ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 98 * PRAHA 15. 8. 1973 * ČÍSLO 3

JEDNOPARAMETRICKÉ SYSTÉMY PROJEKTIVNÍCH PROSTORŮ DIMENSE n V PROSTORU DIMENSE $3n + 1$

MILOSLAV JŮZA, Praha

(Došlo dne 5. srpna 1971)

Základní věty o jednoparametrických systémech projektivních prostorů S_n v projektivním prostoru S_m byly odvozeny v práci [7]. Již dříve byly tyto systémy podrobněji studovány pro některé dimense. Kromě přímkových ploch ($n = 1$) byl studován případ $m = kn + k - 1$, zvláště $m = 2n + 1$. (Viz práce [1], [2], [4], [5], [6]) a případ $n = 2$, $m = 6$ (viz [3]). V tomto článku je studován případ $m = 3n + 1$.

1. Mějme v prostoru S_{3n+1} jednoparametrický systém (monosystém) projektivních prostorů

$$S_n(t) = [y_0(t), y_1(t), \ldots, y_n(t)] .$$

Předpokládejme, že platí

$$[y_0, y_1, \ldots, y_n, y'_0, y'_1, \ldots, y'_n, y''_0, y''_1, \ldots, y''_{n-1}] \neq 0 . \tag{1}$$

Z (1) plyne, že monosystém neleží v prostoru dimense nižší než $3n + 1$.

Vzhledem k tomu, že $m = 3n + 1$ a platí (1), můžeme psát

$$y''_n = \sum_{j=0}^{n-1} a^j y''_j + \sum_{j=0}^{n} b^j y'_j + \sum_{j=0}^{n} c^j y_j ,$$

kde a^j, b^j, c^j jsou funkce t. Provedeme-li změnu řídících křivek

$$\bar{y}_i = y_i , \quad i = 0, 1, \ldots, n - 1 ,$$

$$\bar{y}_n = y_n - \sum_{j=0}^{n-1} a^j y_j ,$$

můžeme dosáhnout toho, že $a^j = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n - 1$. Budeme tedy nadále předpokládat, že platí (1) a

$$y''_n = \sum_{j=0}^{n} b^j y'_j + \sum_{j=0}^{n} c^j y_j . \tag{2}$$

2. Označme $T_1(t_0) = [y_0(t_0), \ldots, y_n(t_0), y_0'(t_0), \ldots, y_n'(t_0)]$ tečný prostor monosystému podél tvořícího prostoru $[y_0(t_0), \ldots, y_n(t_0)]$. Máme-li na monosystému křivku

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i(t)\, y_i(t)\,, \tag{3}$$

je ovšem $x'(t_0) \in T_1(t_0)$. Je-li dokonce $x''(t_0), x'''(t_0), \ldots, x^{(1+k)}(t_0) \in T_1(t_0)$, nazveme bod $x(t_0)$ *poloasymptotickým bodem řádu k* křivky $x(t)$ (viz [7]).

Derivováním (3) a úpravou podle (2) dostaneme

$$x'' = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i y_i'' + \sum_{i=0}^{n} (2\alpha^{i\prime} + \alpha^n b^i)\, y_i' + \sum_{i=0}^{n} (.)\, y_i\,. \tag{4}$$

Vzhledem k (1) *je tehdy bod* $x(t_0)$ *poloasymptotickým bodem řádu* 1 *křivky* $x(t)$ *právě tehdy, je-li* $\alpha^0(t_0) = \alpha^1(t_0) = \ldots = \alpha^{n-1}(t_0) = 0$, *tj. leží-li* $x(t_0)$ *na křivce* $y_n(t)$. *Křivka* $y_n(t)$ *je jedinou poloasymptotickou křivkou řádu* 1 *na monosystému.*

3. Zjistíme, kdy na křivce $y_n(t)$ leží poloasymptotické body řádu 2. Derivováním a opětným použitím (2) dostaneme

$$y_n''' = \sum_{j=0}^{n-1} b^j y_j'' + \sum_{j=0}^{n} ((.)\, y_j' + (.)\, y_j)\,.$$

Aby tedy bod $y_n(t_0)$ *byl poloasymptotický řádu* 2, *je nutné a stačí, aby* $b^0(t_0) = b^1(t_0) = \ldots = b^{n-1}(t_0) = 0$.

4. Označme $T_1(\alpha^i(t_0), t_0) = [y_0(t_0), \ldots, y_n(t_0), \sum_{i=0}^{n} \alpha^i(t_0)\, y_i'(t_0)]$ tečný prostor monosystému v bodě $\sum_{i=0}^{n} \alpha^i(t_0)\, y_i(t_0)$. Bod $x(t_0)$ nazveme *asymptotickým bodem* křivky (3), jestliže $x''(t_0) \in T_1(\alpha^i(t_0), t_0)$.

Aby bod $x(t_0)$ byl asymptotickým bodem křivky $x(t)$, je podle (4) nutné a stačí, aby

(A) $$\alpha^0(t_0) = \alpha^1(t_0) = \ldots = \alpha^{n-1}(t_0) = 0\,;$$

(B) matice

$$\begin{pmatrix} \alpha^0\,, & \alpha^1\,, & \ldots, & \alpha^{n-1}\,, & \alpha^n \\ 2(\alpha^0)' + \alpha^n b^0, & 2(\alpha^1)' + \alpha^n b^1, & \ldots, & 2(\alpha^{n-1})' + \alpha^n b^{n-1}, & 2(\alpha^n)' + \alpha^n b^n \end{pmatrix}$$

měla pro $t = t_0$ hodnost 1. Odtud plyne (viz [7]), že *bod* $x(t_0)$ *je asymptotickým bodem křivky* (3), *když a jen když* $x(t_0)$ *leží na poloasymptotické křivce* $y_n(t)$ *a tečnou křivky* $x(t)$ *v tomto bodě je přímka*

$$[x(t_0), \alpha^n(t_0)\, y_n'(t_0) - \tfrac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \alpha^n(t_0)\, b^i(t_0)\, y_i(t_0)]\,. \tag{5}$$

Aby křivka $x(t)$ byla asymptotická, musí být poloasymptotická, tj. splynout s poloasymptotickou křivkou $y_n(t)$. Ale aby křivka $y_n(t)$ byla asymptotická, musí přímka (5) býti její tečnou, což znamená, že bod $\alpha^n y_n' - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} \alpha^n b^i y_i$ musí pro každé t ležet na přímce $[y_n, y_n']$. Vzhledem k lineární nezávislosti bodů $y_0, \ldots, y_n, y_n'$ to nastává právě tehdy, když $b^1 = b^2 = \ldots = b^{n-1} = 0$. *Křivka* (3) *je tedy asymptotická právě tehdy, je-li poloasymptotická řádu* 2.

5. Nechť pro monosystém $S_n(t) = [y_0(t), y_1(t), \ldots, y_n(t)]$ v S_{3n+1} opět platí (1) a řídící křivka $y_n(t)$ nechť je zvolena tak, že platí též (2). Vzhledem k (1) existují funkce m_i^j, n_i^j, p_i^j tak, že platí

$$(6) \qquad y_i''' = \sum_{j=0}^{n-1} m_i^j y_j'' + \sum_{j=0}^{n} n_i^j y_j' + \sum_{j=0}^{n} p_i^j y_j\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Provedeme změnu řídících křivek

$$(7) \qquad \bar{y}_i = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_i^j y_j\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1\,, \quad \det(\mu_i^j) \neq 0\,,$$

$$\bar{y}_n = y_n\,.$$

Určíme-li funkce v_j^k $(j, k = 0, 1, \ldots, n-1)$ tak, aby $\sum_{j=0}^{n-1} \mu_i^j v_j^k = \delta_i^k$, bude

$$y_j = \sum_{k=0}^{n-1} v_j^k \bar{y}_k\,, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1\,, \quad \det(v_j^k) \neq 0\,,$$

$$y_n = \bar{y}_n\,.$$

Derivováním (7) a použitím (6) a (2) dostaneme pro $i = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned}\bar{y}_i''' &= \sum_{j=0}^{n-1} \mu_i^j y_j''' + \sum_{j=0}^{n-1} 3(\mu_i^j)'\, y_j'' + \sum_{j=0}^{n-1} ((.)\, y_j' + (.)\, y_j) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (3(\mu_i^k)' + \sum_{j=0}^{n-1} \mu_i^j m_j^k)\, y_k'' + \sum_{k=0}^{n} ((.)\, y_k' + (.)\, y_k) = \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (3(\mu_i^k)' + \sum_{j=0}^{n-1} \mu_i^j m_j^k)\, v_k^l \bar{y}_l'' + \sum_{l=0}^{n} ((.)\, \bar{y}_l' + (.)\, \bar{y}_l)\,.\end{aligned}$$

Zvolíme-li za funkce μ_i^k řešení systému diferenciálních rovnic

$$3(\mu_i^k)' + \sum_{j=0}^{n-1} \mu_i^j m_j^k = 0\,, \quad \mu_i^k(t_0) = \delta_i^k\,; \quad i, k = 0, 1, \ldots, n-1\,;$$

budou mezi křivkami $\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_n$ platit vztahy obdobné (6), ale bude $m_i^j = 0$, $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$. Přitom (2) zůstane zachováno. Tedy za předpokladu, že platí (1), můžeme zvolit řídící křivky tak, že bude platit

$$(8)\qquad y_i''' = \sum_{j=0}^{n} n_i^j y_j' + \sum_{j=0}^{n} p_i^j y_j\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1\,,$$

$$y_n'' = \sum_{j=0}^{n} b^j y_j' + \sum_{j=0}^{n} c^j y_j\,.$$

6. Mějme opět na monosystému křivku (3). Označme

$$T_2(\alpha^i(t_0), t_0) = [y_0(t_0), \ldots, y_n(t_0), y_0'(t_0), \ldots, y_n'(t_0), \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i(t_0)\, y_i''(t_0)]$$

2-oskulační prostor monosystému v bodě $\sum_{i=0}^{n} \alpha^i(t_0)\, y_i(t_0)$. Body $x(t_0)$, $x'(t_0)$, $x''(t_0)$ leží v $T_2(\alpha^i(t_0), t_0)$. Je-li též $x'''(t_0) \in T_2(\alpha^i(t_0), t_0)$, nazveme bod $x(t_0)$ *kvasiasymptotickým bodem indexu* 2 křivky (3) (viz [7]).

