STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

VLADIMÍR ĎURIKOVIČ, Bratislava: *On the solution of boundary value problems for linear parabolic equations of higher order.* (O riešení okrajových úloh pre lineárne parabolické rovnice vyššieho rádu.)

Práca pojednáva o dvoch modifikáciach Dirichletovej úlohy pre rovnicu $D_x^4 u + D_t u = \varphi(x, t)$ na $(0, 1) \times (0, T\rangle$. Pomocou Greenových funkcií sú skonštruované riešenia daných úloh v explicitnej forme za predpokladu, že funkcia φ a okrajové funkcie sú hölderovsky spojité.

JANA ZVÁROVÁ, Praha: *On measures of statistical dependence.* (O mírách statistické závislosti.)

V práci se autorka zabývá problémem měření síly statistické závislosti mezi dvěma náhodnými veličinami. Uvádí systém základních požadavků na vhodné míry statistické závislosti. Blíže si všímá pojetí nejvyšší závislosti náhodných veličin a vyšetřuje souvislost mezi Rényiho přímou závislostí a Höffdingovou c-závislostí s přihlédnutím k existenci či neexistenci atomů ve výběrových prostorech náhodných veličin. Dále zkoumá f-informační míry statistické závislosti a jejich chování vzhledem k systému základních požadavků. Odvozuje horní dosažitelné meze f-informačních měr statistické závislosti za určitých omezení na uvažované náhodné veličiny. Závěrem si všímá výběrových vlastností α-informačních měr statistické závislosti.

LADISLAV NEBESKÝ, Praha: *Reconstruction of a tree from certain maximal proper subtrees.* (Rekonstrukce stromu z jistých maximálních vlastních podstromů.)

V článku je definován γ-podstrom (konečného) stromu T jako speciální případ maximálního vlastního podstromu T a je dokázáno, že skoro každý strom T může být až do izomorfizmu rekonstruován ze své množiny neizomorfních γ-podstromů.

JAN CHRASTINA, Brno: *Boundary value problems for linear partial differential equation with constant coefficients. Homogeneous equation in the half plane.* (Okrajové úlohy pro lineární parciální diferenciální rovnici s konstantními koeficienty. Homogenní rovnice v polorovině.)

V článku je studován nestandardní prostor distribucí, ve kterém mohou být formulovány korektní okrajové úlohy v polorovině pro operátor $p_n(\partial/\partial x)\, \partial^n/\partial t^n + \ldots + p_0(\partial/\partial x)$. Korektností se rozumí jednoznačnost, existence a spojitá závislost na daných okrajových hodnotách. Rozdíl od dřívějšího pojetí je v tom, že nemusí být $p_n(x) \equiv 1$, polynom p_n může mít dokonce i reálné kořeny.

ANTONÍN VRBA, Praha: *Subdeterminants and subgraphs.* (Subdeterminanty a podgrafy.)

V práci jsou popsány nenulové členy hlavních a skoro hlavních minorů čtvercové matice a jejích modifikací pomocí jistých tříd podgrafů ohodnoceného orientovaného grafu. To umožňuje generovat a enumerovat jisté podgrafy daného orientovaného či neorientovaného grafu a odvodit nerovnosti mezi minory jistých matic. Další aplikace spočívají ve vyjádření řešení soustavy lineárních rovnic a koeficientů charakteristického polynomu matice a jejích modifikací pomocí podgrafů.

Ivo Marek, Praha: *An inequality involving positive kernels.* (O jisté nerovnosti obsahující kladná jádra.)

Buď $K = K(s, t)$ nezáporné dvojitě stochastické $\mathscr{L}^2(\Omega \times \Omega, \mu \times \mu)$ jádro, kde Ω je kompaktní množina v R^d a μ je úplná σ-aditivní míra na σ-algebře podmnožin Ω. Dokazuje se platnost nerovnosti $\int_\Omega \int_\Omega K(s, t)\,(x(s)/x(t))\,\mathrm{d}\mu(s)\,\mathrm{d}\mu(t) \geqq \int_\Omega \int_\Omega \mathrm{d}\mu(s)\,\mathrm{d}\mu(t)$ pro libovolnou měřitelnou μ-skoro všude kladnou funkci x. Za některých dalších požadavků na jádro K je uvedena nutná a postačující podmínka pro platnost rovnosti ve výše uvedeném vztahu. Výsledek je rozšířen na obecná nezáporná jádra.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

Úloha č. 1. Buďtež dány tři body A_{13}, A_{24}, S neležící v jedné přímce. Nechť bod A_{13} (A_{24}) je středem svazku paprsků Σ_{13} (Σ_{24}). Ze svazku Σ_{13} (Σ_{24}) vyberte všechny dvojice paprsků a_1, a_3 (a_2, a_4), kterým lze ve svazku Σ_{24} (Σ_{13}) přiřadit dvojice a_2, a_4 (a_1, a_3) tak, aby každá čtveřice a_1, a_2, a_3, a_4 omezovala tětivový čtyřúhelník, vepsaný do kružnice k o středu S.

1) Nalezněte planimetrickou konstrukci, která žádané přiřazení umožní.

2) Ukažte, že přípustnou trojicí bodů A_{13}, A_{24}, S je každá trojice, kdy body A_{13}, A_{24}, S tvoří trojúhelník ostroúhlý, kde P je pata výšky, spuštěné z bodu S na stranu $A_{13}A_{24}$. P je společný průsečík kružnic c_i, opsaných čtyřem trojúhelníkům, tvořeným přímkami a_j, a_k, a_m, na nichž leží strany uvažovaného tětivového čtyřúhelníka (i, j, k, m je libovolná cyklická permutace čísel 1, 2, 3, 4).

Úloha č. 2. Body A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) jsou vrcholy rovinného čtyřúhelníka $[A_i]$. Označme Q^i_{rs} paty kolmic, spuštěných z bodu A_i na strany a úhlopříčku daného čtyřúhelníka $[A_i]$, jež neprocházejí bodem A_i (r, s je libovolná kombinace 2. třídy čísel j, k, m; i, j, k, m libovolná cyklická permutace čísel 1, 2, 3, 4). Trojice bodů Q^i_{rs} při pevném i určují kružnice g_i.

Ukažte, že platí:

1) kružnice g_i ($i = 1, 2, 3, 4$) se protínají v jednom bodě B,

2) tvoří-li např. body A_i ($i = 1, 2, 3$) pevný trojúhelník, zatím co bod A_4 se v rovině tohoto trojúhelníka libovolně pohybuje tak, že žádná trojice bodů $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$ neleží v přímce, opisuje bod B Feuerbachovu kružnici příslušného pevného trojúhelníka.

Josef Brejcha, Brno

Řešení úlohy č. 1 (autor Josef Král) z roč. *97* (1972), str. 334.

Úloha: Nechť U je resolutivní množina s hranicí $U^* \neq \emptyset$ v harmonickém prostoru X (viz [1]) a označme pro každý kompakt $K \subset X$ symbolem $C(K)$ prostor všech spojitých (konečných) reálných funkcí na K. Každé funkci $f \in C(U^*)$ je tedy přiřazena harmonická funkce H^U_f na U, která je zobecněným řešením (v Perronově smyslu) Dirichletovy úlohy příslušné k množině U a okrajové podmínce f. Nechť U_r značí množinu všech $x \in U^*$, pro něž $\lim\limits_{y \to x,\, y \in U} H^U_f(y) = f(x)$ pro každou funkci $f \in C(U^*)$. Množina U se nazývá semiregulární, jestliže pro každou funkci $f \in C(U^*)$ lze příslušnou funkci H^U_f rozšířit na $F \in C(U \cup U^*)$. Je-li U semiregulární, pak U_r je kompaktní.

Obrácení tohoto tvrzení neplatí v Bauerových harmonických prostorech. Rozhodněte, zda obrácené tvrzení platí v Brelotových prostorech (nebo alespoň v harmonickém prostoru indukovaném klasickými harmonickými funkcemi na n-rozměrném euklidovském prostoru $X = R^n$), tj. rozhodněte o správnosti následujícího

Tvrzení. *Nechť X je Brelotův prostor a buď $U \subset X$ relativně kompaktní otevřená (a tedy resolutivní) množina, $U^* \neq \emptyset$. Pak U je semiregulární, právě když U_r je kompaktní.*

V [4] je dokázáno, že tvrzení uvedené v úloze platí pro jistou třídu harmonických prostorů (speciálně pro klasické harmonické funkce na R^n). Nyní ukážeme (věta 5), že zmíněné tvrzení obecně v Brelotových prostorech neplatí.

1. Označení. Je-li M množina v topologickém prostoru, označíme $\overline{M}$ její uzávěr a int M její vnitřek.

Nyní budeme uvažovat prostor $X = E_3$ a klasické harmonické funkce. Nechť G_0 je Lebesgueova oblast v E_3 s iregulárním hrotem x. Předpokládejme, že G_1 je neprázdná otevřená množina s hladkou hranicí, pro niž $\overline{G}_1 \subset G_0$, a pro y z uzávěru množiny $G = G_0 - \overline{G}_1$ označme symbolem μ_y výmet (balayage) Diracovy míry ε_y soustředěné v bodě y na množinu $E_3 - G$. (Pro $z \in G$ je tedy μ_z harmonická míra příslušná množině G a bodu z.) Protože bod x je iregulární bod souvislé množiny G, nosič míry μ_x obsahuje množinu G_r všech regulárních bodů množiny G ([3], lemma 3.8). Odtud plyne, že

$$0 < \mu_x(G_1^*) < 1 \,. \tag{1}$$

2. Lemma. *Nechť $c > 0$ a nechť f je funkce na G^* taková, že $f(G_1^*) = \{0\}, f(G_0^*) = \{c\}$. Potom $H_f^G > 0$ na G a*

$$\liminf_{y \to x,\, y \in G} H_f^G(y) < c \,. \tag{2}$$

Důkaz. Existují $x_n \in G$ konvergující k x, pro něž míry μ_{x_n} konvergují slabě k μ_x ([3]; lemma 3.1). Speciálně

$$\lim_{n \to \infty} H_f^G(x_n) = c \,.\, \mu_x(G_0^*) \,.$$

Z (1) plynou nerovnosti $0 < \mu_x(G_0^*) < 1$ a tedy platí (2). Protože pro jisté $x_n \in G$ je $H_f^G(x_n) > 0$ a funkce f je nezáporná, je $H_f^G > 0$ na G.

3. Lemma. *Nechť $g \in C(G_1^*)$. Potom existuje právě jedno $c \in R^1$ tak, že Dirichletova úloha příslušná k množině G a funkci*

$$f = \begin{cases} g & \text{na } G_1^* \\ c & \text{na } G_0^* \end{cases}$$

má klasické řešení.

