ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 99 * PRAHA 10. 5. 1974 * ČÍSLO 2

ON QUASICONTINUOUS AND CLIQUISH FUNCTIONS

ANNA NEUBRUNNOVÁ, Bratislava

(Received December 30, 1971)

The notion of quasicontinuous and cliquish function will be used in the sense as it was introduced in [1] or [2]. Thus a function defined on a topological space X and assuming values in a topological space is said to be quasicontinuous at the point $x \in X$ if for any neighbourhood U of the point x and any neighbourhood V of $f(x)$ there is an open set $\emptyset \neq G \subset U$ such that $f(G) \subset V$. Further, a function f defined on a topological space X and assuming values in a metric space Y with the metric ϱ is said to be cliquish at a point $x \in X$ if to any positive ε and any neighbourhood U of the point x there is an open set $\emptyset \neq G \subset U$ such that $\varrho[f(x_1), f(x_2)] < \varepsilon$ for any two $x_1, x_2 \in G$. A function f is said to be quasicontinuous (cliquish) if it is quasicontinuous (cliquish) at each point $x \in X$.

The present paper consists of three parts. The first one concerns the pointwise limits of transfinite sequences of quasicontinuous and cliquish functions. In the second part, the mutual connections between the Denjoy property and the properties $\boldsymbol{D}_1$, $\boldsymbol{D}_2$ and $\boldsymbol{L}$ (the definitions see belov) are studied. The last part contains some assertions connected with the results of S. MARCUS ([1], [4]) and H. THIELMANN ([2]).

I.

In this part (X, ϱ) denotes a separable metric space and (Y, ϱ') any metric space. The functions which are dealt with are defined on X and assume values in Y. Let Ω be the first uncountable ordinal number. The transfinite sequence $\{a_\xi\}_{\xi<\Omega}$ of elements of a metric space Y with the metric ϱ' is said to be convergent and have a limit $a \in Y$ if for each $\varepsilon > 0$ there exists an ordinal number $\mu < \Omega$ such that for each ξ, $\mu \leqq \xi < \Omega$ the inequality $\varrho'(a_\xi, a) < \varepsilon$ holds.

A transfinite sequence $\{f_\xi\}_{\xi<\Omega}$ defined on a set T with the values in a metric space M is said to be (pointwise) convergent to a function f defined on T if $\{f_\xi(t)\}_{\xi<\Omega}$ is convergent to $f_\xi(t)$ for any $t \in T$.

Instead of the notation $\varrho'(a, b)$ for $a, b \in Y$ the notation $|a - b|$ will be used.

Theorem 1. *Let $\{f_\xi\}$ $(\xi < \Omega)$ be a transfinite sequence of quasicontinuous functions pointwise converging to a function f. Then f is quasicontinuous.*

Proof. Let f be not quasicontinuous at $x_0 \in X$. Then there is an $\varepsilon > 0$ and a $\delta > 0$ such that for any nonempty open set $G \subset K(x_0, \delta)$, ($K(x_0, \delta)$ denotes the sphere with the centre x_0 and the radius δ) there exists $t \in G$ with

$$(1) \qquad |f(t) - f(x_0)| \geqq \varepsilon \ .$$

Hence the set T of all t for which (1) is true is dense in $K(x_0, \delta)$. Let S be a countable dense subset of T. There is $\mu < \Omega$ such that for $\xi > \mu$

$$(2) \qquad f_\xi(x) = f(x)$$

for any $x \in S \cup \{x_0\}$. The last fact easily follows from the definition of transfinite convergence and the fact that $S \cup \{x_0\}$ is countable. (See e.g. [8], Lemma 1.)

Let $\xi_0 > \mu$ be any fixed ordinal number. The quasicontinuity of f_{ξ_0} at x_0 implies the existence of a nonempty open set $\emptyset \neq U \subset K(x_0, \delta)$ such that $|f_{\xi_0}(x) - f_{\xi_0}(x_0)| < \varepsilon$ for $x \in U$. Evidently $U \cap S \neq \emptyset$. For any $t \in U \cap S$ we have $|f_{\xi_0}(x_0) - f_{\xi_0}(t)| < \varepsilon$. But $f_{\xi_0}(x_0) = f(x_0)$, $f_{\xi_0}(t) = f(t)$ (in view of (2)), hence $|f(x_0) - f(t)| < \varepsilon$, which is a contradiction to (1).

Note. It is clear from the above proof that the separability of X assumed in the theorem may be substituted by local separability.

Theorem 2. *Let $\{f_\xi\}$ $(\xi < \Omega)$ be a transfinite sequence of cliquish functions pointwise converging to a function f. Then f is cliquish.*

Proof. Let f be not cliquish at a point x_0. Then there are $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ such that in any open set G, $\emptyset \neq G \subset K(x_0, \delta)$ there is at least one pair y, z such that

$$(1) \qquad |f(y) - f(z)| \geqq \varepsilon \, .$$

Let $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a countable basis of open sets in $K(x_0, \delta)$. In each G_n there is a pair y_n, z_n such that

$$(2) \qquad |f(y_n) - f(z_n)| \geqq \varepsilon \, .$$

Consider the set S of all y_n and z_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

The set S is countable, hence an ordinal number $\mu < \Omega$ exists such that

$$(3) \qquad f_\xi(x) = f(x) \quad \text{for all} \quad x \in S$$

whenever $\xi > \mu$. Let $\xi_0 > \mu$. Since f_{ξ_0} is cliquish, there exists an open set U, $\emptyset \neq U \subset K(x_0, \delta)$ such that $|f_{\xi_0}(y) - f_{\xi_0}(z)| < \varepsilon$ for any pair $y, z \in U$. There exists $G_{n_0} \neq \emptyset$ such that $G_{n_0} \subset U$. Hence $|f_{\xi_0}(y_{n_0}) - f_{\xi_0}(z_{n_0})| < \varepsilon$ in contradiction to (2).

II.

The definitions of the properties D_0, D_1, D_2 will be used as introduced in [3]. Let I_0 denote any interval on the real line. The function $f : I_0 \to R$ ($R = (-\infty, \infty)$) is said to have the Denjoy property D_0 if for any $a, b \in R$, $a < b$ the set $\{x \in I_0 : a < f(x) < b\}$ is either empty or of positive Lebesgue measure (see [6]). Further, the function $f : I_0 \to R$ is said to have the property $D_1(D_2)$ if it has the property D_0 for any interval $I \subset I_0$ which is closed (open) in I_0, i.e., if for any such interval and any $a, b \in R$, $a < b$ the set $\{x \in I : a < f(x) < b\}$ is either empty or of positive Lebesgue measure. The L-continuity (T. Šalát) is defined as follows. The function f defined on an interval I is said to be L-continuous at a point $x_0 \in I$ if for any $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, the set $\{x : x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \cap I;\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$ is of positive Lebesgue measure. In what follows the phrase „a function f has the property L at a point x_0" means that f is at x_0 L-continuous. The connections between the properties D_i ($i = 0, 1, 2$) and L will be studied.

Theorem 3. *Let f be defined on the interval I. Then the following implications are true: $D_1 \Rightarrow L \Leftrightarrow D_2 \Rightarrow D_0$ while the implications $L \Rightarrow D_1$, $D_0 \Rightarrow D_2$ do not hold.*

Proof. Let f have the property D_1. Let $x_0 \in I$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. Consider the set $\{x : x \in I \cap (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta);\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$.

There exists a closed interval K such that $x_0 \in K$, $K \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ and $K \subset I$.

Since $\{x : x \in I \cap (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta);\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\} \supset K \cap \{x : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\} \ni x_0$ the property D_1 yields $|\{x : x \in I \cap (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta);\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon| \geqq |K \cap \{x : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon| > 0$ (where $|E|$ denotes the outer Lebesgue measure if E is a set). Hence f is a L-continuous at x_0.

Let f have the L-property at any point $x \in I$. Let $a < b$ and $U \subset I$ be any open interval. If there is not $x_0 \in U$ such that $a < f(x_0) < b$ then $\{x : a < f(x) < b\} \cap U = \emptyset$, hence $|\{x : a < f(x) < b\} \cap U| = 0$. If there is such a point x_0 then choose $\delta > 0$ and $\varepsilon > 0$ such that $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset U$ and $a < f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) + \varepsilon < b$. Considering the L-continuity at x_0 we get

$$|\{x : a < f(x) < b\} \cap U| \geqq$$
$$\geqq |\{x : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta);\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}| > 0\,.$$

Thus f has the property D_2.

Let f possess the property D_2. Let $x_0 \in I$. We shall prove the L-continuity at x_0. Let $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. Put $U = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \cap I$, $a = f(x_0) - \varepsilon$, $b = f(x_0) + \varepsilon$.

Under the assumption the set $\{x \in U : a < f(x) < b\}$ is of positive Lebesgue measure. Hence f possesses the property L.

The implication $D_2 \Rightarrow D_0$ was proved in [3], where also an example showing that $D_0 \Rightarrow D_2$ is not true was given. In [3] we find also an example showing that, the implication $D_2 \Rightarrow D_1$ does not hold. The last fact together with what was proved above shows that $L \Rightarrow D_1$ is not true.

III.

The following theorem is proved in [4]:

Let a real function f be a derivative and let it be almost everywhere continuous on (a, b).

Then f is quasicontinuous on (a, b).

The proof of the quoted theorem does not use the fact that f is a derivative. It uses only the property D_0. Moreover, the proof works even if f is supposed only to be L-continuous and quasicontinuous on (a, b). Thus the following theorem holds.

Theorem 4. *Let f be almost everywhere continuous and L-continuous on (a, b). Then f is quasicontinuous on (a, b).*

Proof. Let $a < x_0 < b$, $\varepsilon > 0$. Put $A_\varepsilon = \{x : |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon\}$. Choose an open interval I such that $x_0 \in I \subset (a, b)$. The L-continuity implies $|I \cap A_\varepsilon| > 0$. Under the assumption f is almost everywhere continuous on (a, b), hence a number $\xi \in I \cap A_\varepsilon$ exists such that f is at ξ continuous. Hence an interval $J \subset I$ containing ξ as an interior point exists such that the oscillation of f on J is less then $\frac{1}{2}\varepsilon$. Thus for $x \in J$

$$|f(x) - f(x_0)| \leqq |f(x) - f(\xi)| + |f(\xi) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

The quasicontinuity of f at x_0 is proved.

Let us introduce a usefull example of a quasicontinuous and L-continuous function.

Example 1. Let C be the Cantor discontinuum. Define f on $\langle 0, 1\rangle$ as follows: $f(x) = 1$ if $x \in C$. If $a, b \in C$, $(a, b) \subset \langle 0, 1\rangle - C$, put $f(x) = 1$ for $x_1 = a + \frac{1}{3}(b - a) \leqq x \leqq a + \frac{2}{3}(b - a) = x_2$. In the intervals (a, x_1) and (x_2, b) let f be linear, $f(a+) = f(b-) = 0$ and such that it is continuous in (a, b).

It is clear that the quasicontinuity of f implies its L-continuity. A question arises whether the converse of Theorem 4 is true, i.e., whether the quasicontinuity implies the almost everywhere continuity. A slight modification of the above example shows that the answer is negative. It is sufficient to consider a function defined on $\langle 0, 1\rangle$ as in Example 1, where the set C is substituded by a nowhere dense set of positive measure which may be constructed in the usual way. An example of a quasicontinuous function which is discontinuous at each point of a set C with $|C| > 0$ is obtained.

Theorem 5. *Let f be defined on (a, b) and aproximately continuous at a point $x_0 \in (a, b)$. Then f is L-continuous at x_0.*

Proof. Let f be aproximately continuous at x_0. Then a set $H \subset (a, b)$ exists such that $x_0 \in H$, x_0 is a point of density of H and $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in H}} f(x) = f(x_0)$.

Thus to $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ for $x \in H \cap \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b)$. Since x_0 is a point of density for H the number δ can be chosen so that $|H \cap (x_0 - \delta', x_0 + \delta') \cap (a, b)| > 0$ for any $\delta' \leqq \delta$. Then for any $\delta'' > 0$

$$\{x : x \in (x_0 - \delta'', x_0 + \delta'') \cap (a, b);\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\} \supset$$
$$\supset \{x \in (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*) \cap (a, b);\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\} \supset$$
$$\supset \{x \in (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*) \cap H;\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\},$$

where $\delta^* = \min(\delta, \delta'')$. The last set is of positive measure.

The following theorem is a corollary of Theorems 4 and 5.

Theorem 6. *If f is aproximately continuous and almost everywhere continuous on (a, b), then it is quasicontinuous on (a, b).*

Note. A direct proof of Theorem 6 is given in [4] (Theorem 5). Now we shall give some assertions closely related to the results of [1] and [2].

In what follows, the symbols A_f, C_f, D_f denote the set of points of cliquishness, continuity and discontinuity of the function f, respectively. A result proved in [1] asserts that $A_f - C_f$ is of the first category in X. In [1], X is supposed to be a metric space and the function f is defined on X with values in a metric space Y. We give another proof of the mentioned theorem. We suppose X to be only a topological space. The oscillation $o_f(x)$ of the function f defined on a topological space and assuming the values in a metric space Y with the metric ϱ is defined by

$$o_f(x_0) = \inf_{O(x_0)} \{ \sup_{x,y \in O(x_0)} \varrho(f(x), f(y))\}$$

where $O(x_0)$ is any neighbourhood of x_0. Then f is continuous at x_0 if and only if $o_f(x_0) = 0$.

Theorem 7. *Let f be defined on a topological space X and assuming values in a metric space Y with the metric ϱ. Then $A_f - C_f$ is a G_δ set of the first category in X.*

Proof.

$$A_f - C_f = A_f \cap D_f = A_f \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x : o_f(x) \geqq \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_f \cap \left\{x : o_f(x) \geqq \frac{1}{k}\right\}.$$

Denote $M_k = A_f \cap \{x : o_f(x) \geqq 1/k\}$. It is sufficient to prove that M_k is nowhere dense. The set A_f is closed (see [7]). Choose $x \in X$. Let U be any neighbourhood of the point x. If $x \notin A_f$ then $x \in (X - A_f) \cap U \subset U$ where $(X - A_f) \cap U$ is open and has an empty intersection with M_k. If $x \in A_f$ then in view of the cliquishness of f, to any k and any neighbourhood U of the point x there exists an open set $V \subset U$ such that $\varrho(f(y_1), f(y_2)) < 1/2k$ for any $y_1, y_2 \in V$.

Hence $o_f(y) \leqq 1/2k \leqq 1/k$ for any $y \in V$. Hence $V \cap M_k = \emptyset$.

Theorem 8. *Let f, X, Y have the same meaning as in Theorem 7. Let A_f be dense in X. Then D_f is of the first category in X.*

Proof. Since $\mathring{A}_f$ is closed we have $A_f = X$. In view of Theorem 7 $A_f - C_f = X - C_f = D_f$ is of the first category.

Note. For metric spaces Theorem 8 is proved in [1].

Corollary. *If f is cliquish then D_f is of the first category.*

Note. For metric spaces, Corollary follows from the mentioned theorem in [1]. It is formulated without proof in [2] for topological spaces.

In [2] we find also a theorem asserting that if f is cliquish then it is at most pointwise discontinuous. Such a theorem for metric spaces X and Y where X is complete is evidently a corollary of Theorem 8. However, in general such a theorem is not true as the following example shows.

Example 2. (J. Smítal.) Let X be the set of all rational numbers in $(0, 1)$ with the usual metric.

Put $f(x) = 1/q$ for $x = p/q$. Then f is cliquish on X but $D_f = X$.

Nevertheless, the following theorem may be proved.

Theorem 9. *Let X be a topological space of the second category at each of its points. Let f be cliquish on X. Then f is at most pointwise discontinuous.*

Proof. In view of Theorem 8 D_f is of the first category in X. If $U \neq \emptyset$, U is open in X then $U \subset D_f$ does not hold. Hence a point $x_0 \in U$ exists such that $x_0 \in C_f$.

References

[1] *S. Marcus:* Sur les fonctions quasicontinues au sens de S. Kempisty, Coll. Math. *VIII* (1961), 47—53.

[2] *H. Thielman:* Types of Functions, Amer. Math. Monthly, *60* (1953), 156—161.

[3] *T. Šalát:* Some generalizations of the notion of continuity and Denjoy property of functions. (To appear.)

[4] *S. Marcus:* Sur les fonctions dérivées, intégrables au sens de Rieman et sur les dérivées partielles mixtes, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. *9* (1958), 973—978.

[5] *W. W. Bledsoe:* Neighborly functions, Proc. Amer. Math. Soc., *3* (1952), 114—115.

[6] *S. Marcus:* Some remarks on real functions II, Rev. roum. math. pures et appl., *11* (1966), 911—916.

[7] *J. S. Lipiński - T. Šalát:* On the points of quasicontinuity and cliquishness of functions, Czechosl. Math. J., *21* (*96*), (1971), 484—490.

[8] *T. Šalát:* On transfinite sequences of B measurable functions. (To appear).

Author's address: 816 31 Bratislava, Mlynská dolina (Katedra matematickej analýzy PF UK).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

REMARK ON LINEAR EQUATIONS IN BANACH SPACE

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha

(Received July 20, 1972).

In this note Fredholm theorems for linear equations in a Banach space are established without requiring the knowledge of the usual adjoint space.

The main result (Theorem 3) concerns the operator $A = I + T$ where T is a compact (completely continuous) operator in a Banach space. In this theorem the usual adjoint operator is replaced by the operator which is conjugate to A with respect to a total space of continuous linear functionals on the Banach space. The investigation is based on some results about the dimensional characteristic of linear operators in a Banach space [4]. Reformulating the results from [4] in terms of linear equations we obtain a generalization of the well known Fredholm theorems.

Let X be a Banach space (over the field of real or complex numbers). The set of all linear operators A mapping X into itself such that Ax is defined for all $x \in X$ $(D_A = X)$ let be denoted by $L_0(X)$. Let $B_0(X)$ be the set of all bounded operators belonging to $L_0(X)$.

We denote by $N(A) = \{x \in X;\ Ax = 0\}$ the kernel of $A \in L_0(X)$, by $R(A) = \{y \in X;\ y = Ax,\ x \in X\}$ the range of $A \in L_0(X)$ and define $\alpha_A = \dim N(A)$, $\beta_A = \dim X/R(A)$ [1]. The index of $A \in L_0(X)$ is the number

$$\operatorname{ind} A = \beta_A - \alpha_A .$$

Let X' be the space of all linear functionals on X. A space $\Xi \subset X'$ of linear functionals on X is said to be total if $\xi(x) = 0$ for all $\xi \in \Xi$ implies $x = 0 \in X$.

For a given $A \in L_0(X)$ and a total space $\Xi \subset X'$ we define on Ξ the conjugate operator A' with values in X':

$$A'\,\xi(x) = \xi(Ax) \quad \text{for all} \quad x \in X \quad \text{and} \quad \xi \in \Xi .$$

[1]) By $\dim$ the dimension of a linear set is denoted, $X/R(A)$ means the quotient space.

By X^+ the Banach space of all continuous linear functionals on X is denoted; X^+ is evidently total. The conjugate operator to $A \in L_0(X)$ with respect to the space X^+ is denoted by A^+. If $A \in B_0(X)$ then evidently A^+ is continuous; i.e. $A^+ \in B_0(X^+)$.

The space X can be embedded into Ξ' (the space of linear functionals on Ξ) via the usual embedding $\varkappa : X \to \Xi'$, i.e. $\varkappa\, x(\xi) = \xi(x)$ for $x \in X$. The image $\varkappa X$ of X in Ξ' is a total space.

Let now $\Xi \subset X'$ be a total space. As above, for a given $A' \in L_0(\Xi)$ we can define $A'' : \varkappa X \to \Xi'$ and $A'^+ : \Xi^+ \to \Xi'$. If $A' \in B_0(\Xi)$ then $A'^+ \in B_0(\Xi^+)$.

If for a given $A \in L_0(X)$ and a total space $\Xi \subset X'$ we have $R(A') \subset \Xi$ then we say that the space Ξ is preserved by the conjugate operator A'. If this is the case then also the space $\varkappa X \subset \Xi'$ is preserved by A'' ($\varkappa X$ is a total space in Ξ').

Further it can be shown that $A''\varkappa x = \varkappa A x$ for all $x \in X$, i.e. the operator $A'' : \varkappa X \to \varkappa X$ conjugate to $A' \in L_0(\Xi)$ is (up to the natural embedding $\varkappa$) identical with the operator A if Ξ is preserved by A'.

Let us suppose that $\Xi \subset X^+$ is a total space (Ξ is normed with respect to the norm in X^+). Any $x \in X$ is assigned the linear functinonal $\varkappa x \in \Xi'$; the natural embedding $\varkappa : X \to \Xi'$ is a monomorphism (cf. [2]). Since we have $|\xi(x)| \leqq \|\xi\| \cdot \|x\|$, the functional $\varkappa x$ is continuous, i.e. $\varkappa x \in \Xi^+$. Moreover, the image $\varkappa X$ of X in Ξ^+ is a total space (cf. [2]).

Theorem 1. *Let X be a Banach space, $\Xi \subset X^+$ a total subspace of continuous linear functionals on X.*

Let $A \in B_0(X)$ and let Ξ be preserved by the conjugate operator A'.

If ind $A = 0$ *then either*

I. *the equation*

$$Ax = \tilde{x} \tag{1}$$

has in X only one solution for any $\tilde{x} \in X$

or

II. *the equation*

$$Ax = 0 \tag{2}$$

has r linearly independent solutions in X (r is an integer).

If moreover ind $A' = 0$ *then in the case* I. *the equation*

$$A'\xi = \xi \tag{3}$$

has also a unique soltuion in Ξ *for any* $\xi \in \Xi$ *and in the case* II. *the equation*

$$A'\xi = 0 \tag{4}$$

has r linearly independent solutions in Ξ.

Proof. The first part of this theorem is almost trivial. Indeed, if $\operatorname{ind} A = 0$ then $\dim N(A) = \dim X/R(A) = r$, where $r = 0$ or $r > 0$ is an integer. The case I. corresponds to $r = 0$ and the case II. to $r > 0$. The second part of this theorem is a consequence of Theorem 3 in [4] which assures that if $\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} A' = 0$ then $\dim (N(A) = \dim N(A') = \dim \Xi/R(A')$.

Remark 1. Theorem 1 has the form of the usual Fredholm theorems. The first part is the well known alternative and it is only a trivial reformulation of the assumption $\operatorname{ind} A = 0$. As for the second part let us mention that A' is not the usual adjoint operator. The classical (second) Fredholm theorem is a special case of our Theorem 1 if we set $\Xi = X^+$.

If the case II. in Theorem 1 occurs then some solvability conditions for the equation (1) are needed. Such conditions for the classical case are given by the third Fredholm theorem. Our aim is to obtain such a condition in terms of the conjugate equation (3).

Theorem 2. *Let* X *be a Banach space,* $\Xi \subset X^+$ *a total subspace. Let* $A \in B_0(X)$, $R(A)$ *is closed in* X *and* $N(A^+) \subset \Xi$ (A^+ *is the conjugate operator to* A *with respect to* X^+.) *Then the equation* (1) *has a solution if and only if the relation*

$$\xi(\tilde{x}) = 0 \tag{5}$$

holds for any solution $\xi \in \Xi$ *of the equation* (4).

Proof. Since $R(A)$ is closed, we have $R(A)^\perp = N(A^+)$, where $R(A)^\perp$ is the orthogonal complement of $R(A)$ in X^+; this is a well known fact (see for example [1]). Further we have evidently $N(A') = N(A^+) \cap \Xi$ and by the assumption $N(A^+) \subset \Xi$ we have $N(A') = N(A^+)$. This proves our theorem.

In the sequel we will formulate Fredholm theorems for the case $A = I + T$ where I is the identical operator in X and $T \in B_0(X)$ is compact.

Theorem 3. *Let* X *be a Banach space,* $\Xi \subset X^+$ *a total space which is also a Banach space. Let* $T \in L_0(X)$ *be a compact operator and let* Ξ *be preserved by the conjugate operator* T'. *Then the following assertion holds*:

Either

I. *the equation*

$$x + Tx = \tilde{x} \tag{6}$$

has in X only one solution for any $\tilde{x} \in X$

or

II. *the equation*

$$x + Tx = 0 \tag{7}$$

has r linearly independent solutions in X (r is an integer).

In the case I. *the equation*

$$\xi + T'\xi = \tilde{\xi} \tag{8}$$

has also only one solution in Ξ for any $\tilde{\xi} \in \Xi$ and in the case II. *the equation*

$$\xi + T'\xi = 0 \tag{9}$$

admits r linearly independent solutions in Ξ.

Moreover, the equation (6) *has a solution in X if and only if $\xi(\tilde{x}) = 0$ for any solution $\xi \in \Xi$ of the equation* (9) (*and symmetrically* (8) *has a solution in Ξ if and only if $\tilde{\xi}(x) = 0$ for any solution $x \in X$ of the equation* (7)).

Proof. First let us mention that this theorem is well known if we set $\Xi = X^+$. Further it is known that under the present assumptions $A = I + T \in B_0(X)$ and ind $A = 0$. Moreover the operator $T' \in L_0(\Xi)$ is also compact (cf. Theorem 7,4 from C III in [3]). Hence ind $A' = 0$ where $A' = I + T'$ and all assumptions of Theorem 1 are fulfilled. This yields our theorem except the last part concerning the solvability conditions for the equation (6) and (8).

The proof of this part we obtain from Theorem 2. For the case of a compact $T \in L_0(X)$ it is known that $R(A)$ is closed, $A = I + T$ and similarly $R(A')$ is closed in Ξ, $A' = I + T' \in L_0(\Xi)$. It remains to prove that $N(A^+) \subset \Xi$ and $N(A'^+) \subset \varkappa X$. By definition we have

$$N(A^+) \cap \Xi = N(A') \tag{10}$$

and therefore

$$\dim N(A') \leqq \dim N(A^+)\,. \tag{11}$$

Similarly

$$N(A'^+) \cap \varkappa X = N(A'') \tag{12}$$

and

$$\dim N(A'') \leqq \dim N(A'^+)\,. \tag{13}$$

Since $\varkappa : X \to \Xi^+$ is a monomorphism we have $\dim N(A'') = \dim N(A)$. Hence the inequality (13) assumes the form

$$\dim N(A) \leqq \dim N(A'^+) . \tag{14}$$

Using (14), (11) and the equalities $\dim N(A) = \dim N(A^+)$, $\dim N(A') = \dim N(A'^+)$ which are consequences of the compactness of $T \in L_0(X)$, $T' \in L_0(\Xi)$ respectively we obtain

$$\dim N(A) \leqq \dim N(A'^+) = \dim N(A') \leqq \dim N(A^+) = \dim N(A)$$

and therefore

$$\dim N(A) = \dim N(A') = \dim N(A'^+) = \dim N(A^+).$$

These equalities together with (10) yields

$$\dim (N(A^+) \cap \Xi) = \dim N(A') = \dim N(A^+).$$

Hence $N(A^+) \subset \Xi$. Using (12) we obtain in the same way

$$\dim (N(A'^+) \cap \varkappa X) = \dim N(A'') = \dim N(A) = \dim N(A'^+)$$

and also $N(A'^+) \subset \varkappa X$.

Remark 2. Theorem 3 is a complete collection of Fredholm theorems for a compact operator $T \in L_0(X)$, the only difference between it and the usual Fredholm theorems being that it is sufficient to know a smaller total space of functionals $\Xi \subset X^+$ and the conjugate operator acting in this space.

We conclude this note by an example in which Theorem 2 and 1 is used.

Let BV be the usual linear space of all real functions defined on $[0, 1]$ with bounded variation. If we set

$$\|x\|_{BV} = |x(0)| + \operatorname{var}_0^1 x$$

for $x \in BV$ then $\|.\|_{BV}$ is a norm and BV is a Banach space. A satisfactory description of the conjugate space BV^+ of all continuous linear functionals on BV is not available.

We denote by S the set of all break functions $w(t)$ from BV for which we have $\lim_{\tau \to t+} w(\tau) = \lim_{\tau \to t-} w(\tau)$ for all $t \in (0, 1)$. The set S is closed in BV.

Let us form the quotient space BV/S. The elements of BV/S are denoted by capitals and they are classes of functions such that their difference belongs to S. The canonical mapping of BV into BV/S is denoted by ψ, i.e. for $\varphi \in BV$ we have $\psi(\varphi) = \varphi + S = \Phi \in BV/S$. The space BV/S forms a Banach space with the norm

$$\|\Phi\|_{BV/S} = \inf_{\psi(\varphi)=\Phi} \|\varphi\|_{BV} = \inf_{\psi(\varphi)=\Phi} \operatorname{var}_0^1 \varphi . \tag{15}$$

Let now $\Phi \in BV/S$. We define for $x \in BV$

(16) $$\Phi(x) = \int_0^1 x(t)\, d\varphi(t)$$

where $\psi(\varphi) = \Phi$. The integral in (16) is the Perron-Stieltjes integral. All integrals occurring in the sequel are also Perron-Stieltjes integrals.

The relation (16) is independent of the choice of $\varphi \in BV$ with the property $\psi(\varphi) = \Phi$ (see [3], p. 326) and $\Phi(x)$ from (16) is evidently a linear functional on BV. Since $\Phi(x)$ from (16) is independent of the choice of the representant of the class Φ and the inequality

$$\left|\int_0^1 x(t)\, d\varphi(t)\right| \leqq \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| \,.\, \mathrm{var}_0^1\, \varphi$$

holds we have

$$|\Phi(x)| \leqq \|x\|_{BV} \cdot \|\Phi\|_{BV/S}$$

and the functional $\Phi(x)$ from (16) is continuous. The Banach space BV/S can be identified with a subspace in BV^+ which will be also denoted by BV/S ($BV/S \subset BV^+$).

If $x \in BV$, $x \neq 0$ then there is a $\Phi \in BV/S$ such that $\Phi(x) \neq 0$ (see Lemma 5,1 in [3]). Hence BV/S is a total space in BV^+.

For a given real function $k(s, t)$ defined on $[0, 1] \times [0, 1]$ ($k : [0, 1] \times [0, 1] \to R$) and a nondegenerate interval $J = [a, b] \times [c, d] \subset [0, 1] \times [0, 1]$ we set

$$m(J) = k(b, d) - k(b, c) - k(a, d) + k(a, c)$$

and define

$$v(k) = \sup \sum_i |m(J_i)|$$

where the supremum is taken over all finite systems of nonoverlapping intervals J_i in $[0, 1] \times [0, 1]$ (i.e. $J_i^0 \cap J_j^0 = \emptyset$ when $i \neq j$). The number $v(k)$ is a kind of two-dimensional variation (the so called Vitali variation) of the function k.

Let us suppose that $k : [0, 1] \times [0,]1 \to R$ is such a function that $v(k) < +\infty$ and $\mathrm{var}_0^1\, k(0, \cdot) < +\infty$. We define the operator

$$Tx = \int_0^1 x(t)\, d_t k(s, t)$$

on BV. We have evidently $T \in L_0(BV)$ and by Theorem 3,1 from [3] the operator T is compact. Hence $\mathrm{ind}\,(I + T) = 0$.

If moreover $\mathrm{var}_0^1\, k(\cdot, 0) < +\infty$ then for $\Phi \in BV/S$; $\psi(\varphi) = \Phi$ we have (cf. Lemma 2,2 in [3])

$$\Phi(Tx) = \int_0^1 \left(\int_0^1 x(t)\, d_t k(s, t)\right) d\varphi(s) = \int_0^1 x(t)\, d_t \left(\int_0^1 k(s, t)\, d\varphi(s)\right) = T'\, \Phi(x)$$

where

$$T'\Phi = \psi\left(\int_0^1 k(s, t)\, \mathrm{d}\varphi(s)\right), \quad \Phi = \psi(\varphi).$$

The operator T' is the conjugate of T and evidently preserves the conjugate space BV/S. By theorem 5,1 from [3] $T' \in B_0(\Xi)$ is compact. Hence $\operatorname{ind}(I + T') = 0$.

All the assumptions of Theorem 2 being satisfied we obtain easily the following

Theorem 4. *Let $k : [0, 1] \times [0, 1] \to R$ be such a function that $v(k) < +\infty$, $\operatorname{var}_0^1 k(0, .) < +\infty$, $\operatorname{var}_0^1 k(., 0) < +\infty$. Then either the equation*

$$x(s) + \int_0^1 x(t)\, \mathrm{d}_t k(s, t) = \tilde{x}(s) \tag{17}$$

has in BV only one solution for any $x \in BV$ or the homogeneous equation

$$x(s) + \int_0^1 x(t)\, \mathrm{d}_t k(s, t) = 0 \tag{18}$$

has r linearly independent solutions (r is an integer).

In the first case the equation

$$\varphi(t) + \int_0^1 k(s, t)\, \mathrm{d}\varphi(s) = \tilde{\varphi}(t) \tag{19}$$

has a solution (not unique) for any $\tilde{\varphi} \in BV$ and in the second case the equation

$$\varphi(t) + \int_0^1 k(s, t)\, \mathrm{d}\varphi(s) = 0 \tag{20}$$

admits r solutions in BV which are independent over the subspace S in BV[2]).

Moreover the equation (17) has a solution in BV iff

$$\int_0^1 \tilde{x}(t)\, \mathrm{d}\varphi(t) = 0$$

for any solution $\varphi \in BV$ of the equation (20) *and the equation (19) has a solution in BV iff*

$$\int_0^1 x(t)\, \mathrm{d}\tilde{\varphi}(t) = 0$$

for any solution $x \in BV$ of the equation (18).

---

[2]) The functions $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in BV$ are linearly independent over the subspace S if the relation $c_1\varphi_1 + \ldots + c_r\varphi_r \in S (c_1, \ldots, c_r$ are real numbers) yields $c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0$.

This theorem is slightly different from Theorem 3. It is obtained taking into account the relationship between the equations $\Phi + T'\Phi = \tilde{\Phi}$, $\Phi + T'\Phi = 0$, $\Phi, \tilde{\Phi} \in BV/S$ and (19), (20) respectively. A more detailed account is found in the proof of Theorem 5,2 in [3].

Remark 3. A similar example for the case of the space of n-vector functions of bounded variation can be found in [3]. Theorem 5,2 in [3] is essentially the same as the above Theorem 4 but the way of obtaining it in [3] is unnecessarily lengthy and cumbersome. A more complicated example is included in the paper [5] where Theorem 2 is applied to integral boundary value problems for integrodifferential equations of a complicated nature.

References

[1] *T. Kato*: Perturbation Theory for Linear Operators, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

[2] *D. Przeworska-Rolewicz, S. Rolewicz:* Equations in Linear Spaces, Monografie Matematyczne, *T. 47, Warszawa* 1968.

[3] *Š. Schwabik:* On an Integral Operator in the Space of Functions with Bounded Variations, Čas. pěst. mat. *97* (1972), 297—330.

[4] *Š. Schwabik:* Remark on d-characteristic and d_{Ξ}-characteristic of Linear Operators in Banach Space, Studia Mathematica XLVIII (1973), 251—255.

[5] *M. Tvrdý:* Boundary Value Problems for Linear Generalized Differential Equations and their Adjoints, Czech. Math. J. *23 (98)*, (1973), 183—217.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

ON CHROMATIC AND ACHROMATIC NUMBERS OF UNIFORM HYPERGRAPHS

ERNEST JUCOVIČ and FRANTIŠEK OLEJNÍK, Košice

(Received August 25, 1972)

1. BASIC NOTIONS

(Cf. BERGE [1].) By a hypergraph H is meant a couple $(X, \mathscr{E})$, where X is a finite set of elements (called *vertices*) and $\mathscr{E} = \{E_1, \ldots, E_m\}$ is a finite system of subsets $E_i \neq \emptyset$ of X (called *edges*) such that $\bigcup_{i=1}^{m} E_i = X$ and for $i \neq j$ is $E_i \neq E_j$. A hypergraph is k-uniform, $k > 1$, if all edges have cardinality k. A 2-uniform hypergraph is called *graph*. A k-uniform hypergraph with $n \geqq k$ vertices is *complete* if its set of edges consists of all k-tuples formed from the n vertices.

The *complement* of a k-uniform hypergraph $H = (X, \mathscr{E})$ is the hypergraph $\bar{H} = (\bar{X}, \bar{\mathscr{E}})$ whose edges are all those k-tuples $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \ldots$ formed from vertices of X which are not contained in $\mathscr{E}$ and whose vertex set $\bar{X}$ is the union of all these edges. (Notice that our uniform hypergraphs have no "isolated" vertices and that for the complement $\bar{H} = (\bar{X}, \bar{\mathscr{E}})$ of $H = (X, \mathscr{E})$ $|\bar{X}| \leqq |X|$ holds.) (By $|X|$ the cardinality of the set X is denoted.)

$H' = (X', \mathscr{E}')$ is a *partial hypergraph* of the hypergraph $H = (X, \mathscr{E})$, defined by the set of edges $\mathscr{E}' \subseteq \mathscr{E}$, if X' consists of all vertices belonging to edges from $\mathscr{E}'$.

A *coloring* of the hypergraph H is an assignment of colors to all vertices of H such that not all vertices of an edge of H are assigned the same color and every vertex is assigned one color. Two colors c_1, c_2 in a coloring of the hypergraph H are *adjacent* if there exists an edge of H containing two vertices colored by c_1 and c_2. A coloring of a hypergraph H is *complete* if all pairs of used colors are mutually adjacent. (Clearly, if a coloring uses the minimum possible number of colors then it is complete.) In the paper we deal with the *chromatic number* $\chi(H)$ or the *achromatic number* $\psi(H)$ of a hypergraph H which means the minimum or maximum number, respectively, of colors used in a complete coloring of H.

2. CHROMATIC NUMBERS

We want to estimate the number $\chi(H) + \chi(\bar{H})$ supposing H to be a k-uniform hypergraph. For $k = 2$, i.e. for a graph G, NORDHAUS and GADDUM [6] proved the inequality

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leqq n + 1 ,$$

where n is the number of vertices of the graph G.

Trying to generalize this result for $k > 2$ and wishing to give a relation between the numbers $\chi(H) + \chi(\bar{H})$, the uniformity k and the number of vertices n of H only, we obtain the following bound:

$$\chi(H) + \chi(\bar{H}) \leqq 2 \left] \frac{n}{k-1} \right[. \tag{1}$$

($]x[$ denotes the smallest integer $\geqq x$.)

Although hypergraphs can be constructed for which the equality in (1) is attained (e.g. the 3-uniform hypergraph with vertices 1, 2, 3, 4 and edges (1, 2, 3), (1, 2, 4)) there exist many hypergraphs for which (1) is too rough. We present here estimates depending on other invariants of hypergraphs. In course of the proof a well-known theorem by GALLAI will be generalized. First the new invariants must be introduced. (Cf. Berge [1]).

A set of vertices of the hypergraph H is called *stable* if it does not contain the vertices of a whole edge of H; the maximum cardinality of a stable set of H is called the *stability number* of H and denoted by $\alpha(H)$.

A set T of vertices of the hypergraph H is said to be *transversal* if every edge of H has a non-empty intersection with T; the *transversal-number* of H, $\tau(H)$, is the minimum cardinality of such a set.

A set N of edges of the hypergraph H is called *independent* if all the edges of N are pairwise disjoint; the maximum cardinality of an independent set, $\nu(H)$, is called the *independence number* of H.

A set of edges of the hypergraph H is called a *covering* set if its union is the whole vertex set of H; the minimum cardinality of a covering set of edges of H is called the *covering number* of H and denoted by $\varrho(H)$.

Theorem 1. *For a k-uniform hypergraph* $H = (X, \mathscr{E})$

$$\chi(H) + \chi(\bar{H}) \leqq \left] \frac{\tau(H)}{k-1} \right[+ \varrho(H) + 1 \tag{2a}$$

$$\chi(H) + \chi(\bar{H}) \leqq \left] \frac{|X| - \alpha(H)}{k-1} + 1 \right[+ \left] \frac{|X| - \nu(H)}{k-1} \right[\tag{2b}$$

$$\chi(H) + \chi(\bar{H}) \leqq \left] \frac{\tau(H)}{k-1} + 1 \right[+ \left] \frac{|X| - \nu(H)}{k-1} \right[\tag{2c}$$

holds.

