Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

O ELEMENTÁRNÍM DŮKAZU PRVOČÍSELNÉ VĚTY

BŘETISLAV NOVÁK, Praha

Buď $\pi(x)$ počet prvočísel nepřesahujících x. Již GAUSS a LEGENDRE vyslovili domněnku, že

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\lg x}.\ ^{1)} \tag{1}$$

Trvalo však velmi dlouho, než byly učiněny prvé kroky k důkazu této „prvočíselné věty". Prvý pokrok znamenal výsledek ruského matematika ČEBYŠEVA:

$$\pi(x) \asymp \frac{x}{\lg x}$$

tj. existují dvě kladné konstanty c_1 a c_2 tak, že pro všechna $x \geqq 2$ je

$$c_1 \frac{x}{\lg x} < \pi(x) < c_2 \frac{x}{\lg x}.$$

Trvalo skoro padesát let, než na základě fundamentální práce B. RIEMANNA se nezávisle na sobě a skoro současně podařilo v r. 1896 HADAMARDOVI a DE LA VALÉE-POUSSINOVI dokázat vztah (1). Jejich důkaz nebyl elementární: používal dosti hlubokých výsledků z teorie funkcí komplexní proměnné a zejména pak vlastností Riemannovy dzeta funkce, která v polorovině $\operatorname{Re} s > 1$ je definována známým vztahem

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Ukázalo se však, že k aproximaci funkce $\pi(x)$ se lépe hodí tzv. integrállogaritmus x

$$\operatorname{li} x = \int_2^x \frac{du}{\lg u}$$

[1]) Vztah $f(x) \sim g(x)$ znamená, že $\lim_{x \to +\infty} f(x)/g(x) = 1$.

což – jak se zdá – předvídal již Gauss. De la Valeé-Poussine dokázal totiž mnohem více, než (1):

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O(xe^{-\alpha\sqrt{(\lg x)}})\,,^{2}) \tag{2}$$

s vhodnou konstantou α (např. $\alpha = 0{,}186$). Protože pro každé přirozené m máme (integrace per partes)

$$\operatorname{li} x = \int_2^x \frac{du}{\lg u} = \frac{x}{\lg x} + \frac{1!\,x}{\lg^2 x} + \ldots + \frac{(m-1)!\,x}{\lg^m x} + O\left(\frac{x}{\lg^{m+1} x}\right),$$

je (2) mnohem lepší než $\pi(x) = \operatorname{li} x + O(x \lg^{-m} x)$ pro sebevětší m, ale současně mnohem horší než $\pi(x) = \operatorname{li} x + O(x^{1-\varepsilon})$ pro sebemenší $\varepsilon > 0$ (vztah tohoto druhu ostatně nebyl dosud dokázán). Pro představu, jak jsme daleko od definitívního výsledku, uveďme, že LITTLEWOOD dokázal v r. 1914 vztah

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + \Omega\left(\sqrt{x}\,\frac{\lg\lg\lg x}{\lg x}\right).$$

Od důkazu vztahu (2) do dnešní doby se úsilí generací matematiků zaměřilo na zlepšení tohoto výsledku a na zjednodušení důkazu tj. zejména na jeho elementární úpravu. Snaha celkem přirozená: problém je formulovaný velmi elementárně a tedy by mělo existovat jeho řešení „stejnými" prostředky.

Zůstaneme-li na chvíli u neelementárních metod, můžeme říci, že až do dnešního dne se podařilo (2) zlepšit „pouze" na

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O(xe^{-\alpha(\lg x)^{3/5}(\lg\lg x)^{-1/5}}) \tag{3}$$

(sovětští matematici Vinogradov a Korobov nezávisle v r. 1958!), kde α je jistá kladná konstanta. O těchto výsledcích se lze dočíst např. v monografiích [4], [9], [10], [14], [17] a v učebním textu [11]. Upozorněme též na podrobné recense V. JARNÍKA (tento časopis *67* (1937), D 54–56, *67* (1938), D 303–306, *74* (1949), D 51–54, *85* (1960), 364–392 a zejména *76* (1951), 35–65, které se celé problematiky týkají.

Dlouhý vývoj prodělala snaha o co nejjednodušší (co do použitých prostředků) důkaz. Uveďme zde jen jména LANDAU, WIENER, GROSSWALD, INGHAM atd. Všechny tyto důkazy – jakkoliv jednoduché – se omezily na vztah (1) a nevyhnuly se použití vlastností Riemannovy dzeta funkce (je známo, že prvočíselná věta (1) je důsledkem vztahu $\zeta(s) \neq 0$ pro $\operatorname{Re} s \geqq 1$ a toho používají všechny „tauberovské" důkazy). Mnozí matematici se dokonce domnívali (např. Hardy v r. 1940 – viz [8], str. 38), že důkaz prvočíselné věty, nepoužívající alespoň této vlastnosti funkce $\zeta(s)$, není možný.

