ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

99
1974

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

9 1

99

9 32

1-4. T. J 8° Z. NoA. 248

ACADEMIA

PRAHA

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 99 • Č. 1 • STR. 1—108 • PRAHA 20. 3. 1974

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(*Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fyziky“*)

SVAZEK 99 (1974)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd

Redakce:

Matematický ústav Československé akademie věd
115 67 Praha 1, Žitná 25

Časopis pro pěstování matematiky. Ročník 99 (1974). — Vydává Československá akademie věd v Academii, nakladatelství Československé akademie věd, Vodičkova 40, 112 29 Praha 1. Redakce: Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1. — Tiskne Státní tiskárna, n. p., závod 5, nositel Řádu práce, tř. Rudé Armády 171, 180 00 Praha 8. — Objednávky a předplatné přijímá PNS, administrace odborného tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Lze také objednat u každého poštovního úřadu nebo doručovatele. Vychází čtvrtletně. Roční předplatné Kčs 56,— cena jednotlivého sešitu Kčs 14,—. (Tyto ceny jsou platné pouze pro Československo.)

Sole agents for all western countries KUBON & SAGNER, P.O.B. 68, 8000 München 34, G.F.R. Annual subscription: Vol. 99, 1974 (4 issues) DM 72,—.

Toto číslo vyšlo v březnu 1974

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 99 * PRAHA 20. 3. 1974 * ČÍSLO 1

ON THE SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR LINEAR PARABOLIC EQUTAIONS OF HIGHER ORDER

VLADIMÍR ĎURIKOVIČ, Bratislava

(Received February 17, 1971)

1. Introduction. In his paper [2] R. K. JUBERG has treated the Dirichlet problem for the homogeneous linear differential equation $D_x^4 u + D_t u = 0$ on the rectangle $(0, 1) \times (0, T\rangle$ with data $u(x, 0) = 0$ for $x \in (0, 1)$, $u(0, t) = a(t)$, $u(1, t) = b(t)$, $D_x u(0, t) = c(t)$, $D_x u(1, t) = d(t)$ for $t \in (0, T\rangle$ $(D_z = \partial/\partial z)$. Reducing this problem to solving a system of Voltera type integral equations with bounded and differentiable kernels, the author proved the existence and uniqueness of solution.

The present paper deals with two modifications of Dirichlet problem for the nonhomogeneous parabolic equation $D_x^4 u + D_t u = \varphi(x, t)$ on $(0, 1) \times (0, T\rangle$. We study some properties of the fundamental solution of the operator $D_x^4 u + D_t u$ allowing to determine limits and derivatives of certain parametric integrals. Further, the Green function is constructed and with its help we seek an explicit representation of the solutions of the considered problems. The method introduced below affords an information on the behaviour of solutions at the points $(0, 0)$ and $(1, 0)$. The procedure may be directly applied to the equation $D_x^{2n} u + (-1)^n D_t u = \varphi(x, t)$.

2. The formulation of problems and some notions. Let R^n mean the n-dimensional Euclidean space and let $\bar{A}$ be the closure of $A \subset R^n$. By Ω_0, Ω and Ω_1 we shall denote the Cartesian products $(0, 1) \times (0, T)$, $(0, 1) \times (0, T\rangle$ and $(-\infty, \infty) \times \langle 0, \infty)$ respectively. Let A be an open set of R^2. The set of all functions $v(x, t) \in C_0(\bar{A})$ with continuous derivatives $D_x^m v(x, t)$ and $D_t v(x, t)$ on A, where m is a positive integer, will be denoted by $N_m(A)$.

We consider the following two boundary value problems

$$L(u; x, t) = D_x^4 u + D_t u = \varphi(x, t)\,, \quad (x, t) \in \Omega \tag{1}$$

$$u(x, 0) = g(x)\,, \quad 0 < x < 1 \tag{2}$$

$$\begin{aligned} D_x^{j-1} u(0, t) &= a_j(t)\,, \quad D_x^{j-1} u(1, t) = b_j(t)\,, \quad 0 < t \leqq T \\ D_x^{j+1} u(0, t) &= c_j(t)\,, \quad D_x^{j+1} u(1, t) = d_j(t)\,, \quad 0 < t \leqq T \end{aligned} \tag{3j}$$

for $j = 1, 2$, where $\varphi(x, t)$, $g(x)$, $a_j(t)$, $b_j(t)$, $c_j(t)$ and $d_j(t)$ are real functions of certain classes defined below.

The real function $u(x, t)$ is said to be a solution of problem (1), (2), ($3j$), $j = 1, 2$ if $u \in C_0[\bar{\Omega} - \{(0, 0), (1, 0)\}]$ and $D_x^\nu u \in C_0(\Omega)$ for $\nu = 1, 2, 3$, $D_t u \in C_0(\Omega)$ and $u(x, t)$ satisfies conditions (1), (2), ($3j$).

Let $A \subset R^1$ and $f(x)$ be a real function on A. Let B mean a bounded and closed subset of A. If to each such defined B there is a constant $K(B)$ depending only on B such that

$$|f(x) - f(y)| \leqq K(B)\,|x - y|^{\varepsilon + n/4}\,, \quad n = 0, 2\,, \quad \varepsilon > 0$$

for every $x, y \in B$ and $0 < \varepsilon + n/4 < 1$, then the function $f(x)$ is called locally $(\varepsilon + n/4)$-Hölder continuous function on A. The set of all such functions is denoted by $S_n(x, A)$. If the function f depends on the parameter λ ($f = f(x; \lambda)$) and if the Hölder constant $K(B)$ does not depend on λ, the function $f(x; \lambda)$ is said to be locally $(\varepsilon + n/4)$-Hölder continuous with respect to x on A uniformly with respect to λ. We denote the set of all such functions by $S_n(x, A; \lambda)$.

Under *the fundamental solution of equation $L(u; x, t) = 0$ in $\bar{\Omega}$* we understand a continuous function $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ for $(x, t; \xi, \tau) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$, $(x, t) \neq (\xi, \tau)$ with the derivatives $D_t\Gamma$, $D_x\Gamma$, $D_x^2\Gamma$, $D_x^3\Gamma$, $D_x^4\Gamma$ such that the integral

$$u(x, t) = \int_0^T d\tau \int_0^1 \Gamma(x, t; \xi, \tau)\, f(\xi, \tau)\, d\xi$$

is a solution of the equation $L(u; x, t) = f(x, t)$ on Ω for any $f \in C_0(\bar{\Omega}) \cap$ $\cap\, S_0[x, (0, 1); t]$.

A continuous function $G_j(x, t; \xi, \tau)$ for $(x, t;, \xi, \tau) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$, $t > \tau$, having the first derivative respect to t and the derivatives with respect to x up to the 4-th order, is called *the Green function of the problem* (1), (2), (3_j), $j = 1, 2$, if

$$G_j(x, t; \xi, \tau) = \Gamma(x, t; \xi, \tau) + v_j(x, t; \xi, \tau)\,,$$

where Γ is the fundamental solution of $L(u; x, t) = 0$ in $\bar{\Omega}$ and v_j satisfies the following conditions:

a. $L(v_j; x, t) = 0$ for $t > \tau$.

b. $v_j|_{t=\tau} = 0$ for $(x; \xi, \tau) \in \langle 0, 1\rangle \times \bar{\Omega}$ if at leats one of the points x, ξ lies in the open interval $(0, 1)$.

c. $D_x^{j-1}G_j|_{x=0} = D_x^{j-1}G_j|_{x=1} = D_x^{j+1}G_j|_{x=0} = D_x^{j+1}G_j|_{x=1} = 0.$

3. The fundamental solution and its properties. Consider functions Γ_ν, $\nu = 0, 1, \ldots$ defined for $(x, t; \xi, \tau) \in \Omega_1 \times \Omega_1$, $(x, t) \neq (\xi, \tau)$ by the formula

$$\Gamma_\nu(x, t; \xi, \tau) = \begin{cases} k_\nu(x, t;, \xi, \tau) & \text{if } \ 0 \leqq \tau < t \\ 0 & \text{if } \ \tau \geqq t\,, \end{cases} \tag{4}$$

where

(5) $$k_\nu(x, t; \xi, \tau) = \frac{(-i)^\nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varrho^\nu \exp\{-i\varrho(x - \xi) - \varrho^4(t - \tau)\}\, d\varrho$$

and i means the imaginary unit.

In this section we investigate some properties of limits, integrals and derivatives of Γ_ν. The results are obtained by means of O. A. LADYZHENSKAYA's estimate given in [1]

(6) $$|D_x^\nu \Gamma_0(x, t; \xi, \tau)| \leqq c_1(\nu)\, (t - \tau)^{-(1+\nu)/4} \exp\{-c_2[(x - \xi)^4/(t - \tau)]^{1/3}\}$$

for $(x, t; \xi, \tau) \in \Omega_1 \times \Omega_1$, $\tau < t$, where the constant c_1 depends on ν and $c_2 > 0$ is an absolute constant. This estimate may be transformed to

(7) $$|D_x^\nu \Gamma_0(x, t;, \xi, \tau)| \leqq$$
$$\leqq c_1(\nu) \frac{|x - \xi|^{4\mu-\nu-1}}{(t - \tau)^\mu} \left[\frac{(x - \xi)^4}{t - \tau}\right]^{(1+\nu-4\mu)/4} \exp\left\{-c_2 \left[\frac{(x - \xi)^4}{t - \tau}\right]^{1/3}\right\} \leqq$$
$$\leqq K(\nu)\, (t - \tau)^{-\mu}\, |x - \xi|^{4\mu-\nu-1}$$

for $(x, t, \xi, \tau) \in \Omega_1 \times \Omega_1$, $\tau < t$, $\xi \neq x$ and $\mu \leqq (1 + \nu)/4$, where $\nu = 0$ 1, ... and $K(\nu)$ is a constant depending only on ν. In [2] the identities

(8) $$\int_{-\infty}^{0} \Gamma_0(x, 1; 0, 0)\, dx = \int_{0}^{\infty} \Gamma_0(x, 1; 0, 0)\, dx\, \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_0(x, 1; 0, 0)\, dx = \frac{1}{2}$$

are established.

Lemma 1. *Let $\nu = 0, 1, \dots$ and $A = \{(x, t, \xi, \tau) \in \Omega_1 \times \Omega_1 : (\xi, \tau) \neq (x, t)\}$. Then*

a. *The function $\Gamma_\nu(x, t; \xi, \tau)$ is continuous on A and the identities $\Gamma_\nu = D_x^\nu \Gamma_0$, $(-1)^\nu D_x^{4\nu} \Gamma_0 = D_t^\nu \Gamma_0 = (-1)^\nu D_\tau^\nu \Gamma_0 = (-1)^\nu D_\xi^{4\nu} \Gamma_0$ and $D_x^\nu \Gamma_0 = (-1)^\nu D_\xi^\nu \Gamma_0$ hold.*

b) *$\Gamma_\nu(x, t; \xi, \tau)$ is almost uniformly bounded on A in the sense that to each $\delta > 0$ there is $N(\delta) > 0$ such that $|\Gamma_\nu(x, t;, \xi, \tau)| < N(\delta)$ in A for $(x - \xi)^2 + (t - \tau)^2 \geqq \delta^2$.*

c. *If $\nu = 0, 1, 2, 3$ the integral $\iint_\Omega |\Gamma_\nu(x, t; \xi, \tau)|\, d\xi\, d\tau$ is uniformly convergent with respect to $P(x, t) \in \Omega_1$ that is, to each $\varepsilon > 0$ there is $\delta > 0$ such that*

$$\int_{\Omega \cap S(P,\delta)} |D_x^\nu \Gamma_0(x, t; \xi, \tau)|\, d\xi\, d\tau < \varepsilon$$

for all $P \in \Omega_1$. $S(P, \delta)$ denotes the circle $(\xi - x)^2 + (\tau - t)^2 \leqq \delta^2$ in Ω_1.

Proof. a. For $t - \tau \geqq \delta$, $\delta > 0$ we have

$$\left|\varrho^{\nu} \exp\{-i\varrho(x - \xi) - \varrho^4(t - \tau)\}\right| \leqq \varrho^{\nu} \exp\{-\varrho^4 \delta\}$$

which ensures the locally uniform convergence of k_ν on $\Omega_1 \times \Omega_1$ for $\tau < t$. Hence and by $\lim_{\tau \to t-} \Gamma_\nu(x, t; \xi, \tau) = 0$ for $\xi \neq x$ (see (6)) the continuity of Γ_ν on A and the demanded identities follow.

b. For $(x - \xi)^2 + (t - \tau)^2 \geqq \delta^2$ again by the estimate (6)

$$\left|\Gamma_\nu(x, t; \xi, \tau)\right| \leqq c_1(\nu) \sup_{y \in (0, \delta\rangle} \varphi(y),$$

where $\varphi(y) = y^{-(1+\nu)/4} \exp\{-c_2(\delta^2 - y^2)^{2/3} y^{-1/3}\}$. The last inequality proves the almost uniform boundedness of Γ_ν.

c. Consider the rectangle O: $\Omega_1 \supset O = \{(\xi, \tau) : |x - \xi| \leqq \delta, |t - \tau| \leqq \delta\} \supset$ $\supset S(P, \delta)$. Then by (7) for $\nu/4 < \mu < (1 + \nu)/4$ and $\nu = 0, 1, 2, 3$

$$\iint_{S(P,\delta)} \left|\Gamma_\nu(x, t; \xi, \tau)\right| \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\tau \leqq 2\, K(\nu) \left[(4\mu - \nu)(1 - \mu)\right]^{-1} \delta^{1+3\mu-\nu}.$$

The statement c is proved.

Lemma 2. *Let $f \in C_0(\bar{\Omega})$. Then the integral*

$$I_\nu(x, t; \tau) \equiv \int_0^1 \Gamma_\nu(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) \, \mathrm{d}\xi, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

has the following properties:

a. *I_ν is continuous on $\bar{\Omega} \times \langle 0, T\rangle$, $\tau \neq t$ and*

(9) $$D_x^\nu I_0(x, t; \tau) = I_\nu(x, t; \tau)$$

for $(x, t; \tau) \in (0, 1) \times \langle 0, T\rangle \times \langle 0, T\rangle$ $\tau \neq t$.

b. *$D_t I_0(x, t; \tau)$ is continuous on $\langle 0, 1\rangle \times (0, T) \times \langle 0, T\rangle$, $\tau \neq t$ and*

(10) $$D_t I_0(x, t; \tau) = \int_0^1 D_t \Gamma_0(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) \, \mathrm{d}\xi = -I_4(x, t; \tau)$$

for $(x, t; \tau) \in \Omega \times \langle 0, T\rangle$, $\tau \neq t$.

c. *The uniform limit*

$$\lim_{t \to \tau+} I_0(x, t; \tau) = f(x, \tau) \; (\lim_{\tau \to t-} I_0(x, t; \tau) = f(x, t))$$

exists in any rectangle $R_1 = \langle a, b\rangle \times \langle 0, T)$ $(R_2 = \langle a, b\rangle \times (0, T\rangle)$, where $0 < a < b < 1$.

Proof. Putting $\mu = (1 + \nu)/4$ in (7) we get an integrable majorant for Γ_ν, $\nu = 0, 1, \dots$ independent of x and locally independent of t and τ for $t \neq \tau$. Then from Lemma 1a and theorems for the differentiation of parametric integrals we have the assertions a, b.

To prove the statement c of this lemma write

$$I_0(x, t; \tau) = f(x, \tau) \int_0^1 \Gamma_0(x, t; \xi, \tau) \, d\xi +$$
$$+ \int_0^1 \Gamma_0(x, t; \xi, \tau) \left[f(\xi, \tau) - f(x, \tau) \right] d\xi \equiv U_1 + U_2 , \quad \tau < t .$$

If we transform the first integral by the substitution $(x - \xi)/(t - \tau)^{1/4} = -z$ then $(\Gamma_0(z, 1; 0, 0) = \Gamma_0(-z, 1; 0, 0))$

$$\int_0^1 \Gamma_0(x, t; \xi, \tau) \, d\xi = \int_0^1 \Gamma_0[x/(t - \tau)^{1/4}, 1;$$
$$\xi/(t - \tau)^{1/4}, 0] \, (t - \tau)^{-1/4} \, d\xi = \int_{-\omega_1}^{\omega_2} \Gamma_0(z, 1; 0, 0) \, dz ,$$

where $\omega_1 = x/(t - \tau)^{1/4}$, $\omega_2 = (1 - x)/(t - \tau)^{1/4}$. In view of (8), $\lim_{t \to \tau +} U_1 = f(x, \tau)$ ($\lim_{\tau \to t -} U_1 = f(x, t)$) uniformly with respect to $(x, t) \in R_1$ ($(x, t) \in R_2$). Divide the second integral U_2 in two parts integrating on the interval $\langle x - \delta, x + \delta \rangle$, where $\delta > 0$, $x \in \langle a, b \rangle$ such that $x - \delta$, $x + \delta \in \langle 0, 1 \rangle$ and on the set $\langle 0, 1 \rangle - \langle x - \delta, x + \delta \rangle$. From the continuity of $f(x, t)$, for $\varepsilon > 0$ and sufficiently small δ

$$\left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} \Gamma_0(x, t; \xi, \tau) \left[f(\xi, \tau) - f(x, \tau) \right] d\xi \right| \leqq \varepsilon \int_0^1 \left| \Gamma_0(x, t; \xi, \tau) \right| d\xi \leqq$$
$$\leqq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Gamma_0(z, 1; 0, 0) \right| dz \leqq \varepsilon K, \quad K > 0 .$$

The remaining part of U_2 is a continuous function of x, t, τ and $\lim_{t \to \tau +} U_2 = 0$ ($\lim_{\tau \to t -} U_2 = 0$) uniformly on R_1 (R_2). This completes the proof.

Remark 1. At any point $(x, t) \in \Omega$ the function I_0 may be continuously extended for $\tau = t$ by $I_0(x, t; t) = f(x, t)$.

Lemma 3. *Let*

$$T_\nu(x, t) \equiv \int_0^t \int_0^1 \Gamma_\nu(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau .$$

Then

a. *For* $f \in C_0(\bar{\Omega})$ *and* $\nu = 0, 1, 2, 3$, T_ν *is continuous on* $\bar{\Omega}$ *and*

$$D_x^\nu T_0(x, t) = T_\nu(x, t), \quad (x, t) \in (0, 1) \times \langle 0, T \rangle. \tag{11}$$

b. *For* $f \in C_0(\bar{\Omega}) \cap S_0[x, (0, 1); t]$, T_4 *is continuous on* $\bar{\Omega}$ *and*

$$D_x^4 T_0(x, t) = T_4(x, t), \quad (x, t) \in (0, 1) \times \langle 0, T \rangle. \tag{12}$$

c. *For* $\in C_0(\bar{\Omega}) \cap S_0[x, (0, 1); t]$, *the derivative* $D_t T_0(x, t)$ *exists, is continuous and*

$$D_t T_0(x, t) = f(x, t) - \int_0^1 \Gamma_4(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau = f(x, t) - T_4(x, t) \tag{13}$$

for $(x, t) \in \Omega$. $\Gamma_0(x, t; \xi, \tau)$ *is the fundamental solution of* $L(u; x, t) = 0$.

Proof. Since $T_\nu(x, t) = \int_0^t I_\nu(x, t; \tau) \, d\tau$ and the estimate

$$|I_\nu(x, t; \tau)| \leqq K(\nu) (t - \tau)^{-\mu}, \quad K(\nu) > 0$$

holds for $\nu/4 < \mu < (1 + \nu)/4$, $\nu = 0, 1, 2, 3$ and $(x, t; \tau) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, T \rangle \times \times \langle 0, T \rangle$, $\tau \neq t$, the first assertion follows from Lemma 2a.

The part b will be proved if we find an integrable majorant of $I_4(x, t; \tau)$ with respect to τ. Let $y \in (0, 1)$ be an arbitrary point then by (9)

$$I_4(x, t; \tau) = D_x I_3(x, t; \tau) = f(y, \tau) [\Gamma_3(x, t; 0, \tau) - \Gamma_3(x, t; 1, \tau)]/_{y=x} + \\ + \int_0^1 \Gamma_4(x, t; \xi, \tau) [f(\xi, \tau) - f(y, \tau)] \, d\xi |_{y=x}$$

for $(x, t; \tau) \in (0, 1) \times \langle 0, T \rangle \times \langle 0, T \rangle$, $\tau \neq t$. In virtue of Lemma 1b the difference $\Gamma_3(x, t; 0, \tau) - \Gamma_3(x, t; 1, \tau)$ is a bounded function of (t, τ) at every point $x \in (0, 1)$ and has zero limit as $\tau \to t$-. The last integral may be estimated as follows:

$$\left| \int_0^1 \Gamma_4(x, t; \xi, \tau) [f(\xi, \tau) - f(x, \tau)] \, d\xi \right| \leqq \frac{K_1}{(t - \tau)^\mu} \int_0^1 \frac{d\xi}{|x - \xi|^{1+4-4\mu-\varepsilon}} \leqq \\ \leqq K/(t - \tau)^\mu, \quad 1 - (\tfrac{1}{4}\varepsilon) < \mu < 1$$

where K_1, K are constants independent of x, t, τ.

Prove c. Since $D_t I_0(x, t; \tau) = -I_4(x, t; \tau)$ (see (10)), it is

$$|D_t I_0(x, t; \tau)| \leqq K(t - \tau)^{-\mu}, \quad 1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon < \mu < 1, \tag{14}$$

whence we have the continuity of $D_t T_0$ on Ω. Let $t \in (0, T)$ and $h > 0$ such that $t + h < T$ and investigate the difference

$$(15)\quad \frac{1}{h}\{T_0(x, t + h) - T_0(x, t)\} = \frac{1}{h}\left\{\int_0^{t+h} I_0(x, t + h; \tau)\, \mathrm{d}\tau - \int_0^t I_0(x, t; \tau)\, \mathrm{d}\tau\right\} =$$

$$= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} I_0(x, t + h; \tau)\, \mathrm{d}\tau + \int_0^t D_t I_0(x, t^*; \tau)\, \mathrm{d}\tau\,,$$

where $t < t^* < t + h$. In view of the continuity of $I_0(x, t; \tau)$ on $\bar{\Omega} \times \langle 0, T\rangle$ (see Lemma 2a and Remark 1) and the estimate (14), letting $h \to 0$ in (15) we obtain

$$D_t T_0(x, t) = I_0(x, t; t) - T_4(x, t) = f(x, t) - T_4(x, t)\,.$$

Lemma 3 is proved.

Lemma 4. *Put*

$$J_\nu(x, t; \xi) \equiv \int_0^t f(\tau) \Gamma_\nu(x, t; \xi, \tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Then

a. *For any $f \in C_0(\langle 0, T\rangle)$ and $\nu = 0, 1, \ldots$ the integral J_ν is continuous on $\bar{\Omega} \times \langle 0, 1\rangle$, $\xi \neq x$ and the equation*

$$(16)\qquad D_x^\nu J_0(x, t; \xi) = J_\nu(x, t; \xi)$$

holds for $(x, t; \xi) \in (0, 1) \times \langle 0, T\rangle \times \langle 0, 1\rangle$, $\xi \neq x$.

b. *For $f \in C_0(\langle 0, T\rangle)$, $D_t J_\nu$ is continuous and*

$$(17)\qquad D_t J_\nu(x, t; \xi) = \int_0^t f(\tau)\, D_t \Gamma_\nu(x, t; \xi, \tau)\, \mathrm{d}\tau = -J_{\nu+4}(x, t; \xi)$$

for $(x, t; \xi) \in \Omega \times \langle 0, 1\rangle$, $\xi \neq x$.

Proof. The proof follows from the estimate (7) for $0 < \mu < 1$.

Lemma 5. a. *For any fixed point $y \in (0, 1\rangle$ and $(x, t) \in (-\infty, \infty) \times (0, T\rangle$*

$$(18)\quad p(x, y) - \int_0^y \Gamma_0(x, t; \xi, 0)\, \mathrm{d}\xi = \int_0^t [D_\xi^3 \Gamma_0(x, t; y, \tau) - D_\xi^3\, \Gamma_0(x, t; 0, \tau)]\, \mathrm{d}\tau\,,$$

where

$$p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad 0 < x < y \\ \frac{1}{2} & \text{if} \quad x = 0 \quad \text{or} \quad x = y \\ 0 & \text{if} \quad x < 0 \quad \text{or} \quad x > y\,. \end{cases}$$

b. *Let* J_ν *mean the integral from Lemma* 4. *If* $f \in C_0(\langle 0, T\rangle)$ *then for every* $t \in (0, T\rangle$

$$\lim_{x \to z+} J_1(x, t; z) = 0\,, \quad z \in \langle 0, 1)$$
$$\lim_{x \to z-} J_1(x, t; z) = 0\,, \quad z \in (0, 1\rangle\,. \tag{19}$$

c. *Let* $n = 2$ *or* $n = 3$. *Then for* $f \in S_{2n-4}[t, (0, T\rangle]$ *at every point* $t \in (0, T\rangle$

$$\lim_{x \to z+} J_{2n-1}(x, t; z) = \tfrac{1}{2}(1 - |n - 2|) f(t)\,, \quad z \in \langle 0, 1)$$
$$\lim_{x \to z-} J_{2n-1}(x, t; z) = -\tfrac{1}{2}(1 - |n - 2|) f(t)\,, \quad z \in (0, 1\rangle\,. \tag{20}$$

Proof. a. For $x \neq y$ and $x \neq 0$ the convergence of the integrals in (18) follows by (7) and for $x = y$ or $x = 0$ by the identity $D_\xi^3\, \Gamma_0(y, t; y, \tau) = D_\xi^3\, \Gamma_0(0, t; 0, \tau) \equiv 0$. Let $y \in (0, 1\rangle$ be a fixed point. Integrating the equation

$$\int_0^y D_\tau\, \Gamma_0(x, t; \xi, \tau)\, d\xi = D_\xi^3\, \Gamma_0(x, t; y, \tau) - D_\xi^3\, \Gamma_0(x, t; 0, \tau)\,, \quad t \neq \tau$$

with respect to τ from 0 te $t - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ we obtain

$$\int_0^{t-\varepsilon} [D_\xi^3\, \Gamma_0(x, t; y, \tau) - D_\xi^3\, \Gamma_0(x, t; 0, \tau)]\, d\tau = \tag{21}$$
$$= \int_0^{t-\varepsilon} \left[\int_0^y D_\tau\, \Gamma_0(x, t; \xi, \tau)\, d\xi\right] d\tau = \int_0^y \Gamma_0(x, t; \xi, t - \varepsilon)\, d\xi - \int_0^y \Gamma_0(x, t; \xi, 0)\, d\xi$$

for $(x, t) \in \bar{\Omega}$. By the substitution $(x - \xi)/\varepsilon^{1/4} = -z$,

$$\int_0^y \Gamma_0(x, t; \xi, t - \varepsilon)\, d\xi = \int_{-\omega_1}^{\omega_2} \Gamma_0(z, 1; 0, 0)\, dz\,,$$

where $\omega_1 = x/\varepsilon^{1/4}$, $\omega_2 = (y - x)/\varepsilon^{1/4}$. Hence and by (8), letting $\varepsilon \to 0+$ in (21) we get the relation (18).

b. Since $\lim_{x \to z} \Gamma_1(x, t; z, \tau) = 0$ uniformly with respect to $\tau \in \langle 0, t - \varepsilon\rangle$, $\varepsilon > 0$, formulas (19) follow from estimate (6) for $\nu = 1$.

c. The function $f(t)$, $t \in (0, T\rangle$ may be continuously extended to the closed interval $\langle 0, T\rangle$. For $0 \leqq z < x < 1$ and $0 \leqq \tau < t \leqq T$ we get

$$|H_{2n-1}| \overset{df}{=} |[f(t) - f(\tau)]\, \Gamma_{2n-1}(x, t; z, \tau)| \leqq$$
$$\leqq K(t - \tau)^{\varepsilon - 1}\,, \quad 0 < \varepsilon < 1\,, \quad K > 0$$

($n = 2, 3$), whence $\lim_{x \to z+} \int_0^t H_{2n-1}\, d\tau = 0$ at every point $t \in (0, T\rangle$.

In virtue of (18) for $y = z \neq 0$ $(D_\xi^3\, \Gamma_0(z, t; z, \tau) \equiv 0)$

$$\lim_{x \to z+} \int_0^t D_x^3\, \Gamma_0(x, t; z, \tau)\, d\tau = \int_0^z \Gamma_0(z, t; \xi, 0)\, d\xi - \int_0^t D_\xi^3\, \Gamma_0(z, t; 0, \tau)\, d\tau = \tfrac{1}{2}\,.$$

If $z = 0$ the formula (18) yields

$$\lim_{x \to 0+} \int_0^t D_x^3\, \Gamma_0(x, t; 0, \tau)\, d\tau =$$

$$= 1 - \int_0^y \Gamma_0(0, t; \xi, 0)\, d\xi - \int_0^t D_\xi^3\, \Gamma_0(0, t; y, \tau)\, d\tau = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\,.$$

Since

$$J_{2n-1}(x, t; z) = -\int_0^t H_{2n-1}\, d\tau + f(t)\, L_n\,,$$

where $L_2 = \int_0^t D_x^3\, \Gamma_0(x, t; z, \tau)\, d\tau$ and $L_3 = -D_x\, \Gamma_0(x, t; z, 0)$, the formula (20) is true for $x \to z+$. The reasoning for $0 < x < z \leqq 1$ is analogous.

4. The Green function. Theorem 1. *The function*

$$(22_j)\quad G_j(x, t; \xi, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\Gamma_0(x, t; \xi, + 2k, \tau) + (-1)^j\, \Gamma_0(x, t; -\xi + 2k, \tau)]\,,$$

$$j = 1, 2$$

and its derivatives $D_x^\nu G_j$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *are continuous for* $(x, t; \xi, \tau) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$, $(\xi, \tau) \neq (x, t)$ *and* G_j *constitutes the Green function of problem* (1), (2), (3_j).

Proof. Investigate the convergence of the series

$$(23_j)\qquad u_0^{(j)}(x, t; \xi, \tau) = (-1)^j\, \Gamma_0(x, t; -\xi, \tau) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} [\Gamma_0(x, t; \xi + 2k, \tau) + (-1)^j\, \Gamma_0(x, t; -\xi + 2k, \tau)]$$

$(G_j(x, t; \xi, \tau) = \Gamma_0(x, t; \xi, \tau) + u_0^{(j)}(x, t; \xi, \tau))$. For $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq \xi \leqq 1$ and $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, $|x \mp \xi - 2k| \geqq 2|k| - |\pm\xi - x| \geqq 2|k| - 2$. By (6) we get the estimate

$$|D_x^\nu\, \Gamma_0(x, t; \pm\xi + 2k, \tau)| \leqq c_1(\nu)\, (t - \tau)^{-(1+\nu)/4} \exp\{-2^{4/3}\, c_2(t - \tau)^{-1/3}\, (|k| - 1)^{4/3}\}$$

for $\nu = 0, 1, \ldots$ and $\tau < t$. Thus number series

$$4c_1(\nu)\, \alpha^{-(1+\nu)/4} \sum_{l=1}^{\infty} \exp\{-2^{4/3} c_2 T^{-1/3} (l - 1)^{4/3}\}$$

is a convergent majorant of

$$(24)\qquad \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} [D_x^\nu\, \Gamma_0(x, t; \xi + 2k, \tau) + (-1)^j\, D_x^\nu\, \Gamma_0(x, t, -\xi + 2k, \tau)]\,,\quad j = 1, 2$$

if $0 < \alpha < t - \tau \leqq T$. Hence the continuity of $D_x u_0^{(j)}$ follows on $[\langle 0, 1\rangle \times (0, T\rangle] \times [\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, T)]$, $\tau < t$. We easily see that in $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ the function $D_x^\nu \Gamma_0(x, t; -\xi, \tau)$ is discontinuous only for $x = \xi = 0$, $t = \tau$. The terms $D_x \Gamma_0(x, t; \pm\xi + 2k, \tau)$ of the series (24) for $k = 1, -1$ are continuous on $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ except the function $D_x^\nu \Gamma_0(x, t; -\xi + 2, \tau)$ which is discontinuous for $x = \xi = 1$, $t = \tau$. The following majorant of (24) for $k \neq 1, -1$

$$s(t, \tau) = 4c_1(\nu)(t - \tau)^{-(1+\nu)/4} \sum_{l=2}^{\infty} \exp\{-2^{4/3} c_2(t - \tau)^{-1/3}(l - 1)\} =$$

$$= 4c_1(\nu)(t - \tau)^{-(1+\nu)/4} q/(1 - q),$$

where $q = \exp\{-2^{4/3} c_2(t - \tau)^{-1/3}\}$, has the zero limit as $t \to \tau+$ or $\tau \to t-$. Consequently all derivatives $D_x^\nu u_0^{(j)}$ are continuous on $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$, $(x, t) \neq (\xi, \tau)$. By Lemma 1a the continuity of $D_x^\nu G_j$ on $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$, $(\xi, \tau) \neq (x, t)$ is evident for $\nu = 0, 1, \ldots$

From the preceding argument and Lemma 1a we see that the equation $L(u_0^{(j)}; x, t) = 0$ is not satisfied only at the points $(0, t; 0, t)$, $(1, t; 1, t) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$. Let x or ξ be from the open interval $(0, 1)$ then by the estimate (6) one obtains $\lim_{t \to \tau+} u_0^{(i)}(x, t; \xi, \tau) = 0$. The properties c. of the Green function follow for $G_j(x, t; \xi, \tau)$ from the identity

$$D_x^\nu G_j(x, t; \xi, \tau)|_{x=z} = \frac{(-i)^\nu}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varrho^\nu\{[\cos \varrho(z - \xi - 2k) + \tag{25}$$

$$+ (-1)^j \cos \varrho(z + \xi - 2k)] - i[\sin \varrho(z - \xi - 2k) + (-1)^j \sin \varrho(z + \xi - 2k)]\} \,.$$

$$. \exp[-\varrho^4(t - \tau)] \, d\varrho$$

which may be obtained by the direct differentiation of (22_j) and by Eulerian identity. This concludes the proof.

Remark 2. In the compact set $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ the Green function G_j contains three singular terms $\Gamma_0(x, t; \xi, \tau)$, $\Gamma_0(x, t; -\xi, \tau)$ and $\Gamma_0(x, t; -\xi + 2, \tau)$ and the function $u_0^{(j)}$ is continuous on $\Omega \times \bar{\Omega}$ and $\bar{\Omega} \times \Omega$.

Theorem 2. *Let G_j be the Green function (22_j). Then for $u(x, t) \in N_4(\bar{\Omega})$ the identity*

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \int_0^t D_\xi^k u(1, \tau) \, D_\xi^{3-k} G_j(x, t; 1, \tau) \, d\tau - \tag{26}$$

$$- \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \int_0^t D_\xi^k u(0, \tau) \, D_\xi^{3-k} G_j(x, t; 0, \tau) \, d\tau +$$

$$+ \int_0^1 u(\xi, 0) \, G_j(x, t; \xi, 0) \, d\xi + \int_0^t \int_0^1 G_j(x, t; \xi, \tau) \, L(u; \xi, \tau) \, d\xi \, d\tau$$

is true on Ω.

Proof. In virtue of the decomposition $G_j = \Gamma_0 + u_0^{(j)}$ and Remark 2 and Lemmas 2a, 3a, 4a we may assert that all integrals in (26) are continuous functions on Ω.

Let $u(x, t)$ and $v(x, t)$ be arbitrary functions of $N_4(\bar{\Omega})$ and let $M(v; \xi, \tau) = D_\xi^4 v - D_\tau v$. Integrating the identity

$$u\, M(v; \xi, \tau) - v\, L(u; \xi, \tau) = D_\xi\Big[\sum_{k=0}^{3} (-1)^k\, D_\xi^k u D_\xi^{3-k} v\Big] - D_\tau(uv)$$

over the closed domain $\bar{\Omega}$ we get by the Green formula

$$\iint_\Omega [u\, M(v; \xi, \tau) - v\, L(u; \xi, \tau)]\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau = \int_{\partial\Omega} R(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\xi + S(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\tau\,,$$

where $R(\xi, \tau) = uv$ and $S(\xi, \tau) = \sum_{k=0}^{3} (-1)^k\, D_\xi^k u D_\xi^{3-k} v$ and $\partial\Omega$ is the boundary of Ω. Consider the positive oriented rectangle $\Omega' = (0 \leqq \xi \leqq 1) \times (0 \leqq \tau \leqq t - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ with the vertices $A_1(0, 0)$, $A_2(1, 0)$, $M_1(0, t - \varepsilon)$, $M_2(1, t - \varepsilon)$ such that its one side passes through the point $P(x, t) \in \Omega$. In this rectangle we may put $v(\xi, \tau) = G_j(x, t; \xi, \tau)$ and the Green formula gives

$$(27) \qquad -\iint_{\Omega'} G_j\, L(u; \xi, \tau)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau = \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \int_{A_2 M_2} D_\xi^k u D_\xi^{3-k} G_j\, \mathrm{d}\tau - \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \int_{A_1 M_1} D_\xi^k u D_\xi^{3-k} G_j\, \mathrm{d}\tau + \int_{A_1 A_2} u G_j\, \mathrm{d}\xi - \int_{M_1 M_2} u \Gamma_0\, \mathrm{d}\xi - \int_0^1 u(\xi, t - \varepsilon)\, u_0^{(j)}(x, t; \xi, t - \varepsilon)\, \mathrm{d}\xi\,.$$

The integral $I(\varepsilon) = \{\int_{M_1 M_2} u \Gamma_0\, \mathrm{d}\xi$ may be transformed to

$$I(\varepsilon) = \int_{-\omega_1}^{\omega_2} u(x + z \sqrt[4]{\varepsilon}, t - \varepsilon)\, \Gamma_0(z, 1; 0, 0)\, \mathrm{d}z\,, \qquad (x, t) \in \Omega_0\,,$$

where $\omega_1 = x/\varepsilon^{1/4}$, $\omega_2 = (1 - x)/\varepsilon^{1/4}$ by substituting $-z = (x - {}_\kappa)\, \varepsilon^{1/4}$. With respect to the mean value theorem we obtain

$$I(\varepsilon) - u(x, t) = \sqrt[4]{\varepsilon} \int_{-\omega_1}^{\omega_2} z D_\xi\, u(x + \theta z \sqrt[4]{\varepsilon},\; t - \theta\varepsilon)\, \Gamma_0(z, 1; 0, 0)\, \mathrm{d}z - \varepsilon \int_{-\omega_2}^{\omega_1} D_\tau\, u(x + \theta z \sqrt[4]{\varepsilon}, t - \theta\varepsilon)\, \Gamma_0(z, 1; 0, 0)\, \mathrm{d}z - u(x, t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\omega_1}^{\omega_2} \right) \Gamma_0(z, 1; 0, 0)\, \mathrm{d}z\,, \quad 0 < \theta < 1\,.$$

If we denote $N = \max_{\bar{\Omega}} (|u|, |D_\xi u|, |D_\tau u|)$ then

$$|\bar{I}(\varepsilon) - u(x, t)| < N \sqrt[4]{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |z\, \Gamma_0(z, 1; 0, 0)| \, \mathrm{d}z +$$

$$+ \varepsilon N \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_0(z, 1; 0, 0)| \, \mathrm{d}z + N \Big| \left(\int_{-\infty}^{-\omega_1} + \int_{\omega_2}^{\infty} \right) \Gamma_0(z, 1; 0, 0) \, \mathrm{d}z$$

and by the formula (27) for $\varepsilon \to 0+$ we reach the assertion of this theorem.

Remark 3. The analogous formula to (26) may be shown for an arbitrary function $H(x, t; \xi, \tau) = \Gamma_0 + h$ (instead of G_j), where h has the following properties:

a. $L(h; x, t) \equiv 0$ for $t > \tau$.

b. $\lim_{t \to \tau+} h(x, t; \xi, \tau) = 0$ for $(x; \xi, \tau) \in \langle 0, 1 \rangle \times \bar{\Omega}$ if at least one of the points x and ξ lies in the open interval $(0, 1)$.

5. The solution of boundary problems. The following theorem gives a formula for the explicit representation of the solution of problem (1), (2), (3_j).

Theorem 3. *Let the right hand side of* (1) $\varphi(x, t)$ *be a function of the class* $C_0(\bar{\Omega}) \cap S_0[x, (0, 1); t]$ *and the boundary functions belong to the following classes:* $g(x) \in C_0(\langle 0, 1 \rangle)$; $a_j(t)$, $b_j(t) \in S_2[t, (0, T\rangle]$ *and* $c_j(t), d_j(t) \in S_0[t, (0, T\rangle]$ *for* $j = 1, 2$. *Then the function*

(28_j)

$$u_j(x, t) = (-1)^j \int_0^t \left[a_j(\tau)\, D_\xi^{4-j} G_j(x, t; 0, \tau) + c_j(\tau)\, D_\xi^{2-j}\, G_j(x, t; 0, \tau) \right] \mathrm{d}\tau +$$

$$+ (-1)^{j+1} \int_0^t \left[b_j(\tau)\, D_\xi^{4-j}\, G_j(x, t; 1, \tau) + d_j(\tau)\, D_\xi^{2-j}\, G_j(x, t; 1, \tau) \right] \mathrm{d}\tau +$$

$$+ \int_0^1 g(\xi)\, G_j(x, t; \xi, 0)\, \mathrm{d}\xi + \int_0^t \int_1^0 G_j(x, t; \xi, \tau)\, \varphi(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau$$

is a solution of problem (1), (2), (3_j) *for* $j = 1, 2$.

Proof. First of all we see that there exists a continuous extension of a_j, b_j, c_j and d_j, $j = 1, 2$ on the closed interval $\langle 0, T \rangle$.

The functions $D_\xi^\nu\, \Gamma_0(x, t; -\xi, \tau)$ and $D_\xi^\nu\, \Gamma_0(x, t; \pm\xi + 2k, \tau)$ for $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ and $\nu = 0, 1, \ldots$ are continuously differentiable on $\Omega \times \bar{\Omega}$ up to an arbitrary order and satisfy the homogeneous equation $L(u; x, t) = 0$ on Ω for every fixed $(\xi, \tau) \in \bar{\Omega}$. With respect to formulas (10), (13), (17) and to the decomposition $D_x^\nu G_j = D_x^\nu \Gamma_0 + D_x^\nu u_0^{(j)}$ it is obvious that $u_j(x, t)$ satisfies condition (1).

Letting $t \to 0+$ in (28_j) we get condition (2) by Lemmas 2c, 3a and 4a.

For the proof of conditions (3_j) $j = 1, 2$ we shall need the following identity:

$$(29) \qquad D_x^{\nu} D_{\xi}^{\nu_1} G_j(z, t; \xi, \tau) =$$

$$= \frac{(-i)^{\nu+\nu_1}}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varrho^{\nu+\nu_1} \{[(-1)^{\nu_1} \cos \varrho(z - \xi - 2k) + (-1)^j \cos \varrho(z + \xi - 2k)] -$$

$$- i[(-1)^{\nu_1} \sin \varrho(z - \xi - 2k) + (-1)^j \sin \varrho(z + \xi - 2k)]\} \exp[-\varrho^4(t - \tau)] \, d\varrho$$

which may be obtained analogously to formula (25) by (22_j). If the parameters (ν, ν_1, j, z) attain the values $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(2, 0, 1, 0)$, $(2, 0, 1, 1)$ and $(1, 0, 2, 0)$, $(1, 0, 2, 1)$, $(3, 0, 2, 0)$, $(3, 0, 2, 1)$ then the derivative (29) is equal to zero for $\tau < t$. Hence and by Lemmas 2a, 3a for the same values of parameters (ν, ν_1, j, z) as above the derivatives of the both last integrals in (28_j) with respect to x up to the order $\nu = 0, 1, 2, 3$ converge to zero as $x \to 0+$ or $x \to 1-$ for every $t \in (0, T\rangle$. From the continuity of J_ν on $\bar{\Omega} \times \langle 0, 1\rangle$, $\xi \neq x$ and from (16) we have

$$(30) \qquad D_x^{\nu} \int_0^t f_j(\tau) \, D_{\xi}^{\nu_1} G_j(x, t; \xi, \tau) \, d\tau \to 0 \quad \text{if} \quad x \to 0+ \quad \text{or} \quad x \to 1-$$

(f_j represents any one of the functions a_j, b_j, c_j, d_j of (28_j)) for all values $(\nu, \nu_1, j, z) = (0, 1, 1, z)$, $(0, 3, 1, z)$, $(2, 1, 1, z)$, $(2, 3, 1, z)$ and $(1, 0, 2, z)$, $(1, 2, 2, z)$, $(3, 0, 2, z)$, $(3, 2, 2, z)$, where $z = 1 - \xi$ and $\xi = 0, 1$ $(\xi \neq z)$. If $\xi = z$ then Lemma 4a enables us only to interchange the differentiation and integration in (30). For the calculation of the limits of the integrals in (28_j) if $x \to 0+$ and $x \to 1-$ we have to use Lemma 5b,c. (There are two singular integrals in (30). If $z = 0$ then both integrals for $k = 0$ – see (22_j) – are singular and if $z = 1$ the first integral for $k = 0$ and the second integral for $k = 1$ are singular.) The remainder of integral (30) is a continuous function on $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ and we find out as well as in the previous case that its limit is zero. Thus the function $u_j(x, t)$ given in (28_j) satisfies condition (3_j).

