Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

JEDNODUCHÉ NOVÉ ŘEŠENÍ DIOFANTICKÉ ROVNICE $A^3 + B^3 + C^3 = D^3$

JAN KUBÍČEK, Olomouc

(Došlo dne 8. března 1973)

Již starověcí matematici znali některá celočíselná řešení diofantické rovnice

(1) $$A^3 + B^3 + C^3 = D^3$$

(např. řešení $A = 1$, $B = 6$, $C = 8$, $D = 9$). Řešením této rovnice se též zabýval Euler, který dokázal, že jestliže celá čísla p, q, r, s vyhovují jednodušší diofantické rovnici

(2) $$qr = s^2 + 3p^2 ,$$

pak čísla

(3) $$A = 3pq - sq - r^2 , \quad B = 3pq + sq + r^2 , \quad C = sr + q^2 - 3pr ,$$
$$D = sr + q^2 + 3pr$$

jsou řešením diofantické rovnice (1). (Eulerovy vzorce jsou tedy čtyřparametrické, přičemž parametry p, q, r, s jsou svázány diofantickou rovnicí (2).)

Nové řešení diofantické rovnice (1) je formulováno v následující větě (Kubíčkova identita):

Buďte a, b libovolná celá čísla. Potom čísla A, B, C, D daná vzorci

(4) $$A = a(b^3 - a^3) , \quad B = b(b^3 - a^3) , \quad C = a(2b^3 + a^3) ,$$
$$D = b(2a^3 + b^3)$$

jsou opět celá a jsou řešením diofantické rovnice (1).

Důkaz Kubíčkovy identity se snadno provede dosazením vzorců (4) do rovnice (1).

Na závěr poznamenáváme, že vzorce (4) jsou dvouparametrické, přičemž parametry a, b jsou nezávislé. Jsou-li parametry a, b racionální, dostáváme opět racionální