---

[2]) Připomeňme, že zápisy $f(x) = O(g(x))$, $f(x) = o(g(x))$ a $f(x) = \Omega(g(x)$ pro kladnou funkci $g(x)$ znamenají postupně $\limsup_{x\to+\infty} |f(x)/g(x)| < +\infty, = 0, > 0$.

Proto elementární důkazy objevené v r. 1948 norským matematikem A. SELBERGEM [15] a známým maďarským matematikem P. ERDÖSEM [5] vzbudily světovou senzaci a vyvolaly okamžitě celou řadu prací. Elementární neznamená ovšem jednoduchý. Lze však doslova říci, že vystačíme jen se základními pojmy teorie funkcí reálné proměnné tj. s pojmem derivace a integrálu (a s troškou přehánění můžeme říci, že i pojem integrál používáme pouze pro pohodlí). Elementární důkaz tedy nepoužívá ani Riemannovu dzeta funkci, ani teorii funkcí komplexní proměnné, Fourierovou transformaci atp. Pochopitelně se postupně objevovaly různé varianty elementárního důkazu (viz [4], [7], [10], [14], [16] a přehlednou práci [13]; v české literatuře je jedna varianta uvedena v učebním textu [19]). Všichni autoři se snažili pochopitelně dokázat elementárními prostředky více než jen vztah (1). Poměrně brzy byl nalezen elementární důkaz vztahu

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O\left(\frac{x}{\lg^{1+c} x}\right) \tag{4}$$

(VAN DER CORPUT (1965) $c = 0{,}005$, BREUSCH (1960) $c = \frac{1}{6} - \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$, WIRSING (1962) $c = \frac{3}{4}$, DUSUMBETOV (1963) $c = 1 - \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$; možnost takového zlepšení předvídal již Selberg – viz [15]). Zdálo se však, že další pronikavé zlepšení nebude elementárními metodami dostupné (GELFOND [6]). Překvapením tedy bylo, že v r. 1962 nezávisle na sobě a různými metodami italský matematik E. BOMBIERI a německý matematik E. WIRSING (viz [1] a [18]) ukázali, že vztah (4) platí pro každé $c > 0$. Za necelých osm let pak H. G. DIAMOND a J. STEINIG [3] podstatně snížili náskok analytických metod elementárním (i když skoro šedesátistránkovým) důkazem vztahu

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O\left(xe^{-(\lg x)^{1/7}(\lg\lg x)^{-2}}\right). \tag{5}$$

Technickým zdokonalením jejich práce pak v roce 1973 dokázali A. F. LAVRIK a A. Š. SOBIROV [12] nejlepší současný publikovaný výsledek, dosažený elementárními metodami:

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O\left(xe^{-(\lg x)^{1/6}(\lg\lg x)^{-3}}\right) \tag{6}$$

(pro přesnost: exponent 3 v (6) lze zmenšit na $2\frac{5}{7}$).

Dosažení těchto výsledků je velmi zajímavý příklad kolektivní práce v matematice „na dálku“. Zjednodušování původního důkazu, jeho nové varianty, pomáhalo najít „slabší“ místa, myšlenky letmo využité jedním autorem rozvíjí další v rozsáhlou teorii atp.

Pokusíme se nyní naznačit základní postupy uvedené problematiky tak, aby vynikly podstatné momenty, i když to v daném oboru, který je vázán nejen na hluboké myšlenky ale i na jejich obtížnou realizaci, není dosti dobře možné. V dalším budou písmena p a q (případně s indexy) znamenat různá prvočísla, m, n, i, j označují nezáporná celá čísla, $n > 0$; $x \geqq 1$ a $y \geqq 1$ jsou reálná čísla.