The function $u_j(x, t)$ is sufficiently smooth. Indeed, the continuity of derivatives $D_x^{\nu} u_j$ for $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$ and $D_t u_j$, $j = 1, 2$ in Ω follows successively by Lemma 2a,b and 3a,b,c and 4a,b and by the continuity of $u_0^{(j)}$ on $\Omega \times \bar{\Omega}$. Letting $t \to 0+$ in (28_j) for $x \in (0, 1)$ and then $x \to 0+$ and $x \to 1-$ for $t \in (0, T\rangle$ we get the continuity of $u_j(x, t)$ on $\bar{\Omega} - \{(0, 0), (1, 0)\}$ by Lemma 2c and 5a,b,c. Theorem 3 is proved.

Remark 4. In Theorem 3 we have proved the continuity of $u_j(x, t)$ in $\bar{\Omega} - \{(0, 0), (1, 0)\}$. For the continuity of $u_j(x, t)$ in the whole closed domain $\bar{\Omega}$ we have to put further conditions on the boundary functions. For instance, it is sufficient to assume that $g(x)$ and $a_1(t)$, $b_1(t)$ have a compact support in $\langle 0, 1\rangle$ and $\langle 0, T\rangle$ respectively. Really, substituting $(x - \xi)/t^{1/4}$ by $-z$ we obtain for a sufficiently small $\varepsilon > 0$

$$I_0(x, t; 0) = \int_0^1 g(\xi) \, \Gamma_0(x, t; \xi, 0) \, d\xi =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} g(\xi)\, \Gamma_0(x, t; \xi, 0)\, d\xi = \int_{-\omega_1}^{\omega_2} g(x + t^{1/4} z)\, \Gamma_0(z, 1; 0, 0)\, dz\,,$$

where $\omega_1 = (x - \varepsilon)/t^{1/4}$, $\omega_2 = (1 - \varepsilon - x)/t^{1/4}$, $x \in \langle 0, 1\rangle$, $t \in (0, T\rangle$ and $I_0(x, t; 0) \to 0$ as $(x, t) \to (0, 0)$ or $(x, t) \to (1, 0)$ for $(x, t) \in \Omega$. In virtue of (6) for $(x, t) \in \Omega$, $\xi \in \langle 0, 1\rangle$ and $f(t) \in C_0(\langle 0, T\rangle)$ we get

$$\left| \int_0^t f(\tau)\, D_\xi^{\nu_1}\, G_j(x, t; \xi, \tau)\, d\tau \right| \leqq \alpha_j(t)\,, \quad \nu_1 = 0, 1, 2$$

$$\left| \int_0^t \int_0^1 \varphi(\xi, \tau)\, G_j(x, t; \xi, \tau)\, d\xi\, d\tau \right| \leqq \beta_j(t)\,,$$

where $\lim\limits_{t\to 0+} \alpha_j(t) = \lim\limits_{t\to 0+} \beta_j(t) = 0$, $j = 1, 2$. Let $\xi = 0, 1$ then $\int_0^t f(\tau)\, D_\xi^3\, G_j(x, t; \xi, \tau)\, d\tau$ is a continuous function at the point $(1 - \xi, 0)$ (see Lemma 4a). Furthermore by (18) for $y = 1$ and $x \in (0, 1)$

$$|J_3(x, t; 0)| \leqq \left| a_1(t) \int_0^t D_\xi^3\, \Gamma_0(x, t; 0, \tau)\, d\tau \right| + \int_0^t |a_1(\tau) - a_1(t)|\, |D_\xi^3\, \Gamma_0(x, t; 0, \tau)|\, d\tau \leqq$$

$$\leqq |a_1(t)| \left\{ \left| \int_0^t D_\xi^3\, \Gamma_0(x, t; 1, \tau)\, d\tau \right| + \frac{K}{t^\mu} + 1 \right\} + \gamma(t)$$

where $K > 0$, $0 < \mu < 1$ and $\lim\limits_{t\to 0+} \gamma(t) = 0$. Thus $J_3(x, t; 0) \to 0$ if $(x, t) \to (0, 0)$. Analogously $J_3(x, t; 1) - 0$ as $(x, t) \to (1, 0)$.

Remark 5. The above procedures are directly applicable to the boundary value problems

$$L_n(u; x, t) = D_x^{2n} u + (-1)^n D_t u = \varphi(x, t)\,, \quad (x, t) \in \Omega$$

$$u(x, 0) = g(x)\,, \quad x \in (0, 1)$$

$$D_x^{2\nu+j-1}\, u(0, t) = a_{\nu j}(t)\,, \quad D_x^{2\nu+j-1}\, u(1, t) = b_{\nu j}(t)\,,$$

$$t \in (0, T\rangle\,, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n - 1\,, \quad j = 1, 2\,.$$

References

[1] *O. A. Ladyzhenskaya*: On the uniqueness of the solution of the Cauchy problem for a linear parabolic equation, Mat. sb. *27, 69* (1950), 175—184.

[2] *R. K. Juberg:* On the Dirichlet problem for certain higher order parabolic equations, Pacific J. Math. *10* (1960), 859—878.

Author's address: 816 31 Bratislava 16, Matematický pavilón, Mlynská dolina (Katedra matematickej analýzy PFUK).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

ON MEASURES OF STATISTICAL DEPENDENCE*)

JANA ZVÁROVÁ, Praha

(Received April 27, 1971)

1. INTRODUCTION

One of the most important problems of mathematical statistics is to express the strength of statistical dependence between two random variables. There have been given different sets of requirements that have to be satisfied by an adequate measure of statistical dependence. To all of these sets some requirements are common. It seems to be natural to choose a range of values of measures of statistical dependence to be in the closed interval $[0, 1]$, to reach the lower bound 0 if and only if random variables are independent and the upper bound 1 in the case of their highest dependence. The highest dependence of random variables has been introduced in different ways by authors. For example, we can remind W. HÖFFDING's [4] and A. RÉNYI's [15] approaches to this problem. Important properties for adequate measures of statistical dependence have also been pointed out by A. PEREZ [10]. However, in practical situations, for a proper selection of an adequate measure of statistical dependence an important role is played by both the specific features of the given task and the behaviour of sample estimators of measures of statistical dependence.

In Sec. 2 of this paper a set of requirements $1-4$ on measures of statistical dependence is given. There also the problem of the highest dependence of random variables is discussed. In Sec. 3 a class of measures of statistical dependence that satisfy the requirements $1-4$ is found and in Sec. 4 upper bounds of such measures of statistical dependence under particular restrictions on random variables are derived. In Sec. 5 sample properties of a special class of measures of statistical dependence are examined.

---

*) A slightly different version of this paper was presented as a part of the lecture at Sixth Prague Conference on Information Theory, September 19—25, 1971.

Let ξ and η be two abstract valued random variables. It is well known that to the random variables ξ and η there correspond sample probability spaces $(X, \mathscr{X}, \mathrm{P}_\xi)$ and $(Y, \mathscr{I}, \mathrm{P}_\eta)$ respectively, i.e., $\xi \to (X, \mathscr{X}, \mathrm{P}_\xi)$ and $\eta \to (Y, \mathscr{I}, \mathrm{P}_\eta)$. Let $(X \times Y, \mathscr{X} \times \mathscr{I})$ be the Cartesian product of $(X, \mathscr{X})$ and $(Y, \mathscr{I})$ and let us assume that to the abstract valued random variable (ξ, η) there corresponds a sample probability space $(X \times Y, \mathscr{X} \times \mathscr{I}, \mathrm{P}_{\xi\eta})$, i.e., $(\xi, \eta) \to (X \times Y, \mathscr{X} \times \mathscr{I}, \mathrm{P}_{\xi\eta})$. Moreover, let P_ξ and P_η be marginal probability measure of $\mathrm{P}_{\xi\eta}$ on $(X, \mathscr{X})$ and $(Y, \mathscr{I})$ respectively. If we consider the probability measure $\mathrm{P}_\xi \times \mathrm{P}_\eta$ and a measure λ on $(X \times Y, \mathscr{X} \times \mathscr{I})$, where λ is an arbitrary dominating measure of $\mathrm{P}_{\xi\eta}$ and $\mathrm{P}_\xi \times \mathrm{P}_\eta$, we shall denote by $p_{\xi\eta}(x, y) = \mathrm{dP}_{\xi\eta}/\mathrm{d}\lambda$ and $p_\xi(x)\, p_\eta(y) = \mathrm{d}(\mathrm{P}_\xi \times \mathrm{P}_\eta)/\mathrm{d}\lambda$ the corresponding Radon-Nikodym densities.

Further we shall denote by $\mathrm{e}_{1/2}(\mathrm{P}_{\xi\eta}, \mathrm{P}_\xi \times \mathrm{P}_\eta)$ the minimum probability of error (Bayes risk) for testing the hypothesis H_0: $\mathrm{P} = \mathrm{P}_\xi \times \mathrm{P}_\eta$ against H_1: $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\xi\eta}$ in the case that the a priori probabilities of H_0 and H_1 are equal to $\frac{1}{2}$, i.e.

$$\mathrm{e}_{1/2}(\mathrm{P}_{\xi\eta}, \mathrm{P}_\xi \times \mathrm{P}_\eta) = \frac{1}{2} \int_{X \times Y} \min \left[p_{\xi\eta}(x, y),\ p_\xi(x)\, p_\eta(y) \right] \mathrm{d}\lambda . \tag{1}$$

Now we shall give some general requirements on adequate measures of statistical dependence stimulated by W. Höffding's [4] and A. Perez's [10] works. If we denote by $\delta(\xi, \eta)$ a measure of statistical dependence of random variables ξ and η, these requirements do not determine $\delta(\xi, \eta)$ uniquely, reading as follows:

1. $0 \leqq \delta(\xi, \eta) \leqq 1$.

2. a) $\delta(\xi, \eta) = 0$ if and only if ξ and η are independent;

   b) $\lim_{\mathrm{e} \uparrow 1/2} \sup_{\mathscr{D}_1(\mathrm{e})} \delta(\xi, \eta) = 0$,

   where $\mathscr{D}_1(\mathrm{e}) = \{(\xi, \eta) : \frac{1}{2} > \mathrm{e}_{1/2}(\mathrm{P}_{\xi\eta}, \mathrm{P}_\xi \times \mathrm{P}_\eta) \geqq \mathrm{e}\}$;

   c) $\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\mathscr{E}_1(\delta)} \mathrm{e}_{1/2}(\mathrm{P}_{\xi\eta}, \mathrm{P}_\xi \times \mathrm{P}_\eta) = \frac{1}{2}$,

   where $\mathscr{E}_1(\delta) = \{(\xi, \eta) : 0 < \delta(\xi, \eta) \leqq \delta\}$.

3. a) $\delta(\xi, \eta) = 1$ if and only if ξ and η are singular;

   b) $\lim_{\mathrm{e} \downarrow 0} \inf_{\mathscr{D}_2(\mathrm{e})} \delta(\xi, \eta) = 1$,

   where $\mathscr{D}_2(\mathrm{e}) = \{(\xi, \eta) : 0 < \mathrm{e}_{1/2}(\mathrm{P}_{\xi\eta}, \mathrm{P}_\xi \times \mathrm{P}_\eta) \leqq \mathrm{e}\}$;

   c) $\lim_{\delta \uparrow 1} \inf_{\mathscr{E}_2(\delta)} \mathrm{e}_{1/2}(\mathrm{P}_{\xi\eta}, \mathrm{P}_\xi \times \mathrm{P}_\eta) = 0$,

   where $\mathscr{E}_2(\delta) = \{(\xi, \eta) : 1 > \delta(\xi, \eta) \geqq \delta\}$.

4. If $(\xi', \eta') \to (X \times Y, \mathscr{X}' \times \mathscr{Y}', P_{\xi'\eta'})$, where $\mathscr{X}' \times \mathscr{Y}' \subset \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ is a sub-σ algebra and $P_{\xi'\eta'}$ is the restriction of $P_{\xi\eta}$ on $\mathscr{X}' \times \mathscr{Y}'$, then

a) $\delta(\xi', \eta') \leqq \delta(\xi, \eta)$;

b) $\delta(\xi', \eta') = \delta(\xi, \eta)$ if and only if $\mathscr{X}' \times \mathscr{Y}'$ is sufficient with respect to $P_{\xi\eta}$ and $P_\xi \times P_\eta$.

Remark 1. Independence and singularity of random variables ξ and η is defined by the equality and singularity of probability measures $P_{\xi\eta}$ and $P_\xi \times P_\eta$, i.e., $P_{\xi\eta} = P_\xi \times P_\eta$ and $P_{\xi\eta} \perp P_\xi \times P_\eta$ respectively.

Further we shall discuss the problem of the highest dependence of random variables. The highest dependence given by the singularity of random variables ξ and η in the requirement 3.a) corresponds to the c-dependence introduced in [4]. The c-dependence likewise the strict dependence introduced in [15] have been defined for real valued random variables. We extend both these definitions to abstract valued random variables in the following way.

Definition 1. Random variables ξ and η are c-dependent if there exists an $A \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ such that

$$\int_A p_{\xi\eta}(x, y)\, d\lambda - \int_A p_\xi(x)\, p_\eta(y)\, d\lambda = 1\,.$$

Definition 2. Random variables ξ and η are strictly dependent if either $\xi = g(\eta)$ or $\eta = h(\xi)$, where $g(y)$ is a measurable mapping of $(Y, \mathscr{Y})$ into $(X, \mathscr{X})$ and $h(x)$ is a measurable mapping of $(X, \mathscr{X})$ into $(Y, \mathscr{Y})$.

In the following two lemmas we examine the relationship of the strict dependence and c-dependence.

Definition 3. A set (a class of P-equivalent sets) C in a probability space $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ is an atom, if $P(C) > 0$ and for $C \supset B \in \mathscr{A}$ either $P(B) = 0$ or $P(C - B) = 0$ [7].

Lemma 1. *Let C be an atom in $(X \times Y, \mathscr{X} \times \mathscr{Y}, P_{\xi\eta})$. Then there exists an atom E in $(X, \mathscr{X}, P_\xi)$ and an atom F in $(Y, \mathscr{Y}, P_\eta)$ such that $C = E \times F\ [P_{\xi\eta}]$.*

If $P_{\xi\eta}(D) = 1$, $D \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ and there exists an atom C in $(X \times Y, \mathscr{X} \times \mathscr{Y}, P_{\xi\eta})$, then $P_\xi \times P_\eta(D) > 0$.

Proof. Let us consider the sequence $\varepsilon_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, and let n_0 be such a positive integer that $\varepsilon_{n_0} < P_{\xi\eta}(C)$. For any $n \geqq n_0$, there exists a set $A_n = \bigcup_{i=1}^{k_n} E_{in} \times F_{in}$ such that for a fixed n the sets $E_{in} \times F_{in}$ $(i = 1, 2, \ldots, k_n)$ are disjoint and $P_{\xi\eta}(C \,\Delta A_n) < \varepsilon_n$. Since for any $n \geqq n_0$ $P_{\xi\eta}(C - A_n) = 0$, therefore

$$P_{\xi\eta}(C \cap A_n) = \sum_{i=1}^{k_n} P_{\xi\eta}(C \cap (E_{in} \times F_{in})) = P_{\xi\eta}(C)\,.$$

Moreover, for any $n \geqq n_0$ there exists a unique index i_n such that

$$P_{\xi\eta}(C) \leqq P_{\xi\eta}(E_{i_n n} \times F_{i_n n}) < P_{\xi\eta}(C) + \varepsilon_n .$$

For $n \geqq n_0$ we denote $E_n = E_{i_n n}$ and $F_n = F_{i_n n}$. For $n < n_0$ we define $E_n = X$, $F_n = Y$. Let $E_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, $F_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Clearly $E_0 \times F_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E_n \times F_n)$ and $P_{\xi\eta}((E_0 \times F_0) - C) = 0$. Simultaneously $P_{\xi\eta}(C - (E_0 \times F_0)) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} P_{\xi\eta}(C - (E_n \times F_n)) = 0$.

Now we shall prove that the set E_0 contains an atom E in $(X, \mathscr{X}, P_\xi)$ such that $P_{\xi\eta}(E \times F_0) = P_{\xi\eta}(C)$. Let us establish a decomposition of the set E_0 into at most countable union of disjoint atoms E'_i and their non atomic complement E' in E_0 (see [6], p. 110), i.e. $E_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} E'_i \cup E'$. If $P_{\xi\eta}(E'_i \times F_0) = 0$ for all $i = 1, 2, \ldots,$ then $P_{\xi\eta}(E' \times F_0) = P_{\xi\eta}(C)$ and $E' \times F_0$ is an atom in $(X \times Y, \mathscr{X} \times \mathscr{I}, P_{\xi\eta})$. Let us divide E' into m_0 disjoint sets E''_j such that $P_\xi(E''_j) < P_{\xi\eta}(C)$, $j = 1, 2, \ldots, m_0$. Then $P_{\xi\eta}(E''_j \times F_0) = 0$ for $j = 1, 2, \ldots, m_0$ which is a contradiction. Therefore indeed there exists such an atom E in $(X, \mathscr{X}, P_\xi)$.

Similarly we find an atom F in $(Y, \mathscr{I}, P_\eta)$ such that $P_{\xi\eta}(E \times F) = P_{\xi\eta}(C)$. This proves the first part of the lemma.

If $P_{\xi\eta}(D) = 1$ and C is an atom in $(X \times Y, \mathscr{X} \times \mathscr{I}, P_{\xi\eta})$, then it follows from the first part of the lemma that there exist atoms E, F such that $C = E \times F\, [P_{\xi\eta}]$.

Let us denote $C^* = C \cap D \cap (E \times F)$. Since C^* is an atom in $(X \times Y, \mathscr{X} \times \mathscr{I}, P_{\xi\eta})$, therefore $C^* = C\, [P_{\xi\eta}]$. Now we shall show that $P_\xi \times P_\eta(C^*) = P_\xi(E)\, P_\eta(F)$.

Let us assume that $P_\xi \times P_\eta(C^*) < P_\xi(E)\, P_\eta(F)$. Then there exists a countable union of disjoint rectangles $E_i \times F_i$ $(i = 1, 2, ..)$ such that $C^* \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \times F_i \subset E \times F$ and simultaneously

$$(2) \qquad P_\xi \times P_\eta(C^*) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} P_\xi(E_i)\, P_\eta(F_i) < P_\xi(E)\, P_\eta(F) .$$

Moreover, $P_{\xi\eta}(C^*) = \sum_{i=1}^{\infty} P_{\xi\eta}(E_i \times F_i) = P_{\xi\eta}(E \times F)$. In view of the fact that $E \times F$ is an atom in $(X \times Y, \mathscr{X} \times \mathscr{I}, P_{\xi\eta})$, there exists a unique index i_0 such that $P_{\xi\eta}(E_{i_0} \times F_{i_0}) = P_{\xi\eta}(C^*)$. Therefore $P_\xi(E_{i_0}) \geqq P_{\xi\eta}(C^*) > 0$, $P_\eta(F_{i_0}) \geqq P_{\xi\eta}(C^*) > 0$ and since E and F are atoms, it follows $P_\xi(E_{i_0}) = P_\xi(E)$, $P_\eta(F_{i_0}) = P_\eta(F)$. However, this contradicts the second part of inequality (2). Consequently $P_\xi \times P_\eta(C^*) = P_\xi(E)\, P_\eta(F)$ and $P_\xi \times P_\eta(D) > 0$.

Corollary 1. *If C is an atom in $(X \times Y, \mathscr{X} \times \mathscr{I}, P_{\xi\eta})$ and ξ and η are strictly dependent then ξ and η are not c-dependent.*

Lemma 2. *The strict dependence $\eta = h(\xi)$ or $\xi = g(\eta)$ implies the c-dependence if and only if there are no atoms in $(Y, \mathscr{I}, P_\eta)$ and $(X, \mathscr{X}, P_\xi)$, respectively.*

Proof. Let $\eta = h(\xi)$ and let ξ and η be c-dependent. Then for $D = \{(x, y) : : y = h(x)\}$ it is $P_{\xi\eta}(D) = 1$ and $P_\xi \times P_\eta(D) = \int_X P_\eta(h(x))\, dP_\xi = 0$. Therefore there are no atoms in $(Y, \mathscr{I}, P_\eta)$.

If $\eta = h(\xi)$ and there are no atoms in $(Y, \mathscr{I}, P_\eta)$, then $P_{\xi\eta}(D) = P_{\xi\eta}\{(x, y) : : y = h(x)\} = 1$ and $P_\xi \times P_\eta(D) = \int_X P_\eta(h(x))\, dP_\xi = 0$. Then we can see that ξ and η are c-dependent.

The proof for the strict dependence $\xi = g(\eta)$ is similar.

Corollary 2. *If there are no atoms in $(X, \mathscr{X}, P_\xi)$ and $(Y, \mathscr{I}, P_\eta)$ then ξ and η are strictly dependent if and only if they are c-dependent.*

Remark 2. We can notice that ξ and η are c-dependent if and only if there exists a function $k(x, y)$ such that $k(x, y) = 0[P_{\xi\eta}]$ and $k(x, y) \neq 0[P_\xi \times P_\eta]$. It seems to us that there are no reasons to restrict ourselves to strict dependences with $k(x, y) = = y - h(x)$ or $k(x, y) = x - g(y)$.

Now we will state some problems that arise in this field.

Problem 1. Are there any measures of statistical dependence $\delta(\xi, \eta)$ that satisfy all the requirements 1–4?

Problem 2. What are upper bounds of $\delta(\xi, \eta)$ and a lower bound of $e_{1/2}(P_{\xi\eta}, P_\xi \times P_\eta)$ figuring in the requirements 2 and 3 attainable under particular restrictions on random variables ξ and η?

Problem 3. What are the sample properties of adequate measures $\delta(\xi, \eta)$?

In the following sections we try to answer at least partly all these questions.

3. *f*-INFORMATIONAL MEASURES OF STATISTICAL DEPENDENCE

In the sequel we shall be interested in measures of statistical dependence that are based on the notion of f divergence of two probability measures (called also generalized f-entropy [9], [11], [13]) introduced by I. Csiszár in [1]. The most important properties of f-divergences are based on the convexity of a function $f(u)$ defined on $[0, \infty)$, where the following conventions are observed:

(3) $$f(0) = \lim_{u \downarrow 0} f(u)\,, \quad 0 f\left(\frac{0}{0}\right) = 0$$

and

$$0 f\left(\frac{v}{0}\right) = v f_\infty \text{ where } v > 0 \text{ and } f_\infty = \lim_{u \uparrow \infty} \frac{f(u)}{u}\,.$$

For the sake of simplicity we shall denote $f_1 = f(1)$ and $f_2 = f_0 + f_\infty$, where $f_0 = f(0)$.

If we consider two probability measures $P_{\xi\eta}$ and $P_\xi \times P_\eta$ on $(X \times Y, \mathscr{X} \times \mathscr{Y})$ then in this special case the f-divergence of $P_{\xi\eta}$ and $P_\xi \times P_\eta$ is defined by

$$\text{(4)} \qquad D_f(P_{\xi\eta}, P_\xi \times P_\eta) = \int_{X \times Y} f\left(\frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_\xi(x)\, p_\eta(x)}\right) p_\xi(x)\, p_\eta(y)\, d\lambda\,.$$

According to the notation in [9] we shall call $[D_f(P_{\xi\eta}, P_\xi \times P_\eta) - f_1]$ the generalized f-information. However, considering the fact that the additive constant $-f_1$ is irrelevant in all what follows, for the purpose of this paper we denote

$$\text{(5)} \qquad I_f(\xi, \eta) = D_f(P_{\xi\eta}, P_\xi \times P_\eta)$$

and also call it the f-information.

In statistics some f-informations have been frequently used for measuring statistical dependence between two random variables. The most important of them are *Pearson's mean square contingency*

$$\text{(6)} \qquad \chi^2 = \int_{X \times Y} \frac{[p_{\xi\eta}(x, y) - p_\xi(x)\, p_\eta(y)]^2}{p_\xi(x)\, p_\eta(y)}\, d\lambda$$

with $f(u) = (1 - u)^2$, *Shannon's information*

$$\text{(7)} \qquad I = \int_{X \times Y} p_{\xi\eta}(x, y) \log \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_\xi(x)\, p_\eta(y)}\, d\lambda$$

with $f(u) = u \log u$ and *Höffding's coefficient of statistical dependence*

$$\text{(8)} \qquad \gamma = \frac{1}{2} \int_{X \times Y} \left| p_{\xi\eta}(x, y) - p_\xi(x)\, p_\eta(y) \right| d\lambda$$

with $f(u) = \frac{1}{2}|1 - u|$. Moreover, γ and $e_{1/2}(P_{\xi\eta}, P_\xi \times P_\eta)$ are tied together by the relation [19]

$$\text{(9)} \qquad e_{1/2}(P_{\xi\eta}, P_\xi \times P_\eta) = \tfrac{1}{2}(1 - \gamma)\,.$$

One of further measures of statistical dependence based on the notion of f-information is *Hellinger's integral*

$$\text{(10)} \qquad h = -\int_{X \times Y} [p_{\xi\eta}(x, y)\, p_\xi(x)\, p_\eta(y)]^{1/2}\, d\lambda$$

with $f(u) = -\sqrt{u}$.

The adequacy of f-information with $f(u) = u \log u$ for measuring statistical dependence has been already discussed in [9], [10]. The relationship of f-informations with convex functions $f(u)$ satisfying (3) to the requirements in [15] has been examined in [2].

Now we shall try to give some statements concerning the behaviour of measures of statistical dependence based on f-informations with respect to the requirements 1–4. We strongly rely on the results of I. Csiszar [1], [2], A. Perez [9], [11] and I. Vajda [19], [20] that systematically examined properties of f-divergences.

Let us denote by F the class of convex functions $f(u)$ defined on $[0, \infty)$ and satisfying the conventions (3) and let $\tilde{F}$ be a subclass of F such that every $f(u) \in \tilde{F}$ is strictly convex with $f_2 < \infty$.

Theorem 1. *For every* $f(u) \in \tilde{F}$

$$\delta_f(\xi, \eta) = \frac{I_f(\xi, \eta) - f_1}{f_2 - f_1} \tag{11}$$

satisfies all the requirements 1–4.

Proof. The satisfaction of the requirements 1, 2, 3 follows directly from the reuslts in [20], [12] and 4 from [1].

Remark 3. We can notice that the function $f(u) = -\sqrt{u}$ (Hellinger's integral h is based on it) satisfies the assumptions of Theorem 1.

Remark 4. If $f(u) \in F$ with $f_2 < \infty$ is not strictly convex, we cannot quarantee that $\delta_f(\xi, \eta)$ given by (11) satisfies the requirements 2.a), 2.c) and 4.b). However, for the function $f(u) = \frac{1}{2}|1 - u|$ (minimům probability of error $e_{1/2}(P_{\xi\eta}, P_\xi \times P_\eta)$ and Höffding's coefficient of statistical dependence γ are based on it) that is not strictly convex with $f_2 < \infty$, we can state the following obvious lemma.

Lemma 3. *Höffding's coefficient of statistical dependence* $\gamma = 0$ (i.e. $e_{1/2}(P_{\xi\eta}, P_\xi \times P_\eta) = \frac{1}{2}$) *if and only if* ξ *and* η *are independent.*

From Lemma 3 it follows that Höffding's coefficient of statistical dependence satisfies moreover the requirement 2.a) and it obviously satisfies also the requirement 2.c).

Theorem 2. *For every* $f(u) \in F$ *with* $f_2 = \infty$

$$\delta_f(\xi, \eta) = \varphi[I_f(\xi, \eta)] \tag{12}$$

satisfies the requirements 1, 3.b) *and* 4.a). *The function* $\varphi(t)$ *in* (12) *is an arbitrary real function defined and increasing on* $[f_1, \infty]$, *with* $\varphi(\infty) = \lim_{t \uparrow \infty} \varphi(t)$, *that is mapping the closed interval* $[f_1, \infty]$ *onto the closed interval* $[0, 1]$.

Proof follows from the results in [20], [1].

This sort of transformations of f-informations with $f_2 = \infty$ has already been used in statistics. For example, the transformation of Pearson's mean square contingency χ^2 by the function $\varphi_1(t) = \sqrt{(t/(1 + t))}$ gives the contingency coefficient $\sqrt{(\chi^2/(1 + \chi^2))}$ [3]. The transformation of Shannon's information I by the function $\varphi_2(t) = \sqrt{(1 - e^{-2t})}$ gives the informational coefficient of correlation $\sqrt{(1 - e^{-2I})}$ [5].

We can find many other functions $\varphi(t)$ that are increasing on $(f_1, \infty]$ and mapping this interval onto $[0, 1]$. However, the functions $\varphi_1(t)$ and $\varphi_2(t)$ are mapping χ^2 and I respectively onto the closed interval $[0, 1]$ in such a way that in the case of Gaussian distribution $P_{\xi\eta}$ with the coefficient of correlation ϱ

$$(13) \qquad \sqrt{\frac{\chi^2}{1 + \chi^2}} = \sqrt{(1 - e^{-2I})} = |\varrho| \, .$$

This property for adequate measures of statistical dependence has been required in [15].

Further, $\delta_f(\xi, \eta)$ given by (11) and (12) will be called f-informational measures of statistical dependence. We can see that f-informational measures of statistical dependence are even symmetrical, i.e. $\delta_f(\xi, \eta) = \delta_f(\eta, \xi)$. The symmetry for adequate measures of statistical dependence has been required in [15]. However, it remains an open problem whether the symmetry of measures of statistical dependence is a useful property in general. In some cases asymmetrical measures of statistical dependence seem to be much preferable [10].

4. UPPER BOUNDS OF f-INFORMATIONAL MEASURES OF STATISTICAL DEPENDENCE

In Sec. 3 we introduce a class of f-informational measures of statistical dependence and have not put any restrictions on random variables (ξ, η) under consideration. In some cases we can a priori restrict the investigated class of random variables (ξ, η) and then it may happen that the highest dependence defined by the requirement 3.a) in Sec. 3 never can occur. According to Lemma 1, this arises in all cases when there exists an atom in $(X \times Y, \mathscr{X} \times \mathscr{Y}, P_{\xi\eta})$ and, consequently, in the case when we consider a class of random variables $(\xi, \eta) \to (X \times Y, \tilde{\mathscr{X}} \times \tilde{\mathscr{Y}}, P_{\xi\eta})$, where $\tilde{\mathscr{X}}$ and $\tilde{\mathscr{Y}}$ are σ-algebras generated by measurable decompositions $D_X = (X_1, X_2, \ldots, X_r)$ of $(X, \mathscr{X})$ and $D_Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_s)$ of $(Y, \mathscr{Y})$ respectively. Therefore it seems to be useful to ask for attainable upper bounds of $\delta_f(\xi, \eta)$ with respect to an a priori restricted class of random variables (ξ, η). Owing to the relations (11), (12) it is sufficient to solve this problem for f-informations $I_f(\xi, \eta)$. In the sequel we use the notation introduced above.

Theorem 3. *Let $\xi \to (X, \tilde{\mathscr{X}}, P_\xi)$ and $\eta \to (Y, \tilde{\mathscr{Y}}, P_\eta)$ be two random variables and let $(\xi, \eta) \to (X \times Y, \tilde{\mathscr{X}} \times \tilde{\mathscr{Y}}, P_{\xi\eta})$ be a random variable with marginal probability* *measures* P_ξ *and* P_η *on* $(X, \widetilde{\mathscr{X}})$ *and* $(Y, \widetilde{\mathscr{Y}})$ *respectively. Let us denote by* $p_{ij} = \mathrm{P}_{\xi\eta}(X_i \times Y_j)$, $p_{i\cdot} = \mathrm{P}_\xi(X_i)$, $p_{\cdot j} = \mathrm{P}_\eta(X_j)$ *for* $i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, s$ *and assume* $p_{i\cdot} > 0$ *for* $i = 1, 2, \ldots, r$, $p_{\cdot j} > 0$ *for* $j = 1, 2, \ldots, s$. *Then*

$$\mathrm{I}_f(\xi, \eta) \leqq \min\left[\mathrm{H}_f(\xi), \mathrm{H}_f(\eta)\right], \tag{14}$$

where

$$\mathrm{H}_f(\xi) = \sum_{i=1}^{r} p_{i\cdot}^2 f\left(\frac{1}{p_{i\cdot}}\right) + f(0)\left(1 - \sum_{i=1}^{r} p_{i\cdot}^2\right) \tag{15}$$

and

$$\mathrm{H}_f(\eta) = \sum_{j=1}^{s} p_{\cdot j}^2 f\left(\frac{1}{p_{\cdot j}}\right) + f(0)\left(1 - \sum_{j=1}^{s} p_{\cdot j}^2\right). \tag{16}$$

Proof. Let us consider two measurable spaces $(I, \mathscr{B}, \mu)$ and $(R, \mathscr{R}, \nu)$, where $I = [0, 1]$, $\mathscr{B}$ is the σ-algebra of Borel sets in I and μ is Lebesgue measure, $R = \{1, 2, \ldots, r\}$, $\mathscr{R}$ is the σ-algebra of all subsets in R and ν is the counting measure. Let us divide I into r intervals $J_i = [a_i, b_i)$, $i = 1, 2, \ldots, (r-1)$, $J_r = [a_r, b_r]$, where $a_i = \sum_{k=0}^{i-1} p_{k\cdot}$, $b_i = \sum_{k=0}^{i} p_{k\cdot}$, $p_{0\cdot} = 0$ and let $g_i(t)$ denote the density of uniform distribution on J_i, $i = 1, 2, \ldots, r$. A measurable decomposition $D_{J_i} = (E_{i1}, E_{i2}, \ldots, E_{is})$ of $(J_i, \mathscr{B}_i)$, $\mathscr{B}_i = J_i \cap \mathscr{B}$ into s parts is done in such a way that

$$\int_{E_{ij}} g_i(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, \quad i = 1, 2, \ldots, r,\ j = 1, 2, \ldots, s.$$

If we denote $E_j = \bigcup_{i=1}^{r} E_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots, s$, then $D_E = (E_1, E_2, \ldots, E_s)$ is a measurable decomposition of $(I, \mathscr{B})$ and $S(D_E)$ denotes the minimum σ-algebra generated by D_E.

We can define a probability measure $\widetilde{\mathrm{P}}_{\xi\eta}$ on $(R \times I, \mathscr{R} \times \mathscr{B})$ in the following way: $\mathrm{d}\widetilde{\mathrm{P}}_{\xi\eta}(i, t) = p_{i\cdot}\, g_i(t)\,\mathrm{d}[\nu \times \mu]$. Then marginal probability measures of $\widetilde{\mathrm{P}}_{\xi\eta}$ on $(I, \mathscr{B})$ and $(R, \mathscr{R})$ are $\mathrm{d}\widetilde{\mathrm{P}}_\eta(t) = h(t)\,\mathrm{d}\mu$, where $h(t) = \sum_{i=1}^{r} p_{i\cdot}\, g_i(t)$ and $\widetilde{\mathrm{P}}_\xi(i) = p_{i\cdot}$ respectively. If we denote by $\mathrm{P}_{\xi\eta}$ the restriction of $\widetilde{\mathrm{P}}_{\xi\eta}$ on $(R \times I, \mathscr{R} \times S(D_E))$, we can see that $\mathrm{P}_{\xi\eta}(i, E_j) = p_{ij}$ for $i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Then it follows from Theorem 3 in [1]

$$\mathrm{I}_f(\xi, \eta) = \mathrm{D}_f(\mathrm{P}_{\xi\eta}, \mathrm{P}_\xi \times \mathrm{P}_\eta) \leqq \mathrm{D}_f(\widetilde{\mathrm{P}}_{\xi\eta}, \widetilde{\mathrm{P}}_\xi \times \widetilde{\mathrm{P}}_\eta) =$$

$$= \int_{R \times I} f\left(\frac{p_{i\cdot}\, g_i(t)}{p_{i\cdot}\, h(t)}\right) p_{i\cdot}\, h(t)\,\mathrm{d}[\nu \times \mu] = \sum_{i=1}^{r} p_{i\cdot}\,\cdot$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{s} \int_{E_j} f\left(\frac{p_{i\cdot}\, g_i(t)}{p_{i\cdot}\, h(t)}\right) p_{i\cdot}\, h(t)\,\mathrm{d}[\nu \times \mu] = \sum_{i=1}^{r} p_{i\cdot}\,\cdot$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{r} p_{k\cdot}\, f\left(\frac{\delta_{ik}}{p_{k\cdot}}\right) = \sum_{i=1}^{r} p_{i\cdot}^2 f\left(\frac{1}{p_{i\cdot}}\right) + f(0)\left(1 - \sum_{i=1}^{r} p_{i\cdot}^2\right) = \mathrm{H}_f(\xi),$$

where $\delta_{ii} = 1$ and $\delta_{ij} = 0$ for $i \neq j$ is the Kronecker symbol. Similarly we get $\mathrm{I}_f(\xi, \eta) \leqq \mathrm{H}_f(\eta)$. Therefore $\mathrm{I}_f(\xi, \eta) \leqq \min[\mathrm{H}_f(\xi), \mathrm{H}_f(\eta)]$.

Corollary 3. *If* $r = s$, $p_{ii} = p_{i\cdot} = p_{\cdot i} = 1/r$, $i = 1, 2, \ldots, r$, *then*

$$\mathrm{I}_f(\xi, \eta) = \mathrm{H}_f(\xi) = \frac{f(r)}{r} + f(0)\frac{r-1}{r}. \tag{17}$$

Theorem 4. *Let us consider two random variables* $\xi \to (X, \tilde{\mathscr{X}}, \mathrm{P}_\xi)$ *and* $\bar{\xi} \to (X, \tilde{\mathscr{X}}, \mathrm{P})$, *where* $\mathrm{P}_\xi(X_i) = p_{i\cdot}$, $\mathrm{P}(X_i) = 1/r$ *for* $i = 1, 2, \ldots, r$. *If* $g(u) = [f(u) - f(0)]/u$ *is a concave function, then*

$$\mathrm{H}_f(\xi) \leqq \mathrm{H}_f(\bar{\xi}) = \frac{f(r)}{r} + f(0)\frac{r-1}{r}. \tag{18}$$

Proof. Applying Jensen's inequality we get

$$\mathrm{H}_f(\xi) = \sum_{i=1}^{r} p_{i\cdot}^2 f\left(\frac{1}{p_{i\cdot}}\right) + f(0)\,(1 - \sum_{i=1}^{r} p_{i\cdot}^2) = f(0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} p_{i\cdot} \left[\frac{f\left(\dfrac{1}{p_{i\cdot}}\right) - f(0)}{\dfrac{1}{p_{i\cdot}}}\right] \leqq \frac{f(r)}{r} + f(0)\frac{r-1}{r}.$$

Remark 5. We can see that Theorem 4 holds for example for the following functions: $f(u) = u \log u$, $f(u) = |1 - u|$, $f(u) = (1 - u)^2$ and $f(u) = -u^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$.

Remark 6. Shannon's inequality follows from Theorem 3 for $f(u) = u \log u$.

Corollary 4. *If* $(\xi, \eta) \to (X \times Y, \tilde{\mathscr{X}} \times \tilde{\mathscr{Y}}, \mathrm{P}_{\xi\eta})$, $\bar{\xi} \to (X, \mathscr{X}, \mathrm{P})$ *and* $\bar{\eta} \to (Y, \tilde{\mathscr{Y}}, \mathrm{Q})$ *are random variables, where* $\mathrm{P}(X_i) = 1/r$ for $i = 1, 2, \ldots, r$ *and* $\mathrm{Q}(Y_j) = 1/s$ *for* $j = 1, 2, \ldots, s$ *and* $g(u) = [f(u) - f(0)]/u$ *is a concave function, then*

$$\mathrm{I}_f(\xi, \eta) \leqq \min[\mathrm{H}_f(\bar{\xi}), \mathrm{H}_f(\bar{\eta})]. \tag{19}$$

We see that Corollary 4 enables us to estimate upper bounds of $\mathrm{I}_f(\xi, \eta)$ for (ξ, η) with unknown marginal probability distributions and Theorem 3 for (ξ, η) with a priori given marginal distributions. However, there are some cases when we can evaluate the maximum of $\mathrm{I}_f(\xi, \eta)$ over all random variables $(\xi, \eta) = (X \times Y, \tilde{\mathscr{X}} \times \tilde{\mathscr{Y}}, \mathrm{P}_{\xi\eta})$ with a priori given marginal probability distributions P_ξ and P_η, directly.

Lemma 4. *Let* $\xi \to (X, \tilde{\mathscr{X}}, \mathrm{P})$ *with* $r = 2$, $\mathrm{P}(X_1) = p > 0$, $\mathrm{P}(X_2) = (1 - p) > 0$ *and* $\bar{\eta} \to (Y, \tilde{\mathscr{Y}}, \mathrm{Q})$ *where* $\mathrm{Q}(Y_j) = 1/s$, $j = 1, 2, \ldots, s$. *Let us denote by* $\mathscr{C}$ *a class of* *random variables* $(\xi, \eta) = (X \times Y, \tilde{\mathscr{X}} \times \tilde{\mathscr{Y}}, \mathrm{P}_{\xi\eta})$ *with marginal probability measures* $\mathrm{P}_\xi = \mathrm{P}$ *and* $\mathrm{P}_\eta = \mathrm{Q}$ *on* $(X, \tilde{\mathscr{X}})$ *and* $(Y, \tilde{\mathscr{Y}})$ *respectively. Then the maximum of* $\mathrm{I}_f(\xi, \eta)$ *over* $\mathscr{C}$ *is equal to*

$$\max_{\mathscr{C}} \mathrm{I}_f(\xi, \eta) = k\varphi\left(\frac{1}{s}\right) + \varphi\left(p - \frac{k}{s}\right) + (s - k - 1)\,\varphi(0)\,, \tag{20}$$

where

$$\varphi(x) = \frac{p}{s} f\left(\frac{sx}{p}\right) + \frac{1 - p}{s} f\left(\frac{1 - sx}{1 - p}\right)$$

and $k = [sp]$.

Proof. Let us consider random variables $(\xi, \eta) = (X \times Y, \tilde{\mathscr{X}} \times \mathscr{Y}, \mathrm{P}_{\xi\eta})$ with marginal probability measures $\mathrm{P}_\xi = \mathrm{P}$ and $\mathrm{P}_\eta = \mathrm{Q}$ and denote $\mathrm{P}_{\xi\eta}(X_1 \times Y_j) = z_j$, $\mathrm{P}_{\xi\eta}(X_2 \times Y_j) = (1/s) - z_j$ for $j = 1, 2, \ldots, s$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_s)$, $0 \leqq z_j \leqq 1/s$, $\sum_{j=1}^{s} z_j = p$. Then

$$\mathrm{I}_f(\xi, \eta) = \mathrm{D}_f(\mathrm{P}_{\xi\eta}, \mathrm{P} \times \mathrm{Q}) = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{p}{s} f\left(\frac{sz_j}{p}\right) + \frac{1 - p}{s} f\left(\frac{1 - sz_j}{1 - p}\right)\right] =$$
$$= \sum_{j=1}^{s} \varphi(z_j) = \Phi(\mathbf{z}).$$

In view of the convexity of $f(u)$ we can see that $\Phi(\mathbf{z})$ is a convex function. Then by Theorem 4d in [21], $\Phi(\mathbf{z})$ reaches its maximum value at the point $\mathbf{z}^* = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_s^*)$, where $z_1^* = z_2^* = \ldots = z_k^* = 1/s$, $z_{k+1}^* = p - 1/s$, $z_{k+2}^* = z_{k+3}^* = \ldots = z_s^* = 0$. Putting $\mathrm{P}_{\xi\eta}(X_1 \times Y_j) = z_j^*$, $\mathrm{P}_{\xi\eta}(X_2 \times Y_j) = (1/s) - z_j^*$, $j = 1, 2, \ldots, s$, we obtain in this case

$$\mathrm{I}_f(\xi, \eta) = \mathrm{D}_f(\mathrm{P}_{\xi\eta}, \mathrm{P} \times \mathrm{Q}) = k\,\varphi\left(\frac{1}{s}\right) + \varphi\left(p - \frac{k}{s}\right) + (s - k - 1)\,\varphi(0)\,,$$

where $k = [sp]$, which proves (20).

The following Theorem shows the relationship of the strict dependence of random variables ξ and η to the attainability of the upper bounds $\mathrm{H}_f(\xi)$ and $\mathrm{H}_f(\eta)$ given by (15) and (16) respectively.

Theorem 5. *Under the assumptions of Theorem* 3, *the strict dependence* $\xi = g(\eta)$ *or* $\eta = h(\xi)$ *implies* $\mathrm{I}_f(\xi, \eta) = \mathrm{H}_f(\xi)$ *and* $\mathrm{I}_f(\xi, \eta) = \mathrm{H}_f(\eta)$, *respectively. If, moreover,* $f(u)$ *is a strictly convex function, then* $\mathrm{I}_f(\xi, \eta) = \mathrm{H}_f(\xi)$ *if and only if* $\xi = g(\eta)$ *and* $\mathrm{I}_f(\xi, \eta) = \mathrm{H}_f(\eta)$ *if and only if* $\eta = h(\xi)$.

