статье дается информация о результатах группы математиков работающих на кафедре математического анализа Карлова университета в Праге и группы математиков работающих в отделении дифференциальных уравнений в частных производных Математического института чехословацкой академии наук. Эти группы работают на разных семинарах на кафедре и на семинаре И. Нечаса, в математическом институте.

В докладе не приведен полный список литературы по докладываемым проблемам и для простоты изложения результаты не формулированы в полной общности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи о существовании решений нелинейных интегральных уравнений и задачи о существовании решений краевых задач нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных связаны с исследованием нелинейных отображений между пространствами Банаха. В последние годы внимание ряда математиков привлек один специальный класс нелинейных операторов — монотонные операторы. Метод монотонных операторов является очень эффективным в теории существования решений нелинейных дифференциальных уравнений.

Прежде всего напомним основное определение и фундаментальный результат о монотонных операторах.

Оператор F (линейный или нелинейный) определенный на пространстве Банаха E, значения которого лежат в сопряженном пространстве E^*, называется *монотонным* на E, если для всех $x_1, x_2 \in E$ имеет место неравенство

$$(x_1 - x_2,\ F(x_1) - F(x_2)) \geqq 0 \tag{1.1}$$

((x, y) есть значение ограниченного линейного функционала $y \in E^*$ в точке $x \in E$).

Теорема 1. *Пусть в рефлексивном пространстве Банаха E задан непрерывный монотонный оператор F, удовлетворяющий условию*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{(x, F(x))}{\|x\|} = +\infty\,. \tag{1.2}$$

Тогда оператор F отображает пространство E на E^*.

Теорема 1 обобщается в следующих направлениях:

А) Предположение непрерывности ослабляется новыми типами непрерывности, например непрерывностью из сильной топологии пространства E в слабую топологию сопраженного пространства E^* (так называемая деминепрерывность), и другие — см. напр. [2, 6, 25].

Б) Предпологается что отображение F определено только на плотном множестве пространства E (см. напр. [2, 25]).

В) Определяются новые типы операторов которые обобщают класс монотонных отображений, напр. [32] и другие.

Во всех этих обобщениях предпологается, что отображения удовлетворяют условию (1.2). Такие отображения называются коэрцитивными.

2. АЛЬТЕРНАТИВА ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

С 1967 г. начинается исследование некоэрцитивных отображений. Этими проблемами будем заниматься в этом и в следующих параграфах.

Пусть теперь имеем два пространства Банаха X и Y и два отображения T и S пространства X в пространство Y. Будем заниматься вопросом о существовании решения уравнения

$$\lambda\, T(x) - S(x) = f\,,$$

в зависимости от вещественного или комплексного параметра λ. Предположения на отображения T и S следующего типа: Отображение S предпологается вполне непрерывным и оператор T отображает X на Y. Можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть X и Y вещественные пространства Банаха, T нечетное гомеоморфные отображение пространства X на Y удовлетворяющее следующим условиям: Существуют $K > 0$, $a > 0$, $L > 0$ такие что*

$$L\|x\|^a \leqq \|T(x)\| \leqq K\|x\|^a\,, \quad x \in X\,; \tag{2.1}$$

$$T(tx) = t^a\,T(x)\,, \quad t > 0\,, \quad x \in X\,. \tag{2.2}$$

Пусть S и R нечетные вполне непрерывные отображения пространства X в пространство Y и пусть

$$S(tx) = t^a\,S(x)\,, \quad t > 0\,, \quad x \in X\,; \tag{2.3}$$

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|^a} = 0\,. \tag{2.4}$$

Тогда, если $\lambda \neq 0$ и уравнение

$$\lambda\,T(x) - S(x) = 0 \tag{2.5}$$

имеет только нулевое решение, то уравнение

$$\lambda\,T(x) - S(x) - R(x) = f \tag{2.6}$$

разрешимо для любой правой части $f \in Y$.

Аналогично как в линейном случае число λ, для которого уравнение (2.5) имеет нетривиальное решение, называется собственным значением пары (T, S). Таким образом утверждение теоремы 2 является обобщением одной части известной альтернативы Фредгольма для линейных уравнений с впольне непрерывным отображениями. При тех-же предположениях как в теореме 2 имеет место следующее утверждение: Если уравнение (2.6) разрешимо для произвольной правой части $f \in Y$, многозначное отображение

$$A_\lambda^{-1}(f) = \{x \in X;\ \lambda\,T(x) - S(x) - R(x) = f\}$$

ограничено (т. е. для всякого $r > 0$ существует $\varrho > 0$ так, что $\|x\| \leqq \varrho$ если $\|\lambda\,T(x) - S(x) - R(x)\| \leqq r$) и

$$\sup_{x \in X} \|R(x)\| < \infty\,,$$

то λ не является собственным значением пары (T, S). Но это утверждение не обобщает полностью вторую часть классической альтернативы Фредгольма (кое-что об этом будет сказано еще в следующем параграфе). Ввиду этого, утверждения типа теоремы 2 будем также называть „альтернативами Фредгольма для нелинейных операторов". Первые результаты в этом нарпавлении получили независимо С. И. Похожаев [42] и И. Нечас [34]. Но сечас имеется уже много работ на эту тему (см. напр. литературные ссылки к второй главе книги [20]).

Доказательство теоремы 2 проводится следующими образом: Во-первых доказывается

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \|\lambda T(x) - S(x) - R(x)\| = \infty$$

если λ не является собственным значением пары (T, S). После этого используется известная теорема Борсука-Улама (см. [26]) о топологической степени вполне непрерывного и нечетного векторного поля и другие основыне утверждения о степени отображения.

Разные методы доказательств „нелинейных альтернатив Фредгольма" (при выпольнении разных условий) возможно разделить на три группы.

1) Доказывается, что последовательность приближений типа Галеркина уравнения (2.6) стремится в некотором смысле к решению этого уравнения. Первое доказательство, использующее этот метод, принадлежит С. И. Похожаеву [42]. Его результаты и метод доказательства были обобщены в работах [9, 41]. Отметим еще, что для применения абстрактных результатов полученых этим методом к теоремам о существовании слабых решений краевых задач нелинейных дифференциальных уравнений надо доказать, что в пространствах Соболева $W_p^k(\Omega)$ и их подпространствах полученных с помощю краевых условий (напр. в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)$ в случае задачи Дирихле) существуют базисы Шаудера. Этот факт был доказан для одномерного множества в [9], и с помощью теории интерполяции и общих результатов о существовании базиса Шаудера для множеств с достаточно гладкой границей в работе [13]. Результаты работы [13] усилены и обобщены на случай пространств Соболева-Слободецкого в [45]. В этом направлении еще существуют некоторые открытые проблемы. Все эти доказательства не конструктивные. Единственное конструктивное доказательство существования базиса Шаудера в пространствах Соболева было до настоящего времени дано в [4] только для случая когда Ω является N-мерным кубом. Поскольку доказано (см. [7]) существование сепарабельного пространства Банаха без базиса Шаудера, эти проблемы очень интересны.

2) Следующий метод существенно использует то обстоятельство, что рассматриваемые пространства Банаха комплексные. Предположения соответствующих теорем всегда гарантируют вещественность всех собственных значений пары (T, S). Если λ_0 не являетая собственным числом пары (T, S), то прежде всего доказывается существование решения $u(\xi)$ уравнения (2.6) с $\lambda = \lambda_0 + i\xi$, где $\xi \neq 0$ действительное и после этого показывается, что при $\xi \to 0$ $u(\xi)$ стремятся в некотором смысле к решению уравнения (2.6) с $\lambda = \lambda_0$. Это основные идеи работы [34].

3) Для доказательства альтернативы Фредгольма используются подходящие обобщения теоремы Борсука-Улама, см. напр. [29, 35, 36].

Дальше укажем примеры типичных уравнений, существование решений которых вытекает из теоремы 2.

Пример 1. Пусть Ω ограниченная область в пространстве R_N с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Ищется слабое решение задачи Дирихле

$$-\lambda\Delta u - u\frac{|u|^s}{1+|u|^s} = f \quad \text{на} \quad \Omega(s>0)\,, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

для $f \in L_2(\Omega)$, т. е. ищем $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ такое чтобы для произвольного $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ выполнялось интегральное тождество

$$\lambda\int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{|u|^s}{1+|u|^s}uv\,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\,\mathrm{d}x\,.$$

Это уравнение разрешимо для произвольного $f \in L_2(\Omega)$ если уравнение

$$\lambda\int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)\,,$$

обладает только нулевым решением, что имеет место для $\lambda \neq 1/\lambda_k$, где последовательност $\{\lambda_k\}$ является стектром задачи Дирихле для уравнения $-\Delta u - \lambda u = 0$.

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу

$$-\lambda\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^3 - |u|^{m-1}u = f \quad \text{на} \quad \Omega \quad u|_{\partial\Omega} = 0\,. \tag{2.7}$$

Для $1 \leqq m < 3$ она имеет слабое решение $u \in \mathring{W}_4^1(\Omega)$ для произвольного $f \in (\mathring{W}_4^1(\Omega))^*$ если только $\lambda \neq 0$. В случае $m = 3$ задача (2.7) слабо разрешима, если задача

$$-\lambda\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^3 - u^3 = 0 \quad \text{на} \quad \Omega \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.8}$$

имеет только нулевое слабое решение.

Пример 3. Пусть g непрерывная нечетная вещественная и ограниченная функция на $(-\infty, +\infty)$. Тогда задача

$$\begin{gathered}\lambda u'' + u + g(u) = f \quad \text{на} \quad (0,\pi)\\ u(0) = u(\pi) = 0\end{gathered} \tag{2.9}$$

слабо разрешима (разрешима) для произвольного $f \in L_2(0, \pi)$ $(f \in C\langle 0, \pi \rangle)$ если $\lambda \neq 1/n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Из утверждений типа теоремы 2 возникают две новые проблемы.

I. Во первых, как было уже сказано, теорема 2 не является полным аналогом альтернативы Фредгольма. Остается еще решать следующую задачу: для каких правых частей $f \in Y$ разрешимо уравнение (2.6) в случае, когда λ является собственным значением пары (T, S). Некоторые ответы на этот вопрос даны в § 3.

II. Требуется выяснить структуру множества всех собственных значений пары (T, S) нелинейных операторов.

3. ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть отображения T, S, R удовлетворяют условиям теоремы 2 и пусть λ является собственным значением пары (T, S). Тогда решение задачи I из конца § 2 в случае $a \neq 1$ очень сложно (в работе [19] приведен пример, показывающий, что до сих пор не ясны никакие общие свойства множества правых частей для которых существует решение уравнения (2.6). Но для $a = 1$ уже некоторые результаты в этом направлении имеются. Первым из них является работа [31], где получены необходимые и достаточные требования на $f \in L_2(\Omega)$, чтобы краевая задача

$$(3.1)\qquad \begin{gathered} L(u) + g(u) = f \quad \text{на} \quad \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{gathered}$$

была слабо разрешима, где L линейный самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка такой что задача Дирихле

$$(3.2)\qquad \begin{gathered} L(u) = 0 \quad \text{на} \quad \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{gathered}$$

имеет одномерное пространство решений, функция g непрерывна на вещественной оси и существуют конечные пределы

$$\lim_{\xi \to \infty} g(\xi) = g(+\infty)\,, \quad \lim_{\xi \to -\infty} g(\xi) = g(-\infty)$$

и

$$g(-\infty) < g(\xi) < g(+\infty)\,, \quad \xi \in R_1\,.$$

Тогда для слабой разрешимости задачи (3.1) необходимо и достаточно, чтобы для функции $f \in L_2(\Omega)$ были выполнены неравенства

$$(*)\quad g(-\infty)\int_{\Omega_+}|w| + g(+\infty)\int_{\Omega_-}|w| < \int_{\Omega} fw < g(+\infty)\int_{\Omega_+}|w| + g(-\infty)\int_{\Omega_-}|w|$$

для всякого ненулевого решения w задачи (3.2), где

$$\Omega_\pm = \{x \in \Omega;\ w(x) \gtrless 0\}\,.$$

(Для элементарного доказательства этой теоремы см. [24].) Аналогичное необходимое и достаточное условие доказано в работе [46], если размерность пространства решений задачи (3.2) больше единицы. Абстрактную схему для получения результатов такого типа указал И. Нечас в [40], где доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть A линейное ограниченное самосопряженное фредгольмовское*[1]) *отображение в вещественном пространстве Гильберта H и пусть ядро* $\operatorname{Ker}[A]$ *оператора A нетривиально. Пусть N нелинейное вполне непрерывное отображение пространства H в H такое что*

$$\sup_{u \in H} \|N(u)\| < \infty .$$

Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ существует $t(\varepsilon) > 0$ так что

$$|(N(tw + v), w) - L(w)| < \varepsilon \tag{3.3}$$

при произвольном $w \in \operatorname{Ker}[A]$, $\|w\| = 1$, $v \in H$, $\|v\| \leqq r$ и $t \geqq t(\varepsilon)$.

Тогда если

$$(N(u), w) < L(w), \quad w \in \operatorname{Ker}[A], \quad u \in H,$$

то для разрешимости уравнения

$$A(u) + N(u) = h \tag{3.4}$$

необходимо и достаточно, чтобы неравенство

$$L(w) > (h, w)$$

было выполнено для произвольного $w \in \operatorname{Ker}[A]$, $\|w\| = 1$.

Главным шагом доказательства теоремы 3 является отыскание системы уравнений, существование решения которой эквивалентно существованию решения уравнения (3.4). Существование решения новой системы уравнений доказывается с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке вполне непрерывного отератора.

Теорема 3 обобщается в следующих направлениях:

a) Предполагается, что существуют постоянные $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\delta > 0$ так что

$$\|N(u)\| \leqq \alpha + \beta \|u\|^{\delta}, \quad u \in H .$$

---

[1]) Линейное отображение A называется фредгольмовским, если размерность его ядра конечна, область значений $\operatorname{Im}[A]$ замкнута в H и размерность факторпространства $H/\operatorname{Im}[A]$ тоже конечна.

При выполнении некоторых условий получается:

если $\delta \in (0, 1)$ то уравнение (3.4) разрешимо при любой правой части (см. [14]);

если $\delta = 1$ и постоянная β достаточно малая (ограничение зависит от нижней грани абсолютных значений ненулевых точек спектра оператора A) то уравнение (3.4) снова разрешимо для произвольной правой части (см. [10]);

если $\delta > 1$ то можно доказать, что уравнение (3.4) разрешимо для правых частей с достаточно малой нормой (см. [11]).

б) Предполагается, что оператор A определен только на плотном множестве некоторого пространства Банаха X которое отображает в пространство Y, причем A не обязательно ограниченный. С помощью этого обобщения можно получить существование классических решений краевых задач (см. [11]).

в) Условие (3.3) теоремы 3 ослабляется и ищется решение задачи (3.4) для любого f из области значений оператора A (см. [12]).