Zřejmě můžeme psát

$$N(x) = [x] = \sum_{n \leqq x} 1, \quad \pi(x) = \sum_{p \leqq x} 1.$$

Lze říci, že veškeré potíže spočívají v tom, že funkce $\pi(x)$ je velmi „nevhodně" volena, neboť prvočísla jsou definována svými multiplikativními vlastnostmi. Buď proto

$$T(x) = \lg [x]! = \sum_{n \leqq x} \lg n, \quad \vartheta(x) = \lg \prod_{p \leqq x} p = \sum_{p \leqq x} \lg p,$$

a ptejme se, jaký je vztah mezi funkcemi $\pi(x)$ a $\vartheta(x)$. Parciální sumací dostaneme ihned

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} (\lg x + \lg p - \lg x) = \pi(x) \lg x - \sum_{p \leqq x} \int_p^x \frac{dt}{t},$$

tj.

$$\text{(7)} \quad \vartheta(x) = \pi(x) \lg x - \int_2^x \frac{\pi(t)\, dt}{t} \quad \text{a podobně} \quad \pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\lg x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)\, dt}{t \lg^2 t}.$$

Odtud je již zřejmé, že vztahy $\pi(x) \sim \text{li}\, x$ a $\vartheta(x) \sim x$ jsou ekvivalentní; dokonce z každého odhadu rozdílu $\vartheta(x) - x$ dostaneme odpovídající odhad rozdílu $\pi(x) - \text{li}\, x$. Omezíme se tedy na vyšetřování (Čebyševovy) funkce $\vartheta(x)$. Abychom zachytili vztah mezi funkcemi $\vartheta(x)$ a $T(x)$, uvažme, že k $\vartheta(x)$ přispívají jen prvočísla, kdežto k $T(x)$ všechna přirozená čísla. Zkusme tento rozdíl zmenšit zavedením funkce (Čebyšev)

$$\psi(x) = \sum_{p^j \leqq x} \lg p = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(\sqrt[n]{x}).$$

Zřejmě

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \sum_{\substack{p^j \leqq x \\ j \geqq 2}} \lg p = \vartheta(x) + O(\sqrt{(x)} \lg x)$$

(je $p^j \leqq x$, $j \geqq 2$ tj. $j \leqq \lg x/\lg p$, $p \leqq \sqrt{x}$) a tedy opět stačí studovat funkci $\psi(x)$. Snadno nyní nahlédneme, že

$$\psi(x) = \sum_{n \leqq x} \Lambda(n), \quad \sum_{d|n} \Lambda(d) = \lg n$$

kde tzv. Mangoldtova funkce $\Lambda(n)$ je rovna $\lg p$ pro $n = p^j$ a nule jinde ($\psi(x)$ je vlastně logaritmus nejmenšího společného násobku čísel $1, 2, \ldots, [x]$).

Pro zjednodušení dalších úvah bude vhodné zavést jistou integrální symboliku. Je-li F funkce (obecně komplexní) definovaná na reálné ose, nulová na intervalu $(-\infty, 1)$, spojitá zprava a s lokálně konečnou variací, můžeme obvyklým způsobem definovat míru dF na všech omezených borelovských podmnožinách reálné osy (vystačíme ostatně jen s omezenými intervaly a jejich disjunktními sjednoceními). Zřejmě je

$$F(x) = \int_{1-}^{x+} dF(t)$$

(v dalším znaky $+$ a $-$ vynecháváme). Pro dvě funkce F a G s uvedenými vlastnostmi existuje

$$H(x) = \int_1^x G\left(\frac{x}{t}\right) \mathrm{d}F(t) \quad \text{pro} \quad x \geqq 1\,, \quad H(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x < 1$$

a tato funkce splňuje stejné předpoklady, tj. určuje míru $\mathrm{d}H$. Tuto míru nazveme (multiplikativní) konvolucí měr $\mathrm{d}F$ a $\mathrm{d}G$: $\mathrm{d}H = \mathrm{d}F * \mathrm{d}G$. Je známo, že systém všech takto definovaných měr tvoří při obvyklém sčítání a konvolučním násobení komutativní algebru, jejíž jednotkou je Diracova míra v bodě 1: $\mathrm{d}P$ ($P(x) = 1$ pro $x \geqq 1$, jinak $P(x) = 0$). Speciálně tedy je konvoluce komutativní a asociativní. Dále: k míře $\mathrm{d}A$ existuje inversní míra $\mathrm{d}A^{-1}$ (tj. $\mathrm{d}A * \mathrm{d}A^{-1} = \mathrm{d}P$) právě když $\mathrm{d}A\{1\} \neq 0$ (viz [2]). Snadno zjistíme, že je-li

$$F_j(x) = \sum_{n \leqq x} f_j(n)\,, \quad j = 1, 2, 3\,, \quad \mathrm{d}F_3 = \mathrm{d}F_1 * \mathrm{d}F_2\,,$$

je nutně

$$f_3(n) = \sum_{d|n} f_1(d) f_2\left(\frac{n}{d}\right)$$

a naopak (tzv. Dirichletova konvoluce funkcí f_1 a f_2). Definujme konečně zobrazení L^n naší algebry do sebe vztahem

$$L^n\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}B\,, \quad \text{kde} \quad B(x) = \int_1^x \lg^n t \,\mathrm{d}A(t) \quad \text{pro} \quad x \geqq 1\,, \quad B(x) = 0 \quad \text{jinak}\,.$$