Proof. Let us consider $\xi = g(\eta)$. Then for every i 1, 2, …, $(i = r)$ there exist numbers $p_{\cdot i_1}, p_{\cdot i_2}, \ldots, p_{\cdot i_{n(i)}}$ such that $\sum_{k=1}^{n(i)} p_{\cdot i_k} = p_{i\cdot}$ and $\mathrm{P}_{\xi\eta}(X_i \times Y_j) = 0$ for $j \neq i_k$

$(k = 1, 2, \ldots, n(i))$, $P_{\xi\eta}(X_i \times Y_j) = p_{\cdot i_k}$ for $j = i_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n(i))$, for $i = 1, 2, \ldots \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Hence

$$I_f(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n(i)} p_{i\cdot}\, p_{\cdot i_k} f\left(\frac{p_{\cdot i_k}}{p_{i\cdot}\, p_{\cdot i_k}}\right) + f(0)\left(1 - \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n(i)} p_{i\cdot}\, p_{\cdot i_k}\right) = H_f(\xi).$$

Let $f(u)$ be a strictly convex function and $I_f(\xi, \eta) = H_f(\xi)$. Let us assume that $\xi = g(\eta)$ does not hold. Then there exists $j (1 \leqq j \leqq s)$ such that $1 > p_{ij}/p_{\cdot j} \geqq 0$ for $i = 1, 2, \ldots, r$ and $\sum_{i=1}^{r} p_{ij}/p_{\cdot j} = 1$. Without loss of generality we can put $j = s$ and assume $p_{is}/p_{\cdot s} > 0$ for $i = 1, 2, \ldots, m$, $m \geqq 2$ and $p_{is}/p_{\cdot s} = 0$ for $i = (m + 1)$, $(m + 2), \ldots, r$. Let us consider two measurable spaces $(I, \mathscr{B}, \mu)$ and $(R, \mathscr{R}, \nu)$, where $I = [0, 1]$, $\mathscr{B}$ is the σ-algebra of Borel sets and μ is Lebesque measure, $R = \{1, 2, \ldots, r\}$, $\mathscr{R}$ is the σ-algebra of all subsets of R and ν is the counting measure. Let us establish a measurable decomposition D_J of $(I, \mathscr{B})$, $D_J = (\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \ldots, \tilde{J}_{s+m-1})$, where $\tilde{J}_j = [a_j, b_j)$, $j = 1, 2, \ldots, (s + m - 2)$ and $J_{(s+m-1)} = [a_{(s+m-1)}, b_{(s+m-1)}]$, $a_j = \sum_{k=0}^{j-1} p_{\cdot k}$, $b_j = \sum_{k=0}^{j} p_{\cdot k}$ for $j = 1, 2, \ldots, (s - 1)$, $a_j = \sum_{k=0}^{s-1} p_{\cdot k} + \sum_{l=0}^{j-s} p_{ls}$, $b_j = \sum_{k=0}^{s-1} p_{\cdot k} + \sum_{l=0}^{j-s+1} p_{ls}$ for $j = s, (s + 1), \ldots, (s + m - 1)$, and $p_{\cdot 0} = p_{0s} = 0$. Let us denote by $S(D_J)$ the σ-algebra generated by D_J and define a probability measure $\tilde{P}_{\xi\eta}$ on $(R \times I, \mathscr{R} \times S(D_J))$ in the following way:

$$\tilde{P}_{\xi\eta}(i, \tilde{J}_j) = p_{ij} \text{ for } i = 1, 2, \ldots, r, j = 1, 2, \ldots, (s - 1),$$

$$\tilde{P}_{\xi\eta}(i, \tilde{J}_{(s+t-1)}) = \delta_{it} p_{is} \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, r, \; t = 1, 2, \ldots, m.$$

At the same time P_ξ and $\tilde{P}_\eta$ denote the corresponding marginal probability measures on $(R, \mathscr{R})$ and $(I, S(D_J))$ respectively. Let us establish another measurable decomposition $D_J = (J_1, J_2, \ldots, J_s)$ of $(I, \mathscr{B})$, where $J_i = \tilde{J}_i$, $i = 1, 2, \ldots, (s - 1)$ and $J_s = \bigcup_{i=s}^{s+m-1} \tilde{J}_i$ and denote by $P_{\xi\eta}$ the restriction of $\tilde{P}_{\xi\eta}$ on $(R \times I, \mathscr{R} \times S(D_J))$. Owing to the fact that σ-algebra $\mathscr{R} \times S(D_J)$ is not sufficient with respect to $\tilde{P}_{\xi\eta}$ and $P_\xi \times \tilde{P}_\eta$, Theorem 3 in [1] and Theorem 3 imply $H_f(\xi) = I_f(\xi, \eta) = D_f(P_{\xi\eta}, P_\xi \times P_\eta) < D_f(\tilde{P}_{\xi\eta}, P_\xi \times \tilde{P}_\eta) \leqq H_f(\xi)$ which leads to contradiction.

Remark 8. For $f(u) = u \log u$ Theorem 5 gives the known result for Shannon's information.

5. α-INFORMATIONAL MEASURES OF STATISTICAL DEPENDENCE

In Sec. 3 we met with two important subclasses of f-informations that led to interesting measures of statistical dependence. The first one is given by $f(u) = |1 - u|^{\alpha}$, $\alpha \geqq 1$ and such f-informations we call α-informations [20]. To this subclass total variation with $f(u) = |1 - u|$ and Pearson's mean square contingency with $f(u) = (1 - u)^2$ belong. To the second subclass with $f(u) = \operatorname{sign}(\alpha - 1) u^{\alpha}$, $\alpha > 0$, [2], [11], [18], Hellinger's integral with $f(u) = -\sqrt{u}$ belongs and Shannon's information can be derived by [11]

$$\lim_{\alpha \downarrow 1} \frac{I_{u^{\alpha}}(\xi, \eta) - 1}{\alpha - 1} = I \tag{21}$$

and

$$\lim_{\alpha \uparrow 1} \frac{I_{-u^{\alpha}}(\xi, \eta) + 1}{1 - \alpha} = I$$

or [16]

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{1}{\alpha - 1} \log |I_{\operatorname{sign}(\alpha - 1) u^{\alpha}}(\xi, \eta)| = I\,, \tag{22}$$

where $(1/(\alpha - 1)) \log |I_{\operatorname{sign}(\alpha-1)u^{\alpha}}(\xi, \eta)|$ is the so called Rényi's information of order α.

However, it seems that an important role for measuring the statistical dependence can be played by f-informations with $f(u) = -u^{\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, that satisfy all the requirements 1–4. Moreover, the function $f(u)/u$ is a concave function and Theorem 4 holds. In the sequel, $\delta_{\alpha}(\xi, \eta)$ will denote f-informational measures of statistical dependence with $f(u) = -u^{\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, i.e. $\delta_{\alpha}(\xi, \eta) = 1 + I_{-u^{\alpha}}(\xi, \eta)$, and $\delta_{\alpha}(\xi, \eta)$ will be called α-informational measure of statistical dependence. In the case of Gaussian distribution $P_{\xi\eta}$ with the coefficient of correlation ϱ the relationship of $\delta_{\alpha}(\xi, \eta)$ to ϱ is expressed by

$$\delta_{\alpha}(\xi, \eta) = 1 - \frac{(1 - \varrho^2)^{(1-\alpha)/2}}{[1 - \varrho^2(\alpha - 1)^2]^{1/2}}\,. \tag{23}$$

In the first subclass of f-informations with $f(u) = |1 - u|^{\alpha}$, $\alpha \geqq 1$, sample properties for $\alpha = 2$ have already been investigated in [8]. In this Section we shall be interested in sample properties of f-informations with $f(u) = -u^{\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$ under the hypothesis that ξ and η are independent.

Let $\xi = (X, \mathscr{X}, P_{\xi})$ and $\eta = (Y, \mathscr{Y}, P_{\eta})$ be two random variables and let $(\xi, \eta) = (X \times Y, \mathscr{X} \times \mathscr{Y}, P_{\xi\eta})$ be a random variable with marginal probability measures P_{ξ} and P_{η} on $(X, \mathscr{X})$ and $(Y, \mathscr{Y})$ respectively. Let us denote $p_{ij} = P_{\xi\eta}(X_i \times Y_j)$, $p_{i.} = P_{\xi}(X_i)$, $p_{.j} = P_{\eta}(Y_j)$ and assume $p_{i.} > 0$, $p_{.j} > 0$ for $i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Let us have n independent realizations of (ξ, η), i.e., (x_t, y_t), $t = 1, 2, \ldots, n$ from a sample space $(X \times Y)$. Let $\hat{p}_{ij} = n_{ij}/n$, $\hat{p}_{i.} = n_{i.}/n$, $\hat{p}_{.j} = n_{.j}/n$ be sample estimators of p_{ij}, $p_{i.}$, $p_{.j}$ for $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, s$, where n_{ij} denotes the number of observations $(x_t, y_t) \in (X_i \times Y_j)$ and $n_{i.} = \sum_{j=1}^{s} n_{ij}$, $n_{.j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}$. Then $\hat{\delta}_\alpha^{(1)}(\xi, \eta) = 1 + \hat{I}_\alpha^{(1)}(\xi, \eta)$, $\hat{\delta}_\alpha^{(2)}(\xi, \eta) = 1 + \hat{I}_\alpha^{(2)}(\xi, \eta)$, where $\hat{I}_\alpha^{(1)}(\xi, \eta) = -\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \hat{p}_{ij}^\alpha \cdot$ $\cdot (p_{i.}\, p_{.j})^{1-\alpha}$ and $\hat{I}_\alpha^{(2)}(\xi, \eta) = -\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \hat{p}_{ij}^\alpha (\hat{p}_{i.}\, \hat{p}_{.j})^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$.

Theorem 6.* *Under the hypothesis* $H_0 : P_{\xi\eta} = P_\xi \times P_\eta$ *the statistic*

$$Z_n^{(1)} = \frac{2n}{\alpha(\alpha - 1)} \ln \left[1 - \hat{\delta}_\alpha^{(1)}(\xi, \eta)\right] \tag{24}$$

is asymptotically χ^2-distributed with $(rs - 1)$ degrees of freedom and the statistic

$$Z_n^{(2)} = \frac{2n}{\alpha(\alpha - 1)} \ln \left[1 - \hat{\delta}_\alpha^{(2)}(\xi, \eta)\right] \tag{25}$$

is asymptoticaly χ^2-distributed with $(r - 1)(s - 1)$ degrees of freedom.

Proof. The asymptotic distribution of $Z_n^{(1)}$ follows directly from the results in [17]. The asymptotic distribution of $Z_n^{(2)}$ is found by expanding $Z_n^{(2)}$ in the Taylor series retaining the terms of the second order at the point $p_{ij} = p_{i.}\, p_{.j}$, $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, s$. After arranging suitably the terms in the Taylor expansion we obtain

$$Z_n^{(2)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(n_{ij} - np_{ij})^2}{np_{ij}} - \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_{i.} - np_{i.})^2}{np_{i.}} - \sum_{j=1}^{s} \frac{(n_{.j} - np_{.j})^2}{np_{.j}} + nU_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(n_{ij} - n_{i.}\, p_{.j} - n_{.j} p_{i.} - np_{i.} p_{.j})^2}{np_{i.}\, p_{.j}} + nU_n\,,$$

where $nU_n \to 0$ in probability. Then according to 3b.4.(iv) in [14], $Z_n^{(2)}$ is asymptotically χ^2-distributed with $(r - 1)(s - 1)$ degrees of freedom.

Acknowledgement. I wish to thank Prof. A. Perez for bringing the problem to my attention for the first time and to Dr. I. Vajda for valuable discussions concerning the proof of Theorem 3.

References

[1] *I. Cziszár:* Eine Informationstheoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Beweis der Ergodizität von Markoffschen Ketten, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. *8*, 1963, 85—108.

*) The asymptotic distribution of $\hat{\delta}_\alpha^{(2)}(\xi, \eta)$ has been derived more generally in the author's work [22].

[2] *I. Csiszár:* Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations, Studia Scientarium Math. Hung. *2*, 1967, 299—318.

[3] *L. A. Goodman, W. H. Kruskall:* Measures of association for cross classifications, Journal of the Amer. Stat. Assoc. *49*, 1954, 732—764.

[4] *W. Höffding:* Stochastische Abhängigkeit und Functionaler Zusammenhang, Skandinavisk Aktuarietidskrift, Uppsala 1942, 200—227.

[5] *E. H. Linfoot:* An informational measure of correlation, Information and control *1*, 1957, 85—91.

[6] *M. Loève:* Probability theory, Moscow, 1962 (in Russian).

[7] *J. Neveu:* Bases mathématiques du calcul des probabilités, Masson et Cie, Paris 1964.

[8] *K. Pearson:* On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling, Phil. Mag. Ser. *50*, 1900, 157—172.

[9] *A. Perez:* Notions géneralisées d'incertitude, d'entropie et d'information du point du vue de la théorie des martingales, Transactions of the First Prague Conference, Prague 1957, 183—208.

[10] *A. Perez:* Contributions de la théorie de l'information à la cybernétique, 4e Congrès international de cybernétique, Namur, 1964, Namur 1967, 85—101.

[11] *A. Perez:* Information-theoretic risk estimates in statistical decision, Kybernetika *3*, 1967, 11—21.

[12] *A. Perez:* Some estimates of the probability of error in discriminating two stationary random processes, Presented at the Conference on Information Theory in Dubna, USSR, 1969.

[13] *M. S. Pinsker:* Information and information stability of random variables and processes, Moscow, 1960 (in Russian).

[14] *C. R. Rao:* Linear statistical inference and its applications, Wiley 1965.

[15] *A. Rényi:* On measures of statistical dependence, Acta Math. Hung. *10*, 1959, 441—451.

[16] *A. Rényi:* On measures of entropy and information, Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., Vol. *I*, Berkeley, 1960, 547—561.

[17] *C. E. Särndal:* A class of explicata for "information" and "weight of evidence", Review of ISI, Vol. *38*, 1970, 223—235.

[18] *I. Vajda:* On the amount of information contained in a sequence of independent observations, Kybernetika *6*, 1970, 306—323.

[19] *I. Vajda:* Limit theorems for total variation of Cartesian product measures, Studia Sci. Math. Hung. *6*, 1971, 317—333.

[20] *I. Vajda:* On the *f*-divergence and singularity of probability measures, Periodica Math Hung. *2*, 1972, 223—234.

[21] *K. Vašek:* Podmíněná entropie a pravděpodobnost chyby v statistickém rozhodování (unpublished).

[22] *J. Zvárová:* On the asymptotic behaviour of a sample estimator of Rényi's information of order α, Transactions of the Sixth Prague Conference, Prague 1973, 919—924.

Author's address: 120 00 Praha 2, U nemocnice 1 (Ústav hematologie a krevní transfuse).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

O KŘIVKÁCH MAXIMÁLNÍ DÉLKY

MILOSLAV NEKVINDA, Liberec

(Došlo dne 4. listopadu 1971)

OZNAČENÍ

$C(a, b)$	množina všech spojitých funkcí v intervalu $\langle a, b \rangle$
$d(f, a, b)$	délka křivky K o rovnici $y = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$
$V(a, b)$	množina všech funkcí $f \in C(a, b)$ s konečnou variací
$M(a, b)$	množina těch funkcí $f \in V(a, b)$, jejichž graf má maximální délku
$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$	variace funkce f v intervalu $\langle a, b \rangle$
μ	Lebesgueova míra

1. EXISTENCE KŘIVEK MAXIMÁLNÍ DÉLKY

Je známo, že exitsuje neklesající spojitá funkce f v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, pro niž platí $d(f, 0, 1) = 2$. Vezměme např. Cantorovu množinu (diskontinuum) $A \subset \langle 0, 1 \rangle$. Je-li (a, b) styčný interval této množiny, definujme $f(x) = (a + b)/2$ pro $x \in (a, b)$. V bodech množiny A dodefinujme f tak, aby byla spojitá v $\langle 0, 1 \rangle$. Je zřejmé, že f je neklesající v $\langle 0, 1 \rangle$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $d(f, 0, 1) = 2$. Méně triviální je následující tvrzení.

Věta 1.1. *Existuje funkce f těchto vlastností:*

1. f je spojitá a rostoucí v $\langle 0, 1 \rangle$;
2. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$;
3. $d(f, 0, 1) = 2$.

Důkaz tohoto tvrzení byl podán v [1]. Spočívá v konstrukci posloupnosti $\{f_n\}$ spojitých rostoucích funkcí v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, jejichž grafy jsou lomené čáry, přičemž platí:

1. $f_0(x) = x,\ 0 \leqq x \leqq 1$;

2. Je-li dána funkce f_n, pak úhlovými body (tj. body, v nichž má první derivace nespojitost a dále body $(0, 0)$, $(1, 1)$) funkce f_{n+1} jsou jednak úhlové body funkce f_n a dále body ležící uprostřed mezi dvěma sousedními úhlovými body funkce f_n. Přitom lomené čáry jsou konstruovány tak, aby byl splněn vztah

$$d(f_n, 0, 1) > 2 - \frac{1}{n}.$$

Snadno lze pak ukázat, že posloupnost $\{f_n\}$ je stejnoměrně konvergentní v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a že funkce $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ splňuje požadavky věty.

Je zřejmé, že lze větu 1.1 formulovat obecněji:

Věta 1.2. *Nechť a, b, c, d jsou libovolná reálná čísla, $a < b$. Pak existuje funkce f těchto vlastností:*

1. *f je spojitá a monotónní v intervalu $\langle a, b\rangle$;*
2. *$f(a) = c, f(b) = d$;*
3. *$d(f, a, b) = b - a + |d - c|$.*

Jestliže $c \neq d$, lze vlastnost 1 zesílit takto:

1'. *f je spojitá a ryze monotónní v intervalu $\langle a, b\rangle$.*

Definice 1.1. Nechť křivka K je grafem funkce $f \in V(a, b)$, $a < b$. Řekneme, že *K má maximální délku v intervalu $\langle a, b\rangle$*, jestliže platí

$$d(f, a, b) = b - a + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f. \tag{1.1}$$

Symbolem $M(a, b)$ označme množinu všech funkcí $f \in V(a, b)$, pro něž platí (1.1).

Poznámka. V dalším budeme obvykle užívat rčení „funkce f má maximální délku v $\langle a, b\rangle$" místo formulace uvedené v definici. Je zřejmé, že pro libovolnou funkci $f \in V(a, b)$ platí vztah $d(f, a, b) \leqq b - a + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$. Tím je odůvodněn pojem funkce maximální délky.

Lemma 1.1. *Nechť $a \leqq c < d \leqq b$ a nechť $f \in M(a, b)$. Pak $f \in M(c, d)$.*

Lemma 1.2. *Nechť $a < b < c$ a nechť $f \in M(a, b)$, $f \in M(b, c)$. Pak $f \in M(a, c)$.*

Důkaz obou lemmat je triviální.

Věta 1.3. *Množina $M(a, b)$ je hustá v $C(a, b)$.*

Důkaz snadno plyne z věty 1,2 a lemmatu 1.2, neboť množina všech spojitých funkcí v $\langle a, b \rangle$, jejichž grafy jsou lomené čáry, je hustá v $C(a, b)$.

Poznámka. Větu 1.3 lze formulovat ostřeji: množina všech funkcí maximální délky v $\langle a, b \rangle$, jež nejsou konstantní v žádném intervalu $I \subset \langle a, b \rangle$, je hustá v $C(a, b)$.

2. VLASTNOSTI FUNKCÍ MAXIMÁLNÍ DÉLKY

Dá se dokázat, že funkce f, zkonstruovaná v důkazu věty 1.1, není absolutně spojitá. Později uvidíme, že libovolná nekonstantní funkce maximální délky není absolutně spojitá. Nyní zavedeme kvantitativní charakteristiku absolutní nespojitosti libovolné funkce $f \in V(a, b)$.

Nechť $f \in V(a, b)$, nechť $x \in \langle a, b \rangle$. Nechť M_x je číselná množina splňující následující dvě vlastnosti:

(i) $0 \in M_x$;

(ii) nechť $\varepsilon > 0$. Pak $\varepsilon \in M_x \Leftrightarrow$ k libovolnému $\delta > 0$ existuje přirozené číslo n a čísla a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, pro něž platí

$$a \leqq a_1 < b_1 \leqq a_2 < b_2 \leqq \ldots \leqq a_n < b_n \leqq x \; ; \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta \; ; \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \geqq \varepsilon \, . \tag{2.3}$$

Je zřejmé, že M_x je neprázdná, shora omezená číselná množina (číslo $\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$ je její horní hranicí); je-li $\varepsilon \in M_x$ a $\varepsilon_1 \in \langle 0, \varepsilon \rangle$, pak $\varepsilon_1 \in M_x$.

Definice 2.1. Nechť $f \in V(a, b)$. Funkci

$$r(f, a, x) = \sup M_x \, , \quad x \in \langle a, b \rangle \tag{2.4}$$

nazveme *redukovanou funkcí k funkci f v intervalu $\langle a, b \rangle$*.

Lemma 2.1. *Funkce $r(f, a, x)$ je spojitá a neklesající v $\langle a, b \rangle$, $r(f, a, a) = 0$; $r(f, a, x) \equiv 0$ pro $x \in \langle a, b \rangle \Leftrightarrow f$ je absoltuně spojitá v $\langle a, b \rangle$.*

Lemma 2.2. *Nechť $a \leqq b \leqq c$. Pak platí*

$$r(f, a, x) = r(f, a, b) + r(f, b, x) \quad \text{pro} \quad x \in \langle b, c \rangle \, .$$

Tvrzení obou lemmat plynou bezprostředně z definice 2.1.

Lemma 2.3. *Nechť $a < b$, nechť I je interval, $I \subset \langle a, b \rangle$. Pak f je absolutně spojitá v I právě tehdy, je-li funkce $r(f, a, x)$ konstantní v I.*

Důkaz. Tvrzení je bezprostředním důsledkem lemmat 2.1 a 2.2.

Nechť $\mathfrak{A}$ je množina, jejíž prvky jsou konečná sjednocení intervalů (otevřených, polootevřených, uzavřených), patřících do $\langle a, b \rangle$ a prázdná množina. Zřejmě platí:

$$A \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow A' \in \mathfrak{A}\,(A' = \langle a, b \rangle - A)\,; \quad A_i \in \mathfrak{A}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{A}\,, \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{A}\,.$$

$\mathfrak{A}$ je tedy algebra množin. Bude-li nutno zdůraznit, že základní množinu algebry $\mathfrak{A}$ je interval $\langle a, b \rangle$, označíme ji symbolem $\mathfrak{A}(a, b)$. Řekneme, že systém $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ množin z $\mathfrak{A}$ je skoro disjunktní (resp. že $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou skoro disjunktní), nemají-li žádné dvě množiny A_i, A_j, $i \neq j$ systému společných vnitřních bodů.

Nechť $f \in V(a, b)$, nechť $A \in \mathfrak{A}(a, b)$ a nechť $\delta > 0$. Položme

$$V(\delta, f, A) = \sup\,(0, \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)|)\,, \tag{2.5}$$

kde a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ probíhají všechny konečné množiny čísel, pro něž platí

(i) $I_k = \langle a_k, b_k \rangle \subset A$, $k = 1, 2, \ldots, n$,

(ii) systém $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ je skoro disjunktní,

(iii) $\sum_{k=1}^{n} \mu(I_k) < \delta$.

Je zřejmé, že $V(\delta, f, A)$ je (pro danou f a dané $A \in \mathfrak{A}(a, b)$) neklesající nezáporná funkce argumentu $\delta \in (0, +\infty)$. Číslo

$$v_f(A) = V(b - a, f, A) \tag{2.6}$$

nazýváme variací funkce f na množině $A \in \mathfrak{A}$. Zřejmě $v_f(\langle a, x \rangle) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$ pro $x \in \langle a, b \rangle$.

Položme

$$\Phi(f, A) = \lim_{\delta \to 0+} V(\delta, f, A)\,. \tag{2.7}$$

Je zřejmé, že $\Phi(f, A) \leqq v_f(A)$. Dá se snadno dokázat

Lemma 2.4. *Nechť $A_i \in \mathfrak{A}(a, b)$, $i = 1, 2$ jsou skoro disjunktní, nechť $f \in V(a, b)$. Pak platí*

$$\Phi(f, A_1 \cup A_2) = \Phi(f, A_1) + \Phi(f, A_2)\,.$$

Definujeme funkci $\varphi(f, a, x)$ vztahem

$$\varphi(f, a, x) = \Phi(f, \langle a, x \rangle), \quad x \in \langle a, b \rangle. \tag{2.8}$$

Dokážeme, že platí

Lemma 2.5. *Nechť $f \in V(a, b)$. Pak platí $r(f, a, x) = \varphi(f, a\ x)$ pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$.*

Důkaz. Nechť $x \in \langle a, b \rangle$. Je-li f absolutně spojitá v $\langle a, x \rangle$, pak zřejmě $\varphi(f, a, t) = r(f, a, t) = 0$, $t \in \langle a, x \rangle$. Nechť tedy f není absolutně spojitá v $\langle a, x \rangle$. Pak (lemma 2.3) $r(f, a, x) > 0$. Nechť ε je libovolné číslo, $0 < \varepsilon < r(f, a, x)$. Dokážeme, že $\varphi(f, a, x) \geqq \varepsilon$. Vzhledem k definici množiny M_x máme $\varepsilon \in M_x$ a tedy k libovolnému $\delta > 0$ existuje konečná množina čísel a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, splňující vztahy (2.1) až (2.3). To však znamená, že $V(\delta, f, \langle a, x \rangle) \geqq \varepsilon$. Tedy $\lim_{\delta \to 0+} V(\delta, f, \langle a, x \rangle) = \varphi(f, a, x) \geqq \varepsilon$. Protože ε lze volit libovolně blízké k $r(f, a, x)$, jest $\varphi(f, a, x) \geqq r(f, a, x)$. Nyní dokážeme, že $\varphi(f, a, x) \leqq r(f, a, x)$. Nechť r_1 je libovolné číslo, $r_1 > r(f, a, x)$. Stačí dokázat, že $\varphi(f, a, x) \leqq r_1$. Protože $r_1 \notin M_x$, existuje $\delta > 0$ tak, že pro libovolná čísla a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, pro něž platí (2.1), (2.2), platí též $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < r_1$. To však znamená, že $V(\delta, f, \langle a, x \rangle) \leqq r_1$ a tedy $\varphi(f, a, x) = \lim_{\delta \to 0+} V(\delta, f, \langle a, x \rangle) \leqq r_1$. Tím je tvrzení lemmatu dokázáno.

Lemma 2.6. *Nechť $f \in V(a, b)$, $g \in V(a, b)$. Pak pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ platí*

$$r(f + g, a, x) \leqq r(f, a, x) + r(g, a, x).$$

Důkaz. Nechť $\delta > 0$. Zřejmě platí $V(\delta, f + g, \langle a, x \rangle) \leqq V(\delta, f, \langle a, x \rangle) + V(\delta, g, \langle a, x \rangle)$. Přechodem k limitě pro $\delta \to 0+$ s použitím lemmatu 2.5 dostaneme hledané tvrzení.

Lemma 2.7. *Nechť f_i je spojitá neklesající (nerostoucí) funkce v $\langle a, b \rangle$, $i = 1, 2$. Pak pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ platí*

$$r(f_1 + f_2, a, x) = r(f_1, a, x) + r(f_2, a, x).$$

Důkaz. Vzhledem k předchozímu lemmatu stačí dokázat, že $r(f_1 + f_2, a, x) \geqq r(f_1, a, x) + r(f_2, a, x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$. Pro určitost předpokládejme, že f_1 i f_2 jsou obě neklesající případ, kdy f_1, f_2 jsou obě nerostoucí, lze vyšetřit analogicky). Především je zřejmé, že nerovnost platí pro $x = a$. Nechť tedy $x \in (a, b \rangle$. Nechť V_j jsou libovolná čísla, pro něž platí $V_j < \varphi(f_j, a, x)$, $j = 1, 2$. Pro libovolné $\delta > 0$ tedy platí $V_j < V(\delta, f_j, \langle a, x \rangle)$, $j = 1, 2$. Existují čísla a_i^1, b_i^1, $i = 1, 2, \ldots, n_1$ a a_k^2, b_k^2 $k = 1, 2, \ldots, n_2$, pro něž $a \leqq a_1^j < b_1^j \leqq a_2^j < b_2^j \leqq \ldots \leqq a_{n_j}^j < b_{n_j}^j \leqq x$,

$\sum_{i=1}^{n} (b_i^j - a_i^j) < \delta$ a $\sum_{i=1}^{n_j} |f_j(b_i^j) - f_j(a_i^j)| > V_j$, $j = 1, 2$. Zřejmě existují čísla a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $a \leqq a_1 < b_1 \leqq a_2 < b_2 \leqq \ldots \leqq a_n < b_n \leqq x$, $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < 2\delta$, přičemž ke každému $j = 1, 2$ a $i = 1, 2, \ldots, n_j$ existuje $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tak, že $\langle a_i^j, b_i^j \rangle \subset \langle a_k, b_k \rangle$. Je zřejmé ($f_j$ jsou neklesající), že $\sum_{i=1}^{n} |f_j(b_i) - f_j(a_i)| \geqq$ $\geqq \sum_{i=1}^{n_j} |f_j(b_i^j) - f_j(a_i^j)|$.

Tedy $\sum_{i=1}^{n} |f_1(b_i) + f_2(b_i) - (f_1(a_i) + f_2(a_i))| \geqq \sum_{i=1}^{n} (f_1(b_i) - f_1(a_i)) + \sum_{i=1}^{n} (f_2(b_i) - f_2(a_i)) > V_1 + V_2$. To znamená, že $V(2\delta, f_1 + f_2, \langle a, x \rangle) > V_1 + V_2$, z čehož přechodem k limitě pro $\delta \to 0+$ dostaneme $\varphi(f_1 + f_2, a, x) \geqq V_1 + V_2$. Vzhledem k volbě V_1, V_2 máme podle lemmatu 2.5 $r(f_1 + f_2, a, x) \geqq r(f_1, a, x) + r(f_2, a, x)$.

Lemma 2.8. *Nechť f, g, $f - g$ jsou spojité, neklesající (nerostoucí) funkce v $\langle a, b \rangle$. Pak pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ platí*

$$r(f - g, a, x) = r(f, a, x) - r(g, a, x)\,.$$

Důkaz. Podle lemmatu 2.7 plat, $r(f, a, x) = r(f - g, a, x) + r(g, a, x)$.

Lemma 2.9. *Nechť $f \in V(a, b)$, nechť c je libovolné reálné číslo. Pak pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ platí*

$$r(cf, a, x) = |c|\, r(f, a, x)\,.$$

Důkaz. Stačí se přesvědčit, že $V(\delta, cf, \langle a, x \rangle) = |c|\, V(\delta, f, \langle a, x \rangle)$.

Lemma 2.10. *Nechť $f \in V(a, b)$. Položme*

$$v_f(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f, \quad x \in \langle a, b \rangle\,. \tag{2.9}$$

Pak pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ platí

$$r(v_f, a, x) = r(f, a, x)\,.$$

Důkaz. I. Dokážeme, že $r(f, a, x) \leqq r(v_f, a, x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$. Toto tvrzení však snadno plyne ze vztahu $v_f(y) - v_f(x) \geqq |f(y) - f(x)|$, $a \leqq x < y \leqq b$.

II. Nyní ukážeme, že $r(f, a, x) \geqq r(v_f, a, x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$. Pro $x = a$ je tvrzení zřejmé. Nechť $x \in (a, b \rangle$, nechť ε a δ jsou libovolná kladná čísla. Pak existují čísla a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, splňující podmínky (2.1), (2.2) a podmínku

$$V(\delta, v_f, \langle a, x \rangle) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} (v_f(b_i) - v_f(a_i))\,.$$

Ke každému $i = 1, 2, \ldots, n$ existují čísla c_j^i, d_j^i, $j = 1, 2, \ldots, n_i$, $a_i \leqq c_i^1 < d_1^i \leqq \leqq c_2^i < d_2^i \leqq \ldots \leqq c_{n_i}^i < d_{n_i}^i \leqq b_i$, $v_f(b_i) - v_f(a_i) - \varepsilon/n < \sum_{j=1}^{n_i} |f(d_j^i) - f(c_j^i)|$. Zřejmě systém $\mathfrak{S}$ intervalů $\langle c_j^i, d_j^i \rangle$, $j = 1, 2, \ldots, n_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ je skoro disjunktní a $\sum_{i,j} (d_j^i - c_j^i) < \delta$. To znamená, že $V(\delta, f, \langle a, x \rangle) \geqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} |f(d_j^i) - f(c_j^i)| > \sum_{i=1}^{n} (v_f(b_i) - v_f(a_i)) - \varepsilon > V(\delta, v_f, \langle a, x \rangle) - 2\varepsilon$. Požadované tvrzení vyplývá z posledního vztahu přechodem k limitě pro $\delta \to 0+$, neboť ε je možno volit libovolně malé.

Lemma 2.11. *Nechť $f \in V(a, b)$, nechť v_f je definovaná vztahem* (2.9). *Pak platí*

$$d(v_f, a, b) = d(f, a, b).$$

Důkaz. Je obdobný důkazu lemmatu 2.10.

Důsledek. *$f \in M(a, b)$ právě tehdy, jestliže $v_f \in M(a, b)$.*

Věta 2.1. *Nechť $f \in V(a, b)$. Položme*

$$r_1(x) = r(f, a, x), \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Pak platí

$$r(r_1, a, x) = r_1(x) \quad \textit{pro} \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Důkaz. Vzhledem k lemmatu 2.10 lze předpokládat, že f je neklesající v $\langle a, b \rangle$. Především je zřejmé, že $r(r_1, a, x) \leqq r_1(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$. Stačí tedy dokázat, že $r(r_1, a, x) \geqq r_1(x)$. Pro $x = a$ je nerovnost zřejmá. Nechť $x \in (a, b\rangle$, nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $\Delta > 0$ takové, že platí

$$\text{(i)} \qquad \delta \in (0, \Delta) \Rightarrow V(\delta, f, \langle a, x \rangle) < r_1(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zvolme $\delta_1 \in (0, \Delta)$. Pak existuje skoro disjunktní systém intervalů $\{I_k\}_{k=1}^n$ takový, že platí

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \mu(I_k) < \delta_1, \quad v_f(\bigcup_{k=1}^{n} I_k) > r_1(x) - \frac{\varepsilon}{2},$$

kde v_f je definována vztahem (2.6). Označme $E = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$, $E_1 = \langle a, x \rangle - E$. Ze vztahů (i), (ii) vyplývá: je-li $\{J_k\}_{k=1}^m$ libovolný skoro disjunktní systém intrevalů, $J_k \subset E_1$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $\sum_{k=1}^{m} \mu(J_k) < \Delta - \delta_1$, pak

$$\text{(iii)} \qquad v_f(\bigcup_{k=1}^{m} J_k) < \varepsilon.$$

To znamená, že $V(\Delta - \delta_1, f, E_1) \leqq \varepsilon$ a tedy $\phi(f, E_1) \leqq \varepsilon$ (ϕ je definována vztahem (2.7)). Dokážeme, že platí

$$\text{(iv)} \qquad v_{r_1}(E_1) \leqq \varepsilon .$$

Nechť $v_{r_1}(E_1) > \varepsilon$. Pak existuje skoro disjunktní systém intervalů $\{J_k\}_{k=1}^m$, $J_k = \langle a_k, b_k \rangle \subset E_1$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $\sum_{k=1}^{m} (r_1(b_k) - r_1(a_k)) = \varepsilon + \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$. Protože pro každé $k = 1, 2, \ldots, m$ jest $r_1(b_k) - r_1(a_k) = \phi(f, \langle a_k, b_k \rangle)$, existuje (pro každé $k = 1, 2, \ldots, m$) skoro disjunktní systém intervalů $\{I_j^k\}_{j=1}^{n_k}$, $I_j^k \subset \langle a_k, b_k \rangle$, $j = 1, 2, \ldots, n_k$, $\sum_{j=1}^{n_k} \mu(I_j^k) < (\Delta - \delta_1)/m$, $\sum_{j=1}^{n_k} v_f(I_j^k) > r_1(b_k) - r_1(a_k) - \varepsilon_1/m$. Je zřejmé, že systém intervalů $\{I_j^k\}$, $j = 1, 2, \ldots, n_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$ je skoro disjunktní, $I_j^k \subset E_1$, $\sum_{k,j} \mu(I_j^k) < \Delta - \delta_1$ a $\sum_{k,j} v_f(I_j^k) > \sum_{k=1}^{m} (r_1(b_k) - r_1(a_k)) - \varepsilon_1 = \varepsilon$, což je ve sporu s (iii). Tedy platí (iv).

Jelikož platí (r_1 je neklesající) $r_1(x) = v_{r_1}(\langle a, x \rangle) = v_{r_1}(E) + v_{r_1}(E_1)$, máme podle (iv) $v_{r_1}(E) \geqq r_1(x) - \varepsilon$. Tím je dokázáno, že platí: k libovolnému $\delta_1 \in (0, \Delta)$ existuje skoro disjunktní systém intervalů $\{I_k\}_{k=1}^n$, $I_k \subset \langle a, x \rangle$, $k = 1, 2, \ldots, n$, pro nějž $\sum_{k=1}^{n} \mu(I_k) < \delta_1$, $\sum_{k=1}^{n} v_{r_1}(I_k) \geqq r_1(x) - \varepsilon$. To však znamená, že $V(\delta_1, r_1, \langle a, x \rangle) \geqq r_1(x) - \varepsilon$. Pro $\delta_1 \to 0+$ dostaneme vzhledem k libovolnosti ε $\phi(r_1, \langle a, x \rangle) \geqq r_1(x)$. Podle (2.8) a lemmatu 2.5 vyplývá z poslední nerovnosti $r(r_1, a, x) \geqq r_1(x)$. Tím je věta dokázána.

Důsledek. *Nechť $f \in V(a, b)$. Pak funkce $\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f - r(f, a, x)$ je absolutně spojitá v $\langle a, b \rangle$.*

Důkaz. Nechť $x \in \langle a, b \rangle$. Označme $v_f(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$, $r_1(x) = r(f, a, x)$. Protože funkce $v_f, r_1, v_f - r_1$ jsou neklesající v $\langle a, b \rangle$, vyplývá z lemmatu 2.8 vztah $r(v_f - r_1, a, x) = r(v_f, a, x) - r(r_1, a, x)$. Ježto $r(v_f, a, x) = r(f, a, x) = r_1(x)$ (lemma 2.10) a $r(r_1, a, x) = r_1(x)$ (věta (2.1), jest $r(v_f - r_1, a, x) = 0$ pro $x \in \langle a, b \rangle$. Z lemmatu 2.1 pak vyplývá, že funkce $v_f - r_1$ je absolutně spojitá v $\langle a, b \rangle$, což jsme měli dokázat.

Nechť f je spojitá a neklesající v $\langle a, b \rangle$. Buď dáno dělení $\mathfrak{D}$ intervalu $\langle a, b \rangle$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Označme $A_i = (x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$; $k_i = (f(x_i) - f(x_{i-1}))/(x_i - x_{i-1})$, $\alpha_i = \operatorname{arctg} k_i$, $l_i = \varrho(A_{i-1}, A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Nechť $\hat{L} = \hat{L}(\mathfrak{D})$ je funkce, jejímž grafem je lomená čára s úhlovými body A_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Nechť $\alpha \in (0, \pi/4\rangle$; nechť $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_1(\mathfrak{D}, \alpha)$ respektive $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_2(\mathfrak{D}, \alpha)$ je množina těch $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pro něž platí $k_i < \operatorname{tg} \alpha$ respektive $k_i > \operatorname{cotg} \alpha$; nechť $\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_3(\mathfrak{D}, \alpha) = \{1, 2, \ldots, n\} - \mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2$. Platí

Lemma 2.12. *Nechť f je spojitá a neklesající v $\langle a, b\rangle$ a nechť $f \in M(a, b)$ (viz definici 1.1). Nechť $\alpha \in (0, \pi/4\rangle$. Pak k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí:*

je-li $\mathfrak{D}$ libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž platí

(i) $$d(\hat{L}, a, b) > b - a + f(b) - f(a) - \delta\,,$$

pak $\sum_{i \in \mathfrak{S}_3} l_i < \varepsilon$.

Důkaz. Předpokládejme opak. Pak existuje $\varepsilon > 0$, že pro libovolné $\delta > 0$ existuje dělení $\mathfrak{D}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že je splněna podmínka (i) a

(ii) $$\sum_{i \in \mathfrak{S}_3} l_i = \varepsilon_1 \geqq \varepsilon\,.$$

Zvolme $\delta = \varepsilon\,(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)$. Nechť $\mathfrak{D}$ je dělení, splňující podmínky (i), (ii). Protože f má maximální délku v každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$, máme $\sum_{i \in \mathfrak{S}_3} d(f, x_{i-1}, x_i) = \sum_{i \in \mathfrak{S}_3} l_i\,(\cos\alpha_i + \sin\alpha_i)$. Jelikož pro $x \in \langle\alpha, \pi/2 - \alpha\rangle$ platí $\cos x + \sin x \geqq \cos\alpha + \sin\alpha$ a $\alpha_i \in \langle\alpha, \pi/2 - \alpha\rangle$ pro $i \in \mathfrak{S}_3$, dostaneme $\sum_{i \in \mathfrak{S}_3} d(f, x_{i-1}, x_i) \geqq \sum_{i \in \mathfrak{S}_3} l_i(\cos\alpha + \sin\alpha) = \varepsilon_1(\cos\alpha + \sin\alpha)$. Z toho vyplývá, že $d(f, a, b) = \sum_{i=1}^{n} d(f, x_{i-1}, x_i) \geqq \sum_{i \in \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} d(f, x_{i-1}, x_i) + \varepsilon_1(\cos\alpha + \sin\alpha)$ a tedy $\sum_{i \in \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} l_i \leqq \sum_{i \in \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} d(f, x_{i-1}, x_i) \leqq d(f, a, b) - \varepsilon_1(\cos\alpha + \sin\alpha)$. Z posledního vztahu a ze vztahu (ii) vyplývá $d(\hat{L}, a, b) = \sum_{i \in \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} l_i + \sum_{i \in \mathfrak{S}_3} l_i \leqq d(f, a, b) - \varepsilon_1(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)$, tj. $(\varepsilon_1 \geqq \varepsilon)$ $d(\hat{L}, a, b) \leqq d(f, a, b) - \varepsilon(\cos\alpha + \sin\alpha - 1) = d(f, a, b) - \delta$, což je spor s (i). Tím je lemma dokázáno.

Věta 2.2. *Nechť $f(\in)V(a, b)$. Pak $f \in M(a, b)$ právě když pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí*

$$r(f, a, x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f.$$

Důkaz. Lze předpokládat (lemma (2.10), že f je neklesající. V tomto případě je $\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f = f(x) - f(a)$ a jelikož $f(x) - r(f, a, x)$ je též neklesající, přejde podmínka věty v ekvivalentní podmínku

(i) $$r(f, a, b) = f(b) - f(a)\,.$$

I. Důkaz postačitelnosti. Nechť platí (i), nechť ε, δ jsou libovolná kladná čísla. Pak existují čísla a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ pro něž platí

(ii) $$a \leqq a_1 < b_1 \leqq a_2 < b_2 \leqq \ldots \leqq a_n < b_n \leqq b\,,\quad \sum_{i=1}^{n}(b_1 - a_i) < \delta\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(f(b_i) - f(a_i)) > f(b) - f(a) - \varepsilon\,.$$

Nechť

(iii) $$A, A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_n, B_n, B$$

jsou body grafu funkce f: $A = (a, f(a))$, $A_i = (a_i, f(a_i))$, $B_i = (b_i, f(b_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $B = (b, f(b))$. Nechť L je funkce, jejímž grafem je lomená čára s úhlovými body (iii).

Z (ii) vyplývá $\sum_{i=1}^{n} \varrho(A_k, B_k) \geqq \sum_{i=1}^{n} (f(b_i) - f(a_i)) > f(b) - f(a) - \varepsilon$, $\varrho(A, A_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \varrho(B_i, A_{i+1}) + \varrho(B_n, B) > b - a - \delta$. Tedy $d(f, a, b) \geqq d(L, a, b) > b - a + f(b) - f(a) - \varepsilon - \delta$. Ježto ε, δ mohou být libovolně malá, máme $d(f, a, b) \geqq b - a + f(b) - f(a)$, tj. $f \in M(a, b)$.

II. Dokážeme, že podmínka (i) je nutná. Nechť ε, δ jsou libovolná kladná čísla. Nechť $\alpha \in (0, \pi/4\rangle$ splňuje podmínky

(iv) $$(b - a) \operatorname{tg} \alpha < \varepsilon/2\,, \quad (f(b) - f(a) \operatorname{tg} \alpha < \delta\,.$$

Podle lemmatu 2.12 existuje $\delta_1 < 0$ tak, že platí: je-li $\mathfrak{D}$ libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, pak (ve shodě s označením lemmatu 2.12) platí

(v) $$d(\hat{L}, a, b) > b - a + f(b) - f(a) - \delta_1 \Rightarrow \sum_{i \in \mathfrak{S}_3} l_i < \frac{1}{2}\varepsilon\,.$$

Nechť $\mathfrak{D}$ je dělení splňující levou stranu implikace (v). Zřejmě platí (f je neklesající) $\sum_{i \in \mathfrak{S}_1} (f(x_i) - f(x_{i-1}) < (b - a) \operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{2}\varepsilon$ (podmínka (iv)), $\sum_{i \in \mathfrak{S}_3} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \leqq \sum_{i \in \mathfrak{S}_3} l_i < \frac{1}{2}\varepsilon$ (podmínka (v)) a tedy $\sum_{i \in \mathfrak{S}_2} (f(x_i) - f(x_{i-1}) < f(b) - f(a) - \varepsilon$. Jelikož $\sum_{i \in \mathfrak{S}_2} (x_i - x_{i-1}) < (f(b) - f(a)) \operatorname{tg} \alpha < \delta$ (vztah (iv)), máme $V(\delta, f, \langle a, b\rangle) \geqq \sum_{i \in \mathfrak{S}_2} (f(x_i) - f(x_{i-1})) > f(b) - f(a) - \varepsilon$, tedy (vzhledem k libovolnosti ε) $V(\delta, f, \langle a, b\rangle) \geqq f(b) - f(a)$. Jelikož δ bylo libovolné kladné číslo, dostaneme (lemma 2.5) $r(f, a, b) = \varphi(f, a, b) = \lim_{\delta \to 0+} V(\delta, f, \langle a, b\rangle) \geqq f(b) - f(a)$. Protože platí $r(f, a, b) \leqq f(b) - f(a)$, je podmínka (i) a tím i věta dokázána.

