ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 98 * PRAHA 15. 8. 1973 * ČÍSLO 3

JEDNOPARAMETRICKÉ SYSTÉMY PROJEKTIVNÍCH PROSTORŮ DIMENSE n V PROSTORU DIMENSE $3n + 1$

MILOSLAV JŮZA, Praha

(Došlo dne 5. srpna 1971)

Základní věty o jednoparametrických systémech projektivních prostorů S_n v projektivním prostoru S_m byly odvozeny v práci [7]. Již dříve byly tyto systémy podrobněji studovány pro některé dimense. Kromě přímkových ploch ($n = 1$) byl studován případ $m = kn + k - 1$, zvláště $m = 2n + 1$. (Viz práce [1], [2], [4], [5], [6]) a případ $n = 2$, $m = 6$ (viz [3]). V tomto článku je studován případ $m = 3n + 1$.

1. Mějme v prostoru S_{3n+1} jednoparametrický systém (monosystém) projektivních prostorů

$$S_n(t) = [y_0(t), y_1(t), \ldots, y_n(t)] .$$

Předpokládejme, že platí

$$[y_0, y_1, \ldots, y_n, y'_0, y'_1, \ldots, y'_n, y''_0, y''_1, \ldots, y''_{n-1}] \neq 0 . \tag{1}$$

Z (1) plyne, že monosystém neleží v prostoru dimense nižší než $3n + 1$.

Vzhledem k tomu, že $m = 3n + 1$ a platí (1), můžeme psát

$$y''_n = \sum_{j=0}^{n-1} a^j y''_j + \sum_{j=0}^{n} b^j y'_j + \sum_{j=0}^{n} c^j y_j ,$$

kde a^j, b^j, c^j jsou funkce t. Provedeme-li změnu řídících křivek

$$\bar{y}_i = y_i , \quad i = 0, 1, \ldots, n - 1 ,$$

$$\bar{y}_n = y_n - \sum_{j=0}^{n-1} a^j y_j ,$$

můžeme dosáhnout toho, že $a^j = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n - 1$. Budeme tedy nadále předpokládat, že platí (1) a

$$y''_n = \sum_{j=0}^{n} b^j y'_j + \sum_{j=0}^{n} c^j y_j . \tag{2}$$

2. Označme $T_1(t_0) = [y_0(t_0), \ldots, y_n(t_0), y_0'(t_0), \ldots, y_n'(t_0)]$ tečný prostor monosystému podél tvořícího prostoru $[y_0(t_0), \ldots, y_n(t_0)]$. Máme-li na monosystému křivku

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i(t)\, y_i(t)\,, \tag{3}$$

je ovšem $x'(t_0) \in T_1(t_0)$. Je-li dokonce $x''(t_0), x'''(t_0), \ldots, x^{(1+k)}(t_0) \in T_1(t_0)$, nazveme bod $x(t_0)$ *poloasymptotickým bodem řádu k* křivky $x(t)$ (viz [7]).

Derivováním (3) a úpravou podle (2) dostaneme

$$x'' = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i y_i'' + \sum_{i=0}^{n} (2\alpha^{i\prime} + \alpha^n b^i)\, y_i' + \sum_{i=0}^{n} (.)\, y_i\,. \tag{4}$$

Vzhledem k (1) *je tehdy bod $x(t_0)$ poloasymptotickým bodem řádu* 1 *křivky $x(t)$ právě tehdy, je-li $\alpha^0(t_0) = \alpha^1(t_0) = \ldots = \alpha^{n-1}(t_0) = 0$, tj. leží-li $x(t_0)$ na křivce $y_n(t)$. Křivka $y_n(t)$ je jedinou poloasymptotickou křivkou řádu* 1 *na monosystému.*

3. Zjistíme, kdy na křivce $y_n(t)$ leží poloasymptotické body řádu 2. Derivováním a opětným použitím (2) dostaneme

$$y_n''' = \sum_{j=0}^{n-1} b^j y_j'' + \sum_{j=0}^{n} ((.)\, y_j' + (.)\, y_j)\,.$$