Z vlastností logaritmu ihned dostaneme, že $L = L^1$ je derivací v naší algebře tj. L je lineární a platí

$$L(\mathrm{d}A * \mathrm{d}B) = (L\,\mathrm{d}A) * \mathrm{d}B + \mathrm{d}A * (L\,\mathrm{d}B)\,.$$

Výše uvedené vztahy mezi funkcemi π, ϑ, ψ atd. můžeme tedy zapsat takto

$$\mathrm{d}\vartheta = L\,\mathrm{d}\pi\,, \quad \mathrm{d}T = L\,\mathrm{d}N\,, \quad \mathrm{d}T = \mathrm{d}\psi * \mathrm{d}N$$

tj.

$$L\,\mathrm{d}N = \mathrm{d}\psi * \mathrm{d}N\,. \tag{8}$$

Pro ilustraci celé techniky uveďme důkaz části Čebyševovy věty, tj. vztahu $\psi(x) = O(x)$. Potřebujeme tedy z (8) vyjádřit $\mathrm{d}\psi$, tj. hledáme míru inversní k míře $\mathrm{d}N$. Hledejme ji ve tvaru $\mathrm{d}N^{-1} = \mathrm{d}M$, kde $M(x) = \sum_{n \leqq x} \mu(n)$. Má být $\mathrm{d}M * \mathrm{d}N = \mathrm{d}P$ tj.

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{matrix} 1 & \text{pro} & n = 1 \\ 0 & \text{pro} & n > 1\,. \end{matrix}$$

Odtud postupně: $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$, $\mu(pq) = 1$, $\mu(p^2) = 0$ a obecně $\mu(p_1 p_2 \ldots \ldots p_k) = (-1)^k$, jinak $\mu(n) = 0$. Z (8) máme

$$\mathrm{d}\psi = (L\,\mathrm{d}N) * \mathrm{d}N^{-1} \tag{9}$$

a konečně

$$\psi(x) = \int_1^x (L\mathrm{d}N) * \mathrm{d}N^{-1}\,.$$

Nyní je

$$\left|\int_1^y L\mathrm{d}N - \int_1^y L\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_1^y L(\mathrm{d}N - \mathrm{d}t)\right| \leqq \lg y\,,$$

kde dt označuje obvyklou (Borel-Lebesgueovu) míru na intervalu $[1, +\infty)$. Protože

$$\int_1^y L\mathrm{d}t = y \lg y - y\,,$$

dostáváme po krátkém výpočtu

$$\psi(x) = \int_1^x \left(\frac{x}{t}\lg\frac{x}{t} - \frac{x}{t}\right)\mathrm{d}N^{-1}(t)\,. \tag{10}$$

Použijeme-li nyní hrubého odhadu $|\mu(n)| \leqq 1$ (tj. nahradíme-li míru dN^{-1} mírou dN), dostaneme triviální výsledek $\psi(x) = O(x \lg^2 x)$. Uvažme proto, že

$$\int_1^y L\mathrm{d}t - \int_1^y \mathrm{d}t * \mathrm{d}N = -y(1 + \gamma) + O(1)\,,$$

kde γ je Eulerova konstanta. Lze tedy psát

$$\mathrm{d}\psi - \mathrm{d}t + (1 + \gamma)\,\mathrm{d}P = (L\mathrm{d}N - \mathrm{d}t * \mathrm{d}N + (1 + \gamma)\,\mathrm{d}N) * \mathrm{d}N^{-1}$$

a tudíž

$$\psi(x) - x + \gamma = \int_1^x (L\mathrm{d}N - \mathrm{d}t * \mathrm{d}N + (\gamma + 1)\,\mathrm{d}N) * \mathrm{d}N^{-1}\,.$$

Protože dle výše uvedeného

$$B(y) = \int_1^y (L\mathrm{d}N - \mathrm{d}t * \mathrm{d}N + (1 + \gamma)\,\mathrm{d}N) = O(\lg 2y)\,,$$

je

$$\psi(x) - x + \gamma = \int_1^x O\left(\lg\frac{2x}{t}\right)\mathrm{d}N^{-1}(t) = O(x)\,,$$

a odtud ihned $\psi(x) = O(x)$.[3])

Všimněme si, že jsme při odhadech použili pouze triviálních vlastností funkce μ a dále, že tímto postupem lepší výsledek nedostaneme, neboť nevyjde ani z (neplatné-