Důsledek. *Nechť $f \in V(a, b)$, nechť $r_1(x) = r(f, a, x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Pak $r_1 \in M(a, b)$.*

Důkaz. Protože je r_1 neklesající, stačí podle věty 2.2 dokázat, že $r(r_1, a, x) = r_1(x) - r_1(a) = r_1(x)$ (neboť $r_1(a) = 0$), což je tvrzením věty 2.1.

Lemma 2.13. *Nechť f je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$, nechť $g \in M(a, b)$. Pak pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí*

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^x (f + g) = \mathop{\mathrm{V}}_a^x f + \mathop{\mathrm{V}}_a^x g\,.$$

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat podmínku pro $x = b$. Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\text{(i)} \qquad A \in \mathfrak{A}(a, b), \quad \mu(A) < \delta \Rightarrow v_f(A) < \varepsilon .$$

Podle věty 2.2 existuje $A_1 \in \mathfrak{A}(a, b)$, $\mu(A_1 < \delta$, $v_g(A_1) > \bigvee_a^b g - \varepsilon$ (v_f je definována vztahem (2.6)). Položme $A_2 = \langle a, b\rangle - A_1$. Protože platí (podmínka (i)) $v_f(A_1) < \varepsilon$, máme $v_f(A_2) > \bigvee_a^b f - \varepsilon$. Z uvedených vztahů vyplývá $v_{f+g}(A_1) \geqq v_g(A_1) - v_f(A_1) > > \bigvee_a^b g - 2\varepsilon$, $v_{f+g}(A_2) \geqq v_f(A_2) - v_g(A_2) > \bigvee_a^b f - 2\varepsilon$ a tedy $v_{f+g}(\langle a, b\rangle) = = v_{f+g}(A_1) + v_{f+g}(A_2) > \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g - 4\varepsilon$. Protože ε je libovolně malé, máme $\bigvee_a^b (f + g) = v_{f+g}(\langle a, b\rangle) \geqq \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g$. Protože platí $\bigvee_a^b (f + g) \leqq \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g$, je lemma dokázáno.

Věta 2.3. *Nechť f je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$ a nechť $g \in M(a, b)$. Pak platí*

$$d(f + g, a, b) = d(f, a, b) + \bigvee_a^b g .$$

Důkaz. Podle lemmat 2.11 a 2.13 stačí větu dokázat za předpokladu, že f, g jsou neklesající v $\langle a, b\rangle$. V tomto případě má tvrzení věty tvar

$$d(f + g, a, b) = d(f, a, b) + g(b) - g(a) .$$

I. Nechť $\mathfrak{D}$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ je libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme $A_k = (x_k, f(x_k) + g(x_k))$, $\hat{A}_k = (x_k, f(x_k))$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Zřejmě platí $\varrho(A_{k-1}, A_k) \leqq \varrho(\hat{A}_{k-1}, \hat{A}_k) + g(x_k) - g(x_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, z čehož vyplývá vztah $d(f + g, a, b) \leqq d(f, a, b) + g(b) - g(a)$. Současně je zřejmé, že pro libovolné neklesající spojité funkce f, g v $\langle a, b\rangle$ platí

$$\text{(2.10)} \qquad d(f, u, v) \leqq d(f + g, u, v) \leqq d(f, u, v) + g(v) + g(u) ,$$

jestliže $a \leqq u < v \leqq b$.

II. Nyní dokážeme, že platí $d(f + g, a, b) \geqq d(f, a, b) + g(b) - g(a)$. Nechť $\varepsilon > 0$. Protože funkce f je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$, existuje $\delta > 0$ tak, že platí: je-li $\{J_k\}_{k=1}^m$ libovolný skoro disjunktní systém intervalů, $J_k \subset \langle a, b\rangle$, $k = 1, 2, \ldots \ldots, m$, pak

$$\text{(i)} \qquad \sum_{k=1}^{m} \mu(J_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} v_f(J_k) < \varepsilon .$$

Protože $g \in M(a, b)$, existují (podle věty (2.2) čísla a_k, b_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, $a \leqq a_1 < < b_1 \leqq a_2 < b_2 \leqq \ldots \leqq a_n < b_n \leqq b$ tak, že platí

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta\,, \quad \sum_{k=1}^{n} (g(b_k) - g(a_k)) > g(b) - g(a) - \varepsilon\,.$$

Je zřejmé, že číslo δ v podmínkách (i), (ii) může být libovolně malé (např. $\delta < \varepsilon$). Označme $b_0 = a$, $a_{n+1} = b$. Ze vztahu (2.10) vyplývá

$$\text{(iii)} \qquad \sum_{k=0}^{n} d(f + g, b_k, a_{k+1}) \geqq \sum_{k=0}^{n} d(f, b_k, a_{k+1})\,.$$

Jest $d(f, a, b) = \sum_{k=1}^{n} d(f, a_k, b_k) + \sum_{k=0}^{n} d(f, b_k, a_{k+1})$; z (i) vyplývá $\sum_{k=1}^{n} d(f, a_k, b_k) \leqq \leqq \sum_{k=1}^{n} \{(b_k - a_k) + f(b_k) - f(a_k)\} < \varepsilon + \delta$, tedy $\sum_{k=0}^{n} d(f, b_k, a_{k+1}) > d(f, a, b) - \varepsilon - - \delta$, z čehož vzhledem k (iii) vyplývá

$$\text{(iv)} \qquad \sum_{k=0}^{n} d(f + g, b_k, a_{k+1}) > d(f, a, b) - \varepsilon - \delta\,.$$

Dále jest podle (2.10) $d(f + g, a_k, b_k) \geqq d(g, a_k, b_k) > g(b_k) - g(a_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, z čehož podle (ii) dostaneme

$$\text{(v)} \qquad \sum_{i=1}^{n} d(f + g, a_k, b_k) > g(b) - g(a) - \varepsilon\,.$$

Ze vztahu (iv), (v) vyplývá snadno, že $d(f + g, a, b) > d(f, a, b) + g(b) - g(a) - - 2\varepsilon - \delta$. Jelikož ε, δ lze volit libovolně malá, platí $d(f + g, a, b) \geqq d(f, a, b) + + g(b) - g(a)$, čímž je potřebné tvrzení dokázáno.

Lemma 2.14. *Nechť $f \in M(a, b)$. Pak platí*

$$f'(x) = 0$$

pro skoro všechna $x \in \langle a, b \rangle$.

Důkaz. Označíme-li $v_f(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$, $x \in \langle a, b \rangle$, pak pro skoro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ platí $|f'(x)| \leqq v_f'(x)$ (dokonce $|f'(x)| = v_f'(x)$ skoro všude v $\langle a, b \rangle$). Jelikož $v_f \in \in M(a, b)$ (důsledek lemmatu 2.11), stačí tvrzení lemmatu dokázat za předpokladu, že f je neklesající v $\langle a, b \rangle$. V tomto případě je $f'(x) \geqq 0$ skoro všude v $\langle a, b \rangle$. Položme $f_1(x) = \int_a^x f'(t)\,dt$. Funkce f_1 je absolutně spojitá a neklesající v $\langle a, b \rangle$. Předpokládejme, že $f'(x) > 0$ na množině kladné míry. Pak $f_1(b) > 0$, z čenož vyplývá $d(f_1, a, b) > b - a$. Jelikož $f - f_1$ je neklesající v $\langle a, b \rangle$, jest podle (2.10) $d(f - f_1, a, b) \leqq d(f, a, b)$. Z věty 2.3 vyplývá $d(f - f_1, a, b) = d(f_1, a, b) + f(b) - f(a)$ a tedy $d(f, a, b) > (b - a) + f(b) - f(a)$, což je spor. Tím je lemma dokázáno.

Lemma 2.15. *Nechť $f \in V(a, b)$. Pak pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ platí*

$$\int_a^x |f'(t)| \, \mathrm{d}t = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f - r(f, a, x).$$

Důkaz. Položme $f_1(x) = \int_a^x |f'(t)| \, \mathrm{d}t$. Jest pro skoro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ $f_1'(x) = |f'(x)|$. Jelikož $r(f, a, x) \in M(a, b)$ (důsledek věty 2.2), plyne z lemmatu 2.14 $r'(f, a, x) = 0$ skoro všude v $\langle a, b \rangle$. Položme $v_f(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$, $x \in \langle a, b \rangle$. Protože je $v_f'(x) = |f'(x)|$ skoro všude v $\langle a, b \rangle$, máme $v_f'(x) - r'(f, a, x) = |f'(x)|$ skoro všude v $\langle a, b \rangle$. Jelikož funkce f_1 a funkce $v_f(x) - r(f, a, x)$ (důsledek věty 2.1) jsou absolutně spojité v $\langle a, b \rangle$ a mají skoro všude v $\langle a, b \rangle$ stejné derivace, existuje konstanta C taková, že platí $f_1(x) = v_f(x) - r(f, a, x) + C$, $x \in \langle a, b \rangle$. Dosadíme-li v tomto vztahu $x = a$, dostaneme $C = 0$. Tím je lemma dokázáno.

Věta 2.4. *Nechť $f \in V(a, b)$. Pak $f \in M(a, b)$ právě když*

$$f'(x) = 0$$

skoro všude v $\langle a, b \rangle$.

Důkaz. Nutnost podmínky vyplývá z lemmatu 2.14. Nechť tedy je $f'(x) = 0$ skoro všude v $\langle a, b \rangle$. Pak $f_1(x) = \int_a^x (f'(t) \, \mathrm{d}t = 0$ pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$. Z lemmatu 2.15 pak vyplývá, že $\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f = r(f, a, x)$ pro všechna $x \in \langle a, b)$, což podle věty 2.2 znamená, že $f \in M(a,b)$. Tím je věta dokázána.

Poznámka. Funkce $f \in V(a, b)$ se nazývá singulární, jestliže $f'(x) = 0$ skoro všude v $\langle a, b \rangle$. Věta 2.4 tedy tvrdí, že $f \in M(a, b)$ právě tehdy když f je singulární v $\langle a, b \rangle$.

Lemma 2.16. *Nechť f je absolutně spojitá v $\langle a, b \rangle$. Pak*

$$d(f, a, b) = \int_a^b \sqrt{[1 + f'^2(x)]} \, \mathrm{d}x .$$

Důkaz. Je podán v [2], str. 543.

Věta 2.5. *Nechť $f \in V(a, b)$. Pak platí*

$$d(f, a, b) = \int_a^b \sqrt{[1 + f'^2(x)]} \, \mathrm{d}x + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f - \int_a^b |f'(x)| \, \mathrm{d}x .$$

Důkaz. Položme $f_1(x) = \int_a^x |f'(t)| \, \mathrm{d}t$, $v_f(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$ pro $x \in \langle a, b \rangle$. Z lemmatu 2.15 vyplývá, že $v_f(x) = r(f, a, x) + f_1(x)$; funkce f_1 je absolutně spojitá v $\langle a, b \rangle$ a

$r(f, a, x) \in M(a, b)$ (důsledek věty 2.2). Z lemmatu 2.11 a věty 2.3 nyní plyne

$$\text{(i)} \qquad d(f, a, b) = d(v_f, a, \mathrm{b}) = d(f_1, a, b) + r(f, a, b).$$

Jelikož $r(f, a, x) \in M(a, b)$, jest (věta 2.4) $r'(f, a, x) = 0$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$ a tedy $|f'(x)| = v'_f(x) = f'_1(x)$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$. Podle lemmatu 2.16 máme

$$\text{(ii)} \qquad d(f_1, a, b) = \int_a^b \sqrt{[1 + f_1'^2(x)]}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{[1 + f'^2(x)]}\,\mathrm{d}x.$$

Podle lemmatu 2.15 jest

$$\text{(iii)} \qquad r(f, a, b) = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f - \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Dosazením do (i) ze vztahů (ii), (iii) dostaneme tvrzení věty.

P o z n á m k a. Funkce maximální délky byly vyšetřovány z poněkud jiného hlediska v [1].

Literatura

[1] *Bečvář J.:* O monotonních spojitých funkcích, jejichž graf má maximální délku. Čas. pro pěst. matematiky, roč. *81* (1956), 172—180.

[2] *Natanson I. P.:* Теория функций вещественной переменной Гос. изд. т. т. лит., Moskva 1957

Adresa autora: 461 17 Liberec, Hálkova 6 (Vysoká škola strojní a textilní).

Zusammenfassung

ÜBER DIE KURVEN VON MAXIMALER LÄNGE

MILOSLAV NEKVINDA, Liberec

Es sei K eine Kurve, die durch die Gleichung $y = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$ gegeben ist. Es sei vorausgesetzt, dass f stetig im Intervall $\langle a, b\rangle$ und von beschränkter Schwankung ist. Von der Kurve K soll gesagt werden, dass sie von maximaler Länge ist, wenn die Beziehung $d(f, a, b) = b - a + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$ gilt, wobei $d(f, a, b)$ die Länge der Kurve K und $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$ die Schwankung der entsprechenden Funktion f im Intervall $\langle a, b\rangle$ bedeuten. In der Arbeit werden die Eigenschaften von Kurven maximaler Länge untersucht. Es wird u. a. gezeigt, dass der folgende Satz gilt: *Eine Kurve K ist genau dann von maximaler Länge. wenn die ihr entsprechende Funktion f singular ist.*

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

RECONSTRUCTION OF A TREE FROM CERTAIN MAXIMAL PROPER SUBTREES

LADISLAV NEBESKÝ, Praha

(Received February 3, 1972)

B. MANVEL [4] has proved that a (finite) tree T can be reconstructed up to an isomorphism from its set of non-isomorphic maximal proper subtrees, excluding the cases when either (a) T has exactly four vertices, or (b) T has exactly six vertices and exactly three of them are terminal. In the present paper we shall demonstrate that we can obtain the same result by replacing the set of non-isomorphic maximal proper subtrees by its certain subset. For Manvel's reconstruction of a tree and also for other ways of reconstructing a tree from subgraphs (see [3], [2], and [1]) the notion of a center of a tree is important. In the present reconstruction an important role will be ascribed to certain vertices which we shall call a focus and a pseudofocus.

First we introduce the necessary notions and symbols (for basic notions of theory of graphs, see [5]). By a tree we shall mean a finite tree. Let T be a tree. By a subtree of T we shall mean a connected subgraph of T. By a maximal proper subtree of T we mean a tree which we obtain from T by deleting one of the terminal vertices of T. By $V(T)$, $I(T)$, $C(T)$, $d(T)$ and $r(T)$ we denote its vertex set, its set of terminal vertices, its set of centers, its diameter and its radius, respectively. If $u, v \in V(T)$, then by $d_T(u, v)$ we denote the distance between u and v in T and if $w \in V(T)$, we denote

$$r_T(w) = \max \{d_T(w, c) \mid c \in C(T)\} . \tag{1}$$

Moreover, we denote

$$I_j(T) = \{v \in I(T) \mid r_T(v) \leqq j\} , \quad \text{for} \quad 1 \leqq j \leqq r(T) ; \tag{2}$$

$$\bar{I}_j(T) = \{v \in I(T) \mid r_T(v) = j\} , \quad \text{for} \quad 1 \leqq j \leqq r(T) ;$$

$$\gamma(T) = \min \{j \mid \text{either } j = r(T) \text{ or } |I_j(T)| \geqq 3\} . \tag{3}$$

We say that a maximal proper subtree T' of the tree T is a γ-subtree of T if there is $u \in I_{\gamma(T)}(T)$ such that we obtain T' from T by deleting the verex u.

If T_0 is a tree, $|V(T_0)| \geqq 2$ and $v \in I(T_0)$, we say that (T_0, v) is a branch or a branch rooted in v. Branches (T_1, v_1) and (T_2, v_2) will be isomorphic if the trees T_1 and T_2 are isomorphic and if there exists an isomorphism between T_1 and T_2 in which v_1 and v_2 correspond to each other. We say that a branch B is a branch of T rooted in v, if $B = (T_0, v)$ where T_0 is a subtree of T such that the only vertex w in T_0 which is joined to v by an edge fulfils the following condition: $u \in V(T_0) - \{v\}$ if and only if $u \in V(T)$ and w lies on the path connecting u and v in T.

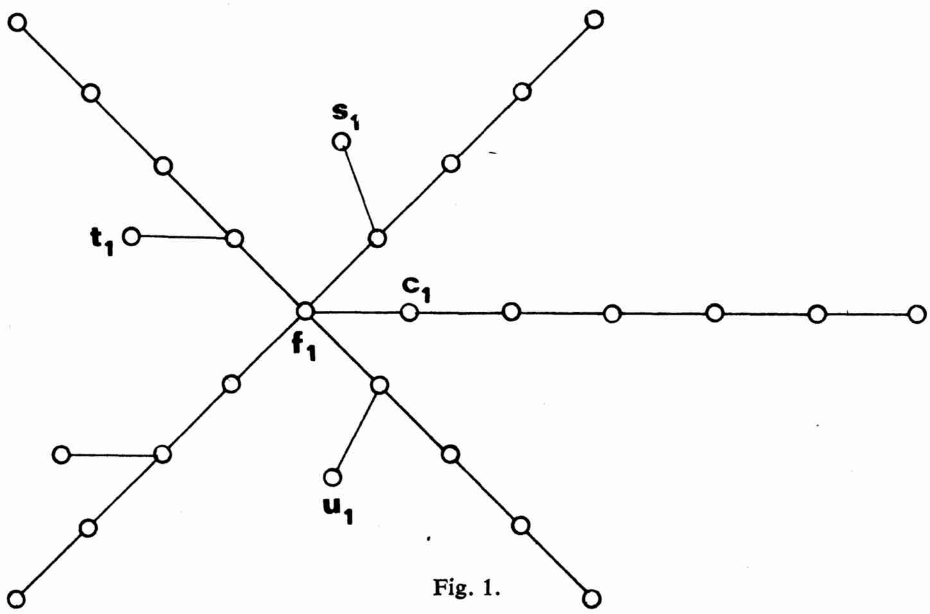


Fig. 1.

Let T be a tree with at least one edge, and if $|I(T)| \geqq 3$, let T' be such a γ-subtree of T that $d(T') = d(T)$. We say that $u \in V(T)$ or $u' \in V(T')$ is a focus of T or a pseudofocus of T', respectively, if the following conditions hold: (i) there are at least two branches of T or T' rooted in u or u', respectively, such that each of them contains at least one vertex from $I_{\gamma(T)}(T)$ or $I_{\gamma(T)}(T')$, respectively; (ii) if $v \in V(T)$ and $r_T(v) < r_T(u)$ or if $v' \in V(T')$ and $r_{T'}(v') < r_{T'}(u')$, then all the vertices of $I_{\gamma(T)}(T)$ or $I_{\gamma(T)}(T')$, respectively, lie in exactly one of the branches of T that are rooted in v or in exactly one of the branches of T' rooted in v', respectively. By $F(T)$ or $P(T')$ we denote the set of foci of T or the set of pseudofoci of T', respectively. It is easy to see that $1 \leqq |F(T)| \leqq 2$, $1 \leqq |P(T')| \leqq 2$, and if $|F(T)| = 2$, then $F(T) = C(T)$ and if $|P(T')| = 2$, then $P(T') = C(T')$. If $|F(T)| = 1$, we denote $f(T) = r_T(w)$, where w is the focus; if $|F(T)| = 2$, we put $f(T) = 1$. If $|P(T')| = 1$, we denote $p(T') = r_{T'}(w')$, where w' is the pseudofocus; if $|P(T')| = 2$, we put $p(T') = 1$.

Example. Let T_i denote the tree in Fig. i, $1 \leqq i \leqq 3$. Then $\gamma(T_1) = \gamma(T_2) = \gamma(T_3) = 3$, $I_3(T_1) = \{s_1, t_1, u_1\}$, $I_3(T_2) = \{s_2, t_2, u_2, v_2, w_2\}$, $I_3(T_3) =$

$= \{s_3, t_3, u_3, v_3, w_3\}$, $C(T_1) = \{c_1\}$, $F(T_1) = \{f_1\}$, $C(T_2) = \{c_2', c_2''\} = F(T_2)$, $C(T_3) = \{c_3', c_3''\}$, $F(T_3) = \{c_3'\}$, and $f(T_1) = f(T_2) = f(T_3) = 1$.

For the remainder of the present paper we shall assume that a tree T is given such that $|V(T)| \geqq 2$, $|V(T)| \neq 4$, and that if $|V(T)| = 6$, then $|I(T)| \neq 3$; by R we denote its set of non-isomorphic γ-subtrees. If R contains trees of different diameters or if it contains a tree with at most two terminal vertices, then $\gamma(T) = r(T)$; thus $I_{\gamma(T)}(T) = I(T)$ and from Theorem 1 in Manvel [4] it follows directly that T can be reconstructed up to an isomorphism from R. This proposition is complemented by the following theorem:

Theorem. *Let the set R not contain any tree T_0 with $|I(T_0)| \leqq 2$, and let all the trees in R have same diameter. Then T can be reconstructed up to an isomorphism from the set R.*

Proof. It is easy to see that $d(T') = d(T)$, $r(T') = r(T)$ and $|C(T')| = |C(T)|$, for every $T' \in R$. First we determine $\gamma(T)$.

(A) Let there be m, $1 \leqq m \leqq r(T)$, and $T_1, T_2 \in R$ such that $|\tilde{I}_m(T_1)| \neq |\tilde{I}_m(T_2)|$ and that for any n, $m < n \leqq r(T)$, and for any $T', T'' \in R$ it holds that $|\tilde{I}_n(T')| = |\tilde{I}_n(T'')|$. Denote $h = \max\{|I_m(T_0)| \mid T_0 \in R\}$. Obviously, $h \geqq 1$. If $h = 1$, then for every γ-vertex of T it holds that $r_T(v) = m + 1$; thus also $\gamma(T) = m + 1$. If $h \geqq 2$, then there is a γ-vertex u such that $r_T(u) = m$ and there is no γ-vertex w such that $r_T(w) > m$; thus $\gamma(T) = m$.

(B) For any $T_1, T_2 \in R$ and for any m, $1 \leqq m \leqq r(T)$, let $|\tilde{I}_m(T_1)| = |\tilde{I}_m(T_2)|$. Then for any γ-vertices v_1 and v_2 of T, $r_T(v_1) = r_T(v_2)$. Thus $|\tilde{I}_{\gamma(T)}(T)| \geqq 3$, and if $\gamma(T) > 1$, then $I_{\gamma(T)-1}(T) = \emptyset$. For any $T_0 \in R$, $|\tilde{I}_{\gamma(T)}(T_0)| \geqq 2$, and if $\gamma(T) > 1$, then $|I_{\gamma(T)-1}(T_0)| \leqq 1$. Thus $\gamma(T) = \min\{j \mid |I_j(T_0)| \geqq 2\}$, for any $T_0 \in R$.

As we know $\gamma(T)$, we also know $I_{\gamma(T)}(T')$ for any $T' \in R$ and thus we easily determine $P(T')$ and $p(T')$, for any $T' \in R$. Obviously, $|F(T)| = 1$ if and only if $|P(T_0)| = 1$, for any $T_0 \in R$; $|F(T)| = 2$ if and only if there is $T' \in R$ such that $|P(T')| = 2$. Thus we have $|F(T)| = \max\{|P(T_0)| \mid T_0 \in R\}$. If $|F(T)| = 2$, then $f(T) = 1$. Let $|F(T)| = 1$. It is easy to see that there exists $T_0 \in R$ such that $p(T_0) \neq f(T)$ if and only if there exists a branch of T rooted in the focus which contains exactly $|I_{\gamma(T)}(T)| - 1$ γ-vertices of T. Thus if for $T_0 \in R$, $p(T_0) \neq f(T)$, then $p(T_0) > f(T)$. Obviously, there is $T' \in R$ such that $p(T') = f(T)$. Thus we have $f(T) = \min\{p(T_0) \mid T_0 \in R\}$. Now we shall demonstrate the remaining part of the reconstruction of the tree T.

(I) Let $|R| = 1$, let T' be the only element of R, $|P(T')| = 1$ and let there be at least two different branches B_1 and B_2 of T' rooted in the pseudofocus such that B_1 and B_2 each have exactly one edge. Then T can be reconstructed by adding an edge to the pseudofocus of T'.

(II) Let case (I) not hold. Consider any $T_0 \in R$. If $|F(T)| = 1$, then by v_0 we denote the vertex of T_0 such that $r_{T_0}(v_0) = f(T)$ and that v_0 lies on the path connecting the pseudofocus with the center if $|C(T_0)| = 1$, or with the nearer center if $|C(T_0)| = 2$; any branch of T_0 rooted in v_0 will be called a fundamental branch of T_0. If $|F(T)| = 2$, we shall describe as fundamental branches of T_0 the two branches of T_0 each of which is rooted in one center of T_0 while also containing the corresponding second center

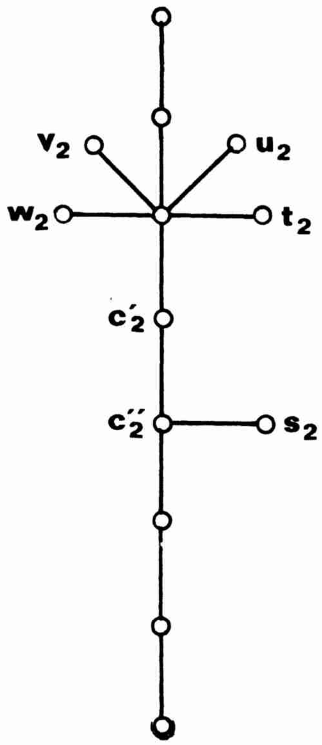


Fig. 2.

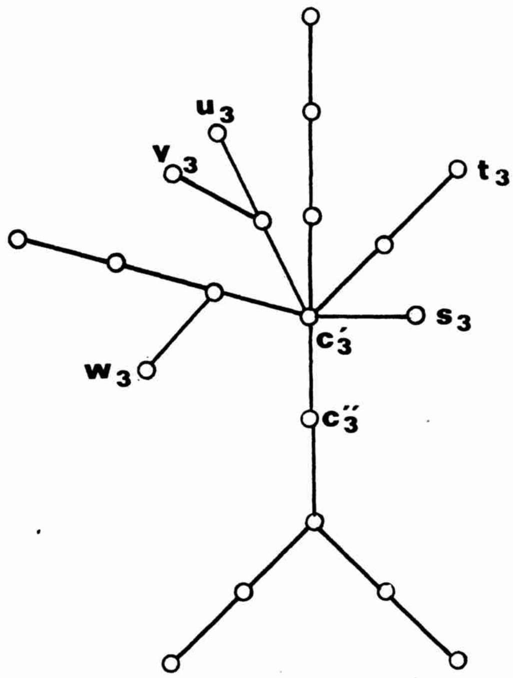


Fig. 3.

If $|F(T)| = 1$, then by a focus branch of T we call every branch of T rooted in the focus; if $|F(T)| = 2$, then we describe as focus branches of T the two branches of T each of which is rooted in one focus of T while also containing the corresponding second focus. It is easy to see that for any focus branch B of T there is $T' \in R$ such that B is isomorphic to a fundamental branch of T'.

By X we denote such a set of non-isomorphic branches that it holds (i) if $B \in X$, then there is $T' \in R$ which has a fundamental branch isomorphic to B; (ii) if $T_0 \in R$ and if B_0 is a fundamental branch of T_0, then there is $B \in X$ such that B_0 and B are isomorphic. If $B \in X$, $T' \in R$, then by $g(B, T')$ we shall denote the number of fundamental branches of T' which are isomorphic to B. Moreover, we denote $g(B) = \max \{g(B, T') \mid T' \in R\}$. Let $B_1, B_2 \in X$; we shall write $B_1 \to B_2$ if there is $T_0 \in R$

such that it has a fundamental branch B_0 isomorphic to B_1 and containing a vertex $v \in I_{\gamma(T)}(T_0)$ such that if we delete v from B_0 we obtain a branch isomorphic to B_2.

We say that $B \in X$ is extraordinal if simultaneously (a) there is no $B' \in X$ such that $B' \to B$, (b) there is $B'' \in X$ such that $B \to B''$, and (c) $g(B, T_0) = g(B)$, for any $T_0 \in R$. If $B \in X$ fulfils (a), then it is isomorphic to a focus branch B_0 of T; if moreover B fulfils (b), then B_0 has at least two edges and it contains a γ-vertex. It is easy to see that if B is extraordinal then all focus branches of T which contain any γ-vertex are isomorphic to B; thus X contains at most one extraordinal branch.

By G we denote the directed graph with the vertex set X which is defined by the binary relation $\to$. Obviously, G is acyclic. Every vertex B of G is evaluated by the positive integer $g(B)$. Now, we define a new evaluation $h(B)$, for every $B \in X$, as follows: (i) if B is extraordinal, then $h(B) = g(B) + 1$; (b) if B is not extraordinal and if there is no $B' \in X$ such that both $B' \to B$ and $h(B') \neq 0$, then $h(B) = g(B)$; (c) if B is not extraordinal and if there is $B' \in X$ such that $B' \to B$ and $h(B') \neq 0$, then $h(B) = g(B) - 1$. As G is acyclic, $h(B)$ is uniquely determined for every $B \in X$.

Let $B \in X$. Then B is isomorphic to no focus branch of T if and only if $g(B) = 1$ and there is $B' \in X$ such that $B' \to B$ and B' is isomorphic to a branch of T. B is isomorphic to exactly $n \geqq 1$ focus branches of T if and only if either (a) B is extraordinal, and $g(B) = n - 1$, or (b) B is not extraordinal, $g(B) = n$, and there is no $B' \in X$ such that $B' \to B$ and B' is isomorphic to focus branch of T, or (c) B is not extraordinal, $g(B) = n + 1$ and there is $B' \in X$ such that $B' \to B$ and B' is isomorphic to any focus branch of T. By induction we have the result that every $B \in X$ is isomorphic to exactly $h(B)$ focus branches of T. As every focus branch of T is isomorphic to some $B \in X$ and since we know the number of foci of T, then T can be reconstructed. The case when $|F(T)| = 1$ is obvious. If $|F(T)| = 2$, then T has exactly two focus branches; they have one common edge joining the foci.

References

[1] *J. A. Bondy:* On Kelly's congruence theorem for trees, Proc. Cambridge Philos. Soc. *65* (1969), 387—397.

[2] *F. Harary, E. M. Palmer:* The reconstruction of a tree from its maximal proper subtrees, Canad. J. Math. *18* (1966), 803—810.

[3] *P. J. Kelly:* A congruence theorem for trees, Pacific J. Math. *7* (1957), 961—968.

[4] *B. Manvel:* Reconstruction of trees, Canad. J. Math. *22* (1970), 55—60.

[5] *O. Ore:* Theory of Graphs, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 38, Providence 1962.

Author's address: 116 38 Praha 1, nám. Krasnoarmějců 2 (Filosofická fakulta Karlovy university).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH CONSTANT COEFFICIENTS.

HOMOGENEOUS EQUATION IN THE HALF PLANE

JAN CHRASTINA, Brno

(Received May 3, 1972)

Certain types of functional spaces corresponding to each type of partial differential equations are known which are, in a certain sense, suitable for their investigation. This is a common approach to this theory. It is also possible, however, to look for such a space in which suitable boundary problems could be solved for the largest possible class of equations. The summary of the corresponding results is given in the book [1] where boundary value problems in the half space for the operator $p_n(\partial/\partial x)\, \partial^n/\partial t^n + \ldots + p_0(\partial/\partial x)$ ($p_0, \ldots, p_n$ being polynomials) with $p_n(x) = 1$ are studied. The last condition is removed in the presented paper.

We investigate a nonstandard space of distributions where boundary problems for an arbitrary differential operator with constant coefficients in a given half plane can be formulated and solved. Although the results are more complicated than those in the book [1], it is possible to give quite elementary proofs, which are more concise, technically simpler and perhaps even more complete. Our conception seems to be useful even if the variable x is a vector. These considerations seem to be connected very closely with the papers [2], [3] where the elliptical case is studied.

The case when $p_n \not\equiv 1$ and the polynomial p_n even has real roots, leads after Fourier transformation to an equation the solution of which has singularities. We can see that this case occurs in some types of problems even if $p_n \equiv 1$. It appears, e.g., in the case of nonhomogeneous equations which will be dealt with in the next part of the paper.

1. Function and distribution spaces. Let $\boldsymbol{L}$ be the space of all functions $w(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ such that $\|w\| = \int |w(x)|\, \mathrm{d}x < \infty$, with usual topology. Let P be a polynomial such that $P(x) \neq 0$ for real x. We denote by $\boldsymbol{PL}$ the space of all functions v ($v = Pw$, $w \in \boldsymbol{L}$) with the norm $\|v\|_P = \|v/P\|$. Put $\mathscr{L} = \bigcup_P \boldsymbol{PL}$ with the topology of inductive limit.

Let Q be a polynomial such that $Q(x) \not\equiv 0$. We denote by $Q^{-1}\mathscr{L}$ the space of all distributions u defined in the domain $-\infty < x < \infty$ such that $Qu \in \mathscr{L}$. The map $u \to Qu$ has a finite-dimensional kernel and the topology in the space $Q^{-1}\mathscr{L}$ is, by definition, the weakest separated topology for which the exactly given map is continuous. Put $\mathscr{K} = \bigcup_Q Q^{-1}\mathscr{L}$ with the topology of inductive limit.

2. Explicit form of a distribution from the space $\mathscr{K}$. Distribution u is defined if the values $\langle u, \varphi \rangle$ are given for all functions $\varphi \in C_0^\infty$ with a sufficiently small support. Choose a real number a and let $Q(x) = (x - a)^s Q_1(x)$ $(s \geqq 0,\ Q_1(a) \neq 0)$. Let $\alpha \in C_0^\infty$ be a function such that $\alpha(x) \equiv 1$ in a neighbourhood of the point $x = a$. Then for all functions $\varphi \in C_0^\infty$, the support of which is in a small neighbourhood of the point $x = a$, the equation

$$(1) \qquad \langle u, \varphi \rangle = \langle Qu, \psi \rangle + \sum_{j=0}^{s-1} \frac{\varphi^{(j)}(a)}{j!} u^j_{a,\alpha}$$

holds where we denote

$$(2) \qquad \psi = Q^{-1}\left(\varphi - \alpha \sum_{j=0}^{s-1} \frac{\varphi^{(j)}(a)}{j!} (x - a)^j\right), \quad u^j_{a,\alpha} = \langle u, \alpha(x - a)^j \rangle .$$

Clearly $\psi \in C_0^\infty$ and according to the suppositions $Qu = v \in \mathscr{L}$. We also see that the function $U = v/Q$ is determined by the distribution u almost everywhere and at the same time we can write the equation (1) in the form

$$(1') \qquad \langle u, \varphi \rangle = \int U Q \psi \, dx + \sum_{j=0}^{s-1} \frac{\varphi^{(j)}(a)}{j!} u^j_{a,\alpha} .$$

Function U will be called an (*ordinary*) *component* of the distribution u. It is clear that a function $U(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ is a component of a distribution $u \in \mathscr{K}$ if and only if there exists a polynomial Q $(Q(x) \not\equiv 0)$ such that $v = QU \in \mathscr{L}$.

Unfortunately, the numbers $a^j_{a,\alpha}$ depend on the choice of function α and therefore they are of no invariant significance. It is, however, important that the numbers $u^j_{a,\alpha}$ $(j = s, s + 1, \ldots)$ are already defined by the component U:

$$(3) \qquad u^j_{a,\alpha} = \langle u, \alpha(x - a)^j \rangle = \int U\alpha(x - a)^j \, dx \quad (j = s, s + 1, \ldots)$$

and generally that the knowledge of the component U and of the numbers $u^j_{a,\alpha}$ $(j = c, c + 1, \ldots;\ c \geqq 0)$ is equivalent to the knowledge of values $\langle u, \varphi \rangle$ for those functions φ for which $\varphi(a) = \ldots = \varphi^{(c-1)}(a) = 0$.

A a rule, for the sake of brevity, the indices ${}_{a,\alpha}$ will be omitted.

3. Fourier transform. We shall limit ourselves to some brief remarks concerning the notation. By $\hat{u}$ we denote the Fourier transform of the distribution u. This transform is defined for $u = w \in \boldsymbol{L}$ to be

$$\hat{w}(\xi) = \int u(x)\, e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}x\,.$$

In other cases the distributions $\hat{u}$ will be defined on the domain $-\infty < \xi < \infty$ as well. The spaces $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{PL}$, $\mathscr{L}$, $Q^{-1}\mathscr{L}$, $\mathscr{K}$ lead to the spaces $\boldsymbol{L}^\wedge$, $(\boldsymbol{PL})^\wedge = \boldsymbol{PL}^\wedge, \ldots$ $\ldots, \mathscr{K}^\wedge$. The topology is defined in the usual way for the transform $^\wedge$ to be a homeomorphism. E.g., to the space $\mathscr{K}^\wedge$ there belong such distributions $\hat{u}$ that $Q(-iD)\,\hat{u} = P(-iD)\,\hat{w}$, where P, Q are the corresponding polynomials, $w \in \boldsymbol{L}$, $D = D_\xi$ is the derivative in the distributional sense.

4. Distribution depending on parameter. If, e.g., the distribution $u = u(t) \in \mathscr{K}$ depends on a parameter t, we shall denote its derivatives according to the parameter in the sense of topology of the space $\mathscr{K}$ by $(\mathrm{d}^j/\mathrm{d}t^j)(t)$. Analogous notation will be used for other spaces as well. For example,

$$\left(\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\, u(t)\right)^\wedge = \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\, \hat{u}(t) \quad \text{where we denote} \quad \hat{u}(t) = (u(t))^\wedge\,.$$

Further, we shall need the rules

$$\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\, p\, u(t) = p\, \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\, u(t)\,, \quad \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\, \varphi\, u(t) = \varphi\, \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\, u(t)\,,$$

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\, u(t), \varphi \right\rangle = \langle u(t), \varphi \rangle^{(j)}\,,$$

where p is a polynomial, $\varphi \in C_0^\infty$, $^{(j)}$ is the derivative in the elementary sense.

5. Conclusions from inductive limit topology. Let the distribution $u = u(t) \in \mathscr{K}$ $(a \leqq t \leqq b)$ depend continuously on the parameter t. The interval $a \leqq t \leqq b$ is compact, therefore there exist polynomials P, Q such that $u(t) \in Q^{-1}\mathscr{L}$, $Q\, u(t) \in \boldsymbol{PL}$ $(a \leqq t \leqq b)$. At the same time the function $Q\, u(t)$ depends continuously on the parameter t in the space $\boldsymbol{PL}$.

The preceding conclusion holds to a certain extent also for the noncompact intervals. Let us say that the distribution $u(t)$ $(a \leqq t < \infty)$ is *tempered* if there exists N $(N \geqq 0)$ such that

$$\lim_{t \to \infty} u(t)\, t^{-N} = 0 \tag{4}$$

in the sense of the corresponding topology. We can see that if the distribution $u(t) \in \mathscr{K}$

$(a \leqq t < \infty)$ is tempered and depends continuously on the parameter t, then again $u(t) \in Q^{-1}\mathscr{L}$, $Q\,u(t) \in PL$ $(a \leqq t < \infty)$ for the appropriate polynomials P, Q. At the same time the function $Q\,u(t)$ is tempered in the space PL.

6. Equations in the spaces $\mathscr{K}$, $\mathscr{K}^{\wedge}$. We shall deal with the conditions

$$(5)^{\wedge} \qquad p_n(-iD)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\hat{u}(t) + \ldots + p_0(-iD)\,\hat{u}(t) = 0\,,$$

$$\hat{u}(t) \in \mathscr{K}^{\wedge} \quad (0 \leqq t < \infty)\,, \quad \hat{u}(t) \text{ is tempered}.$$

Moreover, we suppose that $p_n(x), \ldots, p_0(x)$ $(n \geqq 0)$ are given polynomials, $p_n(x) \not\equiv 0$, $D = D_\xi$ is the derivative in the sense of distribution theory. By Fourier transform we get an equivalent problem

$$(5) \qquad p_n(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}u(t) + \ldots + p_0(x)\,u(t) = 0$$

$$u(t) \in \mathscr{K} \quad (0 \leqq t < \infty)\,, \quad u(t) \text{ is tempered}.$$

7. Ordinary differential equation with a parameter. Let us consider the conditions

$$(6) \quad p_n(x)\,U^{(n)} + \ldots + p_0(x)\,U = 0\,, \quad U = U(x,t) \quad (-\infty < x < \infty, 0 \leqq t < \infty)\,,$$

$$\text{there exists} \quad N \ (N \geqq 0) \quad \text{such that} \quad \lim_{t\to\infty} U(x,t)\,t^{-N} = 0\,.$$

The index $^{(j)}$ means the derivative according to the parameter t, both the derivative and the limit being understood in the elementary sense of the classical analysis. Thus we have an ordinary linear differential equation the coefficients of which are constants dependent on the parameter x. In the following lemmas we imagine that this parameter is fixed. The function U will interest us except sets of measure 0 with regard to the parameter x.

8. Main problem. The aim of this paper is to prove that if (5) holds for the distribution $u(t)$, then its component U fulfils (6) provided that we adapt it conveniently on a set of measure 0. Conversely, we wish to prove that if $U(x, t)$ is the component of a distribution $u(t) \in \mathscr{K}$ dependent on the parameter t and (6) holds at the same time, then U is the component of a distribution $u(t)$ for which (5) holds.

9. General lemma. *Let $\mathscr{M}$ be a compact topological space. Let $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ be normed vector space where the space $\mathscr{V}$ has a finite dimension. Let T_Z $(Z \in \mathscr{M})$ be a linear transformation of the space $\mathscr{V}$ into the space $\mathscr{W}$ such that every vector $T_Z Y$ $(Z \in \mathscr{M}$, $Y \in \mathscr{V})$ depends continuously on the point Z. Then there exists a constant M for which $\|T_Z\| \leqq M$ $(Z \in \mathscr{M})$.*

This lemma is evident.

10. Lemma, *Let $z_1, \ldots, z_n$ be the roots of the polynomial $p_n z^n + \ldots + p_0$ ($n \geqq 0$, $p_n \neq 0$). Then $|z_j| \leqq C = 1 + |p_{n-1}/p_n| + \ldots + |p_0/p_n|$ ($j = 1, \ldots, n$).*

This lemma is well known.

11. Lemma. *There exists a constant M_n such that for every solution $y(t)$ ($-\infty < t < \infty$) of the differential equation $p_n y^{(n)} + \ldots + p_0 y = 0$ the inequalities $|y^{(j)}(t)| \leqq M_n C^{n-1+j}(1 + |t|^{n-1})\, e^{|Ct|}(|y(0)| + \ldots + |y^{(n-1)}(0)|)$ ($-\infty < t < \infty$, $j = 0, 1, \ldots$) hold where C is the constant from* **10.**

Proof. Let $\mathscr{V}$ be the vector space of all n-tuples $Y = (y_0, \ldots, y_{n-1})$ with the norm $\|Y\|_{\mathscr{V}} = |y_0| + \ldots + |y_{n-1}|$. For every vector $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ let $T_Z Y = y$ be the solution of the equation $y^{(n)} - \sigma_1 y^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n \sigma_n y = 0$ ($\sigma_1 = z_1 + \ldots + z_n, \ldots, \sigma_n = z_1 \ldots z_n$) determined by the conditions $y(0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$. It is easily verified that

$$(7) \qquad T_Z(y_0, \ldots, y_{n-1})\,(t/c) \equiv T_{Z/c}(y_0, y_1/c, \ldots, y_{n-1}/c^{n-1})\,(t) \quad (-\infty < t < \infty)\,.$$

Let $\mathscr{W}$ be the vector space of all functions $w(t)$ ($-\infty < t < \infty$) such that $\|w\|_{\mathscr{W}} = \sup |w(t)|\,(1 + |t|^{-n+1})\, e^{-|t|} < \infty$. (The continuous dependence of the vector $T_Z Y$ on the vector Z follows quite simply from the fact that the space of all vectors of the form $T_Z Y$ is finite dimensional and therefore any two norms are equivalent in it. It suffices to take for one of these norms the usual norm "sup" on a nonvoid interval (for which the continuous dependence is well known), for the other the norm $\|\,.\,\|_{\mathscr{W}}$.) Let $\mathscr{M}$ be the set of those Z for which $|z_1| \leqq 1, \ldots, |z_n| \leqq 1$. According to **9** there exists a constant M_n for which $\|T_Z\| \leqq M_n$ ($Z \in \mathscr{M}$).