Derivováním (3) a použitím (8) dostaneme

$$x' = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i y_i' + \sum_{i=0}^{n} (\alpha^i)'\, y_i\,,$$

$$x'' = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i y_i'' + \sum_{i=0}^{n} (2(\alpha^i)' + \alpha^n b^i)\, y_i' + \sum_{i=0}^{n} (.)\, y_i\,,$$

$$x''' = \sum_{i=0}^{n-1} (3(\alpha^i)' + \alpha^n b^i)\, y_i'' + \sum_{i=0}^{n} ((.)\, y_i' + (.)\, y_i)\,.$$

Aby $x'''(t_0) \in T_2(\alpha^i(t_0), t_0)$, je nutné a stačí, aby matice

$$\begin{pmatrix} 3(\alpha^0)' + \alpha^n b^0, & \ldots, & 3(\alpha^{n-1})' + \alpha^n b^{n-1} \\ \alpha^0 & , \ldots, & \alpha^{n-1} \end{pmatrix}$$

měla pro $t = t_0$ hodnost 1, tj. aby pro $t = t_0$ byla splněna soustava rovnic

$$(3(\alpha^i)' + \alpha^n b^i)\, \alpha^j - (3(\alpha^j)' + \alpha^n b^j)\, \alpha^i = 0\,, \quad i, j = 0, \ldots, n-1\,,$$

tj. soustava

$$(9)\qquad (\alpha^i)'\, \alpha^j - (\alpha^j)'\, \alpha^i = \tfrac{1}{3}\alpha^n(\alpha^i b^j - \alpha^j b^i)\,, \quad i, j = 0, \ldots, n-1\,.$$

Aby tedy bod $x(t_0)$ byl kvasiasymptotickým bodem indexu 2 *křivky* (3), *je nutné a stačí, aby pro $t = t_0$ byla splněna soustava rovnic* (9). *Křivka* (3) *je kasiasymptotická indexu* 2 *tehdy a jen tehdy, splňuje-li soustavu diferenciálních rovnic* (9).

Splňují-li funkce $\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^n$ soustavu (9) a je-li ϱ libovolná diferencovatelná funkce, splňují zřejmě i funkce $\varrho\alpha^0, \varrho\alpha^1, \ldots, \varrho\alpha^n$ soustavu (9).

7. Zjistíme nyní, jak vypadají kvasiasymptótické křivky indexu 2 procházející daným bodem $x(t_0) = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i(t_0)\, y_i(t_0)$. Budeme přitom předpokládat, že $x(t_0)$ neleží na poloasymptotické křivce, takže není současně $\alpha^0(t_0) = \alpha^1(t_0) = \ldots = \alpha^{n-1}(t_0) = 0$. Existuje tedy q, $0 \leqq q \leqq n - 1$, tak, že $\alpha^q(t_0) \neq 0$. Vhodnou volbou skalárního faktoru můžeme dosáhnout toho, že ve vyjádření křivky (3) je $\alpha^q \equiv 1$ v okolí t_0. Napíšeme soustavu diferenciálních rovnic

$$(\alpha^i)' = \tfrac{1}{3}\alpha^n(\alpha^i b^q - b^i)\,, \quad i = 0, 1, \ldots, q-1, q+1, \ldots, n-1\,. \tag{10}$$

Jestliže funkce $\alpha^0, \ldots, \alpha^n$ splňují (9) a $\alpha^q \equiv 1$, pak funkce $\alpha^0, \ldots, \alpha^{q-1}, \alpha^{q+1}, \ldots, \alpha^n$ splňují (10). Ale také naopak, jestliže funkce $\alpha^0, \ldots, \alpha^{q-1}, \alpha^{q+1}, \ldots, \alpha^n$ splňují (10), pak funkce $\alpha^0, \ldots, \alpha^{q-1}, 1, \alpha^{q+1}, \ldots, \alpha^n$ splňují (9). To je zřejmé u těch rovnic (9), u nichž $i = q$ nebo $j = q$. Budiž tedy $i \neq q \neq j$ a nechť je splněno (10). Potom

$$(\alpha^i)'\,\alpha^j - (\alpha^j)'\,\alpha^i = \tfrac{1}{3}\alpha^n(\alpha^i b^q - b^i)\,\alpha^j - \tfrac{1}{3}\alpha^n(\alpha^j b^q - b^j)\,\alpha^i =$$
$$= \tfrac{1}{3}\alpha^n(b^j\alpha^i - b^i\alpha^j)\,,$$

tedy i rovnice (9), u nichž $i \neq q \neq j$, jsou splněny.

V soustavě (10) můžeme zvolit libovolně funkci α^n a soustava pak má při daných počátečních podmínkách právě jedno řešení $\alpha^0, \ldots, \alpha^{q-1}, \alpha^{q+1}, \ldots, \alpha^{n-1}$. To znamená, že v soustavě (9) můžeme libovolně zvolit funkci α^n a soustava má pak při daných počátečních podmínkách právě jedno řešení $\alpha^0, \ldots, \alpha^{n-1}$ takové, že $\alpha^q \equiv 1$. Řešení soustavy (9) jsou pak právě všechny soustavy funkcí tvaru $\varrho\alpha^0, \varrho\alpha^1, \ldots, \varrho\alpha^n$. Odtud plyne:

Každým bodem $x(t_0) = \sum_{i=0}^{n} \gamma^i\, y_i(t_0)$ monosystému, který neleží na poloasymptotické křivce, prochází nekonečně mnoho kvasiasymptotických křivek indexu 2. Dostaneme je tak, že bod $x(t_0)$ normujeme tak, aby $\gamma^q = 1$ pro nějaké q, $0 \leqq q \leqq n - 1$, pak v (3) zvolíme libovolně funkci α^n tak, že $\alpha^n(t_0) = \gamma^n$ a ostatní α^i v (3) zvolíme jako (jediné) řešení soustavy (9), při kterém $\alpha^q \equiv 1$.

8. Zjistíme, jak vypadají tečny kvasiasymptotických křivek indexu 2 procházejících bodem $x(t_0)$.

Je-li (3) kvasiasymptotická křivka indexu 2 procházející bodem $x(t_0)$, je její tečnou přímka $[x(t_0), x'(t_0)]$, při čemž

$$x'(t_0) = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i(t_0)\, y_i'(t_0) + \sum_{i=0}^{n} (\alpha^i)'\,(t_0)\, y_i(t_0)\,.$$

Funkce α^i splňují soustavu (9). Vidíme, že hodnoty $\alpha^{0\prime}(t_0), \ldots, \alpha^{n-1\prime}(t_0)$ nezávisí na tom, jak zvolíme $(\alpha^n)'\,(t_0)$. Číslo $(\alpha^n)'(t_0)$ můžeme zvolit zcela libovolně. Tečnami kvasiasymptotických křivek indexu 2 jsou tedy přímky $[x(t_0), z(t_0) + uy_n(t_0)]$, kde

(11) $$z = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i y_i' + \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha^i)' y_i$$

a u je libovolné číslo. Vidíme, že *tečny kvasiasymptotických křivek indexu 2 jdoucích bodem $x(t_0)$ vyplní rovinu $[x(t_0), z(t_0), y_n(t_0)]$, kde bod z je dán vzorcem* (11).

Poznámka. Pro $n = 1$ je soustava (9) splněna, ať jsou funkce α^0, α^1 jakékoliv. Tedy na přímkové ploše v S_4 je každá křivka kvasiasymptotická indexu 2 (platí-li (1)). To je ostatně vidět i přímo, neboť prostor $T_2(\alpha^i(t_0), t_0)$ vyplní celý S_4.