To prove Theorem 1 we need some lemmas.

Lemma 1. *For a hypergraph* $H = (X, \mathscr{E})$,

$$\alpha(H) + \tau(H) = |X| . \tag{3}$$

Proof of Lemma 1. a) Let $S \subset X$ be a stable set of maximal cardinality. Then $T = X - S$ is a transversal set of the hypergraph H and we have

$$|T| = |X - S| = |X| - |S| = |X| - \alpha(H)$$

and $\tau(H) \leqq |T|$, so that

$$\tau(H) \leqq |X| - \alpha(H) . \tag{4}$$

b) Let $T \subset X$ be a transversal set of minimal cardinality. Then $S = X - T$ is a stable set of the hypergraph H because no edge of H has all its vertices in S. We have

$$|S| = |X - T| = |X| - |T| = |X| - \tau(H)$$

and $\alpha(H) \geqq |S|$, so that

$$\alpha(H) \geqq |X| - \tau(H) . \tag{5}$$

From (4) and (5), (3) follows.

Lemma 2. *For a k-uniform hypergraph* $H = (X, \mathscr{E})$ *the following inequalities hold*:

$$\varrho(H) + (k - 1) . \nu(H) \leqq |X| , \tag{6}$$

$$\nu(H) + (k - 1) . \varrho(H) \geqq |X| . \tag{7}$$

Proof of Lemma 2. a) First we prove the inequality (6). Let $N \subseteq \mathscr{E}$ be an independent set of edges of H of maximal cardinality. Denote by S the set of all vertices of H not lying in any edge of N. The maximality of N implies that S is a stable set. To every vertex v of S associate an edge incident to v and denote by M the set of these edges. Obviously $|M| \leqq |S|$. Consider the set of edges $K = N \cup M$ belonging either to N or to M. Since the sets of edges N, M are disjoint, we have

$$|K| = |N| + |M| \leqq |N| + |S| .$$

As $|S| = |X| - k . |N|$, we have

$$|K| \leqq |N| + |X| - k . |N| .$$

However, K is a covering set of edges of H, i.e., $\varrho(H) \leqq |K|$ which implies

$$\varrho(H) \leqq \nu(H) + |X| - k . \nu(H)$$

and (6) follows.

b) Let P be a covering set of edges of the hypergraph $H = (X, \mathscr{E})$ of minimal cardinality. For the partial hypergraph $H_0 = (X, P)$, it follows from its construction that

$$\varrho(H_0) = \varrho(H) \quad \text{and} \quad \nu(H_0) \leqq \nu(H)\,. \tag{8}$$

We first prove that

$$|X| - \nu(H_0) \leqq (k - 1)\,\varrho(H_0) \tag{9}$$

holds. Let Q be an independent set with maximal number of edges of the hypergraph H_0, i.e., $|Q| = \nu(H_0)$. Obviously $Q \subseteq P$. For the set of edges $B = P - Q$ we have

$$|B| = |P - Q| = |P| - |Q| = \varrho(H_0) - \nu(H_0) = \omega\,. \tag{10}$$

Every edge from the set B has at least one vertex in an edge belonging to the set Q, because otherwise Q would not be a maximal independent set. Thus the number of vertices belonging to edges from B and not belonging to edges from Q is at most $(k - 1)\,.\,\omega$. The number of vertices belonging to edges from Q is $k\,.\,\nu(H_0) \leqq |X|$. From this the relation

$$|X| - k\,.\,\nu(H_0) \leqq (k - 1)\,.\,\omega$$

follows. Now using (10) we get

$$|X| - k\,.\,\nu(H_0) \leqq (k - 1)\,.\,(\varrho(H_0) - \nu(H_0))$$

and (9). Using further the relations (8) we get the assertion (7) of Lemma 2.

Remark 1. (3), (6), (7) are generalizations of Gallai's [2] relations for graphs. The proofs of (3), (6) are in fact Gallai's arguments. Clearly, the inequalities (6), (7) are for all $k \geqq 2$ the best possible.

Lemma 3. *For a k-uniform hypergraph H with n vertices,*

$$\chi(H) \leqq \left]\frac{n}{k - 1}\right[$$

holds.

Proof of Lemma 3 is quite simple and can be omitted.

Proof of Theorem 1. Let N be an independent set of edges of the hypergraph H with maximal cardinality, i.e., $|N| = \nu(H)$. The number of vertices belonging to edges from N is $k\,.\,\nu(H)$. The vertices of the hypergraph H not belonging to edges from the set N are colorable with $]({|X|} - k\,.\,\nu(H))/(k - 1)[$ colors (by Lemma 3). The edges of N do not belong to the hypergraph $\bar{H}$. Hence if we assign all vertices of an edge of N

the same color we obtain a coloring of the hypergraph $\bar{H}$. We have

$$\chi(\bar{H}) \leqq \left]\frac{|X| - \nu(H)}{k - 1}\right[.$$

Using the relation (7) of Lemma 2 we have

$$\chi(\bar{H}) \leqq \varrho(H) . \tag{11}$$

Let S be a stable set of vertices of the hypergraph H with maximal cardinality, i.e., $|S| = \alpha(H)$. Lemma 3 implies that the vertices of the set $(X - S)$ are colorable by $](X - \alpha(H))/(k - 1)[$ colors. Assigning the vertices of S the same color we get a coloring of the hypergraph H, i.e.,

$$\chi(H) \leqq \left]\frac{|X| - \alpha(H)}{k - 1}\right[+ 1 .$$

By Lemma 1 we have

$$\chi(H) \leqq \left]\frac{\tau(H)}{k - 1}\right[+ 1 . \tag{12}$$

Adding different expressions for $\chi(H)$ and $\chi(\bar{H})$ we get the assertion of Theorem 1.

Equality in (2a) – (2c) is attained for a k-uniform hypergraph H with n vertices such that $n - 1 \equiv 0 \pmod{k - 1}$ and there is a vertex in H which is the unique common vertex of every pair of edges of H. For such a hypergraph with a "large" number of edges (2) is much better than the above mentioned generalization (1) of the Nordhaus-Gaddum estimate. Many other hypergraphs can be constructed for which equality in (2a) – (2c) is attained.

3. ACHROMATIC NUMBERS

Harary and Hedetniemi [5] have given some bounds for the achromatic number of a graph G using a homomorphic mapping of G onto the complete graph $K_{\psi(G)}$. We do not see how this technique could be employed for treating the problem in case of k-uniform hypergraphs for $k > 2$. We give here some simple bounds for the achromatic number of a hypergraph H. They are strict; however, for many hypergraphs they give rather rough estimates.

Theorem 2. *For the achromatic number $\psi(H)$ of a k-uniform hypergrah H with h edges, the inequality*

$$\psi(H) \leqq \xi \tag{13}$$

holds where ξ is the positive solution of the equation

$$x^2 - x - h(k^2 - k) = 0 .$$

Proof. If H is completely colored by $\psi(H) = m$ colors then in H there are $\binom{m}{2}$ pairs of adjacent colors. In one edge of H at most $\binom{k}{2}$ different pairs of adjacent colors can occur. Then we have

$$h \geqq \frac{\binom{m}{2}}{\binom{k}{2}}.$$

From this our statement follows.

From the argument above it follows that in (13) equality is attained for a hypergraph H admitting such a coloring that each pair of colors is adjacent in exactly one edge of H; balanced incomplete block designs $(m, k; 1)$ (formed from m elements, each block having k elements, each pair of elements occurring in exactly one block) are such hypergraphs. E.g. the finite projective plane with m points (lines are edges of the hypergraph) has achromatic number m (cf. HALL [4]).

The *strong-stability number* of a hypergraph H, $\bar{\alpha}(H)$, is the maximum cardinality of a set of vertices of H no two of which belong to the same edge of H.

Let $E(v) = \{E^1, \ldots, E^n\}$ be the set of all edges of the hypergraph H such that the vertex v of H belongs to all of them. By the *degree* $m(v)$ of the vertex v we mean the minimum cardinality of a subset of $E(v)$ whose union of vertices is equal to the union of vertices of all edges from $E(v)$.

Theorem 3. *For a k-uniform hypergraph H with maximum degree of a vertex equal to m,*

$$\psi(H) \leqq m \,.\, \bar{\alpha}(H) \,.\, (k - 1) + 1 \,. \tag{14}$$

The proof is based on the following Lemma which is a generalization of a statement by Harary-Hedetniemi [5].

Lemma 4. *For a hypergraph H with p vertices,*

$$\psi(H) \leqq p - \bar{\alpha}(H) + 1 \,. \tag{15}$$

Proof of Lemma 4. Consider any complete coloring of the hypergraph $H = (X, \mathscr{E})$ and any strong-stable set S of vertices of H. If all vertices of S have the same color then the total number of colors used in the coloring is not greater than $p - |S| + 1$. If two vertices x and y from S are colored by different colors $k(x)$, $k(y)$ there must be in $X - S$ a vertex colored by $k(x)$ or $k(y)$ because the considered coloring is a complete one. Generally, at least $s - 1$ vertices of $X - S$ are assigned colors which occur in S, where s is the total number of colors appearing in S. From this (15) follows.

Equality in (15) is attained e.g. for the hypergraph with 6 vertices $1, \ldots, 6$ and edges $(1, 2, 3)$, $(3, 4, 5)$, $(5, 6, 1)$.

Proof of Theorem 3. Associate to every vertex v of a strong-stable set S of maximal cardinality the edges to which it belongs. Such a "star" contains at most $(k - 1) \cdot d + 1$ vertices where d is the degree of v. The union of all "stars" associated to vertices of S contains all vertices of the hypergraph H, because otherwise S would not be a strong-stable set of maximal cardinality. This implies $v \leqq (k - 1) \cdot m \cdot \bar{\alpha}(H) + \bar{\alpha}(H)$, and using (15) we obtain the assertion of our theorem.

Equality in (14) is attained for complete k-uniform hypergraphs with p vertices if $(p - 1) \equiv 0 \pmod{k - 1}$. Evidently, for these and "similar" hypergraphs, (14) is a better bound than (13). Nevertheless, e.g. for the 3-uniform hypergraph consisting of seven disjoint edges equality in (13) holds while (14) is almost meaningless.

Remark 2. For a graph G with n vertices and its complement $\bar{G}$ the following relations are known:

$$\psi(G) + \psi(\bar{G}) \leqq \left]\frac{4}{3} n\right[\quad \text{(Gupta [3])},$$

$$\psi(G) + \chi(\bar{G}) \leqq n + 1 \quad \text{(Harary-Hedetniemi [5])}.$$

Trying to generalize these bounds to a k-uniform hypergraph H with $k > 2$ having n vertices we obtain very easily (using Lemma 3) the relations:

$$\psi(H) + \psi(\bar{H}) \leqq 2n,$$

$$\psi(H) + \chi(\bar{H}) \leqq n + \left]\frac{n}{k - 1}\right[.$$

Examples can be constructed showing that these bounds are sharp, too. The first estimate is sharp e.g. for the finite projective plane with 7 vertices. Equality in the second one is attained for the hypergraph $(X, \mathscr{E})$, $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $\mathscr{E} = \{(1, 2, 3,), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (1, 4, 6), (1, 5, 6\}$. However, for many hypergraphs these bounds are rough, and it would be desirable to find better ones depending on different invariants of the hypergraph.

Added in proof (February 1974): The arguments employed in the proof of Theorem 1 yield also the following estimate for a k-uniform hypergraph H with n vertices

$$\chi(H) + \chi(\bar{H}) \leqq \left]\frac{n \cdot (2k - 1)}{k(k - 1)}\right[+ 1.$$

References

[1] *Berge, C.:* Graphes et hypergraphes, Dunod Paris (1970).
[2] *Gallai, T.:* Über extreme Punkt- und Kantenmengen, Annales Univ. Sci. Budapest. Sectio Math., *II* (1959), 133—138.
[3] *Gupta, R. P.:* Bounds on the chromatic and achromatic numbers of complementary graphs, Recent progress in combinatorics, Academic Press New York and London (1969). 229—235.
[4] *Hall, M.* Combinatorial Theory (Russian Edition), Izdatel'stvo Mir, Moscow 1970.
[5] *Harary, F. - Hedetniemi, S.*: The achromatic number of a graph, J. of Comb. Theory, *8* (1970), 154—161.
[6] *Nordhaus, E. A. - Gaddum, S. W.:* On complementary graphs, Amer. Math. Monthly, *63* (1956), 175—177.

Author's address: 041 54 Košice, Komenského 14 (Prírodovedecká fakulta UPJŠ).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

OSCILLATION OF SOLUTIONS OF THE DELAY DIFFERENTIAL EQUATION

$$y^{(2n)}(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t) f_i(y[h_i(t)]) = 0, \quad n \geqq 1$$

Pavol Marušiak, Žilina

(Received September 28, 1972)

Our purpose in this paper is to give some ocsillation criteria for the nonlinear delay differential equation

$$y^{(2n)}(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t) f_i[y_{h_i}(t)] = 0, \quad n \geqq 1, \tag{1}$$

where $y_{h_i}(t) = y[h_i(t)]$ $i = 1, \ldots, m$

$$p_i \in C[R_+ \equiv [0, \infty), R_+] \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{2}$$

$$f_i \in C[R, R], \quad z f_i(z) > 0 \quad \text{for} \quad z \neq 0, \; f_i(z) \quad \text{is nondecreasing on} \quad R (i = 1, \ldots, m) \tag{3}$$

$$h_i \in C[R_+, R], \quad h_i(t) \leqq t \quad \text{for} \quad t \in R_+ \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{4}$$

We shall assume the under the initial conditions $y(t) = \varphi(t)$, $t \leqq t_0$, $y^{(k)}(t_0) = y_0^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n - 1$, the equation (1) has a solution which exists for all $t \geqq t_0 > 0$.

A solution $y(t)$ of (1) is called *oscillatory* if the set of zeros of $y(t)$ is not bounded from the right. A solution $y(t)$ of (1) is called *nonoscillatory* if it is of constant sign for sufficiently large t. The equation (1) is called *oscillatory* if every solution is oscillatory.

Burkowski [2], Gollwitzer [3], Odarič-Ševelo [9, 10] have given necessary and sufficient conditions for second order nonlinear delay differential equations to be oscillatory. Ladas [4], Marušiak [8] have given oscillation criteria for the differential equation

$$y^{(n)}(t) + F(t, y(t), y[h(t)]) = 0.$$

Recently, KUSANO and ONOSE [7], ŠEVELO and VARECH [11] and STAIKOS and SFICAS [12] (these papers appeared while my article was being reviewed) have proved sufficient conditions for the oscillation of certain nonlinear delay differential equations of arbitrary order.

In the next part we shall need the following lemma due to KIGURADZE [5, Lemma 2].

Lemma 1. *Let $u(t), \ldots, u^{(m-1)}(t)$ be absolutely continuous and of cosnstant sign in the interval (t_0, ∞). If $u(t) \geqq 0$, $u^{(m)}(t) \leqq 0$ for every $t \geqq t_0$, then there exists an integer k with $0 \leqq k < m$, $m + k$ is odd and*

(a) $$u^{(i)}(t) \geqq 0\,, \quad i = 1, \ldots, k\,, \quad t \geqq t_0\,,$$

(b) $$(-1)^{m+i-1}\, u^{(i)}(t) \geqq 0\,, \quad i = k+1, \ldots, m\,, \quad t \geqq t_0\,,$$

(5) (c) $$u^{(k)}(t) \leqq \frac{i!}{(t-t_0)^i}\, u^{(k-i)}(t)\,, \quad i = 1, \ldots, k, \quad t \geqq t_0\,.$$

Analogous statement can be made if $u(t) \leqq 0$, $u^{(m)}(t) \geqq 0$ in the interval (t_0, ∞).

Lemma 2. *If $u(t), \ldots, u^{(m-1)}(t)$ are absolutely continuous and of constant sign in the interval (t_0, ∞) and $u(t)\, u^{(m)}(t) \leqq 0$, then there exists an integer k with $0 \leqq k < m$, $m + k$ is odd and*

(6) $$u^{(i)}(t)\, u(t) \geqq 0\,, \quad i = 0, 1, \ldots, k \quad \text{and}$$
$$(-1)^{m+i-1}\, u^{(i)}(t)\, u(t) \geqq 0\,, \quad i = k+1, \ldots, m\,, \quad t \geqq t_0\,,$$

(7) $$|u^{(k)}(t)| \geqq t^{m-k-1}\, u^{(m-1)}(2^{m-k-1}t)\,, \quad t \geqq t_0\,,$$

(8) $$|u^{(k-i)}(t)| \geqq B_i t^{m-k+i-1} |u^{(m-1)}(t)|\,, \quad i = 1, \ldots, k\,, \quad t \geqq 2^{m-k}t_0\,,$$

where

$$B_i = \frac{2^{-(m+k+i)^3}}{(m-k)\ldots(m-k+i-1)}\,.$$

Proof. The correctness of (6), (7) follows from Kiguradze's lemma 1 [6] and its proof. Integrating (7) i times ($i \in \{1, \ldots, k\}$) from t_0 to t and using (6), we obtain

$$|u^{(k-i)}(t)| \geqq \frac{(t-t_0)^{m-k+i-1}}{(m-k)\ldots(m-k+i-1)} |u^{(m-1)}(2^{m-k-1}t)|\,, \quad t \geqq t_0\,.$$

If we put t instead of $2^{m-k-1}t$ into the last inequality and then use $u(t)\, u^{(k-i+1)}(t) \geqq$ $\geqq 0$, we get

(9) $$|u^{(k-i)}(t)| \geqq |u^{(k-i)}(2^{-m+k+1}t)| \geqq$$
$$\geqq \frac{2^{-(m-k+i-1)^2}(t - 2^{m-k-1}t_0)^{m-k+i-1}}{(m-k)\ldots(m-k+i-1)} |u^{(m-1)}(t)|\,, \quad t \geqq 2^{m-k-1}t_0\,.$$

Let $t \geqq t_1 \geqq 2 \cdot 2^{m-k-1}t_0$, then $t - 2^{m-k-1}t_0 \geqq t/2$ and from (9) with regard to the last inequalities we get (8).

Lemma 3. *Let $u(t), \ldots, u^{(m)}(t)$ be continuous functions in the interval (t_0, ∞) and $u^{(k)}(t)\, u(t) > 0$, $(k = 0, 1, \ldots, m)$, $u(t)\, u^{(m+1)}(t) \leqq 0$ (m is an integer and let A be a nonnegative real number. Then*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(t)}{u(t+A)} = 1 .$$

Proof.

$$1 \geqq \lim_{t\to\infty} \frac{u(t)}{u(t+A)} \geqq \frac{1}{1 + A \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u'(t_1)}{u(t)}} = 1\,, \quad t_1 = \begin{Bmatrix} t; & m = 1 \\ t + A; & m > 1 \end{Bmatrix},$$

because

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u'(t_1)}{u(t)} = \lim_{t=\infty} \frac{u^{(m)}(t_1)}{u^{(m-1)}(t)} = 0 .$$

Theorem 1. *Let functions p_i, f_i, h_i satisfy (2), (3), (4) and, in addition, suppose that*

$$\sum_{i=1}^{m} \int^{\infty} t^{2n-1}\, p_i(t)\, dt < \infty . \tag{10}$$

Then the equation (1) has at least one nonoscillatory solution.

Proof. Let us consider the following system

$$y_0(t) = \begin{cases} 1, & t \leqq t_0 \\ 1, & t \geqq t_0 \end{cases} \tag{11}$$

$$y_{j+1}(t) = \begin{cases} 1, \; t \leqq t_0 \\ 1 + \sum\limits_{i=1}^{m} \left\{ \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{(s - t_0)^{2n-1}}{(2n-1)!}\, p_i(s) f_i(y_j[h_i(s)])\, ds + \right. \end{cases}$$

$$+ \int_t^{\infty} \frac{(s - t_0)^{2n-1} - (s - t)^{2n-1}}{(2n-1)!}\, p_i(s) f_i(y_j[h_i(s)])\, ds\,,$$

where t_0 is chosen such that

$$\max_{1 \leqq i \leqq m} f_i(2) \sum_{i=1}^{m} \left\{ \int_{t_0}^{t} \frac{(s - t_0)^{2n-1}}{(2n-1)!}\, p_i(s)\, ds + \right. \tag{12}$$

$$\left. + \int_t^{\infty} \frac{(s - t_0)^{2n-1} - (s - t)^{2n-1}}{(2n-1)!}\, p_i(s)\, ds \right\} \leqq 1 .$$

That we can do because (10) holds.

By mathematical induction, with regard to (11), (12) and (3), it is easy to show that $1 \leqq y_j(t) \leqq y_{j+1}(t) \leqq 2$, $j = 0, 1, \ldots$, $t \geqq t_0$ holds. From the last inequalities it follows that the sequence $\{y_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ of continuous functions is nondecreasing and uniformly bounded on $[t_0, \infty)$ and therefore uniformly convergent on every finite interval. Let $y(t) = \lim_{j\to\infty} y_j(t)$. Then $1 \leqq y(t) \leqq 2$, $t \geqq t_0$ and $y(t)$ is the solution of the equation

$$y(t) = \begin{cases} 1, & t \leqq t_0 \\ 1 + \sum_{i=1}^{m} \left\{ \int_{t_0}^{t} \frac{(s - t_0)^{2n-1}}{(2n-1)!} p_i(s) f_i(y[h_i(s)])\, ds + \right. \\ \left. + \int_t^{\infty} \frac{(s - t_0)^{2n-1} - (s - t)^{2n-1}}{(2n-1)!} p_i(s) f_i(y[h_i(s)])\, ds \right\}. \end{cases}$$

However, it means that $y(t)$ is a nonoscillatory solution of the equation (1). The proof is therefore complete.

Theorem 2. *Let functions $p, f, h,$ satisfy* (2), (3), (4) *and, in addition, suppose that*

(13) (i) $h(t) = t - g(t)$, $0 \leqq g(t) \leqq M$, $t \in R_+$

(ii) *there exists a number β, $1 < \beta$ such that*

$$\liminf_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{|z|^{\beta}} \neq 0$$

(14) (iii)
$$\int^{\infty} t^{2n-1} p(t)\, dt = \infty\,.$$

Then the differential inequality

(A)
$$y^{(2n)}(t) + p(t) f(y[h(t)]) \leqq 0\,, \quad t \in R_+$$

(B)
$$[y^{(2n)}(t) + p(t) f(y[h(t)]) \geqq 0\,, \quad t \in R_+]$$

has no positive [negative] solution on $[t_0, \infty)$ for every $t_0 \in R_+$.

Proof. Suppose that the conclusion of Theorem 2 is false. Assume that there exists a positive solution $y(t)$ of (A) for $t \geqq t_0 \in R_+$. (The case of the differential inequality (B) is treated similarly.) Since $\lim h(t) = \infty$ as $t \to \infty$ there exists a $t_1 \geqq t_0$ such that $y[h(t)] > 0$ for $t \geqq t_1$. (A) with regard to (2) and (3) implies

(15)
$$y^{(2n)}(t) \leqq - p(t) f(y[h(t)]) < 0\,, \quad t \geqq t_1\,.$$

From $y^{(2n)}(t) < 0$, $y(t) > 0$ it follows that there exists $t_2 \geqq t_1$ such that $y(t), y'(t), \ldots$ $\ldots, y^{(2n-1)}(t)$ have constant sign for $t \geqq t_2$. Then by Lemma 2 for $y(t)$ and its derivatives (6)–(8) hold, where $k \in \{1, 3, \ldots, 2n - 1\}$. By (6), $y^{(2n-1)}(t)$ is decreasing and $y^{(2n-1)}(\infty) = c \geqq 0$ holds.

Integrating (A) from t ($t \geqq t_2$) to ∞ and neglecting $y^{(2n-1)}(\infty)$, we get

$$y^{(2n-1)}(t) \geqq \int_t^\infty p(s) f(y_h(s))\, ds\,, \quad t \geqq t_2 \tag{16}$$

and then in view of the monotonicity of $y^{(2n-1)}(t)$ and (4) we obtain

$$y_h^{(2n-1)}(t) \geqq \int_t^\infty p(s) f(y_h(s))\, ds\,, \quad t \geqq t_2\,. \tag{17}$$

I. From (7), for $k = 1$ we get

$$y'(t) \geqq t^{2n-2}\, y^{(2n-1)}(2^{2n-2}t)\,, \quad t \geqq t_2\,. \tag{18}$$

If $k = 1$ then, with regard to (6), $y''(t) \leqq 0$ for $t \geqq t_2$, $y^{(2n-1)}(t)$ is decreasing and so from (18) we have

$$\begin{aligned} y'(t - M) &\geqq [t - M)^{2n-2}\, y^{(2n-1)}[2^{2n-2}(t - M] \\ &\geqq [t - M]^{2n-2}\, y^{(2n-1)}(2^{2n-2)}t)\,, \quad t \geqq t_3 \geqq t_2 + M\,. \end{aligned}$$

From (16) using the last inequality we get

$$y'(t - M) \geqq [t - M]^{2n-2} \int_{2^{2n-2}t}^\infty p(s) f[y_h(s)]\, ds\,, \quad t \geqq t_3\,. \tag{19}$$

Integrating (19) from t_3 to t, $t \geqq t_3$,we obtain

$$\begin{aligned} y(t - M) - y(t_3 - M) \geqq \int_{2^{2n-2}t_3}^{2^{2n-2}t} &\frac{[2^{2-2n}s - M]^{2n-1} - [t_3 - M]^{2n-1}}{2n - 1} \times \\ \times\, p(s) f[y_h(s)]\, ds + &\frac{[t - M]^{2n-1} - [t_3 - M]^{2n-1}}{2n - 1} \int_{2^{2n-2}t}^\infty p(s) f[y_h(s)]\, ds\,. \end{aligned} \tag{20}$$

From (20), with regard to the monotonicity of $y(t)$, $f(z)$ and $t - M \leqq h(t)$, we get

$$y(t - M) \geqq \int_{t_3}^t \frac{[s - M]^{2n-1} - [t_3 - M]^{2n-1}}{2n - 1}\, p(2^{2n-2}s) f[y(s - M)]\, ds\,.$$

In the sequel we shall use the method due to Atkinson [1].

If we raise the last inequality by $-\beta$ ($\beta > 1$), then multiply by $\{[t - M]^{2n-1} - [t_3 - M]^{2n-1}\}\, p(2^{2n-2}t) f[y(t - M)]$, ($t \geqq t_3$) and integrate the resulting inequality from t_4 to t_5 $(t_3 < t_4 < t < t_5)$, we have

$$(21)\quad \int_{t_4}^{t_5} \{[s - M]^{2n-1} - [t_3 - M]^{2n-1}\}\, p(2^{2n-2}s) f[y(s - M)]\, [y(s - M)]^{-\beta}\, ds \leqq$$

$$\leqq \frac{(2n-1)^\beta}{\beta - 1} \left[\left\{ \int_{t_3}^{t} ([s - M]^{2n-1} - [t_3 - M]^{2n-1})\, p(2^{2n-2}s) f[y(s - M)]\, ds \right\}^{1-\beta} \right]_{t_4}^{t_5}.$$

For $t_5 \to \infty$ the right hand side of (21) is bounded and therefore the integral

$$\int_{t_4}^{\infty} \{[s - M]^{2n-1} - [t_3 - M]^{2n-1}\}\, p(2^{2n-2}s) f[y(s - M)]\, [y(s - M)]^{-\beta}\, ds$$

is convergent. If we choose $t_4 \geqq 2M$, we can show easily that

$$(22)\qquad J(t_4) = \int_{t_4}^{\infty} s^{2n-1} p(2^{2n-2}s) f[y(s - M)]\, [y(s - M)]^{-\beta}\, ds < \infty\,.$$

By virtue of the assumption $y(t) > 0$, $t \geqq t_0$ and Lemma 2 either $y(\infty) = b > 0$ or $y(\infty) = \infty$. In either case, with regard to the continuity and the monotonicity of $f(z)$ and the assumption (ii) of Theorem 2, there exists $T \geqq t_4$ such that

$$\frac{f[y(t - M)]}{[y(t - M)]^\beta} \geqq d > 0\,, \quad t \geqq T\,.$$

Then, from (22) we get

$$\infty > J(t_4) \geqq J(T) \geqq d \int_T^{\infty} s^{2n-1}\, p(2^{2n-2}s)\, ds = d\,(2^{2-2n})^{2n-1} \int_{2^{2n-2}T}^{\infty} t^{2n-1}\, p(t)\, dt\,,$$

which contradicts (14).

II. Let $k \in \{3, \ldots, 2n - 1\}$. Frome (8), for $i = k - 1$) we obtain,

$$y'(t) \geqq K t^{2n-2}\, y^{(2n-1)}(t)\,, \quad t \geqq 2^{(n-k}t_2 = \bar{t}_3\,,$$

where $K = B_{k-1}$.

Then, with regard to (6) and (13) we have

$$y'(t) \geqq y'(t - M) \geqq K[t - M]^{2n-2}\, y^{(2n-1)}(t - M)\,, \quad t \geqq \bar{t}_4 \geqq \bar{t}_3 + M\,.$$

From (17), by means of the last inequality it follows

$$y'(t) \geqq K[t - M]^{2n-2} \int_t^{\infty} p(s) f[y_h(s)]\, ds\,, \quad t \geqq \bar{t}_4\,,$$

Further, exactly as in the case I we obtain

$$(23)\qquad J(\bar{t}_5) = \int_{\bar{t}_5}^{\infty} s^{2n-1} p(s) f[y(s - M)]\, [y(s)]^{-\beta}\, ds < \infty\,.$$

(6) implies $y(t) > 0$, $y'(t) > 0$, $y''(t) > 0$ and therefore $y(\infty) = \infty$. Then, by virtue of the assumption (ii) and Lemma 3

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{f[y(t-M)]}{[y(t)]^\beta} = \liminf_{t\to\infty} \frac{f[y(t)]}{[y(t+M)]^\beta} = \liminf_{t\to\infty} \frac{f[y(t)]}{[y(t)]^\beta} > 0$$

holds. In view of the last inequality there exitss $\bar{T} \geqq \bar{t}_5$ such that

$$\frac{f[y(t-M)]}{[y(t)]^\beta} \geqq \bar{d} \geqq 0\,, \quad t \geqq \bar{T}\,.$$

Then we get from (23)

$$\infty > J(\bar{t}_5) \geqq J(\bar{T}) \geqq \bar{d} \int_{\bar{T}}^{\infty} s^{2n-1}\, p(2^{2n-2}s)\, \mathrm{d}s = \bar{d}(2^{2-2n})^{2n-1} \int_{2^{2n-2}\bar{T}}^{\infty} t^{2n-1} p\,(t)\, \mathrm{d}t\,,$$

which contradicts (14).

This completes the proof of Theorem 2.

We shall now apply Theorem 2 to obtain the oscillatory character for the equation (1).

Theorem 3. *Let functions p_i, f_i, h_i satisfy* (2), (3), (4) *and, in addition, suppose*

(i) $h_i(t) = t - g_i(t)$, $0 \leqq g_i(t) \leqq M$, $t \in R_+$, $(i = 1, \ldots, m)$

(ii) *there exists a number β, $\beta > 1$ such that*

$$\liminf_{|z|\to\infty} \frac{|f_i(z)|}{|z|^\beta} > 0\,, \quad (i = 1, \ldots, m)\,.$$

Then the equation (1) *is oscillatory if and only if*

$$\int^{\infty} t^{2n-1}\, p_j(t)\, \mathrm{d}t = \infty \tag{24}$$

at least for one $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Proof. I. The necessity follows immediately from Theorem 1.

II. The sufficient condition. Let us suppose that the conclusion of Theorem is false. Let $y(t)$ be a nonoscillatory solution of the equation (1). We may assume to be specific that $y[h_i(t)] > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ for $t \geqq t_1 \geqq t_0 \in R_+$. Then from the equation (1), in view of (2), (3) we have

$$y^{(2n)}(t) + p_j(t)\, f_j(y[h_j(t)]) \leqq 0\,, \quad t \geqq t_1 \tag{25}$$

and $y(t)$ is a solution of (25). By virtue of Theorem 2, the inequality (25) has no positive solution and this contradicts the fact that $y(t)$ is a positive solution of the equation (1). The proof of Theorem is complete.

Theorem 4. *Let p satisfy* (2) *and, in addition,*

(26) (a) $h \in C^1[R_+, R]$, $h'(t) \geqq 0$ *for* $t \geqq T \in R_+$, $h(t) \leqq t$, $t \in R_+$, $\lim h(t) = \infty$ as $t \to \infty$,

(b) $f \in C^1[R, R]$, $zf(z) > 0$ for $z \neq 0$, $f'(z) \geqq 0$, $z \in R$,

(c) *for every* $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{dz}{f(z)} < \infty \quad \left[\int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{dz}{f(z)} < \infty\right]$$

(27) (d)
$$\int^\infty [h(t)]^{2n-1} p(t)\, dt = \infty .$$

Then the differential inequality (A) [(B)] *has no positive* [negative] *solutions on* $[t_0, \infty)$ *for every* $t_0 \in R_+$.

Proof. Suppose that the conclusion of Theorem 4 is false. Assume that there exists a positive solution $y(t)$ of (A) for $t \geqq t_0 \in R_+$. [The case of (B) is treated similarly.] It follows from (26) that there exists $t_1 \geqq t_0$ such that $y[h(t)] > 0$ for $t \geqq t_1$. From (A), in view of (2) and (b) of Theorem 4 we get $y^{(2n)}(t) \leqq 0$ for $t \geqq t_1$. From the last inequality, by virtue of $y[h(t)] > 0$, $t \geqq t_1$, we can assert that the assumptions of Lemma 1 are fulfilled. Then (5), for $k = 2v + 1$, $i = 2v$ ($v \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$) implies

$$0 \leqq y^{(2v+1)}(t) \leqq \frac{(2v)!}{(t - t_1)^{2v}}\, y'(t), \quad t > t_1 .$$

By virtue of the last inequality there exists a constant K, $0 < K < 1$ and a number $t_2 > t_1$ such that

(28) $$0 \leqq t^{2v}\, y^{(2v+1)}(t) \leqq K(2v)!\, y'(t), \quad t \geqq t_2, \quad v \in \{0, 1, \ldots, n - 1\} .$$

If we multiply (A) by $[h(t)]^{2n-1} f^{-1}[y_h(t)]$, integrate the resulting inequality from $a(\geqq \max\{t_2, T\})$ to t, use Lemma 1, the assumption (b) and omit negative numbers, we obtain

(29) $$\int_a^t [h(s)]^{2n-1} p(s)\, ds \leqq c_1 + (2n - 1) \int_a^t y^{(2n-1)}(s)\, [h(s)]^{2n-2}\, h'(s) \times$$
$$\times f^{-1}[y_h(s)]\, ds \leqq c_1 + (2n - 1) \int_a^t y_h^{(2n-1)}(s)\, [h(s)]^{2n-2}\, h'(s) \times$$
$$\times f^{-1}[y_h(s)]\, ds \leqq c_1 + (2n - 1) \int_{h(a)}^t y^{(2n-1)}(x)\, x^{2n-2} f^{-1}(y(x))\, dx ,$$

where $c_1 = y^{(2n-1)}(a)[h(a)]^{2n-1} f^{-1}(y_h(a)) \geqq 0$.

If we integrate the last integral in (29) by parts $2(n - v - 1)$ times and neglect negative numbers, we obtain

(30)

$$\int_a^t [h(s)]^{2n-1} p(s) \, ds \leqq C + (2n-1)\dots(2v+1) \int_{h(a)}^t y^{(2v+1)}(x) \, x^{2v} f^{-1}(y(x)) \, dx ,$$

where C is a positive constant.

From (30), in view of (28), we get

$$\int_a^t [h(s)]^{2n-1} p(s) \, ds \leqq C + K(2n-1)! \int_{h(a)}^t y'(x) f^{-1}(y(x)) \, dx$$

$$\leqq C + K(2n-1)! \int_{y[h(a)]}^t dz / f(z) < \infty \quad \text{for} \quad t \to \infty .$$

It means that $\int_a^\infty [h(s)]^{2n-1} p(s) \, ds < \infty$, but this contradicts (27). This completes the proof of Theorem 4.

Corollary 1. *Let* p_i, $i = 1, \dots, m$ *satisfy* (2) *and, in addition,*

(31) (a) $h_i \in C^1[R_+, R]$, $h_i(t) \leqq t$ for $t \in R_+$, $h_i'(t) \geqq 0$ *for* $t \geqq T \in R_+$, $\lim h_i(t) = \infty$ *as* $t \to \infty$ $(i = 1, \dots, m)$,

(32) (b) f_i, $i = 1, \dots, m$ *satisfy the assumptions* (b), (c) *of Theorem* 4. *Then the equation* (1) *is oscillatory if*

(33) $$\int^\infty [h_j(t)]^{2n-1} p_j(t) \, dt = \infty$$

at least for one $j \in \{1, \dots, m\}$.

Proof. Let us suppose that the conclusion of Corollary is false. Let $y(t)$ be a non-oscillatory solution of the equation (1) and let $y[h_i(t)] > 0$ $(i = 1, \dots, m)$ for $t \geqq t_1 \geqq t_0 \in R_+$. [The case $y(t) < 0$ is treated similarly.] Then from the equation (1), in view of (2), (32) we have (25) and $y(t)$ is a positive solution of (25). This contradics Theorem 4.

The proof of Corollary is complete.

Finally, we shall study the oscillatory properties of the differential equation

(34) $$y^{(2n)}(t) + F(t, y_{h_1}(t), \dots, y_{h_m}(t)) = 0 .$$

With regard to the equation (34) we assume that the following conditions are satisfied:

$$(35) \qquad F(t, x_1, \ldots, x_m) \begin{cases} \geqq \sum_{i=1}^{m} p_i(t)\, \varphi_i(x)\,, & x_i > 0\,, \quad i = 1, \ldots, m \\ \leqq \sum_{i=1}^{m} p_i(t)\, \psi_i(x)\,, & x_i < 0\,, \quad i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

$$F(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0\,,$$

where (a) $p_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, satisfy (2),

(b) $\varphi_i \in C[(0, \infty), (0, \infty)]$, $\psi_i \in C[(-\infty, 0), (-\infty, 0)]$, $i = 1, \ldots, m$,

Theorem 5. *Let the equation* (34) *satisfy* (35) *and, in addition,*

(i) h_i, $i = 1, \ldots, m$, *satisfy* (4), (13),

(ii) $\varphi_i(z)\, \psi_i(z)$, $i = 1, \ldots, m$, *are nondecreasing functions,*

(iii) *there exists* $\beta > 1$ *such that*

$$\liminf_{z \to \infty} \frac{|\varphi_i(z)|}{|z|^\beta} > 0\,, \quad \liminf_{z \to -\infty} \frac{|\psi_i(z)|}{|z|^\beta} > 0\,, \quad i = 1, \ldots, m\,.$$

Then the equation (34) *is oscillatory if* (24) *holds at least for one* $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Proof. The proof of this Theorem is very similar to that of Theorem 2 and hence we omit it.

Theorem 6. *Let the equation* (34) *satisfy* (35) *and, in addition,*

(i) h_i, $i = 1, \ldots, m$, *satisfy* (31),

(ii) *there exist* $\varphi_i'(u)$, $\psi_i'(v)$ *and* $\varphi_i'(u) \geqq 0$ *for* $u > 0$, $\psi_i'(v) \geqq 0$ *for* $v < 0$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, m$,

(iii) *for every* $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{du}{\varphi_i(u)} < \infty\,, \quad \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{dv}{\psi_i(v)} < \infty\,, \quad i = 1, \ldots, m\,.$$

Then the equation (34) *is oscillatory if* (33) *holds at least for one* $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Proof. The proof of this Theorem is very similar to that of Theorem 4 and hence we omit it.

Acknowledgment. The author wishes to thank Prof. J. Kurzweil for his helpful suggestions.