В конце этого параграфа проиллюстрируем абстрактные результаты об области значений нелинейных операторов на примере краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, причем следует отметить, что это делается только для просторы изложения, так как результаты можно применить к дифференциальным уравнениям в частных производных.

Пример 3 (продолжение). Будем рассматривать краевую задачу из примера 3 с $\lambda = 1$.

А. Если функция g удовлетворяет условиям из начала этого параграфа, то формула (*) является достаточным и необходимым условием разрешимости задачи (2.9) ($w = \sin x$).

Б. Если функция g нечетная,

$$\lim_{\xi \to 0} g(\xi) = \infty ,$$

и выполняется неравенство

$$|g(\xi)| \leqq c_1 + c_2 |\xi|^\delta , \tag{3.5}$$

где $\delta \in (0, 1)$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, то задача (2.9) слабо разрешима для произвольного $f \in L_2(0, \pi)$ (см. [14]).

В. Если неравенство (3.5) справедливо с $\delta = 1$, то в случае

$$0 < c_2 < \tfrac{3}{4} \sqrt{(\pi)} \left[\sqrt{(2)} \left(\sqrt{(\pi)} + 8\right)\right]^{-1}$$

краевая задача (2.9) опять слабо разрешима для произвольного $f \in L_2(0, \pi)$ (см. [10]).

Г. Пусть существует $\eta > 0$ так, что

$$\lim_{\xi \to 0+} \frac{\min\limits_{\zeta \in \langle \eta, 1/\xi \rangle} g(\zeta)}{\xi} > \frac{2M}{\pi},$$

$$\lim_{\xi \to 0+} \frac{\min\limits_{\zeta \in \langle (-1/\xi), -\eta \rangle} g(\zeta)}{\xi} < -\frac{2M}{\pi},$$

где

$$M = \sup_{\xi \in R_1} |g(\xi)| < \infty .$$

Тогда для произвольного $f \in L_2(0, \pi)$, удовлетворяющего условию

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, \mathrm{d}x = 0 ,$$

существует слабое решение $u \in \mathring{W}_2^1(0, \pi)$ задачи (2.9) (см. [12]).

4. ОЦЕНКИ СНИЗУ КОЛИЧЕСТВА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этом и в следующем параграфе мы обратим внимание на задачу II из конца § 2.

Изучение структуры множества всех собственных значений пары нелинейных операторов было начато в тридцатых годах советскими математиками Л. А. Люстерником и С. Г. Шнирельманом (см. [33]). Они доказали, что при выполнении некоторых условий, существует по крайней мере стремящаяся к нулю последовательность неотрицательных собственных значений нелинейных операторов (f', g'), где f' и g' производные Фреше функционалов f и g определенных на пространстве Гильберта H, точнее говоря, для любого $r > 0$, существует по крайней мере счетное множество вещественных чисел λ, для которых задача

$$\lambda f'(x) - g'(x) = 0 , \quad x \in M_r(f) = \{u \in H;\ f(u) = r\} \tag{4.1}$$

разрешима. Доказательство этого результата основано на изучении топологического инварианта — категории множества, который был введен С. Г. Шнирельманом. (Для доказательства см. тоже [26].) Аналогичное утверждение для функционалов f, g определенных на пространстве Банаха, доказал грузинский математик Э. С. Цитланадзе (см. [5]). Теория Люстерника и Шнирельмана для случая пространств Банаха продолжена и развита в работах [1, 3, 16]. В работе [16] идея доказательства основана на теореме о неявных функциях и получен следующий результат.

Теорема 4. *Пусть X безконечномерное рефлексивное пространство Банаха с базисом Шаудера*[2]). *Пусть $r > 0$ и f, g два вещественных функционала, определенные и имеющие производные Фреше f', g' на X. Предпологается, что выполнены следующие условия*:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

$(x, f'(x)) > 0$ *для* $x \in X,\ x \neq 0;$

$\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty;$

$\inf\limits_{x \in M_r(f)} (x, f'(x)) = c_1 > 0;$

отображения $f', g' : X \to X^*$ *равномерно непрерывные*;

$g(x) \geqq 0,\ x \in X;$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

отображение g' усиленно непрерывное (т. е. оно непрерывно из слабой топологии пространства X в сильную топологию пространства X^*);

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

если $x_n \rightharpoonup x$ *(слабо)*, $f'(x_n) \to z$ *(сильно), то* $x_n \to x$.

Тогда существует последовательность попарно различных точек $x_n \in X$ такая, что

$$g'(x_n) - \frac{(x_n, g'(x_n))}{(x_n, f'(x_n))} f'(x_n) = 0\,,$$

$$0 < g(x_n) \searrow 0\,, \quad x_n \rightharpoonup 0\,, \quad f(x_n) = r\,.$$

Пример 2 (продолжение). Краевая задача (2.8) обладает нетривиальным решением по крайней мере для счетного множества вещественных чисел λ.

5. ОЦЕНКИ СВЕРХУ КОЛИЧЕСТВА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В общем случае метод Люстерника и Шнирельмана и его обобщения не дают все собственные значения пары (f', g') нелинейных операторов (см. пример в работе [19]). Возникает поэтому вопрос, при каких дополнительных условиях множество Λ всех параметров λ для которых задача (4.1) имеет решение является последовательностью. На этот вопрос дан первый ответ в работе

---

[2]) С теоретической точки зрения можно предполагать немножко меньше чем существование базиса Шаудера.

[37], где рассмотрена краевая задача для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения специального вида — уравнения типа задачи (2.8) при $N = 1$ (см. тоже [38, 39]). Обобщение на уравнения четвертого порядка рассмотрены с этой точки зрения в работах [27, 28, 39].

В дальнейшем нам понадобится понятие вещественно-аналитического функционала φ, определенного на банаховом пространстве X, т. е. такого функционала, который в окрестности любой точки пространства X разлагается в сходящийся ряд Тейлора.

Теорема 5 (см. [19]). *Пусть H вещественное сепарабельное пространство Гильберта со скалярным произведением $(.,.)$. Предположим, что f и g вещественно-аналитические функционалы на пространстве H, удовлетворяющие следующим условиям:*

$f(0) = 0$, $f(u) > 0$ *для* $u \neq 0$;

существует непрерывная положительная и неубывающая функция $c_1(t)$ в промежутке $(0, \infty)$ *такая, что*

$$d^2 f(u, h, h) \geqq c_1(f(u)) \, \|h\|^2$$

для произвольных $u, h \in H$ ($d^2 f$ *вторая производная Фреше*);

производная f' отображает ограниченные множества на ограниченные;

множество $M_r(f)$ ограниченное;

отображение g' усиленно непрерывное;

$g(0) = 0, \; g'(0) = 0.$

Обозначим через B множество всех решений задачи (4.1).

Тогда $g(B) \setminus \{0\}$ изолированное множество и только 0 *может быть его точкой сгущения.*

Если функционал f однородный степени a и функционал g однородный степени b, то

$$g(B) = \frac{b}{a} \, . \, r \, . \, \Lambda \, .$$

Из этого вытекает ответ на наш вопрос: Если функционалы f и g однородны (не обязательно той-же степени) и выполнены условия теорем 4 и 5, то множество Λ является последовательностью положительных чисел, которая стремится к нулю.

При доказательстве теоремы 5 используется „обобщенное отношение Релея“:

$$\varphi(u) = \frac{g(u)}{[f(u)]^{\beta(u)}} \, ,$$

где

$$\beta(u) = \frac{(g'(u), f'(u))}{g(u)\,\|f'(u)\|^2}.$$

Легко получается, что $g(A \cap M_r(f)) = g(B)$, где A есть множество критических точек функционала φ, т. е.

$$A = \{x \in H \setminus \{0\}\ ;\quad \varphi'(x) = 0\}\,.$$

Для множества критических значений $\varphi(A)$ надо доказать, что оно счетно. Это сделано в работе [17] с помощью конечномерного аналога этого утверждения из работы [43]. Результаты из работ [17, 43] очень похожи на классические теоремы. Морса-Сарда для вещественных функций конечного числа переменных.

Утверждение теоремы 5 можно доказать тоже в случае, когда функционалы f и g определены на пространстве Банаха, но формулировка условий и доказательство существенно сложнее (см. [18]). В случае неоднородных функционалов можно доказать, что существует дискретное множество R параметров r такое, что для $r \in (0, \infty) \setminus R$ множество Λ является последовательностью стремящейся к нулю (для случая конечномерного пространства H смотри [44], для случая бесконечномерного пространства H результаты еще не публикованы).

В случае, когда функционалы f и g не гладкие (как это требуется в теореме 5), можно использовать результат из работы [15] (который основан на утверждении из [30]), где доказано, что множество $g(B) \setminus \{0\}$ имеет некоторую (зависит от дифференцируемости функционалов f и g) меру Хаусдорфа равную нулю.

Пример 4. Рассматривается краевая задача

$$(5.1)\qquad \begin{aligned} -\lambda\Delta u + u^3 &= 0 \quad \text{на} \quad \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0\,, \end{aligned}$$

где $\Omega \subset R_3$ ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Тогда существует последовательность Λ положительных чисел с точкой сгущения 0 такая, что на единичной сфере пространства $\mathring{W}_1^2(\Omega)$ существует слабое решение задачи (5.1) тогда и только тогда когда $\lambda \in \Lambda$.

Замечания. а) Результаты из § 4 и § 5 можно применить тоже к теории бифуркации нелинечный операторов (см. [22]). Примеры в этом докладе даны только для краевых задач для дифференциальных уравнений. Можно привести тоже примеры интегральных уравнений (см. [21]) и краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений (см. [23]).

б) С результатами приведенными в §§ 2, 4, 5 можно детально познакомится в книге [20].

[1] *H. Amann,* Lusternik-Schnirelman theory and non-linear eigenvalue problems, Math. Ann. *199,* 1972, 55—72.

[2] *F. E. Browder,* Problèmes non-linéaires, Université Montreal, 1965.

[3] *F. E. Browder,* Infinite dimensional manifolds and nonlinear eigenvalue problems, Ann. of Math. *82,* 1965, 459—477.

[4] *Z. Ciesielski - J. Domsta,* Construction of an orthonormal basis in $C^m(I^d)$ and $W_p^m(I^d)$, Studia Math. *41,* 1972, 211—224.

[5] *Э. С. Цитланадзе,* Теоремы существования точек минимакса в пространствах Банаха и их приложения, Труды Моск. мат. о-ва *2* (1952), 235—274.

[6] *Ю. А. Дубинский,* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения высокого порядка, Успехи мат. Наук *23* (139), 1968, 45—90.

[7] *P. Enflo,* A counterexample to the approximation problem, Acta Math. *130,* 1973, 309—317.

[8] *S. Fučík,* Note on Fredholm alternative for nonlinear operators, Comment. Math. Univ. Carolinae *12,* 1971, 213—226.

[9] *S. Fučík,* Fredholm alternative for nonlinear operators in Banach spaces and its applications to differential and integral equations, Čas. pěst. mat. *96,* 1971, 371—390.

[10] *S. Fučík,* Surjectivity of operators involving linear noninvertible compact perturbation, Funkc. Ekvacioj *17,* 1974, 73—83.

[11] *S. Fučík,* Nonlinear equations with noninvertible linear part, Czech. Math. Journal *24 (99),* 1974, 467—495.

[12] *S. Fučík,* Further remark on a theorem by E. M. Landesman and A. C. Lazer, Comment. Math. Univ. Carolinae *15,* 1974, 259—272.

[13] *S. Fučík - O. John - J. Nečas,* On the existence of Schauder bases in Sobolev spaces, Comment. Math. Univ. Carolinae *13,* 1972, 163—175.

[14] *S. Fučík - M. Kučera - J. Nečas,* Ranges of nonlinear assymptotically linear operators, Journ. Diff. Eq. *17,* 1975, 375—394.

[15] *S. Fučík - M. Kučera - J. Nečas - J. Souček - V. Souček,* Morse-Sard theorem in infinite-dimensional spaces and the investigation of critical levels, Čas. pěst. mat. 99, 1974, 217—243.

[16] *S. Fučík - J. Nečas,* Ljusternik-Schnirelmann theorem and nonlinear eigenvalue problems, Math. Nachr. *53,* 72, 277—289.

[17] *S. Fučík - J. Nečas - J. Souček - V. Souček,* New infinite dimensional versions of Morse-Sard theorem, Boll. U. Mat. Ital. *6,* 1972, 317—322.

[18] *S. Fučík - J. Nečas - J. Souček - V. Souček,* Upper bound for the number of critical levels for nonlinear operators in Banach spaces of the type of second order nonlinear differential operators, Journ. Funct. Anal. *11,* 1972, 314—333.

[19] *S. Fučík - J. Nečas - J. Souček - V. Souček,* Upper bound for the number of eigenvalues for nonlinear operators, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa *27,* 1973, 53—71.

[20] *S. Fučík - J. Nečas - J. Souček - V. Souček,* Spectral Analysis of Nonlinear Operators, Lecture Notes in Mathematics No 346, Springer-Verlag 1973.

[21] *S. Fučík - J. Nečas - J. Souček - V. Souček,* Note to nonlinear spectral theory: Application to the nonlinear integral equations of the Lichtenstein type, Math. Nachr. *58,* 1973, 257—267.

[22] *S. Fučík - J. Nečas - J. Souček - V. Souček,* M. A. Krasnoselskij's main bifurcation theorem, Arch. Rat. Mech. Anal. *54,* 1974, 328—339.

[23] *S. Fučík - Tran Dien Hien,* Note to nonlinear spectral theory: Application to boundary value problems for ordinary integrodifferential equations, Comment. Math. Univ. Carolinae *14,* 1973, 583—608.

[24] *P. Hess,* On a theorem by Landesman and Lazer, Indiana U. Math. J. *23,* 1974, 827—829.

[25] *Р. И. Качуровский,* Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах, Успехи Мат. Наук *23,* 1968, 121—168.

[26] *М. А. Красносельский,* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Москва 1956.

[27] *А. Кратохвил - И. Нечас,* О дискретности спектра нелинейного уравнения Штурма-Лиувилля четвертого порядка, Применение функциональных методов к краевым задачам математической физики, Материалы 3-го Советско-Чехословацкого совещания (май 1971 г), Новосибирск 1972, стр. 107—121.

[28] *А. Кратохвил - И. Нечас,* О дискретности спектра нелинейного уравнения Штурма-Лиувилля четвертого порядка, Comment. Math. Univ. Carolinae *12,* 1971, 639—653.

[29] *M. Kučera,* Fredholm alternative for nonlinear operators, Comment. Math. Univ. Carolinae *11,* 1970, 337—363.

[30] *M. Kučera,* Hausdorff measures of the set of critical values of functions of the class $C_{k,\lambda}$, Comment. Math. Univ. Carolinae *13,* 1972, 333—350.

[31] *E. M. Landesman - A. C. Lazer,* Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance, Journ. Math. Mech. *19,* 1970, 609—623.

[32] *J. Leray - J. L. Lions,* Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques nonlinéaires par les méthodes de Minty-Browder, Bull. Soc. Math. France *93,* 1965, 97—107.