9. Mějme na monosystému kromě křivky (3) ještě křivku

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=0}^{n} \bar{\alpha}^i(t)\, y_i(t)$$

a nechť tato křivka prochází bodem $x(t_0)$ a má v něm s křivkou $x(t)$ společnou tečnu. Potom, *je-li $x(t_0)$ kvasiasymptotickým bodem indexu 2 na křivce $x(t)$, je $\bar{x}(t_0)$ kvasiasymptotickým bodem indexu 2 na křivce $\bar{x}(t)$.*

Skutečně, protože $x(t)$, $\bar{x}(t)$ mají společnou tečnu v bodě $x(t_0)$, existují čísla ϱ, σ, τ tak, že

$$\bar{x}(t_0) = \varrho\, x(t_0)\,, \quad \varrho \neq 0\,,$$
$$\bar{x}'(t_0) = \tau\, x'(t_0) + \sigma\, x(t_0)\,.$$

Z první z těchto rovnic plyne

(12) $$\bar{\alpha}^i(t_0) = \varrho\, \alpha^i(t_0)$$

a z druhé dostaneme v bodě $t = t_0$:

$$\bar{x}' = \sum_{i=0}^{n} \bar{\alpha}^i y_i' + \sum_{i=0}^{n} (\bar{\alpha}^i)' y_i = \tau\Big(\sum_{i=0}^{n} \alpha^i y_i' + \sum_{i=0}^{n} (\alpha^i)' y_i\Big) + \sigma \sum_{i=0}^{n} \alpha^i y_i =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \tau\, \alpha^i y_i' + \sum_{i=0}^{n} \big(\tau(\alpha^i) + \sigma\, \alpha^i\big)\, y_i\,.$$

Odtud na základě (1) plyne

$$\bar{\alpha}^i(t_0) = \tau \alpha^i(t_0)\,, \quad (\bar{\alpha}^i)'(t_0) = \tau(\alpha^i)'(t_0) + \sigma\, \alpha^i(t_0)\,,$$

takže srovnáním s (12) dostaneme $\varrho = \tau$ a

(13) $$(\bar{\alpha}^i)'(t_0) = \varrho(\alpha^i)'(t_0) + \sigma\, \alpha^i(t_0)\,.$$

Ale bod $x(t_0)$ je kvasiasymptotickým bodem indexu 2 na křivce $x(t)$, tedy $\alpha^i(t_0)$, $(\alpha^i)'(t_0)$ splňují soustavu (9). Odtud na základě (12) a (13) dostaneme v bodě $t = t_0$ pro $i, j = 0, 1, \ldots, n - 1$:

$$(\bar{\alpha}^i)' \bar{\alpha}^j - (\bar{\alpha}^j)' \bar{\alpha}^i = (\varrho(\alpha^i)' + \sigma\alpha^i) \varrho\alpha^j - (\varrho(\alpha^j)' + \sigma\alpha^j) \varrho\alpha^i =$$
$$= \varrho^2((\alpha^i)' \alpha^j - (\alpha^j)' \alpha^i) = \varrho^2 . \tfrac{1}{3}\alpha^n(\alpha^i b^j - \alpha^j b^i) =$$
$$= \tfrac{1}{3}\bar{\alpha}^n(\bar{\alpha}^i b^j - \bar{\alpha}^j b^i) .$$

Tedy čísla $\bar{\alpha}^i(t_0)$ $(\bar{\alpha}^i)'(t_0)$ rovněž splňují soustavu (9) a bod $\bar{x}(t_0)$ je kvasiasymptotickým bodem indexu 2 křivky $\bar{x}(t)$.

Odtud na základě odst. 8 dostaneme větu:

Bod $x(t_0)$ je kvasiasymptotickým bodem indexu 2 křivky

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i(t)\, y_i(t) ,$$

právě když tečna této křivky v bodě $x(t_0)$ leží v rovině $[x(t_0), z(t_0), y_n(t_0)]$, kde bod $z(t_0)$ je dán vzorcem (11).

Literatura

[1] *E. Čech:* Nová metoda projektivní geometrie zborcených ploch. Časopis pro pěst. mat. a fys., *53*, 1924, 31—37.

[2] *M. Jůza:* Sur les variétés représentant une généralisation des surfaces réglées. Czech. Mat. Journal, *10* (*85*), 1960, 440—456.

[3] *M. Jůza:* Jednoparametrické systémy rovin v prostoru S_6. Mat.-fyz. čas. SAV, *13*, 1963, 125—136.

[4] *M. Jůza:* Les monosystèmes d'espaces projectifs dont les lignes asymptotiques sont des droites. Czech. Mat. Journal *14* (*89*), 1964, 582—592.

[5] *M. Jůza:* Styk monosystémů projektivních prostorů. Mat.-fyz. čas. SAV, *16*, 1966, 218—228.

[6] *M. Jůza:* Généralisation à plusieurs dimensions de la quadrique osculatrice. Mat. čas. SAV, *17*, 1967, 64—75.

[7] *M. Jůza:* Systèmes monoparametriques des espaces projectifs. Czech. Mat. Journal, *19* (*94*), (1969), 363—367.

Adresa autora: 130 66 Praha 3, Olšanská 9 (Ústředí výpočetní techniky dopravy).

Résumé

SYSTÈMES MONOPARAMÉTRIQUES DES ESPACES PROJECTIFS DE LA DIMENSION n DANS UN ESPACE DE LA DIMENSION $3n + 1$

MILOSLAV JŮZA, Praha

Soit $S_n(t) = [y_0(t), y_1(t), \ldots, y_n(t)]$ un système monoparamétrique (monosystème) des espaces projectifs dans un espace projectif S_{3n+1}. Supposons que les points $y_0(t), y_1(t), \ldots, y_n(t), y'_0(t), y'_1(t), \ldots, y'_n(t)$ sont linéairement indépendant pour chaque t et que la matrice

$$[y_0, y_1, \ldots, y_n, y'_0, y'_1, \ldots, y'_n, y''_0, y''_1, \ldots, y''_n]$$

est de rang $3n + 2$.

Une courbe $x(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i(t)\, y_i(t)$ est appelée asymptotique si, pour chaque t, le point $x''(t)$ est placé dans l'espace tangent du monosystème au point $x(t)$. Elle est appelée semiasymptotique d'ordre k si, pour chaque t, les points $x''(t), x'''(t), \ldots$ $\ldots, x^{(1+k)}(t)$ sont placés dans l'espace

$$[y_0(t), y_1(t), \ldots, y_n(t), y'_0(t), y'_1(t), \ldots, y'_n(t)]\,.$$

Sur le monosystème, il y a une et une seule courbe semiasymptotique d'ordre 1. Cette courbe est semiasymptotique d'ordre 2 si et seulement si elle est asymptotique.

Une courbe $x(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i(t)\, y_i(t)$ est appelée quasiasymptotique d'indice 2 si, pour chaque t, le point $x'''(t)$ est placé dans l'espace osculateur du monosystème au point $x(t)$, c'est-à-dire dans l'espace

$$[y_0(t), \ldots, y_n(t), y'_0(t), \ldots, y'_n(t), \sum_{i=0}^{n} \alpha^i(t)\, y''_i(t)]\,.$$

Par chaque point du monosystème qui n'est pas placé sur la courbe semiasymptotique, il passe l'infinité des courbes quasiasymptotiques d'indice 2. Leurs droites tangentes à ce point forment un plan (de la dimension 2). Ainsi, un plan correspond à chaque point du monosystème qui n'est pas placé sur la courbe semiasymptotique. Une courbe sur le monosystème est quasiasymptotique d'indice 2 si et seulement si, à chaque point, sa droite tangente est placée dans ce plan.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ON A GRAPH THEORY PROBLEM OF M. KOMAN

DRAGOŠ M. CVETKOVIĆ, Beograd

(Received September 30, 1971)

We consider only finite undirected graphs without loops or multiple edges.

Let G be a graph with vertices numbered by $1, \ldots, s$. A walk of length k in G is a sequence $i_1, \ldots, i_{k+1}$ of vertices with i_j and i_{j+1} adjacent for every $j = 1, \ldots, k$. The adjacency matrix A of the graph G is defined by $A = \|a_{ij}\|_1^s$, where a_{ij} is equal to the number of edges connecting the vertex i with the vertex j. It is known that the element at the place (i, j) of matrix A^k is equal to the number of walks of length k leading from the vertex i to the vertex j [1], p. 124.

Let $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_q\}$ be a set of n-tuples $\beta_f = (\beta_{f1}, \ldots, \beta_{fn})$, $f = 1, \ldots, q$ of the numbers 0 and 1 not containing n-tuple $(0, \ldots, 0)$. NEPS (incomplete extended p-sum of graphs [2]) with the basis B of graphs $G_1, \ldots, G_n$ is the graph $G = g_B(G_1, \ldots \ldots, G_n)$, whose set of vertices is equal to the Cartesian product of the sets of vertices of graphs $G_1, \ldots, G_n$ and in which two vertices $(p_1, \ldots, p_n)$ and $(q_1, \ldots, q_n)$ are adjacent if and only if there is an n-tuple $(\beta_{f1}, \ldots, \beta_{fn})$, in B, such that $p_j = q_j$ exactly when $\beta_{fj} = 0$ and p_j is adjacent to q_j in G_j exactly when $\beta_{fj} = 1$.