References

[1] *Atkinson F. V.:* On second-order non-linear oscillations. Pacific J. Math., *5* (1955), 643—647.

[2] *Burkowski F.:* Oscillation theorems for a second order nonlinear functional differential equation. J. Math. Anal. Appl. *33* (1971), 258—262.

[3] *Gollwitzer H. E.:* On nonlinear oscillations for a second order delay equation. J. Math. Anal. Appl. *26* (1969), 385—389.

[4] *Ladas G.:* Oscillation and asymptotic behavior of solutions of differential equations with retarded argument. J. Differential Equations *10* (1971), 281—290.

[5] *Кигурадзе И. Г.:* О колеблемости решений уравнения $d^m u/dt^m + a(t)|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$. Мат. Сборник Т. *65* (107) N_2 (1964), 172—187.

[6] *Кигурадзе И. Т.:* К вопросу колеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений. Дифф. Уравнения, *8* (1965), 995—1006.

[7] *Kusano T.* and *Onose H.:* Oscillation of solutions of nonlinear differential delay equations of arbitrary order. Hiroshima Math. J. *2* (1972), 1—13.

[8] *Marušiak P.:* Note on the Ladas' paper on oscillation and asymptotic behavior of solutions of differential equations with retarded argument. J. Differential Equations, *13* N_1 (1973), 150—156.

[9] *Одарич О. Н.* и *Шевело В. Н.:* Об осцилляторных свойствах решений нелинейных дифференциальных уравнениях второго порядка с запаздывающим аргументом. Мат. физика, вып. 4 „Наукова думмка" К. 1968.

[10] *Шевело В. Н., Одарич О. Н.:* Некоторые вопросы теории осдилляции (неосцилляции) решений дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом. Украинский Мат. Журнал Т 23 (1971) № 4.

[11] *Шевело В. Н. и Варех Н. В.:* О некоторых свойствах решений дифференциальных уравнений с запаздыванием. Украинский Мат. Журнал, Т 24 (1972), 807—813.

[12] *Staikos V. A.* and *Sficas Y. G.:* Oscillatory and asymptotic behavior of functional differential equations. J. Differential Equations *12* No. 3 (1972), 426—437.

[13] *Waltman P.:* A note on an oscillation criterion for an euqation with a functional argument. Canad. Math. Bull. *11* (1968), 537—595.

Author's address: 010 88 Žilina, Marxa-Engelsa 25 (Vysoká škola dopravná).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

THE NONEXISTENCE OF FREE COMPLETE VECTOR LATTICES

MÁRIA JAKUBÍKOVÁ, Košice

(Received November 6, 1972)

Free vector lattices were investigated in [1], [3], [9], [11] (cf. also [2], Chap. XV, § 5). Since the class of all vector lattices is an equational one, for each cardinal $\mathfrak{m}$ there exists a free vector lattice $X_{\mathfrak{m}}$ with a set A of free generators such that card $A =$ $= \mathfrak{m}$. HALES [4] proved that there does not exist a free complete Boolean algebra with an infinite set of free complete generators (this solved the problem proposed by RIEGER [8]). Using the result of Hales we show that there does not exist a free complete vector lattice with an infinite set of free complete generators. An analogous result concerning complete l-groups was proved in [5]. Further, we examine the existence of free (α, ∞)-distributive vector lattices where α is an infinite regular cardinal.

For the terminology, cf. [2], Chap. XV. Lattice unions and intersections are denoted by $\vee$ and $\wedge$, respectively. Set unions, set intersections and the inclusion are denoted by $\cup$, $\cap$ and $\subset$, respectively. A sublattice L_1 of a lattice L is said to be a closed sublattice of L, if, whenever $\{x_i\}$ $(i \in I)$ is a subset of L_1 such that $\bigvee x_i$ exists in L, then $\bigvee x_i \in L_1$, and if the dual condition also holds. A mapping φ of a lattice L into a lattice L' is said to be a complete homomorphism if it fulfils the following condition (c_1) and also the condition (c_2) that is dual to (c_1): If $\{x_i\} \subset L$ and if $\bigvee x_i$ exists in L, then

$$\bigvee \varphi(x_i) \text{ exists in } L' \text{ and } \varphi(\bigvee x_i) = \bigvee \varphi(x_i).$$

Let us recall the definition of a vector lattice (cf. [2]).

A real linear space L with elements $f, g, \ldots,$ is called a vector lattice if L is lattice ordered in such a manner that the partial ordering is compatible with the algebraic structure of L, i.e.,

(i) $f \leqq g$ implies $f + h \leqq g + h$ for every $f, g, h \in L$,

(ii) $f \geqq 0$ implies $\alpha f \geqq 0$ for every $f \in L$ and every real number $\alpha \geqq 0$.

Thus $(L; +, \wedge, \vee)$ is an Abelian lattice ordered group; hence $(L; \wedge, \vee)$ is a distributive lattice and

$$f + (g \vee h) = (f + g) \vee (f + h),$$

$$f + (g \wedge h) = (f + g) \wedge (f + h)$$

is valid for every $f, g, h \in L$.

Let A be a subset of a complete Boolean algebra B. We say that A completely generates B if $B_1 = B$ for each closed subalgebra B_1 of B with $A \subset B_1$. The set A is said to be a set of free generators of B, if it satisfies the following conditions: (a) A completely generates B; (b) if B' is a complete Boolean algebra and if f is a mapping of the set A into B' such that the set $f(A)$ completely generates B', then there exists a complete homomorphism ψ of B onto B' such that $\psi(a) = f(a)$ for each $a \in A$. (Cf. [4].)

Now we introduce analogous notions for complete vector lattices. For any vector lattice X the corresponding lattice will be denoted by $\overline{X}$. A vector sublattice X_1 of a vector lattice X is said to be a closed vector sublattice of X, if $\overline{X}_1$ is a closed sublattice of $\overline{X}$. Let A be a subset of a complete vector lattice X. We say that A completely generates X if $X_1 = X$ for each closed vector sublattice X_1 of X with $A \subset X_1$. A homomorphism φ of a complete vector lattice X into a complete vector lattice X' is called a complete homomorphism if φ is a complete homomorphism of the lattice $\overline{X}$ into the lattice $\overline{X}'$. Let A be a subset of a complete vector lattice X. Then A is said to be a set of free complete generators of X if it fulfils the following conditions: (a) A completely generates X, and (b) for each complete vector lattice X' and each mapping $f: A \to X'$ such that $f(A)$ completely generates X' there is a complete homomorphism ψ of X onto X' such that $\psi(a) = f(a)$ for each $a \in A$. If A is a set of free complete generators of a complete vector lattice X and card $A = \gamma$, then X is called a free complete vector lattice on γ free complete generators.

Let X be a complete vector lattice, $0 < e \in X$. The element e is called a weak unit of X if $e \wedge x > 0$ for each $0 < x \in X$. The element e is a strong unit of X if for each $0 < x \in X$ there is a positive integer $n(x)$ such that $x \leqq n(x)\, e$. Each strong unit of X is a weak unit of X. Let e be a weak unit of X and let $B(e)$ be the set of all elements $e_i \in X$ such that $e_i \geqq 0$ and $e_i \wedge (e - e_i) = 0$. The set $B(e)$ is said to be a basis of X.

We need the following results:

Theorem A. (Cf. [6], p. 92.) *Let e be a weak unit of a complete vector lattice X. Then the basis $B(e)$ is a closed sublattice of $\overline{X}$ and $B(e)$ is a Boolean algebra.*

Theorem B. (Cf. [6], p. 131, Thm. 1.53.) *Let B be a complete Boolean algebra. Then there is a complete vector lattice X and a weak unit e of X such that the basis $B(e)$ is isomorphic to B.*

Theorem C. (Cf. [4], § 4, Thm. 3.) *Let $\mathfrak{m}$ be an infinite cardinal. There exists a complete Boolean algebra $B_{\mathfrak{m}}$ and a subset $A \subset B_{\mathfrak{m}}$ such that A completely generates $B_{\mathfrak{m}}$, card $A = \aleph_0$ and card $B_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$.*

Theorem 1. *Let α be an infinite cardinal. There does not exist a free complete vector lattice on α free complete generators.*

Proof. Suppose that a set A_0 is the set of free complete generators of a complete lattice X_0, card $A_0 = \alpha$. Let $\mathfrak{m}$ be a cardinal, $\mathfrak{m} >$ card X_0. Let $B = B_{\mathfrak{m}}$ be a Boolean algebra fulfilling the assertion of Thm. C. Further let X be a complete vector lattice satisfying the assertion of Thm. B. Since the Boolean algebras $B_{\mathfrak{m}}$ and $B(e)$ are isomorphic we may put $B(e) = B_{\mathfrak{m}}$. Choose a_0, $a_1 \in A_0$ and $A_1 \subset A_0 \setminus \{a_0, a_1\}$, card $A_1 = \aleph_0$. Let $f_1 : A_1 \to A$ be a bijection and let f be a mapping of the set A_0 into X such that $f(a_0) = 0, f(a_1) = e, f(a) = f_1(a)$ for each $a \in A_1$ and $f(a) = 0$ for each $a \in A_0 \setminus (A_1 \cup \{a_0, a_1\})$. Let Y be the intersection of all closed vector sublattices Y_i of X with $f(A_0) \subset Y_i$. Then Y is a closed vector sublattice of X, hence Y is a complete lattice and Y is completely generated by the set $f(A_0)$.

According to the definition of a free complete vector lattice, there is a complete homomorphism ψ of X_0 onto Y such that $\psi(a) = f(a)$ for each $a \in A_0$. Since e is a weak unit of X, e is a weak unit of Y. By Thm. A, $B(e) = B$ is a closed sublattice of X and hence the set $B \cap Y = B_0$ is a closed sublattice of Y. Thus, since 0, $e \in B_0$, the set B_0 is a complete lattice. Obviously B_0 is distributive. Let $b_0 \in B_0$. Then $b_0 \in B(e)$, hence $b_0 \wedge (e - b_0) = 0$. This implies $e - b_0 \in B(e)$ and so $e - b_0 \in B_0$. Further we have $b_0 \vee (e - b_0) = b_0 + (e - b_0) = e$, hence $e - b_0$ is the complement of b_0 in the Boolean algebra B. This implies that B_0 is a closed subalgebra of B. Since $A \subset B_0$ we obtain (because B is completely generated by A) that $B_0 = B$. Therefore $\mathfrak{m} =$ card $B \leqq$ card $Y =$ card $\psi(X_0)$. This implies card $X_0 \geqq \mathfrak{m}$, which is a contradiction.

Let α, β be cardinals. Let us consider the following condition on a lattice L (cf. [4]):
(d_1) L satisfies the identity

$$\bigwedge_{s \in S} \bigvee_{t \in T} x_{s,t} = \bigvee_{\varphi \in T^S} \bigwedge_{s \in S} x_{s,\varphi(s)}$$

whenever card $S \leqq \alpha$, card $T \leqq \beta$ and all joins and meets do exist in L.

If L satisfies (d_1) and the condition dual to (d_1) then L is called (α, β)-distributive. If L is (α, β)-distributive for each cardinal β, then it is said to be (α, ∞)-distributive. It is easy to verify that a vector lattice is (α, β)-distributive if it fulfils the condition (d_1).

A complete (α, ∞)-distributive Boolean algebra B is said to be a free complete (α, ∞)-distributive Boolean algebra on γ free complete generators if there is a subset $A \subset B$ with card $A = \gamma$ such that A is a set of free complete generators of B and every mapping f of A onto a subset A' of a complete (α, ∞)-distributive Boolean algebra B' which completely generates B' can be extended to a complete homomorphism of B onto B'.

Replacing "Boolean algebra" by "vector lattice" everywhere in the above definition, we obtain the definition of a free complete (α, ∞)-distributive vector lattice on γ complete generators.

Theorem C'. (Cf. [4], p. 62.) *Let γ be an infinite regular cardinal. Let $\mathfrak{m}$ be a cardinal, $\mathfrak{m} \geqq \gamma$. There exists a complete (γ, ∞)-distributive Boolean algebra $B^0_{\mathfrak{m}}$ and a subset $A \subset B^0_{\mathfrak{m}}$ such that A completely generates $B^0_{\mathfrak{m}}$, card $A = \gamma$, and card $B^0_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$.*

Theorem D. (Cf. [7].) *Let B be a Boolean algebra and let M be the Stone space of B. Then the lattice $C(M)$ fo all real continuous functions on M is (α, β)-distributive if and only if B is (α, β)-distributive.*

Theorem E. (Cf. [10], Thm. v. 3.1.) *Let e be a strong unit of a complete vector lattice Y. Let M be the Stone space of the Boolean algebra $B(e) = B$. Then Y is isomorphic with the vector lattice $B(M)$ consisting of all bounded continuous functions on M.*

A subset P of a vector lattice Q is said to be convex if $p_1, p_2 \in P$, $q \in Q$, $p_1 \leqq q \leqq p_2$ implies $q \in P$.

Lemma. *Let P be a vector sublattice of a vector lattice Q. Assume that P is a convex subset of Q and that for each $0 < q \in Q$ there exists $0 < p \in P$ with $p \wedge q > 0$. Then P is (α, β)-distributive.*

Proof. If $\{f_i\}$ is a subset of P and if $f \in P$ is the least upper bound of $\{f_i\}$ in P, then f is also the least upper bound of the set $\{f_i\}$ in Q (since P is convex in Q). A similar assertion holds for greatest lower bounds of subsets of P. Thus if P is not (α, β)-distributive, then Q fails to be (α, β)-distributive. Assume that Q is not (α, β)-distributive. Then there exists a system $\{x_{s,t}\} \subset Q$ with card $S \leqq \alpha$, card $T \leqq \beta$ such that all joins and meets standing in (d_1) do exist in Q and

$$v = \bigwedge_{s \in S} \bigvee_{t \in T} x_{s,t} > \bigvee_{\varphi \in T^S} \bigwedge_{s \in S} x_{s,\varphi(s)} = u\,.$$

There exists $0 < f_1 \in P$ with $f_1 \wedge (v - u) > 0$. Denote

$$(x_{s,t} \wedge v) \vee u = \bar{x}_{s,t}\,,$$
$$(\bar{x}_{s,t} - u) \wedge f_1 = y_{s,t}\,.$$

Then we have

$$0 < f_1 \wedge (v - u) = \bigwedge_{s \in S} \bigvee_{t \in T} y_{s,t} \neq \bigvee_{\varphi \in T^S} \bigwedge_{s \in S} y_{s,\varphi(s)} = 0\,;$$

hence P is not (α, β)-distributive.

Theorem 2. *Let γ be an infinite regular cardinal. Then there does not exist a free complete (γ, ∞)-distributive vector lattice on γ complete generators.*

Proof. Suppose that X_0 is a complete (γ, ∞)-distributive vector lattice with a set A_0 of free complete generators, card $A_0 = \gamma$. Let $\mathfrak{m}$ be a cardinal, $\mathfrak{m} >$ card X_0. Let $B^0_{\mathfrak{m}} = B$ be as in Thm. C′. Now we use a similar method as in the proof of Thm. 1. Let X be as in Thm. B. We may put $B = B(e)$. Choose two distinct elements $a_0, a_1 \in A_0$ and denote $A_1 = A_0 \setminus \{a_0, a_1\}$. Then there exists a mapping f_1 of A_1 onto A and let f be a mapping of A_0 into X such that $f(a_0) = 0, f(a_1) = e$ and $f(a) = f_1(a)$ for each $a \in A_0$.

Let Y be the closed vector sublattice of X generated by the set $A \cup \{0, e\}$. Then Y is a complete vector lattice that is completely generated by the set $A \cup \{e\}$ and e is a weak unit of Y. Let Y_0 be the set of all $y \in Y$ satisfying $-n(y)\, e \leqq y \leqq n(y)\, e$ for a positive integer $n(y)$. The set Y_0 is a complete vector lattice and it is a convex vector sublattice of Y; the element e is a strong unit of Y_0.

Let M be the Stone space of the Boolean algebra B. According to Thm. D, $C(M)$ is (γ, ∞)-distributive and hence by the Lemma the vector lattice $B(M)$ is (γ, ∞)-distributive. From Thm. E it follows that Y_0 is isomorphic with $B(M)$ and therefore Y_0 is (γ, ∞)-distributive. Since e is a weak unit of Y and since e belongs to Y_0, according to the Lemma we obtain that Y is (γ, ∞)-distributive. Thus there is a complete homomorphism ψ of X_0 onto Y. By the same reasoning as in the proof of Thm. 1 we get that $B(e) \subset Y$. Therefore $\mathfrak{m} \leqq$ card $Y \leqq$ card X_0, which is a contradiction.

References

[1] *K. A. Baker:* Free vector lattices, Canad. J. Math. *20* (1968), 58—66.

[2] *G. Birkhoff:* Lattice theory, Third edition, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. *25* (1967).

[3] *P. Conrad:* Free abelian *l*-groups and vector lattices, Math. Ann. *190* (1971), 306—312.

[4] *A. W. Hales:* On the non-existence of free complete Boolean algebras, Fundam. Math. *54* (1964), 45—66.

[5] *M. Jakubíková:* Über die *B*-Potenz einer verbandsgeordneten Gruppe, Matem. časop. *23* (1973), 231—239.

[6] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер*: Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Москав 1950.

[7] *R. S. Pierce:* Distributivity in Boolean algebras, Pacif. J. Math. *7* (1957), 983—992.

[8] *L. Rieger:* On free $\aleph_\xi$-complete Boolean algebras, Fundam. Math. *38* (1951), 35—52.

[9] *D. Topping:* Some homological pathology in vector lattices, Canad. J. Math *17* (1965), 411—428.

[10] *Б. З. Вулих*: Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Москва 1961.

[11] *E. Weinberg:* Free lattice ordered abelian groups, Math. Ann. *151* (1963), 187—199.

Author's address: 040 01 Košice, Švermova 5 (Strojní fakulta VŠT).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR GENERALIZED LINEAR INTEGRODIFFERENTIAL EQUATIONS WITH LEFT-CONTINUOUS SOLUTIONS

MILAN TVRDÝ, Praha

(Received November 9, 1972)

Introduction. In [11] the boundary value problem

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{D}\left[A(t)\,x + \int_a^b [\mathrm{d}_s G(t, s)]\,x(s) + f(t)\right],$$

$$\int_a^b [\mathrm{d}L(s)]\,x(s) = l \quad (-\infty < a < b < \infty)$$

was treated. In particular, theorems analogous to the well-known Fredholm theorems from the theory of integral equations were proved. The first of the above equations is a generalized ordinary differential equation in the sense of J. KURZWEIL [6]. An n-vector function $x(t)$ is said to be its solution on $[a, b]$ if for any $t \in [a, b]$

$$x(t) = x(a) + \int_a^t [\mathrm{d}A(s)]\,x(s) + \int_a^b [\mathrm{d}_s(G(t, s) - G(a, s))]\,x(s) + f(t) - f(a)\,.$$

The principal assumption was that of the regularity of $A(t)$ on $[a, b]$ (i.e. $A(a+) = A(a)$, $A(b-) = A(b)$ and $A(t+) + A(t-) = 2A(t)$ for all $a < t < b$). In this note the analogous investigation of the case of left-continuous $A(t)$ is carried out. Before treating the general problem we also generalize the results of [11] concerning the two-point problem

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{D}[A(t)\,x + f(t)]\,, \quad M\,x(a) + N\,x(b) = l\,.$$

For motivations of the study of such problems and for more detailed bibliography see [11]. Let us note furthermore that in [10] J. TAUFER developed numerical methods for solving some boundary value problems (taken from the technical practise) which are very close to those we are going to study here. Some of them (or at least some important special cases) even can be reduced to boundary value problems for generalized ordinary differential equations. For example, the following (interface) problem occurs in [10]. To find a vector function $x(t)$ piecewise absolutely continuous on $[a, b]$ such that

$$\dot{x} = A(t)\,x + f(t) \quad \text{a.e. on} \quad [a, b],$$
$$x(t_i+) = W_i\,x(t_i-) + w_i \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$
$$M\,x(a) + N\,x(b) = l.$$

(A and f are L-integrable on $[a, b]$, M, N and W_i are constant matrices, w_i and l are constant vectors, $a \leqq t_1 < t_2 < \dots < t_p \leqq b$.) Putting

$$B(t) = \int_a^t A(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{for} \quad a \leqq t \leqq t_1,$$

$$B(t) = \int_a^t A(s)\,\mathrm{d}s + (W_1 - I) \quad \text{for} \quad t_1 < t \leqq t_2, \dots$$

$$\dots, B(t) = \int_a^t A(s)\,\mathrm{d}s + (W_1 - I) + \dots + (W_p - I) \quad \text{for} \quad t_p < t \leqq b$$

and

$$g(t) = \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{for} \quad a \leqq t \leqq t_1,$$

$$g(t) = \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + w_1 \quad \text{for} \quad t_1 < t \leqq t_2, \dots$$

$$\dots, g(t) = \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + w_1 + \dots + w_p \quad \text{for} \quad t_p < t \leqq b,$$

we get an equivalent two-point boundary value problem

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{D}[B(t)\,x + g(t)], \quad M\,x(a) + N\,x(b) = l.$$

Moreover, in [10] the transformation of problems with integral additional conditions to equivalent two-point boundary value problems was found independently of W. R. Jones [5].

1. Preliminaries. Let $-\infty < a < b < \infty$. The closed interval $a \leqq t \leqq b$ is denoted by $[a, b]$, its interior $a < t < b$ by (a, b) and the corresponding half-open intervals by $[a, b)$ and $(a, b]$. Given a matrix M, M' denotes its transpose, I is the identity matrix, O is the zero matrix. Vectors are generally considered as columns. Row vectors are denoted as transpositions of column vectors. The space of n-vector functions with bounded variation on $[a, b]$ is denoted by BV_n and the n-dimensional Euclidean space is denoted by R_n. Given a matrix function $F(t)$ of bounded variation on $[a, b]$, we put $F(a-) = F(a)$, $F(b+) = F(b)$, $\Delta^- F(t) = F(t) - F(t-)$, $\Delta^+ F(t) = F(t+) - F(t)$ and $\Delta F(t) = F(t+) - F(t-)$ for any $t \in [a, b]$. The space of all functions $F(t)$ of bounded variation on $[a, b]$ such that $F(t+) = F(t-) = F(a)$ for all $t \in [a, b]$ is denoted by N. Integrals are always the Perron-Stieltjes ones. For our purpose the notion of the σ-Young integral (Y-integral), which is on the space of functions with bounded variation equivalent to the Perron-Stieltjes integral, is fully sufficient. (For the definition and basic properties of the Y-integral see [4] II 19,3. An exhaustive survey was given in [12], too.)

Without any special quotation we shall make use of the fundamental results concerning generalized linear differential equations

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t) x + f(t)],$$

which were established by T. H. HILDEBRANDT [3] and ŠT. SCHWABIK [7]. (In particular, in [7] the case of left-continuous $A(t)$ was intensively studied. For some details see also [9]. A detailed survey of these matters was given also in [11] and [12].)

2. Two-point problem. The subject of this section is the two-point boundary value problem (p)

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t) x + f(t)], \tag{2,1}$$

$$M x(a) + N x(b) = l, \tag{2,2}$$

where $A(t)$ is an $n \times n$-matrix function of bounded variation on $[a, b]$, $f \in BV_n$, $l \in R_m$ and M, N are constant $m \times n$-matrices. We are seeking a function $x \in BV_n$ which is on $[a, b]$ a solution to the generalized linear differential equation (2,1) and fulfils the condition (2,2). (Let us notice that the equation (2,1) possesses only solutions with bounded variation on $[a, b]$, cf. [9].)

Any problem (p*) to find $y \in BV_n$ and $\lambda \in R_m$ such that $y'(t)$ is on $[a, b]$ a solution to the generalized linear differential equation

$$\frac{dy'}{d\tau} = D[-y' B(t)] \tag{2,3}$$

and

$$y'(a) = -\lambda' M, \quad y'(b) = \lambda' N \tag{2,4}$$

with $A - B \in N$ is said to be the adjoint of the problem (p).

Throughout the section we suppose that

$$A - B \in N, \quad \Delta^+ B(t) \Delta^+ A(t) = \Delta^- B(t) \Delta^- A(t) \quad \text{on} \quad [a, b] \tag{2,5}$$

and that at least one of the following conditions is satisfied

(2,6) $\det(I - \Delta^- A(t)) \det(I - \Delta^+ B(t)) \det(I + \Delta^+ A(t)) \neq 0$ on $[a, b]$,

(2,7) $\det(I - \Delta^- A(t)) \det(I - \Delta^+ B(t)) \det(I + \Delta^- B(t)) \neq 0$ on $[a, b]$,

(2,8) $\det(I + \Delta^+ A(t)) \det(I + \Delta^- B(t)) \det(I - \Delta^+ B(t)) \neq 0$ on $[a, b]$,

(2,9) $\det(I + \Delta^+ A(t)) \det(I + \Delta^- B(t)) \det(I - \Delta^- A(t)) \neq 0$ on $[a, b]$.

Without any loss of generality we may also assume $A(a) = B(a) = O$.

Let $U(t, s)$ and $V(t, s)$ denote the fundamental matrix solutions on $[a, b]$ to the equations (2,1) and (2,3), respectively. It means that

$$U(t, s) = I + \int_s^t [dA(\tau)]\, U(\tau, s) \tag{2,10}$$

for $t, s \in [a, b]$, $t \geqq s$ if $\det(I - \Delta^- A(t)) \neq 0$ on $[a, b]$ and for $t \leqq s$ if $\det(I + \Delta^+ A(t)) \neq 0$ on $[a, b]$. Furthermore,

$$V(t, s) = I + \int_s^t V(t, \sigma)\, dB(\sigma) \tag{2,11}$$

for $t, s \in [a, b]$, $t \geqq s$ if $\det(I - \Delta^+ B(t)) \neq 0$ on $[a, b]$ and for $t \leqq s$ if $\det(I + \Delta^- B(t)) \neq 0$ on $[a, b]$. The following lemma establishes the relation between the functions U and V.

2,1. Lemma. *Let $A - B \in N$. If (2,6) or (2,7) holds, then for $t, s \in [a, b]$, $t \geqq s$*

$$\begin{aligned} V(t, s) = {} & U(t, s) + V(t, s)(A(s) - B(s)) - (A(t) - B(t))\, U(t, s) + \\ & + V(t, s)\, \Delta^+ B(s)\, \Delta^+ A(s) - \Delta^- B(t)\, \Delta^- A(t)\, U(t, s) + \\ & + \sum_{s<\tau<t} (V(t, \tau)(\Delta^+ B(\tau)\, \Delta^+ A(\tau) - \Delta^- B(\tau)\, \Delta^- A(\tau))\, U(\tau, s)). \end{aligned} \tag{2,12}$$

If (2,8) or (2,9) holds, then for $t, s \in [a, b]$, $t \leqq s$

$$\begin{aligned} V(t, s) = {} & U(t, s) + V(t, s)(A(s) - B(s)) - (A(t) - B(t))\, U(t, s) + \\ & + V(t, s)\, \Delta^- B(s)\, \Delta^- A(s) - \Delta^+ B(t)\, \Delta^+ A(t)\, U(t, s) + \\ & + \sum_{t<\tau<s} (V(t, \tau)(\Delta^- B(\tau)\, \Delta^- A(\tau) - \Delta^+ B(\tau)\, \Delta^+ A(\tau))\, U(\tau, s)). \end{aligned} \tag{2,13}$$

Proof. Let e.g. (2,6) be satisfied. Let $t, s \in [a, b]$, $t \geqq s$. By the substitution theorem for Y-integrals and by (2,10) and (2,11)

$$\begin{aligned} Q = \int_s^t [d_\tau V(t, \tau)]\, U(\tau, t) + \int_s^t V(t, \tau)\, d_\tau U(\tau, t) = \int_s^t V(t, \tau)\, [d(A(\tau) - B(\tau))]\, U(\tau, t) = \\ = V(t, s)(\Delta^+ A(s) - \Delta^+ B(s))\, U(s,t) + (\Delta^- A(t) - \Delta^- B(t)) = \\ = -V(t, s)(A(s) - B(s)) + (A(t) - B(t)). \end{aligned}$$

On the other hand, according to the integration-by-parts theorem

$$Q = I - V(t, s)\, U(s, t) - \Delta_2^+ V(t, s)\, \Delta_1^+ U(s, t) + \Delta_2^- V(t, t)\, \Delta_1^- U(t, t) + \\ + \sum_{s<\tau<t} (\Delta_2^- V(t, \tau)\, \Delta_1^- U(\tau, t) - \Delta_2^+ V(t, \tau)\, \Delta_1^+ U(\tau, t)),$$

where $\Delta_1^+ U(t, s) = U(t+, s) - U(t, s)$, $\Delta_2^+ U(t, s) = U(t, s+) - U(t, s), \ldots$ It follows readily from (2,10) and (2,11) and from the properties of the Y-integral as a special kind of the Kurzweil integral ([6], Theorem 1, 3, 6; cf. also [4], [7], [9] or [12]) that

$$\Delta_2^+ V(t, s) = -V(t, s)\, \Delta^+ B(s), \quad \Delta_1^+ U(t, s) = \Delta^+ A(t)\, U(t, s),$$
$$\Delta_2^- V(t, s) = -V(t, s)\, \Delta^- B(s), \quad \Delta_1^- U(t, s) = \Delta^- A(t)\, U(t, s).$$

Hence the relation (2,12) immediately follows.

The other cases can be treated similarly. If (2,8) or (2,9) holds, then instead of the expression Q we should handle the expression

$$\int_s^t [\mathrm{d}_\tau V(s, \tau)]\, U(\tau, s) + \int_s^t V(s, \tau)\, \mathrm{d}_\tau U(\tau, s).$$

The variation-of-constants formula yields the following

2,2. Lemma. *Let (2,5) hold. If (2,6) or (2,7) holds then an n-vector function $x(t)$ is a solution of (p) iff it is on $[a, b]$ given by*

$$x(t) = U(t, a)\, c + f(t) - f(a) - \int_a^t [\mathrm{d}_s U(t, s)]\, (f(s) - f(a)), \tag{2,14}$$

where $c \in \mathrm{R}_n$ is a solution to the linear equation

$$[M + NV(b, a)]\, c = l + N \left\{ V(b, a) f(a) - f(b) - \int_a^b [\mathrm{d}_s V(b, s)]\, f(s) \right\}. \tag{2,15}$$

If (2,8) or (2,9) holds, then any solution $x(t)$ to (p) is of the form

$$x(t) = U(t, b)\, c + f(t) - f(b) + \int_t^b [\mathrm{d}_s U(t, s)]\, (f(s) - f(b)), \tag{2,16}$$

where

$$[MV(a, b) + N]\, c = l + M \left\{ -f(a) + V(a, b) f(b) - \int_a^b [\mathrm{d}_s V(a, s)]\, f(s) \right\}. \tag{2,17}$$

Proof. Putting the variation-of-constants formula (2,14) (valid if (2,6) or (2,7) holds) into (2,2) we get that $x(t)$ is a solution to (p) iff

$$[M + NU(b, a)]\, c = l + N \left\{ U(b, a) f(a) - f(b) + \int_a^b [\mathrm{d}_s U(b, s)]\, f(s) \right\}.$$

Since by (2,12)

$$V(b, s) = U(b, s) + V(b, s)(A(s) - B(s)) + V(b, s)\Delta^+B(s)\Delta^+A(s)$$

for $s \in [a, b]$, $W(s) = V(b, s) - U(b, s) \in N$ and $V(b, a) = U(b, a)$. Thus

$$\int_a^b [d_sV(b, s)]\, u(s) = \int_a^b [d_sU(b, s)]\, u(s)$$

for any $u \in BV_n$. (In fact, $W(a) = W(a+) = W(t+) = W(t-) = W(b-) = W(b) = O$ for all $t \in (a, b)$. The continuous part W_c of W vanishes everywhere on $[a, b]$. Hence by the definition of the Y-integral

$$\int_a^b [dW(s)]\, u(s) = \int_a^b [dW_c(s)]\, u(s) + \Delta^+W(a)\, u(a) + \Delta^-W(b)\, u(b) + \\ + \sum_{a<s<b} \Delta W(s)\, u(s) = O.)$$

Hence our assertion follows. The cases (2,8) and (2,9) could be treated analogously.

2,3. Lemma. *Let* $\det(I - \Delta^+B(t)) \neq 0$ *on* $[a, b]$ (*or* $\det(I + \Delta^-B(t)) \neq 0$ *on* $[a, b]$). *Then a couple* $(y(t), \lambda)$ *is a solution to* (p*) *iff*

$$y'(t) = \lambda' N\, V(b, t) \;(\text{or } y'(t) = -\lambda' M\, V(a, t)) \quad \text{on} \quad [a, b],$$

where $\lambda \in R_m$ *is such that*

$$\lambda'[M + N\, V(b, a)] = O \;(\textit{or } \lambda'[M\, V(a, b) + N] = O). \tag{2,18}$$

Proof. In the former case, a couple $(y(t), \lambda)$ is a solution to (p*) iff $y'(t) = \gamma' V(b, t)$ on $[a, b]$, where $y'(a) = \gamma' V(b, a) = -\lambda' M$ and $y'(b) = \gamma' = \lambda' N$.

2,4. Theorem. *Let* (2,5) *and at least one of the conditions* (2,6)–(2,9) *be satisfied. Then the problem* (p) *possesses a solution iff*

$$y'(b) f(b) - y'(a) f(a) - \int_a^b [dy'(s)]\, f(s) = \lambda' l$$

for any solution $(y(t), \lambda)$ *of* (p*).

Proof follows immediately from 2,2 and 2,3.

2,5. Remark. The assumptions (2,5) are fulfilled e.g. if

(i) $B(t) = A(t)$ on $[a, b]$ and $(\Delta^+A(t))^2 = (\Delta^-A(t))^2$ on $[a, b]$ (this case was studied in [11]),

(ii) $B(a) = A(a)$, $B(t) = A(t+)$ for $t \in (a, b)$, $B(b) = A(b)$ $(B = A^*)$, $(\Delta^+A(a))^2 = (\Delta^-A(b))^2 = O$ and $\Delta^+A(t)\Delta^-A(t) = \Delta^-A(t)\Delta^+A(t)$ on (a, b).

In particular, the assumptions of this section are fulfilled if e.g.

a) A, f are left continuous on $(a, b]$ and right-continuous at a, $\det(I + \Delta^+ A(t)) \neq 0$ on $[a, b]$ and $B = A^*$, or
b) A, f are regular on $[a, b]$, $\det(I - (\Delta^+ A(t))^2) \neq 0$ on $[a, b]$ and $B = A$, or
c) A, f are regular on $[a, b]$, $(\Delta^+ A(t))^2 = O$ on $[a, b]$ and $B = A$, or
d) A, f are right-continuous on $[a, b)$ and left-continuous at b, $\det(I - \Delta^- A(t)) \neq 0$ on $[a, b]$ and $B = A^*$.

(Only the cases b) and c) are included in [11].)

2,6. Remark. Of course, also Theorems 2,1, 2,3 and 2,4 of [11] are valid under the assumptions of this section.

3. General problem. The subject of this section is the boundary value problem
(P) to find $x \in \mathrm{BV}_n$ which is on $[a, b]$ a solution to the equation

$$(3,1) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{D}\left[A(t)\, x + C(t)\, x(a) + D(t)\, x(b) + \int_a^b [\mathrm{d}_s G(t, s)]\, x(s) + f(t)\right]$$

and fulfils the condition

$$(3,2) \qquad M\, x(a) + N\, x(b) + \int_a^b [\mathrm{d}L(s)]\, x(s) = l\,.$$

We assume that

(3,3) $A(t)$, $C(t)$, $D(t)$ are $n \times n$-matrix functions of bounded variation on $[a, b]$, $f \in \mathrm{BV}_n$, $G(t, s)$ is an $n \times n$-matrix function of strongly bounded variation on $[a, b] \times [a, b]$, $L(t)$ is an $m \times n$-matrix function of bounded variation on $[a, b]$, M and N are constant $m \times n$-matrices and $l \in \mathrm{R}_m$

and

(3,4) A, C, D, f and $G(., s)$ are for an arbitrary $s \in [a, b]$ left-continuous on $(a, b]$ and right-continuous at a, while $\det(I + \Delta^+ A(t)) \neq 0$ on $[a, b]$.

(A matrix function $K(t, s)$ is said to be of strongly bounded variation on $[a, b] \times [a, b]$ if it is of bounded two-dimensional Vitali variation $v(K)$ on $[a, b] \times [a, b]$ and $\mathrm{var}_a^b K(a, .) + \mathrm{var}_a^b K(., a) < \infty$. For details see [4] III,4 and also [8] or [11].)

Without any loss of generality we may assume further that

(3,5) $G(t, .)$ and L are for any $t \in [a, b]$ right-continuous on $[a, b)$ and left-continuous at b, while $G(a, .) = O$ on $[a, b]$, $C(a) = D(a) = O$, $L(a) = O$ and $f(a) = O$.

Let us put

(3,6) $B(t) = A(t+)$ on $[a, b]$ $(B(b) = A(b+) = A(b))$.

Then B is right-continuous on $[a, b)$ and left-continuous at b, while $\Delta^- B(t) = \Delta^+ A(t)$ for $t \in [a, b]$ $(\Delta^+ B(a) = \Delta^- B(b) = O)$. Evidently $A - B \in N$. Let U and V be again the fundamental matrix solutions to the equations

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)\,x] \quad \text{and} \quad \frac{dy'}{d\tau} = D[-y'\,B(t)],$$

respectively.

3,1. Remark. Let $t, s \in [a, b]$. Then by 2,1 $V(t, s) = U(t, s) - V(t, s)\,\Delta^+ A(s) + \Delta^+ A(t)\,U(t, s)$ or $(I + \Delta^+ A(t))^{-1}\,V(t, s) = U(t, s)\,(I + \Delta^+ A(s))^{-1}$. Since $U(t, s) \,.\, (I + \Delta^+ A(s))^{-1} = U(t, s+)$ (cf. Theorem 2 in [9]) and analogously $(I + \Delta^- B(t))^{-1} \,.\, V(t, s) = V(t-, s)$, we have

$$V(t-, s) = U(t, s+) \quad \text{for all} \quad t, s \in [a, b]\,. \tag{3,7}$$

Furthermore,

$$V(b-, s) = V(b, s) \quad \text{and} \quad U(t, a+) = U(t, a) \quad \text{for all} \quad t, s \in [a, b]\,. \tag{3,8}$$

(Hence $V(b, a) = U(b, a)$.)

3,2. Lemma. *Given $g \in \mathrm{BV}_n$ right-continuous on $[a, b)$ and $c \in R_n$, the unique solution $y(t)$ of*

$$\frac{dy'}{d\tau} = D[-y'\,B(t) + g'(t)]$$

on $[a, b]$ such that $y(b) = c$ is on $[a, b]$ given by

$$y'(t) = c'V(b, t) - \int_t^b [dg'(s)]\,V(s-, t)\,.$$

(The proof is similar to that of the analogous assertion for the equation (2,1) given in [7].)

3,3. Definition. The problem (P*) of finding a couple $(y(t), \lambda) \in \mathrm{BV}_n \times \mathrm{R}_m$ such that $y(t)$ is on $[a, b]$ a solution to

$$\frac{dy'}{d\tau} = D\left[-y'\,B(t) - \lambda'\,L(t) - \int_a^b y'(s)\,d_s G(s, t)\right] \tag{3,9}$$

and

$$\begin{aligned} y'(a) + \lambda' M + \int_a^b y'(s)\,dC(s) &= O\,, \\ y'(b) - \lambda' N - \int_a^b y'(s)\,dD(s) &= O \end{aligned} \tag{3,10}$$

is called the *adjoint boundary value problem* to the problem (P).

3,4. Remark. Any solution $x(t)$ of (3,1) is left-continuous on $(a, b]$ and right-continuous at a, while any solution $y(t)$ of (3,9) is right-continuous on $[a, b)$ and left-continuous at b.