[33] *Л. А. Люстерник - Л. Г. Шнирельман,* Применение топологии к вариационным задачам. Труды 2-ого всесоюз. мат. съезда 1, 1935, 224—237.

[34] *J. Nečas,* Sur l'alternative de Fredholm pour les opérateurs non-linéaires avec applications aux limites, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa *23,* 1969, 331—345.

[35] *J, Nečas,* Remark on the Fredholm alternative for non-linear operators with application to nonlinear integral equations of generalized Hammerstein type, Comment. Math. Univ. Carolinae *13,* 1972, 109—120.

[36] *J. Nečas,* Fredholm alternative for nonlinear operators and application to partial differential equations and integral equations, Čas. pěst. mat. *97,* 1972, 65—71.

[37] *И. Нечас,* О дискретности спектра нелинейного уравнения Штурма-Лиувилля, Докл. Акад. Наук СССР *201,* 1971, 1045—1048.

[38] *И. Нечас,* Альтернативы Фредгольма и их приложения к краевым задачам, Применение функциональных методов к краевым задачам математической физики, Материалы 3-го Советско-Чехословацкого соверщания (май 1971г), Новосибирск 1972, стр. 162—171.

[39] *J. Nečas,* Spectral analysis of nonlinear operators, Proc. Czech. summer school, Babylon 1971, Theory of nonlinear operators, Academia, Prague 1973, pp. 85—119.

[40] *J. Nečas,* On the ranges of nonlinear operators with linear asymptotes which are not invertible, Comment. Math. Univ. Carolinae *14,* 1973, 63—72.

[41] *W. V. Petryshyn,* Nonlinear equations involving noncompact operators, Proc. Symp. Pure Math. Vol. 18, Part 1, Nonlinear functional analysis, Rhode Island 1970.

[42] *С. И. Похожаев,* О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами, Функц. анализ и его прил. т. 1, 1967, 66—73.

[43] *J. Souček - V. Souček,* The Morse-Sard theorem for real-analytic functions, Comment. Math. Univ. Carolinae *13,* 1972, 45—51.

[44] *V. Souček,* O spektru nelineárních operátorů (кандидатская диссертация), Praha 1973.

[45] *H. Triebel,* Über die Existenz von Schauderbasen in Sobolev-Besov-Räumen. Isomorphiebeziehungen. Studia Math. *XLIV,* 1973, 83—100.

[46] *S. A. Williams,* A sharp sufficient condition for solution of a nonlinear boundary value problem, Journ. Diff. Eq. *8,* 1970, 580—586.

Адресс автора: 186 00 Praha, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta University Karlovy).

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

MIROSLAV BARTUŠEK, Brno: *On L^p-solutions of the differential equation $y'' = q(t)\,y$.* (O L^p-řešeních diferenciální rovnice $y'' = q(t)\,y$.)

Práce se zabývá studiem oscilatorické diferenciální rovnice (q) $y'' = q(t)\,y$, $q \in C^0[a, b)$, $b \leqq \infty$. V první části je odvozena nutná a postačující podmínka pro to, aby derivace libovolného netriviálního řešení y diferenciální rovnice (q) patřila do třídy $L^p[a, b)$, $p > 0$. Dále jsou pro monotonní nosiče q, za předpokladu, že y, resp. y' patří do třídy $L^p[a, b)$ odvozeny některé vlastnosti funkcí q, y, y'. Poslední část práce se týká existence integrálu $\int_a^b y(t)\,dt$ pro nerostoucí nosiče q takové, že platí: $\lim_{t \to b} q(t) = -\infty$.

LADISLAV NEBESKÝ, Praha: *A theorem on 2-connected graphs.* (Věta o 2-souvislých grafech.)

Souvislý graf s alespoň třemi uzly, který neobsahuje žádnou artikulaci, nazýváme 2-souvislý. V této poznámce je dokázána věta: Je-li G 2-souvislý graf s alespoň čtyřmi uzly, potom obsahuje buď dvojici nezávislých uzlů stupně 2 nebo dvojici uzlů u a v takovou, že uv je hrana grafu G a že oba grafy $G - u$ a $G - v$ jsou 2-souvislé.

KAREL ČULÍK, Praha: *A note on comparison of Turing machines with computers.* (Poznámka o srovnání Turingových strojů s počítači.)'

Aby bylo možné přímé (tj. bez složitého kódování a dekódování) srovnání činnosti Turingových strojů a počítačů, je zaveden pojem adresovaného Turingova stroje a pojem páskového počítače. Při tom je předložena jistá klasifikace počítačů s hlediska typů příkazů, kterých lze použít. Následující rozdíly mezi adresovanými Turingovými stroji a počítači jsou uvažovány: a) nekonečná paměť s páskovou strukturou proti konečné paměti bez jakékoliv struktury (když se rozdíly mezi jednotlivými druhy a typy pamětí, které jsou podstatné jen pro účinnost a rychlost, neberou v úvahu); b) jediný základní objekt (např. racionální dekadické číslo pevné délky) je v Turingově stroji uložen v mnoha sousedních paměťových buňkách na rozdíl od počítače, kde je umístěno v jediné buňce; c) teoretický pojem počítače připouští mnoho interpretací, takže syntax je oddělitelná od semantiky, ale nic podobného není možné u Turingova stroje; d) u počítače lze rozlišit nekonečně mnoho programů, ale Turingův stroj je identifikován s jediným programem (když neuvažujeme universální Turingův stroj), atd. Nakonec jsou zavedeny dva druhy páskových počítačů, které simulují činnost všech Turingových strojů a jsou s nimi funkcionálně ekvivalentní.

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc: *Homomorphismen von projektiven Räumen und verallgemeinerte semilineare Abbildungen.* (Homomorfismy projektivních prostorů a zobecnělá pololineární zobrazení.)

Nechť A a B jsou dva vektorové prostory a označme $P(A)$ a $P(B)$ projektivní prostory, které jsou vytvořeny jako svazy podprostorů z A, B. Homomorfismem projektivních prostorů $P(A)$,

$P(B)$ nazýváme zobrazení $\varkappa$ množiny bodů z $P(A)$ do množiny bodů z $P(B)$, které splňuje následující podmínky: 1. Jestliže tři body z $P(A)$ leží na přímce, pak jejich obrazy v $\varkappa$ leží na přímce v $P(B)$. 2. Na každé přímce v $P(A)$ leží tři body, jejichž obrazy v $\varkappa$ jsou navzájem různé. 3. Existují tři body v $P(A)$, jejichž obrazy neleží na přímce. V článku je definováno zobecnělé pololineární zobrazení (φ, σ) vektorových prostorů A, B vzhledem k modulu W (definice 2) a je dokázána fundamentální věta pro homomorfismy projektivních prostorů $P(A)$, $P(B)$: Každé zobrazení (φ, σ) indukuje homomorfismus projektivních prostorů $P(A)$, $P(B)$ a každý homomorphismus projektivních prostorů $P(A)$, $P(B)$ je indukován jistým zobrazením (φ, σ).

BOHDAN ZELINKA, Liberec: *On Hadwiger number of a graph.* (O Hadwigerově čísle grafu.)

Hadwigerovo číslo konečného neorientovaného grafu G je maximální možný počet uzlů úplného grafu, na nějž lze G stáhnout. V práci se zkoumá závislost Hadwigerova čísla na relativním počtu hran (poměru počtu hran k počtu uzlů).

SVATOPLUK FUČÍK a VLADIMÍR LOVICAR, Praha: *Periodic solutions of the equation* $x''(t) + g(x(t)) = p(t)$. (Periodická řešení rovnice $x''(t) + g(x(t)) = p(t)$.)

Za předpokladu, že g je spojitá reálná funkce, $\lim_{|\xi| \to \infty} g(\xi)/\xi = +\infty$ je dokázáno, že pro libovolnou periodickou a spojitou pravou stranu p má uvažovaná rovnice alespoň jedno periodické řešení. Z dokázaných lemmat plyne známe tvrzení, že Dirichletova úloha má pro každou spojitou pravou stranu nekonečně mnoho řešení.

JAROSLAV ZEMÁNEK, Praha: *A remark on transitivity of operator algebras.* (Poznámka o transitivitě operátorových algeber.)

Budiž H Hilbertův prostor, $B(H)$ algebra všech lineárních omezených operátorů v H, a $\mathfrak{A}$ silně hustá C*-podalgebra v $B(H)$. Buďte $x_1, \ldots, x_n$ ortonormální vektory a $y_1, \ldots, y_n$ další dané vektory v H; označme β nejmenší možnou normu operátoru v $B(H)$ převádějícího $x_1, \ldots, x_n$ po řadě v $y_1, \ldots, y_n$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje operátor T v $\mathfrak{A}$ takový, že $Tx_i = y_i$ pro $i = 1, \ldots, n$ a $|T| \leqq \beta + \varepsilon$. Důkaz je založen na Ptákově indukční větě.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

SEMIREGULÁRNÍ MNOŽINY V HARMONICKÝCH PROSTORECH

JAROSLAV LUKEŠ, Praha

V tomto časopise, *roč.* 97 (1972), str. 334, předložil JOSEF KRÁL následující úlohu: Nechť U je resolutivní množina s hranicí $U^* \neq \emptyset$ v harmonickém prostoru X (viz [1]) a označme pro každý kompakt $K \subset X$ symbolem $C(K)$ prostor všech spojitých (konečných) reálných funkcí na K. Každé funkci $f \in C(U^*)$ je tedy přiřazena harmonická funkce H_f^U na U, která je zobecněným řešením (v Perronově smyslu) Dirichletovy úlohy příslušné k množině U a okrajové podmínce f. Nechť U_r značí množinu všech $x \in U^*$, pro něž $\lim_{y \to x, y \in U} H_f^U(y) = f(x)$ pro každou funkci $f \in C(U^*)$. Množina U se nazývá semiregulární, jestliže pro každou funkci $f \in C(U^*)$ lze příslušnou funkci H_f^U rozšířit na $F \in C(U \cup U^*)$. Je-li U semiregulární, pak U_r je kompaktní. Obrácení tohoto tvrzení neplatí v Bauerových harmonických prostorech. Rozhodněte, zda obrácené tvrzení platí v Brelotových prostorech (nebo alespoň v harmonickém prostoru indukovaném klasickými harmonickými funkcemi na n-rozměrném euklidovském prostoru $X = R^n$), tj. rozhodněte o správnosti následujícího

Tvrzení. *Nechť X je Brelotův prostor a buď $U \subset X$ relativně kompaktní otevřená (a tedy resolutivní) množina, $U^* \neq \emptyset$. Pak U je semiregulární, právě když U_r je kompaktní.*

IVAN NETUKA dokázal v tomto časopise, roč. *98* (1973), str. 419–421 v poznámce o semiregulárních množinách, že odpověď na uvedenou otázku je kladná, jestliže množina $U_{ir} = U^* \setminus U_r$ všech iregulárních bodů je polární. Není těžké sestrojit příklad Brelotova harmonického prostoru, v němž existuje otevřená relativně kompaktní množina s uzavřenou množinou regulárních bodů, která není semiregulární. Jeden příklad takového prostoru podává C. CONSTANTINESCU v Rev. Roum. Math. Pures Appl. *10* (1965), 267–270, jiný uvádí Ivan Netuka v tomto časopise, roč. *99* (1974), 90–93. V této poznámce podáme úplnou charakteristiku semiregulárních množin v obecných, ne nutně Brelotových, harmonických prostorech. Dokážeme totiž následující větu.

Věta. *Nechť $(X, \mathscr{H})$ je silný harmonický prostor ve smyslu Bauerovy axiomatiky [3], v němž konstanty jsou harmonické funkce a kde harmonické funkce oddělují body. Potom relativně kompaktní otevřená množina U je semiregulární, právě když množina regulárních bodů je kompaktní a množina iregulárních bodů má harmonickou míru 0 v každém bodě množiny U.*

Jestliže $A \subset U^*$, říkejme v dalším krátce, že A je *nulová*, má-li harmonickou míru 0 v každém bodě množiny U. Poznamenejme, že každá polární množina obsažená v U^* je nulová a že obecně množina iregulárních bodů může mít v některých bodech, anebo i ve všech bodech, množiny U, kladnou harmonickou míru.

K důkazu uvedené věty využijeme podstatně výsledků prací [4] a [5], shrňme tedy jejich nejdůležitější myšlenky.

Buď Y kompaktní metrický prostor a $\mathscr{A}$ uzavřený lineární podprostor $C(Y)$ obsahující konstanty a oddělující body Y. Na $\mathscr{A}$ uvažujme supremovou normu a označme $\mathscr{A}'$ topologický duál a $\mathscr{A}'^+$ jeho positivní kužel. Zobrazení $\delta : x \mapsto \varepsilon_x$, kde ε_x značí Diracovu míru v bodě x, je homeomorfním vnořením Y do $\mathscr{A}'^+$ a Choquetova hranice $\mathrm{Ch}_{\mathscr{A}}\, Y$ je právě vzor všech extremálních bodů množiny $S(\mathscr{A})$ při zobrazení δ, kde $S(\mathscr{A})$ je slabý uzávěr konvexního obalu $\delta(Y)$ v $\mathscr{A}'^+$. Je známo, že následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:

(i) $S(\mathscr{A})$ je Choquetův simplex,

(ii) pro každý kompakt $K \subset \mathrm{Ch}_{\mathscr{A}}\, Y$ lze každou spojitou funkci na K prodloužit na funkci z $\mathscr{A}$ se stejnou normou.

Předpokládejme nyní, že $(X, \mathscr{H})$ je silný harmonický prostor ve smyslu Bauerovy axiomatiky [3] a nechť pro jednoduchost konstantní funkce jsou harmonické a harmonické funkce oddělují body X. Je-li $U \subset X$ relativně kompaktní otevřená množina a zvolíme-li za $\mathscr{A}$ systém všech spojitých funkcí na $\overline{U}$, které jsou harmonické v U, vzniká otázka, zda pro tento systém funkcí je splněna některá z ekvivalentních podmínek (i) či (ii). Takto formulovali v [6] svůj problém E. G. Effros a J. L. Kazdan, přičemž sami dokázali, že při splnění dodatečného tzv. dominačního axiomu D, je vždy $S(\mathscr{A})$ simplex. Nedávno J. Bliedtner a W. Hansen v práci [4] ukázali, že $S(\mathscr{A})$ je simplex bez jakýchkoliv dalších axiomů. Navíc v [5] dokázali (Proposition 7), že maximální míry v Choquetově uspořádání representující body množiny $\overline{U}$ splývají s vymetenými (balayage) Diracovými měrami na doplněk U (což jsou v podstatě harmonické míry) v každém bodě $\overline{U}$, právě když množina iregulárních bodů je nulová. Protože bod $x \in U^*$ leží v Choquetově hranici, právě když maximální míra jej representující je právě Diracova míra, a bod $x \in U^*$ je regulárním bodem množiny U, právě když Diracova míra v tomto bodě splývá s vymetenou Diracovou měrou, dostáváme odtud ihned následující

Lemma. *Je-li množina iregulárních bodů nulová, splývá Choquetova hranice s množinou regulárních bodů.*

Přejděme nyní k důkazu hlavní věty uvedené v úvodu. Je-li U semiregulární množina, potom je množina iregulárních bodů nulová (viz [2], Věta 35). Nechť naopak pro otevřenou relativně kompaktní množinu U je množina U_r uzavřená a množina U_{ir} nulová. Podle lemmatu víme, že $U_r = \mathrm{Ch}_{\mathscr{A}}\,\overline{U}$. Zvolme $f \in C(U^*)$ a označme $F = f \restriction U_r$. Podle (ii) existuje $G \in C(\overline{U})$ a harmonická na U tak, že $F = G \restriction U_r$. Stačí nyní dokázat, že $H_f^U = G$ na U. Položíme-li ovšem $\Phi = H_f^U - G$ na U, jest funkce Φ harmonická a omezená na U a pro každé $z \in U_r$ jest $\lim_{x \to z} \Phi(x) = 0$. Odtud podle principu minima pro harmonické funkce (viz [3], Věta 4.4.6) vyplývá, že $\Phi = 0$ na U.