We shall now deduce a relation between the numbers of walks in $G_1, \ldots, G_n$ and the number of walks in $g_B(G_1, \ldots, G_n)$; this relation is a little more precise than the corresponding ones in [3] and [2].

Let the vertices in every graph $G_1, \ldots, G_n$ be ordered (numbered). We shall give the lexicographic order to the vertices of NEPS (representing the ordered n-tuples of vertices of graphs $G_1, \ldots, G_n$) and we shall form adjacency matrix $\mathscr{A}$ of NEPS according to this ordering.

If $A_1, \ldots, A_n$ are the adjacency matrices of graphs $G_1, \ldots, G_n$, the adjacency matrix of $g_B(G_1, \ldots, G_n)$ is given by

$$(1) \qquad \mathscr{A} = \sum_{f=1}^{q} A_1^{\beta_{f1}} \otimes \ldots \otimes A_n^{\beta_{fn}},$$

where $\otimes$ denotes Kronecker's multiplication of matrices [2].

Let $B_f = A_1^{\beta_{f1}} \otimes \dots \otimes A_n^{\beta_{fn}}, f = 1, \dots, q$. Then

$$(2) \qquad \mathscr{A}^k = (B_1 + \dots + B_q)^k = \sum_{s_1,\dots,s_q} \frac{k!}{s_1! \dots s_q!} B_1^{s_1} \dots B_q^{s_q} = \sum_{s_1,\dots,s_q} \frac{k!}{s_1! \dots s_q!} A_1^{l_1} \otimes \dots \otimes A_n^{l_n},$$

where the sum is taken over all ordered partitions (compositions) of the number k and where $l_i = \sum_{f=1}^{q} \beta_{fi} s_f$ $(i = 1, \dots, n)$.

Let x and y be two vertices of the graph to which a square matrix Z of the order equal to the number of vertices corresponds. $(Z)_{x,y}$ denotes the element of Z from the row corresponding to x and the column corresponding to y.

According to (2) we have

$$(3) \qquad (\mathscr{A}^k)_{(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)} = \sum_{s_1,\dots,s_q} \frac{k!}{s_1! \dots s_q!} (A_1^{l_1})_{x_1,y_1} \dots (A_n^{l_n})_{x_n,y_n}.$$

Let $N^k_{(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,z_n)}$ be the number of walks of length k in NEPS leading from the vertex $(x_1, \dots, x_n)$ to the vertex $(y_1, \dots, y_n)$ and ${}^iN^k_{x_i,y_i}$, $i = 1, \dots, n$ the numbers of walks of length k in G_i leading from x_i to y_i. Relation (3) can be written in the following way:

$$(4) \qquad N^k_{(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)} = \sum_{s_1,\dots,s_q} \frac{k!}{s! \dots s_q!} {}^1N^{l_1}_{x_1,y_1} \dots {}^nN^{l_n}_{x_n,y_n}.$$

According to [4] we can deduce that the numbers ${}^iN^k_{x_i,y_i}$ are of the form

$$(5) \qquad {}^iN^k_{x_i,y_i} = \sum_{j_i=0}^{b_i} {}^i_{j_i}C_{x_i,y_i} {}^i\lambda^k_{j_i},$$

where ${}^i_{j_i}C_{x_i,y_i}$, ${}^i\lambda_{j_i}$ are real numbers and b_i nonnegative integers.

Substituting (5) into (4) we get

$$(6) \qquad N^k_{(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)} = \sum_{s_1,\dots,s_q} \frac{k!}{s_1! \dots s_q!} \sum_{j_1=0}^{b_1} {}^1_{j_1}C_{x_1,y_1} {}^1\lambda^{l_1}_{j_1} \dots \sum_{j_n=0}^{b_n} {}^n_{j_n}C_{x_n,y_n} {}^n\lambda^{l_n}_{j_n} =$$

$$= \sum_{j_1,\dots,j_n} {}^1_{j_1}C_{x_1,y_1} \dots {}^n_{j_n}C_{x_n,y_n} \sum_{s_1,\dots,s_q} \frac{k!}{s_1! \dots s_q!} {}^1\lambda_{j_1}^{\sum_{f=1}^{q} \beta_{f1} s_f} \dots {}^n\lambda_{j_n}^{\sum_{f=1}^{q} \beta_{fn} s_f} =$$

$$= \sum_{j_1,\dots,j_n} {}^1_{j_1}C_{x_1,y_1} \dots {}^n_{j_n}C_{x_n,y_n} \sum_{s_1,\dots,s_q} \frac{k!}{s_1! \dots s_q!} \prod_{f=1}^{q} ({}^1\lambda_{j_1}^{\beta_{f1}} \dots {}^n\lambda_{j_n}^{\beta_{fn}})^{s_f} =$$

$$= \sum_{j_1,\dots,j_n} {}^1_{j_1}C_{x_1,y_1} \dots {}^n_{j_n}C_{x_n,y_n} \Big(\sum_{f=1}^{q} {}^1\lambda_{j_1}^{\beta_{f1}} \dots {}^n\lambda_{j_n}^{\beta_{fn}}\Big)^k,$$

where $\sum_{j_1,\ldots,j_n}$ denotes the sum over all n-tuples $j_1, \ldots, j_n$ for which $0 \leqq j_i \leqq b_i$, $i = 1, \ldots, n$ holds.

Adding up relation (6) for all pairs of vertices in a NEPS we get the result of [3], i.e. of [2].

The number of walks of length k joining two given vertices in the graph G (G to be defined below) is determined in [5]. Vertices of G are all n-tuples $(p_1, \ldots, p_n)$, where $1 \leqq p_i \leqq r_i$, $i = 1, \ldots, n$. Two vertices are adjacent if and only if they differ in exactly one coordinate (in [5] directed graphs are treated but the above formulation using undirected graphs is equivalent). We shall extend obtained results to the graph of a somewhat more general form and we shall use a method different from that in [5].

NEPS with the basis containing all possible n-tuples having exactly one 1 is called the sum of graphs. The above described graph G can be represented as the sum of graphs $K_{r_1}, \ldots, K_{r_n}$, where K_r denotes the complete graph with r vertices. We shall consider an arbitrary NEPS of the mentioned complete graphs and we shall determine the number of walks of length k joining two given vertices of NEPS.

Primarily, we shall find the expressions for the number of walks of length k in a complete graph. Due to the symmetry, we shall distinguish only two case: 1°(2°) the first and the last vertex of the walk are (are not) identical.

Let a complete graph with r vertices be given. The number of all walks of length k is, obviously, equal to $r(r-1)^k$. The set of eigenvalues of the adjacency matrix of the graph contains the number $r-1$ as well as $r-1$ numbers equal to -1. The number of all walks of length k starting and terminating at the same vertex is equal to the trace of the matrix A^k, i.e., to $(r-1)^k + (r-1)(-1)^k$. The number of all walks of length k joining two non-identical vertices is then $r(r-1)^k - [(r-1)^k + (r-1) \cdot (-1)^k] = (r-1)(r-1)^k - (r-1)(-1)^k$. The number of walks starting and terminating at the given vertex is equal to $(r-1)^k/r + (r-1)(-1)^k/r$ and the number of walks starting at the given vertex and terminating at the other given vertex is equal to $(r-1)^k/r - (-1)^k/r$. The number of walks starting at the vertex i and terminating at the vertex j can be, in general, expressed by

$$N_{i,j} = \frac{1}{r}\left[(r-1)^k + (r\delta_{ij} - 1)(-1)^k\right], \tag{7}$$

where δ_{ij} denotes Kronecker's δ-symbol.

Let $G_i = K_{r_i}$ ($r_i \geqq 2$) and let p_i and q_i be two vertices of G_i, for every i. Then

$${}^{i}N^{k}_{p_i,q_i} = \frac{1}{r_i}\sum_{j_i=0}^{1}(r_i\delta_{p_iq_i} - 1)^{j_i}(r_i - 1 - r_ij_i)^k. \tag{8}$$

The number of walks of length k starting at $(p_1, \ldots, p_n)$ and terminating at

$(q_1, \ldots, q_n)$ in $g_B(K_{r_1}, \ldots, K_{r_n})$ is then

$$(9) \qquad N^k_{(p_1,\ldots,p_n),(q_1,\ldots,q_n)} =$$
$$= (r_1 \ldots r_n)^{-1} \sum_{j_1,\ldots,j_n} [\prod_{i=1}^{n} (r_i \delta_{p_i q_i} - 1)^{j_i}] \cdot [\sum_{f=1}^{q} \prod_{i=1}^{n} (r_i - 1 - r_i j_i)^{\beta_{fi}}]^k ,$$

where $(j_1, \ldots, j_n)$ ranges over the set $\{0, 1\}^n$.

References

[1] *C. Berge*, Théorie des graphes et ses applications, deuxième édition, Paris 1963.

[2] *D. M. Cvetković*, Graphs and their spectra, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No 354 — No 356 (1971), 1—50.

[3] *D. M. Cvetković*, A note on paths in the p-sum of graphs, ibid. No 302 — No 319 (1970), 49—51.

[4] *D. M. Cvetković*, The generating function for variations with restrictions and paths of the graph and self-complementary graphs, ibid. No 320 — No 328 (1970), 27—34.