3,5. Theorem. *Let* (3,3)–(3,6) *hold. The given problem* (P) *has a solution iff*

$$\int_a^b y'(s)\,\mathrm{d}f(s) = \lambda' l$$

for any solution $(y(t), \lambda)$ *of its adjoint* (P*).

Proof. Sufficiency. An n-vector function $x \in \mathrm{BV}_n$ is a solution of (3,1) on $[a, b]$ such that $x(a) = c \in \mathrm{R}_n$ iff it is on $[a, b]$ given by

$$x(t) = U(t, a)\,c + \int_a^t U(t, s+)\,\mathrm{d}h(s) + \int_a^t U(t, s+)\,\mathrm{d}f(s)\,, \tag{3,11}$$

where

$$h(t) = C(t)\,x(a) + D(t)\,x(b) + \int_a^b [\mathrm{d}_s G(t, s)]\,x(s) \tag{3,12}$$

has bounded variation on $[a, b]$, is left-continuous on $(a, b]$ and right-continuous at a and vanishes at a ($h \in \mathrm{V}_n$). Putting (3,11) into (3,12) and (3,2) and making use of the Dirichlet formula we find that the given problem (P) is equivalent to the system of equations for $(h(t), c) \in \mathrm{V}_n \times \mathrm{R}_n$

$$h(t) + P(t)\,c + \int_a^b K(t, s)\,\mathrm{d}h(s) = u(t) \quad \text{on} \quad [a, b]\,, \tag{3,13}$$

$$Qc + \int_a^b R(s)\,\mathrm{d}h(s) = v\,,$$

where for $t, s \in [a, b]$

$$P(t) = -\left\{C(t) + D(t)\,U(b, a) + \int_a^b [\mathrm{d}_\sigma G(t, \sigma)]\,U(\sigma, a)\right\}, \tag{3,14}$$

$$R(t) = NU(b, t+) + \int_t^b [\mathrm{d}L(\sigma)]\,U(\sigma, t+)\,,$$

$$K(t, s) = -\left\{D(t)\,U(b, s+) + \int_s^b [\mathrm{d}_\sigma G(t, \sigma)]\,U(\sigma, s+)\right\},$$

$$u(t) = -\int_a^b K(t, \sigma)\,\mathrm{d}f(\sigma)\,, \quad v = l - \int_a^b R(\sigma)\,\mathrm{d}f(\sigma)\,.$$

(If a couple $(h(t), c)$ is a solution to (3,13) and if $x(t)$ is given by (3,11), then $x(t)$ is a solution to (P). Conversely, if $x(t)$ is a solution to (P) and $c = x(a)$ and $h(t)$ is given by (3,12), then a couple $(h(t), c)$ is a solution to (3,13).) Obviously, P, R and u have bounded variation on $[a, b]$, while P, u and $K(., s)$ are for any $s \in [a, b]$ left-continuous on $(a, b]$ and right-continuous at a and vanishing at a. Moreover, by Lemma 5,1 of [11], $K(t, s)$ is of strongly bounded variation on $[a, b] \times [a, b]$. Analogously as in Lemma 4,1 in [11] we can show that the system (3,13) possesses a solution iff

$$\int_a^b \chi'(s)\,\mathrm{d}u(s) + \gamma' v = O \tag{3,15}$$

for any solution $(\chi(t), \gamma) \in \mathrm{BV}_n \times \mathrm{R}_m$ of the system adjoint to (3,13)

$$\chi'(t) + \gamma' R(t) + \int_a^b \chi'(s)\,\mathrm{d}_s K(s, t) = O \quad \text{on} \quad [a, b]\,, \tag{3,16}$$

$$\gamma' Q + \int_a^b \chi'(s)\,\mathrm{d}P(s) = O\,.$$

Inserting (3,14) into (3,15), we get by Proposition 2,4 of [8]

$$O = \gamma' l - \int_a^b \left\{\gamma' R(t) + \int_a^b \chi'(s)\,[\mathrm{d}_s K(s, t)]\right\} \mathrm{d}f(t)$$

or by $(3,16)_1$

$$O = \gamma' l + \int_a^b \chi'(t)\,\mathrm{d}f(t)\,.$$

Let $(\chi(t), \gamma)$ be an arbitrary solution of (3,16). We shall show that then the couple $(\chi(t), -\gamma)$ is a solution to (P*) and thus we shall complete the first part of the proof.

Since by Prop. 2,4 of [8]

$$\int_a^b \chi'(s) \left[\mathrm{d}_s \int_t^b [\mathrm{d}_\sigma G(s, \sigma)]\, U(\sigma, t+)\right] = \int_t^b \left[\mathrm{d}_s \int_a^b \chi'(\sigma)\,[\mathrm{d}_\sigma G(\sigma, s)]\right] U(s, t+)\,,$$

we have according to (3,7) and (3,8)

$$\chi'(t) = -\gamma' R(t) - \int_a^b \chi'(s)\,\mathrm{d}_s K(s, t) =$$

$$= \left\{-\gamma' N + \int_a^b \chi'(s)\,\mathrm{d}D(s)\right\} V(b, t) - \int_t^b \left[\mathrm{d}_s \left\{\gamma' L(s) - \int_a^b \chi'(\sigma)\,[\mathrm{d}_\sigma G(\sigma, s)]\right\}\right] V(s-, t)$$

for $t \in [a, b]$. Hence by 3,2 $\chi(t)$ is a solution of (3,9) on $[a, b]$ such that

$$\chi'(b) = -\gamma' N + \int_a^b \chi'(s)\,\mathrm{d}D(s)\,.$$

Finally, by $(3,16)_2$

$$\chi'(a) = -\gamma' N U(b, a) + \int_a^b \chi'(s)\,\mathrm{d}D(s)\, U(b, a) - \gamma' \int_a^b [\mathrm{d}L(s)]\, U(s, a) +$$

$$+\int_a^b \chi'(s)\left[\mathrm{d}_s \int_a^b [\mathrm{d}_\sigma G(s,\sigma)]\, U(\sigma, a)\right] = \gamma' M - \int_a^b \chi'(s)\,\mathrm{d}C(s)\,.$$

The second part of the proof (necessity) is identical with the second part of the proof of Theorem 5,1 in [11].

3,6. Remark. Analogously we could prove that also Theorems 5,2 and 5,3 from [11] are valid under the assumptions of this section.

Corrigendum to [11]. The lines 201^{10-11} and 203_9 in [11] should read

„*Let* $T : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ *be a completely continuous operator and let the operator* $T' : \mathscr{Y} \leftarrow \mathscr{X}^*$ *be completely continuous and such that* $y(Tx) = T' y(x)$ *for all* $x \in X$ *and* $y \in \mathscr{Y}$ *and* $T'(\mathscr{Y}) \subset \mathscr{Y}$ *...*“

and

„*Since by Theorems 3,1 and 3,2 of* [14] *T and T' are completely continuous and by Lemma 5,1 of* [14] ...“.

References

[1] *Bryan R. N.:* A nonhomogeneous linear differential system with interface conditions, Proc. A.M.S. *22* (1969), 270—276.

[2] *Halanay A.* and *Moro A.:* A boundary value problem and its adjoint, Ann. Mat. pura appl. *79* (1968), 399—412.

[3] *Hildebrandt T. H.:* On systems of linear differentio-Stieltjes-integral equations, Ill. J. Math. *3* (1959), 352—373.

[4] *Hildebrandt T. H.:* Introduction to the Theory of Integration, Academic Press, New York, London, 1963.

[5] *Jones W. R.:* Differential systems with integral boundary conditions, Journ. Diff. Eq. *3* (1967), 191—202.

[6] *Kurzweil J.:* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter, Czech. Math. J. *7* (*82*) (1957), 418—449.

[7] *Schwabik Št.:* Verallgemeinerte lineare Differentialgleichungssysteme, Čas. pěst. mat. *96* (1971), 183—211.

[8] *Schwabik Št.:* On an integral operator in the space of functions with bounded variation, Čas. pěst. mat. *97* (1972), 297—330.

[9] *Schwabik Št., Tvrdý M.:* On generalized linear differential equations, Čas. pěst. mat. *98* (1973), 206—211.

[10] *Taufer J.:* Lösung der Randwertprobleme für Systeme von linearen Differentialgleichungen, Rozpravy ČSAV, Řada mat. a přír. věd, *83* (1973), 5, Academia, Praha.

[11] *Tvrdý M.:* Boundary value problems for linear generalized differential equations and their adjoints, Czech. Math. J. *23* (*98*), (1973), 183—217.

[12] *Vejvoda O., Tvrdý M.:* Existence of solutions to a linear integro-boundary-differential equation with additional conditions, Ann. Mat. pura appl. *89* (1971), 169—216.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25, (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

LOCALLY CONNECTED GRAPHS

GARY CHARTRAND, Kalamazoo and RAYMOND E. PIPPERT, Fort Wayne

(Received December 4, 1972)

INTRODUCTION

One of the most elementary yet most important properties that a graph can possess is that of being connected. This is a global property in the sense that it is defined in terms of all pairs of vertices in the graph. It is the object of this paper to present results dealing with graphs which are connected in a localized sense.

PRELIMINARY DEFINITIONS

In this section we define several terms which will occur throughout the paper.

If W is a nonempty subset of the vertex set of a graph G, then the *subgraph induced by* W is that graph with vertex set W and whose edges are those edges in G joining two vertices of W.

The *neighboring vertices* of a vertex v in a graph G are those vertices in G adjacent with v. The *neighborhood* $N(v)$ of v is the subgraph induced by the neighboring vertices of v. The graph G is *locally connected* if the neighborhood of every vertex of G is connected.

The *complete graph* K_p is that graph with p vertices every two of which are adjacent. The *complete n-partite graph* $K(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $n \geqq 2$, is the graph whose vertex set can be partitioned as $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$, where $|V_i| = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, such that uw is an edge if and only if $u \in V_i$ and $w \in V_j$, $i \neq j$.

ELEMENTARY PROPERTIES OF LOCALLY CONNECTED GRAPHS

First, it should be noted that neither the property of being connected nor the property of being locally connected implies the other. For example, every cycle of length $n \geqq 4$ is connected, but the neighborhood of every vertex in this graph consists of two isolated vertices. Thus the graph is not locally connected. Conversely, let G be the disconnected graph with two components, each of which is a triangle. The neighboorhood of every vertex of G is the connected graph K_2; therefore, G is locally connected.

Since every connected graph H contains a spanning tree (a tree containing every vertex of H) and every tree contains one less edge than vertex, we obtain the following. (The degree of a vertex v in a graph is denoted by $\deg v$.)

Proposition 1. *If v is a vertex in a locally connected graph G, then v belongs to at least* $\deg v - 1$ *triangles.*

The preceding proposition implies that every locally connected graph of sufficiently large order contains a relatively large number of triangles. Indeed, if a graph G contains no triangles, then the neighborhood of each vertex of G contains no edges.

The simplest neighborhood in any locally connected graph is a tree. Another observation can now be made. A *wheel* is a cycle together with an aditional vertex adjacent with every vertex of the cycle.

Proposition 2. *Every neighborhood in a graph G is a forest if and only if G has no wheels.*

Corollary. *Every neighborhood in a graph G is a tree if and only if G has no wheels and is locally connected.*

While the minimum number of edges in a connected graph G occurs when G is a tree, the maximum number of edges occurs when G is complete. In this connection, we make the following observation.

Proposition 3. *Every neighborhood in a graph G is complete if and only if every component of G is complete.*

Proof. If every component of G is complete, then it is clear that every neighborhood in G is complete. Conversely, suppose H is a graph in which every neighborhood is complete. Assume H contains a component H_1 which is not complete. Then in H_1, there are two vertices u and w which are not adjacent. Since u and w belong to the same component, there exists a $u - w$ path, say $u = v_0, v_1, \ldots, v_n = w$. Let k be the least i such that v_iv_n is an edge of H_1. Thus, v_k is adjacent to v_{k-1} and v_n, but v_{k-1} and v_n are not adjacent to each other. However, then, the neighborhood of v_k is not complete, which is a contradiction.

Corollary. *Every neighborhood in a connected graph G is complete if and only if G is complete.*

A graph G is *n-connected* if the removal of fewer than n vertices results in neither a disconnected graph nor the trivial graph consisting of a single vertex. A graph G is *locally n-connected* if the neighborhood of every vertex of G is n-connected. We now investigate the relationship between connectedness and local connectedness.

Proposition 4. *If a graph G is locally n-connected, $n \geqq 1$, then every component of G is $(n + 1)$-connected.*

Proof. Suppose there exists a component G_1 of G which is not $(n + 1)$-connected. Then there exists a set T of $k(\leqq n)$ vertices of G_1 such that $G_1 - T$ is disconnected or consists of a single vertex. If $G_1 - T$ consists of a single vertex, then G_1 has $k + 1$ vertices, implying that the neighborhood of a vertex of G_1 has at most n vertices and that, consequently, no neighborhood is n-connected. Thus, $G_1 - T$ is disconnected. Let $v \in T$, and suppose u and w are neighboring vertices of v in different components of $G_1 - T$. Therefore, the minimum number of vertices separating u and w in $G_1 - v$ is at most $k - 1$ $(\leqq n - 1)$. This implies that the minimum number of vertices separating u and w in $N(v)$ does not exceed $n - 1$. However, $N(v)$ is n-connected, and this is a contradiction, which completes the proof.

It is well-known that every 6-connected graph is nonplanar, while there are 5-connected graphs which are planar (such as the graph of the icosahedron). For local connectedness, however, the situation is quite different.

Proposition 5. *Every locally 3-connected graph is nonplanar.*

Proof. Let G be a locally 3-connected graph, and let v be a vertex of G. If $N(v)$ is complete, then since $N(v)$ is 3-connected, $N(v)$ contains the complete graph K_4 as a subgraph. In G, the vertex v is adjacent to all vertices of K_4 so that G contains K_5 as a subgraph, and by Kuratowski's theorem, G is nonplanar.

If $N(v)$ is not complete, then there exist two nonadjacent vertices u and w. By Whitney's theorem, there exist three disjoint $u - w$ paths, each of which has length at least two. In G, the vertex v is adjacent to the interior vertices of these three paths; thus, G contains a subgraph homeomorphic with $K(3, 3)$. Again, by Kuratowski's theorem, G is nonplanar.

We note that the graph K_4 is planar and locally 2-connected so that, in a certain sense, the preceding proposition is best possible; however, from the proof of this proposition, a somewhat stronger version holds.

Corollary 5a. *If a graph G contains a vertex whose neighborhood is 3-connected, then G is nonplanar.*

Examples can be given to show that among the connected, locally connected graphs, there are many hamiltonian graphs (graphs with a cycle containing every vertex). Along this line, we present the next result. (The maximum degree among the vertices of a graph G is denoted $\Delta(G)$.)

Proposition 6. *Let G be a connected, locally connected graph with at least three vertices. If $\Delta(G) \leqq 4$, then either G is hamiltonian or $G = K(1, 1, 3)$.*

Proof. Since G is connected and locally connected, it follows by Proposition 4 that G is 2-connected. Assume that G is not hamiltonian. Then a cycle C of maximum length in G does not contain all vertices of G. Since G is connected, there exists a vertex w not on C adjacent to a vertex u on C. Let u_1 and u_2 be the vertices consecutive to u on C. The vertex w is adjacent to neither u_1 nor u_2; for otherwise a cycle exists having length exceeding that of C.

Since the neighborhood of u is connected, there exists a vertex v (different from w, u_1, u_2) which is adjacent to u such that v is adjacent to at least one of u_1 and u_2, say u_1. Necessarily, v lies on C; for otherwise there exists a cycle whose length exceeds that of C. Now, v is adjacent to w, since the neighborhood of u is connected and the neighborhood of u cannot contain more than four vertices. The vertices u_1 and v are consecutive on C, for otherwise v has degree at least 5. If u_1 and u_2 are adjacent, then G contains a cycle whose length exceeds that of C. Therefore, v is adjacent to u_2, implying that u_2 and v are consecutive on C. Hence, G contains $K(1, 1, 3)$ as an induced subgraph.

We claim that $G = K(1, 1, 3)$; for otherwise, there exists another vertex x adjacent with one of u_1, u_2, w, say u_1. Hence u, v, and x are vertices in $N(u_1)$, but w and u_2 do not belong to $N(u_1)$. Since $N(u_1)$ is connected, there exists an $x - u$ path in $N(u_1)$. This implies that at least one of u and v has degree exceeding four, which is a contradiction.

SUFFICIENT CONDITIONS FOR LOCALLY CONNECTED GRAPHS

We now turn our attention from properties of locally connected graphs to conditions which are sufficient for a graph to be locally connected. We present one dealing with the degrees of the vertices.

Proposition 7. *Let G be a graph of order p such that for every pair x, y of vertices, $\deg x + \deg y > \frac{4}{3}(p - 1)$. Then G is locally connected.*

Proof. Suppose G satisfies the hypothesis of the proposition but is not locally connected. Thus, there exists a vertex v of G such that $N(v)$ is not connected. Let u be a vertex in a smallest component of $N(v)$, and assume this component has order m_1. Let w be a vertex in one of the other components of $N(v)$, where the union of the components of $N(v)$ not containing u has order m_2. Let k denote the number of vertices different from v which are not in $N(v)$.

By assumption, $\deg v = m_1 + m_2$. Since u is adjacent to no vertex of $N(v)$ in a component not containing u, it follows that $\deg u \leqq p - m_2 - 1$. By hypothesis,

$$\deg u > \tfrac{4}{3}(p - 1) - \deg v = \tfrac{4}{3}(p - 1) - m_1 - m_2 .$$

Thus,

$$p - m_2 - 1 > \tfrac{4}{3}(p - 1) - m_1 - m_2 ,$$

so that

$$m_1 > \tfrac{4}{3}(p - 1) .$$

However, $m_2 \geqq m_1$, so that

$$m_2 > \tfrac{1}{3}(p - 1) .$$

Therefore,

$$k < \tfrac{1}{3}(p - 1) .$$

Now,

$$\deg u + \deg w \leqq (m_1 + k) + (m_2 + k) = (p - 1) + k < \tfrac{4}{3}(p - 1) ,$$

but this is a contradiction.

We obtain an immediate corollary. (The minimum degree among the vertices of a graph G is denoted by $\delta(G)$.)

Corollary 7a. If G is a graph of order p for which $\delta(G) > \tfrac{2}{3}(p - 1)$, then G is locally connected.

The previous proposition can be extended to locally n-connected graphs.

Proposition 8. *Let G be a graph of order p such that for every pair x, y of vertices*

$$\deg x + \deg y > \tfrac{4}{3}[p + \tfrac{1}{2}(n - 3)] ,$$

where $1 \leqq n \leqq p - 2$. Then G is locally n-connected.

Proof. Assume that there exists a graph G such that for $1 \leqq n \leqq p - 2$,

$$\deg x + \deg y > \tfrac{4}{3}[p + \tfrac{1}{2}(n - 3)]$$

for every pair x, y of vertices of G but such that G is not locally n-connected. Hence there exists a vertex v such that $N(v)$ is not n-connected. We consider two cases.

Case 1. *Assume $N(v) = K_j$, for some $j \leqq n$.* Suppose that there exists a vertex $u \neq v$, such that u is not adjacent with v. Then $\deg v = j$ and $\deg u \leqq p - 2$ so that $\deg u + \deg v \leqq p - 2 + j \leqq p - 2 + n$. By hypothesis,

$$p - 2 + n > \tfrac{4}{3}[p + \tfrac{1}{2}(n - 3)] ,$$

which implies that $n > p$. However, this is impossible. If there is no such vertex u, then $N(v) = K_{p-1}$ and $G = K_p$. Here G is locally n-connected for every n, $1 \leqq n \leqq \leqq p - 2$, and this is a contradiction.

Case 2. *Assume $N(v)$ contains a set S of $s(<n)$ vertices whose removal from $N(v)$ disconnects $N(v)$.* Let u be a vertex in a component of $N(v) - S$ of minimum order m_1, and let w be a vertex in one of the other components of $N(v) - S$, where the union of the other components of $N(v) - S$ has order m_2. Now $\deg v = m_1 + m_2 + s$ and $\deg u \leqq p - m_2 - 1$. By hypothesis, $\deg u + \deg v > \alpha$, where

$$\alpha = \tfrac{4}{3}[p + \tfrac{1}{2}(n - 3)] .$$

Thus, $\deg u > \alpha - \deg v$ so that $p - m_2 - 1 > \alpha - m_1 - m_2 - s$. Hence $m_1 > > \alpha - p - s + 1$, and since $m_2 \geqq m_1$, it follows also that $m_2 > \alpha - p - s + 1$. Let $k = p - m_1 - m_2 - s - 1$. Then $k < p - 2\alpha + 2p + 2s - 2 - s - 1 = = 3p - 2\alpha + s - 3$. Now $\deg u + \deg w \leqq (m_1 + s + k) + (m_2 + s + k) = = p + s + k - 1 < p + s - 1 + (3p - 2\alpha + s - 3) = 4p + 2s - 2\alpha - 4 \leqq 4p + + 2n - 2\alpha - 6 = \alpha$. This is a contradiction, and the desired result follows.

We have a corollary in this case also.

Corollary 8a. *If G is a graph of order p for which $\delta(G) > \frac{2}{3}[p + \frac{1}{2}(n - 3)]$, where $1 \leqq n \leqq p - 2$, then G is locally n-connected.*

Both of the preceding results are best possible as we shall now illustrate. Let n and p be positive integers, where $p \geqq n + 2$ and $p \equiv n \pmod 3$. Let G' be a complete graph of order p. Denote a vertex of G' by v and some other set of $n - 1$ vertices of G' by S. The remaining $p - n$ vertices can be divided into 3 sets of $\frac{1}{3}(p - n)$ vertices each. Denote these sets by S_1, S_2, and S_3. Delete all edges joining v with elements of S_3 as well as all edges joining elements of S_1 and elements of S_2, calling the resulting graph G. For all vertices x and y of G, we have $\deg x + \deg y \geqq \geqq \frac{4}{3}[p + \frac{1}{2}(n - 3)]$, and $\delta(G) = \frac{2}{3}[p + \frac{1}{2}(n - 3)]$. However, the neighborhood of v is not n-connected; therefore G is not locally n-connected.

Author's addresses: Gary Chartrand, Western Michigan University, Kalamazoo, Michigan 49001, U.S.A.; Raymond E. Pipert, Purdue University, Fort Wayne, Indiana, U.S.A.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

ON CUBES AND DICHOTOMIC TREES

LADISLAV NEBESKÝ, Praha

(Received December 20, 1972)

The notion of the *n-cube* Q_n (and other notions not defined here) can be found in BEHZAD and CHARTRAND [1] or in HARARY [2]. The *complete dichotomic tree* D_n can be defined as follows: if $n = 1$, then D_n is the complete bigraph $K(1, 2)$; if $n \geqq 2$, then D_n is the tree obtained from two disjoint copies T and T' of D_{n-1} and from a new vertex v in such a way that v is joined by one edge to the only vertex of degree 2 of T and by another edge to the analogous vertex of T'. Thus D_n has 2^n vertices of degree 1, one vertex of degree 2, and $2^n - 2$ vertices of degree 3. The vertex of degree 2 of D_n will be referred to as its root. HAVEL and LIEBL [3] have proved that if $n \geqq 2$, then D_n is a subgraph of Q_{n+2} but D_n is not a subgraph of Q_{n+1}. Obviously, D_1 is a subgraph of Q_2.

If $n \geqq 1$, then we denote by $\approx\!\!\!\!D_n$ the tree obtained from two disjoint copies of D_n in such a way that their roots are joined by an edge; this edge will be referred to as the axial edge of $\overset{\approx}{D}_n$. Obviously, $\overset{\approx}{D}_n$ has $2^{n+2} - 2$ vertices. Havel and Liebl [4] conjectured that $\overset{\approx}{D}_n$ is a subgraph of Q_{n+2}, for $n \geqq 1$. In the present paper, this conjecture will be verified.

We introduce the graphs Q_n^{∇} and Q'_n which are certain local modifications of Q_n. Let $n \geqq 2$; by Q_n^{∇} we denote the graph $Q_n + rt - s$, where r, s and t are such vertices of Q_n that rs and st are distinct edges of Q_n; by Q'_n we denote the graph $Q_n - u - v$, where u and v are such vertices of Q_n that uv is an edge of Q_n. The first two theorems which will be proved in the present paper are:

Theorem 1. *D_n is a spanning subgraph of Q_{n+1}^{∇}, for $n \geqq 1$.*

Theorem 2. *$\overset{\approx}{D}_n$ is a spanning subgraph of Q'_{n+2}, for $n \geqq 1$.*

Both theorems will be easily obtained from the following lemma. An edge of a tree T incident with an end-vertex of T will be referred to as an end-edge. Let $n \geqq 1$. By $\hat{D}_n$ or $\check{D}_n$ we denote the tree obtained from D_n by inserting two new vertices of degree 2 into the axial edge or into one end-edge, respectively. The path of $\hat{D}_n$ obtained from the axial edge of $\overset{\approx}{D}_n$ is referred to as the axial path of $\hat{D}_n$.

Lemma. *$\hat{D}_n$ and $\check{D}_n$ are spanning subgraphs of Q_{n+2}, for $n \geqq 1$.*

Proof. Obviously, the graphs $\hat{D}_n$, $\check{D}_n$ and Q_{n+2} have the same number of vertices. Hence it is sufficient to prove that both $\hat{D}_n$ and $\check{D}_n$ are subgraphs of Q_{n+2}.

Let m be a positive integer. We shall say that a tree T is m-valued if each edge of T is assigned a positive integer not exceeding m. As follows from the work of Havel and Morávek [5], a tree T is a subgraph of Q_m if and only if T can be m-valued so that

(1) for each path P of T, there exists k such that precisely an odd number of edges belonging to P is assigned k.

(Cf. also Hlavička [6].)

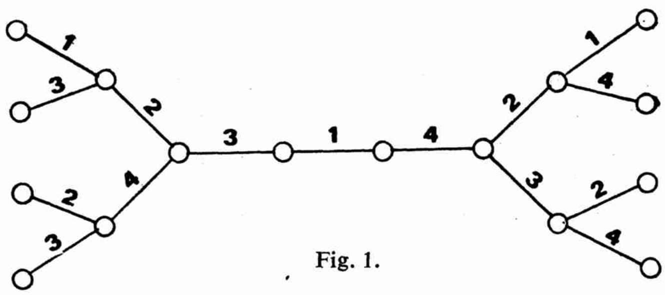


Fig. 1.

(A) We shall prove that $\hat{D}_n$ can be $(n + 2)$-valued so that (1) holds and that the edges of the axial path are assigned the integers 1, $n + 1$, and $n + 2$ (in some order). The case $n = 1$ is obvious. The case $n = 2$ is given in Fig. 1.

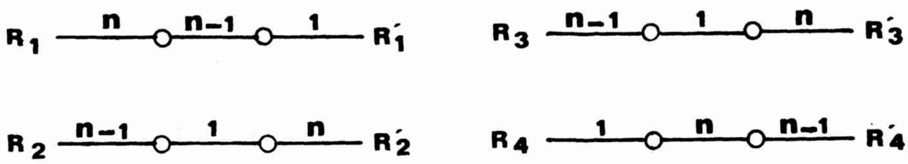


Fig. 2.

Let $n = m \geqq 3$. Assume that for $n = m - 2$, the statement is proved. Consider four disjoint copies of $\hat{D}_{n-2}$ which are n-valued so that (1) holds and that they can be expressed as in Fig. 2, where R_i and R_i' are n-valued copies of D_{n-2}. If we identify the root of each of the n-valued trees R_i and R_i' with the vertex r_i and r_i', respectively, in Fig. 3, we obtain an $(n + 2)$-valued tree $\hat{D}_n$. Obviously, the edges of the axial path are assigned 1, $n + 1$, and $n + 2$. It is routine to prove that this valuation fulfils (1).

(B) Let $n \geqq 1$; by D_n^* we denote the tree obtained from D_n by inserting two new vertices of degree 2 into one end-edge of D_n; the vertex of D_n^* obtained from the root of D_n will be referred to as the root of D_n^*. We shall prove that $\check{D}_n$ can be $(n + 2)$-valued so that (1) holds. The case $n = 1$ is obvious. Let $n = m \geqq 2$. Assume that

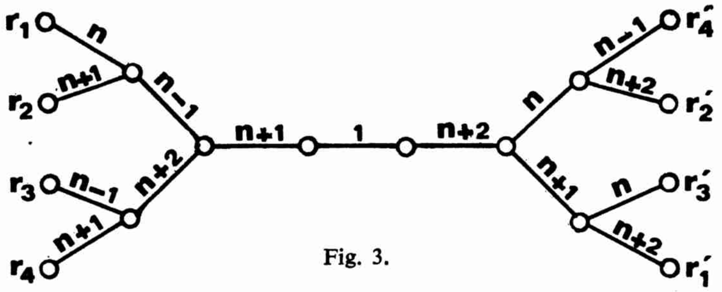


Fig. 3.

for $n = m - 1$, the statement is proved. Consider disjoint $\hat{D}_{n-1}$ and $\check{D}_{n-1}$ which are $(n + 1)$-valued so that (1) holds and that they can be expressed as in Fig. 4, where T_1, T_1' and T_2 are $(n + 1)$-valued copies of D_{n-1}, and T_2' is an $(n + 1)$-valued copy of D_{n-1}^*. Join the root of T_2 by an edge assigned $n + 2$ to the vertex t_2 and the root of T_2' by an edge assigned $n + 2$ to the vertex t_2' (see Fig. 5). Thus we obtain $\check{D}_n$ which is $(n + 2)$-valued such that (1) holds. Hence the lemma follows.

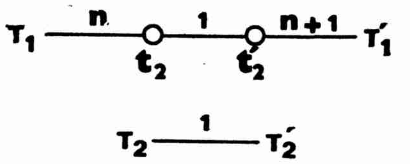


Fig. 4.

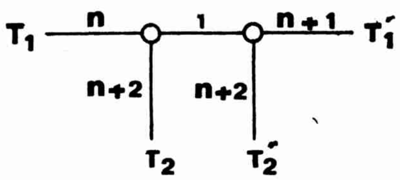


Fig. 5.

Proof of Theorem 1. The case $n = 1$ is obvious. Let $n \geqq 2$ and let t, u, v and w be such vertices of $\hat{D}_{n-1}$ that tu, uv and vw are the edges of the axial path. Then $D_n = \hat{D}_{n-1} + uw - v$. Thus the lemma implies the theorem.

Proof of Theorem 2 directly follows from the lemma.

Corollary. *$\overset{\approx}{D}_n$ is a subgraph of Q_{n+2}, for $n \geqq 1$.*

Let $n \geqq 2$. By $\tilde{D}_n$ we denote the tree obtained from disjoint D_{n-1} and D_n by joining their roots by an edge. As $\tilde{D}_n$ is a subgraph of $\overset{\approx}{D}_n$, it is also a subgraph of Q_{n+2}.

It has been pointed out by Havel and Liebl [4] that the trees $\tilde{D}_n$ and $\tilde{\tilde{D}}_n$ are useful for a study of trees with the maximum degree 3.

Theorem 3. *Let T be a tree with the diameter $d \geqq 2$ and with the maximum degree 3. Then T is a subgraph of $Q_{[d/2]+2}$.*

Proof. The case $d = 2$ is obvious. Let $d = 2n$, $n \geqq 2$; it is easily seen that T is a subgraph of $\tilde{D}_n$ and thus T is a subgraph of Q_{n+2}. Let $d = 2n + 1$, $n \geqq 1$; then T is a subgraph of $\tilde{\tilde{D}}_n$ and thus T is a subgraph of Q_{n+2}. Hence the theorem follows.

References

[1] *M. Behzad, G. Chartrand:* Introduction to the Theory of Graphs. Allyn and Bacon, Boston (Massachusetts) 1971.

[2] *F. Harary:* Graph Theory. Addison-Wesley (Massachusetts) 1969.

[3] *I. Havel, P. Liebl:* O vnoření dichotomického stromu do krychle. Čas. pěst. mat. *97* (1972), 201—205.

[4] *I. Havel, P. Liebl:* Embedding the polytomic tree into the *n*-cube. Čas. pěst. mat. *98* (1973), 307—314.

[5] *I. Havel, J. Morávek:* B-valuations of graphs. Czech. Math. Journ. *22* (1972), 338—351.

[6] *J. Hlavička:* Race-free assignment in asynchronous switching circuits, Information Processing Machines No 13, 1967.

Author's address: 116 38 Praha 1, nám. Krasnoarmějců 2 (Filosofická fakulta Karlovy university).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

O JEDNEJ SÚSTAVE DIOFANTICKÝCH ROVNÍC II

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 27. februára 1973)

Tento článok nadväzuje na prácu [1], v ktorej sa riešenie sústavy diofantických rovníc $\sum_{i=1}^{n} x_i = a_j x_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, vytvorí pomocou riešení optickej rovnice $\sum_{i=1}^{n} 1/a_i = 1$. V tejto úvahe urobíme podobne so sústavou rovníc

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n} x_i + k = a_j x_j\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,, \quad n > 1\,, \quad k \text{ dané prirodzené číslo } ^1).$$

Pod riešením sústavy rovníc (1) rozumieme v ďalšom vždy riešenie v prirodzených číslach $x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Veta 1. *Všetky riešenia sústavy rovníc* (1) *dostaneme nasledovne:*
a_i, $i = 1, 2, \ldots, n + k$ je také riešenie optickej rovnice

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n+k} 1/a_i = 1$$

v ktorom

$$(3) \qquad a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_{n+k} = t[a_1, a_2, \ldots, a_n]\,, \quad t \mid k$$

a

$$(4) \qquad x_i = a_{n+1}/a_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Dôkaz. Označme v (1) $a_j x_j = a_{n+1}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, takže $x_j = a_{n+1}/a_j$ a $a_{n+1} = t[a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Po dosadení do (1) máme

$$(5) \qquad t[a_1, a_2, \ldots, a_n] \sum_{i=1}^{n} 1/a_i + k = t[a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

[1]) K prípadu $k = n = 2$ sústavy (1) vedie úloha B.1 P. KOSTYRKU v Mat. obzoroch *I. 2* (1973) str. 59.

odkial vyplýva $t \mid k$ a ďalej

$$\sum_{i=1}^{n} 1/a_i + k/t[a_1, a_2, \ldots, a_n] = 1 \,. \tag{6}$$

Ak položíme $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_{n+k} = t[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, môžeme (6) písať v tvare (2). Podmienky sú nutné.

Dosadením (3) a (4) do (1) dostaneme (2). Podmienky sú aj dostačujúce.

Poznámka 1. Veta 1 platí aj pre $k = 0$ a dáva vetu článku [1].

Veta 2. *Nech $k' = k/l$, $l \mid k$, $k' > 1$, $l \geqq 1$. Čísla*

$$(k'\xi_i, a_i, \; i = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

kde aj ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sú čísla prirodzené, sú riešením sústavy rovnic (1) vtedy a len vtedy keď čísla $(\xi_i, a_i, i = 1, 2, \ldots, n)$ sú riešením sústavy rovnic

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i + l = a_j \xi_j \,, \quad j = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{8}$$

Dôkaz. Dosadením (7) do (1) máme (8) a násobením (8) číslom k' zase (1).

Poznámka 2. Riešenia (7) sústavy (1) nazývame jej triviálnymi riešeniami, ostatné jej riešenia netriviálnymi.

Veta 3. *Každé riešenie $(x_i, a_i, i = 1, 2, \ldots, n)$ sústavy (1), pre ktoré platí (2), (3), (4) a ešte $t > 1$ je triviálne.*

Dôkaz. Pretože $x_i = t[a_1, a_2, \ldots, a_n]/a_i = t\xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ platí tvrdenie podľa vety 2.

Veta 4. *Každé riešenie $(x_i, a_i, i = 1, 2, \ldots, n)$, $(x_i = l\xi_i$, $\xi_i = [a_1, a_2, \ldots, a_n]/a_i l$, $i = 1, 2, \ldots, n)$ sústavy (1), pre ktoré platí (2), (3), (4) a ešte*

$$l \mid (k, [a_1, a_2, \ldots, a_n]) \,, \quad a_i l \mid [a_1, a_2, \ldots, a_n] \,, \tag{9}$$
$$l > 1 \,, \quad t = 1 \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \,,$$

je triviálne.

Dôkaz. Rovnica (6) dá sa na základe predpokladu (9) písať v tvare

$$\sum_{i=1}^{n} 1/a_i + \frac{k/l}{[a_1, a_2, \ldots, a_n]/l} = 1$$

a z riešení tejto rovnice dostaneme riešenia sústavy

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i + k/l = a_j \xi_j \,, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

vo forme $(\xi_i = a'_{n+1}/a_i, a_i, i = 1, 2, \ldots, n)$, pričom $a'_{n+1} = a'_{n+2} = \ldots = a'_{n+k/l} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]/l = a_{n+1}/l$. Čísla ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sú podľa toho prirodzené práve vtedy, keď $a_i l \mid [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, čo platí podľa (9). Podľa vety 2 je teda riešenie $(x_i = l\xi_i, a_i, i = 1, 2, \ldots, n)$ sústavy (1) triviálne. Tým je veta dokázaná.

Poznámka 3. Ak podmienka $a_i l \mid [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ neplatí, riešenie (x_i, a_i) nie je triviálne, lebo nie všetky ξ_i sú čísla prirodzené. Čísla $(l\xi_i, a_i)$ tvoria v tomto prípade netriviálne riešenie sústavy (1).

Dôsledok 1. *Netriviálne riešenia sústavy* (1) *dostaneme práve vtedy, keď* $t = 1$ *a súčasne*

a) $(k, [a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1$

alebo

b) $(k, [a_1, a_2, \ldots, a_n]) = l > 1$, *ale* $a_i l \mid [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *neplatí pre všetky* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Príklad. Riešiť sústavu rovníc

$$\sum_{i=1}^{3} x_i + 2 = a_j x_j\,, \quad j = 1, 2, 3\,. \tag{10}$$

Riešenie. Riešením sústavy $\sum_{i=1}^{3} \xi_i + 1 = a_j \xi_j$, $j = 1, 2, 3$, dostaneme podľa vety 2 všetky triviálne riešenia, ako aj netriviálne riešenia podľa bodu b) dôsledku 1 a riešením sústavy (10) netriviálne riešenia podľa bodu a) dôsledku 1. Podľa vety 1 a 3 treba určiť všetky riešenia rovnice

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = 1, \tag{11}$$

a tie riešenia rovnice

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = 1 \tag{12}$$

v ktorých a_1, a_2, a_3 sú nepárne čísla a $a_4 = a_5$.

Riešenia rovnice (11) sú uvedené v článku [2] a spolu z nich plynúcimi ξ_1, ξ_2, ξ_3 sú uvedené v tab. 1. Prípady $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (2, 3, 10, 15), (3, 4, 4, 6)$ dajú netriviálne riešenia podľa bodu b) dôsledku 1.

Rovnicu (12) píšme vo forme

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{2}{[a_1, a_2, a_3]} = 1 \tag{13}$$

Tab. 1

a_1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4
a_2	3	3	3	3	3	4	4	4	5	6	3	3	4	4
a_3	7	8	9	10	12	5	6	8	5	6	4	6	4	4
a_4	42	24	18	15	12	20	12	8	10	6	12	6	6	4
$\xi_1 = a_4/a_1$	21	12	9	$\frac{15}{2}$	6	10	6	4	5	3	4	2	2	1
$\xi_2 = a_4/a_2$	14	8	6	5	4	5	3	2	2	1	4	2	$\frac{3}{2}$	1
$\xi_3 = a_4/a_3$	6	3	2	$\frac{3}{2}$	1	4	2	1	2	1	3	1	$\frac{3}{2}$	1

pretože $t = 1$, $a_4 = a_5 = [a_1, a_2, a_3]$. Stačí hľadať riešenia $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$. Pretože $5/a_1 \geqq 1$, je $a_1 \leqq 5$ a pravdaže $a_1 > 1$. Teda je $a_1 = 3, 5$.