Aby tedy bod $y_n(t_0)$ byl poloasymptotický řádu 2, *je nutné a stačí, aby $b^0(t_0) = b^1(t_0) = \ldots = b^{n-1}(t_0) = 0$.*

4. Označme $T_1(\alpha^i(t_0), t_0) = [y_0(t_0), \ldots, y_n(t_0), \sum_{i=0}^{n} \alpha^i(t_0)\, y_i'(t_0)]$ tečný prostor monosystému v bodě $\sum_{i=0}^{n} \alpha^i(t_0)\, y_i(t_0)$. Bod $x(t_0)$ nazveme *asymptotickým bodem* křivky (3), jestliže $x''(t_0) \in T_1(\alpha^i(t_0), t_0)$.

Aby bod $x(t_0)$ byl asymptotickým bodem křivky $x(t)$, je podle (4) nutné a stačí, aby

(A) $$\alpha^0(t_0) = \alpha^1(t_0) = \ldots = \alpha^{n-1}(t_0) = 0\,;$$

(B) matice

$$\begin{pmatrix} \alpha^0, & \alpha^1, & \ldots, & \alpha^{n-1}, & \alpha^n \\ 2(\alpha^0)' + \alpha^n b^0, & 2(\alpha^1)' + \alpha^n b^1, & \ldots, & 2(\alpha^{n-1})' + \alpha^n b^{n-1}, & 2(\alpha^n)' + \alpha^n b^n \end{pmatrix}$$

měla pro $t = t_0$ hodnost 1. Odtud plyne (viz [7]), že *bod $x(t_0)$ je asymptotickým bodem křivky* (3), *když a jen když $x(t_0)$ leží na poloasymptotické křivce $y_n(t)$ a tečnou křivky $x(t)$ v tomto bodě je přímka*

$$[x(t_0), \alpha^n(t_0)\, y_n'(t_0) - \tfrac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \alpha^n(t_0)\, b^i(t_0)\, y_i(t_0)]\,. \tag{5}$$

Aby křivka $x(t)$ byla asymptotická, musí být poloasymptotická, tj. splynout s poloasymptotickou křivkou $y_n(t)$. Ale aby křivka $y_n(t)$ byla asymptotická, musí přímka (5) býti její tečnou, což znamená, že bod $\alpha^n y'_n - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} \alpha^n b^i y_i$ musí pro každé t ležet na přímce $[y_n, y'_n]$. Vzhledem k lineární nezávislosti bodů $y_0, \ldots, y_n, y'_n$ to nastává právě tehdy, když $b^1 = b^2 = \ldots = b^{n-1} = 0$. *Křivka* (3) *je tedy asymptotická právě tehdy, je-li poloasymptotická řádu* 2.

5. Nechť pro monosystém $S_n(t) = [y_0(t), y_1(t), \ldots, y_n(t)]$ v S_{3n+1} opět platí (1) a řídící křivka $y_n(t)$ nechť je zvolena tak, že platí též (2). Vzhledem k (1) existují funkce m_i^j, n_i^j, p_i^j tak, že platí

$$y_i''' = \sum_{j=0}^{n-1} m_i^j y_j'' + \sum_{j=0}^{n} n_i^j y_j' + \sum_{j=0}^{n} p_i^j y_j, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{6}$$

Provedeme změnu řídících křivek

$$\bar{y}_i = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_i^j y_j, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \det(\mu_i^j) \neq 0, \tag{7}$$
$$\bar{y}_n = y_n.$$

Určíme-li funkce v_j^k $(j, k = 0, 1, \ldots, n-1)$ tak, aby $\sum_{j=0}^{n-1} \mu_i^j v_j^k = \delta_i^k$, bude

$$y_j = \sum_{k=0}^{n-1} v_j^k \bar{y}_k, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \det(v_j^k) \neq 0,$$
$$y_n = \bar{y}_n.$$