[5] *M. Koman*, Úloha o šachovnici a její zobecnění v teorii grafů, Časopis Pěst. Mat. *86* (1961), 344—351.

Author's address: Faculty of Electrical Engineering, University of Belgrade, 11001 Belgrade, P. O. B. 816, Yugoslavia.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ON THE RELATION BETWEEN YOUNG'S AND KURZWEIL'S CONCEPT OF STIELTJES INTEGRAL

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha

(Received October 19, 1971)

The considerations in this paper are limited to the closed interval $[a, b]$, $-\infty < < a < b < +\infty$ and to finite real functions defined on this interval. For a real function $g : [a, b] \to R$ we denote by $\operatorname{var}_a^b g$ the obvious (total) variation of g on $[a, b]$. The set of all real functions $g : [a, b] \to R$ with $\operatorname{var}_a^b g < +\infty$ is denoted by $BV(a, b)$.

1. THE RIEMANN AND YOUNG INTEGRALS

Let $\mathscr{D}$ be the set of all sequences $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ of points in the interval $[a, b]$ such that

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k = b . \tag{1,1}$$

We consider finite sequences (subdivisions of $[a, b]$) $B = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_k, \alpha_k\}$. For a given $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \in \mathscr{D}$ we denote by $\mathscr{B}^*(D)$, $\mathscr{B}(D)$ the sets of all subdivisions $B = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_k, \alpha_k\}$ such that, respectively,

$$\text{a)} \quad \alpha_{j-1} \leqq \tau_j \leqq \alpha_j , \qquad \text{b)} \quad \alpha_{j-1} < \tau_j < \alpha_j \tag{1,2}$$

for all $j = 1, 2, \ldots, k$.

On $\mathscr{D}$ we define the binary relation $\succ$ in the following manner: for $D, D' \in \mathscr{D}$ we have $D' \succ D$ if D' is a refinement of D, i.e. if any point α_j from D appears also in D'.

If we define $|D| = \max_{j=1,\ldots,k} |\alpha_j - \alpha_{j-1}|$ for $D \in \mathscr{D}$ then another binary relation $\gg$ may be defined on $\mathscr{D}$ by $D' \gg D$ if $|D'| \leqq |D|$.

It can be easily shown that $(\mathscr{D}, \succ)$ and $(\mathscr{D}, \gg)$ are directed sets.

Let now be given finite functions $f, g : [a, b] \to R$; for every $B = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots \ldots, \tau_k, \alpha_k\}$ satisfying (1,1) and (1,2) a) we put

$$R(B) = \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j) \left(g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})\right) . \tag{1,3}$$

Definition 1,1. *The function $f : [a, b] \to R$ is Riemann-Stieltjes integrable (Riemann-Stieltjes norm integrable) on the interval $[a, b]$ with respect to $g : [a, b] \to \to R$ if there is a real number I such that to every $\varepsilon > 0$ there exists $\bar{D} \in \mathscr{D}$ so that*

$$|R(B) - I| < \varepsilon$$

for all $B \in \mathscr{B}^*(D)$ if $D \succ \bar{D}$ $(D \gg \bar{D})$. The number I will be denoted by $R \int_a^b f \, dg$ $(NR \int_a^b f \, dg)$ and is called the Riemann-Stieltjes (Riemann-Stieltjes norm) integral of f with respect to g on $[a, b]$.

Supposing that for the function $g : [a, b] \to R$ the limits $\lim_{s \to t+} g(s) = g(t+)$, $\lim_{s \to t-} g(s) = g(t-)$ exist for all $t \in [a, b]$ (for the endpoints of $[a, b]$ the corresponding onesided limits) then we put for $f : [a, b] \to R$ and $B = \{\alpha_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, \alpha_k\}$ satisfying (1,1), (1,2) b)

$$\begin{aligned}(1,4) \qquad Y(B) = \sum_{j=1}^{k} [f(\alpha_{j-1}) (g(\alpha_{j-1}+) - g(\alpha_{j-1}) + f(\tau_j) (g(\alpha_j-) - g(\alpha_{j-1}+)) + \\ + f(\alpha_j) (g(\alpha_j) - g(\alpha_j-))] = \\ = \sum_{j=1}^{k} [f(\alpha_{j-1}) \Delta^+ g(\alpha_{j-1}) + f(\tau_j) (g(\alpha_j-) - g(\alpha_{j-1}+)) + f(\alpha_j) \Delta^- g(\alpha_j)] = \\ = \sum_{j=0}^{k} f(\alpha_j) \Delta g(\alpha_j) + \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j) (g(\alpha_j-) - g \alpha_{j-1}+))\end{aligned}$$

where $\Delta^+ g(\alpha_j) = g(\alpha_j+) - g(\alpha_j)$, $\Delta^- g(\alpha_j) = g(\alpha_j) - g(\alpha_j-)$, $j = 1, 2, \ldots, k - 1$, $\Delta^+ g(b) = \Delta^- g(a) = 0$ and $\Delta g(\alpha_j) = \Delta^+ g(\alpha_j) + \Delta^- g(\alpha_j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Definition 1,2. *If for $g : [a, b] \to R$ the limits $g(t+)$, $g(t-)$ exist for all $t \in [a, b]$ then the function $f : [a, b] \to R$ is said to be Young (Young norm) integrable on the interval $[a, b]$ with respect to g if there is a number I such that to every $\varepsilon > 0$ there exists $\tilde{D} \in \mathscr{D}$ so that*

$$|Y(B) - I| < \varepsilon$$

for all $B \in \mathscr{B}(D)$ if $D \succ \tilde{D}$ $(D \gg \tilde{D})$. The number I will be denoted by $Y \int_a^b f \, dg$ $(NY \int_a^b f \, dg)$ and is called the Young integral (Young norm integral) of f with respect to g on $[a, b]$.

Remark 1,1. From Def. 1,1 and Def. 1,2 it is clear that if $NR \int_a^b f \, dg$, $NY \int_a^b f \, dg$ exist then also $R \int_a^b f \, dg$, $Y \int_a^b f \, dg$ exist respectively, because evidently $D \succ D'$ implies $D \gg D'$. The concept of the Stieltjes type integral from Def. 1,2 is in detail described and studied in the book [2] (cf. II.19.3 in [2]).

In the sequel we suppose that $g \in BV(a, b)$. Hence $Y(B)$ from (1,4) is defined, because $g(t-)$, $g(t+)$ exist for any $t \in [a, b]$.

For the Riemann-Stieltjes integral the following result is known (cf. II.10.10 in [2] or [1])

Theorem 1,1. *If $f : [a, b] \to R$, $g \in BV(a, b)$ and $R \int_a^b f \, dg$ exists, then f is bounded on a finite number of closed intervals which are complementary to a finite number of open intervals on which the function g is constant.*

In [2] (Theorem 19.3.1 in [2]) the same statement is asserted, $R \int_a^b f \, dg$ being replaced by $Y \int_a^b f \, dg$. Unfortunately, this statement does not hold in general. This fact can be demonstrated in the following way: Let $g \in BV(a, b)$, $g(a) = g(b) = g(t+) = g(t-)$ for all $t \in (a, b)$ (i.e. g is different from a constant on a countable set of points in (a, b)). Further let $f : [a, b] \to R$ be an arbitrary finite function. For any $D \in \mathscr{D}$ and $B = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_k, \alpha_k\} \in \mathscr{B}(D)$ we have

$$Y(B) = \sum_{j=0}^{k} f(\alpha_j) \, \Delta g(\alpha_j) + \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j) \left(g(\alpha_j -) - g(\alpha_{j-1} +) \right) = 0$$

because $g(\alpha_j +) = g(\alpha_j -)$ and $\Delta g(\alpha_j) = 0$. This yields the following.

Proposition 1,1. *Let $g \in BV(a, b)$, $g(a) = g(b) = g(t+) = g(t-)$ for all $t \in (a, b)$. Then $Y \int_a^b f \, dg$ exists and equals zero for every finite function $f : [a, b] \to R$.*

Example 1,1. Let us define $g(1/(k + 1)) = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$, $g(t) = 0$ for $t[0, 1] - \{1/(k + 1)\}_{k=1}^{\infty}$. We put $f(1/(k + 1)) = 2^k$, $f(0) = f(1) = 0$ and we suppose that f is linear in $[\frac{1}{2}, 1]$, $[1/(k + 2), 1/(k + 1)]$, $k = 1, 2, \ldots$ The Young integral $Y \int_0^1 f \, dg$ exists by Proposition 1,1 and equals zero by the same Proposition. Any finite number of closed intervals which are complementary to a finite number of open intervals on which g is constant contains necessarily an interval of the form $[0, \alpha]$, $\alpha > 0$ on which g is not constant and the function f defined above is not bounded. Hence we obtain that Theorem 19.3.1 from Chapter II. in [2] is false.