Ak je $a_1 = 3$, máme

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{2}{[a_1, a_2, a_3]} = \frac{2}{3}, \quad \frac{4}{a_2} \geqq \frac{2}{3}, \quad a_2 \leqq 6,$$

a teda $a_2 = 3, 5$. V prvom prípade

$$\frac{1}{a_3} + \frac{2}{[a_1, a_2, a_3]} = \frac{1}{3}, \quad \frac{3}{a_3} \geqq \frac{1}{3}, \quad a_3 \leqq 9,$$

teda $a_3 = 5, 7, 9$. Dosadením sa presvedčíme, že vyhovujú čísla $a_3 = 5, 9$ a dávajú

$$(a_1, a_2, a_3) = (3, 3, 5), (3, 3, 9).$$

Ak je $a_2 = 5$ obdobne nájdeme, že rovnici (13) nemôže byť vyhovené.

Ak je $a_1 = 5$, nájdeme obdobným postupom jediné riešenie

$$(a_1, a_2, a_3) = (5, 5, 5).$$

Z týchto riešení rovnice (13) dostaneme tieto netriviálne riešenia sústavy (10)

$$(a_1, a_2, a_3; x_1, x_2, x_3) = (3, 3, 5; 5, 5, 3), \quad (3, 3, 9; 3, 3, 1), \quad (5, 5, 5; 1, 1, 1).$$

Tab. 2

a_1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4	3	3	5
a_2	3	3	3	3	3	4	4	4	5	6	3	3	4	4	3	3	5
a_3	7	8	9	10	12	5	6	8	5	6	4	6	4	4	5	9	5
x_1	42	24	18	15	12	20	12	8	10	6	8	4	4	2	5	3	1
x_2	28	16	12	10	8	10	6	4	4	2	8	4	3	2	5	3	1
x_3	12	6	4	3	2	8	4	2	4	2	6	2	3	2	3	1	1

V tab. 2 sú uvedené všetky riešenia sústavy (10), z tabuľky 1 sú to riešenia $(2\xi_i, a_i, i = 1, 2, 3)$, medzi nimi dve netriviálne riešenia. Dovedna má sústava (10) 17 primitívnych riešení, tj. takých, v ktorých $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$, $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3$, z nich 5 netriviálnych. Okrem primitívnych riešení sú tu ešte riešenia $(a_\alpha, a_\beta, a_\gamma; x_\alpha, x_\beta, x_\gamma)$, kde α, β, γ je ľubovolná permutacia indexov 1, 2, 3.

Literatúra

[1] *Bartoš P.:* O istej sústave diofantických rovníc. Čas. pěst. mat. *93* (1968), 484—486.

[2] *Bartoš P.:* O riešení rovnice $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a rovnice $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = yx_1x_2 \ldots x_n$ v prirodzených číslach. Čas. pěst. mat. *96* (1971), 367—370.

Adresa autora: 801 00 Bratislava 1, Sibírska 9.

Zusammenfassung

ÜBER EIN SYSTEM DIOPHANTISCHER GLEICHUNGEN II

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

Im Artikel wird die Lösung des Systems

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + k = a_j x_j\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,, \quad n > 1\,,$$

wo k eine gegebene natürliche Zahl ist, in natürlichen Zahlen a_i, x_i auf die Lösung der optischen Gleichung $\sum_{i=1}^{n+k} 1/a_i = 1$ überführt.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

POZNÁMKA O POČTE RIEŠENÍ OPTICKEJ ROVNICE

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 7. marca 1973)

P. ERDÖS v článku [1] uvádza, že o počte riešení diofantickej rovnice $\sum_{i=1}^{n} 1/x_j = a/b$ nič nie je známe. V článku [2] sa počet riešení rovnice $1/x + 1/y = 1/b$ vyjadruje pomocou počtu $d(b)$ deliteľov čísla b. V tejto úvahe sa určí dolné ohraničenie počtu riešení rovnice

$$\sum_{i=1}^{n} 1/x_i = 1\,, \quad n > 2 \tag{1}$$

tým, že sa stanoví počet (resp. jeho dolné ohraničenie) tých riešení (1), ktoré možno vypočítať podľa článku [3] a [4].

Pod riešením rovnice (1) rozumieme tzv. primitívne riešenie, vyhovujúce podmienke $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$, v prirodzených číslach. Riešenia spĺňajúce podmienku $x_1 < < x_2 < \ldots < x_n$ nazveme P-riešeniami, ich počet $p(n)$ a riešenia, ktoré túto podmienku nespĺňajú, Q-riešeniami a ich počet $q(n)$.

I. P-RIEŠENIA

Podľa definície 3 a vety 2 a 9 článku [3] dostaneme pre $n > 2$ tzv. prolongabilné riešenia rovnice (1) spĺňajúce podmienku $x_1 < x_2 \ldots < x_n$ nalsedovne:

$$a_0 = 1\,, \quad a_i = a_{i-1}\left(1 + \frac{a_{i-1}}{k_{i-1}}\right), \quad k_{i-1} \mid a_{i-1}\,, \quad k_i < a_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{2}$$

$$x_i = a_{i-1} + k_{i-1}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,, \quad x_n = a_{n-1}\,.$$

Podmienka $k_{i-1} \mid a_{i-1}^2$ vo vete 2 článku [3] bude splnená, ak $k_{i-1} \mid a_{i-1}$.

Veta 1. *Riešenia (2) rovnice (1) sú pro rôzne postupnosti $\{k_j\}_{j=0}^{n-2}$ rôzne P-riešenia.*

Dôkaz. Treba dokázať len, že rôzne postupnosti $\{k_j\}$ a $\{k'_j\}$ dajú rôzne riešenia. Pretože podľa (2) $a_0 = k_0 = 1$; $a_1 = 2$, $k_1 = 1$, existuje taký index j, $2 \leqq j \leqq \leqq n - 2$, že $k_0 = k'_0$, $k_1 = k'_1, \ldots, k_{j-1} = k'_{j-1}$, ale $k_j \neq k'_j$. Potom, pravdaže, aj $a_i = a'_i$, čo platí dokonca pre $i \leqq j$, lebo $a_j = a_{j-1}(1 + a_{j-1}/k_{j-1}) = a'_j$ a $a_i \neq a'_i$ pre $i > j$. Z toho vyplýva, že $x'_{j+1} - x_{j+1} = a'_j + k'_j - a_j - k_j = k'_j - k_j \neq 0$. Tým je veta dokázaná.

Lema 1. *Nech a_j, k_j sú čísla určené podľa* (2), $j \geqq 2$. *Počet $d'(a_j)$ deliteľov k_j, $k_j < a_j$, číslo a_j nie je menší než $j + 1$.*

Dôkaz. Pretože $a_2 = a_1(1 + a_1/k_1) = 2(1 + 2) = 6$, je $d'(a_2) = 3$ a lema pre $j = 2$ platí. Nech platí pre určité $j \geqq 2$, dokážeme, že platí pre $j + 1$. Podľa (2) je $a_{j+1} = a_j(1 + a_j/k_j)$, teda $a_j \mid a_{j+1}$, $a_j < a_{j+1}$, a preto $d'(a_{j+1}) \geqq d'(a_j) + 1$, lebo pribudol aspoň deliteľ a_j. Pretože predpokladáme $d'(a_j) \geqq j + 1$, je $d'(a_{j+1}) \geqq \geqq j + 2$. Tým je lema dokázaná.

Veta 2. *Pre počet $p(n)$ P-riešení rovnice* (1) *platí*

$$p(n) \geqq \tfrac{1}{2}(n - 1)!\,, \quad n > 2\,.$$

Dôkaz. Veta platí pre $n = 3$ (s rovnosťou), lebo $p(3) = 1$ (riešenie $x_1 = 2, x_2 = 3$, $x_3 = 6$). Dokážeme, že ak veta platí pre nejaké $n \geqq 3$, platí aj pre $n + 1$. Z každého P-riešenia pre n dostane sa totiž podľa (2) aspoň toľko P-riešení pre $n + 1$, koľko je počet $d'(a_{n-1})$, lebo $x_{n+1} = a_n = a_{n-1}(1 + a_{n-1}/k_{n-1})$, takže $p(n + 1) \geqq p(n) \,.\, d'(a_{n-1}) \geqq \frac{1}{2}(n - 1)!\, n = \frac{1}{2}n!$ Tým je veta dokázaná.

Poznámka. Podľa vety (1) nedostaneme všetky P-riešenia rovnice (1). Napr. riešenie (2, 4, 6, 12) rovnice (1) pre $n = 4$ pomocou vety 1 nedostaneme.

II. Q-RIEŠENIA

Neúplný počet Q-riešení rovnice (1) určí sa podľa vety 2 článku [4], ktorá hovorí, že rovnica

$$\sum_{i=1}^{l} b_i/\xi_i = 1\,, \quad l > 1 \tag{3}$$

má rekurentne určené riešenie

$$\xi_1 = 1 + b_1\,, \quad \xi_i = 1 + b_i\xi_1\xi_2 \ldots \xi_{i-1}\,, \quad i = 2, 3, \ldots, l - 1\,, \tag{4}$$
$$\xi_l = b_l\xi_1\xi_2 \ldots \xi_{l-1}\,.$$

Toto riešenie rovnice (3) poskytuje zrejme aj riešenie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rovnice (1) v tom prípade, ak $b_1 + b_2 + \ldots + b_l = n$. Označiac $s_i = b_1 + b_2 + \ldots + b_i$,

$i = 1, 2, \ldots, l$ je tým riešením

$$(5) \qquad x_1 = x_2 = \ldots = x_{s_1} = \xi_1 ;$$

$$x_{s_1+1} = \ldots = x_{s_2} = \xi_2 ; \quad \ldots ; \quad x_{s_{l-1}+1} = x_{s_{l-1}+2} = \ldots = x_{s_l} = \xi_l : \quad s_l = n ,$$

a zrejme platí $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$.

Veta 3. *Riešenia (5) rovnice (1) sú rôzne Q-riešenia pre všetky usporiadané partície $b_1 + b_2 + \ldots + b_l = n$, $1 \leqq l \leqq n$, čísla n okrem partícií $n = 1 + 1 + \ldots$ $\ldots + 1$ a $n = n$.*

Dôkaz. Partícia $n = 1 + 1 + \ldots + 1$ dá podľa (4) a (5) tzv. extrémne riešenie rovnice (1) určené rekurentne takto: $x_1 = 2$, $x_i = 1 + x_1 x_2 \ldots x_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots$ $\ldots, n - 1$, $x_n = x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$. Pretože pre $n > 2$ platí pre toto riešenie $x_1 < x_2 < \ldots$ $\ldots < x_n$ (pozri [1]), nie je Q-riešenie.

Riešenie pre partíciu $n = n$ dostaneme aj z partície $n = (n - 1) + 1$ (nie však z partície $n = 1 + (n - 1)$, o čom sa podľa (4) ľahko presvedčíme.

Ak vynecháme spomenuté partície $n = 1 + 1 + \ldots + 1$ a $n = n$ potom pre každú inú partíciu (a) $n = b_1 + b_2 + \ldots + b_l$ platí $l \geqq 2$ a existuje aspoň jedno také i, že $b_i \geqq 2$. No zo (4) a (5) je zrejmé, že $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l$ zodpovedajúce tejto partícii sú jednoznačne určené a to isté platí o x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Ďalej dvom rôznym partíciam (a) budú na základe (4) a (5) zodpovedať dve rôzne Q-riešenia rovnice (1)

Tým je veta dokázaná.

Veta 4. *Pre počet $q(n)$ rôznych Q-riešení rovnice (1) platí*

$$q(n) \geqq 2^{n-1} - 2 , \quad n > 2 .$$

Dôkaz. Podľa knihy [5] str. 26–29 je počet usporiadaných partícií čísla $n = b_1 + b_2 + \ldots + b_l$ $(1 \leqq l \leqq n)$ 2^{n-1}. Pretože sme vylúčili vo vete 3 dve partície, máme podľa tejto vety $2^{n-1} - 2$ Q-riešení rovnice (1). Rovnosť platí pri $n = 3$, avšak už pri $n = 4$ je $q(n) > 2^{n-1} - 2$ (napr. riešenie (2, 4, 8, 8) rovnice (1) nedostaneme pomocou partície $4 = 1 + 1 + 2$). Tým je veta dokázaná.

III.

Zhrnúc výsledky kap. I a II môžeme vysloviť vetu:

Veta 5. *Pre počet $m(n)$ všetkých riešení rovnice (1) splňajúcich podmienku $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$ platí*

$$(6) \qquad m(n) = p(n) + q(n) \geqq \tfrac{1}{2}(n - 1)! + 2^{n-1} - 2 .$$

Dôkaz. Každé primitívne riešenie rovnice (1) je buď P-, buď Q-riešenie. Pretože tieto množiny sú disjunktné, platí dokazovaná veta podľa vety (2) a (4).

Poznámka 1. Dolné ohraničenie podľa vety 5 sa k vyšším hodnotám n stáva stále voľnejším, dôvody sú zrejmé.

Poznámka 2. Nerovnosť (6) platí aj pre riešenia rovnice $\sum_{i=1}^{n} 1/x_i = 1/a_0$, lebo ak $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je primitívne riešenie rovnice (1) je $(a_0x_1, a_0x_2, \ldots, a_0x_n)$ primitívne riešenie rovnice $\sum_{i=1}^{n} 1/x_i = 1/a_0$.

Poznámka 3. Vzhľadom na vetu 1 článku [6] platí nerovnosť (6) aj pre rovnicu $\sum_{i=1}^{n} x_i = y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, ak za jej primitívne riešenia považujeme tie, pre ktoré platí $x_1 \lneqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$ a $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$.

Literatúra

[1] *Erdös P.*: Ak $1/x_1 + 1/x_2 + \ldots + 1/x_n = a/b$ egyenlet egész számú megoldásairól. Mat. Lapok *1* (1950), 192—210.

[2] *Bartoš P.*: Poznámka o počte riešení rovnice $1/x + 1/y = a/b$. Čas. pro pěst. mat. *95* (1970), 411—415.

[3] *Bartoš P.*: O prolongabilných riešeniách optickej rovnice. Čas. pro pěst. mat. *95* (1970), 278—289.

[4] *Bartoš P.*: O niektorých diofantických rovniciach. Mat. časop. *19* (1969), 234—235.

[5] *Hall M.*: Комбинаторный анализ, Москва 1963.

[6] *Bartoš P.*: O riešení rovnice $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a rovnice $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = yx_1x_2 \ldots x_n$ v prirodzených číslach. Čas. pro pěst. mat. *96* (1971), 367—370.

Adresa autora: 801 00 Bratislava 1, Sibírska 9.

Zusammenfassung

BEMERKUNG ZUR LÖSUNGENANZAHL DER OPTISCHEN GLEICHUNG

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

In der Abhandlung wird gezeigt, dass für die Anzahl $m(n)$ der Lösungen der diophantischen Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} 1/x_i = 1\,, \quad n > 2\,, \quad x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n\,,$$

$$m(n) \geqq \tfrac{1}{2}(n-1)! + 2^{n-1} - 2$$

gilt.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

JEDNODUCHÉ NOVÉ ŘEŠENÍ DIOFANTICKÉ ROVNICE $A^3 + B^3 + C^3 = D^3$

JAN KUBÍČEK, Olomouc

(Došlo dne 8. března 1973)

Již starověcí matematici znali některá celočíselná řešení diofantické rovnice

$$A^3 + B^3 + C^3 = D^3 \tag{1}$$

(např. řešení $A = 1$, $B = 6$, $C = 8$, $D = 9$). Řešením této rovnice se též zabýval Euler, který dokázal, že jestliže celá čísla p, q, r, s vyhovují jednodušší diofantické rovnici

$$qr = s^2 + 3p^2 \,, \tag{2}$$

pak čísla

$$A = 3pq - sq - r^2 \,, \quad B = 3pq + sq + r^2 \,, \quad C = sr + q^2 - 3pr \,, \quad D = sr + q^2 + 3pr \tag{3}$$

jsou řešením diofantické rovnice (1). (Eulerovy vzorce jsou tedy čtyřparametrické, přičemž parametry p, q, r, s jsou svázány diofantickou rovnicí (2).)

Nové řešení diofantické rovnice (1) je formulováno v následující větě (Kubíčkova identita):

Buďte a, b libovolná celá čísla. Potom čísla A, B, C, D daná vzorci

$$A = a(b^3 - a^3) \,, \quad B = b(b^3 - a^3) \,, \quad C = a(2b^3 + a^3) \,, \quad D = b(2a^3 + b^3) \tag{4}$$

jsou opět celá a jsou řešením diofantické rovnice (1).

Důkaz Kubíčkovy identity se snadno provede dosazením vzorců (4) do rovnice (1).

Na závěr poznamenáváme, že vzorce (4) jsou dvouparametrické, přičemž parametry a, b jsou nezávislé. Jsou-li parametry a, b racionální, dostáváme opět racionální řešení rovnice (1). Je samozřejmé, že toto nové řešení, stejně jako Eulerovo, není úplné.

Adresa autora: 772 00 Olomouc, Starodružníků 3.

Zusammenfassung

EINE EINFACHE NEUE LÖSUNG DER DIOPHANTISCHEN GLEICHUNG $A^3 + B^3 + C^3 = D^3$

JAN KUBÍČEK, Olomouc

In der Arbeit wird die folgende Behauptung bewiesen: *Es seien a, b beliebige ganze Zahlen und sei*

$$A = a(b^3 - a^3), \quad B = b(b^3 - a^3), \quad C = a(2b^3 + a^3), \quad D = b(2a^3 + b^3).$$

Dann genügen die ganzen Zahlen A, B, C, D der diophantischen Gleichung $A^3 + B^3 + C^3 = D^3$. Diese Lösung wird die „Kubíček-Identität" genannt.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

BRELOTOVY PROSTORY NA JEDNODIMENSIONÁLNÍCH VARIETÁCH

JOSEF KRÁL a JAROSLAV LUKEŠ, Praha

(Došlo dne 20. března 1973)

1. Úvod. V dalším X znamená jednodimensionální varietu, tj. Hausdorffův topologický prostor, v němž každý bod má okolí homeomorfní s reálnou osou R^1. Obloukem (resp. kompaktním obloukem) v X rozumíme podmnožinu X homeomorfní s R^1 (resp. s uzavřeným intervalem $\langle 0, 1 \rangle$). Předpokládejme, že každé otevřené množině $U \subset X$ je přiřazen vektorový prostor $\mathscr{H}_U$ spojitých reálných funkcí, nazývaných harmonické funkce na U, tak, že zobrazení $\mathscr{H} : U \mapsto \mathscr{H}_U$ splňuje následující axiomy.

I. Axiom svazku. Jestliže $U \subset V$ jsou otevřené množiny a h je harmonická funkce na V, potom $\mathrm{Rest}_U\, h$ (= restrikce funkce h na množinu U) je harmonická na U; dále, je-li f funkce na U, která je harmonická v okolí každého bodu množiny U, potom f je harmonická na U.

II. Axiom base. Regulární množiny tvoří basi pro topologii X (relativně kompaktní otevřená množina $U \subset X$, jejíž hranice ∂U je neprázdná, je regulární, jestliže každá spojitá funkce f na ∂U má spojité rozšíření H_f^U na $\bar{U} = U \cup \partial U$, harmonické v U; navíc nezáporné, je-li f nezáporná na ∂U).

III. Princip minima. Ke každému $x \in X$ existuje okolí U_x tak, že na U_x existuje striktně kladná harmonická funkce a pro každý kompaktní oblouk $C \subset U_x$ je splněn následující princip minima: Je-li h spojitá funkce na C, nezáporná na ∂C a harmonická na vnitřku C, je h nezáporná na C.

Dvojice $(X, \mathscr{H})$ splňující axiomy I, II, III se nazývá *harmonický prostor.*

Je-li $U \subset X$ regulární množina, potom zobrazení $\omega_x^U : f \mapsto H_f^U(x)$ je pro každé $x \in U$ nezáporná Radonova míra na ∂U, tzv. *harmonická míra* příslušná k U a x, jejíž nosič budeme značit symbolem $\mathrm{spt}\, \omega_x^U$. Řekneme, že bod $x \in X$ je *eliptický*, jestliže x má fundamentální systém regulárních okolí U takových, že $\mathrm{spt}\, \omega_x^U = \partial U$. Harmonický prostor (X, H) nazveme *Brelotův*, jestliže každý bod X je eliptickým bodem.

Protože $(X, \mathscr{H})$ splňuje lokálně axiomy H. BAUERA ([1], str. 11; viz [6], remark

2.1), má svazek $\mathscr{H}$ Doobovu konvergenční vlastnost (limitní funkce neklesající posloupnosti harmonických funkcí na otevřené množině U je harmonická, pokud je konečná na množině husté v U). Je-li tedy $(X, \mathscr{H})$ Brelotův, má $\mathscr{H}$ podle [5], cvičení 3.1.3, Brelotovu konvergenční vlastnost (limitní funkce neklesající posloupnosti harmonických funkcí na oblasti je harmonická, pokud je konečná v jednom bodě) a podle [6], corollary 2.3, má každá komponenta X spočetnou basi.

Je-li F funkce na X, označme $F_{-1}(0) = \{x \in X; F(x) = 0\}$. Pro funkce f, g definované na otevřené množině $M \subset X$ nechť $\{f, g\}_M$ značí množinu všech funkcí, které jsou na každé komponentě množiny M lineární kombinací funkcí f, g.

Buď $(R^1, \mathscr{H})$ Brelotův harmonický prostor. Potom podle [6], lemma 1.2, platí:

(α) Je-li h harmonická funkce na R^1 a množina $h_{-1}(0)$ má hromadný bod, je $h \equiv 0$ na R^1.

(β) (R^1, H) má „rozšiřovací vlastnost," tj. každá harmonická funkce definovaná na podoblasti prostoru R^1 se dá jednoznačně rozšířit na funkci harmonickou v celém R^1 (charakteristika harmonických prostorů s „rozšiřovací vlastností" je podána v [7]).

2. Příklady. (A) *Buďte h, g spojité funkce na R^1 splňující následující podmínky:*

(i) *h, g jsou lineárně nezávislé na R^1,*

(ii) *množiny $h_{-1}(0)$, $g_{-1}(0)$ jsou isolované a $h_{-1}(0) \cap g_{-1}(0) = \emptyset$,*

(iii) *funkce hg^{-1} je prostá na každé komponentě množiny $R^1 \setminus g_{-1}(0)$ a funkce gh^{-1} je prostá na každé komponentě množiny $R^1 \setminus h_{-1}(0)$.*

Potom $(R^1, U \mapsto \{h, g\}_U)$ (kde U probíhá otevřené množiny v R^1) je Brelotův harmonický prostor.

Důkaz. Pomocí Borelovy věty se ověří axiom svazku. Každý interval (a, b), pro nějž $\langle a, b\rangle \subset R^1 \setminus g_{-1}(0)$ anebo $\langle a, b\rangle \subset R^1 \setminus h_{-1}(0)$, je regulární. Toto plyne ihned z (iii) jednoduchým výpočtem. Lehko též zjistíme, že pro každý takový interval je splněn princip minima a nosič harmonické míry $\omega_x^{(a,b)}$ je pro každé $x \in (a, b)$ roven $\partial(a, b)$.

Poznámka. *Jsou-li $a < b$ takové body z $g_{-1}(0)$, že $(a, b) \cap g_{-1}(0) = \emptyset$, je množina $(a, b) \cap h_{-1}(0)$ jednobodová a* $\operatorname{sign} h(a) = -\operatorname{sign} h(b) \neq 0$. *Jestliže* $\sup h_{-1}(0) = +\infty$, *je i* $\sup g_{-1}(0) = +\infty$.

Důkaz. Funkce hg^{-1} je prostá a spojitá na (a, b) a $g(a) = g(b) = 0$. Tedy $\lim_{x \to a+} hg^{-1}(x) = -\lim_{x \to b-} hg^{-1}(x)$ a tyto limity jsou nevlastní. Existuje tudíž právě jedno $\xi \in (a, b)$, pro něž $hg^{-1}(\xi) = 0$.

(B) *Nechť $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$ a nechť $\mathscr{H} : U \mapsto \mathscr{H}_U$ přiřazuje každé otevřené množině $U \subset (a, b)$ vektorový prostor $\mathscr{H}_U$ všech řešení y diferenciální rovnice $y'' + y = 0$ na U. Pak $((a, b), \mathscr{H}) \equiv H(a, b)$ je Brelotův prostor.*

Důkaz. Položíme-li $h(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ $(x \in R^1)$, pak Brelotův prostor konstruovaný v příkladu (A) splývá s $H(-\infty, +\infty)$.

Poznámka. Jsou známy velmi obecné podmínky na diferenciální operátor P zaručující, že svazek definovaný řešeními rovnice $Pu = 0$ v otevřené podmnožině prostoru R^n určuje Brelotův prostor; o tom viz např. [2].

3. Definice. Zobrazení, které vznikne složením zobrazení φ se zobrazením ψ, budeme značit symbolem $\psi * \varphi$. Řekneme, že harmonický prostor $(X, \mathscr{H})$ je *harmonicky ekvivalentní* (krátce jen *ekvivalentní*) s harmonickým prostorem $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}})$, jestliže existuje homeomorfní zobrazení φ prostoru X na $\tilde{X}$ a kladná spojitá funkce q na $\tilde{X}$ tak, že pro každou otevřenou množinu $G \subset X$ je funkce h harmonická na G, právě když existuje $\tilde{h} \in \tilde{\mathscr{H}}_{\varphi(G)}$, pro niž $h = (q\tilde{h}) * \varphi$ na G.

Vztah ekvivalence právě definovaný je zřejmě reflexivní, symetrický a transitivní.

4. Příklad. Vyšetříme, kdy prostory $H(a_1, b_1)$ a $H(a_2, b_2)$ z příkladu 2(B) jsou harmonicky ekvivalentní.

(A) *Buďte* (a_1, b_1), (a_2, b_2) *omezené intervaly,* $b_1 - a_1 = b_2 - a_2$. *Potom* $H(a_1, b_1)$ *a* $H(a_2, b_2)$ *jsou ekvivalentní.*

Důkaz. Položme $\varphi : x \mapsto x + (a_2 - a_1)$ pro $x \in (a_1, b_1)$, $q = 1$ na (a_2, b_2). Potom pro $x \in (a_1, b_1)$ jest

$$q(\varphi(x)) \sin \varphi(x) = \cos(a_2 - a_1) \sin x + \sin(a_2 - a_1) \,.\, \cos x\,,$$

$$q(\varphi(x)) \cos \varphi(x) = \cos(a_2 - a_1) \cos x - \sin(a_2 - a_1) \,.\, \sin x\,,$$

odkud již lehko plyne tvrzení.

(B) *Nechť* $(-a, a)$, $(-b, b)$ *jsou omezené intervaly,* $|b - a| \geqq \frac{1}{2}\pi$. *Potom* $H(-a, a)$ *a* $H(-b, b)$ *nejsou ekvivalentní.*

Důkaz. Nechť $0 < a < a + \frac{1}{2}\pi \leqq b$. Nalezněme celé nezáporné k tak, aby $\frac{1}{2}k\pi < a \leqq \frac{1}{2}(k + 1)\pi$ a předpokládejme zprvu, že k je sudé. Nechť $H(-a, a)$ a $H(-b, b)$ jsou ekvivalentní, buďte φ, q příslušné funkce z definice 3, $\varphi : (-a, a) \to (-b, b)$. V intervalu $\langle a, b)$ leží alespoň jeden nulový bod funkce cos (a sice bod $(k + 1)\frac{1}{2}\pi$), kromě toho v intervalu $(-a, a)$ je k nulových bodů funkce cos. Tedy množina $\{\varphi_{-1}(x);\ x \in (-b, b),\ \cos x = 0\}$ má alespoň $(k + 2)$ různých prvků. Ale $2a \leqq (k + 1)\pi$, čili existují $A, B \in (-a, a)$ tak, že $0 < |A - B| < \pi$, $\cos \varphi(A) = \cos \varphi(B) = 0$. Nalezněme dále $\alpha, \beta \in R^1$ tak, aby

$$\alpha \sin x + \beta \cos x = q(\varphi(x)) \,.\, \cos \varphi(x)$$

pro $x \in (-a, a)$. Potom ovšem $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, $\alpha \sin A + \beta \cos A = \alpha \sin B + \beta \cos B = 0$, tedy $\sin A \cos B - \sin B \cos A = \sin(A - B) = 0$, což jest ve sporu s podmínkou $0 < |A - B| < \pi$. Je-li k liché, je úvaha obdobná, pouze pracujeme s funkcí sin místo cos.

(C) *Nechť $k \geqq 0$ je celé, $\frac{1}{2}k\pi < a < b < \frac{1}{2}(k + 1)\pi$. Potom $H(-a, a)$ a $H(-b, b)$ jsou ekvivalentní.*

Důkaz. Položme $A = \operatorname{tg} b . (\operatorname{tg} a)^{-1} > 0$ a předpokládejme pro jednoduchost, že k je liché. Definujeme-li $\varphi(x) = \operatorname{arctg}(A \operatorname{tg} x) + j\pi$ pro $x \in (\frac{1}{2}(2j - 1)\pi, \frac{1}{2}(2j + 1)\pi))$, $j = 0, 1, \ldots, \frac{1}{2}(k - 1)$, $\varphi(x) = \operatorname{arctg}(A \operatorname{tg} x) + \frac{1}{2}k\pi$ pro $x \in (\frac{1}{2}k\pi, a)$, $\varphi(x) = -\varphi(-x)$ pro $x \in (-a, 0)$, $\varphi(\frac{1}{2}j\pi) = \frac{1}{2}j\pi$, je φ rostoucí a spojitá na intervalu $(-a, a)$ a $\varphi((-a, a)) = (-b, b)$. Pro $y \in (-b, b)$ dále položme $q(y) = \cos \varphi_{-1}(y) . (\cos y)^{-1}$, pokud $\cos y \neq 0$ a $q(y) = A$, pokud $\cos y = 0$. Funkce q je kladná a spojitá na $(-b, b)$, přičemž pro $x \in (-a, a)$ platí

$$q(\varphi(x)) \sin \varphi(x) = \frac{\cos x}{\cos \varphi(x)} . \sin \varphi(x) = \cos x . \operatorname{tg} \varphi(x) =$$
$$= \cos x . A \operatorname{tg} x = A \sin x\,, \quad q(\varphi(x)) . \cos \varphi(x) = \cos x\,.$$

(D) *Buď $k > 0$ celé, $a > 0$, $a \neq k\pi$. Potom prostory $H(0, a)$ a $H(0, k\pi)$ nejsou ekvivalentní.*

Důkaz pro $|a - k\pi| \geqq \pi$ plyne tvrzení z (A) a (B). Nechť $|a - k\pi| < \pi$ a předpokládejme, že $H(0, a)$ a $H(0, k\pi)$ jsou ekvivalentní, buďte $q, \varphi : (0, a) \to (0, k\pi)$ příslušné funkce z definice 3. Potom existují $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ tak, že pro každé $x \in (0, a)$ platí

$$(*) \quad q(\varphi(x)) \sin \varphi(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x\,,$$

$$(**) \quad q(\varphi(x)) \cos \varphi(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x\,.$$

Je-li φ rostoucí na $(0, a)$, potom $\varphi(0+) = 0$, $\varphi(a-) = k\pi$ a z $(*)$ plyne $\beta = 0$ (pro $x \to 0+$). Tedy $0 = \sin a$ (pro $x \to a-$), odkud $\alpha = \beta = 0$. Obdobně zjistíme, že $\alpha = \beta = 0$ i v případě, kdy φ je klesající.

Shrnutí. *Buďte $(-a, a)$, $(-b, b)$ omezené intervaly, $a < b$. Potom $H(-a, a)$ a $H(-b, b)$ jsou ekvivalentní, právě když existuje $k \geqq 0$ celé tak, že $\frac{1}{2}k\pi < a < b < \frac{1}{2}(k + 1)\pi$.*

Důkaz. Buď k celé. Je-li $\frac{1}{2}k\pi = a$ anebo $\frac{1}{2}k\pi = b$, nejsou podle (D) a (A) prostory $H(-a, a)$ a $H(-b, b)$ nikdy ekvivalentní. Je-li $a < \frac{1}{2}k\pi < b$, potom $H(-a, a)$ a $H(-b, b)$ nejsou ekvivalentní podle (B) v případě $b - a \geqq \frac{1}{2}\pi$. Je-li však $\frac{1}{2}(k - 1)\pi < a < \frac{1}{2}k\pi < b < \frac{1}{2}(k + 1)\pi$, lze použít (C) k převedení na případ $\frac{1}{2}(k - 1)\pi < a' < a < b < b' < \frac{1}{2}(k + 1)\pi$, kde $b' - a' > \frac{1}{2}\pi$ a ukázat opět pomocí (B), že ani v tomto případě nemohou být $H(-a, a)$ a $H(-b, b)$ ekvivalentní.

(E) *Buďte $a, b \in R^1$. Potom $H(-\infty, a)$ a $H(-\infty, b)$ jsou ekvivalentní. Také $H(-\infty, a)$ a $H(b, \infty)$ jsou ekvivalentní.*

Důkaz. V prvním případě stačí položit $\varphi(x) = x + (b - a)$ pro $x \in (-\infty, a)$, $q = 1$. Je jistě zřejmé, jak je třeba volit φ a q v druhém případě.

(F) *Buďte $a, b, c \in R^1$, $a < b$. Potom žádné ze dvou prostorů $H(a, b)$, $H(c, +\infty)$, $H(-\infty, +\infty)$ nejsou ekvivalentní.*

Důkaz probíhá obdobně jako pro případ (B).

5. Lemma. *Buď $(R^1, \mathscr{H})$ Brelotův harmonický prostor, nechť f, g jsou nenulové harmonické funkce na R^1. Mají-li f, g společný nulový bod, pak jsou lineárně závislé.*

Důkaz. Nechť $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Podle [6], lemma 1.21, je x_0 isolovaný bod množiny $f_{-1}(0)$. Zvolme $y > x_0$ tak, aby $y \notin f_{-1}(0)$ a aby pro interval $\langle x_0, y\rangle$ platil princip minima. Nechť $g(y) = \lambda f(y)$. Potom funkce $g - \lambda f$ se anuluje na množině $\{x_0, y\}$, tedy na $\langle x_0, y\rangle$, a tedy na R^1.

6. Lemma. *Buď $(R^1, \mathscr{H})$ Brelotův harmonický prostor a nechť $H_{R^1} = \{h, g\}_{R^1}$. Potom funkce h, g splňují (i)–(iii) z příkladu 2(A).*

Důkaz. Funkce h, g jsou lineárně nezávislé (neboť existuje regulární interval). Množiny $h_{-1}(0)$, $g_{-1}(0)$ jsou isolované opět podle [6], lemma 1.21, a $h_{-1}(0) \cap \cap\, g_{-1}(0) = \emptyset$ podle lemmatu 5. Buď C komponenta množiny $R^1 \setminus g_{-1}(0)$. Protože funkce g zachovává znamení na C, můžeme uvažovat prostor ${}^g\mathscr{H}_C = \{hg^{-1}; h \in \mathscr{H}_C\}$ všech g-harmonických funkcí na C, který tedy obsahuje konstanty. Podle [6], lemma 1.6 existuje na C ryze monotonní spojitá funkce F a $k \in R^1$ tak, že ${}^g\mathscr{H}_C = \{F, k\}_C$. Tedy $hg^{-1} = aF + b$ $(a, b \in R^1)$ na C. Jelikož $a \neq 0$, je funkce hg^{-1} ryze monotonní na C.

7. Lemma. *Buď $(R^1, \mathscr{H})$ Brelotův harmonický prostor. Potom existují funkce h, g H_{R^1} tak, že $H_{R^1} = \{h, g\}_{R^1}$ (a funkce h, g mají vlastnosti (i)–(iii) z 2(A)).*

Důkaz. Buď $h \in \mathscr{H}_{R^1}$ nenulová na R^1. Za funkci g stačí vzít libovolnou harmonickou funkci na R^1, která je s h na R^1 lineárně nezávislá. Taková funkce zajisté existuje; stačí vzít regulární interval (a, b), najít řešení g Dirichletovy úlohy $g(a) = A$, $g(b) = B$, kde $A\, h(b) - B\, h(a) \neq 0$, a potom rozšířit g z (a, b) na R^1. Zřejmě každá další harmonická funkce na R^1 je lineární kombinací h, g.

8. Věta. *Buď $(R^1, \mathscr{H})$ Brelotův harmonický prostor. Potom existuje interval $(A, B) \subset R^1$ tak, že $(R^1, \mathscr{H})$ a $H(A, B)$ jsou harmonicky ekvivalentní.*

Důkaz. Podle lemmatu 7 existují harmonické funkce h, g na R^1 tak, že $\mathscr{H}_{R^1} = \{h, g\}_{R^1}$. Nechť (a, b) je komponenta množiny $R^1 \setminus g_{-1}(0)$. Můžeme předpokládat, že funkce g je na intervalu (a, b) kladná a že funkce $\psi = hg^{-1}$ je na (a, b) rostoucí. Položme $\varphi = \operatorname{arctg} * \psi$ na (a, b). Potom $\varphi((a, b)) = (a', b') \subset (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$; přičemž $a' > -\frac{1}{2}\pi$ (resp. $b' < \frac{1}{2}\pi$), právě když ψ je zdola (resp. shora) omezená na

(a, b). Definujeme-li funkci q na (a', b') vztahem $q = g * \varphi_{-1}/\cos$, je q kladná a spojitá na (a', b') a $h * \varphi_{-1} = q \sin$ na (a', b'). Je-li $(a, b) = (-\infty, +\infty)$, jsme hotovi. Nechť $b < +\infty$, potom funkce ψ nemůže být shora omezená na (a, b) (neboť $g(b) = 0$, $h(b) > 0$), tedy $b' = \frac{1}{2}\pi$. Nechť (c, d) je komponenta množiny $R^1 \setminus h_{-1}(0)$, která obsahuje bod b. Potom funkce h je kladná na (c, d), funkce $\psi = hg^{-1}$ je rostoucí v jistém levém okolí bodu b, tedy funkce $\tilde{\psi} = gh^{-1}$ je klesající na intervalu (c, d). Položme $\tilde{\varphi} = \operatorname{arccotg} * \tilde{\psi}$ na (c, d). Potom $\tilde{\varphi}((c, d)) = (c', d')$, kde $0 \leqq c' < \frac{1}{2}\pi < d' \leqq \pi$. Definujeme-li ještě funkci $\tilde{q}$ na (c', d') předpisem

$$\tilde{q} = \frac{h * \tilde{\varphi}_{-1}}{\sin},$$

je $\tilde{q}$ kladná a spojitá na (c', d') a $g * \tilde{\varphi}_{-1} = \tilde{q} \cos$ na (c', d'). Kromě toho na intervalu $(a, b) \cap (c, d) = (c, b)$ je $\varphi = \tilde{\varphi}$ a na intervalu $\varphi((c, b))$ je $q = \tilde{q}$. Vidíme tedy, že homeomorfismus φ lze z intervalu (a, b) prodloužit na (a, d) a funkci q na $\varphi((a, d))$ tak, aby

$$h(t) = q(\varphi(t)) \sin \varphi(t), \quad g(t) = q(\varphi(t)) \cos \varphi(t)$$

pro $t \in (a, d)$. Je-li $d = +\infty$, jsme s „prodlužováním doprava" hotovi. Je-li $d < +\infty$, je $d' = \pi$, vezmeme komponentu množiny $R^1 \setminus g_{-1}(0)$, která obsahuje bod d a celou konstrukci opakujeme. Vzhledem k vlastnosti (ii) množin $h_{-1}(0)$, $g_{-1}(0)$ dostaneme tvrzení: Existuje interval (A, B), homeomorfismus $\varphi : R^1 \to (A, B)$ a kladná spojitá funkce q na (A, B) tak, že $h(t) = q(\varphi(t)) \sin \varphi(t)$, $g(t) = q(\varphi(t)) \cos \varphi(t)$ pro všechna $t \in R^1$. Odtud již lehko vyplývá, že prostory $(R^1, \mathscr{H})$, $H(A, B)$ jsou ekvivalentní.