Důkaz. Z lemmatu 2 plyne, že konstanta c s uvedenou vlastností existuje nejvýše jedna. Označme μ_x^1 restrikci míry μ_x na G_1^* a položme (srv. s (1))

$$c = [\mu_x^1(G_1^*)]^{-1} \,.\, \mu_x^1(g) \,. \tag{3}$$

Stačí ukázat, že Dirichletova úloha příslušná k množině G a okrajové podmínce

$$h = \begin{cases} g - c & \text{na } G_1^* \\ 0 & \text{na } G_0^* \end{cases}$$

má klasické řešení. K tomu ovšem stačí zkoumat chování funkce H_h^G v okolí bodu x. Je-li však $x_n \in G$, $x_n \to x$ a míry μ_{x_n} konvergují slabě k míře μ, existuje $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ tak, že

$$\mu = \alpha \,.\, \varepsilon_x + (1 - \alpha)\, \mu_x$$

([2], Corollary 7.2.6). Vidíme, že

$$\lim_{n \to \infty} H_h^G(x_n) = 0 + (1 - \alpha) \,.\, [\mu_x^1(g) - c \,.\, \mu_x^1(G_1^*] = 0 = h(x) \,.$$

Tím je lemma dokázáno.

4. Lemma. *Nechť F je uzavřená podmnožina G_0 a nechť $G_0 - F$ je souvislá množina. Označme $\mathscr{K}$ systém všech spojitých funkcí na $\bar{G}_0 - F$, které jsou harmonické na $G_0 - F$ a konstantní na G_0^*; nechť $x_0 \in \bar{G}_0 - F$. Jestliže $k_n \in \mathscr{K}$ je neklesající posloupnost s limitou k a $k(x_0) < \infty$, potom $k \in \mathscr{K}$.*

Důkaz. Sestrojme neprázdnou otevřenou množinu G_1 s hladkou hranicí, pro niž $F \subset G_1 \subset \bar{G}_1 \subset G_0$.

Z klasické Harnackovy věty vyplývá, že k je harmonická funkce na oblasti $G_0 - F$. Toto je zcela zřejmé, pokud $x_0 \in G_0 - F$. Z předpokladu $k(y) = +\infty$ pro všechna $y \in G_1^*$ plyne snadno podle lemmatu 3 (srv. rovnost (3)), že $k(z) = +\infty$ pro každé $z \in G_0^*$. Je tedy pravda, že funkce k je v každém případě konečná v některém bodě z $G_0 - F$.

Nechť $m > n$ jsou přirozená čísla a $w \in G_0^*$. Protože funkce k je omezená na kompaktní množině $G_1^* \subset G_0 - F$, je posloupnost $\{k_n(w)\}$ omezená (srv. opět s (3)). Z principu maxima pro harmonické funkce dostáváme nerovnost

$$\sup \{(k_m - k_n)(z);\quad z \in \bar{G}_0 - G_1) \leqq \sup \{(k_m - k_n)(z)\,;\quad z \in G_1^* \cup \{w\}\} \,. \tag{4}$$

Posloupnost $\{k_n\}$ konverguje stejnoměrně na G_1^* (podle Diniho věty) a ze (4) tedy snadno plyne, že k je spojitá funkce na $\bar{G}_0 - G_1$. Nyní se již snadno důkaz tvrzení dokončí.

5. Věta. *Nechť G_0 a G_1 mají stejný význam jako v odst. 1. Nechť X je Alexandrovova kompaktifikace G_0. Pro každou otevřenou množinu $V \subset X$ označíme $\mathscr{H}(V)$*

množinu všech reálných spojitých funkcí na V, jejichž restrikce na $V \cap G_0$ jsou řešení Laplaceovy rovnice na $V \cap G_0$. Potom $(X, \mathscr{H})$ je Brelotův prostor, na němž konstanty jsou harmonické. Množina $U = G_0 - \bar{G}_1 \subset X$ není semiregulární a přitom $U_r = G_1^*$ je kompaktní.

Důkaz. Prostor X je zřejmě lokálně souvislý a nemá žádné isolované body. Z lemmatu 3 plyne, že regulární množiny vzhledem k $\mathscr{H}$ tvoří basi X. Pomocí lemmatu 4 a klasické Harnackovy věty se snadno odvodí, že $\mathscr{H}$ má Brelotovu konvergenční vlastnost. $(X, \mathscr{H})$ je tedy Brelotův prostor.

Uvažujme nyní otevřenou množinu $U = G_0 - \bar{G}_1$. Každý bod z G_1^* je regulární bod množiny U. Z lemmatu 2 plyne, že ideální bod ω $(\{\omega\} = X - G_0)$ je iregulární bod množiny U a tedy U_r je kompaktní. Na $U^* = G_1^* \cup \{\omega\}$ definujme funkci h tak, aby $h(G_1^*) = \{0\}$ a $h(\omega) = 1$. Kdyby množina U byla semiregulární, existovala by

$$\lim_{y \to \omega\; y \in U} H_h^U(y) = c\,.$$

Pro funkci f definovanou v lemmatu 2 by pak existovalo klasické řešení Dirichletovy úlohy příslušné k množině G a funkci f, což je spor s (2).

Množina U není tedy semiregulární a důkaz věty je hotov.

6. Poznámka. Tvrzení, že $(X, \mathscr{H})$ je Brelotův prostor, je uvedeno bez důkazu v [2] (Excersice 6.3.10). Na jiný příklad harmonického prostoru s analogickými vlastnostmi, uvedený v článku C. Constantinescu (Rev. Roum. Math. Pures Appl. 10 (1965), 267–170), mne upozornil J. LUKEŠ.

Zvolíme-li $x_0 \in G_1$ a uvažujeme harmonický podprostor $X_0 = X - \{x_0\}$ prostoru $(X(\mathscr{H})$, dostáváme příklad nekompaktního Brelotova harmonického prostoru, v němž oblast U má uzavřenou množinu regulárních bodů a není semiregulární.

Literatura

[1] *C. Constantinescu:* Harmonic spaces and their connections with the semi-elliptic differential equations and with the Markov processes, Ellipitsche Differentialgleichungen (Symposium), Akademie-Verlag, Berlin, 1969.

[2] *C. Constantinescu - A. Cornea:* Potential theory on harmonic spaces, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[3] *E. G. Effros - J. L. Kazdan:* Applications of Choquet simplexes to elliptic and parabolic boundary value problems, J. Diff. Equatinos, *8* (1970), 95–134.

[4] *I. Netuka:* Poznámka o semiregulárních množinách, Čas. pěst. mat. *98* (1973), 419–421.

Ivan Netuka, **Praha**

RECENSE

SYMMETRIC SPACES. Short courses presented at Washington University. Uspořádali W. M. Boothby a G. L. Weiss. Marcel Dekker, Inc., New York 1972. Stran XIII + 487, cena neudána.

Ve školním roce 1969/70 uspořádal Matematický ústav washingtonské university řadu přednášek o různých aspektech teorie symetrických prostorů. Recenzovaný sborník se skládá z textů, přednesených v těchto kursech. V dalším proberu stručné obsahy některých článků.

N. R. Wallach: *Minimal Immersions of Symmetric Spaces into Spheres.* Nechť $(M', \langle, \rangle)$ je Riemannova varieta, ∇' Riemannova konexe na M', M varieta (všechny variety a zobrazení jsou třídy C^∞) a $x : M \to M'$ imerse. Nechť $p \in M$, X a Y buďtež vektorová pole na M v okolí bodu p, rozšiřme je na vektorová pole X a Y na M' v okolí bodu p. Symetrické bilineární zobrazení (tzv. druhou fundamentální formu imerse x) $B_p : T_p(M) \times T_p(M) \to N_p = \{v \in T_p(M'); \langle v, T_p(M) \rangle_p = 0\}$ definujeme jako $B_p(X, Y) = \nabla'_{X_p} Y - \nabla_{X_p} Y$. Vektor střední křivosti se pak definuje jako $H_p = n^{-1} . \sum_{i=1}^{n} B_p(e_i, e_i)$, kde $e_1, \ldots, e_n$ je ortonormální base v $T_p(M)$. Imerse $x : M \to M'$ se konečně nazývá minimální, jestliže $H \equiv 0$. V článku se studují minimální imerse do euklidovských prostorů a do sfér; např. je dán popis minimálních isometrických imersí kompaktních symetrických prostorů do sfér. Rovněž se studují otázky rigidity. Nechť S^n_k je sféra euklidovského prostoru E^{n+1} křivosti k. Dvě minimální imerse $x, y : S^n_x \to S^p_1$ se nazývají ekvivalentní, jestliže $Ax = y$. Je dokázán tento výsledek: Pro každé $n \geqq 3$ a $K > 0$ existuje vektorový prostor $W_{n,K}$ a jeho kompaktní konvexní podmnožina $L_{n,K}$, která hladce parametrisuje množinu neekvivalentních minimálních isometrických imersí $x : S^n_K \to S^p_1$, které neleží ve velké sféře S^{p-1}_1. Jestliže $K \neq 1, n/2(n + 1), n/3(n + 2)$ a $L_{n,K} \neq \emptyset$, potom $\dim L_{n,K} \geqq 18$. Vnitřní body $L_{n,K}$ odpovídají imersím, pro něž p je maximální.

R. Gangolli: *Spherical Functions on Semisimple Lie Groups.* Předpokládejme, že známe klasickou Fourierovu analýzu na euklidovském prostoru, na anuloidu nebo na kompaktní Lieově grupě. V každém z těchto případů máme lokálně kompaktní topologickou grupu G a nějaký prostor F funkcí na G. Jestliže mluvíme o harmonické analýze funkcí z F, studujeme obvykle následující problémy: (1) Konstrukce duálního objektu k (G, F). (2) Konstrukce speciálních funkcí. (3) Definice Fourierovy transformace $f \to \hat{f}$. V práci není studován obecný případ (G, F), ale následující situace: G je souvislá nekompaktní polojednoduchá Lieova grupa s konečným centrem, K maximální kompaktní podgrupa v G, $C_c(G)$ prostor funkcí s kompaktním nosičem, $F = C_c(K \setminus G/K) \subset C_c(G)$ se skládá z těch f, pro něž $f(k_1 x k_2) = f(x)$ pro všechna $x \in G$; $k_1, k_2 \in K$ (tyto funkce se nazývají sférickými).

R. Gangolli: *Spectra of Discrete Uniform Subgroups of Semisimple Lie Groups.* Nechť G je souvislá polojednoduchá Lieova grupa s konečným centrem a $\Gamma \subset G$ diskrétní podgrupa taková, že G/Γ je kompaktní; nechť dx je Haarova míra na G. Pro každé $p > 0$ nechť $L_p(G/\Gamma)$ je prostor měřitelných funkcí f na G, pro něž (i) $f(\gamma x) = f(x)$ pro $\gamma \in \Gamma, x \in G$; (ii) $\|f\|_{p,\Gamma} = (\int_{G/\Gamma} |f(x)|^p \, dx)^{1/p} <$

$< \infty$. Prostor $L_2(G/\Gamma)$ je separabilní Hilbertův prostor. Grupa G má unitární representaci R na $L_2(G/\Gamma)$ definovanou relací $(R_x f)(y) = f(yx)$ pro $y \in G$. Hlavním problémem je studium této representace.