If the polynomial $p_n z^n + \ldots + p_0 z$ has the roots $z_1, \ldots, z_n$, then evidently $y(t) \equiv T_Z(y(0), \ldots, y^{(n-1)}(0))\,(t)$. Let C be the constant from **10.** Then $Z/C \in \mathscr{M}$ and therefore according to (7) the inequality

$$\begin{aligned}
&\sup |y(t)|\,(1 + |Ct|^{-n+1})\, e^{-|Ct|} = \|y(t/C)\|_{\mathscr{W}} = \\
&= \|T_{Z/C}(y(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)/C^{n-1})\,(t)\|_{\mathscr{W}} \leqq M_n \|(y(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)/C^{n-1})\|_{\mathscr{V}} \leqq \\
&\leqq M_n(|y(0)| + \ldots + |y^{(n-1)}(0)|)
\end{aligned}$$

holds. This is, however, the required inequality for the case $j = 0$. The other cases $j = 1, 2, \ldots$ are already easy consequences of the preceding one.

12. Lemma. *Let the polynomial $p_n z^n + \ldots + p_0$ ($n \geqq 0$, $p_n \neq 0$) have the roots $z_1, \ldots, z_n$ such that*

$$(8) \qquad \operatorname{Re} z_1 \leqq \ldots \leqq \operatorname{Re} z_m \leqq 0 < \operatorname{Re} z_{m+1} \leqq \ldots \leqq \operatorname{Re} z_n$$

for some m ($0 \leqq m \leqq n$). Then for every number $y_0, \ldots, y_{m-1}$ there exists exactly one solution $y(t)$ ($-\infty < t < \infty$) of the differential equation $p_n y^{(n)} + \ldots + p_0 y = 0$

for which $y(0) = y_0, \ldots, y^{(m-1)}(0) = y_{m-1}$ *and such that for every positive* ε *it is* $\lim_{t\to\infty} y(t)\, e^{-\varepsilon t} = 0$.

Proof. Let the curve $\mathscr{C}$ circle the roots $z_1, \ldots, z_n$ in the plane of the complex variable z. It is well-known that the function

$$y(t) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}} \frac{y_0(p_n z^{n-1} + \ldots + p_1) + y_1(p_n z^{n-2} + \ldots + p_2) + \ldots + p_n}{p_n z^n + \ldots + p_0}\, e^{tz}\, dz$$

is the only solution of the equation $p_n y^{(n)} + \ldots + p_0 y = 0$ for which $y(0) = y_0, \ldots$ $\ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$.

The condition with the limit holds if and only if $z_{m+1}, \ldots, z_n$ are regular points of the function after the symbol of integral. It occurs if and only if there are suitable constants $a_{m-1}, \ldots, a_0$, $b_0 = a_{m-1}, b_1, \ldots, b_m$ for which

$$\frac{y_0(p_n z^{n-1} + \ldots + p_1) + \ldots + p_n}{p_n z^n + \ldots + p_0} = \frac{a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_0}{(z - z_1)\ldots(z - z_m)} =$$

$$= \frac{\begin{gathered} b_0(z^{m-1} - \sigma_1' z^{m-2} + \ldots + (-1)^{m-1}\sigma_{m-2}') + b_1(z^{m-2} - \sigma_1' z^{m-3} + \ldots + \\ + (-1)^{m-2}\sigma_{m-1}' + \ldots + b_{m-1}\end{gathered}}{(z - z_1)\ldots(z - z_m)}$$

holds, where we denote $\sigma_1' = z_1 + \ldots + z_m, \ldots, \sigma_m' = z_1 \ldots z_m$. We see that

$$(9) \qquad y(t) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}} \frac{b_0(z^{m-1} + \ldots + \sigma_{m-1}') + \ldots + b_{m-1}}{(z - z_1)\ldots(z - z_m)}\, e^{tz}\, dz \quad (-\infty < t < \infty),$$

at the same time it is clear that

$$(9') \qquad b_0 = y(0) = y_0, \ldots, b_{m-1} = y^{(m-1)}(0) = y_{m-1}.$$

Hence the existence and uniqueness follows.

Remark. From equation (9) it follows that the function $y(t)$ is a solution of the equation

$$(' - z_1)\ldots(' - z_m)\, y = y^{(m)} - \sigma_m' y^{(m-1)} + \ldots + (-1)^m \sigma_m' y = 0\,.$$

13. Lemma. *Under suppositions* **12** *there exists a constant* M_n^m *such that the inequalities* $|y^{(j)}(t)| \leqq M_n^m C^{m-1+j}(1 + |t|^{m-1})(|y(0)| + \ldots + |y^{(m-1)}(0)|)$ $(0 \leqq t < \infty, j = 0, 1, \ldots)$ *hold for the corresponding solutions.*

Proof. Let $\mathscr{V}$ be the vector space of m-tuples $Y = (y_0, \ldots, y_{m-1})$ with the norm $\|Y\|_{\mathscr{V}} = |y_0| + \ldots + |y_{m-1}|$. For every vector $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ such that (8) holds, let $T_Z Y = y$ be the solution of the differential equation $y^{(n)} + \sigma_1 y^{(n-1)} + \ldots + \sigma_n y = 0$ determined by conditions $y(0) = y_0, \ldots, y^{(m-1)}(0) = y_{m-1}$, $\lim_{t\to\infty} y(t)\, e^{-\varepsilon t} = 0$

($\varepsilon > 0$). Let $\mathscr{W}$ be the vector space of the functions $w(t)$ ($0 \leqq t < \infty$) such that $\|w\|_{\mathscr{W}} = \sup |w(t)| (1 + |t|^{-m+1}) < \infty$. Let $\mathscr{M}$ be the set of such vectors $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ that (8) holds, $|z_1| + \ldots + |z_n| \leqq 1$. By (9), (9′) the vector $T_Z Y \in \mathscr{W}$ depends continuously on $Z \in \mathscr{M}$. The reasoning is then analogous to that of **11**.

14. Lemma. *Let $F(t)$ ($0 \leqq t < \infty$) be a continuous function such that $\lim_{t\to\infty} F(t) \,.\, t^{-N'} = 0$ for a suitable positive N'. There exists at least one function $y(t)$ ($0 \leqq t < \infty$) for which*

(10) $\quad p_n y^{(n)} + \ldots + p_0 y = F\,, \quad \lim_{t\to\infty} y(t)\, t^{-N} = 0 \quad$ for a suitable positive N.

Proof. Let us take the function $\tilde{y}(t)$ ($-\infty < t < \infty$) for which

$$p_n \tilde{y}^{(n)} + \ldots + p_0 \tilde{y} = 0\,, \quad \tilde{y}(0) = \ldots = \tilde{y}^{(n-2)}(0) = 0\,, \quad \tilde{y}^{(n-1)}(0) = 1\,.$$

It is possible to write $\tilde{y} = \tilde{y}_+ + \tilde{y}_-$ where $p_n \tilde{y}_\pm^{(n)} + \ldots + p_0 \tilde{y}_\pm = 0$ holds again and at the same time $\tilde{y}_+(t)$ ($-\infty < t < \infty$) is a function such that $\lim_{t\to\infty} \tilde{y}_+(t)\, t^{-n} = 0$ and $\tilde{y}_-(t)$ ($-\infty < t \leqq 0$) is a bounded function.

The function

(11) $$y(t) = \int_0^t \tilde{y}_+(t-\tau)\, F(\tau)\, d\tau - \int_t^\infty \tilde{y}_-(t-\tau)\, F(\tau)\, d\tau \quad (0 \leqq t < \infty)$$

is sought. It follows from the obvious fact that there is

$$y(t) \equiv \int_0^t y(t-\tau)\, F(\tau)\, d\tau - \int_0^\infty y_-(t-\tau)\, F(\tau)\, d\tau$$

where the first summand is a solution of the non-homogeneous equation and the second is a solution of the corresponding homogeneous one.

15. Lemma. *Under the suppositions* **12**, **14** *there exists exactly one function $y(t)$ ($0 \leqq t < \infty$) such that* (10) *holds*, $y(0) = y_0, \ldots, y^{(m-1)}(0) = y_{m-1}$.

This is an easy consequence of **13**, **14**.

16. Lemma. *Let* (5) *hold. There exists a function $y(x, t)$ such that for every N ($N = 0, 1, \ldots$) there exist polynomials P, Q ($Q(x) \not\equiv 0$) for which* $(d^j/dt^j)\, Q\, u(t) = y^{(j)}(\cdot, t) = (d^j/dt^j)\, y(\cdot, t) \in PL$ ($0 \leqq t < \infty$, $j = 0, 1, \ldots, N$).

Proof. It is convenient to choose the number N sufficiently large. Then let $N > n$. Further choose the constant N'. By **5** there exist polynomials P, Q ($Q(x) \not\equiv 0$) such that $(d^j/dt^j)\, Q\, u(t) \in PL$ ($0 \leqq t \leqq N'$, $j = 1, \ldots, N$), $Qu(t) \in PL$ ($0 \leqq t < \infty$). Let us denote $Q\, u(t) = v(\cdot, t)$ and let $y(x, t)$ be the function defined by the conditions

$y(x, 0) \equiv v(x, 0), \ldots, y^{(n-1)} x, 0) \equiv (d^{n-1}/dt^{n-1})\, v(x, 0),$

(12) $$p_n(x)\, y^{(n)} + \ldots + p_0(x)\, y \equiv 0\,.$$

We suppose that x is a parameter, $^{(j)}$ is the derivative according to the variable t. (The function y is determined only for almost all values of the parameter x but the sets of measure 0 are not essential.)

First we shall prove that $y^{(j)}(\cdot, t) = (d^j/dt^j)\, v(\cdot, t)$ $(0 \leqq t \leqq N', j = 0)$.

Let Ω be an arbitrary compact interval where

$$(1 + |p_{n-1}(x)/p_n(x)| + \ldots + |p_0(x)/p_n(x)|) = C(x) \leqq \text{constant}\,.$$

From the inequalities in **13** and from the Lebesgue theorem on majorant convergence it follows that for an arbitrary polynomial p,

$$\int_\Omega p y^{(j)}\, dx = \left(\int_\Omega p y\, dx\right)^{(j)} \quad (-\infty < t < \infty, j = 0, 1, \ldots, n)\,.$$

Therefore

$$\left(\int_\Omega p_n y\, dx\right)^{(n)} + \ldots + \int_\Omega p_0 y\, dx \equiv 0 \quad (-\infty < t < \infty)\,,$$

$$\left(\int_\Omega p y\, dx\right)^{(j)} = \int_\Omega p \frac{d^j}{dt^j} v\, dx = \left(\int_\Omega p v\, dx\right)^{(j)} \quad (t = 0, j = 0, \ldots, n-1)\,.$$

From these equations together with the equation (5) multiplied by the polynomial Q it follows that the function $\Delta = y - v$ satisfies the relations

$$\left(\int_\Omega p_n \Delta\, dx\right)^{(n)} + \ldots + \int_\Omega p_0 \Delta\, dx = 0 \quad (0 \leqq t \leqq N')\,,$$

$$\left(\int_\Omega p \Delta\, dx\right)^{(j)} = 0 \quad (t = 0, j = 0, \ldots, n-1)\,.$$

Integration yields

$$\int_\Omega p_n(x)\, \Delta(x, t)\, dx + \int_0^t \int_\Omega p_{n-1}(x)\, \Delta(x, t_1)\, dx\, dt_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int_0^t \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-2}} \int_\Omega p_0(x)\, \Delta(x, t_{n-1})\, dx\, dt_{n-1} \ldots dt_1 \equiv 0 \quad (0 \leqq t \leqq N')\,.$$

This identity holds if we take instead of the interval Ω its arbitrary subset $\Theta \subset \Omega$. Let us fix t and let Θ be a subset such that the functions Re $p_n\Delta$, Im $p_n\Delta$ of the variable x do not change the sign on it. Then

$$\int_\Theta |p_n\Delta|\,\mathrm{d}x \leqq \operatorname{Re}\int_\Theta |p_n\Delta|\,\mathrm{d}x + \operatorname{Im}\int_\Theta |p_n\Delta|\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\operatorname{Re}\int_\Theta p_n\Delta\,\mathrm{d}x\right| + \left|\operatorname{Im}\int_\Theta p_n\Delta\,\mathrm{d}x\right| \leqq 2\left|\int_\Theta p_n\Delta\,\mathrm{d}x\right| \leqq$$

$$\leqq 2\left(\int_0^t\int_\Theta |p_{n-1}\Delta|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1 + \ldots + \int_0^t\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{n-2}}\int_\Omega |p_0\Delta|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_{n-1}\ldots\mathrm{d}t_1\right).$$

Since the interval Ω can be expressed as a union of four subsets Θ of the above mentioned type, it must be

$$\int_\Omega |p_n\Delta|\,\mathrm{d}x \leqq 2\left(\int_0^t\int_\Omega |p_{n-1}\Delta|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1 + \ldots + \int_0^t\ldots\int_\Omega |p_0\Delta|\,\mathrm{d}x\ldots\mathrm{d}t_1 \leqq\right.$$

$$\left.\leqq 2\,\text{const.}\left(\int_0^t\int_\Omega |p_n\Delta|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1 + \ldots + \int_0^t\ldots\int_\Omega |p_n\Delta|\,\mathrm{d}x\ldots\mathrm{d}t_1\right).$$

This inequality holds for every t $(0 \leqq t \leqq N')$ and hence it easily follows that $\int_\Omega |p_n\Delta|\,\mathrm{d}x = 0$, therefore $p_n(x)\,\Delta(x, t) \equiv 0$ $(x \in \Omega)$ for every t $(0 \leqq t \leqq N')$ and for almost all x and even, with regard to the arbitrariness of the interval Ω and the constant N', $p_n\Delta \equiv 0$ almost everywhere.

Thus we proved that $y = v + \Delta \equiv v$, therefore

$$y^{(j)} = \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\,v \quad (0 \leqq t < \infty, j = 0).$$

The case when $j = 1, 2, \ldots$ can be investigated in an analogous way by means of relations (5), (12) derived according to t. At the same time it is necessary to consider that our functions y, v fulfil $y^{(j)}(x, 0) \equiv (\mathrm{d}^j/\mathrm{d}t^j)\,v(x, 0)$ $(j = 0, 1, \ldots)$.

17. Theorem. *Let* (5) *hold. Then for the corresponding component (suitably modified on a set of measure* 0) (6) *holds.*

Proof. In **16** choose $N > n$. From the equation $(\mathrm{d}^j/\mathrm{d}t^j)\,Q\,u(t) = y^{(j)}(\cdot, t)$ $(j = 0)$ it follows that we can choose $U(x, t) = y(x, t)/Q$. (The roots of the polynomial Q are inessential.) From (12) it follows that $p_n y^{(n)}/Q + \ldots + p_0 y/Q \equiv 0$, which is the first one of the equations (6).

According to **5**, (5) the polynomials P, Q $(Q(x) \not\equiv 0)$ exist such that $\lim_{t\to\infty} \|Q\,u(t)\,t^{-N}\|_P = 0$ for a suitable N. We can suppose P, Q, N to be the same as the corresponding items from **16**. Then $Q\,u(t) = y(\cdot, t)$, therefore $\lim_{t\to\infty} \|y(x, t)\,t^{-N}\|_P = 0$. By the Riesz theorem it is possible to choose from every sequence $t_1, t_2, \ldots, \to\infty$ a subsequence $t_{n_1}, t_{n_2}, \ldots, \to\infty$ such that for almost all x, $\lim_{t\to\infty} y(x, t_{n_j})\, t_{n_j}^{-N} \equiv 0$. The function y is, however, a solution of the differential equation (12), therefore it must be, moreover, $\lim_{t\to\infty} y(x, t)\, t^{-N} \equiv 0$ for almost all x. The sets of measure 0 are, however, inessential.

18. Analysis of equations (5). Let (5) hold. Let Q be a polynomial from **16**. If a, α, φ have an analogous meaning as in **2**, then the relation corresponding to (1):

$$\langle u(t), \varphi\rangle = \langle Q\, u(t), \psi\rangle + \sum_{j=0}^{s-1} \frac{\varphi^{(j)}(a)}{j!}\, u^j(t) \tag{13}$$

holds where $\psi \in C_0^\infty$, $u^j(t) = \langle u(t), \alpha(x - a)^j\rangle$. The function $Q\, u(t) = y(\cdot, t)$ satisfies (12) where instead of derivatives ${}^{(j)}$ we can write $\mathrm{d}^j/\mathrm{d}t^j$ therefore according to the rules from **4** we have

$$0 = \left\langle p_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\, u(t) + \ldots + p_0\, u(t), \varphi \right\rangle = \left\langle p_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\, y(\cdot, t) + \ldots + p_0\, y(\cdot, t), \varphi \right\rangle +$$

$$+ \sum_{j=0}^{s-1} \frac{\varphi^j(a)}{j!} \left(p_n\, u^{j,(n)}(t) + \ldots + p_0\, u^j(t)\right) = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{\varphi^j(a)}{j!} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l} p_k^l\, u^{j+l,(k)}(t)\,.$$

where we denote

$$p_k(x) = \sum_l p_k^l (x - a)^l \quad (k = 0, \ldots, n)\,.$$

Since the function φ is in general arbitrary, the equation

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_l p_k^l\, u^{j+l,(k)}(t) \equiv 0 \quad (j = s - 1, \ldots, 0)\,. \tag{14}$$

must hold.

It is also evident that

(15) there exists N $(N \geqq 0)$ for which $\lim_{t\to\infty} u^j(t)\, t^{-N} = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots)\,.$

19. Definition. Let Ω_∞ be the set of those numbers $x = a$ for which $p_n(a) = \ldots = p_0(a) = 0$. For $x \notin \Omega_\infty$ let $z_1(x), \ldots, z_r(x)$ $(r = r(x),\ 0 \leqq r(x) \leqq n)$ be all roots of the polynomial $p_n(x)\, z^n + \ldots + p_0(x)$ with the corresponding multiplicity. For the sake of definiteness, let $\operatorname{Re} z_1(x) \leqq \ldots \leqq \operatorname{Re} z_m(x) \leqq 0 < \operatorname{Re} z_{m+1}(x) \leqq \ldots \leqq \operatorname{Re} z_r(x)$ $(m = m(x),\ 0 \leqq m(x) \leqq r(x))$. Denote by Ω_c the set of those numbers x for which $m(x) = c$. Further, denote $\Omega^0 = \Omega_0 \cup \ldots \cup \Omega_n$, $\Omega^1 = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_n, \ldots, \Omega^n = \Omega_n$.

20. Solution of equations (6). Choose the functions $G_0(x), \ldots, G_{n-1}(x)$ $(-\infty < x < \infty)$. According to **15** the function U satisfying the relations (6) is uniquely determined by the conditions

$$(16) \qquad U(x, 0) \equiv G_0(x)\,(x \in \Omega^1), \ldots, U^{(n-1)}(x, 0) \equiv G_{n-1}(x) \quad (x \in \Omega^n)$$

From the inequalities in **13** it follows that if the functions $G_0, \ldots, G_{n-1}$ are components of some distributions, then for every t $(0 \leqq t < \infty)$ this function $U(x, t)$ is also a component of a distribution of the space $\mathscr{K}$. From the same inequalities it is clear that there exist polynomials P, Q $(Q(x) \not\equiv 0)$ for which

$$(17) \qquad Q\, U^{(j)}(\cdot, t) \in PL \quad (0 \leqq t < \infty, j = 0, \ldots, n)$$

$$(18) \qquad \lim_{t \to \infty} U^{(j)}(x, t)\, t^{-n} = 0 \quad (j = 0, \ldots, n)\,.$$

Now the question is whether the distribution $u(t)$ whose component is $U(x, t)$ can be chosen so that (5) may hold. It sufficies if we solve this problem locally. Let us choose the point $x = a$ and suppose that (1), (1)' hold or, in more detail, (13). At the same time let us choose the polynomial Q so that (17) holds for a suitable polynomial P.

21. Form of equations (14), (15). The functions $u^s, u^{s+1}, \ldots$ are defined by (3). It is important to realize that the corresponding relations (15) hold not only for $j = s, s + 1, \ldots$, but according to (18) it is, moreover,

$$(19) \qquad \lim_{t \to \infty} u^{s,(j)}(t)\, t^{-n} = \lim_{t \to \infty} u^{s+1,(j)}(t)\, t^{-n} = \ldots = 0 \quad (j = 0, \ldots, n)\,.$$

Now, we have to define the functions $u^{s-1}, \ldots, u^0$. They satisfy the system of equations (14):

$$(14) \qquad \begin{aligned} & p_n^0 u^{s-1,(n)} + \ldots + p_0^0 u^{s-1} = F_{s-1}\,, \\ & p_n^0 u^{s-2,(n)} + \ldots + p_0^0 u^{s-2} + \\ & \qquad + p_n^1 u^{s-1,(n)} + \ldots + p_0^1 u^{s-1,n} = F_{s-2}\,, \\ & \ldots \\ & p_n^0 u^{0,(n)} \quad + \ldots + p_0^0 u^0 + \\ & \qquad + p_n^1 u^{1,(n)} \quad + \ldots + p_0^1 u^1 \quad + \ldots = F_0\,. \end{aligned}$$

The functions $F_{s-1} = -p_n^1 u^{s,(n)} - \ldots - p_0^1 u^s - \ldots,$ $F_0 = -p_n^s u^{s,(n)} - \ldots - p_0^s u^s - \ldots$ which occur there are well-known already. Moreover, let us realize that according to (19),

$$(20) \qquad \lim_{t \to \infty} F_j(t)\, t^{-n} = 0 \quad (j = s - 1, \ldots, 0)\,.$$

22. Solution of equations (14), (15) **if** $a \notin \Omega_\infty$. In this case it is not p_j^0 $(=p_j(a)) \equiv 0$ $(j = 0, \ldots, n)$ and from the system (14) the functions $u^{s-1}, \ldots, u^0$ can be successively determined in such a manner that (15) holds. In more detail: Let $a \in \Omega_m$. Then according to (20), (15) these functions are uniquely determined by the numbers $u^j(0), \ldots, u^{j,(m-1)}(0)$ $(j = s-1, \ldots, 0)$ which can be taken arbitrarily.

23. Solution of equations (14), (15) **if** $a \in \Omega_\infty$. Then $p_n^0 = \ldots = p_0^0 = 0$ and the first equation of the system (14) has the form $F_{s-1} = 0$, therefore it is a condition assigned to the functions already known. We prove that it is an identity so that no nontrivial compatibility relations occur.

First of all we shall write the equation (12) in this form:

$$(p_n^1 + p_n^2(x-a) + \ldots)\, y^{(n)} + \ldots + (p_0^1 + p_0^2(x-a) + \ldots)\, y = 0\,.$$

We know that $y(\cdot, t)^{(j)} = (\mathrm{d}^j/\mathrm{d}t^j)\, Q\, u(t)$ where $Q = (x-a)^s Q_1$ $(Q_1(a) \neq 0)$. The identity which is to be proved follows therefore easily in this way:

$$0 = \left\langle (p_n^1 + p_n^2(x-a) + \ldots)\, y^n + \ldots + (p_0^1 + p_0^2(x-a) + \ldots)\, y, \frac{\alpha}{Q_1} \right\rangle =$$

$$= \left\langle p_n^1 y^{(n)} + \ldots + p_0^1 y, \frac{\alpha}{Q_1} \right\rangle + \left\langle p_n^2 y^{(n)} + \ldots + p_0^2 y, \frac{\alpha}{Q_1}(x-a) \right\rangle + \ldots =$$

$$= \langle p_n^1 u^{(n)} + \ldots + p_0^1 u, \alpha(x-a)^s \rangle + \langle p_n^2 u^{(n)} + \ldots + p_0^2 u, \alpha(x-a)^{s+1} \rangle + \ldots =$$

$$= p_n^1 u^{s,(n)} + \ldots + p_0^1 u^s + p_n^2 u^{s+1,(n)} + \ldots + p_0^2 u^{s+1} + \ldots = -F_{s-1}\,.$$

It can be proved quite analogously that if $p_n^1 = \ldots = p_0^1 = 0$ as well, then the second equation of the system (14) has the form $F_{s-2} = 0$ and it is again the identity, etc. Thus we can see that there are no compatibility relations of the system (14) and if the equations with the indices $j = s-1, \ldots, j = s-c$ are identically fulfilled, then only the functions $u^{s-1}, \ldots, u^{s-c}$ occur in this system. For the functions $u^{s-c-1}, \ldots, u^0$ we have only the conditions (15).

24. Summary. An arbitrary distribution $u(t)$ for which (5) holds can be obtained in this manner: Functions $G_0(x), \ldots, G_{n-1}(x)$ are chosen which are components of some distributions from the space $\mathscr{K}$. Then the component $U(x, t)$ of the distribution $u(t)$ is defined by the conditions (6), (16). A polynomial Q $(Q(x) \not\equiv 0)$ is chosen so that (17) holds. In the neighbourhood of the point $x = a$ the sought distribution is defined by the equations of the type (1), (1)′, (13), where the functions $u^j(t)$ $(j = s-1, \ldots, 0)$, hitherto unknown, occur. They can be computed from the equations (14), (15) where the functions $F_{s-1}, \ldots, F_0$ are already uniquely defined by the known component U. In more detail: Let $a \notin \Omega_\infty$ and for the sake of definiteness, $a \in \Omega_m$. Then the functions $u^{s-1}, \ldots, u^0$ are uniquely determined according to **15** if we choose arbitrarily the numbers $u^j(0), \ldots, u^{j,(m-1)}(0)$ $(j = s-1, \ldots, 0)$.

On the contrary, let $a \in \Omega_\infty$ and let c be the largest number such that $p_j^0 = \ldots = p_j^{c-1} \equiv 0$ $(j = 0, \ldots, n)$. From the equations (14), (15) only the functions $u^{s-1}(t), \ldots, u^{s-c}(t)$ can be computed (initial conditions at the point $t = 0$ must be still chosen) but the functions $u^{s-c-1}(t), \ldots, u^0(t)$ are arbitrary in the main.

Corollary. *If the component $U(x, t)$ of a distribution satisfies the conditions* (6), *then the corresponding distribution $u(t)$ can be chosen in such a manner that* (5) *holds.*

Corollary. *If* (5) *holds, then for every N $(N = 0, 1, \ldots)$ there exist polynomials P, Q $(Q(x) \not\equiv 0)$ such that $Q(\mathrm{d}^j/\mathrm{d}t^j)\, u(t) \in PL$ $(j = 0, \ldots, N;\ 0 \leqq t < \infty)$. This derivative is to be understood as the derivative in the space PL.*

In **2** we have already noted that the functions $u^j(t)$ have no invariant significance by themselves but they are very closely connected with the restriction of the form $\langle u, \varphi \rangle$ to certain invariantly defined subspaces of the space C_0^∞. It is advantageous to understand our results exactly in this manner which is, however, a little clumsy and therefore we shall not use it explicitly.

25. Definition. A point is called an *ordinary point of the distribution u*, if it has such a neighbourhood that in this neighbourhood the distribution u is equal to its component U. We say that the distribution $u \in \mathcal{K}$ (with the component U) is equal to zero on a set Ω if $U(x) \equiv 0$ $(x \in \Omega)$ and if all points of the set Ω are ordinary points of the distribution u. If Ω is an open set, then this definition agrees with the usual one.

26. Theorem. *Let Ω_∞ be an empty set. Let us denote by Ω the union of boundaries of all sets $\Omega_0, \ldots, \Omega_n$. Let $p_n(x) \neq 0$ $(x \in \Omega)$, let $g_0, \ldots, g_{n-1}$ be distributions of the space $\mathcal{K}$ such that all points of the set Ω are their ordinary points. Then there exists exactly one distribution $u(t)$ having these properties: It satisfies the equation* (5), *every point $x \in \Omega$ is an ordinary point of the distribution $u(t)$ $(0 \leqq t < \infty)$, every distribution $(\mathrm{d}^k/\mathrm{d}t^k)\, u(0) - g_k$ $(k = 0, \ldots, n - 1)$ is equal to zero on the set Ω^{k+1}.*

Proof. Let us choose the point $x = 0$ and suppose that in its neighbourhood the relations (1)′ hold:

$$\langle g_k, \varphi \rangle = \int G_k Q \psi \,\mathrm{d}x + \sum_{j=0}^{s-1} \frac{\varphi^{(j)}(a)}{j!} g_k^j \quad (k = 0, \ldots, n - 1)\,.$$

The component U is defined by the conditions (6), (16). In the neighbourhood of the point $a \in \Omega$, according to the inequalities 13, the function $U(\cdot, t)$ $(0 \leqq t < \infty)$ is integrable and therefore we can take $s = s(a) = 0$, $u(t) \equiv U(\cdot, t)$. Let $a \notin \Omega$ and for the sake of definiteness let $a \in \Omega_m$. Then $a \in \Omega^1 \cup \ldots \cup \Omega^m$ and then the equations

$$u^{j,(k)}(0) = g_k^j \quad (k = 0, \ldots, m - 1; j = 0, \ldots, s - 1)$$

must hold.

It is clear that the functions $u^0(t), \ldots, u^{s-1}(t)$ and thus also the distributions $u(t)$ are uniquely determined by these conditions and equations (14). At the same time it is necessary to observe that the functions $F_{s-1}, \ldots, F_0$ can be computed by means of the relations (3).

27. Example. Let us deal with the equation $-iD(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\,\hat{u} + c\hat{u} = 0$, where $n = 1$, $p_1(x) = x$, $p_0(x) = c$. $x(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\,u + cu = 0$ holds for the function u, $xU' + cU = 0$ holds for the component U and the properties of these equations depend on the behaviour of the polynomial $xz + c$.

Let $c = 0$. Then $0 \in \Omega_\infty$ and for $x \neq 0$ we have $x \in \Omega_1 = \Omega^1$, $r(x) = m(x) = 1$. Let us choose the distribution g_0. From the equations (6), (16) it follows $U \equiv G_0$. For the polynomial Q we can take an arbitrary polynomial such that $Qg_0 \in \mathscr{L}$. From the equations (14) it follows that for $a \neq 0$ it is $u_a^j = g_{0,a,\alpha}^j$ and for $a = 0$ we have the solution $u_{\alpha,a}^{s-1} = c_{s-1}, \ldots, u_{a,\alpha}^1 = c_1$, $u_{a,\alpha}^0 = f(t)$. In general

$$u = g_0 + \sum_{j=1}^{s-1} c_{s-1} D^j(\delta/j!) + f(t)\,\delta\,, \quad \hat{u} = \hat{g}_0 + \sum_{j=1}^{s-1} c_{s-1}(i\xi)^j/j! + f(t)\,.$$

Let $c \neq 0$. Then $\Omega_\infty = 0$, for $x \leqq 0$ it is $x \in \Omega_0$, $m(x) = r(x) = 1$ and for $x > 0$ it is $x \in \Omega_1$, $m(x) = r(x) = 1$. Clearly $U(x, t) = f(x)\,e^{-ct/x}$ $(x > 0)$, $U(x, t) \equiv 0$ $(x < 0)$. First let us choose $f(x) \equiv 1$. Then the definition equation of the distribution $u(t)$ can be written globally in the form

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_0^\infty e^{-ct/x}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{a,j} c_a^j(t)\,\varphi^{(j)}(a)$$

where the sum is finite and ranges over $a > 0$, $j = 0, 1, \ldots$. We have

$$\hat{u} = \langle u, e^{i\xi x} \rangle = \int_0^\infty e^{-ct/x - i\xi x}\,\mathrm{d}x + \sum_{a,j} c_a^j(t)\,(-i\xi)^j\,e^{i\xi a}\,;$$

the integral must be understood in the generalized sense and it could be possible to express it by means of Bessel functions. The functions $c_a^j(t)$ must be chosen in such a way that the sum $\sum_{a,j}$ is a solution of the equation $u_{xt} + cu = 0$. From the general theory it follows that the numbers $c_a^j(0)$ can be chosen arbitrarily. Secondly, let us choose $f(x) = 1/(1 - x)$. The definition formula for the distribution $u(t)$ can be written in the form

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_0^\infty e^{-ct/c}(\varphi(x) - \alpha(x)\,\varphi(0))\frac{\mathrm{d}x}{1 - x} + \sum_{a,j} c_a^j(t)\,\varphi^{(j)}(a)$$

(where $\alpha \in C_0^\infty$, $\alpha(0) = 1$) and in the sum the term $c_1^0(t)\,\varphi^{(j)}(1)$ must be given since in our case the corresponding polynomial Q is a multiple of the polynomial $x - 1$. We see that

$$\hat{u} = \int_0^\infty e^{-ct/x}(e^{i\xi x} - \alpha(x))\,\frac{\mathrm{d}x}{1 - x} + \sum_{a,j} c_a^j(t)\,(-i\xi)^j\,e^{i\xi a}\,.$$

The functions $c_a^j(t)$ must be still calculated and $c_1^0(t)$ plays a significant role.

It is clear that it could be possible to choose

$$c_1^0(t) = \int_0^\infty e^{-ct/x}\,\alpha(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{1 - x}\,, \quad c_1^j(t) \equiv 0 \quad (j = 1, 2, \ldots)\,.$$

Literature

[1] *Г. Е. Шилов*, Математический анализ, второй специалный курс, 1966.

[2] *В. Я. Минский*, Эллиптические краевые задачи в полупространстве с условиями излучения. Вестник московского университета, 1971, *5* (34—42).

[3] *В. Я. Минский*, Эллиптические краевые задачи в полупространстве в классе функций степенного роста. Вестник московского университета, 1969, *6* (50—58).

Author's address: 662 95 Brno, Janáčkovo nám. 2a (Přírodovědecká fakulta UJEP).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

SUBDETERMINANTS AND SUBGRAPHS

ANTONÍN VRBA, Praha

(Received July 10, 1972)

1. INTRODUCTION

Given a square matrix A, assign to it the directed valuated graph $G(A)$ in the natural way. If some elements of A are zero then many terms of det A vanish, of course. In this paper, non-zero terms of principal and "almost principal" minors of the matrix A and of matrices obtained by modifying its diagonal are described by means of certain classes of subgraphs of $G(A)$. This theory makes it possible to generate and to enumerate certain subgraphs of a given directed or non-directed graph and yields inequalities concerning minors of matrices of a certain kind. Some generalizations of results of the papers [1], [2] and [3] are given. Another application consists in expressing the solution of the system of linear equations and the coefficients of the characteristic polynomial of a matrix A and of its modifications by means of subgraphs of $G(A)$. These formulae are well-known and frequently used in the field of electrical networks analysis (v. [3]).

2. PRELIMINARIES

Common concepts and terms from matrix and graph theory are used tacitly.

Let n be an integer. Denote $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Let F be a set. Denote by $|F|$ the cardinality of F.

Let $A = (a_{ik})$ be an $n \times n$ matrix and $\emptyset \neq K \subseteq N$, $\emptyset \neq L \subseteq N$. Denote by A_{KL} the submatrix obtained from A by deleting the rows and columns with indices from $N - K$ and $N - L$, respectively. Denote by $G(A)$ the directed valuated graph consisting of vertices $1, 2, \ldots, n$ and edges (i, k) for each $a_{ik} \neq 0$. Each edge (i, k) is assigned the value a_{ik}. By diag $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ denote the $n \times n$ matrix $M = (m_{ik})$ such that $m_{ii} = d_i$ for each $i \in N$ and all the off-diagonal elements m_{ik} are zero. By $D(A)$ denote the matrix diag $(\sum_{k \neq 1} a_{1k}, \sum_{k \neq 2} a_{2k}, \ldots, \sum_{k \neq n} a_{nk})$. By I is denoted the identity matrix of the appropriate order.

Regard now $\det B$ as a polynomial in the n^2 elements b_{ik} of B. Let $r, s \in N$. It is easy to see that

$$(-1)^{r+s} \det B_{N-\{r\},N-\{s\}} = \frac{\partial}{\partial b_{rs}} \det B .$$

Suppose now $r, s \in V \subseteqq N$, $r \neq s$. Put

$$m(V, r, s) = r + s + \left|\{j \in N - V \mid r < j < s\}\right| \quad \text{for} \quad r < s ,$$
$$m(V, r, s) = m(V, s, r) \quad \text{for} \quad s < r .$$

It is easy to see that

$$\text{(2.1)} \qquad \det (B - I) = (-1)^n + \sum_{\emptyset \neq W \subseteq N} (-1)^{n-|W|} \det B_{WW} ,$$

and more generally

$$\text{(2.2)} \qquad \det (B - I)_{VV} = (-1)^{|V|} + \sum_{\emptyset \neq W \subseteq V} (-1)^{|V|-|W|} \det B_{WW} .$$

Differentiation of (2.2) with respect to b_{rs} yields

(2.3)
$$(-1)^{m(V,r,s)} \det (B - I)_{V-\{r\},V-\{s\}} = \sum_{r,s \in W \subseteq V} (-1)^{|V|+|W|+m(W,r,s)} \det B_{W-\{r\},W-\{s\}} .$$

Let G be a directed graph of vertices $1, 2, \ldots, n$ and $V \subseteqq N$. By G_V denote the subgraph of G the vertex set of which is V and the edges of which are all the edges of G connecting two vertices from V. By $C(G)$ (resp. $D(G)$) denote the class of all the spanning subgraphs (resp. of all the subgraphs) of G such that each component of them is a cycle (in other words, a directed circuit). Let, $j, k \in N$, $j \neq k$. By $P_{jk}(G)$ (resp. $Q_{jk}(G)$) denote the class of all the spanning subgraphs (resp. of all the subgraphs) of G such that one component of each of them is a path from j to k, the other components being cycles. Evidently, from each vertex and into each vertex of a subgraph from $C(G)$ or $D(G)$ leads exactly one edge. The same is true for all vertices of subgraphs from $P_{jk}(G)$ and $Q_{jk}(G)$ with the exception of j and k. By adding the edge (k, j) (provided that it is contained in G) to a subgraph from $P_{jk}(G)$ (resp. $Q_{jk}(G)$) a subgraph from $C(G)$ (resp. $D(G)$) is obtained. The empty subgraph (both the vertex and the edge sets are empty) belongs to $D(G)$. A root of a graph is a vertex from which no edge leads. By $L(G)$ denote the class of all the spanning subgraphs of G such that each component of them is either a tree with exactly one root or a graph obtained from a tree with exactly one root r by adding the edge (r, r). Intuitively, each edge of a component of a subgraph from $L(G)$ is directed "towards" the root or the loop. Let $K \subseteq N$. By $L_K(G)$ (resp. $L_{(K)}(G)$) denote the subclass of $L(G)$ consisting of all the subgraphs such that the root set of each of them is K (resp. contains K). In this notation, $L(G) = L_{(\emptyset)}(G)$. Let $r, s \in N$. By $L_K^{rs}(G)$ (resp. $L_{(K)}^{rs}(G)$) denote the subclass of $L_K(G)$ (resp. $L_{(K)}(G)$) consisting of all the subgraphs such that each of them contains the vertices r, s in the same component.

Let H be a subgraph of the graph $G(A)$ introduced above. Denote by $\pi(H)$, $\varrho(H)$ and $\sigma(H)$ the product of edge values, the number of components and the number of roots, respectively, of H. Let $K(G(A))$ be a class of subgraphs of $G(A)$. Denote

$$\Phi(K(G(A))) = \sum_{H \in K(G(A))} (-1)^{n+\varrho(H)+\sigma(H)} \pi(H),$$

n being the number of vertices of $G(A)$.

I. EXPANSIONS OF MINORS

Throughout this chapter, assume that $A = (a_{ik})$ is an $n \times n$ matrix over an integral domain, and that $\emptyset \neq V \subseteqq N$. Wherever the symbols R, S, r and s appear, it is assumed that $r, s \in V \subseteqq N$, $r \neq s$ and the following notation is used: $R = V - \{r\}$, $S = V - \{s\}$, $m(R, S) = m(V, r, s)$ (the function on the right side was introduced above).

3. A

(3.1) $$\det A = \Phi(C(G(A))).$$

Proof. Assign to each non-zero term $a_{1i_1}a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$ of $\det A$ a subgraph H consisting of edges $(1, i_1), (2, i_2), \dots, (n, i_n)$ of the graph $G(A)$. This is one-to-one correspondence between non-zero terms of $\det A$ and subgraphs from $C(G(A))$. Moreover,

$$\operatorname{sgn}\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = (-1)^{n-\varrho(H)}.$$

Consequently,

$$\det A = \sum_{H \in C(G(A))} (-1)^{n-\varrho(H)} \pi(H) = \Phi(C(G(A))).$$

(3.2) $$\det A_{VV} = \Phi(C(G_V(A))).$$

Proof. Observe that $G_V(A) = G(A_{VV})$ and apply (3.1).

(3.3) $$(-1)^{m(R,S)} \det A_{RS} = -\Phi(P_{sr}(G_V(A))).$$

Proof. Differentiate (3.2) with respect to a_{rs}.

4. A—I

(4.1) $$\det(A - I) = \Phi(D(G(A))) .$$

Proof. Substitute (3.2) into (2.1). The term $(-1)^n$ corresponds to the empty subgraph.

(4.2) $$\det (A - I)_{VV} = \Phi(D(G_V(A))) .$$

Proof. Observe that $(A - I)_{VV} = A_{VV} - I$ and apply (4.1).

(4.3) $$(-1)^{m(R,S)} \det(A - I)_{RS} = -\Phi(Q_{sr}(G_V(A))) .$$

Proof. Differentiate (4.2) with respect to a_{rs}.

5. A—D(A)

(5.1) $$\det(A - D(A)) = \Phi(L_\emptyset(G(A))) .$$

Proof. If all the diagonal elements of A are zero then $L_\emptyset(G(A)) = \emptyset$ and so $\Phi(L_\emptyset(G(A))) = 0$. Further, the matrix $A - D(A)$ is singular since all its row sums are zero. Thus (5.1) is true in this case.

Suppose now that there exists an $w \in N$ such that $a_{ww} \neq 0$. If $n = 1$ or if A is the zero matrix then (5.1) is true. Suppose than $n > 1$ and that (5.1) is true for each square matrix of order less than n and for each $n \times n$ matrix the number of non-zero elements of which is less than that of A.

Suppose first that $a_{wz} = 0$ for each $z \in N - \{w\}$. This implies

$$\det(A - D(A)) = a_{ww} \det(A - D(A))_{N-\{w\},N-\{w\}} = a_{ww} \det(B - D(B))$$

where

$$B = A_{N-\{w\},N-\{w\}} - \operatorname{diag}(a_{1w}, a_{2w}, \ldots, a_{nw})_{N-\{w\},N-\{w\}} .$$

By the induction hypothesis,

$$\det(B - D(B)) = \Phi(L_\emptyset(G(B))) .$$

It is easy to see that

$$\Phi(L_\emptyset(G(B))) = \Phi(L_\emptyset(G_{N-\{w\}}(A))) - \Phi(L_{\{w\}}(G(A))) .$$

Consequently,

$$\det(A - D(A)) = a_{ww}\, \Phi(L_\emptyset(G_{N-\{w\}}(A))) - a_{ww}\, \Phi(L_{\{w\}}(G(A))) = \Phi(L_\emptyset(G(A))) .$$

It remains to consider the case that $a_{wz} \neq 0$ for some $z \in N - \{w\}$. Denote by A' (resp. A'') the matrix obtained from A by replacing the element a_{ww} (resp. the elements a_{wz} for each $z \in N - \{w\}$) by zero. By the induction hypothesis,

$$\det(A' - D(A')) = \Phi(L_\emptyset(G(A'))),$$
$$\det(A'' - D(A'')) = \Phi(L_\emptyset(G(A''))).$$

It is easy to see that

$$L_\emptyset(G(A)) = L_\emptyset(G(A')) \cup L_\emptyset(G(A'')),$$

the sets on the right side being disjoint. Hence

$$\det(A - D(A)) = \det(A' - D(A')) + \det(A'' - D(A'')) = \Phi(L_\emptyset(G(A)))$$

which completes the proof.

(5.2) $$\det(A - D(A))_{VV} = (-1)^{n-|V|}\, \Phi(L_{N-V}(G(A))).$$

Proof. Denote by $C = (c_{ik})$ the $n \times n$ matrix such that $C_{VN} = A_{VN}$ and $c_{ik} = \delta_{ik}$ for each $i \in N - V$, $k \in N$. According to (5.1),

$$\det(A - D(A))_{VV} = \det(C - D(C)) = \Phi(L_\emptyset(G(C))).$$

It is easy to see that

$$L_\emptyset(G(C)) = L_{N-V}(G(A)).$$

(5.3) $$(-1)^{m(R,S)} \det(A - D(A))_{RS} = (-1)^{n-|R|}\, \Phi(L^{rs}_{N-R}(G(A))).$$

Proof. Denote by $C = (c_{ik})$ the $n \times n$ matrix such that $C_{N-\{r\},N} = A_{N-\{r\},N}$, $c_{rr} = c_{rs} = 1$ and $c_{rw} = 0$ for each $w \in N - \{r, s\}$. According to (5.2),

$$(-1)^{m(R,S)} \det(A - D(A))_{RS} = \det(C - D(C))_{VV} = (-1)^{n-|V|}\, \Phi(L_{N-V}(G(C))).$$

Denote by $L^{r/s}_{N-V}(G(C))$, $L^{r\to s}_{N-V}(G(C))$ and $L^{s\to r}_{N-V}(G(C))$ the subclass of $L_{N-V}(G(C))$ consisting of all the subgraphs such that none of them contains a path between r and s, each of them contains a path from r to s and each of them contains a path from s to r, respectively. It is easy to see that

$$L_{N-V}(G(C)) = L^{r/s}_{N-V}(G(C)) + L^{r\to s}_{N-V}(G(C)) + L^{s\to r}_{N-V}(G(C)),$$

the sets on the rigth side being disjoint, and

$$\Phi(L^{r/s}_{N-V}(G(C))) = -\Phi(L^{r/s}_{N-R}(G(A))),$$
$$\Phi(L^{r\to s}_{N-V}(G(C))) = \Phi(L^{r/s}_{N-R}(G(A))),$$
$$\Phi(L^{s\to r}_{N-V}(G(C))) = -\Phi(L^{rs}_{N-R}(G(A))).$$

Consequently,

$$(-1)^{n-|V|}\, \Phi(L_{N-V}(G(C))) = (-1)^{n-|R|}\, \Phi(L^{rs}_{N-R}(G(A))).$$

(6.1) $$\det(A - D(A) - I) = \Phi(L(G(A))).$$

Proof. Set $B = A - D(A)$ and substitute (5.2) into (2.1). The term $(-1)^n$ corresponds to the subgraph of n roots, i.e. to the subgraph consisting of n isolated vertices.