Derivováním (7) a použitím (6) a (2) dostaneme pro $i = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$\bar{y}_i''' = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_i^j y_j''' + \sum_{j=0}^{n-1} 3(\mu_i^j)' y_j'' + \sum_{j=0}^{n-1} ((.)\, y_j' + (.)\, y_j) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (3(\mu_i^k)' + \sum_{j=0}^{n-1} \mu_i^j m_j^k)\, y_k'' + \sum_{k=0}^{n} ((.)\, y_k' + (.)\, y_k) =$$
$$= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (3(\mu_i^k)' + \sum_{j=0}^{n-1} \mu_i^j m_j^k)\, v_k^l \bar{y}_l'' + \sum_{l=0}^{n} ((.)\, \bar{y}_l' + (.)\, \bar{y}_l).$$

Zvolíme-li za funkce μ_i^k řešení systému diferenciálních rovnic

$$3(\mu_i^k)' + \sum_{j=0}^{n-1} \mu_i^j m_j^k = 0, \quad \mu_i^k(t_0) = \delta_i^k; \quad i, k = 0, 1, \ldots, n-1;$$

budou mezi křivkami $\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_n$ platit vztahy obdobné (6), ale bude $m_i^j = 0$, $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$. Přitom (2) zůstane zachováno. Tedy za předpokladu, že platí (1), můžeme zvolit řídící křivky tak, že bude platit

$$(8) \qquad y_i''' = \sum_{j=0}^{n} n_i^j y_j' + \sum_{j=0}^{n} p_i^j y_j\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1\,,$$

$$y_n'' = \sum_{j=0}^{n} b^j y_j' + \sum_{j=0}^{n} c^j y_j\,.$$

6. Mějme opět na monosystému křivku (3). Označme

$$T_2(\alpha^i(t_0), t_0) = [y_0(t_0), \ldots, y_n(t_0), y_0'(t_0), \ldots, y_n'(t_0), \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i(t_0)\, y_i''(t_0)]$$

2-oskulační prostor monosystému v bodě $\sum_{i=0}^{n} \alpha^i(t_0)\, y_i(t_0)$. Body $x(t_0)$, $x'(t_0)$, $x''(t_0)$ leží v $T_2(\alpha^i(t_0), t_0)$. Je-li též $x'''(t_0) \in T_2(\alpha^i(t_0), t_0)$, nazveme bod $x(t_0)$ *kvasiasymptotickým bodem indexu* 2 křivky (3) (viz [7]).

Derivováním (3) a použitím (8) dostaneme

$$x' = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i y_i' + \sum_{i=0}^{n} (\alpha^i)'\, y_i\,,$$

$$x'' = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i y_i'' + \sum_{i=0}^{n} (2(\alpha^i)' + \alpha^n b^i)\, y_i' + \sum_{i=0}^{n} (.)\, y_i\,,$$

$$x''' = \sum_{i=0}^{n-1} (3(\alpha^i)' + \alpha^n b^i)\, y_i'' + \sum_{i=0}^{n} ((.)\, y_i' + (.)\, y_i)\,.$$

Aby $x'''(t_0) \in T_2(\alpha^i(t_0), t_0)$, je nutné a stačí, aby matice

$$\begin{pmatrix} 3(\alpha^0)' + \alpha^n b^0, & \ldots, & 3(\alpha^{n-1})' + \alpha^n b^{n-1} \\ \alpha^0 & , \ldots, & \alpha^{n-1} \end{pmatrix}$$

měla pro $t = t_0$ hodnost 1, tj. aby pro $t = t_0$ byla splněna soustava rovnic

$$(3(\alpha^i)' + \alpha^n b^i)\, \alpha^j - (3(\alpha^j)' + \alpha^n b^j)\, \alpha^i = 0\,, \quad i, j = 0, \ldots, n-1\,,$$

tj. soustava

$$(9) \qquad (\alpha^i)'\, \alpha^j - (\alpha^j)'\, \alpha^i = \tfrac{1}{3}\alpha^n(\alpha^i b^j - \alpha^j b^i)\,, \quad i, j = 0, \ldots, n-1\,.$$

Aby tedy bod $x(t_0)$ byl kvasiasymptotickým bodem indexu 2 křivky (3), *je nutné a stačí, aby pro $t = t_0$ byla splněna soustava rovnic* (9). *Křivka* (3) *je kasiasymptotická indexu 2 tehdy a jen tehdy, splňuje-li soustavu diferenciálních rovnic* (9).