9. Důsledek. *Buď X nekompaktní souvislá jednodimensionální varieta. Nechť $\mathscr{H}$ je takový svazek funkcí na X, že $(X, \mathscr{H})$ je Brelotův harmonický prostor. Potom existuje interval $(A, B) \subset R^1$ tak, že $(X, \mathscr{H})$ a $H(A, B)$ jsou harmonicky ekvivalentní.*

10. Poznámka. O souvislosti harmonických prostorů nad otevřenou částí prostoru R^n s řešeními parciálních diferenciálních rovnic pojednává přednáška [3], kde je uvedena další literatura o této problematice. Výsledky, jež se týkají mnohem složitějšího případu $n \geqq 2$, nejsou ovšem již tak elementární a úplné jako pro $n = 1$. Poznamenejme, že při vyšetřováních týkajících se vícerozměrného případu popsaných v [3] hraje podstatnou roli předpoklad, že mezi harmonickými funkcemi je v jistém smyslu mnoho funkcí dostatečně diferencovatelných; ekvivalence ve smyslu výše uvedené definice 3 se v tomto pojetí neuplatňuje.

Literatura

[1] *H. Bauer:* Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, Lecture Notes 22, Springer Verlag 1966.

[2] *N. Boboc - P. Mustaţa:* Espaces harmoniques associés aux opérateurs différentiels linéaires du second ordre de type elliptique, Lecture Notes 68, Springer Verlag 1969.

[3] *J. M. Bony:* Opérateurs elliptiques dégénérés associés aux axiomatiques de la théorie du potentiel, C.I.M.E. Stresa (2—10 Luglio 1969), Ed. Cremonese Roma 1970, 69—119.
[4] *M. Brelot:* Axiomatique des fonctions harmoniques, Université de Montréal, 1966.
[5] *C. Constantinescu - A. Cornea:* Potential theory on harmonic spaces, Springer Verlag 1972.
[6] *J. Král - J. Lukeš - I. Netuka:* Elliptic points in one-dimensional harmonic spaces, Comment. Math. Univ. Carolinae *12* (1971), 453—483.
[7] *J. Král - J. Lukeš:* Indefinite harmonic continuation, Časopis pro pěst. matematiky *98* (1973), 87—94.

Author's addresses: J. Král, 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV) J. Lukeš, 186 00 Praha 8-Karlín. Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

Summary

BRELOT SPACES ON ONE-DIMENSIONAL MANIFOLDS

JOSEF KRÁL and JAROSLAV LUKEŠ, Praha

A Brelot space $(X, \mathscr{H})$ is a locally connected Hausdorff topological space X equipped with a sheaf $\mathscr{H}$ associating with each open set $U \subset X$ a vector-space $\mathscr{H}_U$ of continuous functions (termed harmonic functions) on U such that the sheaf axiom, the base axiom and the Brelot convergence axiom hold. Two Brelot spaces $(X, \mathscr{H})$ and $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}})$ are termed equivalent if there is a homeomorphism φ of X onto $\tilde{X}$ and a positive continuous function q on $\tilde{X}$ such that, for any open $G \subset X$, $\tilde{h} \in \tilde{\mathscr{H}}_{\varphi(G)}$ if and only if the function h defined on G by $h(x) = q(\varphi(x))\, \tilde{h}(\varphi(x))$ $(x \in G)$ belongs to $\mathscr{H}_G$.

The purpose of this note is to present an elementary proof of the following result describing all equivalence classes of Brelot spaces that can be defined on a non-compact one-dimensional manifold.

Theorem. *Let X be a connected non-compact one-dimensional manifold. Given a Brelot space $(X, \mathscr{H})$ then there are numbers $-\infty \leqq A < B \leqq +\infty$ such that $(X, \mathscr{H})$ is equivalent with the Brelot space $H(A, B)$ determined on $(A, B) = \{x \in R^1;\ A < x < B\}$ by solutions y of the differential equation $y'' + y = 0$; two spaces $H(A, B)$ and $H(\tilde{A}, \tilde{B})$ are equivalent if and only if one of the following conditions holds:*

1) *All the numbers $A, B, \tilde{A}, \tilde{B}$ are finite and either $B - A = \tilde{B} - \tilde{A}$ or there is an integer $k \geqq 0$ such that*
$$k\pi < \min(B - A, \tilde{B} - \tilde{A}) < \max(B - A, \tilde{B} - \tilde{A}) < (k + 1)\pi\,.$$

2) *Each of the intervals (A, B), $(\tilde{A}, \tilde{B})$ is unbounded and different from R^1.*

3) $A = -\infty = \tilde{A}$, $B = +\infty = \tilde{B}$.

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

ANNA NEUBRUNNOVÁ, Bratislava: *On quasicontinuous and cliquish functions.* (O funkciach kvazispojitých a cliquish.)

V práci sú študované dve zovšeobecnenia pojmu spojitosti. Prvým je kvazispojitosť zavedená Kempistým a druhým vlastnosť „cliquish" zavedená Bledsoem. Dokazujeme, že limita transfinitnej postupnosti $\{f_\xi\}_{\xi<\Omega}$, kde Ω je prvé nespočítateľné ordinálne číslo, kvazispojitých (cliquish) funkcií je funkcia kvazispojitá (cliquish). Ďalej sa študujú vzťahy kvazispojitých a cliquish funkcií k funkciám majúcim isté vlastnosti typu Denjoyovho. Zovšeobecňujú sa tiež niektoré tvrdenia týkajúce sa štruktúry množiny bodov, v ktorých je funkcia „cliquish".

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha: *Remark on linear equations in Banach space.* (Poznámka o lineárních rovnicích v Banachově prostoru.)

V práci jsou formulovány Fredholmovy věty pro lineární rovnice v Banachově prostoru, pro které není požadována znalost celého adjungovaného prostoru. Práce je založena na jistých výsledcích o dimenzionálních charakteristikách lineárních operátorů.

ERNEST JUCOVIČ, FRANTIŠEK OLEJNÍK, Košice: *On chromatic and achromatic numbers of uniform hypergraphs.* (O chromatických a achromatických číslach uniformných hypergrafov.)

V práci sú podané horné medze pre čísla $\chi(H) + \chi(\overline{H})$, $\psi(H)$, kde H je k-uniformný hypergraph, $k > 1$, $\overline{H}$ je komplement hypergrafu H; $\chi(M)$ značí chromatické, $\psi(M)$ achromatické číslo hypergrafu M.

PAVOL MARUŠIAK, Žilina: *Oscillation of soutions of the delay differential equqtion* $y^{(2n)}(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t) f_i(y(h_i(t))) = 0$, $n \geqq 1$. (Oscilatoričnosť diferenciálnej rovnice s oneskoreným argumentom $y^{(2n)}(t) = \sum_{i=1}^{m} p_i(t) f_i(y(h_i(t))) = 0$, $n \geqq 1$.)

V práci je daná nutná a postačujúca podmienka a niektoré postačujúce podmienky pre to, aby diferenciálna rovnica $y^{(2n)} + \sum_{i=1}^{m} p_i(t) f_i(y(h_i(t))) = 0$, $n \geqq 1$ bola oscilatorická.

MÁRIA JAKUBÍKOVÁ, Košice: *The nonexistence of free complete vector lattices.* (Neexistence úplného voľného vektorového zväzu.)

V článku sa dokazuje, že neexistuje úplný voľný vektorový zväz s nekonečnou množinou voľných úplných generátorov.

MILAN TVRDÝ, Praha: *Boundary value problems for generalized linear integrodiferential equations with left-continuous solutions.* (Okrajové úlohy pro zobecněné lineární integrodiferenciální rovnice se zleva spojitými řešeními.)

Ve svém předchozím článku (Czech. Math. J. *23* (*98*), (1973), 183—217) formuloval autor adjungované úlohy k okrajovým úlohám $dx/d\tau = D[A(t)\,x + f(t)]$, $M\,x(a) + N\,x(b) = l$ a $dx/d\tau = D[A(t)\,x + \int_a^b [d_s G(t,s)]\,x(s) + f(t)]$, $\int_a^b [dL(s)]\,x(s) = l$ a dokázal příslušné věty Fredholmova typu. Předpoklady byly ty, že řešeními daných úloh byly regulární funkce s konečnou variací $(x(t+) + x(t-) = 2x(t))$. Zde jsou dokázány obdobné výsledky pro případ zleva spojitých řešení.

GARY CHARTRAND, Kalamazoo, RAYMOND E. PIPPERT, Fort Wayne: *Locally connected graphs.* (Lokálně souvislé grafy.)

V článku se odvozují některé elementární vlastnosti lokálně souvislých grafů a pak se pojem zjemňuje na lokální n-souvislost. Konečně se odvozuje postačující podmínka pro to, aby graf byl lokálně souvislý.

LADISLAV NEBESKÝ, Praha: *On cubes and dichotomic trees.* (O krychlích a dichotomických stromech.)

V článku se vyšetřují vztahy mezi jistými stromy a n-rozměrnou krychlí a ověřuje se pravdivost hypotézy Havla a Liebla (Embedding the polytomic trees into the n-cube. Čas pěst. mat. *98* (1973), 307—314.)

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

RECENSE

Jean Giraux: COHOMOLOGIE NON ABÉLIENNE. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg — New York, ix + 467 str., cena DM 109,— (179 svazek knižnice Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen.)

Kniha je prakticky první monografií o neabelovských kohomologiích. Na tomto místě je užitečné si připomenout, že ačkoliv kohomologické grupy topologického prostoru s koeficienty ve svazku abelových grup jsou dnes v matematice běžně používány, analogické grupy s koeficienty ve svazku neabelovských grup definovat nelze. Podařilo se zavést pouze objekt daleko skromnější, totiž kohomologickou množinu topologického prostoru s koeficienty ve svazku neabelovských grup, a to ještě pouze v dimensích nula, jedna a dvě. Nultá kohomologická množina má sice strukturu grupy, první a druhá však již na sobě žádnou algebraickou strukturu nenesou. Přesto však s použitím takovýchto kohomologických množin bylo dosaženo pěkných výsledků, zejména v teorii tzv. fibrovaných prostorů.

Recensovaná monografie obsahuje systematický výklad teorie neabelovských kohomologií. Autor pracuje zcela v pojmech teorie kategorií. Není zde snad třeba připomínat, že znalost klasické teorie neabelovských kohomologií je pro četbu knihy zcela nezbytná. Na druhé straně ovšem čtenář alespoň nepotřebuje nikterak obzvláštní znalosti teorie kategorií.

Kniha je rozdělena do osmi kapitol. První dvě kapitoly jsou přípravné. Velmi pěkně a srozumitelně jsou zde probírány všechny pojmy a konstrukce nezbytné pro následující výklad. Uveďme zde především Grothendieckovy topologie a speciální typy fibrovaných kategorií „champ sur un site".

Třetí kapitola je věnována kohomologii v dimensi 1. Centrálním pojmem zde je první kohomologická množina Grothendieckovy topologie s koeficienty ve svazku (obecně neabelovských) grup. Je možno říct, že výklad v této kapitole je celkem standardní, a že se v hlavní linii neodlišuje od klasického nekategorického pojetí. První kohomologická množina je zde definována pomocí pojmu zobecňujícího pojem hlavního fibrovaného prostoru.

Kohomologie v dimensi 2 se studují potom ve čtvrté a páté kapitole. Oproti kohomologiím v dimensi 1 je zde autorův přístup nový. Přesun z klasického pojetí do teorie kategorií a zavedení nového pojmu „gerbe", (který je ústředním pojmem výkladu) zjednodušuje teorii a činí ji přehlednější. Uveďme zde pro orientaci, že definici a základní vlastnosti neabelovských kohomologií v dimensi 2 nalezne čtenář v § 3 kapitoly 4. Za zmínku stojí též, že pro neabelovské kohomologie je možno zobecnit příslušnou část Lerayovy spektrální posloupnosti.

Závěrečné kapitoly 7 a 8 jsou věnovány aplikacím. První z nich aplikacím v algebraické geometrii, druhá pak aplikacím v teorii Grothendieckových topologií a v teorii rozšiřování grup.

Celkový dojem z knihy je velmi pěkný a je možno říct, že autor ji napsal srozumitelným a přehledným stylem. Tiskových chyb se nenalezne mnoho, zákonem schválnosti jsou ovšem někdy umístěny na velmi nepříjemných místech.

Jiří Vanžura, Praha

Edwin Hewitt, Kenneth A. Ross: ABSTRACT HARMONIC ANALYSIS. Volume II. Vydalo nakladatelství Springer jako 152. svazek serie Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Cena DM 140, stran X + 776. Berlin—Heidelberg—New York 1970.

První díl, vyšlý v roce 1963, obsahoval prvních šest kapitol (teorie topologických grup, teorie integrace na lokálně kompaktních prostorech a grupách, konvoluce a reprezentace, dualita LCA grup) a tři dodatky.

V tomto druhém dílu je cílem autorů, jak se praví v předmluvě, podat nejdůležitější části harmonické analýzy na kompaktních grupách a na LCA grupách. Zabývají se obecnými lokálně kompaktními grupami jen tam, kde je to zcela přirozené.

Dlouhá sedmá kapitola je věnována teorii reprezentací a dualitě kompaktních grup (Peterova-Weylova věta, podrobné studium duálního objektu kompaktní grupy, Tannaka-Krejnova věta o dualitě).

V osmé kapitole se studuje Fourierova transformace (L_2 a L_p teorie, positivně definitní funkce na lokálně kompaktních grupách, Bochnerova věta, Stoneova věta o unitárních reprezentacích LCA grup).

Další kapitoly jsou věnovány teoriím, které byly zatím monograficky méně zpracovány. V deváté kapitole je to teorie absolutně konvergentních Fourierových řad na kompaktních grupách, teorie multiplikátorů pro různé třídy Fourierových transformací na kompaktních grupách, lakunární Fourierovy transformace; centrálním výsledkem desáté kapitoly je Malliavinova věta o nemožnosti spektrální syntézy v nekompaktním případě. Konečně jedenáctá kapitola jedná nejprve o funkcích, pro něž v Hausdorffově-Youngově nerovnosti platí rovnost; poslední paragraf pak je věnován bodové sčítatelnosti Fourierových transformací.

Kniha končí dalšími dvěma dodatky (tenzorové součiny, různé výsledky z funkcionální analýzy) a drobnou opravou k prvnímu dílu.

Čtenáři tohoto impozantního díla shledají, že výklad je podrobný a pozoruhodně plynulý; zvláště je třeba upozornit na zajímavé poznámky k jednotlivým paragrafům, kde jsou komentovány práce z obsáhlého seznamu literatury.

Karel Karták, Praha

J. L. Lions, E. Magenes: NON-HOMOGENEOUS BOUNDARY VALUE PROBLEMS AND APPLICATIONS. Springer-Verlag; Berlin—Heidelberg—New York 1972. Díl I: XVI + + 358 stran, cena DM 78,—. Díl II: XII + 242 stran, cena DM 58,—.

Jako svazky 181 a 182 vycházejí ve známé žluté řadě první dva díly třídílné monografie (vydání třetího dílu se chystá v roce 1973). Překladem tohoto významného díla do angličtiny se jeho obsah zpřístupnil podstatně širšímu okruhu čtenářů (připomeňme, že *rusky* vyšel *první* díl v roce 1971). Překladatel se držel věrně francouzského originálu, o němž jsme referovali v tomto časopise ve 4. čísle ročníku *97* (1972), str. 421—422; autoři pouze opravili některé chyby a podstatněji doplnili seznam literatury.

Dodáno při korektuře: V roce 1973 vyšel anglicky i třetí díl monografie; dodejme proto pro úplnost, že tvoří svazek 183 žluté řady, má XII + 308 stran (a 1 obrázek) a stojí DM 78,—.

Alois Kufner, Praha

Elna B. McBride: OBTAINING GENERATING FUNCTIONS. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1971. VIII + 100 stran, cena 44,— DM.

Funkce $G(x_1, \ldots, x_p; t)$ se nazývá vytvořující funkcí soustavy funkcí $f_n(x_1, \ldots, x_p)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, existují-li konstanty c_n tak, že (formálně!) platí:

$$G(x_1, \ldots, x_p; t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n f_n(x_1, \ldots, x_p)\, t^n.$$

Autorka se v knížce zabývá především třemi metodami, umožňujícími k dané soustavě funkcí f_n

nalézt nějakou vytvořující funkci G: Metoda Rainvilleova je založena na přímé manipulaci s mocninnými řadami (kap. I), Weisnerova metoda využívá některých poznatků z teorie grup (kap. II a III) a Truesdellova metoda se hodí tam, kde lze funkce soustavy $\{f_n\}$ přetransformovat v soustavu $F(z, \alpha)$, pro jejíž funkce platí vztah typu $\partial F(z, \alpha)/\partial z = F(z, \alpha \pm 1)$ (kap. IV). V kap. V je pak pro úplnost uvedeno ještě několik dalších metod získání vytvořujících funkcí.

Vytvořující funkce známe především z teorie speciálních funkcí a ortogonálních polynomů. Na těchto polynomech také autorka své metody hojně ilustruje a hlavně jimi se zabývá: tak např. v kap. II je uvedeno šest vytvořujících funkcí pro soustavu Laguerreových polynomů.

Výklad je celkem elementární a zabývá se ve valné většině zcela konkrétními případy; s trochou nadsázky lze říci, že obsahem knihy je řada nepříliš obtížných cvičení. Nelze ovšem zapomenout, že vytvořující funkce mají značné užití především v teorii speciálních funkcí (umožňují např. nalézt rekurenční vztahy mezi funkcemi soustavy $\{f_n\}$, a to i vztahy diferenciální, pomáhají při výpočtech různých integrálů apod.), a také je třeba zdůraznit, že čtenář najde v knížce celou řadu velmi užitečných a zajímavých vztahů, které se případně mohou hodit i jinde. Přesto však celkový pohled na publikaci vyvolává spíše otázku, zda jde o téma, které je natolik nosné a uzavřené, aby stálo za to zpracovat je jako 21. svazek edice *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Srovnání s některými jinými svazky této edice spíše naznačuje, že to bylo předčasné.

Alois Kufner, Praha

DIE HILBERTSCHEN PROBLEME. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1971. 302 strany.

Na mezinárodním matematickém kongresu v Paříži v srpnu roku 1900 formuloval David Hilbert 23 problémů, které považoval za klíčové problémy dalšího rozvoje matematiky. Tehdy to byla prognóza; v průběhu desítiletí se však ukázalo, že to, co Hilbert vyslovil, představovalo velmi reálný program.

Hilbertova řeč (a konečně celá Hilbertova tvorba vůbec) výrazně ovlivnila matematiku 20. století, ze slov „Hilbertův problém" se stal *terminus technicus* a jeho přednáška je realitou nejen *matematickou*, ale i *historickou*. Myšlenka podívat se na Hilbertovy úvahy z odstupu téměř sedmdesáti let a konfrontovat je se současným stavem matematiky je tedy velmi lákavá. Uskutečnění této myšlenky se ujalo moskevské nakladatelství „Nauka", které v roce 1969 vydalo pod redakcí P. S. Aleksandrova sborník „Проблемы Гильберта". Vedle úvodního slova redaktora sborníku je zde uveden autentický text Hilbertovy přednášky a pak následují komentáře k jednotlivým problémům, jichž se ujalo 16 předních sovětských matematiků: A. S. Jesenin-Vol'pin, V. G. Boltjanskij, I. M. Jaglom, E. G. Skljarenko, B. V. Gnedenko, A. O. Gel'fond, J. V. Linnik, D. K. Faddejev, J. I. Chmelevskij, J. I. Manin, A. G. Vituškin, O. A. Olejniková, B. N. Delone, A. G. Sigalov. B. V. Šabat a L. E. El'sgol'c; jedinou výjimku tvoří dvacátý prvý problém, kde bylo jako komentáře použito článku H. Röhrla, uveřejněného v roce 1957 v časopise *Mathematische Annalen*.

Posuzovaná kniha je německým překladem tohoto sborníku; je doplněna ještě dalším úvodem, v němž je podán stručný přehled o životě a díle Davida Hilberta.

Autorský kolektiv sborníku je tedy velmi široký; už z toho plyne, že charakter komentářů je poněkud nehomogenní, že některé z nich lze číst bez velkých předběžných znalostí, zatím co jiné předpokládají už dosti zasvěceného čtenáře. Bezpochyby se však jedná o práci, která skládá hold jedné z nejvýznamnějších postav světové matematiky a v níž je historické ocenění této osobnosti spojeno s přístupem k současnému stavu bádání. V tomto ideálním sjednocení dvou velmi rozdílných aspektů vidím hlavní cenu sborníku, nemluvě už o tom, že mladším generacím se naskýtá možnost seznámit se přímo s fakty, která se stala historií matematiky.

(Je snad na místě připomenout, že časopis „Pokroky matematiky, fyziky a astronomie" začal v poslední době otiskovat seriál podobných komentářů k jednotlivým Hilbertovým problémům z pera domácích autorů.)

Alois Kufner, Praha

J. K. Percus: COMBINATORIAL METHODS, Applied Mathematical Sciences 4, Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin 1971, stran 194, obrázků 58, cena 24 DM.

Tato kniha vznikla z přednášek o kombinatorických metodách, které autor konal v Courantově ústavě na newyorské universitě v období 1967—68. Obsah přednášek byl ovlivněn výběrem studentů, o nichž se v předmluvě říká, že měli nestejnorodé zaměření (byli to matematikové, fyzikové a chemikové). Knížka je rozvržena do dvou kapitol, z nichž první má název Counting and enumeration on a set a druhá Counting and enumeration on a regular lattice. Povězme si nejprve trochu o obsahu kapitoly první.

V úvodu se zavádějí vytvořující funkce a řeší se několik jednoduchých příkladů. Zvláště je rozebrán problém Fibonacciových čísel, pro něž se odvodí explicitní vzorec. Pak následuje odstavec o principu inkluze a exkluze s několika příklady (Eulerova funkce v číselné teorii, permutace, které mění každý prvek a známá úloha o n manželských párech sedících kolem kulatého stolu tak, že se muži a ženy střídají a žádný muž nesedí vedle své manželky). O pár stránek dále se ukazuje užití permanentů v kombinatorických úlohách a odvozuje se Mac Mahonova věta o vyjádření permanentu jako koeficientu vhodné mocninné řady. V jednom paragrafu se diskutuje známá úloha o rozmístění daného počtu předmětů do daného počtu tříd. Vznikají čtyři typy úlohy podle toho, zda předměty resp. třídy jsou rozlišitelné nebo nikoliv. Jeden z těchto případů je triviální, zbývající tři mají své ustálené názvy (composition, decomposition, partition) a jsou zde řešeny. Pak se obrací pozornost k Ramseyově větě, o níž už existuje obsáhlá literatura. Je tu i malá tabulka dnes známých Ramseyových čísel, která si však zřejmě nečiní nároků na úplnost. Když takto s námi čtenář prošel asi čtvrtinu knihy, setká se poprvé s pojmem graf. Přesná definice tu není uvedena, autor se spíše opírá o názor a odvolává se na instruktivní obrázek. Takovou povahu má i zavádění dalších pojmů (cesta, kružnice, Cayleyho a Husimiho strom, artikulace atd.). Při definici cesty a kružnice (path, cycle) není např. jasné, zda posloupnost uzlů musí být prostá či nikoliv. Nezvyklý je název hvězda (star) pro to, čemu se obvykle říká blok (F. Harary) nebo starším názvem neseparabilní graf (H. Whitney). Praví se, že hvězda je graf bez artikulací, ale zřejmě se myslí graf souvislý. O grafech se odvozují některé enumerační vzorce (počet souvislých grafů s n očíslovanými uzly a k hranami, Cayleyho vzorec s hodnotou n^{n-2}) a probírá se Pólyova věta. V příkladech na tuto větu se autor zabývá zjišťováním počtu všech isomerů $C_nH_{2n+1}OH$ a několik nerozřešených úloh zůstává jako cvičení pro čtenáře.

Druhá kapitola s názvem už výše zmíněným se rozpadá opět na několik částí. Začíná se náhodnými procházkami po mřížových bodech a řeší se např. tato úloha: Mají-li všechny kroky od mřížového bodu k jeho sousedům stejnou pravděpodobnost, jaká je pravděpodobnost, že se po n krocích dostaneme zpět do počátku? Ve speciálních odstavcích se probírá jednorozměrný a dvojrozměrný případ a výklad se ilustruje např. tzv. hlasovacím problémem. Na dalších stránkách jsou aplikace přírodovědné a tato část knihy ukazuje zjevně, že vznikla z přednášek pro posluchače různých profesí, jak se o tom mluvilo v úvodu. Řeší se tu např. tzv. dimer problem, v němž jde o model kapaliny s dvojatomovými molekulami. V problému entropie dvojrozměrného ledu jde o to, kolika způsoby lze zorientovat dvojrozměrnou mříž, aby byla splněna jistá podmínka vzatá z praxe (ice condition). Není třeba připomínat, že látka se tu nepodává systémem definice — věta — důkaz, ale jde o volný výklad známý z fyzikálních a přírodovědných pojednání.

Percusova kniha leží na pomezí matematiky a aplikovaných věd a okruh jejích čtenářů bude jistě pestrý. Není tištěna klasickým způsobem, nýbrž fotografována přímo z rukopisu. Na titulním listě se praví, že dílo má 58 obrázků, ale mám dojem, že si autor trochu usnadňuje práci. Řada ilustrací jsou jen banální schémata a na druhé straně čtenář někdy postrádá obrázek u složitějších situací. Seznam literatury není uveden, ale časopisecké prameny jsou citovány průběžně v textu.

Jiří Sedláček, Praha

Erik M. Alfsen: COMPACT CONVEX SETS AND BOUNDARY INTEGRALS, Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1971, 210 str.

Kniha je věnována studiu konvexních kompaktů v topologických lineárních prostorech, které zaznamenalo pozoruhodný rozmach v posledním desetiletí. Všimněme si některých typických výsledků, které jsou v knize vyloženy. Připomeňme, že (Radonovým) nábojem na kompaktním Hausdorffově prostoru T se rozumí spojitý lineární funkcionál na prostoru $C_R(T)$ všech spojitých reálných funkcí normovaném pomocí maxima, tj. prvek prostoru $C_R(T)^*$ duálního k $C_R(T)$. Každému takovému náboji $\mu \in C_R(T)$ odpovídá vzájemně jednoznačně Baireův náboj ($= \sigma$-aditivní množinová funkce na σ-algebře $B_0(T)$ všech baireovských podmnožin prostoru T), který lze jednoznačně rozšířit na regulární Borelův náboj, jenž se rovněž značí symbolem μ. Třída všech regulárních borelovských nábojů na T se značí symbolem $M_R(T)$, $M_R^+(T)$ je třída všech nezáporných nábojů ($=$ měr) z $M_R(T)$. Je-li E lokálně konvexní Hausdorffův topologický lineární prostor a $\mu \in M_R(T)$, pak zobrazení $q : T \to E$ se nazývá (slabě) integrovatelným s integrálem $y \in E$, jestliže pro každý funkcionál $p \in E^*$ platí $p(y) = \int p \circ q \, d\mu$ (přičemž $p \circ q$ značí komposici q a p); $y = \int q(x) \, d\mu(x)$ se pak nazývá (slabým) integrálem q podle μ. Jestliže μ je míra na konvexním kompaktu $K \subset E$, $\mu(K) > 0$, pak těžištěm μ se rozumí prvek $x_\mu = \mu(K)^{-1} \int x \, d\mu(x)$ (jenž padne do K a je dobře definován díky tomu, že identické zobrazení $K \to E$ je slabě integrovatelné). G. Choquetovi patří následující věta o těžišti:

Je-li f afinní reálná funkce 1. Baireovy třídy na K, pak f je omezená a pro každou pravděpodobnostní míru $\mu \in M_R^+(K)$ platí $f(x_\mu) = \int f \, d\mu$; tato formule však nemusí platit pro omezené afinní funkce 2. Baireovy třídy.

Důležitou roli v řadě vyšetřování hraje Choquetovo (částečné) uspořádání v $M_R(K)$. Značí-li $P(K)$ kužel všech spojitých konvexních funkcí na K, pak toto uspořádání je indukováno duálním kuželem $P(K)^* = \{\mu \in M_R(K);\ \mu(f) \geqq 0 \text{ pro všechna } f \in P(K)\}$; pro $\mu_1, \mu_2 \in M_R(K)$ je tedy $\mu_1 \prec \mu_2$, právě když $\mu_1(f) \leqq \mu_2(f)$ pro každou funkci $f \in P(K)$. (Poznamenejme, že antisymetrie relace $\prec$ plyne z hustoty $P(K) - P(K)$ v $C_R(K)$. Nechť $M_1^+(K) = \{\mu \in M_R^+(K);\ \mu(K) = 1\}$ je třída všech pravděpodobnostních měr na K a $M_{1x}^+(K) = \{\mu \in M_1^+(K);\ x_\mu = x\}$ je třída těch měr z $M_1^+(K)$, které mají za těžiště $x \in K$. Jestliže $\mu_1, \mu_2 \in M_1^+(K)$ a $\mu_1 \prec \mu_2$, pak míry μ_1, μ_2 mají společné těžiště $x_{\mu_1} = x_{\mu_2}$ a lze si představit, že μ_2 je ve srovnání s μ_1 „více rozptýlena od x_{μ_1} směrem k extremální hranici konvexního kompaktu K“. Přesnějším vyjádřením této představy je následující Cartierova věta:

Je-li K metrisovatelný konvexní kompakt a $\mu_1, \mu_2 \in M_1^+(K)$, pak $\mu_1 \prec \mu_2$ právě když existuje zobrazení $x \mapsto \sigma_x \in M_{1x}^+(K)$ definované μ — skoro všude na K takové, že pro každou funkci $f \in C_R(K)$ je funkce $x \mapsto \sigma_x(f)$ integrovatelná vzhledem k μ_1 a $\mu_2(f) = \int \sigma_x(f) \, d\mu_1(x)$.

Taková míra μ, jež je maximálním prvkem $M_R^+(K)$ vzhledem k relaci $\prec$, se nazývá hraniční. Je-li $\mu \in M_R^+(K)$ hraniční, pak pro každou uzavřenou G_δ-množinu $C \subset K$, jež je disjunktní s extremální hranicí $\partial_e K$ ($=$ množina všech vrcholů konvexního kompaktu K), platí $\mu(C) = 0$; speciálně nosič μ je obsažen v $\overline{\partial_e K}$ (pruh značí uzávěr). Je-li K metrisovatelný, pak $\partial_l K$ je typu G_δ a $\mu \in M_R^+(K)$ je hraniční, právě když $\mu(K \setminus \partial_e K) = 0$. V obecném případě platí následující důležitá věta ukazující, že každý bod z K lze representovat hraniční mírou (Choquet - Bishop - de Leew):

Ke každému bodu x konvexního kompaktu K existuje hraniční míra $\mu \in M_{1x}^+(K)$. Ideu Choquetova uspořádání měr lze ovšem aplikovat i v obecnějších situacích, kdy roli konvexního kompaktu $K \subset E$ přebírá kompaktní topologický prostor X a roli kužele $P(K)$ jistý kužel S funkcí na X. Předpokládejme, že X je kompaktní topologický prostor a S je kužel shora polospojitých funkcí $< +\infty$ na X, jenž obsahuje konstanty a odděluje body z X. Pak lze na $M_R(X)$ zavést reflexivní a transitivní relaci $\prec_S$ předpisem

$$\mu_1 \prec_S \mu_2 \Leftrightarrow \mu_1(f) \leqq \mu_2(f) \ \forall f \in S .$$

Tato relace je (částečným) uspořádáním (tj. je antisymetrická), jestliže lineární obal třídy $S \cap$

$\cap C_R(X)$ je hustý v $C_R(X)$. Bod $x \in X$ se nazývá S-Choquetovým bodem, jestliže Diracova míra ε_x je maximálním prvkem v $M_R^+(X)$ vzhledem k relaci $\prec_S$; množina $\partial_S X$ všech S-Choquetových bodů se nazývá Choquetovou hranicí prostoru X. Neprázdnost Choquetovy hranice je důsledkem následujícího Bauerova principu maxima:

Ke každé funkci $f \in S$ existuje takový bod $x \in \partial_S X$, že $f(x) = \sup \{f(y); y \in X\}$.

Předpokládejme nyní stále, že $S \subset C_R$. Potom $\partial_S X$ je (v relativní topologii) Baireův prostor (Choquet, Edwards). Poznamenejme, že $\partial_S X = \partial_e K$ ve výše uvažované situaci, kdy $X = K$ je konvexní kompakt v lokálně konvexním lineárním prostoru E a $S = P(K)$. Věta o representaci bodů pomocí měr na Choquetově hranici vyplývá z následujícího výsledku:

Ke každému $x \in X$ existuje míra μ definovaná na $\partial_S X \cap B_0(X)$, pro niž $\mu(\partial_S X) = 1$ a $f(x) \leqq \leqq \int_{\partial_S X} f \, d\mu$ pro všechny funkce $f \in S$.

Otázky související s jednoznačností representujících měr jsou soustředěny do druhé části knihy, v níž je studována geometrická struktura konvexních kompaktů. Předpokládejme, že K je konvexní kompakt v lokálně konvexním prostoru E takový, že E splývá s lineárním obalem K a K je částí jisté nadroviny v E neprocházející počátkem. Pak každý bod $x \in E$ určuje lineární funkcionál q_x na prostoru $A(K) \subset C_R(K)$ všech spojitých afinních funkcí na K definovaný předpisem $q_x(a) = \lambda\, a(y) - \mu\, a(z)$ $(a \in A(K))$, kdykoli $x = \lambda y - \mu z$, $y, z \in K$, $\lambda, \mu \geqq 0$. Jestliže $x \mapsto q_x$ je topologický isomorfismus E na (slabě topologisovaný) duál $A(K)^*_W$ prostoru $A(K)$, pak řekneme, že K je regulárně vnořen do E.

Abstraktním konvexním kompaktem se rozumí dvojice (X, A), kde X je Hausdorffův kompaktní topologický prostor a A je uzavřený podprostor v $C_R(X)$ obsahující konstanty, oddělující body z X a takový, že každý stav p na A (= nezáporný lineární funkcionál nabývající hodnoty 1 na funkci identicky rovné jedné) je určen jistým bodem $x_p \in X$ (tj. $p(a) = a(x_p)$ $\forall a \in A$). Každý abstraktní konvexní kompakt lze regulárně vnořit do lokálně konvexního Hausdorffova prostoru E v tom smyslu, že existuje homeomorfismus φ kompaktu X na konvexní kompakt $\varphi(X)$ regulárně vnořený do lokálně konvexního Hausdorffova prostoru E takový, že zobrazení $\varphi^* : a \mapsto a \circ \varphi$ je isomorfismus $A(\varphi(X))$ na A. Navíc je takové regulární vnoření až na lineární homeomorfismy jednoznačně určeno. Protože každý „konkrétní" konvexní kompakt v lokálně konvexním Hausdorffově prostoru lze chápat jako abstraktní konvexní kompakt $(K, A(K))$, je možno při studiu vnitřních vlastností konvexních kompaktů vždy předpokládat, že jde o kompakty regulárně vnořené do jistého lokálně konvexního Hausdorffova prostoru E. Nechť K je takový konvexní kompakt a buď K kužel v E s vrcholem O a basí K. Je-li E svazem při (částečném) uspořádání určeném kuželem K, pak K se nazývá (Choquetovým) simplexem. Souvislost tohoto pojmu s representací bodů hraničními mírami objasňuje Choquetova věta: Konvexní kompakt K je právě tehdy simplexem, když každý bod z K je těžištěm jediné hraniční pravděpodobnostní míry.

Takový simplex K, jehož extremální hranice $\partial_e K$ je uzavřená, se nazývá Bauerovým simplexem. Uveďme některé charakteristické vlastnosti Bauerových simplexů K:

Každý bod z K je těžištěm jediné pravděpodobnostní míry s nosičem v $\partial_e K$. $A(K)$ je svazem v přirozeném uspořádání funkcí. Každou spojitou reálnou funkci na $\partial_e K$ lze rozšířit na funkci z $A(K)$.

V druhé kapitole monografie je vyložena řada zajímavých vlastností simplexů. Dále se studují stěny konvexních kompaktů v souvislosti s ideály v $A(K)$, stěnová topologie na $\partial_e K$ a direktní konvexní rozklady.

Je možno jen litovat, že aplikace na problémy konkrétní analýzy (např. na Dirichletův problém v teorii potenciálu) zůstaly mimo rámec knihy; v tomto směru odkazuje autor čtenáře na časopiseckou literaturu. Důkazy jsou zpracovány srozumitelně a elegantně, výklad je podán v moderním duchu a doprovázen rozsáhlou bibliografií s příslušným komentářem. Monografie si zaslouží pozornosti čtenářů seznámených s elementy funkcionální analýzy a teorie integrálu.

Josef Král, Praha

F. G. Frobenius: GESAMMELTE ABHANDLUNGEN I—III. (Herausgegeben von J. P. Serré), Springer-Verlag, Berlin- Heidelberg—New York 1968, str. 650, 733, 740, cena DM 136, —.

Sebrané spisy F. G. Frobenia (1849—1917) byly pro toto vydání rozděleny do tří dílů. S několika vyjímkami jsou práce v podstatě chronologicky řazené a jsou rozděleny takto: prvý díl (práce 1—21) zahrnuje období 1870—80, druhý díl (práce 22—52) období 1880—1896 a poslední třetí díl (práce 53—107) pokrývá období 1896—1917.

Pochopitelně je nad síly recensenta podat odpovídající rozbor díla tohoto známého matematika, jehož práce účinným způsobem zasáhly do několika odvětví matematiky; omezím se proto na stručný přehled. Recensovaná publikace je zařazena do knihovny MFF UK, Sokolovská 83, Praha 8 a zájemci si mohou Frobeniovy práce ze svého oboru prostudovat.

Rozdělíme-li Frobeniovy práce alespoň zhruba podle oborů, můžeme nejvíce z nich (skoro čtyřicet) zařadit do algebry. Zde převažují práce z teorie grup a teorie matic. Práce č. 74 bude snad nejvíce známa; obsahuje totiž známou podmínku řešitelnosti soustavy lineárních nehomogenních rovnic. Zhruba po dvaceti pracích lze přiřadit matematické analýze (převažuje teorie theta funkcí a funkcí eliptických) a teorii čísel (převažuje teorie kvadratických forem). Oddělíme-li asi deset prací, které jsou věnovány diferenciálním rovnicím, zůstávají jednak ojedinělé publikace z jiných oborů (geometrie, krystalografie), jednak šest prací (spíše příležitostných článků), věnovaných výročím známých matematiků, jejich úmrtí atp. (Euler, Mertens, Weber, Dedekind, Kronecker).

Na druhé straně je zajímavé sledovat, jak se měnil Frobeniův zájem, pokud lze v tomto směru z publikací usuzovat. Do roku 1879 je to teorie funkcí a diferenciální rovnice. Zájem o diferenciální rovnice tím končí, v teorii funkcí Frobenius pokračuje, ale začíná též publikovat práce z teorie kvadratických forem a algebry. Publikace z mat. analýzy ustávají v r. 1889. Zájem o algebru a kvadratické formy trvá a v posledním desítiletí svého života se specializuje na teorii těles a Fermatův problém. Časově je také zajímavé, že nejplodnější roky byly čtyři 1896 a 1911 (po šesti pracích, 1880 a 1903 (po pěti pracích).

Dodejme ještě, že v prvním díle je zařazena Frobeniova fotografie a vzpomínka C. L. Siegela na Frobeniova léta v Berlíně (1915—17). Na závěr je zařazen úplný seznam jeho prací.

Břetislav Novák, Praha

J. C. Oxtoby: MASS UND KATEGORIE, Hochschultexte, sv. 3, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1971, str. 112, cena DM 16,—.

Recensovaná publikace je překlad anglického originálu a vychází v nové Springově edici „Hochschultexte", která má obsahovat v podstatě úvodní informaci z různých oborů matematiky. Autor sám vytyčuje dva okruhy problémů, kterým je knížka věnována: existenční důkazy v matematice prováděné na základě Baireovy věty a dualita mezi množinami nulové (Lebesgueovy) míry a množinami prvé kategorie.

