Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

O JEDNEJ SÚSTAVE DIOFANTICKÝCH ROVNÍC II

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 27. februára 1973)

Tento článok nadväzuje na prácu [1], v ktorej sa riešenie sústavy diofantických rovníc $\sum_{i=1}^{n} x_i = a_j x_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, vytvorí pomocou riešení optickej rovnice $\sum_{i=1}^{n} 1/a_i = 1$. V tejto úvahe urobíme podobne so sústavou rovníc

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n} x_i + k = a_j x_j\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,, \quad n > 1\,, \quad k \text{ dané prirodzené číslo } ^1).$$

Pod riešením sústavy rovníc (1) rozumieme v ďalšom vždy riešenie v prirodzených číslach $x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Veta 1. *Všetky riešenia sústavy rovníc (1) dostaneme nasledovne:*
a_i, $i = 1, 2, \ldots, n + k$ je také riešenie optickej rovnice

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n+k} 1/a_i = 1$$

v ktorom

$$(3) \qquad a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_{n+k} = t[a_1, a_2, \ldots, a_n]\,, \quad t \mid k$$

a

$$(4) \qquad x_i = a_{n+1}/a_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Dôkaz. Označme v (1) $a_j x_j = a_{n+1}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, takže $x_j = a_{n+1}/a_j$ a $a_{n+1} = t[a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Po dosadení do (1) máme

$$(5) \qquad t[a_1, a_2, \ldots, a_n] \sum_{i=1}^{n} 1/a_i + k = t[a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

---

1) K prípadu $k = n = 2$ sústavy (1) vedie úloha B.1 P. KOSTYRKU v Mat. obzoroch *I. 2* (1973) str. 59.

odkial vyplýva $t \mid k$ a ďalej

$$\sum_{i=1}^{n} 1/a_i + k/t[a_1, a_2, \ldots, a_n] = 1 . \tag{6}$$

Ak položíme $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_{n+k} = t[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, môžeme (6) písať v tvare (2). Podmienky sú nutné.

Dosadením (3) a (4) do (1) dostaneme (2). Podmienky sú aj dostačujúce.

Poznámka 1. Veta 1 platí aj pre $k = 0$ a dáva vetu článku [1].

Veta 2. *Nech* $k' = k/l$, $l \mid k$, $k' > 1$, $l \geqq 1$. *Čísla*

$$(k'\xi_i, a_i, i = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

kde aj ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ *sú čísla prirodzené, sú riešením sústavy rovnic* (1) *vtedy a len vtedy keď čísla* $(\xi_i, a_i, i = 1, 2, \ldots, n)$ *sú riešením sústavy rovnic*

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i + l = a_j \xi_j , \quad j = 1, 2, \ldots, n . \tag{8}$$

Dôkaz. Dosadením (7) do (1) máme (8) a násobením (8) číslom k' zase (1).

Poznámka 2. Riešenia (7) sústavy (1) nazývame jej triviálnymi riešeniami, ostatné jej riešenia netriviálnymi.

Veta 3. *Každé riešenie* $(x_i, a_i, i = 1, 2, \ldots, n)$ *sústavy* (1), *pre ktoré platí* (2), (3), (4) *a ešte* $t > 1$ *je triviálne.*

Dôkaz. Pretože $x_i = t[a_1, a_2, \ldots, a_n]/a_i = t\xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ platí tvrdenie podľa vety 2.

Veta 4. *Každé riešenie* $(x_i, a_i, i = 1, 2, \ldots, n)$, $(x_i = l\xi_i$, $\xi_i = [a_1, a_2, \ldots, a_n]/a_i l$, $i = 1, 2, \ldots, n)$ *sústavy* (1), *pre ktoré platí* (2), (3), (4) *a ešte*

$$l \mid (k, [a_1, a_2, \ldots, a_n]) , \quad a_i l \mid [a_1, a_2, \ldots, a_n] , \tag{9}$$
$$l > 1 , \quad t = 1 , \quad i = 1, 2, \ldots, n ,$$

je triviálne.

Dôkaz. Rovnica (6) dá sa na základe predpokladu (9) písať v tvare

$$\sum_{i=1}^{n} 1/a_i + \frac{k/l}{[a_1, a_2, \ldots, a_n]/l} = 1$$

a z riešení tejto rovnice dostaneme riešenia sústavy

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i + k/l = a_j \xi_j , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

vo forme $(\xi_i = a'_{n+1}/a_i,\ a_i,\ i = 1, 2, \ldots, n)$, pričom $a'_{n+1} = a'_{n+2} = \ldots = a'_{n+k/l} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]/l = a_{n+1}/l$. Čísla ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sú podľa toho prirodzené práve vtedy, keď $a_i l \mid [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, čo platí podľa (9). Podľa vety 2 je teda riešenie $(x_i = l\xi_i, a_i, i = 1, 2, \ldots, n)$ sústavy (1) triviálne. Tým je veta dokázaná.