Splňují-li funkce $\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^n$ soustavu (9) a je-li ϱ libovolná diferencovatelná funkce, splňují zřejmě i funkce $\varrho\alpha^0, \varrho\alpha^1, \ldots, \varrho\alpha^n$ soustavu (9).

7. Zjistíme nyní, jak vypadají kvasiasymptótické křivky indexu 2 procházející daným bodem $x(t_0) = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i(t_0)\, y_i(t_0)$. Budeme přitom předpokládat, že $x(t_0)$ neleží na poloasymptotické křivce, takže není současně $\alpha^0(t_0) = \alpha^1(t_0) = \ldots = \alpha^{n-1}(t_0) = 0$. Existuje tedy q, $0 \leqq q \leqq n - 1$, tak, že $\alpha^q(t_0) \neq 0$. Vhodnou volbou skalárního faktoru můžeme dosáhnout toho, že ve vyjádření křivky (3) je $\alpha^q \equiv 1$ v okolí t_0. Napíšeme soustavu diferenciálních rovnic

$$(10) \qquad (\alpha^i)' = \tfrac{1}{3}\alpha^n(\alpha^i b^q - b^i)\,, \quad i = 0, 1, \ldots, q-1, q+1, \ldots, n - 1\,.$$

Jestliže funkce $\alpha^0, \ldots, \alpha^n$ splňují (9) a $\alpha^q \equiv 1$, pak funkce $\alpha^0, \ldots, \alpha^{q-1}, \alpha^{q+1}, \ldots, \alpha^n$ splňují (10). Ale také naopak, jestliže funkce $\alpha^0, \ldots, \alpha^{q-1}, \alpha^{q+1}, \ldots, \alpha^n$ splňují (10), pak funkce $\alpha^0, \ldots, \alpha^{q-1}, 1, \alpha^{q+1}, \ldots, \alpha^n$ splňují (9). To je zřejmé u těch rovnic (9), u nichž $i = q$ nebo $j = q$. Budiž tedy $i \neq q \neq j$ a nechť je splněno (10). Potom

$$(\alpha^i)'\,\alpha^j - (\alpha^j)'\,\alpha^i = \tfrac{1}{3}\alpha^n(\alpha^i b^q - b^i)\,\alpha^j - \tfrac{1}{3}\alpha^n(\alpha^j b^q - b^j)\,\alpha^i =$$
$$= \tfrac{1}{3}\alpha^n(b^j\alpha^i - b^i\alpha^j)\,,$$

tedy i rovnice (9), u nichž $i \neq q \neq j$, jsou splněny.

V soustavě (10) můžeme zvolit libovolně funkci α^n a soustava pak má při daných počátečních podmínkách právě jedno řešení $\alpha^0, \ldots, \alpha^{q-1}, \alpha^{q+1}, \ldots, \alpha^{n-1}$. To znamená, že v soustavě (9) můžeme libovolně zvolit funkci α^n a soustava má pak při daných počátečních podmínkách právě jedno řešení $\alpha^0, \ldots, \alpha^{n-1}$ takové, že $\alpha^q \equiv 1$. Řešení soustavy (9) jsou pak právě všechny soustavy funkcí tvaru $\varrho\alpha^0, \varrho\alpha^1, \ldots, \varrho\alpha^n$. Odtud plyne:

Každým bodem $x(t_0) = \sum_{i=0}^{n} \gamma^i\, y_i(t_0)$ monosystému, který neleží na poloasymptotické křivce, prochází nekonečně mnoho kvasiasymptotických křivek indexu 2. Dostaneme je tak, že bod $x(t_0)$ normujeme tak, aby $\gamma^q = 1$ pro nějaké q, $0 \leqq q \leqq n - 1$, pak v (3) zvolíme libovolně funkci α^n tak, že $\alpha^n(t_0) = \gamma^n$ a ostatní α^i v (3) zvolíme jako (jediné) řešení soustavy (9), při kterém $\alpha^q \equiv 1$.