(6.2) $$\det(A - D(A) - I)_{VV} = (-1)^{n-|V|}\,\Phi(L_{(N-V)}(G(A)))\,.$$

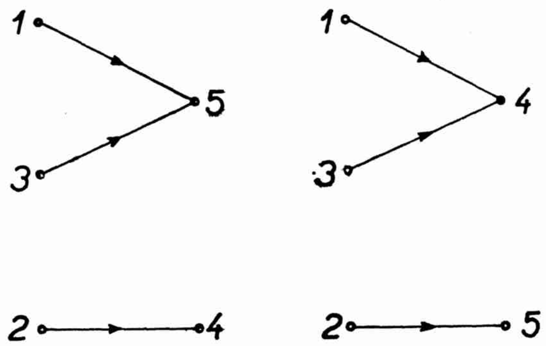
Proof. Set $B = A - D(A)$ and substitute (5.2) into (2.2).

(6.3) $$(-1)^{m(R,S)}\det(A - D(A) - I)_{RS} = (-1)^{n-|R|}\,\Phi(L^{rs}_{(N-R)}(G(A)))\,.$$

Proof. Set $B = A - D(A)$ and substitute (5.3) into (2.3).

* * *

Principal minors M_{VV} and "almost principal" ones M_{RS} of certain modifications M of a matrix A were dealt with in this chapter. The question about the other minors suggests itself. Indeed, it is not difficult to derive analogous expansions of them using analogous methods. However, these expansions lose the combinatorial character, i.e. the signs of their terms depend not merely on the appearance of corresponding subgraphs but also on the order of its vertices. For example, in the case $n = 5$, $R = \{1, 2, 3\}$, $S = \{3, 4, 5\}$, the terms $a_{15}a_{24}a_{35}$ and $a_{14}a_{34}a_{25}$ of $\det(A - D(A))_{RS}$, which correspond to the subgraphs



of $G(A)$, have opposite signs.

II. APPLICATIONS

In this chapter, some applications of the results of the Chapter I are shown.

7. SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

Let A be an $n \times n$ matrix and b be an n-dimensional column vector. Consider the system of linear algebraic equations $Ax = b$.

It holds

$$x_k \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} b_i \det A_{N-\{i\},N-\{k\}}$$

for each $k \in N$. According to (3.3) and (3.2),

$$x_k \det A = -\sum_{i \neq k} b_i \, \Phi(P_{ki}(G(A))) + b_k \, \Phi(C(G_{N-\{k\}}(A))) .$$

Put

$$B = \begin{pmatrix} A & b \\ o & 0 \end{pmatrix}$$

where o is the n-dimensional zero row vector. It is easy to rewrite the last expansion into the form

$$x_k \det A = \Phi(P_{k,n+1}(G(B))) ,$$

the expansion of $\det A$ being given by (3.1).

Analogously,

$$x_k \det (A - I) = \Phi(Q_{k,n+1}(G(B))) ,$$

$$x_k \det (A - D(A)) = \Phi(L^{k,n+1}_{\{n+1\}}(G(B)))$$

and

$$x_k \det (A - D(A) - I) = \Phi(L^{k,n+1}_{\{n+1\}}(G(B)))$$

for each $k \in N$.

Such a formulae are frequently used in electrical engineering. They make it possible to read the solution of certain systems of linear equations which arise in network analysis immediately from the network diagram.

8. COEFFICIENTS OF CHARACTERISTIC POLYNOMIALS

Let A be a $n \times n$ matrix. The following expression of the coefficients of its characteristic polynomial

$$\det (A - xI) = \sum_{t=0}^{n} a_t x^{n-t}$$

is well known:

$$a_t = (-1)^{n-t} \sum_{T \subseteq N \; T = t} \det A_{TT} \quad \text{fro each} \quad t \in N\,,$$

$$a_0 = (-1)^n\,.$$

According to (3.2), for each $t \in N$,

$$(8.1) \qquad a_t = (-1)^{n-t} \sum_{T \subseteq N \; |T| = t} \Phi(C(G_T(A))) = \Phi(D_t(G(A)))$$

where by $D_t\,(G(A)))$ the subclass of $D(G(A))$ consisting of all the subgraphs of exactly t vertices is denoted.

Further, according to (5.2), it holds for the coefficients of the characteristic polynomial

$$\det (A - D(A) - xI) = \sum_{t=0}^{n} c_t x^{n-t}$$

of the matrix $A - D(A)$, for each $t \in N$,

$$(8.2) \qquad c_t = (-1)^{n-t} \sum_{T \subseteq N \; |T| = t} (-1)^{n-t}\, \Phi(L_{N-T}(G(A))) = \Phi({}_{n-t}L(G(A)))$$

where by ${}_zL(G(A)))$ the subclass of $L(G(A))$ consisting of all the subgraphs of exactly z roots is denoted.

Consider now the characteristic polynomial

$$\det (A - I - xI) = \sum_{t=0}^{n} b_t x^{n-t}$$

of the matrix $A - I$. According to (2.2), for each $t \in N$,

$$b_t = (-1)^{n-t} \sum_{T \subseteq N \; |T| = t} \det (A - I)_{TT} = (-1)^{n-t} \sum_{T \subseteq N |T| = t} [(-1)^t +$$

$$+ \sum_{\emptyset \neq W \subseteq T} (-1)^{t-|W|} \det A_{WW}] =$$

$$= (-1)^n \binom{n}{t} + \sum_{w=1}^{t} (-1)^{n-w} \binom{n-w}{n-t} \sum_{W \subseteq N \; |W| = w} \det A_{ww} = \sum_{w=0}^{t} \binom{n-w}{n-t} a_w\,.$$

Thus, according to (8.1),

$$(8.3) \qquad b_t = \sum_{w=0}^{t} \binom{n-w}{n-t} \Phi(D_w(G(A)))$$

for each $t \in N$.

Analogously, it works out for the coefficients of the characteristic polynomial

$$\det (A - D(A) - I - xI) = \sum_{t=0}^{n} d_t x^{n-t}$$

of the matrix $A - D(A) - I$, according to (8.2),

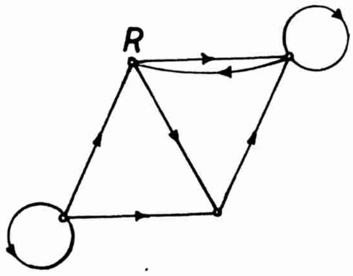
$$d_t^* = \sum_{w=0}^{t} \binom{n-w}{n-t} c_w = \sum_{w=0}^{t} \binom{n-w}{n-t} \Phi(_{n-t}L(G(A)))$$

for each $t \in N$.

9. GENERATION OF SUBGRAPHS

Let G be a finite directed graph. Observe that all its subgraphs of any class defined in the Preliminaries can be constructed in the following way. Order the vertices of G and assign to each edge (i, k) of G a variable x_{ik}. Further, construct the matrix X such that $G = G(X)$. Then the subgraphs of such a class correspond with the terms of the appropriate minor (which is regarded as a polynomial in x_{ik}) of the appropriate modification of the matrix X.

For example, let G be the following graph



and construct all the subgraphs of the class $L_{\{R\}}(G)$. Number the vertices from left to right, then

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 \\ 0 & 0 & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & 0 & x_{34} \\ 0 & x_{42} & 0 & x_{44} \end{pmatrix}.$$

Further,

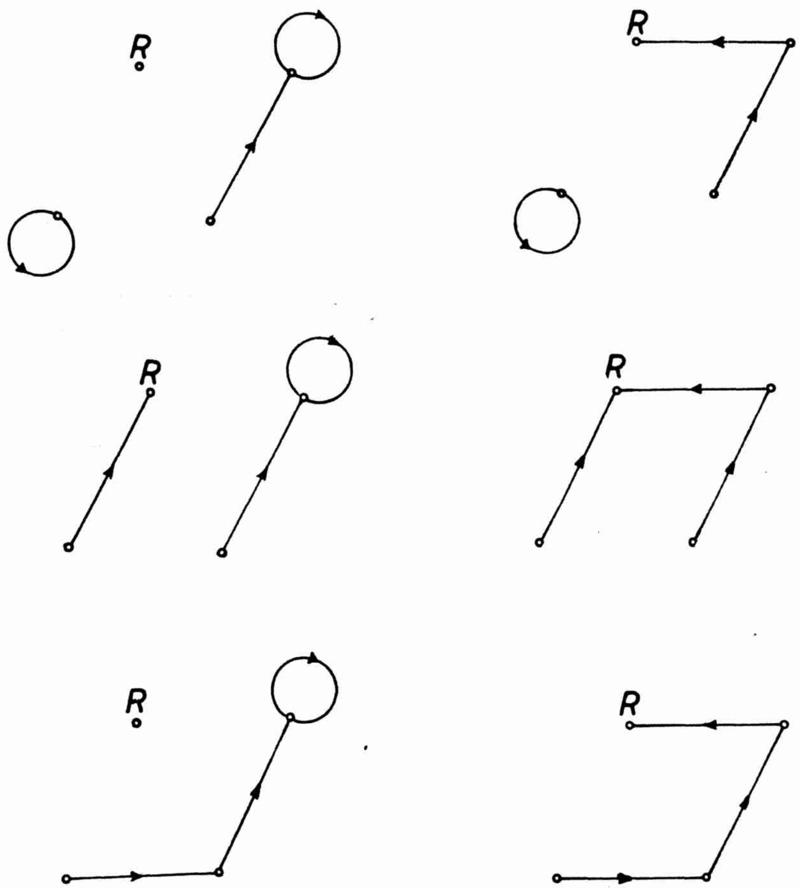
$$\det (X - D(X))_{\{1,3,4\},\{1,3,4\}} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} x_{11} - x_{12} - x_{13} & x_{13} & 0 \\ 0 & -x_{34} & x_{34} \\ 0 & 0 & x_{44} - x_{42} \end{pmatrix} =$$

$$= -x_{11}x_{34}x_{44} + x_{11}x_{34}x_{42} + x_{12}x_{34}x_{44} - x_{12}x_{34}x_{42} + x_{13}x_{34}x_{44} -$$

$$- x_{13}x_{34}x_{42}.$$

The corresponding subgraphs are



10. PROOF TECHNIQUES

The expansions of minors given in the Chapter I can be used to prove some relations concerning minors. For example, prove the following well-known formula.

Let $n > 3$, $r, s \in N$, $r \neq s$ and $A = (a_{ik})$ be an $n \times n$ matrix. Then

$$(-1)^{r+s+1} \det A_{N-\{r\},N-\{s\}} = a_{sr} \det A_{N-\{r,s\}N-\{r,s\}} -$$

$$- \sum_{i \in N-\{r,s\}} a_{ir} a_{si} \det A_{N-\{i,r,s\},N-\{i,s\}} -$$

$$- \sum_{\substack{i,k \in N-\{r,s\} \\ i \neq k}} (-1)^{m(N-\{i,r,s\},N-\{k,r,s\})} a_{ir} a_{sk} \det A_{N-\{i,r,s\},N-\{k,r,s\}} \,.$$

Proof. Denote by $P^l_{sr}(G(A))$ (resp. $P^{(l)}_{sr}(G(A))$) the subclass of the class $P_{sr}(G(A))$ consisting of all the subgraphs such that the path component of each is of length l (resp. at least l). According to (3.3),

$$(-1)^{r+s+1} \det A_{N-\{r\},N-\{s\}} = \Phi(P_{sr}(G(A))) =$$
$$= \Phi(P^1_{sr}(G(A))) + \Phi(P^2_{sr}(G(A))) + \Phi(P^{(3)}_{sr}(G(A))).$$

Further,

$$\Phi(P^1_{sr}(G(A))) = a_{sr}\, \Phi(C(G_{N-\{r,s\}}(A))) = a_{sr} \det A_{N-\{r,s\},N-\{r,s\}},$$
$$\Phi(P^2_{sr}(G(A))) = - \sum_{i\in N-\{r,s\}} a_{si}a_{ir}\, \Phi(C(G_{N-\{i,r,s\}}(A))) =$$
$$= - \sum_{i\in N-\{r,s\}} a_{si}a_{ir} \det A_{N-\{i,r,s\},N-\{i,r,s\}}$$

and

$$\Phi(P^{(3)}_{sr}(G(A))) = \sum_{i,k\in N-\{r,s\}\ i\neq k} a_{si}a_{kr}\Phi(P_{ik}(G_{N-\{r,s\}}(A))) =$$
$$= - \sum_{i,k\in N-\{r,s\}\ i\neq k} a_{si}a_{kr}(-1)^{m(N-\{i,r,s\},\ N-\{k,r,s\})} \det A_{N-\{i,r,s\},N-\{k,r,s\}}.$$

* * *

In the rest, formulae of the section 5 are applied. Observe that each subgraph $H \in L(G)$ contains exactly $n - \varrho(H)$ edges (i, k) such that $i \neq k$, n being the number of vertices of G. This makes it possible to eliminate the factor $(-1)^{n-\varrho(G(A))}$ in the terms of expansions of minos of the matrix $A - D(A)$ by changing the signs of all the off-diagonal elements of A.

For formal reasons, extend now the symbols R, S defined in the introduction to the Chapter I, to the case $\emptyset \neq R = S \subseteq N$. Then put $m(R, S) = 0$, $r = s = 1$. This makes it possible to write the formulae (5.1)–(5.3) in the universal form (5.3).

Given an $n \times n$ matrix $A = (a_{ik})$, denote by $R(A) = (r_{ik})$ the $n \times n$ matrix such that $r_{ii} = a_{ii}$ and $r_{ik} = -a_{ik}$ for each $i, k \in N$, $i \neq k$. Then it holds for the elements s_{ik} of the matrix $S(A) = R(A) - D(R(A))$ that $s_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ and $s_{ik} = -a_{ik}$ for each $i \in N$, $k \in N$, $i \neq k$. Further, $S(S(A)) = A$ and the formula (5.3) can be written in the form

$$(*)\quad (-1)^{m(R,S)} \det (S(A))_{RS} = (-1)^{n-|R|}\, \Phi(L^{rs}_{N-R}(G(A))) = \sum_{H\in L^{rs}_{N-R}(G(A))} \pi(H).$$

11. ENUMERATION OF SUBGRAPHS

Let G be a directed graph of n vertices. Having chosen a fixed ordering of its vertices, assign to each edge of it the value 1 and construct the matrix $A(G)$ such that $G = G(A(G))$ and the matrix $S(G) = S(A(G))$. (The matrix $A(G)$ is usually called the incidence matrix of G.) Then the elements s_{ik} of the matrix $S(G)$ satisfy $s_{ik} = -1$ if $(i, k) \in G$ and $s_{ik} = 0$ otherwise for each $i, k \in N$, $i \neq k$, s_{ii} being equal to the number of edges of G leading from the vertex i for each $i \in N$. The formula (*) yields

$$|L^{rs}_{N-R}(G)| = (-1)^{m(R,S)} \det (S(G))_{RS} .$$

Let G be a non-directed graph of n vertices without loops now. Having chosen a fixed ordering of its vertices, assign to it the matrix $S(G) = (s_{ik})$ such that $s_{ik} = s_{ki} = -1$ if $(i, k) \in G$ and $s_{ik} = s_{ki} = 0$ otherwise for each $i, k \in N$, $i \neq k$, s_{ii} being equal to the number of edges of G which are incident with the vertex i (the degree of the vertex i) for each $i \in N$. It is easy to see that $S(G) = S(G')$ where G' is the directed graph obtained from G by replacing all the non-directed edges (i, k) of G by the pair of directed edges (i, k), (k, i). It is easy to see that there is a one-to-one correspondence between spanning forests of G and subgraphs from $L(G')$. (A forest is a subgraph each component of which is a tree.) Consequently, $(-1)^{m(R,S)} \det (S(G))_{RS}$ is equal to the number of all the spanning forests of G such that each consists of exactly $n - |R|$ components, each vertex from $N - R$ being contained in exactly one component, the vertices r, s being contained in the same component. Especially, for any $i \in N$ the minor $\det (S(G))_{N-\{i\},N-\{i\}}$ is equal to the number of spanning trees of G(cf. [1], [2]).

12. INEQUALITIES CONCERNING MINORS

(12.1) *Let $M = (m_{ik})$ be a real $n \times n$ matrix such that $m_{ik} \leqq 0$ and $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \geqq 0$ for each $i, k \in N$, $i \neq k$. Then*

$$(-1)^{m(R,S)} \det M_{RS} \geqq 0 .$$

Equality is attained if and only if $L^{rs}_{N-R}(G(S(M))) = \emptyset$.

Proof. Obviously, $M = S(A)$ where A is a non-negative matrix, so each term in (*) is non-negative. Further, $A = S(S(A)) = S(M)$ and the sum in (*) is non-zero if and only if $L^{rs}_{N-R}(G(A)) \neq \emptyset$.

(12.2) *Let $M = (m_{ik})$ be a real $n \times n$ matrix such that $m_{ik} < 0$ and $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} > 0$ for each $i, k \in N$, $i \neq k$. Then*

$$(-1)^{m(R,S)} \det M_{RS} > 0 .$$

Proof. This is an easy corollary of (12.1).

(12.3) *Let M be a matrix satisfying the assumptions of (12.2). Let $D = (d_{ik})$ be a non-negative diagonal $n \times n$ matrix. Then*

$$(-1)^{m(R,S)} \det (M + D)_{RS} \geqq (-1)^{m(R,S)} \det M_{RS} .$$

Equality is attained if and only if any subgraph from $L_{N-R}^{rs}(G(S(M)))$ contains no edge (i, i) such that $d_{ii} > 0$ and $|L_{N-R}^{rs}(G(S(M)))| = |L_{N-R}^{rs}(G(S(M + D)))|$.

Proof. $M = S(A)$ where A is non-negative and $M + D = S(A + D)$. The theorem follows immediately from $(*)$.

References

[1] *M. Fiedler, J. Sedláček:* O *W*-basích orientovaných grafů, Čas. pěst. mat. *83* (1958), 214—225.

[2] *H. M. Trent:* A note on the enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graph, Proc. Math. Acad. Sci. USA *40* (1954), 1004—1007.

[3] *Wai-Kai Chen:* On directed graph solutions of linear algebraic equations, SIAM Review *9* (1967), 692—707.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

AN INEQUALITY INVOLVING POSITIVE KERNELS

IVO MAREK, Praha

(Received November 7, 1972)

1.

A classical result concerning finite series of positive numbers (see [3], Theorem 328, pp. 318 – 319) can be formulated as follows.

Let n be a positive integer and let $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$. Let P be a permutation matrix, i.e. let $Px = y \Leftrightarrow y_j = x_{i_j}$, $j = 1, \ldots, n$, where $(i_1, \ldots, i_n)$ is an ordered system of all of the integers $1, \ldots, n$. Then the relation)*

$$(Px, z) \geqq (Pe, e) \tag{1.1}$$

holds for every $z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, $\zeta_j > 0, j = 1, \ldots, n$, for which

$$\zeta_j \xi_j = 1\,, \quad 1, \ldots, n\,, \tag{1.2}$$

*where $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_j > 0$, $e = (1, \ldots, 1)$. Furthermore, if P is indecomposable,**) then the equality sign in (1.1) takes place if and only if $x = z = ce$, c being a constant.*

Using a result of G. Birkhoff [1] saying that every doubly stochastic matrix $T = (t_{jk})$ can be expressed as a convex combination of permutation matrices P_k

$$T = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k P_k\,, \quad 0 < \lambda_k < 1\,, \quad \sum_{k=1}^{N} \lambda_k = 1\,,$$

we deduce from (1.1) that the relation

$$(Tx, z) \geqq (Te, e) \tag{1.3}$$

*) Here we let $(x,z) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \zeta_j$.

**) See Remark 2 of the Appendix.

holds for every couple of vectors x and z for which (1.2) is fulfilled. If T is indecomposable then the equality sign in (1.3) takes place if and only if $x = ce$, c being a constant.

Let T be a matrix for which

$$\mu_j = \sum_{k=1}^{n} t_{jk} = \sum_{k=1}^{n} t_{kj}, \quad t_{jk} \geqq 0, \quad \mu_j > 0.$$

Then relation (1.3) remains to be valid also for this case.

Let T be an arbitrary nonnegative matrix and let $r(T)$ be its spectral radius. Let u_0 and v_0 be some nonnegative eigenvectors of T and its transposed matrix T' respectively corresponding to the spectral radius: $Tu_0 = r(T)\, u_0$, $T'v_0 = r(T)\, v_0$, $u_0 = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $v_0 = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$.

We easily verify that for the matrix $U = (u_{jk})$, where $u_{jk} = \nu_j t_{jk} \eta_k + \delta \delta_{jk}$, $k, j = 1, \ldots, n$, $\delta > 0$, the following relations

$$\sum_{k=1}^{n} u_{jk} = r(T)\, \nu_j \eta_j + \delta = \sum_{k=1}^{n} u_{kj}$$

hold. Thus we have that

$$(Ux, z) \geqq (Ue, e) \tag{1.4}$$

holds for every couple x and z for which (1.2) is fulfilled. But (1.4) is equivalent to the relation

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [\nu_j t_{jk} \eta_k \xi_j \zeta_k + \delta \delta_{jk} \xi_j \zeta_k] \geqq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [\nu_j t_{jk} \eta_k + \delta \delta_{jk}]$$

and, since δ is arbitrary, we obtain

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \nu_j t_{jk} \eta_k \xi_j \zeta_k \geqq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \nu_j t_{jk} \eta_k. \tag{1.5}$$

The procedure just shown is a slightly modified procedure used by M. Fiedler [2].

We summarize the previous results in the following theorem.

Theorem 1. *Let $T = (t_{jk})$ be an $n \times n$ matrix with nonnegative entries t_{jk}, $1 \leqq j, k \leqq n$. Let u_0 and v_0 be any nonnegative eigenvectors of T and its transposed T' respectively corresponding to the spectral radius $r(T)$. Let x be an arbitrary vector with positive coordinates and z let be such that (1.2) holds. Then the relation*

$$(Vx, z) \geqq r(T)\, (u_0, v_0) \tag{1.6}$$

holds, where $V = (v_{jk})$ and

$$v_{jk} = \nu_j t_{jk} \eta_k, \quad u_0 = (\eta_1, \ldots, \eta_n), \quad v_0 = (\nu_1, \ldots, \nu_n).$$

If moreover T is indecomposable then the equality sign in (1.6) *takes place if and only if* $x = ce$, c being a constant.

We note that only the last assertion has to be proved. We shall not do this now because our aim is to prove a slightly more general result in Section 2.

Remark. Note that for $T = P$, where P is a permutation matrix, the relation (1.6) is identical (1.1) because $u_0 = v_0 = e$ in this case.

2.

Let μ be a nonnegative σ-additive regular measure on a σ-algebra $\mathfrak{M}$ of subsets of Ω, where Ω is a closed bounded subset of a Euclidean space $\mathscr{E}^n$. Let $\mathscr{Y} = \mathscr{L}^2(\Omega, \mu)$ be the Banach space of classes of μ-measurable μ-equivalent real-valued functions on Ω with the inner product

$$([u], [v]) = \int_\Omega u(s)\, v(s)\, \mathrm{d}\mu(s)$$

and the norm $\|[u]\|^2 = [u], [u])$, where u and v are any representatives for $[u]$ and $[v]$ in $\mathscr{L}^2(\Omega, \mu)$ respectively. In the following we shall not distinguish the notation for classes and their representatives.

Let $\mathscr{T} = \mathscr{T}(s, t)$ be a kernel on Ω. We set $Tx = y$ if $y(s) = \int_\Omega \mathscr{T}(s, t)\, x(t)\, \mathrm{d}\mu(t)$.

The following theorem is a consequence of a well known result due to M. G. Krein and M. A. Rutman [4].

Theorem 2. *Let T be a compact linear operator mapping $\mathscr{Y}$ into $\mathscr{Y}$ having the property that $x \in Y$, $x(s) \geqq 0$, μ-almost everywhere in Ω (μ-a.e.) implies that $y(s) \geqq 0$ μ-a.e. in Ω, where $y = Tx$. If* $\dim \mathscr{Y}$ *is infinite then let the spectral radius $r(T) =$ $= \max \{0, \sup [|\lambda| : \lambda$ an eigenvalue of $T]\}$ be positive. Then there exist eigenfunctions u_0 and v_0 of T and its adjoint T^* respectively corresponding to $r(T)$ and we have that $u_0(s) \geqq 0$ and $v_0(s) \geqq 0$, μ-a.e. in Ω:*

$$Tu_0 = r(T)\, u_0\,, \quad T^* v_0 = r(T)\, v_0\,.$$

Definition. We call the kernel $\mathscr{T} = \mathscr{T}(s, t)$, $\mathscr{T}(s, t) \geqq 0$ $\mu \times \mu$-a.e. in $\Omega \times \Omega$ indecomposable if for every couple of nonnegative μ a.e. functions u and v, $u \not\equiv 0$, $v \not\equiv 0$, there is an iteration T^p such that $(T^p u, v) > 0$ [6]. We also call T indecomposable, or $\mathscr{K}$-indecomposable, where $\mathscr{K} = \{u \in \mathscr{Y} : u(s) \geqq 0\ \mu\text{-a.e.}\}$.

Remark. If T in Theorem 2 is an indecomposable integral operator on $\mathscr{L}^2(\Omega, \mu)$, then u_0 and v_0 are positive μ-a.e. in Ω and up to a multiple constant uniquely determined [7].

Definition. We say that kernel $\mathcal{T} = \mathcal{T}(s, t)$ has property (B) if $y = Tx$ is a bounded function whenever $x \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mu)$.

Definition. We say the kernel $\mathcal{T} = \mathcal{T}(s, t)$, $s, t \in \Omega$, satisfies condition (C) if for every $\varepsilon > 0$ there is a continuous on $\Omega \times \Omega$ kernel $\mathcal{T}_\varepsilon = \mathcal{T}_\varepsilon(s, t)$ such that

$$\int_\Omega \left[\int_\Omega |\mathcal{T}(s, t) - \mathcal{T}_\varepsilon(s, t)|^2 \, d\mu(t) \right] d\mu(s) < \varepsilon^2 .$$

Our generalization of Theorem 1 is as follows.

Theorem 3. *Let $\mathcal{T} = \mathcal{T}(s, t)$ be a kernel having property (C). Let x be any μ-measurable μ-a.e. positive function on Ω. Then we have*

$$(2.1) \qquad \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{T}(s, t) \, v_0(s) \, u_0(t) \, \frac{x(s)}{x(t)} \, d\mu(s) \, d\mu(t) \geqq r(T) \int_\Omega u_0(s) \, v_0(s) \, d\mu(s) ,$$

where u_0 and v_0 satisfy

$$(2.2) \qquad \int_\Omega \mathcal{T}(s, t) \, u_0(t) \, d\mu(t) = r(T) \, u_0(s) , \quad 0 \not\equiv u_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mu) \quad u_0(s) \geqq 0 \ \mu\text{-a.e. in } \Omega ,$$

$$\int_\Omega \mathcal{T}(s, t) \, v_0(s) \, d\mu(s) = r(T) \, v_0(t) , \quad 0 \not\equiv v_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mu) , \quad v_0(s) \geqq 0 \ \mu\text{-a.e. in } \Omega ,$$

for $r(T) > 0$ and $u_0 \geqq 0$, $v_0 \geqq 0$ are quite arbitrary for $r(T) = 0$.

If moreover T is indecomposable and has property (B), *then the equality sign in* (2.1) *takes place if and only if $x(s) =$ constant μ-a.e. in Ω.*

Remarks. Because of our assumption (C) and because of the density of the set of all continuous functions on Ω in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mu)$ it is easy to see that it is enough to prove the first part of Theorem 3 concerning the inequality (2.1) only for continuous kernels and continuous functions x's.

Obviously the relation (2.1) holds trivially whenever $r(T) = 0$ and thus there is nothing to be proved.

Since $r(T) = 1$, and $u_0 = v_0 = e$, where $e(s) = 1$ μ-a.e. in Ω for T being defined by a doubly stochastic kernel $\mathcal{T}$, i.e. by kernel $\mathcal{T}$ for which

$$\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega \mathcal{T}(s, t) \, d\mu(t) = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega \mathcal{T}(t, s) \, d\mu(t) = e(s) ,$$

the relation (2.1) turns to be expressed as

$$(2.2) \qquad (Tx, z) \geqq (Te, e) ,$$

where

$$z(s) = \frac{1}{x(s)}, \quad \mu\text{-a.e. in } \Omega . \tag{2.3}$$

Proof of Theorem 3. Since the integrand in (2.1) is nonnegative there is nothing to prove if the integral on the left hand side diverges. Hence, let us assume the left hand side in (2.1) to be finite. According to the previous remark we may assume that $\mathscr{T}$ is a continuous in $\Omega \times \Omega$ kernel and x is a continuous function in Ω.

First let us assume that $\mathscr{T}$ is a doubly stochastic kernel. According to the mean value theorem we can find disjoint subsets $\Omega_j \subset \Omega$ in such a way to have

$$\int_\Omega \int_\Omega \mathscr{T}(s, t)\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\mu(s) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \mathscr{T}(s_j, t_k)\, \mu(\Omega_j)\, \mu(\Omega_k), \tag{2.4}$$

where $s_j \in \Omega_j$ and $t_k \in \Omega_k$, $j = 1, \ldots, N$, N being a positive integer.

Obviously we have

$$\sum_{k=1}^{N} \tau_{jk} = \sum_{k=1}^{N} \tau_{kj} = \mu_j, \tag{2.5}$$

where

$$\tau_{jk} = \mathscr{T}(s_j, t_k)\, \mu(\Omega_j)\, \mu(\Omega_k), \quad \mu_j = \mu(\Omega_j) > 0 .$$

According to (2.5) and (1.5) we have that

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \tau_{jk} \frac{\xi_j}{\xi_k} \geqq \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \tau_{jk} \tag{2.6}$$

holds for every vector $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_j > 0$, $j = 1, \ldots, N$.

Let us choose $\varepsilon > 0$ arbitrary. Then we can find N large enough to have

$$\left| \int_\Omega \int_\Omega \mathscr{T}(s, t) \frac{x(s)}{x(t)}\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\mu(s) - \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \tau_{jk} \frac{x(s_j)}{x(t_k)} \right| < \varepsilon .$$

According to (2.6) it follows that

$$\int_\Omega \int_\Omega \mathscr{T}(s, t) \frac{x(s)}{x(t)}\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\mu(s) \geqq \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \tau_{jk} - \varepsilon =$$

$$= \int_\Omega \int_\Omega \mathscr{T}(s, t)\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\mu(s) - \varepsilon = \int_\Omega \int_\Omega \mathrm{d}\mu(s)\, \mathrm{d}\mu(t) - \varepsilon .$$

Since $\varepsilon > 0$ is arbitrary, we get that

$$\int_\Omega \int_\Omega \mathscr{T}(s, t) \frac{x(s)}{x(t)}\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\mu(s) \geqq \int_\Omega \int_\Omega \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\mu(s)$$

and this is equivalent to (2.1).

Further, we assume that $\mathcal{T}$ satisfies the following conditions

$$\int_\Omega \mathcal{T}(s, t)\, \mathrm{d}\mu(t) = \int_\Omega \mathcal{T}(t, s)\, \mathrm{d}\mu(t) = \alpha(s)\,, \quad s \in \Omega\,, \tag{2.7}$$

where α is a nonnegative continuous function. It is easy to find a positive constant δ to make the following expression positive

$$\beta(s) = \delta - \int_\Omega \mathcal{T}(s, t)\, \mathrm{d}\mu(t) = \delta - \int_\Omega \mathcal{T}(t, s)\, \mathrm{d}\mu(t) = \delta - \alpha(s)\,, \quad s \in \Omega\,.$$

Note that $\beta(s) > 0$, or more precisely, $\inf \beta(s) > 0$. We define an operator Z by setting

$$(Zy)(s) = \frac{1}{\delta} \int_\Omega \mathcal{T}(s, t)\, y(t)\, \mathrm{d}\mu(t) + \frac{1}{\delta}\, \beta(s)\, y(s)\,, \quad s \in \Omega\,. \tag{2.8}$$

It is easy to verify that for $s \in \Omega$

$$(Ze)(s) = \frac{1}{\delta}\left[\beta(s) + \int_\Omega \mathcal{T}(s, t)\, \mathrm{d}\mu(t)\right] = \frac{1}{\delta}\left[\beta(s) + \int_\Omega \mathcal{T}(t, s)\, \mathrm{d}\mu(t)\right] = e(s)\,.$$

Similarly as in the case of doubly stochastic kernels we can show that the following relation holds

$$\int_\Omega x(s)\, [Zz](s)\, \mathrm{d}\mu(s) \geqq \int_\Omega e(s)\, [Ze](s)\, \mathrm{d}\mu(s)\,,$$

where $z(s) = 1/x(s)$, or else,

$$\int_\Omega \int_\Omega \mathcal{T}(s, t)\, \frac{x(s)}{x(t)}\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\mu(s) \geqq \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{T}(s, t)\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\mu(s)\,. \tag{2.9}$$

This is the required relation for the case considered.

Finally, let us consider a general continuous kernel $\mathcal{T}$. Let us set

$$U(s, t) = v_0(s)\, \mathcal{T}(s, t)\, u_0(t)\,, \quad s, t \in \Omega\,.$$

Then

$$\int_\Omega U(s, t)\, \mathrm{d}\mu(t) = r(T)\, u_0(s)\, v_0(s) = \int_\Omega U(t, s)\, \mathrm{d}\mu(t)\,, \quad s \in \Omega\,.$$

Thus the kernel U satisfies (2.7) with $\alpha(s) = r(T)\, u_0(s)\, v_0(s) \geqq 0$. By virtue of (2.9) we have that

$$\int_\Omega \int_\Omega U(s, t)\, \frac{x(s)}{x(t)}\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\mu(s) \geqq \int_\Omega \int_\Omega U(s, t)\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\mu(s)$$

and this is equivalent to the required relation (2.1) which was to be proved.

To finish the proof of Theorem 3 we have to examine the case of an indecomposable operator T. We shall use the same machinery as before.

Let $\mathscr{T} = \mathscr{T}(s, t)$ be a doubly stochastic kernel. We assume that

$$(2.10) \quad \int_\Omega \int_\Omega \mathscr{T}(s, t) \frac{x(s)}{x(t)} \, \mathrm{d}\mu(t) \, \mathrm{d}\mu(s) = \int_\Omega \int_\Omega \mathscr{T}(s, t) \, \mathrm{d}\mu(t) \, \mathrm{d}\mu(s) = \int_\Omega \int_\Omega \mathrm{d}\mu(t) \, \mathrm{d}\mu(s) ,$$

or else

$$\frac{(V_x T V_x^{-1} e, e)}{(e, e)} = \frac{(Te, e)}{(e, e)} = 1 ,$$

where $e(s) = 1 \mu$-a.e. in Ω and

$$(2.11) \qquad V_x u = v \Leftrightarrow v(s) = x(s) \, u(s) , \quad s \in \Omega , \quad x, v, u \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mu) .$$

Since $x \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mu)$ is up to positivity quite arbitrary, we also have that (assuming $\mu(\Omega) = 1$)

$$1 \leqq (V_x^{-1} T V_x e, e) = (V_x T^* V_x^{-1} e, e) ,$$

where T^* is the adjoint of T. Obviously, $\frac{1}{2}[T + T^*]$ is stochastic and it follows that

$$\tfrac{1}{2}(V_x[T + T^*] V_x^{-1} e, e) \geqq \tfrac{1}{2}([T + T^*] e, e) = \tfrac{1}{2} r(T + T^*) = 1 .$$

According to our assumptions $T + T^*$ is compact and symmetric. Thus,

$$r(T + T^*) = \max \left\{ \frac{((T + T^*) u, v)}{(u, v)} : u \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mu), \ (u, v) \neq 0, \ v > 0 \right\} .$$

This fact together with $\mathscr{K}$-indecomposability of $T + T^*$ according to the definition of V_x implies that $y_0 = V_x^{-1} e$ being an eigenvector of $T + T^*$ corresponding to $r(T + T^*)$ is a multiple of $e : V_x^{-1} e = ce$, $c > 0$. In other words, $x(s) = \text{const.}$ μ-a.e. in Ω, and this was to be proved.

Further let $\mathscr{T}$ satisfy (2.7) with some positive function $\alpha = \alpha(s)$. Then for the operator V_x defined in (2.11) we have with appropriate β that

$$\int_\Omega x(s) \, [Zz] \, (s) \, \mathrm{d}\mu(s) = \int_\Omega e(s) \, [Zz] \, (s) \, \mathrm{d}\mu(s) ,$$

where Z is defined by (2.8). We deduce that

$$\tfrac{1}{2}(V_x[Z + Z^*] V_x^{-1} e, e) \geqq \tfrac{1}{2}((Z + Z^*) e, e) = 1 = r(Z + Z^*) = \|Z + Z^*\| .$$

Since the null space $\mathfrak{N}(Z + Z^*) = \{v \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mu) : (Z + Z^*) v - \|Z + Z^*\| v = 0\}$ is one dimensional (see [7] and also the Appendix), we conclude that $V_x^{-1} e$ being an eigenfunction of $(Z + Z^*)$ corresponding to the eigenvalue $\|Z + Z^*\|$ is a multiple of e: $V_x^{-1}e = ce$, $c > 0$. Thus, the assertion is proved in this case too.

We conclude the proof of Theorem 3 by observing that for a general indecomposable kernel $\mathscr{T} = \mathscr{T}(s, t)$ the kernel $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_1(s, t) = v_0(s)\,\mathscr{T}(s, t)\,u_0(t)$ satisfies (2.7) and u_0 and v_0 are positive and uniquely determined up to a multiple factor. Thus from

$$(V_x T_1 V_x^{-1} e, e) = (T_1 e, e),$$

where

$$T_1 u = v \Leftrightarrow v(s) = \int_\Omega \mathscr{T}_1(s, t)\,u(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\,, \quad s \in \Omega\,,$$

the required relation $x(s) =$ constant μ-a.e. in Ω follows. This completes the proof of Theorem 3.

The relation (2.13) contained in the following Corollary is essentially used in some applications concerning cone preserving operators (see [2, 6]).

Corollary. *Let T be an integral operator whose kernel $\mathscr{T} = \mathscr{T}(s, t)$ satisfies property (C). Let u_0 and v_0 be some nonnegative eigenfunctions of T and its adjoint T^* respectively corresponding to the spectral radius $r(T)$. Then we have*

$$(2.13)\quad \int_\Omega \int_\Omega \mathscr{T}(s, t)\,v_0(t)\,u_0(s)\,\mathrm{d}\mu(t)\,\mathrm{d}\mu(s) \geqq \int_\Omega \int_\Omega \mathscr{T}(s, t)\,u_0(t)\,v_0(s)\,\mathrm{d}\mu(t)\,\mathrm{d}\mu(s)\,.$$

If moreover $\mathscr{T}$ is indecomposable and satisfies condition (B) then equality sign in (2.13) takes place if and only if $u_0(s) = c\,v_0(s)$ μ-a.e. in Ω with some $c > 0$.

Proof. According to the indecomposability of $\mathscr{T}$ we know that u_0 and v_0 are positive μ-a.e. in Ω. We then put $x(s) = u_0(s)/v_0(s)$ and apply Theorem 3. This completes the proof.

3.

With some minor changes the results of Section 2 can be generalized to $\mathscr{L}^p(\Omega, \mu)$ spaces with $p \in (1, +\infty)$. We formulate a particular result in this direction concerning bounded kernels.

Let $p \in (1, +\infty)$ and $1/p + 1/p^* = 1$. Let $\mathscr{T} = \mathscr{T}(s, t)$ be a bounded nonnegative kernel on $\Omega \times \Omega$. Let u_0 be an eigenfunction of $\mathscr{T}$ and v_0 an eigenfunction of the transposed kernel $\mathscr{T}^*(s, t) = \mathscr{T}(t, s)$, $s, t \in \Omega$.

We call $\mathscr{T} = \mathscr{T}(s, t)$ to satisfy condition (C_p) if for every $\varepsilon > 0$ there is a continuous kernel $\mathscr{T}_\varepsilon = \mathscr{T}_\varepsilon(s, t)$ such that

$$\int_\Omega \left[\int_\Omega |\mathscr{T}(s, t) - \mathscr{T}_\varepsilon(s, t)|^{p^*} \, \mathrm{d}\mu(t)\right]^{p/p^*} \mathrm{d}\mu(s) < \varepsilon^p .$$

We say that a kernel $\mathscr{T} = \mathscr{T}(s, t)$ is indecomposable if for any couple $u \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mu)$ and $v \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mu)$, $u \not\equiv 0$, $v \not\equiv 0$, there is a positive integer $p = p(u, v)$ such that

$$0 < \int_\Omega \dots \int_\Omega \mathscr{T}(s, t_1) \dots \mathscr{T}(t_{p-1}, t_p) \, v(s) \, u(t_p) \, \mathrm{d}\mu(t_1) \dots \mathrm{d}\mu(t_p) \, \mathrm{d}\mu(s) .$$

Theorem 4. *With the previous notation we have the following relation*

$$\int_\Omega \int_\Omega \mathscr{T}(s, t) \, v_0(s) \, u_0(t) \, \frac{x(s)}{x(t)} \, \mathrm{d}\mu(t) \, \mathrm{d}\mu(s) \geqq r(T) \int_\Omega u_0(s) \, v_0(s) \, \mathrm{d}\mu(s) , \tag{3.1}$$

where x is any μ-measurable positive function on Ω. If moreover, $\mathscr{T}$ is indecomposable and such that Tu is bounded for $u \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mu)$ and x is bounded, then equality sign in (3.1) *takes place if and only if $x(s) =$ constant μ-a.e. in Ω.*

4. Appendix. We shall prove an assertion a corollary of which was already used in the proof of a part of the main result.

Let V be defined as follows.

$Vx = y \Leftrightarrow y(s) = f(s) \, x(s)$, $x \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mu)$ and $f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mu)$, $f(s) \geqq 0$ μ-a.e. in Ω. Set $\mathscr{L}^2(\Omega)$ instead of $\mathscr{L}^2(\Omega, \mu)$.

Theorem 5. *Let U be a bounded operator on $\mathscr{L}^2(\Omega)$ mapping μ-a.e. nonnegative functions into μ-a.e. nonnegative ones. Let $x_0 \in \mathscr{L}^2(\Omega)$ be an eigenvector of U. Let x_0 have the property that $x_0(s) \geqq \beta(\varepsilon) \, \chi_{\Omega(\varepsilon)}(s)$ μ-a.e., where*

$$\Omega(\varepsilon) = \{t \in \Omega : f(t) > \sup \operatorname{ess} f - \varepsilon\}$$

for sufficiently small $\varepsilon > 0$ and where $\chi_{\Omega(\varepsilon)}$ is the characteristic function of $\Omega(\varepsilon)$ and $\beta(\varepsilon)$ is a positive constant. Furthermore, let for every μ-a.e. nonnegative $v \in \mathscr{L}^2(\Omega)$, $v \not\equiv 0$, there be an $\alpha(v) > 0$ such that

$$(Uv)(s) \geqq \alpha(v) \, x_0(s) \quad \mu\text{-a.e.} \tag{4.1}$$

Let $\mu(\Omega(\varepsilon)) > 0$ for all sufficiently small $\varepsilon > 0$. Then

$$r(T) > r(V) = \sup \operatorname{ess} f ,$$

where $T = U + V$.

Proof. We may assume that $\mu(\Omega(\varepsilon)) < +\infty$.