[3]) Píšeme raději $B(y) = O(\lg 2y)$, abychom při integraci mohli ihned použít odhadu $|B(y)| \leqq$ $\leqq C \lg 2y$ s vhodnou konstantou C pro všechna $y \geqq 1$.

ho) odhadu $B(y) = O(1)$. Pro úplnost uveďme, že ze vztahů $\mathrm{d}P = \mathrm{d}N * \mathrm{d}N^{-1}$ a $\mathrm{d}t = (\mathrm{d}t * \mathrm{d}N) * \mathrm{d}N^{-1}$ lze snadno odvodit (H. N. SHAPIRO)

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}N^{-1}(t)}{t} = O(1)\,, \quad \int_1^x \frac{\lg(x/t)}{t}\,\mathrm{d}N^{-1}(t) = O(1)$$

a z nich a (10) opět výsledek $\psi(x) = O(x)$. Zde jsme již využili hlubších vlastností funkce μ. Je zajímavé (viz [7]), že ze vztahu

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}N^{-1}(t)}{t} = \sum_{n \leqq x} \mu(n)/n = o(1)$$

plyne prvočíselná věta.

Zkusme jít dále. Ve funkci $\psi(x)$ zachycujeme pouze čísla p^j. Jak zachytit ještě všechna čísla tvaru $n = p^j q^i$? Je

$$\sum_{d|n} \Lambda(d)\,\Lambda\left(\frac{n}{d}\right) = 2 \lg p \lg q\,.$$

Hledejme tedy vztah, v němž bude míra $\mathrm{d}\psi * \mathrm{d}\psi$. Je $\mathrm{d}\psi * \mathrm{d}N = L\mathrm{d}N$ a tedy $(L\mathrm{d}\psi) * \mathrm{d}N + \mathrm{d}\psi * (L\mathrm{d}N) = L^2\,\mathrm{d}N$ tj. $(L\mathrm{d}\psi) * \mathrm{d}N + \mathrm{d}\psi * \mathrm{d}\psi * \mathrm{d}N = L^2\,\mathrm{d}N$ a konečně

$$L\mathrm{d}\psi + \mathrm{d}\psi * \mathrm{d}\psi = (L^2\,\mathrm{d}N) * \mathrm{d}N^{-1}\,.$$

Abychom odstranili nepříjemný faktor $\mathrm{d}N^{-1}$ hledejme přibližné vyjádření míry $L^2\,\mathrm{d}N$ ve tvaru $\mathrm{d}\Lambda * \mathrm{d}N$. Jednoduchým výpočtem zjistíme, že

$$\int_1^y L^2\,\mathrm{d}N = \int_1^y (2L\mathrm{d}t + c_1\,\mathrm{d}t + c_2\,\mathrm{d}P) * \mathrm{d}N + O(\lg^2 2y)\,,$$

kde c_1 a c_2 jsou jisté konstanty a dosazením získáme Selbergovu identitu

(11) $$\int_1^x (L\mathrm{d}\psi + \mathrm{d}\psi * \mathrm{d}\psi) = 2\int_1^x L\mathrm{d}t + O(x)\,.$$

Píšeme-li nyní $\mathrm{d}R = \mathrm{d}N - \mathrm{d}\psi$ a uvážíme-li, že

$$\int_1^x \mathrm{d}\psi * \mathrm{d}N = \int_1^x L\mathrm{d}t + O(x) \quad \text{a} \quad \int_1^x L\mathrm{d}N = \int_1^x \mathrm{d}N * \mathrm{d}N + O(x)$$

lze (11) přepsat ve tvaru

(12) $$\int_1^x L\mathrm{d}R = \int_1^x \mathrm{d}R * \mathrm{d}R + O(x)\,.$$

Jak nyní odvodíme z (12) prvočíselnou větu (ve tvaru $R(x) = o(x)$)? Integrací per partes dostaneme

(13) $$R(x) \lg x = \int_1^x R\left(\frac{x}{t}\right) \mathrm{d}R(t) + O(x)$$

a tvar tohoto vztahu nabízí tento postup: je-li znám nějaký odhad pro funkci R, použijeme ho vpravo v (13) a doufáme, že faktor $\lg x$ vlevo nám umožní odvodit odhad lepší. Vzhledem k potížím (faktor $\mathrm{d}R$) je vztah (13) nejprve různě upravován. Tak např. SPECHT [16] vychází z nerovnosti