Literatura

[1] *C. Constantinescu:* Harmonic spaces and their connections with the semi-elliptic differential equations and with Markov processes, Elliptische Differentialgleichungen (Symposium), Akademie-Verlag, Berlin 1969.

[2] *H. Bauer:* Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, Math. Ann. *146* (1962), 1—59.

[3] *H. Bauer:* Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, Lecture Notes in Mathematics, vol. *22*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1966.

[4] *J. Bliedtner - W. Hansen:* Simplexes et espaces harmoniques, CR Acad. Sci. Paris, Sér. A, *278*, 757—759.

[5] *J. Bliedtner - W. Hansen:* Cônes de fonctions surharmoniques. Caractérisation de la frontière de Choquet, CR Acad. Sci. Paris, Sér. A, *278*, 1299—1301.

[6] *E. G. Effros - J. L. Kazdan:* Applications of Choquet simplexes to elliptic and parabolic boundary value problems, J. Diff. Equations *8* (1970), 95—134.

Adresa autora: 186 00 Praha 8, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

RECENSE

G. Owen: SPIELTHEORIE, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1971, brožované 230 stran, cena DM 28,—. Kniha je překladem anglického originálu „Game Theory" vydaného r. 1968 W. B. Saunders Company, Philadelphia—London—Toronto.

V knize lze vydělit dvě tématické části: První z nich, tvořená kapitolami I až V je věnována hrám dvou osob a druhá, tvořená zbývajícími kapitolami VI až X pojednává o teorii her *n* osob. Způsob výkladu je takový, že uvedené dvě části lze čísti prakticky nezávisle na sobě a dokonce i jednotlivé kapitoly v knize je možné studovat poměrně nezávisle.

Kniha vhodně spojuje matematickou rigoróznost výkladu základních teoretických principů teorie her s důkladným heuristickým osvětlením matematické teorie, zvláště ve druhé části knihy.

Dobré čitelnosti knihy i pro méně pokročilého čtenáře napomáhá, že autor se snaží vždy dospět co nejjednodušeji a nejrychleji k hlavnímu cíli a nezatěžuje výklad některými tradičními avšak zbytečnými souvislostmi a komplikacemi. Sem náleží např. to, že teorie užitku se vykládá až ve druhé části knihy, kde je velmi podstatná pro teorii her více osob, avšak nevyskytuje se v první části knihy, kde by výklad teorie her dvou osob s nulovým součtem spíše zatemňovala než usnadňovala.

Stojí za zmínku, že autor vykládá některé pojmy a fakta z teorie her, které se obvykle v běžných učebnicích teorie her nevyskytují, jako jsou diferenciální hry, hry s kontinuem hráčů aj.

V dodatku knihy jsou stručně uvedeny základní teoretické pojmy a fakta z obecnějších partií matematiky, které jsou pro četbu zapotřebí, a jejichž zařazení zvyšuje samostatnost knihy. Jde např. o otázky konvexnosti, Browerovu a Kakutaniovu větu aj.

Velmi užitečné je i množství podnětných úloh pro samostatnou práci čtenáře. Některé z těchto úloh poskytují zajímavé protipříklady na zdánlivě plausibilní leč nepravdivá tvrzení, jiné jsou návody k důkazu některých vět jež nebyly vyloženy v hlavním textu, a zbývající úlohy mají piosloužit prostě k procvičení látky.

Je uvedena též bibliografie, sice zdaleka ne vyčerpávající, avšak velmi užitečná pro rychlou nformaci čtenáře o dalších podrobnostech teorie.

Celkově lze knihu hodnotit jako zdařilou učebnici teorie her, vhodnou pro samostatné studium i pro použití na vysokoškolských přednáškách z operačního výzkumu.

Jaroslav Morávek, Praha

PRAGUE STUDIES IN MATHEMATICAL LINGUISTICS 4, Praha 1972, Academia, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, 254 strany, 65,— Kčs.

Prague Studies in Mathematical Linguistics je sborník, který začal vycházet v roce 1965. V roce 1972 vychází jeho čtvrtý svazek za redakce Jána Horeckého, Petra Sgalla a Marie Těšitelové, recensentem je František Zítek, výkonným redaktorem Jiří Kraus. Již ze složení redakce, která obsahuje význačné představitele naší matematické lingvistiky z řad lingvistů, je znát zaměření sborníku: Shrnuje především výsledky našich lingvistů, kteří ve svých pracích užívají matematických metod, a teprve v druhé řadě práce matematiků rozvíjejících metody, jež mají aplikace v lingvistice.

Rozumíme-li totiž matematickou lingvistikou tu vědní disciplinu, která řeší lingvistické problémy matematickými metodami, lze práce z tohoto oboru rozdělit v podstatě na dvě skupiny: Do první z nich náleží práce, které řeší lingvistické problémy standardními matematickými metodami, tj. metodami, které byly již dříve vypracovány k jiným účelům. Jsou to tedy práce, jež neobsahují nových matematických výsledků; jejich přínos je především lingvistický. Práce tohoto druhu pocházejí převážně od lingvistů. Druhá skupina prací propracovává matematický aparát, jehož se při řešení lingvistických problémů užívá. Práce této skupiny čerpají své pojmy z prací skupiny první, snaží se o jejich systematické matematické zpracování a o vyšetření jejich vztahů k jiným matematickým pojmům. Obsahují tedy hlavně výsledky matematické, jejichž bezprostřední lingvistická interpretace nebývá vždy patrná. Práce toho druhu píší většinou matematikové.

Sborník Prague Studies in Mathematical Linguistics je věnován především pracím první skupiny, tedy pracím užívajícím standardních matematických metod. Pro matematického čtenáře tedy nemá smyslu popisovat tyto metody podrobně. Zaměříme se proto většinou jen na stručnou formulaci řešených problémů.

Matematická lingvistika se většinou dělí podle povahy matematických prostředků, jichž bylo při řešení lingvistických problémů použito, na lingvistiku statistickou neboli kvantitativní, lingvistiku strojovou a lingvistiku algebraickou. Strojová lingvistika, jejíž podstatou je užití počítačů k řešení lingvistických problémů, v tomto sborníku téměř schází, ačkoliv v minulých svazcích byla zastoupena; práce K. Paly, která sem náleží, je zařazena mezi příspěvky z algebraické lingvistiky. Příspěvky sborníku jsou tedy rozděleny na dvě části: kvantitativní lingvistiky se týká 9 příspěvků, algebraické 7 příspěvků.

Všimneme si nyní problémů kvantitativní lingvistiky, jež jsou ve sborníku řešeny. M. TĚŠITELOVÁ v práci „*On the statistical choice of language material for the purposes of lexical analysis*" (O statistickém výběru jazykového materiálu pro účely lexikální analýzy), str. 9—33, si všímá poměru počtu nových slov k počtu slov, která se v textu vyskytla již dříve. Ukazuje se, že při pozorování textu o celkovém rozsahu 5000 slov je počet nových slov vyšší nežli počet slov opakovaných v krátkých počátečních úsecích textu; vyrovnání nastává v počátečním úseku textu o délce zhruba 1000 slov v textu beletristickém a zhruba 500 slov v textu odborném. Dále vyšetřovala, jaká část textu je pokryta 10 nejčastějšími slovy, 20 nejčastějšími slovy, 30 nejčastějšími slovy a 100 nejčastějších slov. Konečně sledovala počet slov s frekvencí $1, 2, \ldots, 10$ a $\geqq 11$ v různých textech. Výsledky jsou zachyceny tabulkami a grafy. J. KRÁMSKÝ v příspěvku „*A contribution to the investigation of the frquency of occurrence of nominal and verbal elements in English*" (Příspěvek k zkoumání frekvence výskytu nominálních a verbálních prvků v angličtině), str. 35—45, zjišťuje v různých vzorcích textů různého typu procento výskytu pro podstatná jména a pro slovesa. Výsledky shrnuje do tabulek. J. V. BEČKA v příspěvku „*The lexical composition of specialized texts and its quantitative aspect*" (Lexikální složení specialisovaných textů a jeho kvantitativní aspekt), str. 47—64, si všímá rozložení pomocných a plnovýznamových slov podle frekvence; mezi plnovýznamovými slovy vyznačuje a zvláště zkoumá odborné termíny. Své zkoumání založil na excerpci 70 textů ze 7 vědních oborů. Ke každému slovu přiřadil uspořádanou trojici čísel skládající se z celkové frekvence, z počtu textů, v nichž se slovo vyskytovalo, a z počtu vědních disciplin, v nichž se slovo vyskytovalo. Práce „*Statistical methods on evaluating words for indexing purposes*" (Statistické metody vyhodnocování slov pro potřeby indexování), str. 65—76, J. HELBICHA popisuje způsob, jak lze ke každému slovu určitého vědního oboru přiřadit číslo vyjadřující jeho specifičnost pro tento obor. L. KLIMEŠ napsal pro sborník článek „*An attempt at a quantitative analysis of social dialects*" (Pokus o kvantiativní analysu sociálních dialektů), str. 77—93. Vyšetřuje v něm slang horníků, poštovních zaměstnanců, železničářů, fotbalistů a středoškolských studentů. Zjišťuje v nich podstatné rozdíly zejména v tom ohledu, že poslední dva slangy obsahují veliký počet synonym ve srovnání s ostatními. (Synonyma jsou různá slova téhož významu.) Ukázal dále, že studentský slang podléhá poměrně rychlým časovým změnám, zatím co slang horníků je relativně stálý. J. KRAUS v článku „*On the stylistical-semantic* *analysis of adjectives in journalistic style (a quantitative approach)*" (O stylisticko-sémantické analyse adjektiv v novinářském stylu (kvantiativní přístup)), str. 95—106, použil známé Waringovy-Herdanovy formule k výpočtu pravděpodobnosti, že adjektivum se v daném textu vyskytne právě n-krát. Srovnával v daném vzorku nalezené hodnoty s hodnotami podle této formule vypočtenými. Srovnával dále výskyt adjektiv v novinářském stylu s jejich výskytem v normálním českém textu. Článek L. Uhlířové má název „*On the quantitative analysis of clause and utterance in Czech*" (O kvantitativní analyse věty a výpovědi v češtině), str. 107—128. Studuje se v něm především poloha jednotlivých větných členů ve větě; ukazuje se např., že v převážné většině českých vět je podmět na prvním místě. M. Königová v práci „*Application of dichotomous algebra in syntax*" (Aplikace dichotomické algebry v syntaxi), str. 129—140, dichotomickou algebrou rozumí pravděpodobnostní pole takové, že existuje konečný počet jevů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ s touto vlastností: Každý jev pole lze vyjádřit ve tvaru $A_1^{i_1} \cap A_2^{i_2} \cap \ldots \cap A_n^{i_n}$, kde $i_j = 0$ nebo $i_j = 1$ a $A_i^1 = A_i$ a A_i^0 je komplement A_i. Tento model se aplikuje na věty a jejich klasifikaci podle jistých znaků. Konečně poslední práce z kvantitativní lingvistiky je od M. Ludvíkové a má název „*Some quantitative aspects of the Czech syllable*" (Některé kvantitativní aspekty české slabiky), str. 141—154. Autorka roztřídila slabiky podle začáteční (koncové) hlásky a pro každou z těchto tříd určila její frekvenci. Dvě slabiky mají týž typ, jestliže jsou stejně dlouhé a jestliže na sobě odpovídajících místech mají obě současně souhlásku nebo obě současně samohlásku. Autorka našla jednotlivé typy českých slabik a určila jejich frekvenci.

Všimneme si nyní obsahu prací z algebraické lingvistiky. M. Novotný v článku „*On some relations defined by languages*" (O některých relacích definovaných pomocí jazyků), str. 157—170, chápe jazyk jako uspořádanou dvojici (V, L), kde V je množina a L libovolná podmnožina volného monoidu V^* nad V. Pro $x \in V^*$ klade $x \in \nu(V, L)$, existují-li $u, v \in V^*$ tak, že $uxv \in L$; pro $x, y \in V^*$ klade $(x, y) \in > (V, L)$, jestliže při každém $u, v \in V^*$ z podmínky $uxv \in L$ plyne $uyv \in L$. Konečně definuje relaci $\equiv(V, L) = >(V, L) \cap (>(V, L))^{-1}$. Autor úplně charakterisoval tyto tři relace algebraickými prostředky v rámci teorie pologrup. Tyto relace jsou v algebraické lingvistice důležité, neboť slouží k definici konfigurací jazyků. V práci „*Two functions of context-free grammar*" (Dvě funkce nekontextové gramatiky), str. 171—176, upozorňuje L. Nebeský na nesnáze, které plynou z požadavku Chomského, aby přirozený jazyk byl generován nekontextovou gramatikou a aby zároveň frázové ukazatele (v intuitivním slova smyslu) byly definovány nekontextovou gramatikou. Autor ukazuje na příkladě, že oba požadavky nelze obecně splnit touž nekontextovou gramatikou. V práci „*The generative description of language*" (Generativní popis jazyka), str. 177—190, podává J. Horecký přehled pravidel, která vystupují v generativní gramatice slovenštiny. E. Benešová v článku „*On the semantic description of verbal modality*" (O semantickém popisu slovesné modality), str. 191—214, nachází všechny možné významy modálních sloves v češtině a podává jejich přehled. Další článek zařazený do oddílu „Algebraická lingvistika" napsala S. Machová. Článek má název „*The adverbial of cause in a generative description of Czech*" (Příslovce příčiny v generativním popisu češtiny), str. 215—228, a je příspěvkem ke generativnímu popisu češtiny ve smyslu P. Sgalla. K. Pala v práci „*On some conflicts between grammar and poetics*" (O některých konfliktech mezi gramatikou a poetikou), str. 229—240, vyšetřuje situaci, kdy věty generované nekontextovou gramatikou, splňují jisté požadavky kladené na básnický jazyk. Nejsou-li tyto požadavky splněny, dochází ke konfliktu. Autor navrhuje algoritmus vedoucí k odstranění těchto konfliktů. O. Sechser v článku „*A note on the substitution of one document retrieval language into another document retrieval language*" (Poznámka o substituci selekčního jazyka do jiného selekčního jazyka), str. 241—254, se zabývá dvojicí selekčních jazyků a popisuje operaci substituce pro dvojici takových jazyků. Popis je ilustrován na konkrétním případě.