Let $\varrho > r(T)$. It is easy to see that for every $x \in \mathscr{L}^2(\Omega)$, $x \geqq 0$ μ-a.e. we have that

$$[R(\varrho, T) x](s) \geqq [U R(\varrho, U) x](s) + [R(\varrho, V) x](s) \quad \mu\text{-a.e.}$$

where $R(\varrho, A) = (\varrho I - A)^{-1}$ and A is a bounded linear operator on $\mathscr{L}^2(\Omega, \mu)$ and I is the identity operator. It follows that

$$\begin{aligned} R(\varrho, T) \chi_{\Omega(\varepsilon)} &\geqq R(\varrho, U) U\chi_{\Omega(\varepsilon)} + R(\varrho, V) \chi_{\Omega(\varepsilon)} > \\ &> \alpha(\chi_{\Omega(\varepsilon)}) \frac{1}{\varrho - r(U)} x_0 + \frac{1}{\varrho - r(V) + \varepsilon} \chi_{\Omega(\varepsilon)} \geqq \\ &\geqq \left[\frac{\alpha(\chi_{\Omega(\varepsilon)}) \beta(\varepsilon)}{\varrho - r(U)} + \frac{1}{\varrho - r(V) + \varepsilon}\right] \chi_{\Omega(\varepsilon)} = \gamma(\varrho) \chi_{\Omega(\varepsilon)} . \end{aligned}$$

According to Theorem 6.2 in [4] we conclude that

$$r(R(\varrho, T)) \geqq \gamma(\varrho) .$$

Obviously,

$$r(R(\varrho, V)) = \frac{1}{\varrho - r(V)}$$

and

$$\gamma(\varrho) - \frac{1}{\varrho - r(V)} = \frac{1}{[\varrho - r(V)][\varrho - r(U)][\varrho - r(V) + \varepsilon]} \times$$
$$\times \{\alpha(\chi_{\Omega(\varepsilon)}) \beta(\varepsilon) [\varrho - r(V)]^2 + \varepsilon \alpha(\chi_{\Omega(\varepsilon)}) \beta(\varepsilon) [\varrho - r(V)] - \varepsilon[\varrho - r(U)]\} .$$

We see that

$$\gamma(\varrho) - \frac{1}{\varrho - r(V)} > 0$$

for ϱ sufficiently large. This means that

$$r(R(\varrho, T)) > r(R(\varrho, V))$$

and since

$$r(R(\varrho, T)) = \frac{1}{\varrho - r(T)}$$

we deduce that

$$\frac{1}{\varrho - r(T)} > \frac{1}{\varrho - r(V)}$$

and this implies the required result. Theorem 5 is proved.

Remark 1. If U in Theorem 5 is compact then $T = U + V$ is a Radon - Nikolskii operator [5]. Thus, each spectral point λ for which $|\lambda| = r(T)$ is a pole of the resolvent operator and hence an eigenvalue of T having finite dimensional eigenspace. It is a consequence of indecomposability of U and hence of T as well that the eigenspace corresponding to $r(T)$ is one-dimensional [7].

Remark 2. In our considerations we silently used the concept indecomposable in the sense of Sawashima's definition treated in our particular $\mathscr{L}^2$-space situation with the cone of $\mathscr{L}^2$-functions nonnegative μ-a.e. If the measure μ is atomic, i.e. concentrated in a finite discrete set, one clearly obtains finite dimensional operators defined by nonnegative matrices. Thus, Sawashima's definition of indecomposability applies. Let us note that with the standard definition of indecomposability or decomposability respectively saying that A is decomposable if there is a permutation matrix P such that

$$PAP' = \begin{pmatrix} A_1 & \Theta \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix},$$

where P' is the transpose to P, and A_1 and A_3 are square matrices and Θ is zero matrix, the uniqueness assertion of Theorem 1 holds if $n \geqq 2$.

References

[1] *G. Birkhoff:* Tres observaciones sobre el algebra lineal. Rev. Univ. nac. Tucumán, ser. A vol. *5* (1946), 147–151.

[2] *M. Fiedler:* Private communication. San Antonio. January 1970.

[3] *K. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya:* Inequalities. Russian translation. Gos. Izdat. Inostr. Liter. Moscow 1948.

[4] *M. G. Krein, M. A. Rutman:* Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space. Uspekhi Mat. Nauk *III* (1948), N. 1, 3–95. English translation in Amer. Math. Soc. Translations No 26 (1950), 128 pp.

[5] *I. Marek:* On some spectral properties of Radon-Nikolskii operators and their generalizations. Comment. Math. Univ. Carol. *3*, 1 (1962), 20–30.

[6] *I. Marek:* Perron roots of convex combinations of cone preserving operators and their adjoints. Submitted to the Czech. Math. Journ.

[7] *I. Sawashima:* On spectral properties of some positive operators. Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. *15* (1964), 55–64.

[8] *B. Szökefalvi-Nagy, F. Riesz:* Leçons d'analyse fonctionelle. Russian translation. Gos. Tech. Izd. Moscow, 1955.

Author's address: 118 00 Praha 1, Malostranské nám. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

VLADIMÍR ĎURIKOVIČ, Bratislava: *On the solution of boundary value problems for linear parabolic equations of higher order.* (O riešení okrajových úloh pre lineárne parabolické rovnice vyššieho rádu.)

Práca pojednáva o dvoch modifikáciach Dirichletovej úlohy pre rovnicu $D_x^4 u + D_t u = \varphi(x, t)$ na $(0, 1) \times (0, T\rangle$. Pomocou Greenových funkcií sú skonštruované riešenia daných úloh v explicitnej forme za predpokladu, že funkcia φ a okrajové funkcie sú hölderovsky spojité.

JANA ZVÁROVÁ, Praha: *On measures of statistical dependence.* (O mírách statistické závislosti.)

V práci se autorka zabývá problémem měření síly statistické závislosti mezi dvěma náhodnými veličinami. Uvádí systém základních požadavků na vhodné míry statistické závislosti. Blíže si všímá pojetí nejvyšší závislosti náhodných veličin a vyšetřuje souvislost mezi Rényiho přímou závislostí a Höffdingovou c-závislostí s přihlédnutím k existenci či neexistenci atomů ve výběrových prostorech náhodných veličin. Dále zkoumá f-informační míry statistické závislosti a jejich chování vzhledem k systému základních požadavků. Odvozuje horní dosažitelné meze f-informačních měr statistické závislosti za určitých omezení na uvažované náhodné veličiny. Závěrem si všímá výběrových vlastností α-informačních měr statistické závislosti.

LADISLAV NEBESKÝ, Praha: *Reconstruction of a tree from certain maximal proper subtrees.* (Rekonstrukce stromu z jistých maximálních vlastních podstromů.)

V článku je definován γ-podstrom (konečného) stromu T jako speciální případ maximálního vlastního podstromu T a je dokázáno, že skoro každý strom T může být až do izomorfizmu rekonstruován ze své množiny neizomorfních γ-podstromů.

JAN CHRASTINA, Brno: *Boundary value problems for linear partial differential equation with constant coefficients. Homogeneous equation in the half plane.* (Okrajové úlohy pro lineární parciální diferenciální rovnici s konstantními koeficienty. Homogenní rovnice v polorovině.)

V článku je studován nestandardní prostor distribucí, ve kterém mohou být formulovány korektní okrajové úlohy v polorovině pro operátor $p_n(\partial/\partial x)\, \partial^n/\partial t^n + \ldots + p_0(\partial/\partial x)$. Korektností se rozumí jednoznačnost, existence a spojitá závislost na daných okrajových hodnotách. Rozdíl od dřívějšího pojetí je v tom, že nemusí být $p_n(x) \equiv 1$, polynom p_n může mít dokonce i reálné kořeny.

ANTONÍN VRBA, Praha: *Subdeterminants and subgraphs.* (Subdeterminanty a podgrafy.)

V práci jsou popsány nenulové členy hlavních a skoro hlavních minorů čtvercové matice a jejích modifikací pomocí jistých tříd podgrafů ohodnoceného orientovaného grafu. To umožňuje generovat a enumerovat jisté podgrafy daného orientovaného či neorientovaného grafu a odvodit nerovnosti mezi minory jistých matic. Další aplikace spočívají ve vyjádření řešení soustavy lineárních rovnic a koeficientů charakteristického polynomu matice a jejích modifikací pomocí podgrafů.

Ivo MAREK, Praha: *An inequality involving positive kernels.* (O jisté nerovnosti obsahující kladná jádra.)

Buď $K = K(s, t)$ nezáporné dvojitě stochastické $\mathscr{L}^2(\Omega \times \Omega, \mu \times \mu)$ jádro, kde Ω je kompaktní množina v R^d a μ je úplná σ-aditivní míra na σ-algebře podmnožin Ω. Dokazuje se platnost nerovnosti $\int_\Omega \int_\Omega K(s, t)\,(x(s)/x(t))\,d\mu(s)\,d\mu(t) \geqq \int_\Omega \int_\Omega d\mu(s)\,d\mu(t)$ pro libovolnou měřitelnou μ-skoro všude kladnou funkci x. Za některých dalších požadavků na jádro K je uvedena nutná a postačující podmínka pro platnost rovnosti ve výše uvedeném vztahu. Výsledek je rozšířen na obecná nezáporná jádra.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

Úloha č. 1. Buďtež dány tři body A_{13}, A_{24}, S neležící v jedné přímce. Nechť bod A_{13} (A_{24}) je středem svazku paprsků Σ_{13} (Σ_{24}). Ze svazku Σ_{13} (Σ_{24}) vyberte všechny dvojice paprsků a_1, a_3 (a_2, a_4), kterým lze ve svazku Σ_{24} (Σ_{13}) přiřadit dvojice a_2, a_4 (a_1, a_3) tak, aby každá čtveřice a_1, a_2, a_3, a_4 omezovala tětivový čtyřúhelník, vepsaný do kružnice k o středu S.

1) Nalezněte planimetrickou konstrukci, která žádané přiřazení umožní.

2) Ukažte, že přípustnou trojicí bodů A_{13}, A_{24}, S je každá trojice, kdy body A_{13}, A_{24}, S tvoří trojúhelník ostroúhlý, kde P je pata výšky, spuštěné z bodu S na stranu $A_{13}A_{24}$. P je společný průsečík kružnic c_i, opsaných čtyřem trojúhelníkům, tvořeným přímkami a_j, a_k, a_m, na nichž leží strany uvažovaného tětivového čtyřúhelníka (i, j, k, m je libovolná cyklická permutace čísel 1, 2, 3, 4).

Úloha č. 2. Body A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) jsou vrcholy rovinného čtyřúhelníka $[A_i]$. Označme Q^i_{rs} paty kolmic, spuštěných z bodu A_i na strany a úhlopříčku daného čtyřúhelníka $[A_i]$, jež neprocházejí bodem A_i (r, s je libovolná kombinace 2. třídy čísel j, k, m; i, j, k, m libovolná cyklická permutace čísel 1, 2, 3, 4). Trojice bodů Q^i_{rs} při pevném i určují kružnice g_i.

Ukažte, že platí:

1) kružnice g_i ($i = 1, 2, 3, 4$) se protínají v jednom bodě B,

2) tvoří-li např. body A_i ($i = 1, 2, 3$) pevný trojúhelník, zatím co bod A_4 se v rovině tohoto trojúhelníka libovolně pohybuje tak, že žádná trojice bodů $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$ neleží v přímce, opisuje bod B Feuerbachovu kružnici příslušného pevného trojúhelníka.

Josef Brejcha, Brno

Řešení úlohy č. 1 (autor Josef Král) z roč. *97* (1972), str. 334.

Úloha: Nechť U je resolutivní množina s hranicí $U^* \neq \emptyset$ v harmonickém prostoru X (viz [1]) a označme pro každý kompakt $K \subset X$ symbolem $C(K)$ prostor všech spojitých (konečných) reálných funkcí na K. Každé funkci $f \in C(U^*)$ je tedy přiřazena harmonická funkce H^U_f na U, která je zobecněným řešením (v Perronově smyslu) Dirichletovy úlohy příslušné k množině U a okrajové podmínce f. Nechť U_r značí množinu všech $x \in U^*$, pro něž $\lim\limits_{y \to x,\, y \in U} H^U_f(y) = f(x)$ pro každou funkci $f \in C(U^*)$. Množina U se nazývá semiregulární, jestliže pro každou funkci $f \in C(U^*)$ lze příslušnou funkci H^U_f rozšířit na $F \in C(U \cup U^*)$. Je-li U semiregulární, pak U_r je kompaktní.

Obrácení tohoto tvrzení neplatí v Bauerových harmonických prostorech. Rozhodněte, zda obrácené tvrzení platí v Brelotových prostorech (nebo alespoň v harmonickém prostoru indukovaném klasickými harmonickými funkcemi na n-rozměrném euklidovském prostoru $X = R^n$), tj. rozhodněte o správnosti následujícího

Tvrzení. *Nechť X je Brelotův prostor a buď $U \subset X$ relativně kompaktní otevřená (a tedy resolutivní) množina, $U^* \neq \emptyset$. Pak U je semiregulární, právě když U_r je kompaktní.*

V [4] je dokázáno, že tvrzení uvedené v úloze platí pro jistou třídu harmonických prostorů (speciálně pro klasické harmonické funkce na R^n). Nyní ukážeme (věta 5), že zmíněné tvrzení obecně v Brelotových prostorech neplatí.

1. Označení. Je-li M množina v topologickém prostoru, označíme $\overline{M}$ její uzávěr a int M její vnitřek.

Nyní budeme uvažovat prostor $X = E_3$ a klasické harmonické funkce. Nechť G_0 je Lebesgueova oblast v E_3 s iregulárním hrotem x. Předpokládejme, že G_1 je neprázdná otevřená množina s hladkou hranicí, pro niž $\overline{G}_1 \subset G_0$, a pro y z uzávěru množiny $G = G_0 - \overline{G}_1$ označme symbolem μ_y výmet (balayage) Diracovy míry ε_y soustředěné v bodě y na množinu $E_3 - G$. (Pro $z \in G$ je tedy μ_z harmonická míra příslušná množině G a bodu z.) Protože bod x je iregulární bod souvislé množiny G, nosič míry μ_x obsahuje množinu G_r všech regulárních bodů množiny G ([3], lemma 3.8). Odtud plyne, že

$$0 < \mu_x(G_1^*) < 1 . \tag{1}$$

2. Lemma. *Nechť $c > 0$ a nechť f je funkce na G^* taková, že $f(G_1^*) = \{0\}, f(G_0^*) = \{c\}$. Potom $H_f^G > 0$ na G a*

$$\liminf_{y \to x,\, y \in G} H_f^G(y) < c . \tag{2}$$

Důkaz. Existují $x_n \in G$ konvergující k x, pro něž míry μ_{x_n} konvergují slabě k μ_x ([3]; lemma 3.1). Speciálně

$$\lim_{n \to \infty} H_f^G(x_n) = c \,.\, \mu_x(G_0^*) .$$

Z (1) plynou nerovnosti $0 < \mu_x(G_0^*) < 1$ a tedy platí (2). Protože pro jisté $x_n \in G$ je $H_f^G(x_n) > 0$ a funkce f je nezáporná, je $H_f^G > 0$ na G.

3. Lemma. *Nechť $g \in C(G_1^*)$. Potom existuje právě jedno $c \in R^1$ tak, že Dirichletova úloha příslušná k množině G a funkci*

$$f = \begin{cases} g & na \quad G_1^* \\ c & na \quad G_0^* \end{cases}$$

má klasické řešení.

Důkaz. Z lemmatu 2 plyne, že konstanta c s uvedenou vlastností existuje nejvýše jedna. Označme μ_x^1 restrikci míry μ_x na G_1^* a položme (srv. s (1))

$$c = [\mu_x^1(G_1^*)]^{-1} \,.\, \mu_x^1(g)\,. \tag{3}$$

Stačí ukázat, že Dirichletova úloha příslušná k množině G a okrajové podmínce

$$h = \begin{cases} g - c & \text{na } G_1^* \\ 0 & \text{na } G_0^* \end{cases}$$

má klasické řešení. K tomu ovšem stačí zkoumat chování funkce H_h^G v okolí bodu x. Je-li však $x_n \in G$, $x_n \to x$ a míry μ_{x_n} konvergují slabě k míře μ, existuje $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ tak, že

$$\mu = \alpha \,.\, \varepsilon_x + (1 - \alpha)\, \mu_x$$

([2], Corollary 7.2.6). Vidíme, že

$$\lim_{n\to\infty} H_h^G(x_n) = 0 + (1 - \alpha) \,.\, [\mu_x^1(g) - c \,.\, \mu_x^1(G_1^*] = 0 = h(x)\,.$$

Tím je lemma dokázáno.

4. Lemma. *Nechť F je uzavřená podmnožina G_0 a nechť $G_0 - F$ je souvislá množina. Označme $\mathscr{K}$ systém všech spojitých funkcí na $\bar{G}_0 - F$, které jsou harmonické na $G_0 - F$ a konstantní na G_0^*; nechť $x_0 \in \bar{G}_0 - F$. Jestliže $k_n \in \mathscr{K}$ je neklesající posloupnost s limitou k a $k(x_0) < \infty$, potom $k \in \mathscr{K}$.*

Důkaz. Sestrojme neprázdnou otevřenou množinu G_1 s hladkou hranicí, pro niž $F \subset G_1 \subset \bar{G}_1 \subset G_0$.

Z klasické Harnackovy věty vyplývá, že k je harmonická funkce na oblasti $G_0 - F$. Toto je zcela zřejmé, pokud $x_0 \in G_0 - F$. Z předpokladu $k(y) = +\infty$ pro všechna $y \in G_1^*$ plyne snadno podle lemmatu 3 (srv. rovnost (3)), že $k(z) = +\infty$ pro každé $z \in G_0^*$. Je tedy pravda, že funkce k je v každém případě konečná v některém bodě z $G_0 - F$.

Nechť $m > n$ jsou přirozená čísla a $w \in G_0^*$. Protože funkce k je omezená na kompaktní množině $G_1^* \subset G_0 - F$, je posloupnost $\{k_n(w)\}$ omezená (srv. opět s (3)). Z principu maxima pro harmonické funkce dostáváme nerovnost

$$\sup\{(k_m - k_n)(z);\quad z \in \bar{G}_0 - G_1) \leqq \sup\{(k_m - k_n)(z)\,;\quad z \in G_1^* \cup \{w\}\}\,. \tag{4}$$

Posloupnost $\{k_n\}$ konverguje stejnoměrně na G_1^* (podle Diniho věty) a ze (4) tedy snadno plyne, že k je spojitá funkce na $\bar{G}_0 - G_1$. Nyní se již snadno důkaz tvrzení dokončí.

5. Věta. *Nechť G_0 a G_1 mají stejný význam jako v odst. 1. Nechť X je Alexandrovova kompaktifikace G_0. Pro každou otevřenou množinu $V \subset X$ označíme $\mathscr{H}(V)$*

množinu všech reálných spojitých funkcí na V, jejichž restrikce na $V \cap G_0$ jsou řešení Laplaceovy rovnice na $V \cap G_0$. Potom $(X, \mathscr{H})$ je Brelotův prostor, na němž konstanty jsou harmonické. Množina $U = G_0 - \bar{G}_1 \subset X$ není semiregulární a přitom $U_r = G_1^*$ je kompaktní.

Důkaz. Prostor X je zřejmě lokálně souvislý a nemá žádné isolované body. Z lemmatu 3 plyne, že regulární množiny vzhledem k $\mathscr{H}$ tvoří basi X. Pomocí lemmatu 4 a klasické Harnackovy věty se snadno odvodí, že $\mathscr{H}$ má Brelotovu konvergenční vlastnost. $(X, \mathscr{H})$ je tedy Brelotův prostor.

Uvažujme nyní otevřenou množinu $U = G_0 - \bar{G}_1$. Každý bod z G_1^* je regulární bod množiny U. Z lemmatu 2 plyne, že ideální bod ω ($\{\omega\} = X - G_0$) je iregulární bod množiny U a tedy U_r je kompaktní. Na $U^* = G_1^* \cup \{\omega\}$ definujme funkci h tak, aby $h(G_1^*) = \{0\}$ a $h(\omega) = 1$. Kdyby množina U byla semiregulární, existovala by

$$\lim_{y \to \omega\; y \in U} H_h^U(y) = c\,.$$

Pro funkci f definovanou v lemmatu 2 by pak existovalo klasické řešení Dirichletovy úlohy příslušné k množině G a funkci f, což je spor s (2).

Množina U není tedy semiregulární a důkaz věty je hotov.

6. Poznámka. Tvrzení, že $(X, \mathscr{H})$ je Brelotův prostor, je uvedeno bez důkazu v [2] (Excersice 6.3.10). Na jiný příklad harmonického prostoru s analogickými vlastnostmi, uvedený v článku C. Constantinescu (Rev. Roum. Math. Pures Appl. 10 (1965), 267–170), mne upozornil J. Lukeš.

Zvolíme-li $x_0 \in G_1$ a uvažujeme harmonický podprostor $X_0 = X - \{x_0\}$ prostoru $(X(\mathscr{H})$, dostáváme příklad nekompaktního Brelotova harmonického prostoru, v němž oblast U má uzavřenou množinu regulárních bodů a není semiregulární.

Literatura

[1] *C. Constantinescu:* Harmonic spaces and their connections with the semi-elliptic differential equations and with the Markov processes, Ellipitsche Differentialgleichungen (Symposium), Akademie-Verlag, Berlin, 1969.

[2] *C. Constantinescu - A. Cornea:* Potential theory on harmonic spaces, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[3] *E. G. Effros - J. L. Kazdan:* Applications of Choquet simplexes to elliptic and parabolic boundary value problems, J. Diff. Equatinos, *8* (1970), 95–134.

[4] *I. Netuka:* Poznámka o semiregulárních množinách, Čas. pěst. mat. *98* (1973), 419–421.

***Ivan Netuka,* Praha**

RECENSE

SYMMETRIC SPACES. Short courses presented at Washington University. Uspořádali W. M. Boothby a G. L. Weiss. Marcel Dekker, Inc., New York 1972. Stran XIII + 487, cena neudána.

Ve školním roce 1969/70 uspořádal Matematický ústav washingtonské university řadu přednášek o různých aspektech teorie symetrických prostorů. Recenzovaný sborník se skládá z textů, přednesených v těchto kursech. V dalším proberu stručné obsahy některých článků.

N. R. Wallach: *Minimal Immersions of Symmetric Spaces into Spheres.* Nechť $(M', \langle, \rangle)$ je Riemannova varieta, ∇' Riemannova konexe na M', M varieta (všechny variety a zobrazení jsou třídy C^∞) a $x : M \to M'$ imerse. Nechť $p \in M$, X a Y buďtež vektorová pole na M v okolí bodu p, rozšiřme je na vektorová pole X a Y na M' v okolí bodu p. Symetrické bilineární zobrazení (tzv. druhou fundamentální formu imerse x) $B_p : T_p(M) \times T_p(M) \to N_p = \{v \in T_p(M'); \langle v, T_p(M) \rangle_p = 0\}$ definujeme jako $B_p(X, Y) = \nabla'_{X_p} Y - \nabla_{X_p} Y$. Vektor střední křivosti se pak definuje jako $H_p = n^{-1} . \sum_{i=1}^{n} B_p(e_i, e_i)$, kde $e_1, \ldots, e_n$ je ortonormální base v $T_p(M)$. Imerse $x : M \to M'$ se konečně nazývá minimální, jestliže $H \equiv 0$. V článku se studují minimální imerse do euklidovských prostorů a do sfér; např. je dán popis minimálních isometrických imersí kompaktních symetrických prostorů do sfér. Rovněž se studují otázky rigidity. Nechť S^n_K je sféra euklidovského prostoru E^{n+1} křivosti k. Dvě minimální imerse $x, y : S^n_x \to S^p_1$ se nazývají ekvivalentní, jestliže $Ax = y$. Je dokázán tento výsledek: Pro každé $n \geqq 3$ a $K > 0$ existuje vektorový prostor $W_{n,K}$ a jeho kompaktní konvexní podmnožina $L_{n,K}$, která hladce parametrisuje množinu neekvivalentních minimálních isometrických imersí $x : S^n_K \to S^p_1$, které neleží ve velké sféře S^{p-1}_1. Jestliže $K \neq 1, n/2(n + 1), n/3(n + 2)$ a $L_{n,K} \neq \emptyset$, potom $\dim L_{n,K} \geqq 18$. Vnitřní body $L_{n,K}$ odpovídají imersím, pro něž p je maximální.

R. Gangolli: *Spherical Functions on Semisimple Lie Groups.* Předpokládejme, že známe klasickou Fourierovu analýzu na euklidovském prostoru, na anuloidu nebo na kompaktní Lieově grupě. V každém z těchto případů máme lokálně kompaktní topologickou grupu G a nějaký prostor F funkcí na G. Jestliže mluvíme o harmonické analýze funkcí z F, studujeme obvykle následující problémy: (1) Konstrukce duálního objektu k (G, F). (2) Konstrukce speciálních funkcí. (3) Definice Fourierovy transformace $f \to \hat{f}$. V práci není studován obecný případ (G, F), ale následující situace: G je souvislá nekompaktní polojednoduchá Lieova grupa s konečným centrem, K maximální kompaktní podgrupa v G, $C_c(G)$ prostor funkcí s kompaktním nosičem, $F = C_c(K \setminus G/K) \subset C_c(G)$ se skládá z těch f, pro něž $f(k_1 x k_2) = f(x)$ pro všechna $x \in G$; $k_1, k_2 \in K$ (tyto funkce se nazývají sférickými).

R. Gangolli: *Spectra of Discrete Uniform Subgroups of Semisimple Lie Groups.* Nechť G je souvislá polojednoduchá Lieova grupa s konečným centrem a $\Gamma \subset G$ diskrétní podgrupa taková, že G/Γ je kompaktní; nechť dx je Haarova míra na G. Pro každé $p > 0$ nechť $L_p(G/\Gamma)$ je prostor měřitelných funkcí f na G, pro něž (i) $f(\gamma x) = f(x)$ pro $\gamma \in \Gamma$, $x \in G$; (ii) $\|f\|_{p,\Gamma} = (\int_{G/\Gamma} |f(x)|^p \, dx)^{1/p} <$

$< \infty$. Prostor $L_2(G/\Gamma)$ je separabilní Hilbertův prostor. Grupa G má unitární representaci R na $L_2(G/\Gamma)$ definovanou relací $(R_x f)(y) = f(yx)$ pro $y \in G$. Hlavním problémem je studium této representace.

K. I. Cross - R. A. Kunze: *Fourier Decompositions of Certain Representations.* Uvažuje se topologická transformační grupa (U, X), kde U a X jsou Hausdorffovy prostory, grupa U je kompaktní a X je lokálně kompaktní prostor. Nechť rovnice $L(u) f(x) = f(u^{-1}x)$ pro $u \in U$ $x \in X$ udává spojitou unitární representaci L grupy U na prostoru $L_2(X)$ funkcí; předmětem vyšetřování je tato representace.

R. Hermann: *Geometric Ideas in Lie Group Harmonic Analysis Theory.* Je dán přehled autorových výsledků o asymptotickém chování elementů representace Lieovy grupy a studiu vztahů mezi harmonickou analýzou na Lieově grupě a kompaktifikací homogenních prostorů.

A. W. Knapp: *Bounded Symmetric Domains and Holomorphic Discrete Series.* Studují se symetrické prostory nekompaktního typu, které jsou přirozeným způsobem komplexními varietami.

S. Kobayashi: *Schwarz Lemma.* Jsou uvedeny některé věty, obsažené v autorově knize o hyperbolických varietách.

Y. Matsushima: *On Tube domains.* Válcová oblast $T(\Omega) \subset C^n$ je množina bodů $z = x + iy \in \in C^n$, kde $y \in \Omega \subset R^n$ a Ω má tyto vlastnosti: (i) Ω je otevřená, konvexní a pro každé $x \in \Omega$ a $\lambda < 0$ je $\lambda x \in \Omega$, (ii) Ω neobsahuje žádnou přímku. Dokazuje se následující výsledek: Nechť $T(\Omega)$, $T(\Omega')$ jsou holomorfně ekvivalentní, potom existuje regulární lineární transformace τ : : $R^n \rightarrow R^n$, pro níž $\tau(\Omega) = \Omega'$. Každou $T(\Omega)$ je možno vnořiti jako otevřenou množinu do algebraické podvariety B komplexního projektivního prostoru tak, že *Aut* $T(\Omega)$ je podgrupou grupy projektivních transformací zachovávajících B a $T(\Omega)$.

Z předchozího je patrné, jaká je zhruba problematika jednotlivých článků. U zbývajících udávám proto jen jejich autory a názvy. S. Helgason: *Conical Distributions and Group Representations.* J. A. Wolf: *Fine Structure of Hermitian Symmetric Spaces.* H. Furstenberg: *Boundaries of Riemannian Symmetric Spaces.* A. Koranyi: *Harmonic Functions on Symmetric Spaces.* N. J. Weiss: *Fatou's Theorem for Symmetric Spaces.* S. J. Rallis: *New and Old Results in Invariant Theory with Applications to Arithmetic Groups.* Hsien-Chung Wang: *Topics on Totally Discontinuous Groups.*

Sborník je jistě velmi cenný, zvláště si můžeme vážiti podrobných seznamů literatury u jednotlivých článků.

Alois Švec, Praha

Isaac Chavel: RIEMANNIAN SYMMETRIC SPACES OF RANK ONE. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 5. M. Dekker, Inc., New York 1972. Str. VII + 81, cena neudána.

Účelem monografie je podati elementární výklad teorie uvedených prostorů. V první kapitole jsou uvedeny základní definice (lineární konexe, její tensory torse a křivosti, Riemannova varieta, geodetiky, Jacobiho pole, fokální a konjugované body) a nejdůležitější vlastnosti konjugovaných bodů. Druhá kapitola je pokračováním knihy Gromolla, Klingenberga a Meyera Riemannsche Geometrie im Grossen (Springer Verlag 1968) a dokazuje se v ní Bergerova věta: Nechť M je úplná jednoduše souvislá Riemannova varieta, pro níž $\frac{1}{4} \leqq K(a) \leqq 1$, $K(a) =$ křivost 2-řezu a; potom M je homeomorfní se sférou nebo je isometrická s Riemannovou symetrickou varietou řádu jedna (řád jedna = ostře positivní křivost). Třetí kapitola je v podstatě úvodem do teorie Riemannových homogenních prostorů. Nejprve jsou uvedeny nutné definice z teorie Lieových grup a je probrána teorie přirozeně reduktivních Riemannových homogenních prostorů a jejich kanonických konexí, zavedených K. Nomizu. Riemannův homogenní prostor G/H se nazývá 2-homogenní, jestliže dva páry stejně vzdálených bodů je možno v sebe převésti pohybem; jsou nalezeny podmínky pro to, aby G/H byl 2-homogenní. Konečně v poslední kapitole jsou studovány Riemannovy symetrické prostory řádu jedna. Riemannův prostor M se nazývá symetrickým, jestliže je souvislý a pro každé $p \in M$ existuje isometrie $s_p : M \to M$ s těmito vlastnostmi: (i) $s_p(p) = p$; (ii) jestliže $\gamma(t)$ je geodetika s $\gamma(0) = p$, pak $s_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$ [v definici na str. 64 si opravte $\gamma(0) = 0$ na správné $\gamma(0) = p$]. Jestliže M je Riemannův symetrický prostor, pak je nutně lokálně symetrický, tj. $\nabla R = 0$, kde R je tensor křivosti. Nejprve se dokazuje Cartanova věta, podle níž jednoduše souvislý lokálně symetrický Riemannův prostor je nutně symetrický. Nechť M je Riemannův symetrický prostor s positivní křivostí. Potom M je Riemannův homogenní prostor, jeho křivost splňuje $K \geqq$ const. > 0 a podle Bonnetovy-Meyersovy věty je M kompaktní. Grupa $J(M)$ isometrií a její komponenta identity G jsou kompaktní Lieovy grupy transitivní na M; jestliže H je isotropická grupa bodu $o \in M$, potom G/H je analyticky difeomorfní s M. Všechny geodetiky v G/H jsou jednoduše uzavřené a mají konstantní délku. Po řadě přípravných úvah se ukáže, že G/H má strukturu k-dimensionálního projektivního prostoru.

Chavelova kniha má velkou výhodu v tom, že je velmi krátká, ale dochází k hlubokým a současně moderním výsledkům. Od čtenáře se nepředpokládají velké předběžné znalosti, ale četba není triviální. Důkazy jsou provedeny detailně. Knihu doporučuji hlavně klasicky vzdělaným čtenářům, protože při dokazování výsledků se nepoužívá složité Morseovy teorie ani teorie kompaktních Lieových grup.

Alois Švec, Praha

I. Kra: AUTOMORPHIC FORMS AND KLEINIAN GROUPS. W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass. (U.S.A.) 1972. Stran XIV + 464, cena neudána.

Nechť *Möb* označuje grupu zobrazení $z \to (az + b)/(cz + d)$, $ad - bc = 1$, rozšířené komplexní roviny $C^* = C \cup \{\infty\}$, předmětem studia jsou podgrupy $\Gamma \subset$ *Möb*. Nechť X je Riemannova plocha a Γ grupa jejích konformních automorfismů, definujme $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma;\ \gamma x = x\}$. Říkáme, že Γ je nespojitá v x jestliže: (i) Γ_x je konečná, (ii) existuje okolí U bodu x tak, že $\gamma(U) = U$ pro $\gamma \in \Gamma_x$ a $\gamma(U) \cap U = \emptyset$ pro $\gamma \in \Gamma - \Gamma_x$. Pišme $\Omega(\Gamma) = \{x \in X;\ \Gamma$ nespojitá v $x\}$ grupa Γ se nazývá nespojitá, jestliže $\Omega(\Gamma) \neq \emptyset$. Limitní množina se definuje jako $\Lambda(\Gamma) = X - \Omega(\Gamma)$; je možno ukázati, že card $\Lambda(\Gamma) = 0, 1, 2, \infty$. Jestliže card $\Lambda(\Gamma) \leqq 2$, pak Γ se nazývá elementární. Jestliže $\Omega(\Gamma) \neq \emptyset$ a card $\Lambda(\Gamma) = \infty$, pak Γ se nazývá neelementární Kleinova grupa. Jestliže Γ je Kleinova a v C^* existuje kruh k, jehož vnitřek se zachovává transformacemi z Γ, pak Γ se nazývá Fuchsova (prvního druhu v případě $\Lambda(\Gamma) = k$, jinak druhého druhu). Nechť $\tilde{X}$ je universální krytí Riemannovy plochy X, potom $\tilde{X}$ je buď C^* nebo C nebo $U = \{z \in C;\ |z| < 1\}$; zřejmě $G = \{$konformní automorfismy plochy $\tilde{X};\ \pi \circ g = \pi\} \subset$ *Möb*.

Předmětem první kapitoly je podrobnější analýza Riemannových ploch (abelovské diferenciály, Riemannova-Hurwitzova relace, Riemannova-Rochova věta, Weylovo lemma). V další kapitole se popisuje struktura orbit Kleinovy grupy G. Nechť $\pi : \Omega(G) \to \Omega(G)/G$ je přirozená projekce; na prostoru $\Omega(G)/G$ se konstruuje komplexní struktura taková, že π je holomorfní zobrazení. Uveďme jeden korolár získaných výsledků: Nechť Γ je Fuchsova grupa operující na $U = \{z \in C;\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$; jestliže Γ obsahuje parabolický element (tj. $\mathrm{trace}^2\, \gamma = (a + d)^2 = 4$), pak U/Γ obsahuje propíchnutí (= puncture). Tato propíchnutí jsou ve vzájemné korespondenci s třídami konjugovanosti parabolických elementů. Dochází se až k důkazu klasické věty: Nechť S je kompaktní Riemannova plocha rodu $g \geqq 2$ a Aut S grupa jejích konformních automorfismů, potom card Aut $S \leqq 84(g - 1)$.

Třetí kapitola se zabývá automorfními formami. Nechť $D \subset C^*$ je otevřená množina, p a q celá čísla nebo poloviny celých čísel. Nechť $f: D \to C^*$ je holomorfní zobrazení. Pro každou funkci φ na $f(D)$ definujeme na D funkci $(f^*_{p,q}\varphi)(z) = \varphi(f(z))f'(z)^p \overline{f'(z)}^q$; píšeme $f^*_p = f^*_{p,0}$. Nechť nyní D má hranici ∂D s card $\partial D > 2$, G je nespojitá grupa konformních automorfismů množiny D a $q \geqq 2$ je celé číslo. Měřitelná automorfní forma váhy $-2q$ se pak definuje jako třída ekvivalence (modulo funkce skoro všude nulové) měřitelných funkcí μ, pro něž $A^*_q\mu = \mu$ pro všechna $A \in G$. Podrobné vyšetření automorfních forem vede k hlavní větě, podle níž na každé Riemannově ploše existuje nekonstantní meromorfní funkce. Ve čtvrté kapitole se probírají aproximační věty pro holomorfní funkce, v další tzv. Eichlerova kohomologie. Vyložení obsahu páté kapitoly přesahuje rámec referátu. Jako přímá aplikace se v šesté kapitole dokazuje Riemannova-Rochova věta se svými důsledky (struktura prostoru abelovských diferenciálů). V předchozím vybudovaný aparát je velmi mocný. Ukáži to citováním některých výsledků, které se na jeho základě již poměrně snadno dokáží a jsou obsaženy v závěrečné kapitole. Nejprve se dokazují Behnkeho-Steinovy výsledky. Jestliže D je jednoduše souvislá oblast v otevřené Riemannově ploše M, potom každá holomorfní funkce na D může být stejnoměrně aproximována na kompaktních podmnožinách v D funkcemi holomorfními na M. Nechť $\{p_k\}$ je diskrétní posloupnost na M, $\{v_k\}$ posloupnost přirozených čísel, potom existuje holomorfní funkce f na M tak, že f má nuly pouze v bodech $\{p_k\}$ a $\mathrm{ord}_{p_k} f = v_k$. Nechť dále z_k je lokální souřadnice s $z_k(p_k) = 0$ a $\{a_{k,i(k)}, a_{k,i(k)+1}, \ldots, a_{k,j(k)}\}$ konstanty pro $k = 1, 2, \ldots$, kde $i(k)$ a $j(k)$ jsou celá čísla s $j(k) \geqq$ $\geqq i(k)$; potom existuje na M meromorfní funkce f, která je holomorfní a nenulová na M s výjimkou bodů $\{p_k\}$, kde má Laurentovy řady $f(z_k) = \sum_{j=i(k)}^{\infty} a_{k,j} z_k^j$.

Nechť dále M je Riemannova plocha a $A(M)$ resp. $K(M)$ okruh holomorfních resp. těleso meromorfních funkcí na M. Nechť M a N jsou Riemannovy plochy a $F: A(N) \rightarrow A(M)$ homomorfismus takový, že: (i) obraz F obsahuje alespoň jednu nekonstantní funkci, (ii) restrikce F na $C \subset A(N)$ je automorfismus komplexních čísel, který zachovává $\sqrt{(-1)}$. Potom existuje jediné holomorfní zobrazení $F^* : M \rightarrow N$, které indukuje F, tj. $(Ff)(x) = f(F^*(x))$ pro $f \in A(N)$, $x \in M$. Pro meromorfní funkce dostáváme tento výsledek. Nechť $F: K(N) \rightarrow K(M)$ je surjektivní isomorfismus; jestliže $F(i) = i$ a navíc $F(\lambda) = \lambda$ pro $\lambda \in C$ při N kompaktní, potom F je indukován jediným holomorfním homeomorfismem $F^* : M \rightarrow N$. Ohodnocením na tělese K rozumíme zobrazení $v : K - \{0\} \rightarrow Z$ (= celá čísla) takové, že pro $f, g \in K - \{0\}$ platí $v(fg) = v(f) + v(g)$ a $v(f + g) \geqq \min\{v(f), v(g)\}$. Nechť $x \in M$; zobrazení $v_x : K(M) - \{0\} \rightarrow Z$, $v_x(f) = \mathrm{ord}_x f$, je ohodnocením. Ukazuje se, že každé ohodnocení na $K(M)$ je ekvivalentní s nějakým ohodnocením v_x.

Knihu doporučuji čtenářům, kteří znají teorii Riemannových ploch. Začátečník by se nepochybně ztratil v množství technických detailů středních kapitol.

Alois Švec, Praha

Frederick W. Stevenson: PROJECTIVE PLANES. W. H. Freeman and Comp., San Francisco, 1972. Stran X + 416, cena $ 13.50.

Autor ve své předmluvě zcela jasně popisuje význam své knihy: „Tato kniha je pokusem o hlubší studium důsledků jednoduchého axiomatického systému, který popisuje matematickou strukturu, známou jako projektivní rovina. O projektivní rovině bylo napsáno mnoho knih. Pickertova *Projektive Ebenen* (Springer, 1955) a novější Dembowskiho *Finite Geometries* (Springer, 1968) vyčerpávají popis jediného matematického objektu způsobem, který není obvyklý. Tyto knihy však nejsou učebnicemi. Jsou velmi cenné pro pokročilé aspiranty (graduate students), ale jsou mimo chápání průměrného studenta (undergraduate). Učebnice projektivní geometrie se snaží pokrýti široký okruh problémů. To je samozřejmé, protože projektivní geometrie je přirozeným odrazovým můstkem ke studiu neeuklidovských geometrií a dokonce lineární algebry. Nicméně jejich účelem není studovati projektivní rovinu jako samostatný objekt. Všeobecně je přijato za správné, že student matematiky by měl prostudovati do hloubky alespoň jeden její obor. Tímto oborem je často algebra — nejspíše teorie grup nebo okruhů. Ale i teorie projektivní roviny je vhodným oborem pro takové koncentrované studium. Obdobně jako teorie grup nebo okruhů má jednoduchý axiomatický základ. Také ona uvádí studenta do několika základních pojmů, z nichž nejdůležitější je pojem grupy transformací. Projektivní rovina je pozoruhodně příbuzná s algebraickými strukturami se dvěma binárními operacemi (těleso, okruh s dělením, polotěleso, skorotěleso, kvasitěleso). Její studium dále přivádí studenta k jiným oborům matematiky, např. ke kombinatorické analýze, lineární algebře a teorii čísel. Konečně je zde mnoho neřešených problémů; některé jsou patrně řešitelné, jiné jsou klasické a nebudou patrně nikdy vyřešeny."

S tímto autorovým úvodem plně souhlasím. V naší zemi byla kdysi projektivní geometrie na vysoké úrovni. Z různých důvodů však její rozvoj naprosto ustrnul (až na jedinou čestnou výjimku); obdobně je tomu i v algebraické geometrii. Ostatně ani historie geometrie se nedostala za objev neeukleidovské geometrie a jména jako S. Lie jsou téměř zapomenuta. Za projektivní geometrii se u nás převážně vydává teorie konstrukcí kuželoseček z mnoha (mnoho $\doteq$ pět) elementů. Tento stav je nutno radikálně změnit. Důležité je, že světový vývoj v teorii projektivní (afinní, neeukleidovské atd.) geometrie je možno i u nás během několika let pohodlně dohnati; v algebraické geometrii je to podle mého mínění již nemožné. Stevensonova kniha je velmi užitečná. Jest však již smutnou tradicí, že bude dlouho nepřístupná a budeme si muset počkat na případný ruský překlad. Toho jsme se již dočkali alespoň u Hartshorneovy knihy (*Foundations of Projective Geometry*; Benjamin, 1967), která je však daleko elementárnější. Nejlepším řešením by patrně bylo napsání vlastní české učebnice. Protože o Stevensonovu knihu chci vzbudit skutečný zájem, jsem nucen nejprve vyložit nejzákladnější pojmy, jež jsou v ní studovány.

Rovinou nazveme trojici $(\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{I})$, kde $\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{I}$ jsou množiny a $\mathscr{P} \cap \mathscr{L} = \emptyset$, $\mathscr{P} \cup \mathscr{L} \neq \emptyset$, $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P} \times \mathscr{L}$; prvky z $\mathscr{P}$ se nazývají *body*, prvky z $\mathscr{L}$ *přímkami* a $(p, L) \in \mathscr{I}$ znamená, že *bod* p *leží na přímce* L. Rovina $(\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{I})$ se nazývá *projektivní*, jestliže splňuje následující axiomy: (1) každé dva body $p \neq q$ leží na právě jedné přímce; (2) každé dvě přímky $L \neq M$ procházejí právě jedním bodem; (3) existuje čtveřice bodů, z nichž žádné tři neleží na přímce (tzv. 4-*roh*).