Poznámka 3. Ak podmienka $a_i l \mid [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ neplatí, riešenie (x_i, a_i) nie je triviálne, lebo nie všetky ξ_i sú čísla prirodzené. Čísla $(l\xi_i, a_i)$ tvoria v tomto prípade netriviálne riešenie sústavy (1).

Dôsledok 1. *Netriviálne riešenia sústavy* (1) *dostaneme práve vtedy, keď* $t = 1$ *a súčasne*

a) $(k, [a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1$

alebo

b) $(k, [a_1, a_2, \ldots, a_n]) = l > 1$, *ale* $a_i l \mid [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *neplatí pre všetky* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Príklad. Riešiť sústavu rovníc

$$\sum_{i=1}^{3} x_i + 2 = a_j x_j, \quad j = 1, 2, 3 . \tag{10}$$

Riešenie. Riešením sústavy $\sum_{i=1}^{3} \xi_i + 1 = a_j \xi_j$, $j = 1, 2, 3$, dostaneme podľa vety 2 všetky triviálne riešenia, ako aj netriviálne riešenia podľa bodu b) dôsledku 1 a riešením sústavy (10) netriviálne riešenia podľa bodu a) dôsledku 1. Podľa vety 1 a 3 treba určiť všetky riešenia rovnice

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = 1, \tag{11}$$

a tie riešenia rovnice

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = 1 \tag{12}$$

v ktorých a_1, a_2, a_3 sú nepárne čísla a $a_4 = a_5$.

Riešenia rovnice (11) sú uvedené v článku [2] a spolu z nich plynúcimi ξ_1, ξ_2, ξ_3 sú uvedené v tab. 1. Prípady $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (2, 3, 10, 15), (3, 4, 4, 6)$ dajú netriviálne riešenia podľa bodu b) dôsledku 1.

Rovnicu (12) píšme vo forme

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{2}{[a_1, a_2, a_3]} = 1 \tag{13}$$

Tab. 1

a_1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4
a_2	3	3	3	3	3	4	4	4	5	6	3	3	4	4
a_3	7	8	9	10	12	5	6	8	5	6	4	6	4	4
a_4	42	24	18	15	12	20	12	8	10	6	12	6	6	4
$\xi_1 = a_4/a_1$	21	12	9	$\frac{15}{2}$	6	10	6	4	5	3	4	2	2	1
$\xi_2 = a_4/a_2$	14	8	6	5	4	5	3	2	2	1	4	2	$\frac{3}{2}$	1
$\xi_3 = a_4/a_3$	6	3	2	$\frac{3}{2}$	1	4	2	1	2	1	3	1	$\frac{3}{2}$	1

pretože $t = 1$, $a_4 = a_5 = [a_1, a_2, a_3]$. Stačí hľadať riešenia $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$. Pretože $5/a_1 \geqq 1$, je $a_1 \leqq 5$ a pravdaže $a_1 > 1$. Teda je $a_1 = 3, 5$.

Ak je $a_1 = 3$, máme

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{2}{[a_1, a_2, a_3]} = \frac{2}{3}, \quad \frac{4}{a_2} \geqq \frac{2}{3}, \quad a_2 \leqq 6,$$

a teda $a_2 = 3, 5$. V prvom prípade

$$\frac{1}{a_3} + \frac{2}{[a_1, a_2, a_3]} = \frac{1}{3}, \quad \frac{3}{a_3} \geqq \frac{1}{3}, \quad a_3 \leqq 9,$$

teda $a_3 = 5, 7, 9$. Dosadením sa presvedčíme, že vyhovujú čísla $a_3 = 5, 9$ a dávajú

$$(a_1, a_2, a_3) = (3, 3, 5), (3, 3, 9).$$

Ak je $a_2 = 5$ obdobne nájdeme, že rovnici (13) nemôže byť vyhovené.

Ak je $a_1 = 5$, nájdeme obdobným postupom jediné riešenie

$$(a_1, a_2, a_3) = (5, 5, 5).$$

Z týchto riešení rovnice (13) dostaneme tieto netriviálne riešenia sústavy (10)

$$(a_1, a_2, a_3; x_1, x_2, x_3) = (3, 3, 5; 5, 5, 3), \quad (3, 3, 9; 3, 3, 1), \quad (5, 5, 5; 1, 1, 1).$$

Tab. 2

a_1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4	3	3	5
a_2	3	3	3	3	3	4	4	4	5	6	3	3	4	4	3	3	5
a_3	7	8	9	10	12	5	6	8	5	6	4	6	4	4	5	9	5
x_1	42	24	18	15	12	20	12	8	10	6	8	4	4	2	5	3	1
x_2	28	16	12	10	8	10	6	4	4	2	8	4	3	2	5	3	1
x_3	12	6	4	3	2	8	4	2	4	2	6	2	3	2	3	1	1