For the Young integral the following Theorem (an analogue to Theorem 1,1) holds:

Theorem 1,2. *If $f : [a, b] \to R$, $g \in BV(a, b)$ and $Y \int_a^b f \, dg$ exists, then f is bounded on a finite number of closed intervals which are complementary to a finite number of open intervals $J_i = (a_i, b_i)$, $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$ such that $g(a_i +) = g(b_i -) = g(t+) = g(t-)$ for all $t \in J_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$.*

Proof. By definition for every $\varepsilon > 0$ there exists a $\tilde{D} \in \mathscr{D}$ such that $|Y(B) - Y \int_a^b f \, dg| < \varepsilon$ for all $B \in \mathscr{B}(D)$ if $D \succ \tilde{D}$. We choose a fixed $D = \{\alpha_0, \alpha_1 \ldots \ldots, \alpha_k\} \in \mathscr{D}$, $D \succ \tilde{D}$. We have evidently

$$|Y(B)| = \left| \sum_{j=0}^{k} f(\alpha_j) \, \Delta g(\alpha_j) + \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j) \, g(\alpha_j -) - g(\alpha_{j-1} +)) \right| < \left| Y \int_a^b f \, dg \right| + \varepsilon$$

for all $B \in \mathscr{B}(D)$, i.e. for all $\tau_j \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j)$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Hence there is a constant $K > 0$ ($K = |\sum_{j=0}^{k} f(\alpha_j) \Delta g(\alpha_j) + |Y \int_a^b f \,\mathrm{d}g| + \varepsilon$) such that

$$(1,5) \qquad |\sum_{j=1}^{k} f(\tau_j) (g(\alpha_j-) - g(\alpha_{j-1}+))| \leqq K$$

for all $\tau_j \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j)$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Let us suppose that f is unbounded in some (α_{j-1}, α_j). If $g(\alpha_j-) - g(\alpha_{k-1}+) \neq 0$ then $f(\tau_j)(g(\alpha_j-) - g(\alpha_{j-1}+))$ would be arbitrarily large for a suitable choice of $\tau_j \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j)$, but this contradicts (1,5). Therefore we have necessarily $g(\alpha_j-) = g(\alpha_{j-1}+) = c$, where c is a constant. Let now $a \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ be given; by the assumption f is not bounded either in (α_{j-1}, a) or in (a, α_j). If we add the point a to D then we obtain $D' = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, a, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_k\} \in \mathscr{D}$ where evidently $D' \succ D \succ \tilde{D}$ and the same argument as above gives either $g(a-) = c$ or $g(a+) = c$. In this way we obtain that if f is not bounded in some (α_{j-1}, α_j) then $g(\alpha_j-) = g(\alpha_{j-1}+) = c$ and for any $a \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ we have either $g(a+) = c$ or $g(a-) = c$. Since we suppose $g \in BV(a, b)$, the limits $g(t+)$ and $g(t-)$ exist for any $t \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ and it is a matter of routine to show that $g(a+) = g(a-) = c$ for all $a \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j)$. This proves the Theorem, since the number of intervals (α_{j-1}, α_j) is finite.

Remark 1,2. Evidently in Theorem 1,2 the assumption $g \in BV(a, b)$ can be replaced by the requirement that the limits $g(t+)$ and $g(t-)$ exist for all $t \in [a, b]$ (with the corresponding onesided limits at the endpoints of $[a, b]$).

Corollary 1,1. *Let $g \in BV(a, b)$ be given and let $J_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, 2, \ldots, l$ be a finite system of open intervals in $[a, b]$ such that $g(a_i+) = g(b_i)- = g(t+) = g(t-)$ holds for all $t \in J_i$. If for $f : [a, b] \to R$ the integral $Y \int_a^b f \,\mathrm{d}g$ exists and if $\tilde{f} : [a, b] \to R$ is such a function that $f(t) = \tilde{f}(t)$ for all $t \in [a, b] - \bigcup_{i=1}^{l} J_i$ then $Y \int_a^b \tilde{f} \,\mathrm{d}g$ exists and $Y \int_a^b \tilde{f} \,\mathrm{d}g = Y \int_a^b f \,\mathrm{d}g$. The same statement holds also for the Young norm integral.*

The proof follows easily from the definition of the Young integral and from the fact that the term from $Y(B)$ (cf. (1,4)) which corresponds to some $[\alpha_{j-1}, \alpha_j] \subset J_i$ equals zero for any function f.

The Young integral is an extension of the Riemann-Stieltjes integral; the following theorem holds:

Theorem 1,3. (cf. II.19.3.3 in [2]). *If $f : [a, b] \to R$, $g \in BV(a, b)$ and $R \int_a^b f \,\mathrm{d}g$ exists then $Y \int_a^b f \,\mathrm{d}g$ exists and the two integrals are equal. (The same holds for the norm integrals.)*

In the opposite direction we have the following

Theorem 1,4. (cf. II.19.3.4 in [2]). *If $f : [a, b] \to R$, $g \in BV(a, b)$ g is continuous in $[a, b]$ and $Y \int_a^b f \, dg$ exists then $R \int_a^b f \, dg$ exists and both integrals are equal. The same statement is valid for the norm integrals.*

For continuous $g \in BV(a, b)$ we can state the following Theorem which is a reversion of the statement given in Remark 1,1.

Theorem 1,5. *Let $f : [a, b] \to R$, $g \in BV(a, b)$, g continuous and let $Y \int_a^b f \, dg$ exist. Then $NY \int_a^b f \, dg$ exists and $Y \int_a^b f \, dg = NY \int_a^b f \, dg$.*

Proof. Let $\varepsilon > 0$ be given. By definition there is a $\tilde{D} = \{a_0, a_1, \dots, a_k\} \in \mathscr{D}$ such that $|Y(B') - Y \int_a^b f \, dg| < \varepsilon$ for all $B' \in \mathscr{B}(D')$, $D' \succ D$. Regarding Theorem 1,2 and Corollary 1,1 we can suppose without any loss of generality that the function f is bounded, i.e. $|f(t)| \leqq M$ for all $t \in [a, b]$. If this is not satisfied, then we define the function $\tilde{f}$ by Corollary 1,1 so that $\tilde{f}$ is bounded and we work with the integral $Y \int_a^b \tilde{f} \, dg$ instead of $Y \int_a^b f \, dg$.

From the continuity of g at all points a_i, $i = 1, \dots, k$ we obtain the existence of a $\delta > 0$ such that $|g(t) - g(a_i)| < \varepsilon/2Mk$ provided $|t - a_i| < \delta$, $i = 1, \dots, k$.

Let $D = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l\} \in \mathscr{D}$ be an arbitrary subdivision such that $|D| < \delta$ and let us construct a subdivision D' which is a common refinement of D and $\tilde{D}$; evidently $D' \succ \tilde{D}$. For a given $B \in \mathscr{B}(D)$ and $B' \in \mathscr{B}(D')$ we give an estimate of $|Y(B) - Y(B')|$.

If it occurs that $\alpha_{j-1} < a_{h+1} < \dots < a_{h+m_j} < \alpha_j$ then

$$s_j = f(\tau_j) (g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})) =$$
$$= f(\tau_j) (g(\alpha_j) - g(a_{h+m_j})) + (g(a_{h+m_j}) - g(a_{h+m_j-1})) + \dots + (g(a_{h+1}) - g(\alpha_{j-1}))$$

is the term of $Y(B)$ corresponding to $\alpha_{j-1} < \tau_j < \alpha_j$ and the terms of $Y(B')$ are of the form

$$s'_j = f(\tau'_{q+m_j}) (g(\alpha_j) - g(a_{h+m_j})) + f(\tau'_{q+m_j-1}) (g(a_{h+m_j}) - g(a_{h+m_j-1})) + \dots$$
$$\dots + f(\tau'_q) (g(a_{h+1}) - g(\alpha_{j-1})) .$$

The difference $s_j - s'_j$ consists of $m + 1$ terms of the form

$$(f(\tau_j) - f(\tau'_{q+\varkappa})) (g(u) - g(v))$$

where $|u - v| < \delta$ (since $|D| < \delta$) and either u or v equals to some a_i. Hence

$$|f(\tau_j) - f(\tau'_{q+\varkappa})) (g(u) - g(v))| < 2M . (\varepsilon/2Mk) = \varepsilon/k$$

and

$$|s_j - s'_j| < \varepsilon(m_j + 1)/k = \varepsilon m_j/k + \varepsilon/k .$$

If the interval (α_{j-1}, α_j) does not contain points from $\tilde{D}$ then the corresponding terms from $Y(B)$ and $Y(B')$ are equal. Hence we have

$$|Y(B) - Y(B')| < \varepsilon \sum (m_j + 1)/k$$

where the sum on the right hand side is taken over all j for which (α_{j-1}, α_j) contains points from $\tilde{D}$. The number of such intervals is at most $k - 1$ and $\sum m_j \leqq k$; this yields

$$|Y(B) - Y(B')| < \varepsilon(1 + ((k-1)/k) < 2\varepsilon .$$

In this way we obtain

$$\left|Y(B) - Y\int_a^b f \, dg\right| \leqq |Y(B) - Y(B')| + \left|Y(B') - Y\int_a^b f \, dg\right| < 3\varepsilon$$

for all $\dot{B} \in \mathscr{B}(D)$, $|D| < \varepsilon$, i.e. $NY\int_a^b f \, dg$ exists and is equal to $Y\int_a^b f \, dg$.