K. I. Cross - R. A. Kunze: *Fourier Decompositions of Certain Representations.* Uvažuje se topologická transformační grupa (U, X), kde U a X jsou Hausdorffovy prostory, grupa U je kompaktní a X je lokálně kompaktní prostor. Nechť rovnice $L(u) f(x) = f(u^{-1}x)$ pro $u \in U$ $x \in X$ udává spojitou unitární representaci L grupy U na prostoru $L_2(X)$ funkcí; předmětem vyšetřování je tato representace.

R. Hermann: *Geometric Ideas in Lie Group Harmonic Analysis Theory.* Je dán přehled autorových výsledků o asymptotickém chování elementů representace Lieovy grupy a studiu vztahů mezi harmonickou analýzou na Lieově grupě a kompaktifikací homogenních prostorů.

A. W. Knapp: *Bounded Symmetric Domains and Holomorphic Discrete Series.* Studují se symetrické prostory nekompaktního typu, které jsou přirozeným způsobem komplexními varietami.

S. Kobayashi: *Schwarz Lemma.* Jsou uvedeny některé věty, obsažené v autorově knize o hyperbolických varietách.

Y. Matsushima: *On Tube domains.* Válcová oblast $T(\Omega) \subset C^n$ je množina bodů $z = x + iy \in C^n$, kde $y \in \Omega \subset R^n$ a Ω má tyto vlastnosti: (i) Ω je otevřená, konvexní a pro každé $x \in \Omega$ a $\lambda < 0$ je $\lambda x \in \Omega$, (ii) Ω neobsahuje žádnou přímku. Dokazuje se následující výsledek: Nechť $T(\Omega)$, $T(\Omega')$ jsou holomorfně ekvivalentní, potom existuje regulární lineární transformace $\tau : R^n \to R^n$, pro níž $\tau(\Omega) = \Omega'$. Každou $T(\Omega)$ je možno vnořiti jako otevřenou množinu do algebraické podvariety B komplexního projektivního prostoru tak, že *Aut* $T(\Omega)$ je podgrupou grupy projektivních transformací zachovávajících B a $T(\Omega)$.

Z předchozího je patrné, jaká je zhruba problematika jednotlivých článků. U zbývajících udávám proto jen jejich autory a názvy. S. Helgason: *Conical Distributions and Group Representations.* J. A. Wolf: *Fine Structure of Hermitian Symmetric Spaces.* H. Furstenberg: *Boundaries of Riemannian Symmetric Spaces.* A. Koranyi: *Harmonic Functions on Symmetric Spaces.* N. J. Weiss: *Fatou's Theorem for Symmetric Spaces.* S. J. Rallis: *New and Old Results in Invariant Theory with Applications to Arithmetic Groups.* Hsien-Chung Wang: *Topics on Totally Discontinuous Groups.*

Sborník je jistě velmi cenný, zvláště si můžeme vážiti podrobných seznamů literatury u jednotlivých článků.

Alois Švec, Praha

Isaac Chavel: RIEMANNIAN SYMMETRIC SPACES OF RANK ONE. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 5. M. Dekker, Inc., New York 1972. Str. VII + 81, cena neudána.

Účelem monografie je podati elementární výklad teorie uvedených prostorů. V první kapitole jsou uvedeny základní definice (lineární konexe, její tensory torse a křivosti, Riemannova varieta, geodetiky, Jacobiho pole, fokální a konjugované body) a nejdůležitější vlastnosti konjugovaných bodů. Druhá kapitola je pokračováním knihy Gromolla, Klingenberga a Meyera Riemannsche Geometrie im Grossen (Springer Verlag 1968) a dokazuje se v ní Bergerova věta: Nechť M je úplná jednoduše souvislá Riemannova varieta, pro níž $\frac{1}{4} \leqq K(a) \leqq 1$, $K(a) =$ křivost 2-řezu a; potom M je homeomorfní se sférou nebo je isometrická s Riemannovou symetrickou varietou řádu jedna (řád jedna = ostře positivní křivost). Třetí kapitola je v podstatě úvodem do teorie Riemannových homogenních prostorů. Nejprve jsou uvedeny nutné definice z teorie Lieových grup a je probrána teorie přirozeně reduktivních Riemannových homogenních prostorů a jejich kanonických konexí, zavedených K. Nomizu. Riemannův homogenní prostor G/H se nazývá 2-homogenní, jestliže dva páry stejně vzdálených bodů je možno v sebe převésti pohybem; jsou nalezeny podmínky pro to, aby G/H byl 2-homogenní. Konečně v poslední kapitole jsou studovány Riemannovy symetrické prostory řádu jedna. Riemannův prostor M se nazývá symetrickým, jestliže je souvislý a pro každé $p \in M$ existuje isometrie $s_p : M \to M$ s těmito vlastnostmi: (i) $s_p(p) = p$; (ii) jestliže $\gamma(t)$ je geodetika s $\gamma(0) = p$, pak $s_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$ [v definici na str. 64 si opravte $\gamma(0) = 0$ na správné $\gamma(0) = p$]. Jestliže M je Riemannův symetrický prostor, pak je nutně lokálně symetrický, tj. $\nabla R = 0$, kde R je tensor křivosti. Nejprve se dokazuje Cartanova věta, podle níž jednoduše souvislý lokálně symetrický Riemannův prostor je nutně symetrický. Nechť M je Riemannův symetrický prostor s positivní křivostí. Potom M je Riemannův homogenní prostor, jeho křivost splňuje $K \geqq$ const. > 0 a podle Bonnetovy-Meyersovy věty je M kompaktní. Grupa $J(M)$ isometrií a její komponenta identity G jsou kompaktní Lieovy grupy transitivní na M; jestliže H je isotropická grupa bodu $o \in M$, potom G/H je analyticky difeomorfní s M. Všechny geodetiky v G/H jsou jednoduše uzavřené a mají konstantní délku. Po řadě přípravných úvah se ukáže, že G/H má strukturu k-dimensionálního projektivního prostoru.

Chavelova kniha má velkou výhodu v tom, že je velmi krátká, ale dochází k hlubokým a současně moderním výsledkům. Od čtenáře se nepředpokládají velké předběžné znalosti, ale četba není triviální. Důkazy jsou provedeny detailně. Knihu doporučuji hlavně klasicky vzdělaným čtenářům, protože při dokazování výsledků se nepoužívá složité Morseovy teorie ani teorie kompaktních Lieových grup.

Alois Švec, Praha

I. Kra: AUTOMORPHIC FORMS AND KLEINIAN GROUPS. W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass. (U.S.A.) 1972. Stran XIV + 464, cena neudána.

Nechť *Möb* označuje grupu zobrazení $z \to (az + b)/(cz + d)$, $ad - bc = 1$, rozšířené komplexní roviny $C^* = C \cup \{\infty\}$, předmětem studia jsou podgrupy $\Gamma \subset$ *Möb*. Nechť X je Riemannova plocha a Γ grupa jejích konformních automorfismů, definujme $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma;\ \gamma x = x\}$. Říkáme, že Γ je nespojitá v x jestliže: (i) Γ_x je konečná, (ii) existuje okolí U bodu x tak, že $\gamma(U) = U$ pro $\gamma \in \Gamma_x$ a $\gamma(U) \cap U = \emptyset$ pro $\gamma \in \Gamma - \Gamma_x$. Pišme $\Omega(\Gamma) = \{x \in X;\ \Gamma$ nespojitá v $x\}$ grupa Γ se nazývá nespojitá, jestliže $\Omega(\Gamma) \neq \emptyset$. Limitní množina se definuje jako $\Lambda(\Gamma) = X - \Omega(\Gamma)$; je možno ukázati, že card $\Lambda(\Gamma) = 0, 1, 2, \infty$. Jestliže card $\Lambda(\Gamma) \leqq 2$, pak Γ se nazývá elementární. Jestliže $\Omega(\Gamma) \neq \emptyset$ a card $\Lambda(\Gamma) = \infty$, pak Γ se nazývá neelementární Kleinova grupa. Jestliže Γ je Kleinova a v C^* existuje kruh k, jehož vnitřek se zachovává transformacemi z Γ, pak Γ se nazývá Fuchsova (prvního druhu v případě $\Lambda(\Gamma) = k$, jinak druhého druhu). Nechť $\tilde{X}$ je universální krytí Riemannovy plochy X, potom $\tilde{X}$ je buď C^* nebo C nebo $U = \{z \in C;\ |z| < 1\}$; zřejmě $G = \{$konformní automorfismy plochy $\tilde{X};\ \pi \circ g = \pi\} \subset$ *Möb*.

Předmětem první kapitoly je podrobnější analýza Riemannových ploch (abelovské diferenciály, Riemannova-Hurwitzova relace, Riemannova-Rochova věta, Weylovo lemma). V další kapitole se popisuje struktura orbit Kleinovy grupy G. Nechť $\pi : \Omega(G) \to \Omega(G)/G$ je přirozená projekce; na prostoru $\Omega(G)/G$ se konstruuje komplexní struktura taková, že π je holomorfní zobrazení. Uveďme jeden korolár získaných výsledků: Nechť Γ je Fuchsova grupa operující na $U = \{z \in C;\ \text{Im}\, z > 0\}$; jestliže Γ obsahuje parabolický element (tj. trace$^2\ \gamma = (a + d)^2 = 4$), pak U/Γ obsahuje propíchnutí (= puncture). Tato propíchnutí jsou ve vzájemné korespondenci s třídami konjugovanosti parabolických elementů. Dochází se až k důkazu klasické věty: Nechť S je kompaktní Riemannova plocha rodu $g \geqq 2$ a Aut S grupa jejích konformních automorfismů, potom card Aut $S \leqq 84(g - 1)$.