Obsah sborníku dává dobrý přehled o práci lingvistů v matematické lingvistice u nás.

Miroslav Novotný, Brno

Derek J. S. Robinson: FINITENESS CONDITIONS AND GENERALIZED SOLUBLE GROUPS Part I and II. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 62 und 63. Springer Verlag Berlin—Heidelberg—New York 1972. Part I str. XVI + 210, cena DM 48,—, Part II str. XIV + 254, cena DM 64,—.

Ve sbírce Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, kterou vydává nakladatelství Springerovo od roku 1932, vyšla obsáhlá monografie o podmínkách konečnosti v grupách a o zobecněných řešitelných grupách od Dereka J. S. Robinsona. Vyšetřování tohoto druhu problémů sahají až k samým počátkům abstraktní teorie nekonečných grup, k Otto Juljeviči Šmidtovi a pak ke škole A. G. Kuroše v Moskvě. A. G. Kuroš a jeho skupina shrnula výsledky dosažené v tomto oboru za necelých 15 let od konce války do tří velkých referujících monografií: Úsp. mat. nauk *2*, č. 3, (1947) 18—59, *13*, č. 4, (1958) 89—172, *14*, č. 5, (1959) 45—96. Mimoto vyšly ještě později dvě nebo tři malé sovětské monografie, týkající se však vždy jen speciálních úseků. Po válce se ve světě v této oblasti velmi intenzívně pracovalo. Byly vybudovány celé teorie různých tříd grup do této oblasti patřících. Tyto teorie souvisely jedna s druhou v mnohých bodech, v jiných bodech se opět od sebe lišily. To vše je uloženo v množství vědeckých článků roztroušených po matematických časopisech. Proto je velmi záslužné, že celé toto odvětví bylo systematicky a podrobně vyloženo v monografii Robinsonově.

Sbírka „Ergebnisse" má během několika desetiletí své existence ustálený charakter výkladu. Jednotlivé svazky podávají ucelený přehled nějaké matematické disciplíny s pokud možno nejnovějšími výsledky. Dále obsahují i stručné důkazy všech vět důležitých pro vykládanou teorii a velmi podrobnou bibliografii. Tento ráz zachovává i Robinsonova monografie. Výsledky jsou formulovány ve větách, za nimiž následují sice stručné, ale úplné důkazy. Jen u vedlejších výsledků nebo u výsledků, na něž není v dalším navazováno, jsou místo důkazů odkazy na literaturu, jejíž seznam na konci knihy má 46 stránek. Důkazy nutno ovšem velmi pečlivě čísti, neboť jsou formulovány stručně a pro zkrácení výkladu užívají ve velké míře symboliku, která je vyložena v přehledu na začátku knihy a někdy i v textu, je-li užíváno příslušného značení jen v jednom paragrafu. Seznam symbolů je otištěn na začátku každého dílu. Do přehledu je třeba při četbě stále nahlížet, neboť si nelze všechny symboly pamatovat. To sice při čtení zdržuje, ale jinak nebylo by možno docílit v důkazech dosti velké stručnosti a objem knihy by neúnosně vzrostl. Výsledkům ve větách dá se rozumět při znalosti definicí a symbolů bez znalosti důkazů. Kniha předpokládá znalost základů obecné teorie grup tak, jak ji zná dnes každý algebraik. Nepředpokládá nic z homologické algebry nebo z teorie kategorií. Ostatně těchto dvou disciplín autor téměř neužívá.

1. kapitola nazvaná „*Základní pojmy z teorie nekonečných grup*" má úvodní charakter a týká se obecné teorie grup, nikoliv vlastní látky knihy. Kniha vyšetřuje různé třídy grup. Pod třídou rozumí autor každou třídu $\mathfrak{A}$, která obsahuje jednotkovou grupu a s každou grupou i všechny grupy s ní izomorfní. Je definována jednou nebo více grupovými vlastnostmi, které musí splňovat všechny grupy třídy. Je jasné, že můžeme vyšetřovat buď třídy nebo vlastnosti, kterými jsou třídy definovány. To autor též střídavě dělá. Příklady: grupy konečné, grupy konečně generované, grupy periodické (torzní), grupy Abelovy atd. Pro třídy grup se zavádí pojem operace jakožto zobrazení φ, které přiřazuje každé třídě grup $\mathfrak{A}$ jednoznačně určenou třídu grup $\mathfrak{A}\varphi$. Přitom požadujeme, aby toto zobrazení φ bylo pro inkluzi izotonní tj. aby platilo

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A}\varphi \subseteq \mathfrak{B}\varphi . \tag{1}$$

V moderní algebře hrají velmi důležitou roli uzávěrové operace tj. operace φ, které kromě (1) jsou ještě extenzívní

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}\varphi$$

a idempotentní

$$(\mathfrak{A}\varphi)\,\varphi = \mathfrak{A}\varphi .$$

Je-li φ uzávěrová operace, pak třídy $\mathfrak{A}$, pro něž platí $\mathfrak{A}\varphi = \mathfrak{A}$, se nazývají uzavřené pro operaci φ. Odtud plyne, že $\mathfrak{A}\varphi$ je vždy nejmenší třída, která obsahuje třídu $\mathfrak{A}$ a je pro φ uzavřená. $\mathfrak{A}\varphi$ se pak nazývá uzávěr (φ - uzávěr) třídy $\mathfrak{A}$. Příkladem takových uzávěrových operací je na příklad to, že k dané třídě přidáme pro každou její grupu i všechny podgrupy této grupy. To je uzávěrová operace. Dostaneme tak třídu uzavřenou pro podgrupy. Jiné takové uzávěrové operace jsou: přidání všech epimorfních (homomorfních) obrazů grup ve třídě, přidání všech kartézských součinů grup ze třídy. Třídy grup, které jsou uzavřené pro všechny tři právě uvedené operace se nazývají variety (varieties, mnogoobrazija, Manigfaltigkeiten).

Buď $\mathfrak{A}$ nějaká třída grup. Důležitým pojmem je lokální $\mathfrak{A}$-třída. Robinson ji definuje podle D. H. McLaina jakožto třídu takových grup, v nichž každá konečná množina prvků je obsažena v nějaké podgrupě, která patří do třídy $\mathfrak{A}$. To je definice poněkud obecnější, než je definice. která se obvykle v teorii grup užívá. Podle ní lokální $\mathfrak{A}$-třída je třída grup, v nichž každá konečně generovaná podgrupa patří do třídy $\mathfrak{A}$. Jako příklady uveďme třídy: lokálně konečných grup, lokálně Abelových grup, lokálně nilpotentních grup.

Máme-li dánu grupu G, můžeme v množině všech podgrup z G vytknout různé její části. Nejdůležitější z nich jsou množina všech normálních podgrup a množina všech subnormálních podgrup. Podgrupa H v G je subnormální podgrupa, když existuje konečný řetězec podgrup

(2) $$G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \ldots \rhd G_r = H\,,$$

v němž každá podgrupa je normální podgrupou v předcházející podgrupě.

Kapitola jedná dále o řadách podgrup (subgroup series). Stručně můžeme říci, že řada je množina podgrup, která obsahuje G a podgrupu jednotkovou U a která je lineárně uspořádaná. Přitom požadujeme, aby uspořádání bylo úplné (bez mezer) a aby ve skocích každá dolní podgrupa skoku byla normální podgrupou v horní podgrupě skoku. Speciálnější případ je rostoucí (transfinitní) řada (ascending series). Je to řada, která je inkluzí vzestupně dobře uspořádaná. Duálně se definuje klesající (transfinitní) řada (descending series). Můžeme dále požadovat, aby všechny podgrupy řady měly stanovené vlastnosti, např. byly normální. Často se požaduje, aby faktorové grupy $G_\lambda/G_{\lambda+1}$ skoků $G_\lambda \rhd G_{\lambda+1}$ měly předepsané vlastnosti, byly např. konečné, Abelovy, torzní atd. Omezíme-li se jen na konečné řady, dostáváme řady subnormální, které mají tvar

(3) $$G = G_0 \rhd G_1 \rhd \ldots \rhd G_{r-1} \rhd G_r = U\,.$$

Řadu, která není vlastní částí jiné řady se stejnými vlastnostmi, nazývá autor kompoziční řadou.

Nyní můžeme definovat, co autor rozumí podmínkou konečnosti. Je to každá vlastnost teoretickogrupová, kterou mají všechny konečné grupy. Takovou vlastností je na příklad vlastnost mít konečný počet generátorů, být grupou periodickou (torzní), mít konečnou kompoziční řadu nebo vlastnost, že podgrupy grupy splňují maximální nebo minimální podmínku (Max nebo Min) nebo splňují podmínky obě. Max (Min) znamená, že každá množina podgrup grupy má maximální (minimální) podgrupy. Další konečné vlastnosti dostaneme, když podmínku Max nebo Min vztáhneme jen na podgrupy mající jisté vlastnosti (na příklad na normální podgrupy). Můžeme též říci, že třída podgrup $\mathfrak{A}$ definovaná pomocí podmínek konečnosti je každá třída, která obsahuje třídu konečných grup $\mathfrak{F}$ tj. pro kterou platí

(4) $$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{A}\,.$$

2. kapitola nazvaná „*Řešitelné a nilpotentní grupy*" patří vlastně ještě do obecné teorie grup. Jedná nejdříve velmi přehledným způsobem o komutátorech a o počítání s nimi. Komutátor grupy G je prvek

(5) $$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy\,, \quad x, y \in G\,.$$

Podgrupa generovaná v G všemi komutátory, se nazývá komutant G' (commutator subgroup), lépe řečeno první komutant, značení $[G, G]$. Utvoříme-li komutant $G'' = [G', G']$ grupy G', dostaneme druhý komutant. Tento postup můžeme transfinitně pokračovat, dokud $G^{(\alpha+1)} \neq G^{\alpha}$. Dostaneme tak transfinitní klesající posloupnost komutantů

$$(6) \qquad G = G^{(0)} \supseteqq G^{(1)} \supseteqq G^{(2)} \supseteqq \ldots \supseteqq G^{(\alpha)} \supseteqq \ldots$$

Zde platí $G^{(\lambda)} = \bigcap_{\alpha < \lambda} G^{(\alpha)}$ pro limitní λ. Všechny tyto podgrupy jsou úplně charakteristické. Jsou-li H a K dvě podgrupy grupy G, pak jejich vzájemný komutant $[H, K]$ je podgrupa generovaná všemi komutátory (5), kdež $x \in H$, $y \in K$.

Grupa G se nazývá řešitelná, má-li aspoň jednu subnomrální řadu (3), v níž všechny grupy faktorové G_{i-1}/G_i jsou Abelovy. To nastává právě tehdy, je-li klesající řada komutantů konečná a končí jednotkovou podgrupou U. Grupa G se nazývá nilpotentní, když klesající transfinitní řada vzájemných komutantů (dolní centrální řada)

$$(7) \qquad G = \gamma_0(G) \supset \gamma_1(G) = [G', G] \supset \ldots \supset \gamma_{\alpha+1}(G) = [\gamma_\alpha(G), G] \supset \ldots$$

je konečná a končí U. To nastává právě tehdy, když stoupající transfinítní řada (horní centrální řada)

$$(8) \qquad \zeta_0(G) = U \subset \zeta_1(G) \subset \zeta_2(G) \subset \ldots$$

je konečná a končí celou grupou G. Zde značí $\zeta_1(G) = \zeta(G)$ centrum grupy G a $\zeta_{\alpha+1}(G)/\zeta_\alpha(G)$ je centrum grupy $G/\zeta_\alpha(G)$. V tomto případě mají řady (7) a (8) stejnou délku. Třída nilpotentních grup je vlastní podtřída třídy grup řešitelných. Připomeňme, že obě třídy nejsou třídy s podmínkami konečnosti.

Vlastní vyšetřování grup s podmínkami konečnosti počíná 3. kapitolou, která jedná o grupách, které splňují maximální podmínku (Max) nebo minimální podmínku (Min) pro podgrupy. O těchto dvou třídách je celkově ještě málo známo, ačkoliv různí autoři je velmi intenzívně vyšetřovali. To platí i o podmínce Min, která daleko silněji omezuje grupy než podmínka Max. V kapitole jsou vyšetřovány i třídy grup, které splňují Max nebo Min pro speciální třídy podgrup, jako jsou podgrupy subnormální, normální nebo Abelovy. 4. kapitola jedná o grupách, které jsou definovány tím, že požadujeme jisté podmínky konečnosti pro třídy konjugovaných prvků. Uvedu zde jen tak zvané grupy FC, tj. grupy, v nichž každá třída konjugovaných prvků je konečná. Takové podmínky jsou dále kombinovány ještě s jinými podmínkami konečnosti.

Poslední 5. kapitola první části jedná o podmínkách konečnosti týkajících se normálních a subnormálních podgrup, tj. o podmínkách Max a Min pro normální nebo subnormální podgrupy, po případě Max a Min pro různé podtřídy těchto tříd podgrup. V kapitole je přitom věnována značná pozornost nekonečným jednoduchým grupám.

Druhá část knihy začíná touto definicí: Buď $\mathfrak{A}$ nějaká třída grup, třída $\mathfrak{B}$ zobecněných $\mathfrak{A}$-grup je třída taková, že každá konečná $\mathfrak{B}$-grupa je $\mathfrak{A}$-grupou, tj., je to třída $\mathfrak{B}$, pro niž platí

$$(9) \qquad \mathfrak{F} \cap \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}\,.$$

Třída zobecněných konečných grup je třída, která splňuje nějakou podmínku konečnosti. Rovněž každá třída, která splňuje lokálně nějakou podmínku konečnosti $\mathfrak{A}$, je zobecněná $\mathfrak{A}$-třída.

Kapitola 6. pojednává o zobecněných nilpotentních grupách. Požadujeme-li na příklad, aby grupa měla transfinitní klesající řadu (7), která končí U, nebo aby měla stoupající transifinitní řadu (8), která končí G, dostaneme dvě od sebe různé velmi významné zobecněné nilpotentní třídy. O tom, kdy z platnosti jedné z těchto dvou podmínek plyne druhá, je velmi málo známo.

Kapitola 8. je věnována třídám zobecněných řešitelných grup a pak tak zvaným lokálním teorémům. Třída $\mathfrak{A}$, která je totožná s lokální $\mathfrak{A}$-třídou, nazývá se lokálně uzavřená. Teorém o tom, že daná třída je lokálně uzavřená, nazývá se lokální teorém. Malcev vymyslil první důmyslnou metodu pro důkazy, že daná třída je lokálně uzavřená. Jiné metody sestrojili Kuroš, McLain, Cleave.