If $g, h \in BV(a, b)$, $f : [a, b] \to R$, $|f(t)| \leqq M$ for all $t \in [a, b]$ and if $B = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau, \alpha_k\} \in \mathscr{B}(D)$ for some $D = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_k\} \in \mathscr{D}$ then we denote

$$Y_h(B) = \sum_{j=0}^{k} f(\alpha_j) \, \Delta h(\alpha_j) + \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j) \, (h(\alpha_j -) - h(\alpha_{j-1} +))$$

and similarly $Y_g(B)$ denotes the Young sum for g (cf. (1,4)).

Evidently the inequality

$$|Y_g(B) - Y_h(B)| \leqq M \operatorname{var}_a^b (g - h) \tag{1,6}$$

holds.

Similarly for $f, \tilde{f} : [a, b] \to R$ and $g \in BV(a, b)$ we have

$$|Y^f(B) - Y^{\tilde{f}}(B)| \leqq \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - \tilde{f}(t)| \operatorname{var}_a^b g \tag{1,7}$$

for any $B \in \mathscr{B}(D)$, $D \in \mathscr{D}$, where $Y^{\tilde{f}}(B) = \sum_{j=0}^{k} \tilde{f}(\alpha_j) \, \Delta g(\alpha_j) + \sum_{j=1}^{k} \tilde{f}(\tau_j) \, (g(\alpha_j -) - g(\alpha_{j-1} +))$ and similarly for $Y^f(B)$ (cf. (1,4)).

The inequality (1,6) immediately leads to the following

Proposition 1,2. (cf. II. 19.3.9 in [2]). *If $g_n, g \in BV(a, b)$, $n = 1, 2, \ldots$ $\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_a^b (g_n - g) = 0$, $f : [a, b] \to R$, $|f(t)| \leqq M$ for all $t \in [a, b]$ and $Y\int_a^b f \, dg_n$ exists for all $n = 1, 2, \ldots$ then both $Y\int_a^b f \, dg$ and $\lim_{n\to\infty} Y\int_a^b f \, dg_n$ exist and are equal.*

Corollary 1,2. *If $g_b \in BV(a, b)$ is a pure break function and $f : [a, b] \to R$ is bounded ($|f(t)| \leqq M$ for $t \in [a, b]$) then $Y\int_a^b f \, dg_b$ exists and we have $Y\int_a^b f \, dg_b = \sum_{t \in [a,b]} f(t) \, \Delta g_b(t)$.*

Proof. To every pure break function $g_b \in BV(a, b)$ there exists a sequence $g_n \in BV(a, b)$, $n = 1, 2, \ldots$ of break functions with a finite number of discontinuities such that $\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_a^b(g_n - g) = 0$. Therefore by Proposition 1,2 it is sufficient to prove that $Y\int_a^b f\,dg$ exists for any pure break function $g \in BV(a, b)$ with a finite number of discontinuities at the points $\{t_1, \ldots, t_\nu\} \subset [a, b]$; let us now prove it: we choose an arbitrary $\tilde{D} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \in \mathcal{D}$ such that $\{t_1, \ldots, t_\nu\} \subset \tilde{D}$. For every $B = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_k, \alpha_k\} \in \mathcal{B}(D)$, $D \succ \tilde{D}$ we have

$$Y(B) = \sum_{j=1}^{k} f(\alpha_j)\,\Delta g(\alpha_j) + \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)\,(g(\alpha_j -) - g(\alpha_{j-1}+)) = \sum_{i=1}^{\nu} f(t_i)\,\Delta g(t_i)$$

because $g(\alpha_j -) - g(\alpha_{j-1}+) = 0$ for all $j = 1, 2, \ldots, k$ and $\Delta g(\alpha_j) = 0$ if $\alpha_j \notin \{t_1, \ldots, t_\nu\}$. This implies the existence of $Y\int_a^b f\,dg$ and moreover we have obtained the equality

$$Y\int_a^b f\,dg = \sum_{i=1}^{\nu} f(t_i)\,\Delta g(t_i)\,.$$

From the inequality (1,7) we obtain

Proposition 1,3. (cf. II. 19.3.8 in [2]). *If $f_n : [a, b] \to R$, $\lim f_n = f$ uniformly in $[a, b]$, $g \in BV(a, b)$ and if $Y\int_a^b f_n\,dg$ exists for all $n = 1, 2, \ldots$ then $Y\int_a^b f\,dg$ as well as $\lim_{n\to\infty} Y\int_a^b f_n\,dg$ exist and are equal.*

Corollary 1,3. *If $f, g \in BV(a, b)$ then $Y\int_a^b f\,dg$ exists.*

Proof. It is known that every $f \in BV(a, b)$ is representable as the uniform limit of a sequence f_n of step–functions on $[a, b]$ (see for example 7.3.2.1 in [1]), i.e. every f_n is a pure break function with a finite number of points of discontinuity $\{t_1, t_2, \ldots, t_{\nu_n}\} \subset [a, b]$. We prove that $Y\int_a^b f_n\,dg$ exists for all $n = 1, 2, \ldots$ Let $\tilde{D} \in \mathcal{D}$ be an arbitrary subdivision of $[a, b]$ with $\{t_1, t_2, \ldots, t_{\nu_n}\} \subset D$; let be $D \succ \tilde{D}$, $B = \{\alpha_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, \alpha_k\} \in \mathcal{B}(D)$ and let us suppose that $a < t_1 < \ldots < t_{\nu_n} < b$.

Hence using the fact that the function f_n is constant with values $f(a), f(t_i+)$, $i = 1, \ldots, \nu_n - 1$, $f(b)$ in the intervals $[a, t_1), (t_i, t_{i+1})$ $i = 1, \ldots, \nu_n - 1$, $(t_{\nu_n}, b]$ respectively, we obtain

$$Y(B) = \sum_{j=0}^{k} f_n(\alpha_j)\,\Delta g(\alpha_j) + \sum_{j=1}^{k} f_n(\tau_j)\,(g(\alpha_j -) - g(\alpha_{j-1}+)) =$$

$$= f(a)\,\Delta^+ g(a) + \sum_{i=1}^{\nu_n} f(t_i)\,\Delta g(t_i) + f(b)\,\Delta^- g(b) +$$

$$+ f(a+)\,(g(t_1 -) - g(a+)) + \sum_{i=1}^{\nu_n} f(t_i +)\,(g(t_{i+1} -) - g(t_i +)) +$$

$$+ f(b-)\,(g(b-) - g(t_{\nu_n}+)) = \sum_{i=1}^{\nu_n} f(t_i)\,\Delta g(t_i) + \sum_{i=1}^{\nu_n - 1} f(t_i +)\,(g(t_{i+1} -) - g(t_i +)) +$$

$$+ f(a)\,(g(t_1 -) - g(a)) + f(b)\,(g(b) - g(t_{\nu_n}+))\,,$$

i.e. the Young sum depends only on $t_1, \ldots, t_{\nu_n}$ and is independent of the choice of $D \succ \tilde{D}$ and $B \in \mathscr{B}(D)$. This implies that the integral $Y \int_a^b f_n \, dg$ exist and has the value $Y(B)$ evaluated above.

The analogous argument gives the same result if $a = t_1$ or $b = t_{\nu_n}$. The existence of $Y \int_a^b f \, dg$ follows now from Proposition 1,3.

2. THE KURZWEIL INTEGRAL

Let for any $\tau \in [a, b]$ a $\delta = \delta(\tau) > 0$ be given (i.e. $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$).

Put

$$S = \{(\tau, t) \in R^2;\ a \leqq \tau \leqq b,\ \tau - \delta(\tau) \leqq t \leqq \tau + \delta(\tau)\} \tag{2,1}$$

and denote by $\mathscr{S} = \mathscr{S}(a, b)$ the system of all such sets $S \in R^2$. Any set $S \in \mathscr{S}$ can be evidently characterized by a function $\delta: [a, b] \to (0, +\infty)$.

We consider finite sequences of numbers $A = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_k, \alpha_k\}$ such that

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k = b\,, \tag{2,2}$$

$$\alpha_{j-1} \leqq \tau_j \leqq \alpha_j\,, \quad j = 1, \ldots, k\,. \tag{2,3}$$

For a given set $S \in \mathscr{S}$, A is called a subdivision of $[a, b]$ subordinate to S if

$$(\tau_j, t) \in S \quad \text{for} \quad t \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]\,, \quad j = 1, 2, \ldots, k\,. \tag{2,4}$$

The set of all subdivisions A of $[a, b]$ subordinate to $S \in \mathscr{S}$ let be denoted by $A(S)$ (cf. Definition 1,1,3 in [3]). In [3], Lemma 1,1,1 it is proved that $A(S) \neq \emptyset$ for any $S \in \mathscr{S}$.

Let $f : [a, b] \to R$, $g : [a, b] \to R$ be given. For every $A = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_k, \alpha_k\}$ satisfying (2,2) and (2,3) we put

$$K(A) = \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)\,(g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1}))\,. \tag{2,5}$$

Definition 2,1. *The function $f : [a, b] \to R$ is Stieltjes integrable on the interval $[a, b]$ with respect to $g : [a, b] \to R$ in the sense of Kurzweil if there is a number I such that to every $\varepsilon > 0$ there exists such a set $S \in \mathscr{S}$ that*

$$|K(A) - I| < \varepsilon \tag{2,6}$$

if $A \in A(S)$. The number I will be denoted by $K \int_a^b f \, dg$ and called the Kurzweil integral of f with respect to g on $[a, b]$.