(14) $$|\varrho(x)| \leqq \frac{2}{\lg^2 x} \sum_{n \leqq x} \left|\varrho\left(\frac{x}{n}\right)\right| \lg n + O\left(\frac{x}{\lg x}\right), \quad \text{kde} \quad \varrho(x) = \psi(x) - x,$$

Prachar [14] ze vztahu

$$\vartheta(x) \lg x + \sum_{p \leqq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right) \lg p = 2x \lg x + o(x \lg x),$$

Gelfond [7] využívá nerovnosti

(15) $$|M(x)| \lg x \leqq \sum_{n \leqq x} \left|M\left(\frac{x}{n}\right)\right| + O(x \lg \lg x),$$

neboť lze ukázat, že vztah $M(x) = \int_1^x \mathrm{d}N^{-1} = o(x)$ je ekvivalentní s prvočíselnou větou. Obvyklý důkaz pak probíhá ve třech krocích (formulujeme pro Spechtovu variantu:

a) v každém „dosti velkém“ intervalu existuje bod, v němž je funkce ϱ velmi malá;

b) funkce ϱ se „pomalu“ mění:

$$|\varrho(x) - \varrho(y)| \leqq |x - y| + O\left(\frac{y}{\lg y}\right)$$

pro $x \geqq x_0$, $\frac{1}{2}x < y < 2x$;

c) ke každému $\varepsilon > 0$ existuje v každém intervalu, který je dosti dlouhý, „velký“ podinterval, v němž je $|\varrho(x)| \leqq \varepsilon x$. Rozdělíme-li nyní vhodně součet v (14), lze s využitím c) najít poměrně hodně jeho malých členů. Speciálně: existuje konstanta K tak, že z platnosti vztahu $|\varrho(x)| \leqq cx$ pro $x \geqq x_0$ plyne existence x_1 tak, že

$$|\varrho(x)| \leqq cx\left(1 - \frac{c^2}{K}\right) \quad \text{pro} \quad x \geqq x_1$$

Opakováním této úvahy ihned dostaneme, že $\varrho(x) = o(x)$.

Z hlediska provedení celého důkazu není funkce $\varrho(x) = \psi(x) - x$ příliš vhodná – má relativně velké skoky. Proto Wirsing [18] vyšetřuje míru $t^{-1}\,\mathrm{d}\psi(t)$. Funkce

$$Q(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{t}$$

má totiž v bodě $x = n$ skok jen $\Lambda(n)/n$. Použijeme-li Čebyševova vztahu, najdeme postupně

$$T(x) = \int_1^x \mathrm{d}\psi * \mathrm{d}N = \int_1^x \left[\frac{x}{t}\right] \mathrm{d}\psi(t) = x \int_1^x \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{t} + \int_1^x \left\{\frac{x}{t}\right\} \mathrm{d}\psi(t)$$

tj.

$$x \lg x + O(x) = x\,Q(x) + O(x)$$

a tedy

$$Q(x) = \lg x + O(1)\,.$$

Zavedeme-li tedy míru $\mathrm{d}\omega$ vztahem $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}R(t)/t = (\mathrm{d}\psi - \mathrm{d}N)/t$ a použijeme-li rovnosti

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}N}{t} = \lg x + \gamma + o(1)$$

dostaneme výsledek

$$\omega(x) = \int_1^x \mathrm{d}\omega(t) = O(1)\,.$$

Zdálo by se, že ze vztahu $\omega(x) = o(1)$ již odvodíme prvočíselnou větu. Bohužel, tento vztah neplatí: je totiž $\omega(x) = 2\gamma + o(1)$. Proto buď $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}R(t)/t - 2\gamma\,\mathrm{d}P$ (γ je stále Eulerova konstanta). Platí tedy $\sigma(x) = O(1)$ a dále je

$$R(x) = \int_1^x t(\mathrm{d}\sigma + 2\gamma\,\mathrm{d}P) = x(\sigma(x) + 2\gamma) - \int_1^x (2\gamma + \sigma(t))\,\mathrm{d}t + O(1)$$

tj.

$$R(x) = x\,\sigma(x) - \int_1^x \sigma(t)\,\mathrm{d}t + O(1)\,.$$

Prvočíselná věta ve tvaru $R(x) = o(x)$ plyne ihned ze vztahu $\sigma(x) = o(1)$; obecně z každého odhadu funkce $\sigma(x)$ plyne odpovídající odhad $R(x)$. Podobně jako vztah (13) můžeme odvodit

(16)
$$\sigma(x) \lg x = \int_1^x \sigma\left(\frac{x}{t}\right) \mathrm{d}\sigma(t) + O(1)$$