Třetí kapitola se zabývá automorfními formami. Nechť $D \subset C^*$ je otevřená množina, p a q celá čísla nebo poloviny celých čísel. Nechť $f : D \to C^*$ je holomorfní zobrazení. Pro každou funkci φ na $f(D)$ definujeme na D funkci $(f^*_{p,q}\varphi)(z) = \varphi(f(z)) f'(z)^p \overline{f'(z)^q}$; píšeme $f^*_p = f^*_{p,0}$. Nechť nyní D má hranici ∂D s card $\partial D > 2$, G je nespojitá grupa konformních automorfismů množiny D a $q \geqq 2$ je celé číslo. Měřitelná automorfní forma váhy $-2q$ se pak definuje jako třída ekvivalence (modulo funkce skoro všude nulové) měřitelných funkcí μ, pro něž $A^*_q \mu = \mu$ pro všechna $A \in G$. Podrobné vyšetření automorfních forem vede k hlavní větě, podle níž na každé Riemannově ploše existuje nekonstantní meromorfní funkce. Ve čtvrté kapitole se probírají aproximační věty pro holomorfní funkce, v další tzv. Eichlerova kohomologie. Vyložení obsahu páté kapitoly přesahuje rámec referátu. Jako přímá aplikace se v šesté kapitole dokazuje Riemannova-Rochova věta se svými důsledky (struktura prostoru abelovských diferenciálů). V předchozím vybudovaný aparát je velmi mocný. Ukáži to citováním některých výsledků, které se na jeho základě již poměrně snadno dokáží a jsou obsaženy v závěrečné kapitole. Nejprve se dokazují Behnkeho-Steinovy výsledky. Jestliže D je jednoduše souvislá oblast v otevřené Riemannově ploše M, potom každá holomorfní funkce na D může být stejnoměrně aproximována na kompaktních podmnožinách v D funkcemi holomorfními na M. Nechť $\{p_k\}$ je diskrétní posloupnost na M, $\{v_k\}$ posloupnost přirozených čísel, potom existuje holomorfní funkce f na M tak, že f má nuly pouze v bodech $\{p_k\}$ a $\text{ord}_{p_k} f = v_k$. Nechť dále z_k je lokální souřadnice s $z_k(p_k) = 0$ a $\{a_{k,i(k)}, a_{k,i(k)+1}, \ldots, a_{k,j(k)}\}$ konstanty pro $k = 1, 2, \ldots$, kde $i(k)$ a $j(k)$ jsou celá čísla s $j(k) \geqq$ $\geqq i(k)$; potom existuje na M meromorfní funkce f, která je holomorfní a nenulová na M s výjimkou bodů $\{p_k\}$, kde má Laurentovy řady $f(z_k) = \sum_{j=i(k)}^{\infty} a_{k,j} z_k^j$.

Nechť dále M je Riemannova plocha a $A(M)$ resp. $K(M)$ okruh holomorfních resp. těleso meromorfních funkcí na M. Nechť M a N jsou Riemannovy plochy a $F: A(N) \to A(M)$ homomorfismus takový, že: (i) obraz F obsahuje alespoň jednu nekonstantní funkci, (ii) restrikce F na $C \subset A(N)$ je automorfismus komplexních čísel, který zachovává $\sqrt{(-1)}$. Potom existuje jediné holomorfní zobrazení $F^* : M \to N$, které indukuje F, tj. $(Ff)(x) = f(F^*(x))$ pro $f \in A(N)$, $x \in M$. Pro meromorfní funkce dostáváme tento výsledek. Nechť $F: K(N) \to K(M)$ je surjektivní isomorfismus; jestliže $F(i) = i$ a navíc $F(\lambda) = \lambda$ pro $\lambda \in C$ při N kompaktní, potom F je indukován jediným holomorfním homeomorfismem $F^* : M \to N$. Ohodnocením na tělese K rozumíme zobrazení $v: K - \{0\} \to Z$ (= celá čísla) takové, že pro $f, g \in K - \{0\}$ platí $v(fg) = v(f) + v(g)$ a $v(f + g) \geqq \min \{v(f), v(g)\}$. Nechť $x \in M$; zobrazení $v_x : K(M) - \{0\} \to Z$, $v_x(f) = \text{ord}_x f$, je ohodnocením. Ukazuje se, že každé ohodnocení na $K(M)$ je ekvivalentní s nějakým ohodnocením v_x.

Knihu doporučuji čtenářům, kteří znají teorii Riemannových ploch. Začátečník by se nepochybně ztratil v množství technických detailů středních kapitol.

Alois Švec, Praha

Frederick W. Stevenson: PROJECTIVE PLANES. W. H. Freeman and Comp., San Francisco, 1972. Stran X + 416, cena $ 13.50.

Autor ve své předmluvě zcela jasně popisuje význam své knihy: „Tato kniha je pokusem o hlubší studium důsledků jednoduchého axiomatického systému, který popisuje matematickou strukturu, známou jako projektivní rovina. O projektivní rovině bylo napsáno mnoho knih. Pickertova *Projektive Ebenen* (Springer, 1955) a novější Dembowskiho *Finite Geometries* (Springer, 1968) vyčerpávají popis jediného matematického objektu způsobem, který není obvyklý. Tyto knihy však nejsou učebnicemi. Jsou velmi cenné pro pokročilé aspiranty (graduate students), ale jsou mimo chápání průměrného studenta (undergraduate). Učebnice projektivní geometrie se snaží pokrýti široký okruh problémů. To je samozřejmé, protože projektivní geometrie je přirozeným odrazovým můstkem ke studiu neeuklidovských geometrií a dokonce lineární algebry. Nicméně jejich účelem není studovati projektivní rovinu jako samostatný objekt. Všeobecně je přijato za správné, že student matematiky by měl prostudovati do hloubky alespoň jeden její obor. Tímto oborem je často algebra — nejspíše teorie grup nebo okruhů. Ale i teorie projektivní roviny je vhodným oborem pro takové koncentrované studium. Obdobně jako teorie grup nebo okruhů má jednoduchý axiomatický základ. Také ona uvádí studenta do několika základních pojmů, z nichž nejdůležitější je pojem grupy transformací. Projektivní rovina je pozoruhodně příbuzná s algebraickými strukturami se dvěma binárními operacemi (těleso, okruh s dělením, polotěleso, skorotěleso, kvasitěleso). Její studium dále přivádí studenta k jiným oborům matematiky, např. ke kombinatorické analýze, lineární algebře a teorii čísel. Konečně je zde mnoho neřešených problémů; některé jsou patrně řešitelné, jiné jsou klasické a nebudou patrně nikdy vyřešeny.“

S tímto autorovým úvodem plně souhlasím. V naší zemi byla kdysi projektivní geometrie na vysoké úrovni. Z různých důvodů však její rozvoj naprosto ustrnul (až na jedinou čestnou výjimku); obdobně je tomu i v algebraické geometrii. Ostatně ani historie geometrie se nedostala za objev neeukleidovské geometrie a jména jako S. Lie jsou téměř zapomenuta. Za projektivní geometrii se u nás převážně vydává teorie konstrukcí kuželoseček z mnoha (mnoho $\doteq$ pět) elementů. Tento stav je nutno radikálně změnit. Důležité je, že světový vývoj v teorii projektivní (afinní, neeukleidovské atd.) geometrie je možno i u nás během několika let pohodlně dohnati; v algebraické geometrii je to podle mého mínění již nemožné. Stevensonova kniha je velmi užitečná. Jest však již smutnou tradicí, že bude dlouho nepřístupná a budeme si muset počkat na případný ruský překlad. Toho jsme se již dočkali alespoň u Hartshorneovy knihy (*Foundations of Projective Geometry*; Benjamin, 1967), která je však daleko elementárnější. Nejlepším řešením by patrně bylo napsání vlastní české učebnice. Protože o Stevensonovu knihu chci vzbudit skutečný zájem, jsem nucen nejprve vyložit nejzákladnější pojmy, jež jsou v ní studovány.

Rovinou nazveme trojici $(\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{I})$, kde $\mathscr{P}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{I}$ jsou množiny a $\mathscr{P} \cap \mathscr{L} = \emptyset$, $\mathscr{P} \cup \mathscr{L} \neq \emptyset$, $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P} \times \mathscr{L}$; prvky z $\mathscr{P}$ se nazývají *body*, prvky z $\mathscr{L}$ *přímkami* a $(p, L) \in \mathscr{I}$ znamená, že *bod* p *leží na přímce* L. Rovina $(\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{I})$ se nazývá *projektivní*, jestliže splňuje následující axiomy: (1) každé dva body $p \neq q$ leží na právě jedné přímce; (2) každé dvě přímky $L \neq M$ procházejí právě jedním bodem; (3) existuje čtveřice bodů, z nichž žádné tři neleží na přímce (tzv. 4-*roh*).