Skoro polovina kapitol celé knížky je věnována vybudování potřebného aparátu teorie míry, metrických a částečně i topologických prostorů. Zbytek obsahuje řadu tématických celků, z nichž vybereme nejdůležitější.

Druhá kapitola spadá vlastně do teorie čísel, přesněji do teorie diofantických aproximací. Autor zavádí pojem Liouvilleova čísla (tj. takové iracionální číslo α, že nerovnost $|q\alpha - p| < q^{-n}$ má pro každé přirozené n řešení v celých $p, q, q > 0$), dokazuje transcendentnost těchto čísel a dále, že množina Liouvilleových čísel má míru nula (dokonce nulovou Hausdorffovu dimensi). Na druhé straně však Liouvilleova čísla tvoří „residuel", tj. jejich doplněk je množina 1. kategorie.

Zajímavý a skoro běžně neznámý je obsah šesté kapitoly: Banach-Mazurova hra. Buď dán uzavřený interval I_0. Hráč (A) obdrží podmnožinu $A \subset I_0$, hráč (B) její doplněk $B = I_0 - A$.

Vlastní hra je vlastně postupné definování posloupnosti uzavřených intervalů $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ tak, že hráč (A) určuje postupně „liché" intervaly, hráč (B) „sudé": Obsahuje-li průnik $\cap I_n$ alespoň jeden bod množiny A, vítězí hráč (A); v opačném případě hráč (B). Přirozeně vzniká otázka, jak dalece volba množiny A určuje vítěze. Platí tato zajímavá věta: „Vítězná" strategie pro hráče (B) existuje, právě když množina A je 1. kategorie. Za předpokladu, že množina A má Baireovu vlastnost, lze dokonce tvrdit, že je-li A první kategorie, má vítěznou strategii hráč (B), jinak hráč (A).

Jedenáctá kapitola obsahuje známý Banachův důkaz existence spojité funkce, která nemá konečnou derivaci v žádném bodě a obvyklé poznámky o Bezikovičově funkci a Saksově větě s tím související. V čtyřstránkové kapitole třinácté jsou studovány automorfismy jednotkového intervalu $I = \langle 0, 1 \rangle$, tj. homeomorfní zobrazení I na I. Je-li H množina všech těchto automorfismů, tvoří H množinu typu G_δ v $C = C(0, 1)$; je to tedy topologicky úplný prostor (příslušná metrika, při níž je H úplný metrický prostor je např. $\varrho(f, h) + \varrho(f^{-1}, h^{-1})$, kde ϱ je metrika v C). Zajímavé jsou nyní tyto věty: Je-li dána množina $A \subset I$ 1. kategorie, pak pro všechna $h \in H$ až na množinu 1. kategorie (v H) je $h(A)$ nulová množina. Dále: Je-li f omezená funkce na I s množinou bodu nespojitosti U, pak funkce $f(h)$ je Reimannovsky integrovatelná pro všechna $h \in H$, právě když U je spočetná a pro alespoň jedno $h \in H$, právě když U je 1. kategorie. Konečně je zajímavé, že množina $A \subset I$ je 1. kategorie, právě když existuje $h \in H$ tak, že $h(A)$ je částí nulové množiny typu F_σ.

Čtrnáctá a patnáctá kapitola vyšetřují, jak se přenášejí jisté vlastnosti množiny $E \subset P \times Q$ na množiny „řezů" $E_x = \{y \in Q; [x, y] \in E\}$, a to jak ve smyslu míry, tak i ve smyslu kategorií (Fubiniova věta a věta Kuratowského-Ulamova).

Kapitoly sedmnáct a osmnáct obsahují studium posloupnosti $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$, kde T je zobrazení jistých vlastností. Zejména je dokázána Poincarého věta (je-li T homeomorfní zobrazení omezené otevřené množiny $G \subset E_r$ na sebe, které zachovává míru, potom až na nulovou množinu 1. kategorie všechny body $x \in G$ jsou rekurentní vzhledem k T, tj. pro každé okolí U bodu x je množina $U \cap \{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ nekonečná) a je (metodou kategorií) ukázaná existence automorfismu T jednotkové krychle $K \subset E_r$ na sebe tak, že pro vhodné $x \in K$ je množina $\{T^n x\}_{n=-\infty}^{\infty}$ hustá v K (dokonce toto platí pro všechny body $x \in K$ s vyjímkou množiny prvé kategorie).

Závěr knihy je věnován podrobnějšímu studiu jisté duality mezi nulovými množinami a množinami 1. kategorie. Již v předchozích kapitolách byla tato podobnost na konkrétních případech zdůrazněna. V r. 1934 ukázal Sierpiński, že za předpokladu platnosti hypotézy kontinua existuje prosté zobrazení E_1 na sebe takové, že $f(E)$ má nulovou míru, právě když E je prvé kategorie. Zobecnění a zpřesnění pochází od Erdöse z r. 1943: Za předpokladu platnosti hypotézy kontinua existuje prosté zobrazení E_1 na sebe takové, že $f = f^{-1}$ a $f(E)$ má nulovou míru (je prvé kategorie), právě když E je prvé kategorie (má nulovou míru). Z této věty pochopitelně plyne dualita výroků o množinách nulové míry a množinách prvé kategorie, pokud ovšem použijeme pouze pojmů „čisté" teorie množin. Pro příklad uveďme jen tyto dvě věty: Každá množina $M \subset E_1$ druhé kategorie obsahuje množinu N, mohutnosti kontinua a takovou, že každá její nespočetná část je 2. kategorie (Luzin 1914). Každá množina $M \subset E_1$ kladné vnější míry obsahuje množinu N, mohutnosti kontinua a takovou, že každá její nespočetná část má kladnou vnější míru (Sierpiński 1924). Kniha obsahuje pochopitelně příkladů celou řadu, dokonce princip duality je dále rozšířen na řadě příkladů pro pojmy Baireova vlastnost a měřitelnost.

Celkem možno shrnout, že tato pečlivě psaná knížka obsahuje nestandardní a zajímavý materiál a lze ji doporučit každému zájemci. Snad lze jen litovat, že útlý rozsah knížky nedovolil autorovi rozsáhlejší přehled využití Baireovy věty v matematice; řada těchto zajímavých výsledků je jen roztroušena v časopisech a mnohdy i zapomenuta.

Břetislav Novák, Praha

Claude Dellacherie: CAPACITÉS ET PROCESSUS STOCHASTIQUES. Vydalo nakladatelství Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, jako 67. svazek knižnice Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete v roce 1972. Stran 155. Cena DM 44,—.

Kniha patří do odvětví teorie pravděpodobnosti, které vzniklo z potřeby logického ospravedlnění intuitivních úvah a nahrazuje pravděpodobnostní intuici schopností představovati si složité množinové konstrukce. Doobova kniha „*Stochastic Processes*", vyšlá před dvaceti léty poprvé pojednávala systematicky o náhodových procesech z hlediska teorie míry. Vývoj teorie náhodových procesů, následující po vyjití této knihy, uspokojivě v rámci teorie míry rovněž vyřešil z názoru zřejmý předpoklad, že markovovská resp. martingalová vlastnost zůstává zachována vzhledem k náhodným časům, nezávislým na budoucnosti. Takové časy jsou stručněji nazývány markovovskými a v teorii martingalů to mohou být doby, kdy se hráč rozhodne k účasti ve hře na základě předchozích výsledků. Nutnost zabývati se podrobně markovovskými časy byla zdůrazněna aplikacemi Markovových procesů v teorii parciálních diferenciálních rovnic a v teorii potenciálu, započatými také J. L. Doobem. V těchto aplikacích jsou markovovské časy důležitým nástrojem a bylo proto třeba mít jejich teorii zpracovánu na úrovni exaktnosti srovnatelné s oblastmi, v nichž jsou aplikovány. Důležitá souborná práce Huntova „*Markovovy procesy a potenciály*" z roku 1957 byla na programu pařížského semináře profesorů M. Brelota, G. Choqueta a J. Denyho v roce 1960—61. Hlavním přednášejícím byl profesor P. A. Meyer, pozdější tvůrce dnes již proslulého semináře o Markovových procesech na universitě ve Štrasburku. Ze štrasburského semináře také pochází recensovaná kniha.

Kniha je rozdělena na dvě části. Část A s názvem Teorie aproximace zdola má dvě kapitoly. Základním obsahem první je Choquetova věta o kapacitách. Pozoruhodný důkaz nepoužívá teorie analytických množin. Druhá pojednává o borelovských množinách, jež jsou sjednocením nespočetného systému disjunktních množin nenulové kapacity. Využívá se v ní teorie kapacit k zobecnění takových tvrzení jako je Alexandrovova-Hausdorffova věta říkající, že nespočetná množina v kompaktním metrickém prostoru obsahuje nespočetnou kompaktní podmnožinu.

Část B má název Obecná teorie procesů. Vychází se z prostoru s pravděpodobnostní mírou $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, na kterém je definován rostoucí systém σ-algeber $\mathscr{F}_t$, $t \in R^+$. $\mathscr{F}_t$ obsahuje náhodné jevy, o nichž se v čase t určitě ví, zda nastaly či nenastaly. Kapitola třetí je věnována markovovským časům. Tak se nazývá nezáporná náhodná veličina T, platí-li $\{T \leqq t\} \in \mathscr{F}_t$, $t \in R^+$. Zavádí se pojem předvídatelného a dosažitelného m. času, definuje se σ-algebra $\mathscr{F}_T$. S pomocí Choquetovy věty se řeší důležité otázky měřitelnosti, související s m. časy. Čtvrtá kapitola se týká podmnožin kartézského součinu $(R^+, \mathscr{B}) \otimes (\Omega, \mathscr{F})$. Řezy $A(\omega)$ množiny $A \in \mathscr{B} \otimes \mathscr{F}$ lze interpretovati jako náhodnou množinu časových okamžiků. Autor se soustřeďuje na množiny, jejichž průběh lze vhodně postihnout m. časy. (Např. počátek množiny $\inf A(\omega)$.) Zavádí σ-algebry, generované náhodnými intervaly $[S, T]$, kde S a T jsou m. časy. Podle toho, zda tyto časy jsou libovolné, dosažitelné či předvídatelné, vznikají σ-algebry množin dobře měřitelných, dosažitelných a předvídatelných. Vyšetřují se vlastnosti těchto σ-algeber zejména ve vztahu k náhodovým procesům a k integraci vzhledem k monotónním procesům. Kapitola pátá pojednává o supermartingalech a o projekcích procesů do prostorů funkcí, měřitelných vůči výše uvedeným σ-algebrám. Poslední kapitola je věnována některým speciálním vlastnostem náhodných množin. Jako příklad uveďme tvrzení: Je-li A dobře měřitelná a $A(\omega)$ spočetná pro každé ω, potom $A(\omega)$ je sjednocením posloupnosti grafů m. časů. Jsou studovány rovněž některé topologické vlastnosti náhodných množin.

K četbě knihy je zapotřebí zběhlost v teorii míry, k pochopení motivace výsledků jistý přehled o pracích francouzské školy teorie pravděpodobnosti, zejména Meyerova štrasburského semináře. Kniha obsahuje velké množství definic, které jsou však vhodně voleny, a jejich zapamatování je usnadněno sugestivními názvy (hoblování, dláždění, mosaika apod.) Jedná se o dílo skutečně pozoruhodné a, vezmeme-li v úvahu složitost předmětu, také elegantní.

Petr Mandl, Praha

S. Kobayashi: TRANSFORMATIONS GROUPS IN DIFFERENTIAL GEOMETRY. Ergebnisse d. Math. und ihrer Grenzgebiete, Bd. 70. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1972. Str. VI + 182, cena DM 52,—.

Obsah knihy je dán titulem. Jedním ze základních objektů matematického vyšetřování je zřejmě grupa automorfismů dané struktury. V diferenciální geometrii máme obvykle diferencovatelnou varietu a na ní určitou strukturu, ptáme se na to, jak vypadá grupa difeomorfismů, zachovávajících tuto strukturu. Např. nás zajímá, je-li tato grupa Lieovou grupou, jakou má maximální dimensi apod. Strukturou zde rozumíme ponejvíce G-strukturu; podle Kobayashiho nám dvě dali bohové (Riemannovu a komplexní), ostatní jsou produktem nižších lidských myslí. Tohoto (patrně rozumného) názoru se autor přidržuje hlavně v tom, že uvedeným dvěma strukturám věnuje hlavní pozornost.

V první kapitole si autor všímá automorfismů obecných G-struktur. Jsou uvedeny četné příklady G-struktur a jejich základní vlastnosti. Ukazuje se, že grupa automorfismů G-struktury, která je kompaktní eliptická nebo konečného řádu, je Lieova grupa. Velká pozornost je věnována symplektickým a kontaktním strukturám. Závěr kapitoly je věnován vztahům mezi G-strukturami, pseudogrupami a filtrovanými Lieovými algebrami, nejsou však uvedeny žádné věty, což je jistě nedostatek. Druhá kapitola se zabývá grupou $g(M)$ isometrií Riemannova prostoru M. Jsou nalezeny prostory s maximální možnou grupou, tj. $\dim g(M) = \frac{1}{2}n(n + 1)$, kde $n = \dim M$. Grupa $g(M)$ neobsahuje uzavřené podgrupy h, pro něž $\frac{1}{2}n(n - 1) + 1 < \dim h < \frac{1}{2}n(n + 1)$. Je nalezena struktura všech M, pro něž $g(M)$ obsahuje podgrupu h s $\dim h = \frac{1}{2}n(n - 1) + 1$. Další výsledky se týkají variet M, pro něž $g(M)$ je konečná (např. Ricciho forma je negativní). Velká pozornost je udělena pevným bodům isometrií resp. nulovým místům infinitesimálních isometrií. V třetí kapitole se studují automorfismy komplexních variet. Jsou udány typy variet, jejichž automorfismy tvoří Lieovu grupu (kompaktní, hyperbolické) resp. grupu konečnou (záporná první Chernova třída, kompaktní hyperbolické, nesingulární algebraické nadplochy v projektivním prostoru). Další paragrafy studují Lieovu algebru holomorfních vektorových polí Kählerovy variety. Poslední kapitola je konečně věnována grupám automorfismů prostorů s afinní, konformní a projektivní konexí.

Charakterisace knihy mi dělá značné potíže. Není to učebnice (někdy se předpokládá znalost dosti složitých věcí) ani monografie (výsledky nejsou zdaleka úplné). Snad je tedy kniha nejspíše „populárním" úvodem do velmi důležité partie diferenciální geometrie s podrobným soupisem literatury.

Alois Švec, Praha

N. Bourbaki: ELÉMENTS DE MATHÉMATIQUE, Fasc. XXXVII, GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE. Chap. II: Algèbres de Lie libres; chap. III: Groupes de Lie. Actualités scientifiques et industrielles 1349. Hermann, Paris 1972. Stran 320, cena neudána.

Druhá kapitola knihy navazuje bezprostředně na Bourbakiho algebru (Algèbre I, 1970). Obalující algebry Lieovy algebry byly již probrány v první kapitole (vydání z r. 1971), zde se z nich tvoří bigebra a studuje se jejich struktura. Dále jsou uvedeny základní vlastnosti volných algeber a jejich obalujících algeber. Závěrečné části jsou přípravou následující kapitoly a pojednávají o Hausdorffových řadách a jejich konvergenci. Třetí kapitola je věnována vlastní teorii Lieových grup nad tělesem reálných nebo komplexních čísel nebo nad komutativním ultrametrickým tělesem. Nejprve je uvedena obvyklá teorie (definice, podgrupy, morfismy, homogenní prostory, lokální definice). Lokální Lieově grupě se říká groupuscule, je uvedena i jejich teorie. K Lieově grupě je konstruována příslušná Lieova algebra, adjungovaná representace a Maurer-Cartanovy formy. V další části se k Lieově algebře konstruuje příslušná jednoduše souvislá Lieova grupa. Podrobně se studuje struktura množiny automorfismů Lieovy grupy.

Četba knihy vyžaduje neustálé konsultace s Bourbakiho Algebrou a Diferencovatelnými varietami a není tedy lehká. Velmi zajímavá jsou ovšem cvičení, která následují po obou kapitolách.

Alois Švec, Praha

Roman Sikorski: DIFERENCIÁLNÍ A INTEGRÁLNÍ POČET. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH. Academia, Praha 1973. Náklad 3500 výtisků. Cena vázaného výtisku 39,— Kčs. Podle druhého, změněného a doplněného, polského vydání z roku 1969 přeložil Doc. dr. Ilja Černý, CSc.

Převážná část recenzované knihy (její kapitoly IV—IX) jsou nevelkou modifikací přednášky z diferenciálního a integrálního počtu funkcí více proměnných, kterou autor konal na Varšavské universitě v roce 1963/64. Zbývající kapitoly jsou zařazeny pro úplnost a snadnější odkazy na tvrzení obsažená v těchto kapitolách.

Kniha, která je schválena jako příručka pro vysoké školy universitního směru, obsahuje předmluvu, informaci pro čtenáře, deset kapitol, seznam citované literatury, seznam symbolů, rejstřík a doslov.

Kapitola I (Základní množinové pojmy) začíná tak, jako začíná téměř každá kniha o základech matematické analýzy, tj. operacemi s množinami a pojmem zobrazení. Navíc je pojednáno o posloupnostech reálných čísel a jejich limitách. Se základními geometrickými a algebraickými pojmy (tj. např. bod, vektor, matice, determinant, lineární a multilineární formy, multiindexová matice, zobrazení) je čtenář seznámen v kapitole II. Vlastnosti metrických prostorů a zobrazení mezi takovými prostory jsou zkoumány v kapitole III. Kapitola IV pojednává o diferencování reálných funkcí více proměnných. Nejdříve se definuje derivace ve směru, pak derivace funkce (tj. gradient) a totální diferenciál. Dále se studují derivace vyšších řádů a jejich využití při hledání extrémů funkcí. Teorie zobrazení je název kapitoly páté, ve které se zavádějí pojmy z kapitoly IV — nyní však pro vektorové funkce. Dokazují se základní věty o diferencovatelných zobrazeních (např. věta o derivaci složeného zobrazení) a v § 4 (Řešení rovnic) se dokazuje věta o implicitních funkcích (tento světově používaný název však čtenářovi není prozrazen). Větou o lokálním difeomorfismu, definicí nadplochy a hledáním extrémů s vazbou (tzv. věta o Lagrangeových činitelích) končí tato kapitola. Teorie míry (kapitola VI) je vyložena na 31 stránce (kapitola obsahuje: množinové algebry, definice míry, rozklad intervalu, vnější Lebesgueova míra, měřitelné množiny, charakterizace měřitelných množin v eukleidovském prostoru). Domnívám se, že na Matematicko-fyzikální fakultě Karlovy university v přednáškách pro druhý ročník a v knize V. Jarníka *Integrální počet II* je teorii míry věnována podstatně větší pozornost. Abstraktní Lebesgueův integrál je vybudován a jeho základní vlastnosti (hlavně věty o limitním přechodu za integračním znamením) jsou dokázány v sedmé kapitole, další kapitola (VIII) pak pojednává o integrálu v eukleidovském prostoru (Fubiniova věta, věta o substituci, neurčitý a nevlastní integrál).

Pro české čtenáře je asi největším přínosem této knihy její devátá kapitola o integrálech přes nadplochy a tělesa. Tato problematika vychází (kromě učebního textu *Integrální počet II* autorů I. Černého a J. Maříka) zpracovaná v českém jazyce prvně. Celý výklad téměř stostránkové kapitoly o plošném integrálu končí důkazem věty Gaussovy-Ostrogradského pro dosti obecné množiny.

Poslední kapitola (X) obsahuje několik informací o diferenciálním počtu pro zobrazení v normovaných prostorech, Bettiho grupách, de Rhamově větě a diferencovatelných varietách (všechno pouze formou poznámek a bez důkazů).

Domnívám se, že důkazy některých vět jsou dosti stručné. Autor v úvodu píše, že se rozhodl pro drastický řez v symbolice (ve světové literatuře bylo již koncem padesátých let analogické označování v diferenciálním počtu používané). Na některých místech je revolučnost v označení přehnaná (např. determinant čtvercové matice A je označován $/A/$, vypisujeme-li prvky matice A, pak jsou čárky rovné a $|A|$ znamená absolutní hodnotu determinantu matice A). Zavést lim sup, lim inf a odtud teprve definovat limitu posloupnosti se mi z pedagogického hlediska nezdá vhodné. Kdyby byl definován diferenciál pro zobrazení mezi normovanými prostory (stačilo by konečné dimense), zjednodušila by se formulace některých vět kapitoly páté.

Překlad je proveden pečlivě. Měl bych pouze několik drobných připomínek a výhrad. Např. na str. 25, 10—11 řádek shora, se nedopatřením mluví o rovných zobrazeních, definice řady (na str. 29 nahoře) je mi zcela nesrozumitelná (a je několik možností, kde by mohla být chyba), termín zobecněná funkce používaný pro funkce nabývající i nekonečných hodnot koliduje s užívaným termínem pro distribuci. Čtenáři se předkládá celá řada nových pojmů. Proč se mu tedy zatěžuje paměť termínem verzor, místo použití výstižného termínu jednotkový vektor?

Typografická úroveň je na výši, v knize je celkem běžné množství nezávažných tiskových chyb. Pro lepší orientaci čtenáře by mohly být graficky odděleny důkazy od definic a vysvětlujícího textu. V knize se šetří závorkami a mám dojem, že např. formule na str. 32 by si nějakou závorku navíc zasluhovaly (jedná se o příručku pro posluchače vysokých škol!).

Kniha je vhodným doplňkem a dodatkem ke studiu Jarníkových knih *Diferenciální počet II* a *Integrální počet II*. Jistě je a bude na knižním trhu vítána (vždyť je to jediná kniha o diferenciálním a integrálním počtu pro studenty vysokých škol universitního směru, kterou je možno v současné době zakoupit), i když si myslím, že zvolený přístup i forma výkladu vyvolají v matematické obci mnoho diskusí. Vzejde-li však z těchto diskusí nějaký návrh na nový přístup k přednášce o plošném integrálu vhodné pro posluchače druhého ročníku MFF (méně náročný na čas a kvantum předběžných znalostí) či ukáže-li se, že vhodnější pro naše poměry je překlad některé z osvědčených knih s touto tematikou, bude to dalším kladem Sikorského knihy.

Svatopluk Fučík, Praha

Z. Pírko, J. Veit: LAPLACEOVA TRANSFORMACE. SNTL & Alfa, Praha & Bratislava 1972. 248 stran, 74 obrázků. Cena Kčs 22,—.

S podtitulem „Základy teorie a užití v elektrotechnice" vychází tato vysokoškolská učebnice, určená posluchačům a absolventům elektrotechnických fakult vysokých škol technických, již ve druhém vydání (první vyšlo v roce 1970). Jak vyplývá už z názvu, pojednává kniha především o Laplaceově transformaci (kap. I—X), kapitola XI je věnována Fourierově transformaci a kapitola XII transformaci $\mathscr{Z}$. Závěr tvoří přehled vzorců a tabulka (slovník) Laplaceových transformací důležitých (především racionálních) funkcí.

Druhé vydání je označeno jako „opravené"; zřejmě byly odstraněny některé drobné nepřesnosti obsažené ve vydání prvním, neboť vnější úpravou se obě vydání od sebe vůbec neliší (zběžným porovnáním lze zjistit, že místo střídavého $n \to \infty$ a $n \to +\infty$ se ve druhém vydání v limitách objevuje důsledně jen $n \to +\infty$). Snad by druhé vydání stálo alespoň za novou předmluvu (slova „v poslední době" mají v roce 1972 jiný smysl než v roce 1970) a za doplnění seznamu literatury (poslední citace je z roku 1967; čtenář by se měl alespoň dozvědět např. o Doetschovi).

Redakce

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

ZPRÁVY

K ŠESŤDESIATINÁM AKADEMIKA ŠTEFANA SCHWARZA

JÁN JAKUBÍK, Košice a MILAN KOLIBIAR, Bratislava

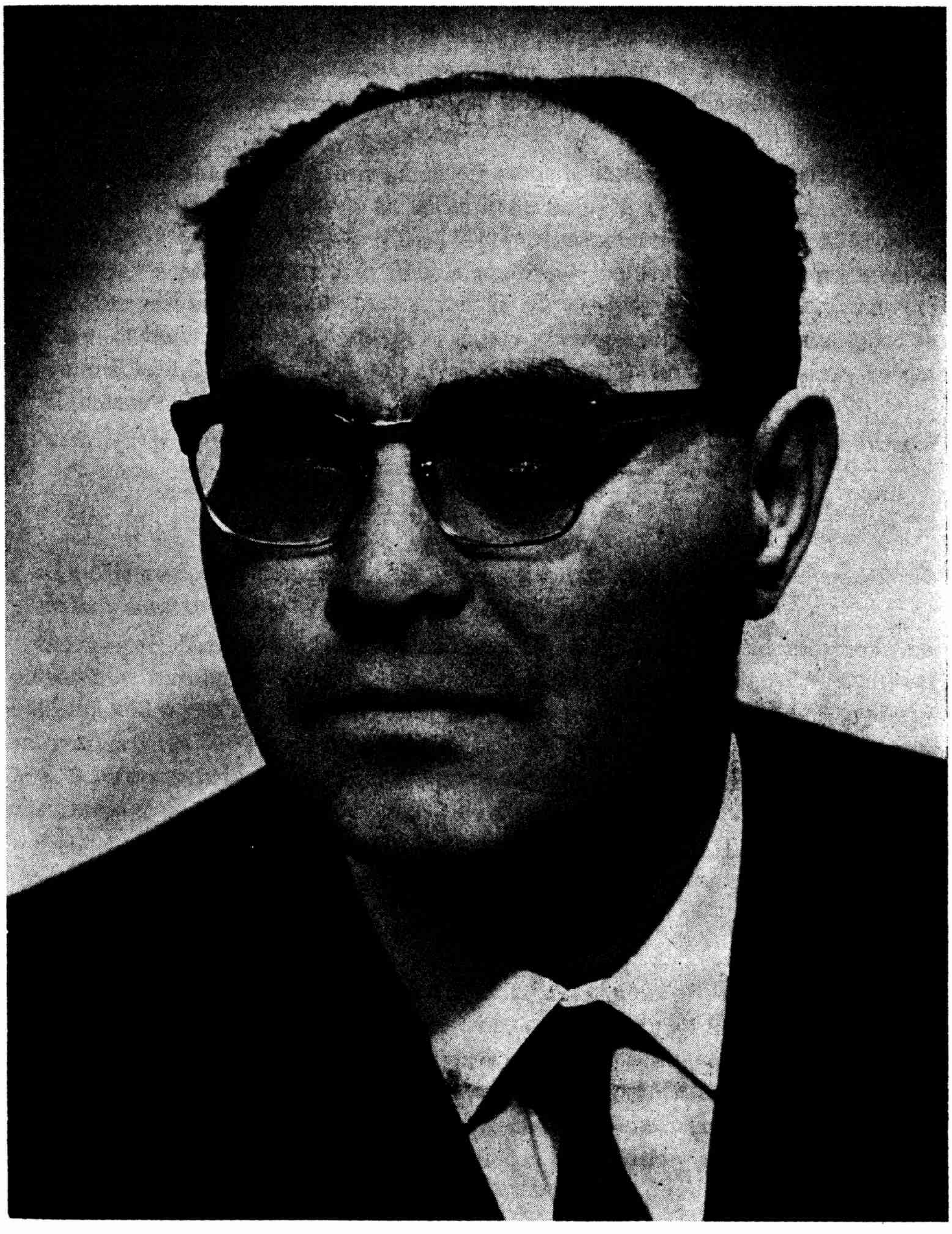
Dňa 18. mája 1974 dožíva sa 60 rokov popredný československý matematik akademik ŠTEFAN SCHWARZ. S jeho menom sa spája nielen rozvoj matematiky na Slovensku, výchova a usmerňovanie vedeckého dorastu v matematike, ale aj rozvoj širších oblastí našej národnej kultúry.

Prof. Schwarz sa narodil v Novom Meste nad Váhom. Stredoškolské štúdium ukončil v roku 1932 vo svojom rodisku na tamojšom reformnom reálnom gymnáziu. Vznik svojho záujmu o matematiku vylíčil sám nedávno v spomienkovom článku [C49], ktorý okrem toho aj sugestívnym spôsobom zachycuje atmosféru začínajúcich matematikov (a nielen matematikov) počiatkom 30. rokov.

Akademik Š. Schwarz začal svoju vedeckú činnosť na Karlovej univerzite v Prahe, kde v r. 1936 ukončil štúdia a pôsobil do roku 1939 ako asistent. V roku 1939 prešiel ako asistent na novozriadenú Slovenskú vysokú školu technickú do Martina. Na tejto škole, ktorá sa neskoršie presťahovala do Bratislavy, pôsobí dodnes. R. 1946 sa habilitoval za docenta na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského a r. 1947 bol menovaný profesorom matematiky. Roku 1952 bol zvolený za člena-korešpondenta Československej akadémie vied. Za riadneho člena — akademika Slovenskej akadémie vied bol menovaný pri uzákonení Slovenskej akadémie vied v roku 1953. V roku 1960 bol zvolený za akademika Československej akadémie vied. V Slovenskej akadémii vied a Československej akadémii vied zastával rad významných funkcií. V rokoch 1965—1970 bol predsedom Slovenskej akadémie vied a podpredsedom Československej akadémie vied. Od 1. januára 1964 je externým riaditeľom Matematického ústavu Slovenskej akadémie vied.

Životné jubileum zastihuje akademika Schwarza v období intenzívnej vedeckej práce. Vzhľadom k hĺbke a rozsahu výsledkov jeho vedeckej práce nie je možné v tomto krátkom článku podať súborné zhodnotenie jeho vedeckých prác; dajú sa stručne zaznamenať len najdôležitejšie tematické okruhy, do vývoja ktorých v podstatnej miere zasiahol, a ukážky niektorých typických výsledkov akademika Schwarza z týchto tematických oblastí.

Vedecké práce akademika Schwarza sa sústreďujú na algebru a teóriu čísel. K orientácii na algebraické otázky súvisiace s teóriou čísel inšpiroval Š. Schwarza jeho učiteľ, významný matematik KAREL PETR, profesor Karlovej univerzity.



Akademik ŠTEFAN SCHWARZ

Nadväzujúc na výsledky K. Petra zaoberal sa Š. Schwarz vo svojich prvých prácach otázkami, týkajúcimi sa ireducibility polynómov nad obormi integrity. Do tejto skupiny patria práce [1], [4], [7], [9], [11], [15]. Išlo o problematiku, ktorú je možné v rámci vývinu matematiky považovať za klasickú; získať nové výsledky v tejto do značnej hĺbky prebádanej oblasti bolo, prirodzene, náročnou a obťažnou úlohou.

Ďalšie práce akademika Schwarza sú venované problematike rozložiteľnosti polynómov nad konečným telesom na súčin ireducibilných polynómov. Sú to články [2], [3], [10], [16], [38], [49], [50], [55], [56]. Jednou z hlavných úloh, ktoré si v týchto prácach Š. Schwarz položil, bolo stanovenie explicitných formúl pre určenie počtu σ_k navzájom rôznych ireducibilných činiteľov stupňa k pre daný polynóm $f(x)$ nad konečným telesom. V tomto smere najprv zovšeobecnil výsledky, vzťahujúce sa na binomické polynómy mod p, ako aj výsledky Radosa, Hurwitza a Turána. Potom riešil (menovite v prácach [38] a [50]) celkom všeobecne túto otázku:

Nech $f(x)$ je polynóm stupňa m nad konečným telesom $GF(q)$. Uvažujme o sústave

$$x^{iq} = \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} x^j \pmod{f(x)} \quad (0 \leqq i \leqq m-1)$$

a nech C je matica (c_{ij}). V citovaných prácach akademika Schwarza je odvodený rad výsledkov o vzťahoch medzi maticou C a hodnotami σ_k.

Otázka rozložiteľnosti polynómov nad konečným telesom na súčin ireducibilných polynómov nadobudla v posledných rokoch mimoriadnu aktuálnosť v súvislosti s teóriou kódovania ako aj v súvislosti s radarovou technikou. E. Berlekamp vypracoval v rokoch 1967—71 metódy strojového riešenia tejto úlohy. V práci [D7] uvádza, že Š. Schwarz našiel (v roku 1956) ako prvý zásadné riešenie a objavil význam matice C, ktorá je podkladom metódy pre strojové riešenie uvedenej úlohy.

Značný ohlas v matematickej literatúre mali články [12], [13], [14], [17], [19], [35], v ktorých sa študuje riešiteľnosť rovnice

$$a_1 x_1^k + \ldots + a_s x_s^k + b = 0 \tag{1}$$

nad konečnými resp. lokálnymi telesami. Špeciálne sa skúmal prípad $a_1 = \ldots = a_s = 1$ (ide o tzv. Waringov problém); pre tento prípad dosiahol Š. Schwarz zostrenie výsledkov Tornheima a Rédeiho. Ako typický uveďme nasledujúci výsledok dokázaný v [12]: Nech n, k sú prirodzené čísla a nech p je prvočíslo, $\delta = (p^n - 1, k) \leqq p - 1$. Nech $a_1 = \ldots = a_s = 1$. Potom existuje najmenšie prirodzené číslo s s tou vlastnosťou, že rovnica (1) má riešenie s hodnotami $x_i \in G\,F(p^n)$ pre každé $b \in G\,F(p^n)$; pritom $1 \leqq s \leqq \delta$.

Podstatná časť vedeckých prác akademika Schwarza je venovaná teórii pologrúp. Š. Schwarz patrí medzi matematikov, ktorí vybudovali základy tejto teórie. V období, keď vyšla jeho prvá práca z tejto oblasti (1943), neexistovala ešte nijaká teória pologrúp. Existovala kniha A. K. Suškeviča [D6] a v rokoch 1941—43 vyšlo niekoľko málo prác A. H. Clifforda, P. Dubreila a D. Reesa. Netreba zdôrazňovať, že tieto práce boli v tom čase u nás celkom neprístupné. Už prvá práca Š. Schwarza o pologrupách [8] prináša nielen aktuálne výsledky, ale aj rad metodických prostriedkov na skúmanie špeciálnych otázok teórie pologrúp, ktoré sa neskoršie dobre osvedčili. V tejto práci sa po prvý raz objavuje v literatúre pojem maximálnych grúp danej pologrupy, pojem radikálu pologrupy a v podstate aj pojem ideálu pologrupy, vedome použitý na štúdium štruktúry pologrúp. V celom rade prác objasnil Š. Schwarz význam idempotentov a ideálov pre štruktúru pologrúp. Obzvlášť detailne sa zaoberal pologrupami, ktoré sa dajú rozložiť tak, že príslušné triedy rozkladu tvoria pologrupy špeciálnych vlastností (napr. grupy, ideály určitých typov, pologrupy splňujúce pravidlá o krátení, apod.). Od štúdia konečných pologrúp prešiel k skúmaniu periodických pologrúp [22], ktoré majú s konečnými pologrupami niektoré analogické vlastnosti. Pre uvedené triedy pologrúp získal rad hlbokých štrukturálnych viet.

V práci [20] je dokázaná táto základná veta. Jednoduchá pologrupa, ktorá má idempotent, je úplne jednoduchá práve vtedy, keď má aspoň jeden minimálny ľavý ideál. V práci [21] sa po prvý raz študuje podrobne sokeľ pologrupy. (Výsledky tejto práce sú z veľkej časti prevzaté do kapitoly 6 knihy [D1, Vol. 2].)

Ďalšími triedami pologrúp, ktoré akademik Schwarz podrobne prebádal, sú duálne pologrupy [46], [75], [76]. Duálnymi pologrupami sa nazývajú pologrupy s nulovým prvkom, v ktorých systémy pravých a ľavých ideálov splývajú so systémami uzavretých množín pri Galoisovej konexii danej reláciou $xy = 0$. Ako typický výsledok uveďme nasledujúcu vetu o duálnych pologrupách, dokázanú v [76]. Nech S je duálna pologrupa bez nilpotentných ideálov. Potom sa S dá vyjadriť vo tvare

$$S = \cup M_\lambda\,, \quad M_\alpha\,.\,M_\beta = M_\alpha \cap M_\beta = 0 \quad \text{pre} \quad \alpha \neq \beta\,,$$

pričom každá z množín M_λ je minimálny ideál v S a zároveň je M_λ duálnou pologrupou. Každá z pologrúp M_λ je pritom tzv. Brandtova pologrupa. V prácach [46] a [76] je dokázaný aj rad viet pre duálne pologrupy, ktoré majú nenulový radikál.

Algebraické výsledky získané Schwarzom (predovšetkým v prácach [8], [20] – [25]) použil neskôr A. D. Wallace (a jeho žiaci) pri rozvinutí teórie topologických pologrúp.

Ďalšia séria prác akademika Schwarza sa týka charakterov pologrúp. Charakterom komutatívnej pologrupy S sa rozumie zobrazenie χ pologrupy S do množiny všetkých komplexných čísiel, také, že je $\chi(ab) = \chi(a)\,\chi(b)$ pre každé $a, b \in S$. Ak pre charaktery χ, ψ položíme $(\chi\psi)(a) = \chi(a)\,\psi(a)$, potom množina všetkých charakterov na S tvorí pologrupu S^*. Pre viaceré triedy pologrúp podarilo sa Š. Schwarzovi popísať štruktúru alebo dôležité vlastnosti pologrupy S^*; pre konečné komutatívne pologrupy v článkoch [26], [27], [28], pre topologické kompaktné pologrupy v článkoch [32], [36], pre multiplikatívnu pologrupu zvyškových tried mod n v práci [43].

Ako príklad uveďme niektoré z výsledkov článku [26]. Nech S je konečná komutatívna pologrupa a nech $E = \{e_i\}$ je množina všetkých idempotentov pologrupy S. Pripomeňme najprv, že každému idempotentu e_i zodpovedá maximálna podpologrupa P_i a každá pologrupa P_i obsahuje maximálnu grupu G_i (porov. [8]). V práci [26] sa dokazuje, že množina E^* všetkých idempotentov v S^* je polozväz, duálne izomorfný s polozväzom $P = P' \cup \{S\}$, kde P' je množina všetkých prvoideálov pologrupy S. Ďalej Š. Schwarz dokazuje, že S^* je zjednotením disjunktných grúp G_i^* (pričom každá grupa G_i^* je izomorfná s G_i) a grupy $\{\chi_0\}$, kde χ_0 je jednotkový prvok pologrupy S^*. Odvozuje sa tiež explicitné pravidlo pre násobenie idempotentov pologrupy S^* s grupami G_i^*. Schwarzove výsledky z teórie charakterov (podrobne reprodukované napr. v knihe [D1], Vol. 1, Chap. 5) sa stali východiskom radu prác viac ako 20 zahraničných autorov. Medzičasom boli nájdené aj široké triedy pologrúp, pre ktoré platia vety analogické klasickým vetám Pontrjaginovým z teórie lokálne kompaktných grúp.

Od štúdia charakterov pologrúp prešiel Š. Schwarz k špeciálnejšej, ale dôležitej problematike, a to k štúdiu mier na konečných pologrupách a na topologických Hausdorffových kompaktných pologrupách. Množina mier na pologrupe s operáciou konvolúcie tvorí pologrupu. Štúdium vlastností tejto pologrupy tvorí obsah prác [40], [41], [53], [54] a [57]. Schwarzove výsledky v tejto oblasti zasadené do rámca neskoršieho vývinu sú podrobne zhodnotené napr. v prehľadnej práci Williamsona [D8]. Ako typické výsledky v tomto smere spomeňme niektoré výsledky práce [40].