8. Zjistíme, jak vypadají tečny kvasiasymptotických křivek indexu 2 procházejících bodem $x(t_0)$.

Je-li (3) kvasiasymptotická křivka indexu 2 procházející bodem $x(t_0)$, je její tečnou přímka $[x(t_0), x'(t_0)]$, při čemž

$$x'(t_0) = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i(t_0)\, y_i'(t_0) + \sum_{i=0}^{n} (\alpha^i)'\,(t_0)\, y_i(t_0)\,.$$

Funkce α^i splňují soustavu (9). Vidíme, že hodnoty $\alpha^{0\prime}(t_0), \ldots, \alpha^{n-1\prime}(t_0)$ nezávisí na tom, jak zvolíme $(\alpha^n)'\,(t_0)$. Číslo $(\alpha^n)'(t_0)$ můžeme zvolit zcela libovolně. Tečnami kvasiasymptotických křivek indexu 2 jsou tedy přímky $[x(t_0), z(t_0) + uy_n(t_0)]$, kde

$$z = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i y_i' + \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha^i)' y_i \tag{11}$$

a u je libovolné číslo. Vidíme, že *tečny kvasiasymptotických křivek indexu 2 jdoucích bodem $x(t_0)$ vyplní rovinu $[x(t_0), z(t_0), y_n(t_0)]$, kde bod z je dán vzorcem* (11).

Poznámka. Pro $n = 1$ je soustava (9) splněna, ať jsou funkce α^0, α^1 jakékoliv. Tedy na přímkové ploše v S_4 je každá křivka kvasiasymptotická indexu 2 (platí-li (1)). To je ostatně vidět i přímo, neboť prostor $T_2(\alpha^i(t_0), t_0)$ vyplní celý S_4.

9. Mějme na monosystému kromě křivky (3) ještě křivku

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=0}^{n} \bar{\alpha}^i(t)\, y_i(t)$$

a nechť tato křivka prochází bodem $x(t_0)$ a má v něm s křivkou $x(t)$ společnou tečnu. Potom, *je-li $x(t_0)$ kvasiasymptotickým bodem indexu 2 na křivce $x(t)$, je $\bar{x}(t_0)$ kvasiasymptotickým bodem indexu 2 na křivce $\bar{x}(t)$.*

Skutečně, protože $x(t)$, $\bar{x}(t)$ mají společnou tečnu v bodě $x(t_0)$, existují čísla ϱ, σ, τ tak, že

$$\bar{x}(t_0) = \varrho\, x(t_0)\,, \quad \varrho \neq 0\,,$$
$$\bar{x}'(t_0) = \tau\, x'(t_0) + \sigma\, x(t_0)\,.$$

Z první z těchto rovnic plyne

$$\bar{\alpha}^i(t_0) = \varrho\, \alpha^i(t_0) \tag{12}$$

a z druhé dostaneme v bodě $t = t_0$:

$$\bar{x}' = \sum_{i=0}^{n} \bar{\alpha}^i y_i' + \sum_{i=0}^{n} (\bar{\alpha}^i)'\, y_i = \tau\Big(\sum_{i=0}^{n} \alpha^i y_i' + \sum_{i=0}^{n} (\alpha^i)'\, y_i\Big) + \sigma \sum_{i=0}^{n} \alpha^i y_i =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \tau\, \alpha^i y_i' + \sum_{i=0}^{n} \big(\tau(\alpha^i) + \sigma\, \alpha^i\big)\, y_i\,.$$

Odtud na základě (1) plyne

$$\bar{\alpha}^i(t_0) = \tau\alpha^i(t_0)\,, \quad (\bar{\alpha}^i)'\,(t_0) = \tau(\alpha^i)'\,(t_0) + \sigma\, \alpha^i(t_0)\,,$$

takže srovnáním s (12) dostaneme $\varrho = \tau$ a

$$(\bar{\alpha}^i)'\,(t_0) = \varrho(\alpha^i)'\,(t_0) + \sigma\, \alpha^i(t_0)\,. \tag{13}$$