Čtenář patrně zná pouze jediný příklad projektivní roviny, a to rovinu nad reálnými čísly $\mathbf{R}$. Ta je definována takto: $\mathscr{P} = \{[x, y, z] : x, y, z \in \mathbf{R},\ [x, y, z] \neq [0, 0, 0]\}$, $\mathscr{L} = \{[a, b, c] : a, b, c \in \mathbf{R},\ [a, b, c] \neq [0, 0, 0]\}$, $\mathscr{I} = \{[x, y, z], [a, b, c]) : ax + by + cz = 0\}$; $[p, q, r]$ značí množinu všech trojic tvaru (pz, qz, rz), kde $0 \neq z \in \mathbf{R}$. Uveďme proto velmi obecnou konstrukci projektivní roviny. *Ternárním okruhem* (ternary ring) nazýváme systém $T = (R, t)$, kde R je množina a $t : R \times R \times R \to R$ je zobrazení s následujícími vlastnostmi: (1) existují prvky $0, 1, \in R$ tak, že $0 \neq 1$, $t(0, a, b) = t(a, 0, b) = b$, $t(1, a, 0) = t(a, 1, 0) = a$; (2) k daným $a, b, c, d \in R$, $a \neq c$, existuje jediné $x \in R$ tak, že $t(x, a, b) = t(x, c, d)$; (3) k daným $a, b, c, \in R$ existuje jediné $x \in R$ tak, že $t(a, b, x) = c$; (4) k daným $a, b, c, d \in R$, $a \neq c$, existuje jediná dvojice $(x, y) \in R \times R$ tak, že $t(a, x, y) = b$ a $t(c, x, y) = d$. Nechť nyní $T = (R, t)$ je daný ternární okruh a $\mathscr{P} = \{[x, y], [x], z : x, y \in R\}$, $\mathscr{L} = \{\langle x, y\rangle, \langle x\rangle, Z : x, y \in R\}$, $\mathscr{I} = \{([x, y], \langle m, k\rangle) : t(x, m, k) = y\} \cup \{([x, y], \langle x\rangle)\} \cup \{([x], \langle x, y\rangle)\} \cup \{(z, \langle x\rangle)\} \cup \{([x], Z)\} \cup (z, Z)$. Předpokládáme-li $\mathscr{P} \cap \mathscr{L} = \emptyset$, $z \notin \{[x, y], [x] : x, y \in R\}$, $Z \notin \{\langle x, y\rangle, \langle x\rangle : x, y \in R\}$, je $\pi_T = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{I})$ projektivní rovinou. Důkaz není obtížný. Ukažme např., která (jediná) přímka L prochází dvěma různými body $p, q, \in \mathscr{P}$: (α) Nechť $p = [a, b]$, $q = [a, d]$, pak $L = \langle a\rangle$; (β) nechť $p = [a, b]$, $q = [c, d]$, $a \neq c$, pak existuje jediná dvojice $(m, k) \in R \times R$ tak, že $t(a, m, k) = b$, $t(c, m, k) = d$ a $L = \langle m, k\rangle$; (γ) $p = [a, b]$, $q = [c]$, pak existuje jediné $k \in R$ tak, že $t(a, c, k) = b$ a $L = \langle c, k\rangle$; (δ) $p = [a, b]$, $q = z$, pak $L = \langle a\rangle$, (ε) $p = [a]$, $q = [b]$ nebo $q = z$, pak $L = Z$. Obdobně by se našel (jediný) průsečík dvou přímek. Žádné tři z bodů $[0, 0]$, $[0]$, $[1, 1]$, z neleží na přímce. Uvedený příklad se zdá být nesmírně umělým. Ukažme, že tomu tak není. Nechť $\pi = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{I})$ je projektivní rovina a $\{u, v, o, e\}$ její daný 4-roh. Systém $T(u, v, o, e) \equiv T = (R, t)$ definujme následovně: (α) $R = ou - \{u\}$, kde pq značí přímku body p, q; (β) pro $a, b, c \in R$ se $t(a, b, c)$ definuje jako $vw \cap ou$, kde postupně $m = vb \cap oe$, $n = um \cap ve$, $p = on \cap uv$, $q = cv \cap oe$, $r = uq \cap ov$, $s = pr \cap av$, $w = su \cap oe$. Snadno se ukáže, že předchozí konstrukce je proveditelná a T je ternárním okruhem, který ovšem záleží na volbě 4-rohu $\{u, v, o, e\}$. Dvě roviny $\pi = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{I})$, $\pi' = (\mathscr{P}', \mathscr{L}' \mathscr{I}')$ se nazývají *isomorfní*, jestliže existují vzájemně jednoznačná zobrazení $f: \mathscr{P} \to \mathscr{P}'$, $F: \mathscr{L} \to \mathscr{L}'$ tak, že $(p, L) \in \mathscr{I}$ právě když $(f(p), F(L)) \in \mathscr{I}'$. Platí, že pro projektivní rovinu π máme $\pi \sim \pi_{T(u,v,o,e)}$, kde $\{u, v, o, e\}$ je libovolný 4-roh v π. Ternární okruh je tedy algebraický systém, který nám umožňuje zavést souřadnice do projektivní roviny. Nicméně pojem ternárního okruhu je dosti neobvyklý. Z tohoto důvodu proberme podrobněji příklad projektivní roviny π_0, která je projektivním rozšířením obyčejné eukleidovské roviny. V π_0 zvolme pravoúhlý systém souřadnicový a nechť $o = (0, 0)$, $e = (1, 1)$, u (resp. v) je nevlastní bod osy x (resp. y). Potom R je právě osa x; nechť $a = (\alpha, 0)$, $b = (\beta, 0)$, $c = (\gamma, 0)$. Provedením předchozí konstrukce zjistíme, že $t(a, b, c) = (\alpha\beta + \gamma, 0)$. Tento příklad nám dává vodítko, jak konstruovati ternární okruhy.

Nechť $T = (R, t)$ je ternární okruh a $P_T = (R, +, .)$ je algebra, v níž $a + b = t(1, a, b)$, $a \circ b = t(a, b, 0)$. Ternární okruh T se nazývá *lineárním*, jestliže $t(a, b, c) = a \circ b + c$, kde $a \circ b + c$ je definováno v P_T, tj. $t(a, b, c) = t(1, t(a, b, 0), c)$. Systém $D = (S, +, .)$, tj. množina S s dvěma binárními operacemi $+$ a $.$, se nazývá *okruhem s dělením* (division ring), jestliže: (1) $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a . (b . c) = (a . b) . c$ pro $a, b, c \in S$; (2) existují $o, e \in S$ tak, že $o \neq e$, $a + o = o + a = a$, $e . a = a . e = a$ pro $a \in S$; (3) k $a \in S$ existuje $b \in S$ tak, že $a + b = b + a = o$, jestliže $a \neq 0$, existuje $c \in S$ tak, že $a . c = c . a = e$; (4) $a + b = b + a$ pro $a, b \in S$; (5) $a . (b + c) = a . b + a . c$, $(a + b) . c = a . c + b . c$ pro $a, b, c \in S$. Okruh s dělením $D = (S, +, .)$ se nazývá *tělesem*, jestliže navíc $a . b = b . a$ pro $a, b \in S$. Nechť $D = (S, +, .)$ je okruh s dělením. Potom $T = (S, t)$, kde $t(a, b, c) = a . b + c$, je ternární okruh. Tímto způsobem je možno konstruovati některé ternární okruhy. Zřejmě nás bude zajímati fundamentální otázka: Buď dána projektivní rovina; ptáme se, kdy jí příslušný ternární okruh vznikne popsanou konstrukcí z nějakého okruhu s dělením. Projektivní rovina π se nazývá *desarguesovská*, má-li tuto vlastnost: jestliže p, q, r a p', q', r' jsou trojice nekolineárních bodů takových, že přímky pp', qq', rr' procházejí jedním bodem, potom body $pq \cap p'q'$, $pr \cap p'r'$, $qr \cap q'r'$ leží na jedné přímce. Projektivní rovina π se nazývá *pappovská*, má-li tuto vlastnost: jestliže p, q, r a p', q', r' jsou trojice různých bodů na přímkách L resp. L' $(L \neq L')$ a bod $L \cap L'$ je různý od bodů $p, \ldots, r'$, potom body $pq' \cap p'q$, $pr' \cap p'r$, $qr' \cap q'r$ leží na přímce. Odpověď na uvedený problém je nyní snadno formulovatelná: Projektivní rovina π je desarguesovská (resp. pappovská) právě když $\pi \sim \pi_T$ pro některý lineární ternární okruh T, k němuž přiřazená algebra P_T je okruhem s dělením (resp. tělesem).

V předchozím jsem krátce popsal, jakými hlavními problémy se recensovaná kniha zabývá. Všimněme si nyní podrobněji jejího obsahu. První část se skládá ze čtyř kapitol; v prvních dvou jsou uvedeny definice rovin, jejich netriviální příklady a elementární vlastnosti. Další dvě kapitoly se zabývají kolineacemi projektivních rovin, tj. isomorfismy (f, F) roviny π na sebe. Hlavním předmětem studia je jejich transitivita. Celá druhá část je věnována studiu desarguesovských rovin. Studují se vztahy mezi existencí desarguesovských konfigurací a transitivitou kolineací, teorie harmonických bodů, pappovské roviny. Ukazuje se ekvivalence Pappova axiomu s fundamentální větou projektivní geometrie. Pokračuje se studiem rovin nad okruhy s dělením a tělesy, velká pozornost je věnována grupám kolineací v těchto rovinách. V závěrečné kapitole se pak ukazuje, že těmito rovinami jsou vyčerpány všechny desarguesovské (resp. pappovské) roviny. Dochází se k některým hlubokým výsledkům; příkladem je důkaz toho, že každá konečná desarguesovská rovina je pappovská. Část třetí obsahuje podrobnou analýzu nedesarguesovských rovin nad lineárními ternárními okruhy. Tyto roviny jsou alespoň částečně desarguesovské. Např. platí toto tvrzení: Nechť π je projektivní rovina, $\{u, v, o, e\}$ její 4-roh; ternární okruh $T(u, v, o, e)$ je lineární právě když všechny z v centrálně perspektivní trojúhelníky tvaru bpw, vqr jsou axiálně perspektivní z uv.

Výše jsem popsal, jak se z ternárního okruhu $T = (R, t)$ utvoří algebra $P_T = (R, +, \circ)$. Všechny P_T s T lineárním se nazývají ***planárními okruhy***; platí, že planární okruh je generován jediným lineárním ternárním okruhem. Planární okruh $P = (R, +, \circ)$ se nazývá *kartézskou grupou*, jestliže $(R, +)$ je grupa. Příkladem kartézské grupy je $\mathbf{P} = (\mathbf{R}, +, \circ)$, kde $\mathbf{R}$ jsou reálná čísla, $+$ je obvyklé sčítání a $a \circ b = ab$ pro $ab \geqq 0$, $a \circ b = a^2 b$ pro $a > 0 > b$, $a \circ b = ab^2$ pro $a < 0 < b$; $\mathbf{P}$ nesplňuje ani asociativitu násobení ani distributivní zákony. Kolineace projektivní roviny π se nazývá *centrální kolineací*, jestliže alespoň jedna přímka je při ní bodově invariantní (potom existuje i invariantní bod); nechť $CC(p, L)$ je grupa centrálních kolineací se středem p a osou L. Projektivní rovina π se nazývá *(p, L)-transitivní*, jestliže grupa $CC(p, L)$ je transitivní Nyní platí věta: Nechť π je projektivní rovina, $\{u, v, o, e\}$ její 4-roh a $T = T(u, v, o, e)$ příslušný ternární okruh; π je (v, uv)-transitivní právě když T je lineární ternární okruh, jehož planární okruh P_T je kartézská grupa. Tato věta je typem tvrzení, která jsou dokazována pro různé druhy rovin nad planárními okruhy. Uvažují se např. planární okruhy s asociativním resp. komutativním násobením resp. sčítáním, kvasitělesa čili Veblenovy-Wedderburnovy systémy (tj. P je kartézská grupa s jedním distributivním zákonem), skorotělesa (nearfield : P je kvasitěleso s asociativním násobením), polotělesa (P je kartézská grupa s oběma distributivními zákony) a alternující okruhy (P je polotěleso a $a(ab) = (aa)\,b$, $(ab)\,b = a(bb)$ pro $a, b \in R$; alternujícím okruhům příslušejí tzv. Moufangovy roviny). Závěr této části je velmi hluboký. Ukazuje se že jestliže π je konečná projektivní rovina s grupou kolineací, která je transitivní na množině všech 4-rohů, potom π je Moufangova a tedy pappovská.

Kniha obsahuje na 350 cvičení. Vydavatel uvádí, že existuje zvláštní svazek, obsahující řešení těchto cvičení z prvních dvou částí knihy; tento svazek však nemám k disposici. Kniha je převážně věnována projektivním rovinám, samozřejmě jsou však probrány příslušné specialisace na afinní rovinu. Velkým kladem je, že text je osvětlován na řadě netriviálních příkladů. Tyto příklady jsou algebraické i geometrické. Náš student zná různé axiomatické systémy, definující rozličné algebraické struktury. Docení však např. požadavek asociativnosti, když nic neasociativního neviděl? V knize může takových příkladů nalézti celou řadu.