Kapitola 9. jedná o třídě residuálně konečných grup, tj. o třídě $R\mathfrak{F}$, pro niž platí: Je-li $G \in R\mathfrak{F}$ a $N_\lambda \lhd G$, $\lambda \in \Lambda$, $G/N_\lambda \in \mathfrak{F}$, pak i $G/\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \in \mathfrak{F}$. ($\mathfrak{F}$ třída konečných grup). Konečně poslední 10. kapitola vyšetřuje podrobně nekonečné řešitelné grupy.

Je velmi záslužné, že byl shrnut v jedné velké monografii obor, který nebyl monograficky zpracován déle než 15 let. Velkou předností knihy je rozvržení látky, které je velmi soustavné a logické. Kniha vyniká tím, že zavádí přesné definice tam, kde dosud se jen neurčitě naznačovalo. Je to zvláště definice podmínek konečnosti (4) a definice zevšeobecněné třídy grup (9). Dříve se na příklad říkalo, že třída definovaná podmínkami konečnosti je třída, která je nějakým způsobem blízká konečným grupám, což ovšem není žádný matematický výrok. Kniha v každém paragrafu uvádí hned to, co ještě není o věci známo a často odhaduje i obtížnost řešení příslušných problémů. V knize je konstruována řada zajímavých příkladů. Jak jsem již řekl v úvodě, četba knihy není lehká. Bude však nezbytná pro ty, kteří budou chtít pracovat v oblasti teorie grup, o níž kniha pojednává. Ale i pro pracovníky v jiných oblastech teorie grup lze najít v knize mnoho příkladů, které pro jejich vyšetřování mohou sloužit jako příklady pro opak. Další takové příklady dají se metodami v knize vyloženými sestrojovat. Domnívám se proto, že kniha má velkou důležitost i obecně pro abstraktní teorii grup. V teorii grup se v přítomné době provádí značná přestavba terminologie. Některé názvy zděděné z minulosti se nahrazují v mnohých moderních knihách názvy novými tak, aby názvosloví bylo systematické a název více vystihoval jím definovaný pojem. Zde autor zůstal jen na polovině cesty. Z prací, které vznikly na území naší republiky, jsou v knize citovány práce Dlabovy a Kořínkovy.

Vladimír Kořínek, Praha

Carl Faith: ALGEBRA: RINGS, MODULES AND CATEGORIES I (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 190), Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1973, XVIII + 565 strán, 54,— DM.

Táto kniha je prvým sväzkom dvojdielnej učebnice venovanej teórii okruhov, modulov a kategórií. Z výberu látky a z metódy výkladu je vidieť, že autor kladie približne rovnaký dôraz na klasické vety o štruktúre okruhov (porov. napr. knihu Jacobsonovu „*Structure of rings*") a na metódy homologickej algebry a teórie kategórií; svojím zameraním leží teda Faithova kniha asi uprostred medzi citovanou knihou Jacobsonovou a knihou „*Homological algebra*" Cartana a Eilenberga.

Obsah knihy je nasledujúci. Úvodná časť (42 strán) pojednáva o axiomatike Zermelo-Fraenkelovej teórie množín, o binárnych reláciách, čiastočne usporiadaných množinách a sväzoch, a o kardinálnych a ordinálnych číslach. Ďalší text knihy je rozdelený na štyri časti.

Časť I (283 strán) má názov „*Úvod do operácií: monoid, pologrupa, grupa, kategória, okruh a modul*". Má 6 kapitol. Prvá kapitola obsahuje základné definicie a vlastnosti pologrúp, grúp a kategórií. Z názvov ďalších kapitol uveďme: súčiny a kosúčiny, okruh a modul, projektívne moduly a štruktúra jednoduchých Noetherovských okruhov, algebry, abelovské kategórie.

Názov časti II je „*Štruktúra Noetherovských poloprostých okruhov*" (85 strán); táto časť sa skladá z kapitol: Obecné Wedderburnove vety, Polojednoduché moduly a homologická dimenzia, Noetherovské polojednoduché okruhy, Rády v semilokálnych okruhoch matíc.

Časť III s názvom „*Tenzorová algebra*" (68 strán) má tri kapitoly, pojednávajúce o tenzorových súčinoch, Moritovej vete a o algebrách nad telesom.

Časť IV má názov „*Štruktúra abelovských kategórií*" (51 strán). Skladá sa z troch kapitol, v ktorých sa preberajú Grothendieckove kategórie, podielové kategórie a torzné teórie.

Každá z týchto štyroch častí obsahuje úvodný paragraf, v ktorom sa podáva prehľad hlavných výsledkov a motivácia postupu; zároveň sa popisuje návaznosť na predošlé ako aj na nasledujúce časti knihy. V záverečných paragrafoch jednotlivých častí (prípadne aj jednotlivých kapitol) sa nachádza krátky prehľad o ďalších výsledkoch, otvorených problémoch a základných tendenciách vývinu v príslušnej oblasti. Zoznam literatúry, uvedený na konci knihy, má 13 strán. Okrem toho sa nachádzajú zoznamy literatúry aj za jednotlivými kapitolami.

Spôsob výkladu v prvej časti knihy je veľmi podrobný a dokonale metodicky premyslený (pripomínal mi — hoci ide o inú oblasť — metódu výkladu akad. Jarníka v jeho knihách Diferenciálny počet a Integrálny počet). V ďalších častiach, v ktorých sa autor snaží priviesť čitateľa až k „prvým frontovým líniám" súčasného výskumu teórie okruhov, je výklad stručnejší.

Celkove možno knihu charakterizovať ako veľmi zdarilú a doporučiť ju ako učebnicu pre študentov a ašpirantov aj ako užitočnú príručku pre špecialistov v oblasti teórie okruhov a kategórií.

Ján Jakubík, Košice

Ivan Singer: BASES IN BANACH SPACES I, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 154). Stran VIII + 668. Cena DM 112,—; US $ 30.80.

Toto objemné dílo podává velmi podrobně výsledky, metody a problémy inspirované přes čtyřicet let odolávajícím problémem Schauderových basí. Je v něm shrnuto mnoho materiálů obsažených dosud jenom v časopisech.

První díl, který vyšel v r. 1970, sestává ze dvou obšírných kapitol. První pojednává o vlastnostech basí v obecných i konkrétních prostorech. Autor správně tušil (str. 109), že bude existovat separabilní Banachův prostor bez Schauderovy base, a tak v jednom paragrafu též formuluje postačující podmínky pro takový prostor. O některých důležitých prostorech však stále není rozhodnuto, zda mají basi. Jiný paragraf se zabývá nejlepšími aproximacemi v prostorech s basí. V druhé kapitole jsou diskutovány speciální třídy basí. Věty jsou uvedeny samozřejmě i s důkazy a geometrická povaha věcí je často zřetelná.

Obsah monografie tohoto druhu lze stěží plně vyjádřit byť jenom názvy jednotlivých paragrafů (v nynějším prvém díle je jich celkem pětačtyřicet). Obě kapitoly jsou však komentovány historickými a dalšími poznámkami s příslušnými odkazy, které umožní čtenáři lépe do knihy proniknout a najít v ní řadu zajímavých výsledků i dosud neřešených problémů. Kniha končí bibliografií (276 titulů), přehledem označení a rejstříkem autorským i věcným. Bylo by dobře, kdyby druhý díl obsahoval kromě slíbených kapitol (týkajících se zobecnění pojmu base, aplikací ve studiu struktury Banachových prostorů a některých vlastností basí v konkrétních prostorech) též nejnovější výsledky a problémy, které vznikly od r. 1972 v souvislosti s rozřešením aproximačního problému.

Závěrem budiž poznamenáno, že r. 1969 vydal J. T. Marti knihu *Introduction to the Theory of Bases* (rovněž Springer-Verlag), která vzhledem k střízlivějšímu výběru látky může býti vhodným úvodem do této oblasti funkcionální analysy. Předběžná znalost problematiky usnadní pak orientaci v Singerově monografii.

Jaroslav Zemánek, Praha

Karel Rektorys a spolupracovníci: PŘEHLED UŽITÉ MATEMATIKY. Třetí, nezměněné vydání. SNTL, Praha 1973. 1140 stran, 404 obrázky. Cena Kčs 99,—.

Kdyby se vedla dlouhodobá tabulka matematických bestsellerů, zaujímala by v ní jistě přední místo posuzovaná publikace. Vždyť tímto třetím vydáním dosáhl její celkový náklad na naše poměry úctyhodného čísla — 35 600 výtisků (1. vydání — 1963 — 10 200 výtisků; 2. vydání — 1968 — 15 200 výtisků; 3. vydání — 1973 — 10 200 výtisků), nemluvě o vydání anglickém, které vyšlo v roce 1969 v koedici s nakladatelstvím Iliffe Books Ltd, London.

Zdá se, že žádné z předchozích vydání nebylo v tomto časopise recenzováno; připadalo by mi však značně formální psát recenzi nyní, tak říkajíc k 10. výročí jejího prvního vydání (či spíše — vzhledem k známým lhůtám našich matematických časopisů — k výročí dvanáctému). O užitečnosti této knihy svědčí její náklad a lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že většina čtenářů tohoto časopisu ji už měla v rukou, ví, co v ní je obsaženo, atd. Nezbývá tedy než složit poklonu K. Rektorysovi, který se nejen podstatnou měrou podílí na knize autorsky (napsal $15\frac{1}{2}$ kapitoly z celkového počtu 35 kapitol), ale dokázal také zorganizovat a koordinovat činnost osmnáctičlenného autorského kolektivu. Která z těchto dvou činností asi byla těžší?

Nyní už můžeme jen čekat, v jakém nákladu vyjde v roce 1978 vydání čtvrté a jaká bude jeho cena; 1. vydání stálo 82,— Kčs, druhé 92,—Kčs a třetí 99,— Kčs.

Alois Kufner, Praha

Allan M. Krall: LINEAR METHODS OF APPLIED ANALYSIS. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, Massachusetts 1973, XLV + 706 stran.

Základní představu o obsahu této knihy poskytne soupis názvů jednotlivých kapitol: 1. Některé nerovnosti, 2. Lineární prostory a lineární operátory, 3. Věty o existenci a jednoznačnosti, 4. Lineární obyčejné diferenciální rovnice, 5. Obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, 6. Stoneova-Weierstrassova věta, 7. Hilbertovy prostory, 8. Lineární operátory v Hilbertově prostoru, 9. Kompaktní operátory v Hilbertově prostoru, 10. Speciální funkce, 11. Fourierův integrál, 12. Singulární Sturmova-Liouvilleova úloha, 13. Úvod do parciálních diferenciálních rovnic, 14. Distribuce, 15. Laplaceova rovnice, 16. Rovnice pro vedení tepla, 17. Vlnová rovnice. Připojeny jsou dva dodatky: 1. Spektrální reprezentace neohraničeného samoadjungovaného operátoru a 2. Odvození rovnice pro vedení tepla, vlnové rovnice a Laplaceovy rovnice.

Jak je vidět z výčtu kapitol, jde o knihu s velmi širokým záběrem. Nejde však o vědeckou monografii. Dalo by se (podle našich zvyklostí) říci, že kniha je konglomerátem několika vysokoškolských skript, přičemž je k jednotnému výkladu podstatně využito to, co je jednotlivým tématům společné. Ten, kdo by v knize hledal aplikace (v tom smyslu jak se o nich obvykle mluví) bude zklamán. Autor sám v předmluvě píše, že knihu psal z hlediska matematika a ne z hlediska fyzika nebo inženýra. K tomu, aby bylo možné výsledky použít při aplikacích, je třeba studovat zvlášť ještě fyziku nebo techniku. Název je pro celou knihu příznačný, jde o metody aplikované matematiky a ne o aplikovanou matematiku.

Pokud jde o samotné obory z jednotlivých kapitol, jsou o každém z nich uvedena základní fakta. Výklad nejde do přílišných detailů a hloubek, využívá moderních postupů, jednotících hledisek funkcionální analýzy a je v tomto smyslu progresivní.

Kniha je vydána fotografickým reprodukováním autorovy — s velkou péčí provedené — rukopisné předlohy.

Učitelům matematiky (např. na technikách) by kniha mohla dobře posloužit k základní informaci o moderním pojetí výkladu aplikovatelné lineární matematiky. V každém případě je v ní vymezeno, podle mého názoru, minimum znalostí z lineární matematiky, které by každý učitel matematiky na technice měl bezpodmínečně ovládat a které by každý absolvent fyziky nebo techniky mohl při své práci používat.

Štefan Schwabik, Praha

F. a *R. Nevanlinna:* ABSOLUTE ANALYSIS. Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1973, 270 str., cena 88,— DM.

Kniha je zaměřena jako systematický výklad základů pro obecný infinitezimální počet, který je fundován „absolutně“ — bez souřadnic, nezávisle na dimensi vektorových prostorů.

Tento přístup k analýze má svůj původ v moderní funkcionální analýze a jeho využití v klasické analýze vede k jisté jednotě pohledu a jednoduchosti výkladu, odhaluje algebraickou strukturu analýzy. Výklad v knize je sice redukován na teorii v konečně mnoha proměnných, „absolutnost" výkladu však vede k tomu, že výsledky lze přímo, nebo po nepatrných modifikacích, přenést také na případ nekonečně dimenzionálních prostorů (Hilbertův, resp. Banachův prostor).

Výklad v knize je rozvržen do šesti kapitol. První kapitola má úvodní charakter a je věnována lineární algebře. Je zpracována z hlediska potřeb analýzy, která je předmětem dalších kapitol. Mluví se zde o simplexech, multilineárních funkcích a metrizaci afinních prostorů.

Vlastní analýza začíná druhou kapitolou, která nese název Diferenciální počet. Je zaveden pojem derivace a diferenciálu funkce způsobem známým z funkcionální analýzy (Gâteaux, Fréchet). Je pojednáno o Taylorově formuli, větě o střední hodnotě. Velká pozornost je věnována implicitním funkcím. Třetí kapitola se zabývá integrálním počtem. Ústředním bodem této kapitoly je afinní integrál z alternujícího diferenciálu přes omezený simplex; integrál je definován podobně jako Riemannův integrál (v podstatě jde o integrál Grassmanova typu z vnější diferenciální formy). Je uvedena Stokesova věta.

Čtvrtá kapitola je nazvána Diferenciální rovnice. Zde jsou vyšetřovány normální systémy (rovnice s jednou nezávisle proměnnou, tj. obyčejné diferenciální rovnice), obecné rovnice 1. řádu (nezávisle proměnných je více, tj. jde o parciální diferenciální rovnice 1. řádu) a lineární rovnice 1. řádu. Zde obzvláště vynikne jednotící schopnost absolutního přístupu k analýze.

Teorie křivek a m dimenzionálních ploch v n dimenzionálním, resp. $m + 1$ dimenzionálním prostoru je uvedena v páté kapitole. Zde je také „nesouřadnicové" podání tenzorového počtu, který je nutný pro teorii křivek a ploch.

Závěr knihy tvoří informativní a přehledná kapitola o afinní diferenciální geometrii a riemannovské geometrii.

