

Werk

Label: Article

Jahr: 1973

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0098|log76

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

K RIEŠITEĽNOSTI DIOFANTICKEJ ROVNICE $\sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j} = \frac{a}{b}$

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 10. decembra 1971)

V článku [1] je odvodená veta 3 o postačujúcich podmienkach riešiteľnosti rovnice

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j} = \frac{a}{b}, \quad (a, b) = 1, \quad n \geq 2$$

v prirodzených číslach $x_1, x_2, \dots, x_n$ v prípade $n = 3$. V tomto článku túto vetu zovšeobecníme pre ľubovoľné $n \geq 2$.

Veta 1. Prirodzené čísla $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, ktoré možno vyjadriť vo forme

$$(2) \quad x_1 = \frac{\gamma \prod_{j=2}^n u_j}{ab}, \quad x_k = \frac{\gamma b \prod_{j=2}^n u_j \sum_{j=2}^n u_j}{au_k(\gamma \prod_{j=2}^n u_j - b^2)}, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

kde $a, b, \gamma, u_2, u_3, \dots, u_n$ sú prirodzené čísla, tvoria riešenie rovnice (1).

Dôkaz sa vykoná dosadením (2) do (1).

Veta 2. Pre čísla $\gamma, u_2, u_3, \dots, u_n$ v (2) platí za predpokladu $x_1 = \min_j \{x_j\}$

$$(3) \quad b^2 < \gamma \prod_{j=2}^n u_j \leq nb^2.$$

Dôkaz. Za učeného predpokladu platí $1/x_1 < a/b, n/x_1 \geq a/b$, z čoho vyplýva (3).

Poznámka 1. Podmienky (2) vety 1 sú v prípade $n = 3$ aj nutné (pozri vetu 1 článku [1]). Tak je tomu aj v prípade $n = 2$, v ktorom znejú:

$$(2') \quad x_1 = \frac{\gamma u}{ab}, \quad x_2 = \frac{\gamma bu}{a(\gamma u - b^2)}.$$

Ak vyjadríme triviálne $x_1 = (b + k)/a$, potom z (2') $\gamma u = b^2 + bk$, takže $x_2 = (b + b^2/k)/a$, čo sú nutné a postačujúce podmienky pre riešenia rovnice (1) pri $n = 2$ (pozri vetu 1 v článku [2]).

Pre $n > 3$ podmienky (2) nie sú nutné. Napr. rovnica $\sum_{j=1}^4 (1/x_j) = 1$ má podľa tab. 1 v článku [3] 14 riešení. Pretože v tomto prípade podľa vety 2 $1 < \gamma \prod_{j=2}^4 u_j \leq 4$, ľahko sa presvedčíme že zo vzorcov (2) všetky tieto riešenia nedostaneme. Jednako možno vzorce (2) použiť na vypočítanie značného počtu riešení rovnice (1) pri ľubovoľnom $n \geq 2$.

Veta 3. *Nech $b \equiv r \pmod{a}$, $0 < r < a$. Nech $b = b_1 b_2 \dots b_n$ je rozklad na prirodzené čísla. Číslo a/b je číslom A_n , čiže rovnica (1) má riešenie v prirodzených číslach, ak buď b , buď $\sum_{j=2}^n b_j$ má deliteľa tvaru $at - r$, $t \geq 1$.*

Dôkaz. Voľme

$$(4) \quad \gamma = (b + at - r) b_1, \quad u_j = b_j, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Podmienka (3) je zrejme splnená. Po dosadení (4) do (2) máme

$$(5) \quad x_1 = \frac{b + at - r}{a}, \quad x_k = \frac{(b + at - r) b_1 \prod_{j=2}^n b_j \sum_{j=2}^n b_j}{ab_k(at - r)}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Z $(a, b) = 1$ a $b \equiv r \pmod{a}$ ihneď vyplýva $(a, at - r) = 1$. Preto keď $(at - r) \mid b$, potom tiež $a(at - r) \mid (b + at - r)$. Ďalej $b_k \mid \prod_{j=2}^n b_j$, takže x_j sú prirodzené čísla, $j = 1, 2, \dots, n$. Obdobne keď $(at - r) \mid \sum_{j=2}^n b_j$. Tým je veta dokázaná.

Poznámka 2. Veta 3 v článku [1] je zvláštny prípad vety 3 tohoto článku pre $n = 3$, $b_1 = 1$, $b_2 = b$, $b_3 = 1$.

Dôsledok 1. *Ak $a \equiv n \pmod{2}$, potom číslo $a/[aq + \frac{1}{2}(a - n + 2)]$ je číslom A_n . O tom sa ľahko presvedčíme, ak v (5) volíme $b_2 = b$, $b_1 = b_3 = b_4 = \dots = b_n = 1$. Stačí na základe vety 3 dokázať, že $b + n - 2$ má deliteľa tvaru $at - r$.*

Avšak $r \equiv \frac{1}{2}(a - n + 2) \pmod{a}$ a teda $b + n - 2 = aq + \frac{1}{2}(a + 2 - n) + (n - 2) \equiv aq + \frac{1}{2}(a - 2 + n) = -r \pmod{a}$; čím je tvrdenie dokázané.

Veta 4. *Nech b má deliteľa tvaru $at - 1$, $t \geq 1$. Potom rovnica (1) má riešenie v prirodzených číslach, čiže číslo a/b je číslom A_n , $n \geq 2$.*