Čtenář patrně zná pouze jediný příklad projektivní roviny, a to rovinu nad reálnými čísly $\mathbf{R}$. Ta je definována takto: $\mathscr{P} = \{[x, y, z] : x, y, z \in \mathbf{R},\ [x, y, z] \neq [0, 0, 0]\}$, $\mathscr{L} = \{[a, b, c] : a, b, c \in \mathbf{R},\ [a, b, c] \neq [0, 0, 0]\}$, $\mathscr{I} = \{[x, y, z], [a, b, c]) : ax + by + cz = 0\}$; $[p, q, r]$ značí množinu všech trojic tvaru (pz, qz, rz), kde $0 \neq z \in \mathbf{R}$. Uveďme proto velmi obecnou konstrukci projektivní roviny. *Ternárním okruhem* (ternary ring) nazýváme systém $T = (R, t)$, kde R je množina a $t : R \times R \times R \to R$ je zobrazení s následujícími vlastnostmi: (1) existují prvky $0, 1, \in R$ tak, že $0 \neq 1$, $t(0, a, b) = t(a, 0, b) = b$, $t(1, a, 0) = t(a, 1, 0) = a$; (2) k daným $a, b, c, d \in R$, $a \neq c$, existuje jediné $x \in R$ tak, že $t(x, a, b) = t(x, c, d)$; (3) k daným $a, b, c, \in R$ existuje jediné $x \in R$ tak, že $t(a, b, x) = c$; (4) k daným $a, b, c, d \in R$, $a \neq c$, existuje jediná dvojice $(x, y) \in \in R \times R$ tak, že $t(a, x, y) = b$ a $t(c, x, y) = d$. Nechť nyní $T = (R, t)$ je daný ternární okruh a $\mathscr{P} = \{[x, y], [x], z : x, y \in R\}$, $\mathscr{L} = \{\langle x, y\rangle, \langle x\rangle, Z : x, y \in R\}$, $\mathscr{I} = \{([x, y], \langle m, k\rangle) : : t(x, m, k) = y\} \cup \{([x, y], \langle x\rangle)\} \cup \{([x], \langle x, y\rangle)\} \cup \{(z, \langle x\rangle)\} \cup \{([x], Z)\} \cup (z, Z)$. Předpokládáme-li $\mathscr{P} \cap \mathscr{L} = \emptyset$, $z \notin \{[x, y], [x] : x, y \in R\}$, $Z \notin \{\langle x, y\rangle, \langle x\rangle : x, y \in R\}$, je $\pi_T = = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{I})$ projektivní rovinou. Důkaz není obtížný. Ukažme např., která (jediná) přímka L prochází dvěma různými body $p, q, \in \mathscr{P}$: (α) Nechť $p = [a, b]$, $q = [a, d]$, pak $L = \langle a\rangle$; (β) nechť $p = [a, b]$, $q = [c, d]$, $a \neq c$, pak existuje jediná dvojice $(m, k) \in R \times R$ tak, že $t(a, m, k) = b$, $t(c, m, k) = d$ a $L = \langle m, k\rangle$; (γ) $p = [a, b]$, $q = [c]$, pak existuje jediné $k \in R$ tak, že $t(a, c, k) = = b$ a $L = \langle c, k\rangle$; (δ) $p = [a, b]$, $q = z$, pak $L = \langle a\rangle$, (ε) $p = [a]$, $q = [b]$ nebo $q = z$, pak $L = Z$. Obdobně by se našel (jediný) průsečík dvou přímek. Žádné tři z bodů $[0, 0]$, $[0]$, $[1, 1]$, z neleží na přímce. Uvedený příklad se zdá být nesmírně umělým. Ukažme, že tomu tak není. Nechť $\pi = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{I})$ je projektivní rovina a $\{u, v, o, e\}$ její daný 4-roh. Systém $T(u, v, o, e) \equiv \equiv T = (R, t)$ definujme následovně: (α) $R = ou - \{u\}$, kde pq značí přímku body p, q; (β) pro $a, b, c \in R$ se $t(a, b, c)$ definuje jako $vw \cap ou$, kde postupně $m = vb \cap oe$, $n = um \cap ve$, $p = = on \cap uv$, $q = cv \cap oe$, $r = uq \cap ov$, $s = pr \cap av$, $w = su \cap oe$. Snadno se ukáže, že předchozí konstrukce je proveditelná a T je ternárním okruhem, který ovšem záleží na volbě 4-rohu $\{u, v, o, e\}$. Dvě roviny $\pi = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{I})$, $\pi' = (\mathscr{P}', \mathscr{L}' \mathscr{I}')$ se nazývají *isomorfní*, jestliže existují vzájemně jednoznačná zobrazení $f: \mathscr{P} \to \mathscr{P}'$, $F: \mathscr{L} \to \mathscr{L}'$ tak, že $(p, L) \in \mathscr{I}$ právě když $(f(p), F(L)) \in \mathscr{I}'$. Platí, že pro projektivní rovinu π máme $\pi \sim \pi_{T(u,v,o,e)}$, kde $\{u, v, o, e\}$ je libovolný 4-roh v π. Ternární okruh je tedy algebraický systém, který nám umožňuje zavést souřadnice do projektivní roviny. Nicméně pojem ternárního okruhu je dosti neobvyklý. Z tohoto důvodu proberme podrobněji příklad projektivní roviny π_0, která je projektivním rozšířením obyčejné eukleidovské roviny. V π_0 zvolme pravoúhlý systém souřadnicový a nechť $o = (0, 0)$, $e = (1, 1)$, u (resp. v) je nevlastní bod osy x (resp. y). Potom R je právě osa x; nechť $a = (\alpha, 0)$, $b = (\beta, 0)$, $c = (\gamma, 0)$. Provedením předchozí konstrukce zjistíme, že $t(a, b, c) = (\alpha\beta + \gamma, 0)$. Tento příklad nám dává vodítko, jak konstruovati ternární okruhy.

Nechť $T = (R, t)$ je ternární okruh a $P_T = (R, +, .)$ je algebra, v níž $a + b = t(1, a, b)$, $a \circ b = t(a, b, 0)$. Ternární okruh T se nazývá *lineárním*, jestliže $t(a, b, c) = a \circ b + c$, kde $a \circ b + c$ je definováno v P_T, tj. $t(a, b, c) = t(1, t(a, b, 0), c)$. Systém $D = (S, +, .)$, tj. množina S s dvěma binárními operacemi $+$ a $.$, se nazývá *okruhem s dělením* (division ring), jestliže: (1) $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a . (b . c) = (a . b) . c$ pro $a, b, c \in S$; (2) existují $o, e \in S$ tak, že $o \neq e$, $a + o = o + a = a$, $e . a = a . e = a$ pro $a \in S$; (3) k $a \in S$ existuje $b \in S$ tak, že $a + b = b + a = o$, jestliže $a \neq 0$, existuje $c \in S$ tak, že $a . c = c . a = e$; (4) $a + b = b + a$ pro $a, b \in S$; (5) $a . (b + c) = a . b + a . c$, $(a + b) . c = a . c + b . c$ pro $a, b, c \in S$. Okruh s dělením $D = (S, +, .)$ se nazývá *tělesem*, jestliže navíc $a . b = b . a$ pro $a, b \in S$. Nechť $D = (S, +, .)$ je okruh s dělením. Potom $T = (S, t)$, kde $t(a, b, c) = a . b + c$, je ternární okruh. Tímto způsobem je možno konstruovati některé ternární okruhy. Zřejmě nás bude zajímati fundamentální otázka: Buď dána projektivní rovina; ptáme se, kdy jí příslušný ternární okruh vznikne popsanou konstrukcí z nějakého okruhu s dělením. Projektivní rovina π se nazývá *desarguesovská*, má-li tuto vlastnost: jestliže p, q, r a p', q', r' jsou trojice nekolineárních bodů takových, že přímky pp', qq', rr' procházejí jedním bodem, potom body $pq \cap p'q'$, $pr \cap p'r'$, $qr \cap q'r'$ leží na jedné přímce. Projektivní rovina π se nazývá *pappovská*, má-li tuto vlastnost: jestliže p, q, r a p', q', r' jsou trojice různých bodů na přímkách L resp. L' $(L \neq L')$ a bod $L \cap L'$ je různý od bodů $p, \ldots, r'$, potom body $pq' \cap p'q$, $pr' \cap p'r$, $qr' \cap q'r$ leží na přímce. Odpověď na uvedený problém je nyní snadno formulovatelná: Projektivní rovina π je desarguesovská (resp. pappovská) právě když $\pi \sim \pi_T$ pro některý lineární ternární okruh T, k němuž přiřazená algebra P_T je okruhem s dělením (resp. tělesem).

V předchozím jsem krátce popsal, jakými hlavními problémy se recensovaná kniha zabývá. Všimněme si nyní podrobněji jejího obsahu. První část se skládá ze čtyř kapitol; v prvních dvou jsou uvedeny definice rovin, jejich netriviální příklady a elementární vlastnosti. Další dvě kapitoly se zabývají kolineacemi projektivních rovin, tj. isomorfismy (f, F) roviny π na sebe. Hlavním předmětem studia je jejich transitivita. Celá druhá část je věnována studiu desarguesovských rovin. Studují se vztahy mezi existencí desarguesovských konfigurací a transitivitou kolineací, teorie harmonických bodů, pappovské roviny. Ukazuje se ekvivalence Pappova axiomu s fundamentální větou projektivní geometrie. Pokračuje se studiem rovin nad okruhy s dělením a tělesy, velká pozornost je věnována grupám kolineací v těchto rovinách. V závěrečné kapitole se pak ukazuje, že těmito rovinami jsou vyčerpány všechny desarguesovské (resp. pappovské) roviny. Dochází se k některým hlubokým výsledkům; příkladem je důkaz toho, že každá konečná desarguesovská rovina je pappovská. Část třetí obsahuje podrobnou analýzu nedesarguesovských rovin nad lineárními ternárními okruhy. Tyto roviny jsou alespoň částečně desarguesovské. Např. platí toto tvrzení: Nechť π je projektivní rovina, $\{u, v, o, e\}$ její 4-roh; ternární okruh $T(u, v, o, e)$ je lineární právě když všechny z v centrálně perspektivní trojúhelníky tvaru bpw, vqr jsou axiálně perspektivní z uv.

Výše jsem popsal, jak se z ternárního okruhu $T = (R, t)$ utvoří algebra $P_T = (R, +, \circ)$. Všechny P_T s T lineárním se nazývají *planárními okruhy*; platí, že planární okruh je generován jediným lineárním ternárním okruhem. Planární okruh $P = (R, +, \cdot)$ se nazývá *kartézskou grupou*, jestliže $(R, +)$ je grupa. Příkladem kartézské grupy je $\mathbf{P} = (\mathbf{R}, +, \circ)$, kde $\mathbf{R}$ jsou reálná čísla, $+$ je obvyklé sčítání a $a \circ b = ab$ pro $ab \geqq 0$, $a \circ b = a^2b$ pro $a > 0 > b$, $a \circ b = ab^2$ pro $a < 0 < b$; $\mathbf{P}$ nesplňuje ani asociativitu násobení ani distributivní zákony. Kolineace projektivní roviny π se nazývá *centrální kolineací*, jestliže alespoň jedna přímka je při ní bodově invariantní (potom existuje i invariantní bod); nechť $CC(p, L)$ je grupa centrálních kolineací se středem p a osou L. Projektivní rovina π se nazývá *(p, L)-transitivní*, jestliže grupa $CC(p, L)$ je transitivní Nyní platí věta: Nechť π je projektivní rovina, $\{u, v, o, e\}$ její 4-roh a $T = T(u, v, o, e)$ příslušný ternární okruh; π je (v, uv)-transitivní právě když T je lineární ternární okruh, jehož planární okruh P_T je kartézská grupa. Tato věta je typem tvrzení, která jsou dokazována pro různé druhy rovin nad planárními okruhy. Uvažují se např. planární okruhy s asociativním resp. komutativním násobením resp. sčítáním, kvasitělesa čili Veblenovy-Wedderburnovy systémy (tj. P je kartézská grupa s jedním distributivním zákonem), skorotělesa (nearfield : P je kvasitěleso s asociativním násobením), polotělesa (P je kartézská grupa s oběma distributivními zákony) a alternující okruhy (P je polotěleso a $a(ab) = (aa)\, b$, $(ab)\, b = a(bb)$ pro $a, b \in R$; alternujícím okruhům příslušejí tzv. Moufangovy roviny). Závěr této části je velmi hluboký. Ukazuje se že jestliže π je konečná projektivní rovina s grupou kolineací, která je transitivní na množině všech 4-rohů, potom π je Moufangova a tedy pappovská.

Kniha obsahuje na 350 cvičení. Vydavatel uvádí, že existuje zvláštní svazek, obsahující řešení těchto cvičení z prvních dvou částí knihy; tento svazek však nemám k disposici. Kniha je převážně věnována projektivním rovinám, samozřejmě jsou však probrány příslušné specialisace na afinní rovinu. Velkým kladem je, že text je osvětlován na řadě netriviálních příkladů. Tyto příklady jsou algebraické i geometrické. Náš student zná různé axiomatické systémy, definující rozličné algebraické struktury. Docení však např. požadavek asociativnosti, když nic neasociativního neviděl? V knize může takových příkladů nalézti celou řadu.

Stevensonovu knihu mohu čtenáři jen doporučit. Není však tak elementární, jak uvádí autor; lépe se hodí pro čtenáře, který umí text přebíhat a znovu se k němu vracet, než pro toho, kdo čte pečlivě řádek po řádku. Patrně bych dal knize jinou skladbu (právě z tohoto důvodu), ale to je názor již příliš osobní.

Alois Švec, Praha

H. G. Garnir, M. De Wilde, J. Schmets, ANALYSE FONCTIONNELLE. Tome II: Mesure et intégration dans l'espace Euclidien E_n. Birkhäuser Verlag, Bassel und Stuttgart, 1972, 287 stran.

Solidní učebnice (lineární) funkcionální analýzy vždy věnují pozornost použití obecných výsledků a metod v konkrétních funkcionálních prostorech. Autoři zamýšlejí studovat prostory posloupností, funkcí a distribucí ve třetím díle jejich práce „Analyse fonctionnelle", což vyžaduje dobrou znalost teorie míry a integrálu. Recenzovaný druhý díl se zabývá právě teorií míry a integrálu v E_n. Většina výsledků zde odvozených se snadno přenese na případ obecné míry. Rieszova věta o reprezentaci, existence Haarovy míry a studium různých typů konvergence posloupností spojitých funkcí tvoří součást třetího dílu.

První kapitola pojednává o míře a má 22 stran. Semiintervalem $I =]a, b]$ v E_n, kde $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in E_n$, se rozumí součin intervalů $]a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, n$; $\mathscr{P}(I)$ značí nějaké dělení I na semiintervaly, $I_m \to I$ je podle definice $\delta_{I_m}(x) \to \delta_I(x)$, $\forall x \in E_n$, kde δ_M značí charakteristickou funkci množiny M. Buď Ω otevřená množina v E_n. Míra v Ω je definována jako zobrazení μ z množiny všech semiintervalů obsažených v Ω do množiny komplexních čísel, které splňuje tyto vlastnosti:

a) $\forall I \subset \Omega$, $\forall \mathscr{P}(I)$ $\mu(I) = \sum_{J \in \mathscr{P}(I)} \mu(J)$ (aditivita);
b) $\forall I \subset \Omega$, $\exists c(I) > 0$, $\forall \mathscr{P}(I)$ $\sum_{J \in \mathscr{P}(I)} |\mu(J)| \leqq c(I)$ (μ má ohraničenou variaci);
c) $I_m \to I$ v Ω implikuje $\mu(I_m) \to \mu(I)$ (spojitost).

V této kapitole jsou odvozeny základní vlastnosti měr a uvedeny některé příklady měr.

Druhá kapitola (82 stran) se zabývá integrací funkcí. V celé kapitole Ω značí otevřenou množinu v E_n, I, I_i semiintervaly v Ω a μ míru v Ω. Jednoduché funkce jsou definovány jako (konečné) lineární kombinace charakteristických funkcí semiintervalů a integrál jednoduché funkce je definován obvyklým způsobem. Množina $e \subseteq \Omega$ je μ-zanedbatelná (v jiné terminologii μ-nulová), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje spočetné pokrytí množiny e semiintervaly I_i takové, že $\sum V\mu(I_i) < \varepsilon$. Pomocí μ-zanedbatelných množin lze již zavést pojmy „μ-skoro všude v množině $A \subseteq \Omega$", „$\sup_{\mu\text{-s.v.}, x \in A} f(x)$", „$f_m$ konverguje stejnoměrně k f μ-s.v. v A" atd. Posloupnost jednoduchých funkcí α_m se nazývá μ-slušnou, jestliže $\int |\alpha_m - \alpha_k| \, dV\mu \to 0$ pro $\inf(m, k) \to \infty$ (tj. $L_1(V\mu)$ — cauchyovská); pak posloupnosti $\int |\alpha_m| \, dV\mu$ a $\int \alpha_m \, d\mu$ konvergují. Funkce f je podle definice μ-integrovatelná, jestliže je μ-s. v. limitou μ-slušné posloupnosti jednoduchých funkcí α_m; μ-integrál funkce f je zaveden předpisem $\int f \, d\mu = \lim_m \int \alpha_m \, d\mu$. μ-měřitelné funkce jsou μ.-s.v. limity posloupností jednoduchých funkcí. Jsou odvozena všechna základní tvrzení o μ-měřitelných a μ-integrovatelných funkcích a jejich posloupnostech. Uveďme jedno z nich, které se ne vždy uvádí v učebnicích integrálního počtu. Buď l Lebesgueova míra a $B(x, R)$ otevřená koule se středem v x a poloměrem R. Je-li f lokálně l-integrovatelná, pak

$$\lim_{R \to 0+} \frac{1}{l[B(x, R)]} \int_{B(x,R)} |f(x) - f(y)| \, dy = 0$$

pro l-s. v. $x \in \Omega$.

Třetí kapitola (15 stran) je věnována borelovským funkcím a množinám a čtvrtá (14 stran) součinu měr (Fubiniho věta).

Nejdelší kapitolou (94 stran) je pátá kapitola: Vztahy mezi měrami. Pro lokálně μ-integrovatelnou funkci f $(f.\,\mu)\,(I) = \int_I f \, d\mu$ definuje míru $f.\,\mu$ v Ω. Dokazuje se Radonova věta: Je-li $\mu \ll \nu$ (tj. μ je absolutně spojitá vzhledem k ν), pak existuje (jednoznačně ν-s.v.) lokálně ν-integrovatelná funkce f taková, že $\mu = f.\,\nu$; je-li $\nu = l$, lze udat předpis pro

$$f\colon f(x) = \lim_{R \to 0+} \mu[B(x, R)]/l[B(x, R)]$$

pro l-s.v. $\in \Omega$. Studuje se silná a slabá konvergence měr ($\mu_m \to \mu$, jestliže $V(\mu_m - \mu)\,(I) \to 0$ pro $\forall I \subseteq \Omega$; $\mu_m \rightharpoonup \mu$, jestliže $\mu_m(e) \to \mu(e)$ pro každou borelovskou ohraničenou množinu e s $\bar{e} \subseteq \Omega$), zúžení, rozšíření a obraz míry (při μ-měřitelném zobrazení x': $\Omega \to \Omega' \subseteq E_{n'}$). Integrál měr $\int \lambda_x \, d\mu$ je definován rovností $(\int \lambda_x \, d\mu)\,(I) = \int \lambda_x(I) \, d\mu$, kde λ_x jsou míry v $\Omega' \subseteq E_{n'}$ pro μ-s.v. $x \in \Omega$, takové, že $\lambda_x(I)$ jsou μ-integrovatelné pro $\forall I \subseteq \Omega'$; uvádí se Tonelliho věta s důkazem. Zavádí se pojem konvolučního součinu měr, atomové a difusní míry. Připomeňme, že μ je difusní, jestliže jednobodové podmnožiny množiny Ω jsou μ-zanedbatelné. Dokazuje se Lebesgueova věta o rozkladu míry a známé Halmosovo zobecnění tohoto tvrzení: Je-li μ difusní a e_0 je μ-integrovatelná (tj. charakteristická funkce množiny e_0 je μ-integrovatelná), pak $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0, \forall e$:

$$e \subseteq e_0\,, \quad \operatorname{diam} e \leqq \eta\,, \quad e \ \mu\text{-měřitelná} \Rightarrow V\mu(e) \leqq \varepsilon\,.$$

Považuji za sympatické a neobvyklé, že tato kapitola obsahuje princip bang-bang, což jistě přivítají ti, kdož se zabývají teorií optimálního řízení, a Ljapunovovu větu o konvexitě a kompaktnosti oboru hodnot míry. Pokud vím, knihy, kde jsou tato dvě důležitá tvrzení dokázána, lze spočítat na prstech jedné ruky. Snad si zaslouží ocitovat překrásná kniha: H. Hermes, J. La Salle, Functional Analysis and time optimal control, Academic Press, New York and London, 1969. Ocitujeme obě tvrzení. Princip bang-bang: Buď e μ-měřitelná množina v Ω, $M(x)$ μ-měřitelná matice typu $M \times N$ definovaná na e a B ohraničená podmnožina C_N. Pak množina

$$\mathscr{A}(B) = \{\textstyle\int_e M(x)\vec{f}(x) \, d\mu : \vec{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x)) \text{ definovaná a } \mu\text{-měřitelná na } e\,, \ \vec{f}(x) \in B \ \mu\text{-s.v.}\}$$

má následující vlastnosti: a) $\mathscr{A}(B)$ je ohraničená. b) Je-li μ difusní nebo B konvexní, pak $\mathscr{A}(B)$ je konvexní. c) Je-li μ difusní nebo B konvexní a je-li B kompaktní, pak $\mathscr{A}(B)$ je kompaktní. d) Je-li μ difusní a B kompaktní, pak $\mathscr{A}(B) = \mathscr{A}(\text{ext } B)$, kde ext B značí množinu všech extremálních bodů množiny B. Ljapunovova věta: Jsou-li míry $\mu_1, \ldots, \mu_N$ difusní a je-li e μ_i-integrovatelná ($i = 1, \ldots, N$), pak množina

$$\{(\mu_1(e'), \ldots, \mu_N(e')): e' \ \mu_i\text{-měřitelná} \ (i = 1, \ldots, N), \quad e' \subseteq e\}$$

je konvexní a kompaktní v C_N.

Zbytek páté kapitoly je vyplněn studiem množin měr, které jsou absolutně spojité vzhledem k pevné míře (věta o stejnoměrné absolutní spojitosti, kritérium ohraničenosti atd.).

Poslední dvě kapitoly (celkem 47 stran) jsou úvodem do teorie měr a integrace funkcí s hodnotami v lokálně konvexním prostoru E. Kromě jednoduchých zobecnění některých částí předchozího textu jsou zde odvozeny např. Pettisova věta, ekvivalence μ-integrovatelnosti a striktní μ-integrovatelnosti v případě, kdy E je striktní limitou Fréchetových prostorů. Kniha končí důkazem Radonovy věty pro vektorové míry, kde E je separabilní reflexivní Banachův prostor, nebo Fréchetův-Schwartzův prostor, resp. striktní induktivní limita těchto prostorů.

Seznam literatury je opět omezen jen na knihy (7 cit.), z nichž nejčastěji je citována kniha H. G. Garnira „Fonctions de variables réelles", Vol. II, Vander, Louvain, 1965. Kniha je vyplněna 120 cvičeními a dobře se čte.

Josef Daneš, Praha

Paul L. Butzer, Rolf J. Nessel: FOURIER ANALYSIS AND APPROXIMATION, Vol. 1. One-Dimensional Theory, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1971, XVI + 553 stran.

Impuls k napsání této knihy vyšel z mezinárodní konference o harmonické analýze a integrálních transformacích v Oberwolfachu v roce 1965. Autoři jsou známí odborníci v teorii aproximací a integrálních transformací, působí na vysoké škole technické v Cáchách.

Kniha pojednává o teorii Fourierových řad, Fourierových integrálů a o teorii aproximací. Jde tedy o dílo, které sjednocuje tři velmi široké, samostatné oblasti matematické analýzy. Cílem knihy je vyložit základy všech tří jmenovaných oblastí se zvláštním zřetelem na principy, které je sjednocují.

Text je rozdělen do pěti částí: Aproximace pomocí singulárních integrálů, Fourierova transformace, Hilbertova transformace, Charakterizace jistých tříd funkcí a Teorie nasycení (saturation theory).

V první části jsou vyloženy klasické metody sčítání Fourierových řad, přímé aproximační věty, věty Bernsteinovy a Jacksonovy pro polynomy nejlepší aproximace a singulární integrály.

Druhá část pojednává o Fourierově transformaci v L^1 a v L^p, $p > 1$, jak pro případ periodických funkcí tak také pro případ funkcí daných na celé reálné ose; zejména je zkoumán vztah teorie Fourierových řad a Fourierovy transformace. Jsou zde také uvedeny složité věty o reprezentaci posloupností resp. funkcí pomocí Fourierovy transformace. Metody Fourierovy transformace pro řešení různých úloh s parciálními diferenciálními rovnicemi druhého řádu (vedení tepla, Dirichletova a Neumannova úloha pro jednotkovou kružnici, rovnice struny aj.) uzavírají tuto část knihy.

V poměrně krátké části třetí je pojednáno o Hilbertově transformaci a konjugovaných funkcích.

Favardovy třídy (třídy nasycení) funkcí, které pro daný konvoluční integrál poskytují nejlepší možný řád aproximace jsou popsány ve čtvrté části knihy. Tato část má uplatnění v závěru knihy, který je věnován teorii nasycení daného aproximačního procesu a ve kterém zejména jde o stanovení saturační vlastnosti daného aproximačního procesu a o charakterizaci jemu příslušné Favardovy třídy.

Tento strohý a neúplný výčet obsahu knihy ozřejmuje, že jde o dílo mimořádně širokého záběru. Je až udivující, že takové množství materiálu lze vtěsnat do jediného svazku. Autorům se toto podařilo mimo jiné také vhodnou volbou symboliky ale zejména maximálním využitím jednotících hledisek, společných všem vyloženým teoriím. Výklad je zcela přesný, k četbě není třeba speciálních znalostí. Přesto ovšem nelze říci, že by bylo snadné tuto knihu rychle přečíst. Vhodným výběrem jednotlivých kapitol knihy lze sestavit tři zcela samostatné kursy: o Fourierových řadách, o Fourierově transformaci a o teorii aproximací.

Jak už sám podtitul napovídá, jde o první díl knihy. Autoři v předmluvě ke knize hovoří o dalším dílu, který je stadiu příprav a bude pojednávat o podobných problémech pro funkce více proměnných. Dá se právem předpokládat, že celek, který takto vznikne bude jednou ze základních monografií vedle knih A. Zygmunda, N. K. Bari, S. Bochnera a K. Chandrasekharana, N. I. Achiezera aj.

Recenzovaný exemplář knihy je zájemcům k dispozici v knihovně Matematického ústavu ČSAV v Praze.

Štefan Schwabik, Praha

Serge Dubuc: GÉOMÉTRIE PLANE. Presses Universitaires de France, Colleciton SUP, Le Mathématicien 8. Stran 147, obr. 37. Cena 15 F. Paris 1971.

Ve sbírce „*Les précis de l'enseignement supérieur*" (SUP), která je u nás prakticky neznámá, vycházejí svazky kapesního formátu prozatím z patnácti různých oborů humanitních, přírodovědeckých a sociologických. V sekci matematické, kterou řídí Jean-Pierre Kahane, vyšlo dosud 8 svazků. Naše čtenáře mohou zajímat jednotlivé tituly i autoři; jsou to: 1. Jean-Louis Krivine: *Théorie axiomatique des ensembles.* 2. Jean-Pierre Serre: *Cours d'aritmétique.* 3. Roger Temam: *Analyse numérique.* 4—5. Louis Comtet: *Analyse combinatoire,* svazky I a II. 6. Gérard Letac: *Problèmes de probabilité.* 7. André Gramain: *Topologie des surfaces.* 8. Serge Dubuc: *Géométrie plane.*

Podepsaný recensent má k disposici jen svazek poslední. Jeho autor, Serge Dubuc, pracuje v matematickém oddělení university v Montréalu. V sedmi kapitolách, jimž předchází krátký úvod, probírá elementární projektivní a afinní geometrii v rovině s některými metrickými specialisacemi, a to s typickou francouzskou lehkostí. Užívá výhradně metody analytické, ale píše upřímně, že v geometrii syntetická metoda je matkou metody analytické. Analytická metoda umožňuje však zobecnění klasických geometrických úvah. Autor konstruuje modely takových geometrií tím, že souřadnice jsou prvky jakéhokoli *algebraicky uzavřeného* komutativního tělesa K. Tím se vyhýbá těm geometriím, kde K není komutativní nebo algebraicky uzavřené, tedy např. i konečným rovinám, ale mnohé jeho výsledky lze užít i v těchto případech, totiž ty, které spočívají jen na lineární algebře.

Hned v úvodu definuje autor svým způsobem barycentrické souřadnice v rovině, jichž pak v celé knížce užívá. V 1. a 2. kapitole pojednává o projektivní přímce a projektivní rovině. Projektivní transformace právě tak jako transformace souřadnic jsou charakterisovány příslušnými regulárními maticemi nad tělesem K. Užití barycentrických souřadnic mu dovoluje rychlé uvedení věty Menelaovy a věty Cevovy z geometrie trojúhelníka a jednoduchý důkaz věty Desarguesovy pro homologické trojúhelníky. Kapitola 3 je věnována afinní rovině, kterou autor konstruuje běžným způsobem z projektivní roviny vynecháním jedné přímky. Kombinuje zde vektorový počet s barycentrickými souřadnicemi a uvádí základní vlastnosti translací, homotetií a obecných afinních transformací; pátý odstavec této kapitoly o klasifikaci projektivních transformací v rovině patří spíše do kapitoly 2. Ve 4., resp. 5. kapitole jsou probrány vlastnosti kuželoseček v projektivní, resp. afinní rovině. Zde se ovšem předpokládá, že charakteristika tělesa K je různá od 2. V projektivní rovině je ovšem uvedena i polarita a věta Pascalova. Afinní vlastnosti jsou založeny na studiu homotetických kuželoseček. Odtud už není daleko k zavedení kolmých vektorů, čímž je všechno připraveno ke studiu kružnic a trojúhelníků v kapitolách 6 a 7. Je tu zobecněna řada pojmů a výsledků z klasické elementární geometrie pro tuto rovinu nad tělesem K, jako např. věta Ptolemaiova pro tětivový čtyřúhelník, pojem mocnosti bodu ke kružnici, Eulerova a Simsonova přímka i Apolloniova kružnice z geometrie trojúhelníka. Kružnici devíti bodů, která je u nás většinou známa pod jménem kružnice Feuerbachova, nazývá autor kružnicí Eulerovou. Užitím isogonální kvadratické transformace jsou odvozeny vlastnosti Lemoinových bodů, přímek a kružnic z geometrie trojúhelníka aj.

Odborník si tuto knížku přečte s potěšením, začátečníkovi může působit jisté potíže autorův velmi stručný způsob vyjadřování, který nutí čtenáře řadu podrobností domyslet samostatně. Naproti tomu neruší tiskové chyby, jichž je ostatně velmi málo, protože si je každý snadno opraví sám (např. na str. 12, 14, 53).

Karel Havlíček, Praha

L. Chambadal: LES ENSEMBLES (Množiny). V edici Connaissance-Université vydalo nakladatelství Bordas, Paříž—Montréal 1971; 150 stran, cena neudána.

Při povrchním pohledu na tuto útlou knížku kapesního formátu vznikne nejspíše dojem, že jde o další populární brožurku o množinách. Ani zběžný výčet názvů jednotlivých kapitol (1. Množiny a relace, 2. Zobrazení, 3. Operace, 4. Binární relace, 5. Ordinální a kardinální čísla, 6. Axiomy teorie množin) patrně ještě nepřesvědčí o tom, co zjistíme, jakmile se do textu knížky zadíváme poněkud pozorněji: že totiž jde o dílko sice drobné, avšak s aspiracemi vyššími, nežli by se zdálo. Záhy shledáme, že k útlosti knížky velmi podstatnou měrou přispívá především hutný a úsporný styl, bez jakýchkoliv zbytečných příkras. Dá se dokonce říci, že text je redukován na nezbytné minimum vynecháním všeho, bez čeho je možné se obejít. Je až s podivem, jak velké množství definic i tvrzení lze směstnat na tak malém prostoru. (Ušetřeného místa je využíváno mj. též k občasnému vyjadřování kritických osobních stanovisek autorových např. k terminologii, ke korektnosti běžných definic, k metodice výkladu teorie množin či k pracím jiných autorů.) Poněvadž jde skutečně o základní pojmy teorie množin (včetně příslušenství jako jsou relace, operace, zobrazení apod.), je většina jednoduchých tvrzení ponechána bez důkazů; ty jsou podávány tehdy, jsou-li složitější anebo vyžadují-li netriviální obrat.

Nejde tedy rozhodně o žádnou „rekreační" četbu. V této souvislosti snad poněkud překvapuje jestliže se na obálce knížky tvrdí, že je určena žákům škol a jejich rodičům (!) — a ovšem též učitelům a vysokoškolským studentům. Nedovedu si nějak představit normální rodiče našich středoškoláků (ledaže by sami byli profesionálními matematiky), jak se delektují např. definicí vektorového prostoru nad komutativním tělesem (uvedenou ostatně jen tak mimochodem pro ilustraci distributivního zákona): je to „aditivně zapisovaná abelovská grupa s jednou vnější operací (operátory jsou prvky onoho tělesa), splňující podmínky asociativity, distributivity, ...". Spíše lze předpokládat, že autor, který je profesorem matematiky v tzv. přípravných třídách lycea (jež nemají obdoby v našem školském systému) napsal pro své žáky stručný přehled žádoucích vědomostí. V tomto smyslu by tedy bylo možné využívat Chambadalovy knížky u nás spíše až na úrovni prvního ročníku vysoké školy.

František Zítek, Praha

Károly Jordan: CHAPTERS ON THE CLASSICAL CALCULUS OF PROBABILITY. Vydalo nakladatelství Akadémiai Kiadó, Budapešť, jako 4. svazek knižnice Disquisitiones Mathematicae Hungaricae v roce 1972. Stran 619.

Autor knihy, profesor Károly Jordan, se narodil před více než sto lety. Původním zaměřením byl fyzik, vyučoval však třicet let na Vysoké škole ekonomické v Budapešti. Jeho zálibou byla nejen věda, ale i dějiny vědy a zvláště počtu pravděpodobnosti. Profesor Jordan proto shromáždil velkou sbírku klasických děl o pravděpodobnosti, která byla bohužel v roce 1956 zničena. Péčí nakladatelství Maďarské akademie věd vychází Jordanova kniha, podávající obraz teorie pravděpodobnosti před jejím intensivním rozvojem mezi oběma světovými válkami. Autor se v ní neustále vrací do historie a k původní literatuře. Kniha je tedy i příspěvkem k celým dějinám teorie pravděpodobnosti.

Výklad určený spíše nematematikům, může matematikovi připadat na některých místech zdlouhavým. Na příklad stanovení pravděpodobností binomického rozložení se nazývá prvním problémem Bernoulliovým, jejich sčítání druhým problémem. Určit rozložení součtu ok na hracích kostkách je problémem Monmortovým-Moivreovým. Řeší se za pomoci Dirichletova faktoru nespojitosti (Fourierovou transformací). Nelze se však ubránit určité závisti při představě doby, kdy universitní učitel stál před úlohou, bez spěchu vyložit řadu základních faktů, a mohl, byl-li ovšem tak sečtělý jako profesor Jordan, osvěžovati výklad četbou mistrovského úryvku o ruletě od M. Maeterlincka či úsměvné pasáže z dekretu Ludvíka XIV. při založení Loterie Royale. Dojem o trvalé hodnotě poznatků, jichž se posluchačům dostává, mohl být ještě podtržen tím, že v propočtených příkladech je účetnictví pojišťoven vedeno v tolarech.

Kapitolu první tvoří s velkou erudicí napsaný, historicko-filosofický výklad pojmu pravděpodobnost. Matematické prostředky počtu pravděpodobnosti, obsažené v kapitole II, začínají kombinatorikou. Dále se předkládají základy diferenčního počtu, Laplaceův integrál, gamma a beta funkce, momenty a semiinvarianty, metoda nejmenších čtverců, aproximace funkcí, interpolace apod. Axiomy teorie pravděpodobnosti a Bayesův teorém jsou vyloženy v další kapitole. Zvláštní kapitola je věnována aritmetickému a geometrickému průměru. Dvě kapitoly se týkají posloupností opakovaných pokusů. Jednorozměrný případ zahrnuje problém Bernoulliův, Poissonův a Lexisův. Sem jsou také u příležitosti výkladu o aproximaci normálním rozložením zařazeny některé otázky statistické indukce o parametrech tohoto rozložení. Přístup je bayesovský. Vícerozměrné normální rozložení je uvedeno pod názvem Bravaisova formule. Jeho vlastnosti jsou podrobně rozebrány opět zejména v souvislosti s numerickou aproximací některých rozložení. Zde je třeba zdůraznit základní přístup autorův. Počet pravděpodobnosti je důsledně chápán jako metoda výpočtu pravděpodobností složitých jevů z pravděpodobností jevů jednodušších. Rozumí se výpočtu numerického za použití dostatečně přesných přiblížení. Jedna kapitola obsahuje výběr úloh: problém ruinování hráče (Huygens 1657), Pacioliovu úlohu o rozdělení sázky v nedokončené hře (1494), zmíněný již Monmortův-Moivreův problém (1710), pravděpodobnosti při hře poker, trente et quarante, při ruletě a v loterii. Kapitola o geometrických pravděpodobnostech je věnována převážně úlohám podobným Buffonově (1733) a Bertrandově (1889). Knihu ukončuje výklad základů vyrovnávacího počtu s důrazem na vysvětlení výpočetních metod a krátká zmínka o kinetické teorii plynů. Na závěr je tabulka binomických koeficientů. Bibliografie na konci každé kapitoly obsahuje bohatství odkazů na těžko dostupná díla minulých století o počtu pravděpodobnosti.

Kniha je vydána velmi pečlivě. Z některých chyb, vzniklých přehlédnutím při korekturách, je nejnápadnější záměna Theory of Games místo Theory of Gases v obsahu a na sudých stránkách stejnojmenné kapitoly. Se zájmem si dílo přečtou ti, kdo mají zálibu v minulosti a v poučení o vývoji vědy.

Petr Mandl, Praha

ZPRÁVY

OPRAVA

Technickým nedopatřením se stalo, že u článku „*Doc. Jan Vyšín, CSc. šesťdesiatpätročný*", který byl otištěn ve 4. čísle ročníku *98* (1973) nebylo uvedeno jméno autora doc. dr. JOZEFA MORAVČÍKA ze Žiliny. Velmi se tímto omlouváme jak autorovi článku tak i jubilantovi.

Redakce

DVACÁTÝ DRUHÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Ve školním roce 1972—73 proběhl již XXII. ročník celostátní matematické olympiády, pořádané opět ve čtyřech kategoriích (kat. *A, B, C* pro žáky škol II. cyklu, kat. *Z* pro žáky ZDŠ). Vyvrcholením soutěže bylo celostátní *III. kolo* kategorie *A*, pořádané z technických důvodů na dvou místech — v *Žilině* a v *Bratislavě*. Vítězem se stal JAROMÍR ŠIMŠA z Ostravy, druhým byl KAREL HORÁK ze Strakonic a třetím MIROSLAV KMOŠEK z Brna. Celkem bylo vyhlášeno 20 vítězů a dalších 17 úspěšných řešitelů.

Ústřední výbor matematické olympiády zajistil obdobně jako v předcházejících ročnících další hlubší matematické školení jednak pro nejlepší řešitele úloh *II. kola* kategorií *B* a *C* ve *Žďáru n. S.*, jednak pro užší výběr representantů na XV. mezinárodní matematickou olympiádu; toto školení se konalo v *Malešicích*. Během školního roku probíhaly semináře pro širší výběr možných representantů pro *MMO*; hlavní středisko tohoto školení bylo na gymnasiu v Praze 2, ul. W. Piecka. Další závažnou činností *ÚVMO* bylo zajišťování a recense rukopisů pro edici „*Škola mladých matematiků*". V uplynulém školním roce vyšly sice jen dva svazky (č. 31 — OL. ODVÁRKO: Booleova algebra a č. 32 — J. VYŠÍN, J. KUČEROVÁ: Druhý výlet do moderní matematiky), avšak další svazky této edice jsou v tisku nebo v recensi.

Vlastimil Macháček, Praha

XV. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

XV. MMO se konala 5.—16. 7. 1973 v Sovětském svazu v Moskvě. Zúčastnil se jí rekordní počet družstev — 16: Rakousko (A), Bulharsko (BG), Kuba (C), ČSSR (CS), NDR (D), Francie (F), Velká Británie (GB), Maďarsko (H), Mongolsko (M), Holandsko (NL), Polsko (PL), Rumunsko (R), Švédsko (S), Finsko (SF), SSSR (SU) a Jugoslávie (YU). S výjimkou Kuby, kterou reprezentovalo 5 žáků, byla všechna družstva osmičlenná. Vedoucí čs. delegace byl RNDr. JOZEF MORAVČÍK, CSc., docent VŠD v Žilině, pedagogickým vedoucím byl JIŘÍ MÍDA, odb. asistent PeF UK v Praze.

Žáci řešili ve dvou dnech celkem 6 úloh, jež vybrala mezinárodní jury z návrhů, které zaslaly jednotlivé účastnící se státy. Mezi soutěžní úlohy byla zařazena i jedna československá. Maximálně mohl každý účastník získat 40 bodů.

XV. MMO skončila pro československé družstvo poměrně úspěšně. V neoficiálním pořadí družstev podle počtu získaných bodů se umístili čs. žáci na 7. místě. Poprvé od X. MMO získal jeden z čs. účastníků lepší cenu než třetí. Byl jím PAVEL FERST z 3. roč. gymnasia na Sladkovského nám. v Praze 3, jenž obdržel 2. cenu.

Výsledky XV. MMO podle států zachycuje tabulka:

Stát	A	BG	C	CS	D	F	GB	H	M	NL	PL	R	F	SF	SU	YU
Body	144	96	42	149	188	153	164	215	65	96	174	141	99	86	254	137
1. cena	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	—	—	—	—	3	—
2. cena	—	—	—	1	2	3	—	2	—	—	2	1	1	—	2	—
3. cena	6	1	1	4	4	1	5	5	1	2	4	3	1	2	3	5

Jiří Mída, Brandýs nad Labem

PRVNÍ KONFERENCE O APLIKACÍCH MATEMATIKY — OLOMOUC 1973

Ve dnech 17.—20. září 1973 pořádaly JČSMF a JSMF ve spolupráci s přírodovědeckou fakultou Palackého university v Olomouci Konferenci o aplikacích matematiky. Konference byla zařazena do rámce oslav čtyřstého výročí založení university v Olomouci. Byla to prvá konference československých matematiků toho druhu. Zúčastnilo se jí přes sto členů JČSMF a JSMF.

Předmětem konference byly matematické aplikace v nejrůznějších oblastech vědy, výzkumu i praxe. V dopoledních zasedáních bylo předneseno 15 hodinových a půlhodinových sdělení o matematických metodách důležitých pro aplikace nebo v aplikacích už použitých. Tato sdělení se týkala variačních metod, metody konečných prvků, optimalizačních metod v reaktorové fyzice, byly předneseny referáty o řízených Markovových procesech, o matematice a informatice, o aplikacích matematiky: v linguistice, v teorii dědičnosti, v psychologii a o některých aplikacích matematické logiky. Další přednášky pojednávaly o matematických modelech mechaniky deformovaných těles, o některých otázkách optimalizace, o aplikaci matematiky a zejména teorie grafů v dopravě. Na závěr byly předneseny referáty o matematických aplikacích v mechanice tekutin a o variačních metodách v teorii kvaziparabolických rovnic.

V odpoledních zasedáních byli pak účastníci konference informováni o aplikacích matematiky prováděných na některých fakultách vysokých škol a ve vědeckých a výzkumných ústavech. Informace o aplikacích matematiky podalo 18 účastníků konference z těchto vysokých škol, fakult a ústavů: Strojní fakulta ČVUT, stavební fakulta ČVUT, elektrotechnická fakulta ČVUT, Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vysoká škola technická v Bratislavě, Matematický ústav ČSAV, Matematický ústav ČSAV, pobočka v Brně, Palackého universita v Olomouci, Vysoká škola báňská v Ostravě, matematicko-fyzikální fakulta University Karlovy, Ekonomický ústav ČSAV, Vysoká škola dopravní v Žilině, Státní výzkumný ústav pro stavbu strojů v Běchovicích u Prahy.

Z vědeckých i přehledných referátů všech řečníků dopoledních zasedání jednoznačně vyplynula důležitost aplikací matematiky a její přínos pro naší socialistickou společnost, odpolední informace poskytly dobrý přehled o aplikační činnosti v oboru matematiky. Bohužel program konference byl příliš nahuštěn, takže se nedostávalo času k diskusím o konkrétních aplikacích matematiky na pracovištích. Taková diskuse byla nesporně velmi užitečná.

Dva večery byly věnovány panelovým diskusím. Prvý večer se hovořilo o významu nového vědního oboru, o matematické kybernetice, druhý večer se diskutovalo o návrhu uspořádat konferenci matematiků v roce 1974 v Ostravě. Diskuse na obou večerních besedách byly živé, věcné a užitečné a vzešly z nich následující podnětné návrhy: Návrh skupiny matematiků pracujících v teorii výpočtových procesů a systémů, návrh na konání konferencí o aplikacích matematiky vždy v pětiletých intervalech a návrh na uspořádání Konference československých matematiků v roce 1974 v Ostravě, jejíž úkolem by bylo vedle vědecké problematiky též projednat šestý pětiletý plán státních programů základního výzkumu a posoudit návrhy na perspektivní rozvoj československé matematiky.

Účastníci konference vyslovují dík Palackého universitě za pohostinství, které přispělo k vytvoření přátelského prostředí a tím i k úspěchu konference, a přejí Palackého universitě mnoho vědeckých i společenských úspěchů v dalším jejím rozvoji.

Josef Novák, Praha

OZNÁMENÍ

Druhé československé symposium o teorii grafů se bude konat v Praze ve dnech 24. až 28. června 1974. Předsedou organizačního výboru je prof. dr. MIROSLAV FIEDLER, DrSc. z Matematického ústavu ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1, ČSSR.

* * *

Jednota československých matematiků a fyziků a Jednota slovenských matematiků a fyziků ve spolupráci s Vysokou školou báňskou v Ostravě uspořádají ve dnech 26.—29. srpna 1974 v Ostravě Konferenci československých matematiků. Vedle vědeckých přednášek bude na konferenci podán přehled o stavu bádání v jednotlivých oborech matematiky v ČSSR a projednány návrh na sestavení šestého pětiletého plánu státních programů základního výzkumu a návrhy na perspektivní rozvoj československé matematiky. Součástí konference bude Valné shromáždění členů matematické vědecké sekce JČSMF. Přihlášky zasílejte na adresu: Vladimír Doležal, Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.

Redakce