Nech S je kompaktná Hausdorffova pologrupa. Predpokladajme, že pre každú otvorenú podmnožinu X je množina Xa tiež otvorenou množinou. Nech μ je miera na Borelových podmnožinách množiny S, $\mu(S) = 1$. Miera μ sa nazýva sprava invariantnou, ak platí $\mu(E) = \mu(Ea)$ pre každú Borelovu množinu za predpokladu, že Ea je tiež Borelovou množinou; analogicky sa definuje zľava invariantná miera. V práci [40] sa dokazuje, že ak S má ľavú invariantnú mieru aj pravú invariantnú mieru, potom už S musí byť grupou. Sú najdené nutné a postačujúce podmienky pre existenciu pravej invariantnej miery na S formulované pomocou existencie pravého ideálu s určitými vlastnosťami. V obsiahlej práci [53] sú popísané (okrem iného) všetky idempotentné miery na konečných nekomutatívnych pologrupách.

Výsledky, ktoré Š. Schwarz získal pre rozličné triedy abstraktných pologrúp, využíva pri štúdiu dôležitých typov špeciálnych pologrúp. V prácach [61]–[70] študuje pologrupy matíc s nezápornými prvkami a pologrupy stochastických matíc. U prvého typu pologrúp vyšetruje najmä rozloženie nulových prvkov v postupnosti mocnín danej matice. Pre druhú z uvedených tried pologrúp okrem výsledkov o rozložení nenulových prvkov dokazuje rad viet limitného typu. Výsledky týchto prác majú početné aplikácie.

V článkoch [72], [73], [74], [77], [79] sa skúmajú pologrupy binárnych relácií. O tejto tématike existuje v literatúre pomerne veľký počet prác. Články akademika Schwarza prinášajú do tejto problematiky zovšeobecňujúci pohľad a zaraďujú jednotlivé problémy do rámca teórie pologrúp. Aktuálnosť tematiky zdôrazňujú jej aplikácie v teórii automatov.

Spomeňme tu niektoré z výsledkov práce [72], ktorá – hoci vyšla len pred tromi rokmi – našla už veľký ohlas v literatúre. Väčšina výsledkov práce má kombinatorický charakter. Nech S je pologrupa všetkých binárnych relácií na konečnej množine M obsahujúcej n prvkov. Pre $\varrho \in S$ označme $d(\varrho)$ počet prvkov maximálnej grupy, ktorá je obsiahnutá v pologrupe generovanej prvkom ϱ. Nech $r(\varrho)$ je najmenšie prirodzené číslo, pre ktoré ϱ^r je idempotentným prvkom v S. Binárna relácia ϱ sa nazýva reducibilnou, ak príslušná booleovská matica je reducibilná. Dokazuje sa, že ϱ je ireducibilná práve vtedy, keď jej tranzitívny uzáver je kvadratická binárna relácia. Relácia ϱ sa dá jednoznačným spôsobom rozložiť na disjunktný súčet svojich maximálnych ireducibilných podrelácií a takých podrelácií, ktoré neobsahujú žiadne ireducibilné relácie. Relácia ϱ neobsahuje ireducibilné podrelácie práve vtedy, keď jej tranzitívny uzáver je nilpotentným prvkom v S. Ak ϱ je ireducibilná, potom ľubovoľné dve z $d(\varrho)$ po sebe nasledujúcich mocnín relácie ϱ sú navzájom disjunktné. Číslo $r(\varrho)$ sa v tomto prípade rovná najmenšiemu z prirodzených čísiel s, pre ktoré ϱ^s je ekvivalencia na množine M. Výsledky tejto práce majú úzky vzťah k teórii nezáporných matíc.

V práci [73] bol rozriešený problém kombinatorického rázu týkajúci sa binárnych relácií, ktorý zostával dlho nerozriešeným.

Veľká časť Schwarzových výsledkov z teórie pologrúp je dnes prístupná v knižnej forme menovite v monografiách E. S. Ljapin [D3], A. H. Clifford - G. P. Preston [D1], A. B. Paalman - de Miranda [D4], ako i v ďalších knihách z teórie pologrúp ([D2], [D5]). Mnohé z nich sa stali medzičasom všeobecným majetkom špecialistov.

Jeho výsledky sú citované vo viac ako 250 prácach iných matematikov z mnohých krajín sveta. Niektoré jeho výsledky sa uvádzajú aj v učebniciach (napr. v knihách A. A. Alberta, P. Dubreila, L. Rédeiho, A. A. Costu) alebo monografiách z iných oblastí (R. H. Bruck, E. Hewitt - K. A. Ross, G. Moisil, U. Grenander).

Charakteristickým rysom vedeckých prác Š. Schwarza je snaha doviesť výsledky do tvaru čo najviac explicitného. Touto snahou je poznamenaná aj metóda prof. Schwarza: dôsledne dáva prednosť postupom konštruktívnym a dopracováva úvahy až do stavu čo najviac uzavretého a k úplnému popisu štruktúry skúmaných objektov.

Tento rys sa prejavuje aj v knihách a popularizačných článkoch akademika Schwarza, ktoré sledujú pedagogické ciele. Čitateľovi ukazuje „zadné myšlienky" teórie a dovádza ho až k aplikáciám teórie. Štýl výkladu v týchto prácach je svieži a nákazlivý, dokáže vzbudiť záujem čitateľa. Táto metodika sa ešte znásobuje pri jeho praktickej pedagogickej činnosti. Jeho prednášky sú považované za jedny z najlepších. (Pisatelia týchto riadkov vďačia tejto metóde prof. Schwarza za mnohé podnety a podnietenie záujmu.)

Prof. Schwarz vedel okolo seba za posledných 20 rokov sústrediť rad slovenských matematikov, ktorí publikovali práce z teórie pologrúp (J. Abrhan, J. Bosák, I.

Fabrici, R. Hrmová, J. Ivan, J. Kajan, B. Kolibiarová, D. Krajňáková, F. Krňan, B. Parízek, L. Satko, R. Šulka). Udržiava osobný a písomný styk s mnohými matematikmi v zahraničí a má tak aj rad nepriamych žiakov vo viacerých krajinách sveta.

Ako človek so širokým matematickým rozhľadom, presahujúcim ďaleko hranice algebry a teórie čísel, bol školiteľom viac ako 20 kandidátov vied, často aj z odborov dosť vzdialených jeho užšej špecializácii. Treba výslovne poznamenať, že i keď jeho vlastná vedecká tvorba je zameraná skôr teoreticky, má rozsiahle znalosti z aplikácií matematiky na fyzikálne a technické vedy. Nejde len o klasickú mechaniku a matematickú fyziku, z ktorých konal po roky prednášky, ale aj o rozsiahle partie diskrétnej matematiky, ktoré sa v súvislosti s rozvojom počítačov dostávajú do popredia záujmu širokých kruhov matematikov i inžinierov. Po roky koná prednášky postgraduálneho charakteru pre pracovníkov vysokých škôl, vedeckých a výskumných ústavov a pomáha tak šíriť matematickú kultúru medzi širšie vrstvy vedeckých pracovníkov, ktorí sa dnes bez matematiky sotva zaobídu.

Pedagogická činnosť profesora Schwarza sa neobmedzuje na činnosť na Slovenskej vysokej škole technickej. Prednášal dlhé roky na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského a to v čase, keď to bolo najviac potrebné — v začiatkoch. Nemalý vplyv na výchovu matematikov majú aj už spomenuté jeho knihy a veľký rad článkov v časopisoch. Ako hlavný redaktor Matematického časopisu, člen redakčnej rady Czechoslovak Mathematical Journal a Semigroup Forum recenzoval, doplňoval, opravoval desiatky prác iných autorov. Pre Mathematical Reviews napísal viac ako 160 recenzií. Ďalšie recenzie napísal pre Реферативный журнал a Zentralblatt für Mathematik.

Aktívne sa zúčastnil na mnohých matematických kongresoch, konferenciách a zjazdoch. Na pozvania predniesol viac ako 70 prednášok vlastných výsledkov na celom rade univerzít a vedeckých inštitúcií v 12 štátoch.

Akademik Schwarz venoval mnoho času a energie aj organizácii nášho školského a vedeckého života. Pôsobil v rozličných funkciách v rámci akadémie, v školských a iných kultúrnych a kultúrno-politických inštitúciách. Ako človek hlboko spoločensky angažovaný, žil a žije s problémami celej spoločnosti. V rokoch 1966—1971 bol členom Ústredného výboru KSČ.

Je obdivuhodné — a málokomu sa to tak úspešne podarí — ako dokáže akademik Schwarz zvládnuť všetky tieto práce. Naša spoločnosť ocenila všetrannú a spoločensky veľmi dôležitú činnosť akademika Schwarza mnohými prejavmi uznania. R. 1951 mu bola udelená cena mesta Bratislavy a r. 1955 Štátna cena Klementa Gottwalda I. stupňa. V roku 1964 mu bol udelený Rad práce. Je čestným členom Jednoty československých matematikov a fyzikov. Viaceré inštitúcie ho poctili pri rozličných príležitostiach medailami (Univerzita Komenského, Slovenská vysoká škola technická, Československá akadémia vied).

Naša matematická obec a všetci žiaci akademika Schwarza mu srdečne gratulujú k 60. narodeninám a prajú mu veľa zdravia a mnoho zdaru v ďalšej práci pre rozvoj československej matematiky.

ZOZNAM PUBLIKÁCIÍ

A. Pôvodné práce

[1] Über die Reduzibilität eines Polynoms mit ganzen algebraischen Koeffizienten nach einem Primideal. Časopis pro pěst. mat. a fys. *68*, 1939, 112—127.

[2] Contribution à la réductibilité des polynômes dans la théorie des congruences. Věstník Král. české spol. nauk, 1939, č. 7, 1—9.

[3] Sur le nombre des racines et des facteurs irréductibles d'une congruence donnée. Časopis pro pěst. mat. a fys. *69*, 1940, 128—146.

[4] Über einen Satz von S. Lubelski. Časopis pro pěst. mat. a fys. *69*, 1940, 147—150.

[5] Príspevok k číselnej teórii konečných telies. Prírodovedecká príloha Technického obzoru slovenského, roč. *I*, č. 8, 1940, 75—82.

[6] Príspevok k teórii kongruencií. Prírodovedecká príloha Technického obzoru slovenského, roč. *II*, č. 8 a č. 9, 1941, 89—92 a 95—100.

[7] Príspevok k teórii Galoisových telies. Prírodovedecká príloha Technického obzoru slovenského, roč. *III*, č. 6, 1942, 1—4.

[8] Teória pologrúp. Sborník prác Prírodovedeckej fakulty Slovenskej univerzity, č. VI, Bratislava 1943, strán 64.

[9] A hyperkomplex proof of the Jordan-Kronecker's Principle of reduction. Časopis pro pěst. mat. a fys. *71*, 1946, 17—21.

[10] Príspevok k reducibilite binomických kongruencií. Časopis pro pěst. mat. a fys. *71*, 1946, 21—32.

[11] On the extension of the Jordan-Kronecker's Principle of reduction for inseparable polynomials. Časopis pro pěst. mat. a fys. *73*, 1947, 61—64.

[12] On Waring's problem for finite fields. Quarterly Journal of Mathematics, Oxford, *19*, 1948, 123—128.

[13] On generalization of Jordan-Kronecker's principle of reduction. Věstník Král. české spol. nauk, 1948, č. 2, 1—29.

[14] On the equation $a_1x_1^k + \dots + a_kx_k^k + b = 0$ in finite fields. Quarterly Journal of Mathematics, Oxford, *19*, 1948, 160—164.

[15] Príspevok k teórii cyklických telies. Sborník prác SVŠT, Bratislava, 1948, strán 7.

[16] On the reducibility of binomial congruences and the least bound of an integer belonging to a given exponent mod p. Časopis pro pěst. mat. a fys. *74*, 1949, 1—17.

[17] On universal forms in finite fields. Časopis pro pěst. mat. a fys. *75*, 1950, 45—50.

[18] O zovšeobecneniach pojmu grupy. Časopis pro pěst. mat. a fys. *74*, 1949, 95—113.

[19] O rovniciach tvaru $c_1x_1^k + \dots + c_sx_s^k = c$ v konečných telesiach. Časopis pro pěst. mat. a fys. *74*, 1949, 175—176.

[20] Структура простых полугрупп без нуля. Чехослов. мат. ж. *1* (*76*), 1951, 51—65.

[20*a*] On the structure of simple semigroups without zero. Czech. Math. Journal *1*, (*76*), 1951, 41—53.

[21] О полугруппах имеющих ядро. Чехослов. Мат. ж. *1* (*76*), 1951, 259—301.

[21a] On semigroups having a kernel. Czech. Math. Journal *1* (*76*), 1951, 229—264.

[22] К теории периодических полугрупп. Чехослов. мат. ж. *3* (*78*), 1953, 7—21.

[23] О максимальных идеалах в теории полугрупп I. Чехослов. мат. ж. *3* (*78*), 1953, 139—153.

[24] Maximálne ideály a štruktúra pologrúp. Mat. fyz. časopis SAV *3*, 1953, 17—39.

[25] О максимальных идеалах в теории полугрупп II. Чехослов. мат. ж. *3* (*78*), 1953, 365—383.

[26] Теория характеров коммутативных полугрупп. Чехослов. мат. ж. *4* (*79*), 1954, 219—247.

[27] Характеры коммутативных полугрупп как функции классов. Чехослов. мат. ж. *4* (*79*), 1954, 291—295.

[28] О некоторой связи Галуа в теории характеров полугрупп. Чехослов. мат. ж. *4* (*79*), 1954, 296—313.
[29] Characters of commutative semigroups. Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1954, Vol. I, Amsterdam 1957, 438.
[30] К теории Хаусдорффовых бикомпактных полугрупп. Чехослов. мат. ж. *5* (*80*), 1955, 1—23.
[31] О топологических полугруппах с односторонними единицами. Чехослов. мат. ж. *5* (*80*), 1955, 153—163.
[32] Характеры бикомпактных полугрупп. Чехослов. мат. ж. *5* (*80*), 1955, 24—28.
[33] Poznámka k teórii bikompaktných pologrúp. Mat. fyz. časopis SAV, *5*, 1955, 86—89.
[34] Об увеличительных элементах в теории полугрупп. Доклады Акад. Наук СССР, *102*, № 4, 1955, 697—698.
[35] On a type of universal forms in discretely valued fields. Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged, *17*, 1956, 5—29.
[36] The theory of characters of commutative Hausdorff bicompact semigroups. Czech. Math. Journal *6* (*81*), 1956, 330—364.
[37] Ještě o kvadratických polynomech nabývajících mnoha prvočíselných hodnot. Časopis pro pěst. mat. 81, 1956, 241—243. (Spolu s *J. Maříkom.*)
[38] On the reducibility of polynomials over a finite field. Quarterly Journal of Mathematics, Oxford, *7*, 1956, 110—124.
[39] O pologrupách splňujúcich zoslabené pravidlá krátenia. Mat. fyz. časopis SAV *6*, 1956, 149—158.
[40] О существовании инвариантных мер на некоторых типах бикомпактных полугрупп. Чехослов. мат. ж. *7* (*82*), 1957, 165—182.
[41] On the structure of the semigroup of measures on finite semigroups. Czech. Math. Journal *7* (*82*), 1957, 358—373.
[42] An elementary semigroup theorem and a congruence relation of Rédei. Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged, *19*, 1958, 1—4.
[43] O multiplikatívnej pologrupe zvyškových tried modulo *m*. Mat. fyz. časopis SAV *8*, 1958, 136—150. (Spolu s *B. Parízkom.*)
[44] Remarks on compact semigroups. Colloqium Mathematicum, Wroclaw, Vol. *VI*, 1958, 265—270. (Spolu s *J. Łosom.*)
[45] O totálne nekomutatívnych pologrupách. Mat. fyz. časopis SAV *9*, 1959, 92—100. (Spolu s *D. Krajňákovou.*)
[46] On dual semigroups. Czech. Math. Journal *10* (*85*), 1960, 201—230.
[47] A theorem on normal semigroups. Czech. Math. Journal *10* (*85*), 1960, 197—200.
[48] Semigroups, in which every proper subideal is a group. Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged, *21*, 1960, 125—134.
[49] Об одном классе полиномов над конечным полем. Mat. fyz. časopis SAV *10*, 1960, 68—80.
[50] О числе неприводимых множителей многочлена над конечным полем. Чехослов. мат. ж. *11* (*86*), 1961, 213—225.
[51] Semicharacters of the multiplicative semigroup of integers modulo m. Mat. fyz. časopis SAV *11*, 1961, 63—74. (Spolu s *B. Parízkom.*)
[52] Subsemigroups of simple semigroups. Czech. Math. Journal *13* (*88*), 1963, 226—239.
[53] Probabilities on non-commutative semigroups. Czech. Math. Journal *13* (*88*), 1963, 372 to 426.
[54] Probability measures on non-commutative semigroups. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra. Proceedings of the Symposium held in Prague in September 1961, pp. 312—315.
[55] Циклические матрицы и алгебраические уравнения над конечным полем. Mat. fyz. časopis SAV *12*, 1962, 38—48. (Spolu s *K. Horákovou.*)

[56] Заметка об алгебраических уравнениях над конечным полем. Mat. fyz. časopis SAV *12*, 1962, 224—229.
[57] Convolution semigroup of measures on compact non-commutative semigroups. Czech. Math. Journal *14* (*89*), 1964, 95—115.
[58] Product decomposition of idempotent measures on compact semigroups. Czech. Math. Journal *14* (*89*), 1964, 121—124.
[59] Homomorphisms of completely simple semigroups onto a group. Mat. fyz. časopis SAV *12*, 1962, 293—300.
[60] O jednej sústave kongruencií. Poznámka k predchádzajúcemu článku J. Sedláčka. Mat. fyz. časopis SAV *13*, 1963, 103—104.
[61] A semigroup treatment of some theorems on non-negative matrices. Czech. Math. Journal *15* (*90*), 1965, 212—229.
[62] On the structure of the semigroup of stochastic matrices. Publ. of the Math. Inst. Hungarian Acad. Vol *IX*, Series A, Fasc. 3, 1965, 297—311.
[63] On powers of non-negative matrices. Mat. fyz. časopis SAV *15*, 1965, 215—228.
[64] Заметка к теории неотрицательных матриц. Сибир. мат. ж. *6*, 1965, 207—211.
[65] A new approach to some problems in the theory of non-negative matrices. Czech. Math. Journal *16* (*91*), 1966, 274—284.
[66] New kinds of theorems on non-negative matrices. Czech. Math. Journal *16* (*91*), 1966, 285—295.
[67] Some estimates in the theory of non-negative matrices. Czech. Math. Journal *17* (*92*), 1967, 399—407.
[68] A note on the structure of the semigroup of doubly stochastic matrices. Matem. časopis *16*, 1967, 308—316.
[69] On the index of imprimitivity of a non-negative matrix. Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged *28*, 1967, 185—189.
[70] Algebraic considerations on powers of stochastic matrices. Matem. časopis *18*, 1968, 218—228.
[71] Prime ideals and maximal ideals in semigroups. Czech. Math. Journal *19* (*94*), 1969, 72—79.
[72] On the semigroup of binary relations on a finite set. Czech. Math. Journal *20* (*95*), 1970, 632—679.
[73] On a sharp estimate in the theory of binary relations on a finite set. Czech. Math. Journal *20* (*95*), 1970, 703—714.
[74] On idempotent relations on a finite set. Czech. Math. Journal *20* (*95*), 1970, 696—702.
[75] Any 0-simple dual semigroup is completely 0-simple. Semigroup Forum *2*, 1971, 90—92.
[76] On the structure of dual semigroups. Czech. Math. Journal *21* (*96*), 1971, 461—483.
[77] The semigroup of fully indecomposable relations and Hall relations. Czech. Math. Journal *23* (*98*), 1973, 151—163.
[78] A note on small categories with zero. Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged, *35*, 1973, 161—164.
[79] Суммы степеней бинарных отношений. Mat. časopis. *24*, 1974.
[80] Circulant Boolean relation matrices. Czech. Math. Journal *24* (99), 1974.

B. Knižné publikácie

[1] O rovnicích. Cesta k vědění č. 1. Nákladem JČMF. Prvé vydanie, Praha 1940, strán 96.
[2] O rovnicích. Tretie vydanie, Praha 1947, strán 160.
[3] Algebraické čísla. Přírodovědecké nakl., Edícia Kruh, Praha 1950, strán 292.
[4] Základy náuky o riešení rovníc. NČSAV, Praha 1958, strán 348.
[5] Základy náuky o riešení rovníc. Vydavateľstvo SAV, Bratislava 1967, strán 440.
[6] Základy náuky o riešení rovníc. Vydanie druhé. Vydavateľstvo SAV, Bratislava 1968, str. 456.

C. Iné publikácie

Referáty, recenzie, popularizačné články a iné

[1] Niekoľko poznámok k určeniu čísla π. Rozhledy matematicko-přírodovědecké *13*, 1934, 31—35.

[2] O Heronových trojuholníkoch. Rozhledy matematicko-přírodovědecké *13*, 1934, 7—9.

[3] O jednej úlohe z teórie kužeľosečiek. Rozhledy matematicko-přírodovědecké *14*, 1935, 80—82 a 101—106.

[4] Algebraické a transcendentné čísla. Rozhledy matematicko-přírodovědecké *17*, 1937, 133—142.

[5] Maxima a minima v elementárnej geometrii. Rozhledy matematicko-přírodovědecké, *18*, 1938, 87—89, 109—113.

[6] Cesty a ciele dnešnej matematiky. Technik, *I*, 1940, 20—23.

[7] Problém štyroch farieb. Príroda, *I*, 1947, 40—43.

[8] O operátorovej metóde riešenia lineárnych diferenciálnych rovníc. Technik, *IV*, 1947/48, 81—87.

[9] Kniha o veľkej tradícii sovietskej teórie čísel (Referát o knihe Б. Н. Делоне, Петербургская школа теории чисел). Časopis pro pěst. mat. *76*, 1951, 291—300.

[10] O súčasnej situácii matematiky na Slovensku. Mat. fyz. časopis SAV *3*, 1953, 6—8.

[11] K problematike našich matematických pracovísk. Časopis pro pěst. mat. *3* (*78*), 1953, 13—16.

[12] Spolupráca slovenskej a českej vedy. Sborník „Slovenská akadémia vied, jej uzákonenie a ustanovenie", SAV, 1954, 108—111.

[13] Akademik Jur Hronec vyznamenaný Radom práce. Časopis pro pěst. mat. *80*, 1955, 503—504.

[14] O katedrách matematiky na vysokých školách v SSSR. Vysoká škola, roč. 1955, 345—352.

[15] Matematika a vedecký pokrok. Naša veda, roč. 1956, 162—168.

[16] Bikompakt félcsoportok karaktereiról. Mathematikai Lapok *VI*, 1955, 280—281. (Výťah z prednášky v Budapešti.)

[17] Bikompakt félcsoportok maximalis ideáljairol. Mathematikai Lapok *VI*, 1955, 281—282. (Výťah z prednášky v Budapešti.)

[18] Über die Existenz invarianter Masse bei kompakten Halbgruppen. Nachrichten der Oesterreichischen Math. Geselschaft *47/48*, 1957, 27. (Výťah z prednášky vo Viedni.)

[19] Sjazd rakúskych matematikov vo Viedni. Časopis pro pěst. mat. *82*, 1957, 123—124.

[20] Akademik Vojtech Jarník šedesátníkem. Časopis pro pěst. mat. *82*, 1957, 463—492. (Spolu s *Vl. Knichalom.*)

[21] Zpráva o pobyte v Poľskej ľudovej republike. Časopis pro pěst. mat. *83*, 1958, 254.

[22] Valné zhromaždenie Medzinárodnej matematickej únie v St. Andrews. Věstník ČSAV *67*, 1958, 673—674.

[23] Medzinárodný matematický kongres v Edinburghu. Věstník ČSAV *67*, 1958, 674—675.

[24] Akademik Vladimír Kořínek šesťdesiatnikom. Časopis pro pěst. mat. *84*, 1959, 222—235.

[25] Kolokvium o teórii grúp a ich zovšeobecneniach v Janosforrás (v Maďarsku). Časopis pro pěst. mat. *85*, 1960, 122—123.

[26] Desiate výročie smrti prof. K. Petra. Pokroky matematiky, fyziky a astronómie *5*, 1960, 598—603.

[27] Azon félcsoportok, amelyeknek minden valódi ideálja csoport. Mathematikai Lapok *X*, No 3—4, 1960, 354. (Výťah z referátu v Jánosforrás, 2.—4. septembra 1959.)

[28] Teória poznania a matematika. Technika (Závodný časopis SVŠT), roč. *III*, č. 4 a č. 5, október 1960.

[29] Sto rokov od smrti Jána Bolyaiho. Práca, 27. januára 1960.

[30] O ideologických otázkách matematických vied. Otázky marxistickej filozofie *16*, 1961, 29—41.
[31] Na záver diskusie o matematike. Technika (Závodný časopis SVŠT), roč. *III*, č. 19, máj 1961.
[32] Sur la réductibilité des polynômes dans les corps finis. Lucrarile celui de al IV-lea Congres al Matematicienilor Romini, Bucuresti 1960, str. 29—30. (Výťah z prednášky na kongrese v Bukurešti v r. 1956.)
[33] Sur les caractères des demi-groupes compacts. Séminaire Dubreil-Pisot (Algèbre et théorie des nombres); 14e année, 1960/61. Exposé no 23, 8 pp. Secrétariat mathématique. Paris 1962 (mimeographed).
[34] Les mesures dans les demi-groupes. Séminaire Dubreil-Pisot (Algèbre et théorie des nombres); 14e année 1960/61, Exposé no 23 bis, 9pp. Secrétariat mathématique, Paris 1962. (mimeographed).
[35] O úlohe matematiky v rozvoji modernej vedy. Rudé právo, 2. decembra 1962.
[36] K nášmu jubileu. Technika, roč. *VI* (*XXIV*), októbér 1963.
[37] Recenzia knihy: L. Rédei „Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen". Acta Sci. Szeged, *25*, 1964, 175—176.
[38] Úlohy našej vedy. Pravda 1. januára 1966 (rozhovor).
[39] Applications de la théorie des demi-groupes à l'étude des matrices non-négatives. Séminaire Dubreil-Pisot (Algèbre et théorie des nombres) 20e année 1966/67, no 2. (Strán 8).
[40] Sedemdesiatiny akademika Vojtěcha Jarníka. Matematický časopis *17*, 1967, 318.
[41] Halbgruppen und nicht-negative Matrizen. (Výťah z prednášky vo Viedni dňa 12. 1. 1968.) Nachrichten der Oesterreichischen Math. Geselschaft Nr. 89, Mai 1968, p. 70.
[42] Vedecká práca prof. Karla Petra v oblasti teórie čísel. Časopis pro pěst. mat. *94*, 1969, 358—361.
[43] Spomienka na prof. Jur Hronca. Technika roč. *XI*(*XXIX*), október—december 1968.
[44] Príhovor na slávnostnom zasadnutí Ukrajinskej Akad. nauk. Vestnik Ukrajinskej Akad. nauk No. 2, 1969, str. 56.
[45] On powers of binary relations on a finite set (abstract). Colloquia Mathematica societatis János Bolyai 4. Combinatorial theory and its applications. Balatonfüred (Hungary), 1969, 997—998.
[46] On the structure of dual semigroups. Séminaire P. Dubreil, 23e année, 1970, Fascicule 2, Algèbre et théorie des nombres, Exposé no. 2, 5 pp. Secrétariat mathématique, Paris 1970.
[47] O binárnych reláciach na konečnej množine. Zborník Elektrotechnickej fakulty SVŠT, Bratislava 1971, str. 177.
[48] Nekrolog. Academician Vojtěch Jarník (22. 12. 1897—22.9. 1970). Acta Aritmetica 20, 1972, 107—123. (Spolu s *B. Novákom*.)
[49] Zamyslenie nad 50. ročníkom Rozhledov. Rozhledy matematicko-fyzikální, *50*, 1972, 241—245.
[50] On some semigroups in combinatorics. Proceedings Mini-conference on Semigroup theory in Szeged, August 29-September 1, 1972, 24—31. (Vyšlo 1973.)
[51] Recenzia knihy: Gécseg-Peák, Algebraic theory of automata. Mat. časopis *23*, 1973, 191.
[52] Matematika a inžinierske štúdium. (Výjde v Sborníku ved. ped. konferencie SVŠT, ktorá sa konala v septembri 1973.)

Poznámka. Tento zoznam je neúplný. Akademik Schwarz napísal rad článkov a poskytol rad rozhovorov dennej a týždennej tlači, rozhlasu a televízii. Týkali sa z veľkej časti úlohy matematiky v dnešnej spoločnosti. Ako zodpovedný funkcionár SAV a ČSAV predniesol na Valných zhromaždeniach SAV a ČSAV rad prejavov (väčšinou publikovaných vo Věstníku ČSAV) kultúrno-spoločenskej povahy a týkajúcich sa rozvoja vedy ako celku v ČSSR a najmä na Slovensku.

D. Citovaná literatúra

[1] *A. H. Clifford - G. P. Preston:* The algebraic theory of semigroups. Vol. I, 1964, strán 224. Vol. II, 1967, strán 350. Amer. Math. Soc. Providence, R. I. (Ruský preklad vyšiel v Izd. Mir, 1972.)

[2] *K. H. Hofman - P. S. Mostert:* Elements of compact semigroups. Ch. E. Merril Publishing Comp. Columbus, Ohio 1966, strán 384.

[3] *E. S. Ljapin:* Полугруппы. Госиздат. физ. мат. лит., Москва, 1960, strán 592. (Anglický preklad: Amer. Math. Soc., 2. vydanie 1968, strán 487.)

[4] *A. B. Paalman - de Miranda:* Topological semigroups. Math. Centrum Amsterdam 1964, 174 strán. (Druhé vydanie 1970.)

[5] *M. Petrich:* Introduction to semigroups. Ch. E. Merril Publishing Comp. Columbus, Ohio 1973.

[6] *A. K. Suškevič:* Теория обобщенных групп. Харков—Киев 1937, strán 176.

[7] *E. R. Berlekamp:* Factoring polynomials over large finite fields. Math. Comp. *24*, 1970, 713—735.

[8] *J. H. Williamson:* Harmonic analysis on semigroups. Journal London Math. Soc. *42*, 1967, 1—41.

DOC. LADISLAV KOUBEK ZEMŘEL

JAROSLAV BLAŽEK, FRANTIŠEK FABIAN, JIŘÍ RAICHL, Praha

Dne 1. prosince 1973 zemřel Doc. RNDr. LADISLAV KOUBEK, CSc., ředitel Centra numerické matematiky na matematicko-fyzikální fakultě University Karlovy.

Doc. Lad. Koubek se narodil 4. 1. 1923 v Praze. V letech 1945—49 studoval na tehdejší přírodovědecké fakultě University Karlovy. Značný význam pro počátky jeho vědecké činnosti mělo jeho studium geometrie u prof. E. Čecha. V padesátých letech sepsal L. Koubek několik vědeckých prací, v nichž vyšetřoval projektivní vlastnosti křivek a vlastnosti přímkových parabolických kongruencí (viz seznam prací [1—3]). Koubkova pedagogická činnost byla vždy spojena s konkrétní prací. Aby svým posluchačům umožnil zvládnutí látky, sepsal pro své přednášky z analytické geometrie a algebry skriptum (viz seznam prací [4]), které posluchači prvních ročníků dosud užívají. Rovněž záslužnou se jeví jeho činnost překladatelská, podílel se na překladu známé Kurošovy monografie věnované abstraktní algebře (viz seznam prací [22]). Těžiště Koubkovy badatelské práce spadá do oboru teorie programování a teorie algoritmických jazyků. Těmto otázkám se doc. Koubek věnoval od konce padesátých let po návratu ze studijního pobytu na Moskevské státní universitě. Toto jeho zaměření je patrné i ze seznamu publikací (viz seznam prací [5—21]).

Od roku 1961, kdy vzniklo Centrum numerické matematiky (CNM), se doc. Koubek účastnil spolu s prof. Nožičkou jeho budování. Významnou měrou přispěl k rozšíření programového vybavení v CNM a svoje bohaté pedagogické zkušenosti uplatňoval také ve výuce programování, a to i v řadě prázdninových a postgraduálních kursů.

Doc. Koubek jevil vždy velký zájem o užití počítačů při řešení úloh technické praxe, což jej vedlo i k tomu, že přijal místo externího vedoucího matematického oddělení Výzkumného ústavu zvukové, obrazové a reprodukční techniky. Zde vedle řešení řady menších problémů vytvořil i velmi originální překladač z ALGOLu pro počítač ODRA (viz seznam prací [9–21]).

Roku 1966 byl jmenován ředitelem CNM, které bylo tehdy třeba podstatně rozšířit, neboť byl instalován počítač MINSK. Avšak i přes značné zaneprázdnění organisačními otázkami se doc. Koubek právě v této době obětavě věnoval i výchově řady mladých vědeckých pracovníků v obtížných oborech, kde matematika hraničí s lingvistikou, meteorologií nebo technickými vědami.

Doc. Koubek zastával rovněž řadu akademických funkcí. V letech 1957–1959 byl proděkanem, v letech 1964–1966 děkanem matematicko-fyzikální fakulty University Karlovy. V roce 1973 byl zvolen prorektorem University Karlovy.

Veškerá činnost doc. L. Koubka, celý jeho život byl v podstatě věnován práci pro naši společnost pro uskutečňování myšlenek komunismu. Pevným základem tohoto zaměření byl jak jeho původ, tak pevné vnitřní komunistické přesvědčení.

Členem KSČ se stal ihned po osvobození v roce 1945 a od této doby až do své smrti pracoval pro stranu bez ohledu na čas a na své zdraví. Zastával řadu stranických funkcí v místě svého bydliště, ve vojenské presenční službě a zejména pak jeho veřejná činnost na matematicko-fyzikální fakultě UK měla velmi intensivní charakter. Po řadu funkčních období zastával funkci předsedy stranické organisace.

Své hluboké komunistické přesvědčení prokázal mnohokrát právě v nejkomplikovanějších situacích; zejména toho je dokladem jeho jednoznačný marxisticko-leninský postoj v krizových letech 1968–1969. Jeho zásadně a vysoce čestné a uvážené jednání a rozhodování mělo velký dopad při řešení složitých praktických problémů v dalším konsolidačním procesu na fakultě.

Za svou mnoholetou, obětavou a zásadovou politickou a veřejnou činnost byl doc. Koubek několikrát vyznamenán. Mimo jiné mu byla udělena pamětní medaile k 25. výročí Února, v roce 1971 mu byla udělena ÚV KSČ pamětní medaile u příležitosti 50. výročí založení KSČ a v roce 1973 medaile u příležitosti 625. výročí založení University Karlovy.

V doc. Koubkovi odešel vysokoškolský učitel mimořádných kvalit, který patřil mezi ty učitele komunisty, kteří spojovali vždy svou obětavou učitelskou a vědeckou práci se soustavnou aktivní veřejnou, politickou a politicko-výchovnou činností.

Jeho spolupracovníci v něm ztratili staršího přítele, který měl vždy porozumění pro jejich osobní otázky.

SEZNAM PRACÍ DOC. DR. LADISLAVA KOUBKA, CSC.

[1] Projektívní vlastnosti křivek na kvadratických plochách a bodových korespondencích dvou přímek. Kandidátská disertační práce — nepublikováno.

[2] Об одном свойстве решений дифференциального уравнения с частными производными параболического типа. Чех. мат. журнал *5* (*80*), (1955), 91—98.

[3] Některé věty theorie parabolických přímkových kongruencí. Čas. pro pěst. mat. *81*, (1956), 224—266.
[4] Úvod do analytické geometrie a algebry. Praha, SPN 1959.
[5] Programující program samočinného počítače LGP-30. Centrum numerické matematiky na MFF UK, 1961.
[6] Programování pro samočinný počítač LGP-30. SPN (společně s *N. Kudláčkem* a *J. Raichlem*).
[7] Programující program ACT 1c pro počítač Ural 2. Apl. mat. *9*, 110—130, (1964).
[8] Algoritmus kompilátoru z ALGOLu 60 pro malé počítače. Publikace letní školy v Bezdružicích (1968).
[9] Translátor PHEN-ALGOL. Sborník referátů II. z mezinárodního symposia o využívání samočinných počítačů ODRA, 1968.
[10] Programující program PHEN-ALGOL pro počítače ODRA 1003 a 1013. Závěrečná zpráva č. 10/69 VÚZORT.
[11] Algoritmus překladače z jazyka ALGOL 60 vhodný pro malý počítač. AUC, Mat. Phys. *10*, (1969).
[12] Algoritmus kompilace nepodmíněných výrazů, dosazovacích příkazů a příkazů skoku v překladači z jazyka ALGOL 60. AUC, Mat. Phys. *10*, 57—69 (1969).
[13] Zobrazení veličin a specifikace parametrů procedur a jedné realizace překladače z jazyka ALGOL 60. AUC, Mat. Phys. *10*, 71—76 (1969).
[14] Kompilování podmíněných výrazů a příkazů v translátoru z jazyka ALGOL 60. AUC, Mat. Phys. *10*, 77—85 (1969).
[15] Překlad proměnných s indexy a přepínačů v překladači z jazyka ALGOL 60. AUC, Mat. Phys. *10*, 87—90 (1969).
[16] Programování příkazů cyklu v kompilátoru z jazyka ALGOL 60. AUC, Mat. Phys. *10*, 91—96 (1969).
[17] Kompilace popisů a příkazů procedur v kompilátoru z jazyka ALGOL 60. AUC, Mat. Phys. *10*, 97—102 (1969).
[18] Vytváření seznamů v translátoru z jazyka ALGOL 60. AUC, Mat. Phys. *10*, 103—104 (1969).
[19] Program výpočtu činitele zvukové pohyblivosti z měření v dozvukové komoře. Dílčí zpráva č. 18/20 VÚZORT.
[20] Program výpočtu akustické impedance. Dílčí zpráva č. 18/20 VÚZORT.
[21] Program pro výpočet spektra vlastních kmitů uzavřeného prostoru tvaru kvádru. Dílčí zpráva č. 18/20 VÚZORT.
[22] *A. G. Kuroš:* Kapitoly z obecné algebry, Praha Academia 1968 (překlad z ruštiny společně s *J. Blažkem*).

SEMINÁŘ „APLIKACE MATEMATIKY V GEODÉZII"

Výzkumný ústav geodetický, topografický a kartografický v Praze a matematická vědecká sekce JČSMF uspořádaly ve dnech 19.—21. září 1973 v Měříně na Slapské přehradě seminář o aplikacích matematiky v geodézii. Smyslem semináře bylo neformální setkání geodetů a matematiků a vzájemná informace jak o některých matematických disciplinách, tak i o přímých aplikacích matematiky v geodézii. Seminář se uskutečnil díky významné finanční a organisační podpoře VÚGTK. Ze strany matematiků měl pak nespornou zásluhu o úspěšný průběh semináře doc. Dr. Z. Nádeník, DrSc., který s několika spolupracovníky vede již několik let různé matematické semináře pro pracovníky v geodézii. Na základě zkušeností z této spolupráce matematiků a geodetů bylo pak možno sestavit program semináře v Měříně, na kterém se matematici seznámili s některými pracemi geodetů a tím i s matematickými problémy geodézie, geodeti se mohli alespoň stručně seznámit s takovými matematickými disciplinami, jako je teorie grafů, celočíselné programování apod. Do programu byla zařazena též zajímavá přednáška o modernizaci středoškolské matematiky.

Při závěrečném hodnocení se účastníci vyslovili positivně o účelnosti semináře a doporučili, aby nezůstal ojedinělou akcí v tomto směru.

Leo Boček, Praha

OBHAJOBY A DISERTAČNÍ PRÁCE KANDIDÁTŮ VĚD

Před *komisemi pro obhajoby kandidátských disertačních prací* obhájili dne 5. července 1973 RNDr. Ivan Netuka práci na téma: „Třetí okrajová úloha v teorii potenciálu", dne 20. září 1973 RNDr. Jiří Rosický práci na téma: „Podsvazy svazu topologií" a dne 18. října 1973 vietnamský státní příslušník Nguyen Manh Quy práci na téma: „O problémech podobjektů".

Redakce