Stevensonovu knihu mohu čtenáři jen doporučit. Není však tak elementární, jak uvádí autor; lépe se hodí pro čtenáře, který umí text přebíhat a znovu se k němu vracet, než pro toho, kdo čte pečlivě řádek po řádku. Patrně bych dal knize jinou skladbu (právě z tohoto důvodu), ale to je názor již příliš osobní.

Alois Švec, Praha

H. G. Garnir, M. De Wilde, J. Schmets, ANALYSE FONCTIONNELLE. Tome II: Mesure et intégration dans l'espace Euclidien E_n. Birkhäuser Verlag, Bassel und Stuttgart, 1972, 287 stran.

Solidní učebnice (lineární) funkcionální analýzy vždy věnují pozornost použití obecných výsledků a metod v konkrétních funkcionálních prostorech. Autoři zamýšlejí studovat prostory posloupností, funkcí a distribucí ve třetím díle jejich práce „Analyse fonctionnelle", což vyžaduje dobrou znalost teorie míry a integrálu. Recenzovaný druhý díl se zabývá právě teorií míry a integrálu v E_n. Většina výsledků zde odvozených se snadno přenese na případ obecné míry. Rieszova věta o reprezentaci, existence Haarovy míry a studium různých typů konvergence posloupností spojitých funkcí tvoří součást třetího dílu.

První kapitola pojednává o míře a má 22 stran. Semiintervalem $I =]a, b]$ v E_n, kde $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in E_n$, se rozumí součin intervalů $]a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, n$; $\mathscr{P}(I)$ značí nějaké dělení I na semiintervaly, $I_m \to I$ je podle definice $\delta_{I_m}(x) \to \delta_I(x)$, $\forall x \in E_n$, kde δ_M značí charakteristickou funkci množiny M. Buď Ω otevřená množina v E_n. Míra v Ω je definována jako zobrazení μ z množiny všech semiintervalů obsažených v Ω do množiny komplexních čísel, které splňuje tyto vlastnosti:

a) $\forall I \subset \Omega$, $\forall \mathscr{P}(I)$ $\mu(I) = \sum_{J \in \mathscr{P}(I)} \mu(J)$ (aditivita);
b) $\forall I \subset \Omega$, $\exists c(I) > 0$, $\forall \mathscr{P}(I)$ $\sum_{J \in \mathscr{P}(I)} |\mu(J)| \leqq c(I)$ (μ má ohraničenou variaci);
c) $I_m \to I$ v Ω implikuje $\mu(I_m) \to \mu(I)$ (spojitost).

V této kapitole jsou odvozeny základní vlastnosti měr a uvedeny některé příklady měr.

Druhá kapitola (82 stran) se zabývá integrací funkcí. V celé kapitole Ω značí otevřenou množinu v E_n, I, I_i semiintervaly v Ω a μ míru v Ω. Jednoduché funkce jsou definovány jako (konečné) lineární kombinace charakteristických funkcí semiintervalů a integrál jednoduché funkce je definován obvyklým způsobem. Množina $e \subseteq \Omega$ je μ-zanedbatelná (v jiné terminologii μ-nulová), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje spočetné pokrytí množiny e semiintervaly I_i takové, že $\sum V\mu(I_i) < \varepsilon$. Pomocí μ-zanedbatelných množin lze již zavést pojmy „μ-skoro všude v množině $A \subseteq \Omega$", „$\sup_{\mu\text{-s.v.}, x \in A} f(x)$", „$f_m$ konverguje stejnoměrně k f μ-s.v. v A" atd. Posloupnost jednoduchých funkcí α_m se nazývá μ-slušnou, jestliže $\int |\alpha_m - \alpha_k| \, dV\mu \to 0$ pro $\inf(m, k) \to \infty$ (tj. $L_1(V\mu)$ — cauchyovská); pak posloupnosti $\int |\alpha_m| \, dV\mu$ a $\int \alpha_m \, d\mu$ konvergují. Funkce f je podle definice μ-integrovatelná, jestliže je μ-s. v. limitou μ-slušné posloupnosti jednoduchých funkcí α_m; μ-integrál funkce f je zaveden předpisem $\int f \, d\mu = \lim_m \int \alpha_m \, d\mu$. μ-měřitelné funkce jsou μ.-s.v. limity posloupností jednoduchých funkcí. Jsou odvozena všechna základní tvrzení o μ-měřitelných a μ-integrovatelných funkcích a jejich posloupnostech. Uveďme jedno z nich, které se ne vždy uvádí v učebnicích integrálního počtu. Buď l Lebesgueova míra a $B(x, R)$ otevřená koule se středem v x a poloměrem R. Je-li f lokálně l-integrovatelná, pak

$$\lim_{R \to 0+} \frac{1}{l[B(x, R)]} \int_{B(x,R)} |f(x) - f(y)| \, dy = 0$$

pro l-s. v. $x \in \Omega$.

Třetí kapitola (15 stran) je věnována borelovským funkcím a množinám a čtvrtá (14 stran) součinu měr (Fubiniho věta).

Nejdelší kapitolou (94 stran) je pátá kapitola: Vztahy mezi měrami. Pro lokálně μ-integrovatelnou funkci f $(f . \mu)(I) = \int_I f \, d\mu$ definuje míru $f . \mu$ v Ω. Dokazuje se Radonova věta: Je-li $\mu \ll \nu$ (tj. μ je absolutně spojitá vzhledem k ν), pak existuje (jednoznačně ν-s.v.) lokálně ν-integrovatelná funkce f taková, že $\mu = f . \nu$; je-li $\nu = l$, lze udat předpis pro

$$f\colon f(x) = \lim_{R \to 0+} \mu[B(x, R)]/l[B(x, R)]$$

pro l-s.v. $\in \Omega$. Studuje se silná a slabá konvergence měr ($\mu_m \to \mu$, jestliže $V(\mu_m - \mu)(I) \to 0$ pro $\forall I \subseteq \Omega$; $\mu_m \rightharpoonup \mu$, jestliže $\mu_m(e) \to \mu(e)$ pro každou borelovskou ohraničenou množinu e s $\bar{e} \subseteq \Omega$), zúžení, rozšíření a obraz míry (při μ-měřitelném zobrazení $x'\colon \Omega \to \Omega' \subseteq E_{n'}$). Integrál měr $\int \lambda_x \, d\mu$ je definován rovností $(\int \lambda_x \, d\mu)(I) = \int \lambda_x(I) \, d\mu$, kde λ_x jsou míry v $\Omega' \subseteq E_{n'}$ pro μ-s.v. $x \in \Omega$, takové, že $\lambda_x(I)$ jsou μ-integrovatelné pro $\forall I \subseteq \Omega'$; uvádí se Tonelliho věta s důkazem. Zavádí se pojem konvolučního součinu měr, atomové a difusní míry. Připomeňme, že μ je difusní, jestliže jednobodové podmnožiny množiny Ω jsou μ-zanedbatelné. Dokazuje se Lebesgueova věta o rozkladu míry a známé Halmosovo zobecnění tohoto tvrzení: Je-li μ difusní a e_0 je μ-integrovatelná (tj. charakteristická funkce množiny e_0 je μ-integrovatelná), pak $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0, \forall e$:

$$e \subseteq e_0\,, \quad \operatorname{diam} e \leqq \eta\,, \quad e\ \mu\text{-měřitelná} \Rightarrow V\mu(e) \leqq \varepsilon\,.$$

Považuji za sympatické a neobvyklé, že tato kapitola obsahuje princip bang-bang, což jistě přivítají ti, kdož se zabývají teorií optimálního řízení, a Ljapunovovu větu o konvexitě a kompaktnosti oboru hodnot míry. Pokud vím, knihy, kde jsou tato dvě důležitá tvrzení dokázána, lze spočítat na prstech jedné ruky. Snad si zaslouží ocitovat překrásná kniha: H. Hermes, J. La Salle, Functional Analysis and time optimal control, Academic Press, New York and London, 1969. Ocitujeme obě tvrzení. Princip bang-bang: Buď e μ-měřitelná množina v Ω, $M(x)$ μ-měřitelná matice typu $M \times N$ definovaná na e a B ohraničená podmnožina C_N. Pak množina

$$\mathscr{A}(B) = \{\textstyle\int_e M(x)\vec{f}(x) \, d\mu : \vec{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x)) \text{ definovaná a } \mu\text{-měřitelná na } e\,, \\ \vec{f}(x) \in B\ \mu\text{-s.v.}\}$$

má následující vlastnosti: a) $\mathscr{A}(B)$ je ohraničená. b) Je-li μ difusní nebo B konvexní, pak $\mathscr{A}(B)$ je konvexní. c) Je-li μ difusní nebo B konvexní a je-li B kompaktní, pak $\mathscr{A}(B)$ je kompaktní. d) Je-li μ difusní a B kompaktní, pak $\mathscr{A}(B) = \mathscr{A}(\text{ext } B)$, kde ext B značí množinu všech extremálních bodů množiny B. Ljapunovova věta: Jsou-li míry $\mu_1, \ldots, \mu_N$ difusní a je-li e μ_i-integrovatelná ($i = 1, \ldots, N$), pak množina

$$\{(\mu_1(e'), \ldots, \mu_N(e')): e' \ \mu_i\text{-měřitelná} \ (i = 1, \ldots, N), \quad e' \subseteq e\}$$

je konvexní a kompaktní v C_N.

Zbytek páté kapitoly je vyplněn studiem množin měr, které jsou absolutně spojité vzhledem k pevné míře (věta o stejnoměrné absolutní spojitosti, kritérium ohraničenosti atd.).

Poslední dvě kapitoly (celkem 47 stran) jsou úvodem do teorie měr a integrace funkcí s hodnotami v lokálně konvexním prostoru E. Kromě jednoduchých zobecnění některých částí předchozího textu jsou zde odvozeny např. Pettisova věta, ekvivalence μ-integrovatelnosti a striktní μ-integrovatelnosti v případě, kdy E je striktní limitou Fréchetových prostorů. Kniha končí důkazem Radonovy věty pro vektorové míry, kde E je separabilní reflexivní Banachův prostor, nebo Fréchetův-Schwartzův prostor, resp. striktní induktivní limita těchto prostorů.

Seznam literatury je opět omezen jen na knihy (7 cit.), z nichž nejčastěji je citována kniha H. G. Garnira „Fonctions de variables réelles", Vol. II, Vander, Louvain, 1965. Kniha je vyplněna 120 cvičeními a dobře se čte.

Josef Daneš, Praha

Paul L. Butzer, Rolf J. Nessel: FOURIER ANALYSIS AND APPROXIMATION, Vol. 1. One-Dimensional Theory, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1971, XVI + 553 stran.