Pro pohodlí zápisu pišme $\sigma(e^\xi) = \tau(\xi)$; je tedy $\tau(\xi) = O(1)$ a

(17)
$$\xi\,\tau(\xi) = \int_0^\xi \tau(\xi - \eta)\,\mathrm{d}\tau(\eta) + O(1)$$

(nyní uvažujeme míry na intervalu $[0, +\infty)$!!). Důležité nyní je, že funkce τ má malé oscilace. Přesněji (srovnejte s podobným vztahem pro ϱ!)

$$|\tau(\xi) - \tau(\eta)| \leqq \xi - \eta + O\left(\frac{1}{1+\eta}\right), \quad 0 \leqq \eta \leqq \xi .$$

To nám umožňuje nalézti ke každému $\varepsilon > 0$ po částech lineární funkci τ_0 tak, že

$$(18) \qquad \xi\, \tau_0(\xi) = \int_0^\xi \tau_0(\xi - \eta)\, d\tau_0(\eta) + O(\lg \xi), \quad \xi \geqq 2,$$

$$(19) \qquad |\tau_0'(\xi)| \leqq 1 + \varepsilon \quad \text{až na spočetně bodů},$$

$$(20) \qquad |\tau(\xi) - \tau_0(\xi)| = O\left(\frac{1}{1+\xi}\right).$$

a tedy také $\tau_0(\xi) = O(1)$. Vztah (18) můžeme nyní přepsat na

$$(21) \qquad \xi\, \tau_0(\xi) = \int_0^\xi \tau_0(\xi - \eta)\, \tau_0'(\eta)\, d\eta + O(\lg \xi), \quad \xi \geqq 2 .$$

Schwarzova nerovnost nám nyní umožní odhadnout funkci $\tau_0(\xi)$ pomocí její střední hodnoty na intervalu $(0, \xi)$. Vzhledem k (19) stačí nyní dokázat

$$(22) \qquad \int_0^\xi \tau_0^2(\eta)\, d\eta = o(\xi),$$

neboť z (21) plyne

$$(23) \qquad \xi|\tau_0(\xi)| \leqq (1+\varepsilon)\, \xi^{1/2} \left(\int_0^\xi \tau_0^2(\eta)\, d\eta\right)^{1/2} + O(\lg \xi) .$$

(Povšimněme si, že vztah $\tau_0(\xi) = O(1)$ nedá nic nového.)

Využijeme opět (21). Na několika řádcích lze ukázat, že $\int_0^x \tau(\eta)\, d\eta = O(1)$, tj. dle (20) je $\int_0^x \tau_0(\eta)\, d\eta = O(\lg x)$ a tedy

$$(24) \qquad \frac{1}{\xi} \int_0^\xi \tau_0(\eta)\, d\eta = o(1) .$$

Wirsing nyní odvodil zásadní tvrzení, které pro zajímavost uvádíme v plném obecném znění (viz [3]).

Wirsingovo lemma. *Buďte f a g reálné měřitelné funkce na $(0, +\infty)$ a nechť pro vhodná reálná $\lambda \geqq 1$, $\mu \geqq 1$, $F > 0$ a $G > 0$ je*

$$\limsup_{x \to +\infty} x^{1-2\lambda} \int_0^x f^2(t)\, dt \leqq F/(2\lambda - 1), \quad \limsup_{x \to \infty} x^{1-2\mu} \int_0^x g^2(t)\, dt \leqq G/(2\mu - 1) .$$

Je-li pro $x > 0$

$$h(x) = \frac{x^{1-\lambda-\mu}}{B(\lambda, \mu)} \int_0^x f(x - t)\, g(t)\, dt$$

a

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-1} \int_0^x h(t)\, dt = 0\,,$$

je pro každé $x_0 > 0$

$$\limsup_{x \to +\infty} x^{-1} \int_{x_0}^x h^2(t)\, dt \leqq \tfrac{1}{2} FG\,.$$

Užijeme-li toto lemma pro $\lambda = \mu = 1$, dostaneme z (24), (21) a (19)

$$\limsup \frac{1}{x} \int_0^x \tau_0^2(t)\, dt \leqq \tfrac{1}{2} \limsup \frac{1}{x} \int_0^x \tau_0^2(t)\, dt\, (1 + \varepsilon)^2$$

a tedy (třeba pro $\varepsilon = \frac{1}{10}$) i (22).