Štefan Schwabik, Praha

Horst Schubert: CATEGORIES. Vydalo nakladatelství Springer, Berlin—Heidelberg—New York 1972. Cena 93 DM, stran XI + 386, cena 93,— DM.

Tato kniha, která vyšla mimo obvyklé Springerovy matematické řady, je rozšířeným překladem (pořízeným Evou Grayovou) dvoudílných *Kategorien* z Heidelberger Taschenbücher 65, 66. Rozšíření se týká hlavně toho, že pro anglické vydání byl připsán nový jedenadvacátý odstavec.

Obsah knihy lze nejlépe stručně charakterizovat názvy a rozsahem jednotlivých odstavců: 1. Categories (1—5). 2. Functors (15). 3. Categories of categories and categories of functors (24). 4. Representable functors (32). 5. Some special objects and morphisms (36). 6. Diagrams (44). 7. Limits (61). 8. Colimits (68). 9. Filtered colimits (79). 10. Setvalued functors (95). 11. Objects with an algebraic structure (108). 12. Abelian categories (122). 13. Exact sequences (138). 14. Colimits of monomorphisms (151). 15. Injective envelopes (165). 16. Adjoint functors (186). 17. Pairs of adjoint functors between functor categories (218). 18. Principles of universal algebra (255). 19. Calculus of fractions (289). 20. Grothendieck topologies (318). 21. Triples (372).

Z autorovy předmluvy se dovídáme, že kniha je zamýšlena jako učebnice. Skutečně je také výklad velmi podrobný; i když motivace je zde diskutována méně podrobně než v jiných podobných knihách, najde se tu poměrně mnoho objasňujících poznámek a hlavně hodně cvičení.

Ilustrující příklady jsou vzaty hlavně z algebry; analytici se budou nadále těšit na knihu o kategoriích, kde se bude hovořit také např. o dynamických systémech, ergodické teorii nebo harmonické analýze.

Karel Karták, Praha

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

ZPRÁVY

SEDMDESÁT LET AKADEMIKA JOSEFA NOVÁKA

ZDENĚK FROLÍK, FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

Dne 19. dubna 1975 se dožil sedmdesáti let akademik JOSEF NOVÁK, ředitel Matematického ústavu ČSAV, předseda vědeckého kolegia matematiky a předseda Jednoty československých matematiků a fyziků. Srdečně blahopřejeme a do dalších let přejeme mnoho úspěchů v osobním životě, ve vědecké práci i v práci pro celou československou matematickou obec.

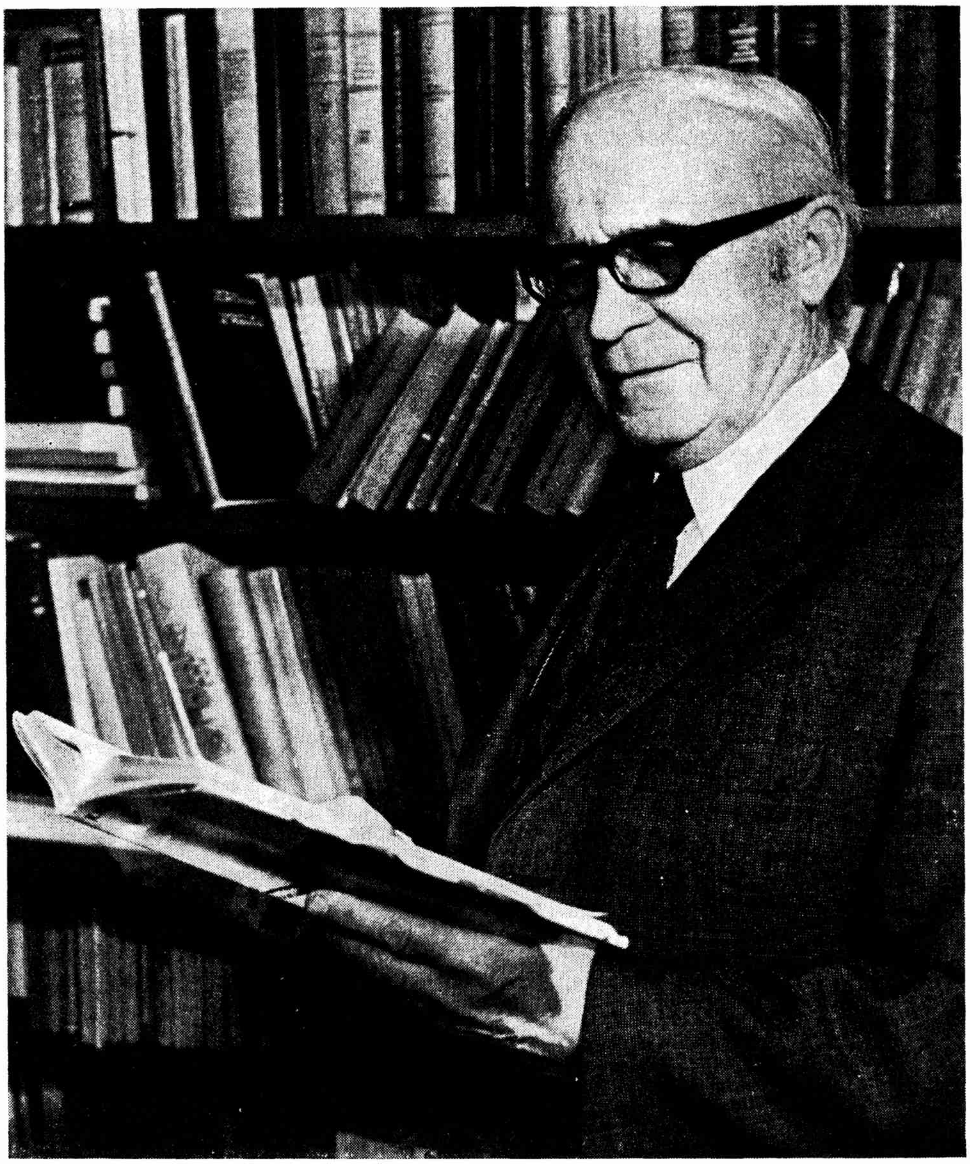
Časopis pro pěstování matematiky přinesl již před deseti lety, u příležitosti šedesátých narozenin akademika Nováka, obšírný článek[1]) obsahující popis běhu života jubilantova i zevrubné vylíčení jeho vědecké, pedagogické i vědecko-organisační činnosti. Při svém hodnocení vycházeli autoři onoho článku z explicitně formulovaného předpokladu, že šedesát let života je doba dost dlouhá, aby takové zhodnocení bylo možno spolehlivě provést a aby poskytlo dostatečně věrný obraz jubilantovy vědecké osobnosti.

Zkušenost posledních deseti let však ukázala, že tento předpoklad nebyl zcela oprávněný. Akademik Novák v této době ještě znásobil svou tak usilovnou a významnou činnost, takže toto desetiletí patří bezpochyby k nejefektivnějším v jeho životě.

To se týká především jeho vědecko-organisátorské činnosti a jejího významu pro celou československou matematiku. Akademik Novák zastával zajisté již dříve různé funkce v řídicích orgánech ČSAV a v naší vědě vůbec. Avšak právě uplynulá léta, v nichž se řešení generačních problémů v naší matematice zkomplikovalo problémy a pohyby celospolečenskými, znamenala zvýšené nároky na vůdčí postavy vědeckého života u nás. Bylo pak štěstím pro celou naši matematiku, že se akademik Novák s plnou intensitou ujal závažných úkolů spojených s řešením aktuálních problémů života vědy, vědců a vědeckých institucí.

S Matematickým ústavem ČSAV je akademik Novák spjat od jeho vzniku. Po dlouhá léta zde vedl oddělení pravděpodobnosti a matematické statistiky. Dařilo se mu přitom udržovat ve stabilní rovnováze teoretickou práci v pravděpodobnosti — sám byl zainteresován zejména na jejích topologických základech — s často velmi

[1]) Svazek *90* (1965), str. 236—249.



Akademik Josef Novák

konkrétními praktickými aplikacemi metod matematické statistiky ve výzkumu zemědělském, biologickém, lékařském. Když se pak v letech 1970—71 řešila po odchodu prof. V. Knichala otázka vedení celého ústavu, shledalo se záhy, že není pro tuto funkci vhodnějšího kandidáta, nežli je právě akademik Novák. Vedle svého smyslu pro vyvážené spojení teorie s praxí si do své funkce ředitele ústavu přinesl akademik Novák i velký rozhled, rozhodnost spojenou se schopností jednat s lidmi a další cenné osobní vlastnosti, které pomohly překonat kritické období.

Organisátorských schopností a umění jednat akademika Nováka je v ČSAV využíváno prakticky bez přestávky po celou dobu jejího trvání. Pro matematiku je zvláště důležitá funkce předsedy vědeckého kolegia matematiky, kterou akademik Novák zastává od r. 1966.

Vědecko organisační činnost akademika Nováka není však omezena jenom na Akademii. Působil ve vědeckých radách různých ústavů, fakult a institucí, je členem, resp. předsedou několika komisí pro obhajoby kandidátských či doktorských prací, a členem České komise pro vědecké hodnosti, atd.

Celostátně velice významná je účast akademika Nováka na státním programu základního výzkumu. Od r. 1970 je předsedou rady stěžejního úkolu I-4, který representuje v podstatě veškerou výzkumnou práci v teoretické matematice u nás. Právě zde měl akademik Novák mnohokráte příležitost prokázat své umění v tom, jak sladit odlišné názory a zájmy různých pracovišť tak, aby výsledkem byla harmonicky se rozvíjející a efektivní práce v matematickém základním výzkumu. Akademik Novák i v této náročné funkci osvědčil svou zásadovost a koncepčnost v práci.

Pro období posledních let je charakteristická také intensivní činnost akademika Nováka v Jednotě čs. matematiků a fyziků. V letech 1962—69 byl členem jejího ústředního výboru, poté členem hlavního výboru její české části a r. 1972 se stal předsedou Jednoty. Svou iniciativou přispěl pak akademik Novák nemalou měrou k aktivisaci Jednoty, která se v poslední době opět stává významnou silou v našem matematickém životě. Svědčí o tom mj. i uspořádání dvou úspěšných konferencí v Olomouci (1973) a v Ostravě (1974); na obou má akademik Novák podstatnou zásluhu. Olomoucká konference přehledně ukázala, kde všude je matematika užitečná, na ostravské konferenci, která byla po sjezdu v roce 1955 prvním celostátním setkáním československých matematiků, byla prodiskutována koncepce rozvoje naší matematiky na další období.

Rozhled, schopnosti a zkušenosti akademika Nováka jsou známy a oceňovány nejen v ČSSR ale i v zahraničí. Není proto divu, že byl přizván ke spolupráci v různých mezinárodních institucích. Již po řadu let spolupracuje akademik Novák jako předseda čs. národního komitétu pro matematiku s Mezinárodní matematickou unií, na jejíchž sjezdech několikráte ČSSR representoval. Od r. 1966 je rovněž členem jedné z komisí Unie, totiž Mezinárodní komise pro vyučování matematice (ICMI).

V r. 1972 byl akademik Novák pověřen mezinárodně významnou funkcí: je členem Poradní komise pro využití vědy a techniky pro rozvoj při OSN.

Když bylo v r. 1972 založeno Mezinárodní matematické centrum S. Banacha ve Varšavě, stal se akademik Novák, který se účastnil již přípravných prací, členem vědecké rady centra a zástupcem ČSAV.

Akademiku J. Novákovi zřejmě zbývá čas i na vlastní vědeckou práci. Připomeňme si, že J. Novák pracuje především v obecné topologii na problémech blízkých klasické teorii množin a že vynikl především důmyslnými a překvapujícími konstrukcemi, které v řadě případů našly značně širší uplatnění. Největší vliv na rozvoj topologie měly asi konstrukce regulárního prostoru, na němž je každá spojitá funkce konstantní, a konstrukce dvou spočetně kompaktních prostorů, jejichž součin není spočetně kompaktní. Nemáme přehled o nepublikovaných pracích J. Nováka. Poznamenejme jen, že jedna konstrukce z článku P. Erdös, A. Hajnal: On the structure of set-mappings, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. *9* (1958), 111—131, autory připsaná J. Novákovi, měla značný význam v logice (Jönssonovy algebry).

V posledním desetiletí akademik Novák publikoval asi 10 prací. Zabýval se především dalším rozpracováním teorie sekvenčních prostorů s ohledem na vytvoření obecnějšího modelu pro pravděpodobnostní pole. Technicky, J. Novák budoval teorii grup a algeber opatřených konvergencí, přičemž algebraické operace jsou spojité vzhledem ke konvergenci. Základním příkladem sekvenční algebry je algebra podmnožin dané množiny; grupová operace je symetrická diference, násobení je průnik a konvergenční struktura je množinová konvergence množin (tj. $A = \lim A_n$ právě když $A = \lim\inf A_n = \lim\sup A_n$). Využívá se toho, že pro pravděpodobnosti je σ-aditivita ekvivalentní sekvenční spojitosti. Vyjasnění nejzákladnějších otázek je velice obtížné; např. zkušeností z teorie topologických grup a z teorie uniformních prostorů nelze použít. Ostatně je známo ze zkušenosti, že sekvenční přístup je velice přirozený, ale přináší vždy specifickou a obtížnou problematiku.

J. Novák proanalyzoval základní definice, zavedl pojem zúplnění (není to reflexe, např. není určeno jednoznačně) a formuloval základní problémy, které se zdají být značně netriviálními. Neví se např., kdy se dá „uniformně" spojitá omezená funkce rozšířit na zúplnění (v případě pravděpodobnosti to jde ve výše uvedeném příkladě). Na Novákovy práce v tomto zaměření navázali jeho žáci R. Frič (CSc., 1972) a P. Kratochvíl (CSc., 1975).

Teorie sekvenčních grup, okruhů, algeber a sekvenčních uniformních prostorů je ještě značně nepřehledná a proto upouštíme od rozboru jednotlivých prací a odkazujeme na práce [50], [53], [54] a [56].

Zajímavá je poslední práce [57], ve které se mohutnost množiny hromadných bodů totálně divergentní posloupnosti (žádná podposloupnost nekonverguje) odhaduje zdola jistou charakteristikou $\beta N - N$, která se už v jednom článku vyskytla pod názvem „Novákovo číslo", a bez jakýchkoliv předpokladů z teorie množin se dokazuje, že tato charakteristika je větší než $\aleph_1$.

Akademik J. Novák se zasloužil o matematiku nejen vlastní vědeckou prací a výchovou několika generací matematiků na mnoha pracovištích, ale i jako velice operativní a důsledný předseda organisačního výboru všech tří dosavadních pražských topologických symposií.

Neméně významná je činnost akademika Nováka v disciplíně zdánlivě tak odlehlé, jakou je genetika. Zušlechťovací proces v podmínkách socialistické zemědělské velkovýroby v ČSSR se nemohl opírat o klasickou genetiku let třicátých, ale o nově se vytvořivší odvětví vzniklé syntézou mendelistické genetiky a teorie pravděpodobnosti, tj. o genetiku populací.