Impuls k napsání této knihy vyšel z mezinárodní konference o harmonické analýze a integrálních transformacích v Oberwolfachu v roce 1965. Autoři jsou známí odborníci v teorii aproximací a integrálních transformací, působí na vysoké škole technické v Cáchách.

Kniha pojednává o teorii Fourierových řad, Fourierových integrálů a o teorii aproximací. Jde tedy o dílo, které sjednocuje tři velmi široké, samostatné oblasti matematické analýzy. Cílem knihy je vyložit základy všech tří jmenovaných oblastí se zvláštním zřetelem na principy, které je sjednocují.

Text je rozdělen do pěti částí: Aproximace pomocí singulárních integrálů, Fourierova transformace, Hilbertova transformace, Charakterizace jistých tříd funkcí a Teorie nasycení (saturation theory).

V první části jsou vyloženy klasické metody sčítání Fourierových řad, přímé aproximační věty, věty Bernsteinovy a Jacksonovy pro polynomy nejlepší aproximace a singulární integrály.

Druhá část pojednává o Fourierově transformaci v L^1 a v L^p, $p > 1$, jak pro případ periodických funkcí tak také pro případ funkcí daných na celé reálné ose; zejména je zkoumán vztah teorie Fourierových řad a Fourierovy transformace. Jsou zde také uvedeny složité věty o reprezentaci posloupností resp. funkcí pomocí Fourierovy transformace. Metody Fourierovy transformace pro řešení různých úloh s parciálními diferenciálními rovnicemi druhého řádu (vedení tepla, Dirichletova a Neumannova úloha pro jednotkovou kružnici, rovnice struny aj.) uzavírají tuto část knihy.

V poměrně krátké části třetí je pojednáno o Hilbertově transformaci a konjugovaných funkcích.

Favardovy třídy (třídy nasycení) funkcí, které pro daný konvoluční integrál poskytují nejlepší možný řád aproximace jsou popsány ve čtvrté části knihy. Tato část má uplatnění v závěru knihy, který je věnován teorii nasycení daného aproximačního procesu a ve kterém zejména jde o stanovení saturační vlastnosti daného aproximačního procesu a o charakterizaci jemu příslušné Favardovy třídy.

Tento strohý a neúplný výčet obsahu knihy ozřejmuje, že jde o dílo mimořádně širokého záběru. Je až udivující, že takové množství materiálu lze vtěsnat do jediného svazku. Autorům se toto podařilo mimo jiné také vhodnou volbou symboliky ale zejména maximálním využitím jednotících hledisek, společných všem vyloženým teoriím. Výklad je zcela přesný, k četbě není třeba speciálních znalostí. Přesto ovšem nelze říci, že by bylo snadné tuto knihu rychle přečíst. Vhodným výběrem jednotlivých kapitol knihy lze sestavit tři zcela samostatné kursy: o Fourierových řadách, o Fourierově transformaci a o teorii aproximací.

Jak už sám podtitul napovídá, jde o první díl knihy. Autoři v předmluvě ke knize hovoří o dalším dílu, který je stadiu příprav a bude pojednávat o podobných problémech pro funkce více proměnných. Dá se právem předpokládat, že celek, který takto vznikne bude jednou ze základních monografií vedle knih A. Zygmunda, N. K. Bari, S. Bochnera a K. Chandrasekharana, N. I. Achiezera aj.

Recenzovaný exemplář knihy je zájemcům k dispozici v knihovně Matematického ústavu ČSAV v Praze.

Štefan Schwabik, Praha

Serge Dubuc: GÉOMÉTRIE PLANE. Presses Universitaires de France, Colleciton SUP, Le Mathématicien 8. Stran 147, obr. 37. Cena 15 F. Paris 1971.

Ve sbírce „*Les précis de l'enseignement supérieur*" (SUP), která je u nás prakticky neznámá, vycházejí svazky kapesního formátu prozatím z patnácti různých oborů humanitních, přírodovědeckých a sociologických. V sekci matematické, kterou řídí Jean-Pierre Kahane, vyšlo dosud 8 svazků. Naše čtenáře mohou zajímat jednotlivé tituly i autoři; jsou to: 1. Jean-Louis Krivine: *Théorie axiomatique des ensembles.* 2. Jean-Pierre Serre: *Cours d'aritmétique.* 3. Roger Temam: *Analyse numérique.* 4—5. Louis Comtet: *Analyse combinatoire*, svazky I a II. 6. Gérard Letac: *Problèmes de probabilité.* 7. André Gramain: *Topologie des surfaces.* 8. Serge Dubuc: *Géométrie plane.*

Podepsaný recensent má k disposici jen svazek poslední. Jeho autor, Serge Dubuc, pracuje v matematickém oddělení university v Montréalu. V sedmi kapitolách, jimž předchází krátký úvod, probírá elementární projektivní a afinní geometrii v rovině s některými metrickými specialisacemi, a to s typickou francouzskou lehkostí. Užívá výhradně metody analytické, ale píše upřímně, že v geometrii syntetická metoda je matkou metody analytické. Analytická metoda umožňuje však zobecnění klasických geometrických úvah. Autor konstruuje modely takových geometrií tím, že souřadnice jsou prvky jakéhokoli *algebraicky uzavřeného* komutativního tělesa K. Tím se vyhýbá těm geometriím, kde K není komutativní nebo algebraicky uzavřené, tedy např. i konečným rovinám, ale mnohé jeho výsledky lze užít i v těchto případech, totiž ty, které spočívají jen na lineární algebře.

Hned v úvodu definuje autor svým způsobem barycentrické souřadnice v rovině, jichž pak v celé knížce užívá. V 1. a 2. kapitole pojednává o projektivní přímce a projektivní rovině. Projektivní transformace právě tak jako transformace souřadnic jsou charakterisovány příslušnými regulárními maticemi nad tělesem K. Užití barycentrických souřadnic mu dovoluje rychlé uvedení věty Menelaovy a věty Cevovy z geometrie trojúhelníka a jednoduchý důkaz věty Desarguesovy pro homologické trojúhelníky. Kapitola 3 je věnována afinní rovině, kterou autor konstruuje běžným způsobem z projektivní roviny vynecháním jedné přímky. Kombinuje zde vektorový počet s barycentrickými souřadnicemi a uvádí základní vlastnosti translací, homotetií a obecných afinních transformací; pátý odstavec této kapitoly o klasifikaci projektivních transformací v rovině patří spíše do kapitoly 2. Ve 4., resp. 5. kapitole jsou probrány vlastnosti kuželoseček v projektivní, resp. afinní rovině. Zde se ovšem předpokládá, že charakteristika tělesa K je různá od 2. V projektivní rovině je ovšem uvedena i polarita a věta Pascalova. Afinní vlastnosti jsou založeny na studiu homotetických kuželoseček. Odtud už není daleko k zavedení kolmých vektorů, čímž je všechno připraveno ke studiu kružnic a trojúhelníků v kapitolách 6 a 7. Je tu zobecněna řada pojmů a výsledků z klasické elementární geometrie pro tuto rovinu nad tělesem K, jako např. věta Ptolemaiova pro tětivový čtyřúhelník, pojem mocnosti bodu ke kružnici, Eulerova a Simsonova přímka i Apolloniova kružnice z geometrie trojúhelníka. Kružnici devíti bodů, která je u nás většinou známa pod jménem kružnice Feuerbachova, nazývá autor kružnicí Eulerovou. Užitím isogonální kvadratické transformace jsou odvozeny vlastnosti Lemoinových bodů, přímek a kružnic z geometrie trojúhelníka aj.

Odborník si tuto knížku přečte s potěšením, začátečníkovi může působit jisté potíže autorův velmi stručný způsob vyjadřování, který nutí čtenáře řadu podrobností domyslet samostatně. Naproti tomu neruší tiskové chyby, jichž je ostatně velmi málo, protože si je každý snadno opraví sám (např. na str. 12, 14, 53).

Karel Havlíček, Praha

L. Chambadal: LES ENSEMBLES (Množiny). V edici Connaissance-Université vydalo nakladatelství Bordas, Paříž—Montréal 1971; 150 stran, cena neudána.

Při povrchním pohledu na tuto útlou knížku kapesního formátu vznikne nejspíše dojem, že jde o další populární brožurku o množinách. Ani zběžný výčet názvů jednotlivých kapitol (1. Množiny a relace, 2. Zobrazení, 3. Operace, 4. Binární relace, 5. Ordinální a kardinální čísla, 6. Axiomy teorie množin) patrně ještě nepřesvědčí o tom, co zjistíme, jakmile se do textu knížky zadíváme poněkud pozorněji: že totiž jde o dílko sice drobné, avšak s aspiracemi vyššími, nežli by se zdálo. Záhy shledáme, že k útlosti knížky velmi podstatnou měrou přispívá především hutný a úsporný styl, bez jakýchkoliv zbytečných příkras. Dá se dokonce říci, že text je redukován na nezbytné minimum vynecháním všeho, bez čeho je možné se obejít. Je až s podivem, jak velké množství definic i tvrzení lze směstnat na tak malém prostoru. (Ušetřeného místa je využíváno mj. též k občasnému vyjadřování kritických osobních stanovisek autorových např. k terminologii, ke korektnosti běžných definic, k metodice výkladu teorie množin či k pracím jiných autorů.) Poněvadž jde skutečně o základní pojmy teorie množin (včetně příslušenství jako jsou relace, operace, zobrazení apod.), je většina jednoduchých tvrzení ponechána bez důkazů; ty jsou podávány tehdy, jsou-li složitější anebo vyžadují-li netriviální obrat.

Nejde tedy rozhodně o žádnou „rekreační" četbu. V této souvislosti snad poněkud překvapuje jestliže se na obálce knížky tvrdí, že je určena žákům škol a jejich rodičům (!) — a ovšem též učitelům a vysokoškolským studentům. Nedovedu si nějak představit normální rodiče našich středoškoláků (ledaže by sami byli profesionálními matematiky), jak se delektují např. definicí vektorového prostoru nad komutativním tělesem (uvedenou ostatně jen tak mimochodem pro ilustraci distributivního zákona): je to „aditivně zapisovaná abelovská grupa s jednou vnější operací (operátory jsou prvky onoho tělesa), splňující podmínky asociativity, distributivity, ...". Spíše lze předpokládat, že autor, který je profesorem matematiky v tzv. přípravných třídách lycea (jež nemají obdoby v našem školském systému) napsal pro své žáky stručný přehled žádoucích vědomostí. V tomto smyslu by tedy bylo možné využívat Chambadalovy knížky u nás spíše až na úrovni prvního ročníku vysoké školy.

František Zítek, Praha

Károly Jordan: CHAPTERS ON THE CLASSICAL CALCULUS OF PROBABILITY. Vydalo nakladatelství Akadémiai Kiadó, Budapešť, jako 4. svazek knižnice Disquisitiones Mathematicae Hungaricae v roce 1972. Stran 619.