Doposud jsme uvedli jen nástin důkazů vztahu (1). Jak nyní Wirsing dokázal svůj výsledek? Uvažujme tři vztahy:

$$\tau(\xi) = O(\xi^{-\alpha})\,, \tag{25}$$

$$\tau(\xi) = \frac{1}{\xi} \int_0^\xi \tau(\xi - \eta)\, d\tau(\eta) + O(\xi^{-\beta})\,, \tag{26}$$

$$|\tau(\xi) - \tau(\eta)| \leqq |\xi - \eta| + O(\xi^{-\beta})\,. \tag{27}$$

Wirsing nyní ukazuje:

a) (26) a (27) platí pro $\beta = 1$,

b) z (26) a (27) plyne platnost (25) pro $\alpha = \beta$,

c) ze vztahu (25) plyne (26) a (27) pro každé $\beta < \alpha + 1$.

Část c) je celkem rutinní. Nejobtížnější je část b). Nejprve je pomocí (27) sestrojena spojitá, po částech lineární funkce τ_0 tak, aby bylo $|\tau_0'(\xi)| \leqq 1 + o(1)$ (s výjimkou bodů, v nichž derivace neexistuje) a $|\tau_0(\xi) - \tau(\xi)| = O(\xi^{-\beta})$. Dále je indukcí definována posloupnost funkcí $\tau_0, \tau_1, \ldots$ vztahy

$$\tau_n(\xi) = \frac{1}{\xi} \int_0^\xi \tau_{n-1}(\xi - \eta)\, \tau_{n-1}'(\eta)\, d\eta\,.$$

Platí-li nyní (25) pro jistou hodnotu α, $0 \leqq \alpha < \beta$, lze odtud s použitím (26) a (27) odvodit vztah

$$\tau(\xi) - \tau_n(\xi) = O(\xi^{-\beta_n})\,, \tag{28}$$

kde $\beta_n = \alpha + (\beta - \alpha)/(\beta + 1)^n$. Využitím Wirsingova lemmatu (pro $\lambda = \mu = 1$) vyjde

$$\int_0^\xi \tau_n'^2(\eta)\, \mathrm{d}\eta \leqq 2^{1-2^n}\xi + o(\xi)$$

a odtud pro dosti velké přirozené N

$$\tau_N(\xi) = O(\xi^{-\beta_{N+1}})$$

tj. dle (28) také

$$\tau(\xi) = O(\xi^{-\beta_{N+1}}).$$

Uvážíme-li, že N lze zvolit pouze v závislosti na β, je b) dokázáno. Poznamenejme ještě, že lze místo s a) započít s triviálním odhadem (25) pro $\alpha = 0$. Vztah (17) můžeme chápat jako variantu Selbergovy formule, vztah (26) jako její zpřesnění. Wirsingův důkaz je tedy založen na postupném zpřesňování Selbergovy formule.

Bombieriho postup je založen na jiné myšlence. Připomeňme, že Selbergovu formuli jsme odvodili na základě myšlenky zachytit nejen prvočísla a jejich mocniny, ale i čísla, v jejichž rozkladu na prvočinitele máme dva prvočíselné faktory. V tomto případě jsme vyšli ze snahy odvodit formuli, obsahující míru $\mathrm{d}\psi * \mathrm{d}\psi$. Bombieri odvodil „Selbergovy formule vyšších řádů" a jejich důsledným využitím dokázal stejný výsledek jako Wirsing.

Na závěr uveďme nástin důkazu vztahu (5), jak je uveden v [3]. Podstatnou roli zde hraje důmyslná kombinace myšlenek obou prací [3] a [18]. Poměrně pracnou cestou lze odvodit následující zobecnění Selbergovy formule (12)

$$(29) \quad \int_1^x L^{2n-1}\, \mathrm{d}\psi + B^{-1}(n, n) \int_1^x L^{n-1}\, \mathrm{d}\psi * L^{n-1}\, \mathrm{d}\psi = 2 \int_1^x L^{2n-1}\, \mathrm{d}t + O(xn^{4n} \lg^n x),$$

stejnoměrně pro $n \geqq 12$.

Položíme-li

$$R(x) = R(x, n) = \int_1^x L^{n-1}(\mathrm{d}N - \mathrm{d}\psi),$$

dostaneme místo (13)

$$\int_1^x L^n\, \mathrm{d}R = B^{-1}(n, n) \int_1^x R\left(\frac{x}{t}\right) \mathrm{d}R(t) + O(xn^{4n} \lg^n x).$$

Z (29) ihned plyne pro každé $\varepsilon > 0$

$$0 \leqq \int_x^{x+y} L^{n-1}\, \mathrm{d}\psi \leqq (2 + \varepsilon) \int_x^{x+y} L^{n-1}\, \mathrm{d}t + O_n(x), \quad 0 < y < c_n x,$$