Je zásluhou akademika Nováka, že se tento vědní obor na základě smluvně uzavřené spolupráce MÚ ČSAV a VÚŽV v Uhříněvsi začal u nás již koncem padesátých let velmi intenzivně rozvíjet. V roce 1961 se pak již v této cestě systematicky pokračovalo pořádáním pravidelně konaných seminářů. Tyto semináře plnily a dosud úspěšně plní dvojí funkci. Jednak ryze pracovní, kdy se řeší konkrétní výzkumné problémy, jednak programovou, kdy se dále rozpracovávají s přihlédnutím k světovému trendu teoretické základy selekce, šlechtění a hybridizace.

Konkrétní přínos akademika Nováka v této oblasti spočívá především v rozvedení principů genetických procesů v panmiktické populaci pro populaci bisexuální, dále v rozvedení modelu rovnoměrné a nerovnoměrné selekce se třemi selekčními koeficienty.

Akademik Novák v tomto případě navázal na své původní práce z let čtyřicátých, kdy působil v Zemských výzkumných ústavech zemědělských v Brně. Uvedené modely byly ověřeny na klasickém objektu genetiky, tj. na banánové mušce Drosophile melanogaster a stále více se ve svých principech stávají součástí selekčních a hybridizačních programů v chovu hospodářských zvířat.

Zájmy akademika Nováka v matematice nejsou omezeny na sféru čistě vědeckou. Je např. dobře známa jeho dlouholetá pomoc poskytovaná významné celostátní matematické soutěži pro žáky našich středních a základních škol: matematické olympiádě. Prakticky po celou dobu existence olympiády u nás je akademik Novák členem Ústředního výboru, který soutěž řídí (15 let byl jeho předsedou). Pro práci v olympiádě dovedl akad. Novák zainteresovat i další pracovníky Matematického ústavu. Také nyní jako u ředitele ústavu nachází matematická olympiáda u akademika Nováka vždy plné pochopení a podporu.

Zájem o matematickou olympiádu ostatně souvisí s širším zájmem akademika Nováka o otázky školské matematiky vůbec. Akademik Novák si vždy plně uvědomoval význam problematiky vyučování matematice pro rozvoj matematiky jako celku a proto usiloval o zabezpečení základního výzkumu v oblasti modernisace vyučování matematice. Trvale se snaží zajistit dobré podmínky pro práci Kabinetu pro modernisaci vyučování matematice, který je v posledních letech i organisačně součástí Matematického ústavu ČSAV.

Akademik Novák rozhodně není typem vědce uzavřeného do úzké oblasti vlastních zájmů. Neuhýbá před společenskou a politickou angažovaností, o jejímž významu pro vědeckého pracovníka je přesvědčen, jak to ostatně dovedl sám vyjádřit svými projevy a činy i celou svou činností ve vedoucích funkcích v ČSAV i mimo ni. V tomto duchu působí také na své mladší spolupracovníky a žáky.

Zásluhy akademika Nováka o vědu byly již několikráte oceněny. V r. 1965 mu byl propůjčen Řád práce, v r. 1970 Zlatá plaketa B. Bolzana. Palackého universita mu udělila v r. 1968 zlatou a v r. 1973 Pamětní medaili.

DOPLNĚK K SEZNAMU PRACÍ AKADEMIKA JOSEFA NOVÁKA

[45] On convergence spaces and their sequential envelopes. Czechoslovak Math. J. *15* (*90*) (1965), 74—100.

[46] Eine Bemerkung zum Begriff der topologischen Konvergenzgruppen. Simposio di Topologia (Messina, 1964). Edizioni Oderisi, Gubbio, 1965, 71—74.

[47] O vlivu selekce monohybridů na genové složení potomků. Živočišná výroba, zvláštní číslo *1*, 1965, 169—188.

[48] a) On a convergence topological ring of couples of disjoint sets. Nachr. Österreich. Math. Gesellsch. *19* (*79*) (1965), 50.
b) Extension theory of convergence structures and its application to probability theory. Contributions to Extension Theory of Topological Structures (Proc. Sympos., Berlin, 1967). Deutsch. Verlag. Wissensch., Berlin, 1969, 171—172.

[49] On topological convergence rings. Atti del' VIII Congresso dell'Unione Matematica Italiana (Trieste, 1967), Bologna, 1968, 417—418.

[50] On sequential envelopes defined by means of certain classes of continuous functions. Czechoslovak Math. J. *18* (*93*) (1968), 450—456.

[51] On some topological spaces represented by systems of sets. Proc. Internat. Sympos. on Topology and its Applications (Herceg-Novi, 1968). Savez Društava Mat. Fiz. i Astronom., Beograd, 1969, 269—270.

[52] On probabilities defined on a certain class of non-Boolean algebras. VII. Österreichischer Mathematikerkongress (Linz, 1968). Nachr. Österreich. Math. Gesellsch. *23* (*91*) (1970) 89—90.

[53] On convergence groups. Czechoslovak Math. J. *20* (*95*), (1970), 357—374.

[54] On some problems concerning the convergence spaces and groups. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (Proc. Conf., Kanpur, 1968). Academia, Praha, 1971, 219—229.

[55] On some topologies defined by a class of real-valued functions. General Topology and Appl. *1* (1971), 247—251.

[56] On completions of convergence commutative groups. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, III (Proc. Third Prague Topological Sympos., 1971). Academia, Praha, 1972, 335—340.

[57] a) On side points in compact Hausdorff spaces. Proc. Internat. Sympos. on Topology and its Applications (Budva, 1972). Savez Društava Mat. Fiz. i Astronom., Beograd, 1973, 184.
b) On side points in compact Hasudorff spaces. General Topology and Appl. (v tisku).

XVI. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

V dňoch 4. — 17. 7. 1974 sa v NDR konala už XVI. MMO, ktorej poriadateľmi boli Ministerstvo školstva NDR, Mathematische Gesellschaft der DDR a Ústredný výbor FDJ. Súťaže sa zúčastnil rekordný počet krajín: Bulharsko, ČSSR, Fínsko, Francúzsko, Holandsko, Juhoslávia, Kuba, Maďarsko, Mongolsko, NDR, Poľsko, Rakúsko, Rumunsko, Švédsko, Veľká Británia, Vietnamská demokratická republika, USA a ZSSR. S výnimkou Kuby a VDR boli všetky družstvá osemčlenné. Po prvý raz sa na MMO zúčastnili družstvá USA a VDR a obe dosiahli veľmi dobré výsledky.

Vlastná súťaž sa konala v Erfurte, kde po 2 dni riešilo 140 účastníkov súťaže celkom 6 pomerne náročných matematických úloh z elementárnej matematiky. Na riešenie 3 úloh mali každý deň 4 hodiny čistého času. Podľa dosiahnutých výsledkov bolo na záver súťaže odmenených 71 žiakov, z toho 10 dostalo I. cenu, 24 II. a 37 III. cenu. Okrem toho 3 žiaci dostali zvláštne ceny za originálne a zvlášť elegantné riešenia niektorých úloh.

Zo zúčastnených družstiev dosiahlo najlepšie výsledky — ako je tomu už niekoľko rokov — družstvo ZSSR. Na ďalších miestach v neoficiálnom hodnotení krajín skončili: USA, Maďarsko, NDR, Juhoslávia, Rakúsko, Rumunsko, Francúzsko, Veľká Británia, Švédsko, Bulharsko, ČSSR, VDR, Poľsko, Holandsko, Fínsko, Kuba, Mongolsko.

Československé družstvo v zložení Balanda (Č. Těšín), Kindlmann (Č. Budějovice), Navrátil (Olomouc), Širáň (Bratislava), Trlifaj (Praha), Valášek (Praha), Vencovská (Praha), Voldřich (Vimperk) dosiahlo celkom 158 bodov z 320 možných a 2 z jeho členov: Alena Vencovská a Pavel Kindlmann, získali III. cenu.

Po organizačnej stránke bola XVI. MMO pripravená veľmi dobre. Popri vynikajúcej odbornej príprave bola značná pozornosť venovaná tiež stránke spoločenskej. Účastníci olympiády sa mali možnosť zoznámiť tiež s viacerými mestami hostiteľskej krajiny a s ich pamätihodnosťami. Okrem dejiska súťaže Erfurtu to boli predovšetkým Výmar, Oberhof, Suhl, Eisenach, Wartburg, Buchenwald, Postupim a v neposlednej miere hlavné mesto NDR — Berlín, kde sa uskutočnilo slávnostné zakončenie súťaže a vyhlásenie výsledkov. XVI. MMO sa stretávala v hostiteľskej krajine tiež s primeranou pozornosťou dennej tlače a ostatných masovokomunikačných prostriedkov.

Počas svojho pobytu na olympiáde mali možnosť nádejné matematické talenty nadviazať celý rad vzájomných priateľstiev, ktoré sa môžu stať veľmi dobrým základom pre budúcu úspešnú spoluprácu.

Budúca — XVII. MMO sa uskutoční v júli 1975 v Bulharsku alebo v Mongolskej ľudovej republike.

Jozef Moravčík, Žilina

LETNÁ ŠKOLA „DIFFORD — 74“

Stalo sa už dobrým zvykom trocha vyplniť dlhú medzeru medzi konferenciami „Equadiff“ usporiadavaním letných škôl z obyčajných diferenciálnych rovníc zhruba v jej prostriedku. Takýmito akciami boli letná škola v r. 1965 v Jeseníkoch a letná škola v r. 1970 v Krpáčovej, na ktorú letná škola „DIFFORD — 74“, ktorá sa konala od 23. do 28. 9. 1974 v Starej Lesnej vo Vysokých Tatrách a ktorú usporiadal Matematický ústav SAV v spolupráci s ďalšími štyrma inštitúciami na Slovensku i v českých zemiach, nadväzovala.

Koncepcia týchto letných škôl sa už ustálila: ťažiskom programu sú prednášky, resp. série prednášok pozvaných popredných odborníkov zo zahraničia pre československých účastníkov. Hlavnou myšlienkou je tu umožniť intenzívny kontakt s nimi širokému fóru pracovníkov z ČSSR v oblasti obyčajných diferenciálnych rovníc, o ktorého existencii iste nemožno pochybovať.

Toho roku prišlo do Starej Lesnej 62 účastníkov z ČSSR, traja z Maďarska a po jednom z Poľska, Rumunska a ZAR. Z pozvaných prednášateľov zo zahraničia prišli ôsmi: štyria zo ZSSR, po jednom z Belgicka, NSR, Poľska a Talianska. Patrí im naša vďaka za to, že pripravili skutočne veľmi hodnotné prednášky a najmä za to, že neodmietli našu prosbu, aby k nim vypracovali písomné texty. Ďalšia naša vďaka patrí pracovníkom Prírodovedeckej fakulty UJEP a ich tlačového strediska, ktorí ich vydanie na úrovni umožnili.

Na letnej škole odzneli nasledovné prednášky:

V. A. BLAGODATSKICH (ZSSR): *Niektoré vety o diferenciálnych inklúziách* — prehľad (3 hod.)
A. CELLINA (Taliansko): *Obyčajné diferenciálne rovnice v Banachových priestoroch* (2 1/2 hod.)
I. T. KIGURADZE (ZSSR): *K teórii nelineárnych dvojbodových okrajových úloh* (3 hod.)
H. W. KNOBLOCH (NSR): *Linearizácia a integrálne variety pre obyčajné diferenciálne rovnice* (2 1/2 hod.)
Pontrjaginov princíp maxima pre problémy s ohraničeniami na stavové premenné (1 hod.)
J. MAWHIN (Belgicko): *Nelineárna funkcionálna analýza a periodické riešenia obyčajných diferenciálnych rovníc* (3 hod.)
A. D. MYŠKIS (ZSSR): *Rovnice kapilárnej rovnováhy a nebernsteinovské okrajové úlohy* (2 hod.)
Systémy s prepínaním (1 hod.)
C. OLECH (Poľsko): *Existencia riešení nekonvexných orientorových polí* (1 hod.)
Existencia oprimálnych riadení (1 hod.)
JU. A. RJABOV (ZSSR): *Rovnice s malým parametrom pri najvyššej derivácii* (1 hod.)
Numericky analytické periodické riešenia (1 hod.)
Nelineárne rovnice s malým oneskorením (1hod.)

Účastníci našli v Školskom a rehabilitačnom stredisku Východoslovenských energetických závodov veľmi príhodné prostredie s peknou prednáškovou miestnosťou. Aj počasie škole prialo: prvých 5 dní nám pripomínalo, že z hľadiska kalendára neprichodí školu nazývať letnou, čím znižovalo pokušenie chodiť za školu; zato posledný deň to vynahradil a môže slúžiť ako výchovné memento pre tých, ktorým vždy pôsobí ťažkosti vydržať do konca.

Je zaujímavé, že hoci prednášateľom bola daná voľnosť vo výbere témy a výber prenášateľov tiež nebol veľmi systematický (u prednášateľov zo zahraničia by sotva bolo možné také niečo žiadať), napokon sa medzi prednáškami objavilo dosť vzájomných súvislostí. Ak to bola náhoda, mali sme šťastie; ak v tom však bolo kus zákonitosti, tým lepšie pre matematiku.

Účastníci sa zhodli na tom, že škola sa vydarila a že bude i v budúcnosti užitočné v ich tradícii pokračovať.

Pavol Brunovský, Bratislava

OBHAJOBY A DISERTAČNÍ PRÁCE DOKTORŮ A KANDIDÁTŮ VĚD

Před *komisí pro obhajoby doktorských disertačních prací* obhájil dne 19. listopadu 1974 PhDr. ERNEST JUCOVIČ, CSc., práci na téma: „O kombinatorickej štrukture máp na orientovatelných plochách".

Před *komisemi pro obhajoby kandidátských disertačních prací* obhájili dne 18. června 1974 vietnamský státní příslušník PHAM VAN KIEU práci na téma: „The central limit theorem for controlled Markov and semi-Markov processes", dne 17. září 1974 OTA ŠMÍD práci na téma: „Lineární systémy a diferenciální operátory", dne 19. září 1974 RNDr. MIROSLAV HLADKÝ práci na téma: „Zobecnění precedenčních relací a gramatik", dne 20. listopadu 1974 RNDr. STANISLAV ŠMAKAL práci na téma: „Uzavřené prostorové křivky", dne 26. listopadu 1974 MIROSLAV DONT práci na téma: „Fredholmova metoda a rovnice vedení tepla" a JAROSLAV PELANT práci na téma: „Vztahy mezi různými typy zobecněných řešení obyčejných diferenciálních rovnic" a dne 4. prosince 1974 RNDr. ANNA NEUBRUNNOVÁ práci na téma: „O zovšeobecnení pojmu spojitosti funkcie" a RNDr. FRANTIŠEK ŠIŠOLÁK práci na téma: „O ohraničenosti riešení diferenciálnych rovníc s oneskoreným argumentom".

Redakce