Autor knihy, profesor Károly Jordan, se narodil před více než sto lety. Původním zaměřením byl fyzik, vyučoval však třicet let na Vysoké škole ekonomické v Budapešti. Jeho zálibou byla nejen věda, ale i dějiny vědy a zvláště počtu pravděpodobnosti. Profesor Jordan proto shromáždil velkou sbírku klasických děl o pravděpodobnosti, která byla bohužel v roce 1956 zničena. Péčí nakladatelství Maďarské akademie věd vychází Jordanova kniha, podávající obraz teorie pravděpodobnosti před jejím intensivním rozvojem mezi oběma světovými válkami. Autor se v ní neustále vrací do historie a k původní literatuře. Kniha je tedy i příspěvkem k celým dějinám teorie pravděpodobnosti.

Výklad určený spíše nematematikům, může matematikovi připadat na některých místech zdlouhavým. Na příklad stanovení pravděpodobností binomického rozložení se nazývá prvním problémem Bernoulliovým, jejich sčítání druhým problémem. Určit rozložení součtu ok na hracích kostkách je problémem Monmortovým-Moivreovým. Řeší se za pomoci Dirichletova faktoru nespojitosti (Fourierovou transformací). Nelze se však ubránit určité závisti při představě doby, kdy universitní učitel stál před úlohou, bez spěchu vyložit řadu základních faktů, a mohl, byl-li ovšem tak sečtělý jako profesor Jordan, osvěžovati výklad četbou mistrovského úryvku o ruletě od M. Maeterlincka či úsměvné pasáže z dekretu Ludvíka XIV. při založení Loterie Royale. Dojem o trvalé hodnotě poznatků, jichž se posluchačům dostává, mohl být ještě podtržen tím, že v propočtených příkladech je účetnictví pojišťoven vedeno v tolarech.

Kapitolu první tvoří s velkou erudicí napsaný, historicko-filosofický výklad pojmu pravděpodobnost. Matematické prostředky počtu pravděpodobnosti, obsažené v kapitole II, začínají kombinatorikou. Dále se předkládají základy diferenčního počtu, Laplaceův integrál, gamma a beta funkce, momenty a semiinvarianty, metoda nejmenších čtverců, aproximace funkcí, interpolace apod. Axiomy teorie pravděpodobnosti a Bayesův teorém jsou vyloženy v další kapitole. Zvláštní kapitola je věnována aritmetickému a geometrickému průměru. Dvě kapitoly se týkají posloupností opakovaných pokusů. Jednorozměrný případ zahrnuje problém Bernoulliův, Poissonův a Lexisův. Sem jsou také u příležitosti výkladu o aproximaci normálním rozložením zařazeny některé otázky statistické indukce o parametrech tohoto rozložení. Přístup je bayesovský. Vícerozměrné normální rozložení je uvedeno pod názvem Bravaisova formule. Jeho vlastnosti jsou podrobně rozebrány opět zejména v souvislosti s numerickou aproximací některých rozložení. Zde je třeba zdůraznit základní přístup autorův. Počet pravděpodobnosti je důsledně chápán jako metoda výpočtu pravděpodobností složitých jevů z pravděpodobností jevů jednodušších. Rozumí se výpočtu numerického za použití dostatečně přesných přiblížení. Jedna kapitola obsahuje výběr úloh: problém ruinování hráče (Huygens 1657), Pacioliovu úlohu o rozdělení sázky v nedokončené hře (1494), zmíněný již Monmortův-Moivreův problém (1710), pravděpodobnosti při hře poker, trente et quarante, při ruletě a v loterii. Kapitola o geometrických pravděpodobnostech je věnována převážně úlohám podobným Buffonově (1733) a Bertrandově (1889). Knihu ukončuje výklad základů vyrovnávacího počtu s důrazem na vysvětlení výpočetních metod a krátká zmínka o kinetické teorii plynů. Na závěr je tabulka binomických koeficientů. Bibliografie na konci každé kapitoly obsahuje bohatství odkazů na těžko dostupná díla minulých století o počtu pravděpodobnosti.

Kniha je vydána velmi pečlivě. Z některých chyb, vzniklých přehlédnutím při korekturách, je nejnápadnější záměna Theory of Games místo Theory of Gases v obsahu a na sudých stránkách stejnojmenné kapitoly. Se zájmem si dílo přečtou ti, kdo mají zálibu v minulosti a v poučení o vývoji vědy.

Petr Mandl, Praha

ZPRÁVY

OPRAVA

Technickým nedopatřením se stalo, že u článku „*Doc. Jan Vyšín, CSc. šesťdesiatpätročný*", který byl otištěn ve 4. čísle ročníku *98* (1973) nebylo uvedeno jméno autora doc. dr. JOZEFA MORAVČÍKA ze Žiliny. Velmi se tímto omlouváme jak autorovi článku tak i jubilantovi.

Redakce

DVACÁTÝ DRUHÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Ve školním roce 1972—73 proběhl již XXII. ročník celostátní matematické olympiády, pořádané opět ve čtyřech kategoriích (kat. *A*, *B*, *C* pro žáky škol II. cyklu, kat. *Z* pro žáky ZDŠ). Vyvrcholením soutěže bylo celostátní *III. kolo* kategorie *A*, pořádané z technických důvodů na dvou místech — v *Žilině* a v *Bratislavě*. Vítězem se stal JAROMÍR ŠIMŠA z Ostravy, druhým byl KAREL HORÁK ze Strakonic a třetím MIROSLAV KMOŠEK z Brna. Celkem bylo vyhlášeno 20 vítězů a dalších 17 úspěšných řešitelů.

Ústřední výbor matematické olympiády zajistil obdobně jako v předcházejících ročnících další hlubší matematické školení jednak pro nejlepší řešitele úloh *II. kola* kategorií *B* a *C* ve *Žďáru n. S.*, jednak pro užší výběr representantů na XV. mezinárodní matematickou olympiádu; toto školení se konalo v *Malešicích*. Během školního roku probíhaly semináře pro širší výběr možných representantů pro *MMO*; hlavní středisko tohoto školení bylo na gymnasiu v Praze 2, ul. W. Piecka. Další závažnou činností *ÚVMO* bylo zajišťování a recense rukopisů pro edici „*Škola mladých matematiků*". V uplynulém školním roce vyšly sice jen dva svazky (č. 31 — OL. ODVÁRKO: Booleova algebra a č. 32 — J. VYŠÍN, J. KUČEROVÁ: Druhý výlet do moderní matematiky), avšak další svazky této edice jsou v tisku nebo v recensi.

Vlastimil Macháček, Praha

XV. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

XV. MMO se konala 5.—16. 7. 1973 v Sovětském svazu v Moskvě. Zúčastnil se jí rekordní počet družstev — 16: Rakousko (A), Bulharsko (BG), Kuba (C), ČSSR (CS), NDR (D), Francie (F), Velká Británie (GB), Maďarsko (H), Mongolsko (M), Holandsko (NL), Polsko (PL), Rumunsko (R), Švédsko (S), Finsko (SF), SSSR (SU) a Jugoslávie (YU). S výjimkou Kuby, kterou reprezentovalo 5 žáků, byla všechna družstva osmičlenná. Vedoucí čs. delegace byl RNDr. JOZEF MORAVČÍK, CSc., docent VŠD v Žilině, pedagogickým vedoucím byl JIŘÍ MÍDA, odb. asistent PeF UK v Praze.

Žáci řešili ve dvou dnech celkem 6 úloh, jež vybrala mezinárodní jury z návrhů, které zaslaly jednotlivé účastnící se státy. Mezi soutěžní úlohy byla zařazena i jedna československá. Maximálně mohl každý účastník získat 40 bodů.

XV. MMO skončila pro československé družstvo poměrně úspěšně. V neoficiálním pořadí družstev podle počtu získaných bodů se umístili čs. žáci na 7. místě. Poprvé od X. MMO získal jeden z čs. účastníků lepší cenu než třetí. Byl jím PAVEL FERST z 3. roč. gymnasia na Sladkovského nám. v Praze 3, jenž obdržel 2. cenu.

Výsledky XV. MMO podle států zachycuje tabulka:

Stát	A	BG	C	CS	D	F	GB	H	M	NL	PL	R	F	SF	SU	YU
Body	144	96	42	149	188	153	164	215	65	96	174	141	99	86	254	137
1. cena	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	—	—	—	—	3	—
2. cena	—	—	—	1	2	3	—	2	—	—	2	1	1	—	2	—
3. cena	6	1	1	4	4	1	5	5	1	2	4	3	1	2	3	5

Jiří Mída, Brandýs nad Labem

PRVNÍ KONFERENCE O APLIKACÍCH MATEMATIKY — OLOMOUC 1973

Ve dnech 17.—20. září 1973 pořádaly JČSMF a JSMF ve spolupráci s přírodovědeckou fakultou Palackého university v Olomouci Konferenci o aplikacích matematiky. Konference byla zařazena do rámce oslav čtyřstého výročí založení university v Olomouci. Byla to prvá konference československých matematiků toho druhu. Zúčastnilo se jí přes sto členů JČSMF a JSMF.

Předmětem konference byly matematické aplikace v nejrůznějších oblastech vědy, výzkumu i praxe. V dopoledních zasedáních bylo předneseno 15 hodinových a půlhodinových sdělení o matematických metodách důležitých pro aplikace nebo v aplikacích už použitých. Tato sdělení se týkala variačních metod, metody konečných prvků, optimalizačních metod v reaktorové fyzice, byly předneseny referáty o řízených Markovových procesech, o matematice a informatice, o aplikacích matematiky: v linguistice, v teorii dědičnosti, v psychologii a o některých aplikacích matematické logiky. Další přednášky pojednávaly o matematických modelech mechaniky deformovaných těles, o některých otázkách optimalizace, o aplikaci matematiky a zejména teorie grafů v dopravě. Na závěr byly předneseny referáty o matematických aplikacích v mechanice tekutin a o variačních metodách v teorii kvaziparabolických rovnic.

V odpoledních zasedáních byli pak účastníci konference informováni o aplikacích matematiky prováděných na některých fakultách vysokých škol a ve vědeckých a výzkumných ústavech. Informace o aplikacích matematiky podalo 18 účastníků konference z těchto vysokých škol, fakult a ústavů: Strojní fakulta ČVUT, stavební fakulta ČVUT, elektrotechnická fakulta ČVUT, Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vysoká škola technická v Bratislavě, Matematický ústav ČSAV, Matematický ústav ČSAV, pobočka v Brně, Palackého universita v Olomouci, Vysoká škola báňská v Ostravě, matematicko-fyzikální fakulta University Karlovy, Ekonomický ústav ČSAV, Vysoká škola dopravní v Žilině, Státní výzkumný ústav pro stavbu strojů v Běchovicích u Prahy.