The following proposition is an obvious consequence of the completeness of R and of Def. 2,1:

Proposition 2,1. *Let $f, g : [a, b] \to R$. The integral $K \int_a^b f\, dg$ exists if and only if for any $\varepsilon > 0$ there is a set $S \in \mathscr{S}$ such that*

$$|K(A_1) - K(A_2)| < \varepsilon \tag{2,7}$$

for all $A_1, A_2 \in A(S)$.

Remark 2,1. The above Def. 1. follows the definition given in [3] (see 1.2 in [3]). In [3] the notation $\int_a^b DU(\tau, t)$ with $U(\tau, t) = f(\tau)\, g(t)$ is used instead of our symbol $K \int_a^b f\, dg$. Some fundamental theorems (additivity etc). about the Kurzweil integral can be found in [3] (cf. 1,3 in [3]).

Remark 2,2. It is almost evident that if the Riemann-Stieltjes norm integral $NR \int_a^b f\, dg$ exists then also the Kurzweil integral $K \int_a^b f\, dg$ exists and both integrals are equal. To prove this fact it is sufficient to set $\delta(\tau) = |\bar{D}|$ for any $\varepsilon > 0$ where $\bar{D}$ is the subdivision from Def. 1,1.

Though it is not immediately apparent, the Kurzweil integral from Def. 2,1 is equivalent to the Perron-Stieltjes integral if we suppose $g \in BV(a, b)$.

Remark 2,3. For given finite $f : [a, b] \to R$, $g \in BV(a, b)$ we denote by $P \int_a^b f\, dg$ the Perron-Stieltjes integral of the point function f with respect to the additive function G of a interval in $[a, b]$ which is defined by the relation $G(I) = g(d) - g(c)$ for $I = [c, d] \subset [a, b]$ (cf. [4]).

The following theorem states the result promised above.

Theorem 2,1. *Let $f : [a, b] \to R$ be finite, $g \in BV(a, b)$. Then the integral $K \int_a^b f\, dg$ exists if and only if the integral $P \int_a^b f\, dg$ exists and both integrals have the same value.*

Proof. 1. Let $P \int_a^b f\, dg$ exist. From the definition (cf. [4]) we have: For any $\varepsilon > 0$ there is a major function U and a minor function V*) (U and V are additive functions of interval in $[a, b]$) of f with respect to G such that

$$U([a, b]) - V([a, b]) < \varepsilon \tag{2,8}$$

Let $\delta_1 : [a, b] \to (0, +\infty)$, $\delta_2 : [a, b] \to (0, +\infty)$ be the function occuring in the definition of the minor function V and the major function U, respectively. Let us put $\delta(\tau) = \min(\delta_1(\tau), \delta_2(\tau))$ for any $\tau \in [a, b]$ and let $S \in \mathscr{S}$ be the set which corresponds to $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ by (2,1). We suppose that an arbitrary $A = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots$

*) An additive function of an interval V is said to be a minor function of f with respect to G on $[a, b]$ if to each point $\tau \in [a, b]$ there corresponds a number $\delta_1 = \delta_1(\tau) > 0$ such that $V([c, d]) \leqq f(\tau)\, G([c, d]) = f(\tau)\, (g(d) - g(c))$ for every interval $[c, d]$ such that $\tau \in [c, d]$ and $|d - c| < \delta_1(\tau)$. The major function U is defined analogously.

$\ldots, \tau_k, \alpha_k\} \in A(S)$ is given. The properties of a subdivision from $A(S)$ as well as those of a major and minor function guarantee the inequality

$$V([\alpha_{j-1}, \alpha_j]) \leqq f(\tau_j)(g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})) \leqq U([\alpha_{j-1}, \alpha_j])$$

for any $j = 1, 2, \ldots, k$. Hence the additivity of U and V implies

$$V([a, b]) \leqq \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)(g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})) = K(A) \leqq U([a, b]) .$$

From (2,8) we obtain in this way the inequality $|K(A_1) - K(A_2)| < \varepsilon$ for all $A_1, A_2 \in \in A(S)$ which means that by Prop. 2,1 the integral $K \int_a^b f \, dg$ exists. Considering that $P \int_a^b f \, dg = \inf_U U([a, b]) = \sup_V V([a, b])$ we have evidently also $K \int_a^b f \, dg = = P \int_a^b f . dg$.

2. Now we suppose that $K \int_a^b f \, dg$ exists. Let an arbitrary $\varepsilon > 0$ be given. According to Prop. 2,1 we choose a set $S \in \mathscr{S}$ (characterized by $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$) such that

$$|K(A_1) - K(A_2)| < \varepsilon \tag{2,9}$$

for all $A_1, A_2 \in A(S)$.

For a given τ, $a < \tau \leqq b$ let A_τ be a subdivision of $[a, \tau]$ subordinate to $S(A_\tau \in \in A(S, \tau)$, $A(S, \tau)$ is the set of all subdivisions of $[a, \tau]$ subordinated to S). Let us define

$$M(\tau) = \sup K(A_\tau) , \quad m(\tau) = \inf K(A_\tau) ,$$

$M(a) = m(a) = 0$. We put $U([c, d]) = M(d) - M(c)$, $V([c, d]) = m(d) - m(c)$ for $[c, d] \subset [a, b]$. Hence by definition and by (2,9) we have

$$0 \leqq U([a, b]) - V([a, b]) = M(b) - m(b) \leqq \varepsilon . \tag{2,10}$$

U is a major function of f with respect to G: Let $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ be the function which characterizes the set S. For fixed $\tau \in [a, b]$ let $[c, d] \subset [a, b]$, $\tau \in [c, d]$, $|d - c| < \delta(\tau)$. Then by definition

$$f(\tau) \, G([c, d]) + M(c) = f(\tau)(g(d) - g(c)) + M(c) \leqq M(d) ,$$

i.e.

$$f(\tau) \, G([c, d]) \leqq M(d) - M(c) = U([c, d]) .$$

In a similar way it can be proved that V is a minor function of f with respect to G in $[a, b]$.

The existence of the Perron-Stieltjes integral $P \int_a^b f \, dg$ follows immediately from (2,10).

Definition 2,2. *Let $g : [a, b] \to R$ be given. A point $t \in [a, b]$ is called a point of variability of the function g if to every $\varepsilon > 0$ there is a $t' \in [a, b]$, $|t - t'| < \varepsilon$*

such that $g(t) \neq g(t')$. The set of all points of variability of g in $[a, b]$ is denoted by V_g while $C_g = [a, b] - V_g$.

It is easy to prove that the set V_g is closed in $[a, b]$.

Proposition 2,2. *Let $f_1, f_2, g : [a, b] \to R$, $f_1(t) = f_2(t)$ for $t \in V_g$ and let $K \int_a^b f_1 \, dg$ exist. Then $K \int_a^b f_2 \, dg$ exists and equals $K \int_a^b f_1 \, dg$.*

Proof. For every $\tau \in C_g = [a, b] - V_g$ there is by definition a $\tilde{\delta}(\tau) > 0$ such that for all $\tau' \in [a, b]$, $|\tau - \tau'| < \tilde{\delta}(\tau)$ we have $g(\tau) = g(\tau')$. Since $K \int_a^b f_1 \, dg$ exists, we can choose to every $\varepsilon > 0$ a set $S \in \mathscr{S}$ (characterized by a function $\delta : [a, b] \to \to (0, +\infty)$) such that

$$(2,11) \qquad \left| \sum_{j=1}^{k} f_1(\tau_j) \left(g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})\right) - K \int_a^b f_1 \, dg \right| < \varepsilon$$

for any $A = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_k, \alpha_k\} \subset A(S)$. We define $\delta^*(\tau) = \delta(\tau)$ for $\tau \in V_g$ and $\delta^*(\tau) = \min(\delta(\tau), \tilde{\delta}(\tau)/2)$ for $\tau \in C_g$; evidently $\delta^*(\tau) \leqq \delta(\tau)$ for all $\tau \in [a, b]$ and $S^* \subset S$ if $S^* \in \mathscr{S}$ is the set in R^2 characterized by the function $\delta^* : [a, b] \to (0, +\infty)$. Let further $A \in A(S^*)$, then also $A \in A(S)$ and (2,11) holds for any $A = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots \ldots, \tau_k, \alpha_k\} \in A(S^*)$. If $\tau_j \in C_g$ then we have from (2,3) that $|t - \tau_j| \leqq \delta^*(\tau_j) \leqq \leqq \tilde{\delta}(\tau_j)/2 < \tilde{\delta}(\tau_j)$ for all $t \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ and therefore $g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1}) = 0$. Hence for all $A = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_k, \alpha_k\} \in A(S)$ we have by assumption

$$\sum_{j=1}^{k} f_1(\tau_j) \left(g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})\right) = \sum_{j=1}^{k} f_2(\tau_j) \left(g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})\right)$$

and by (2,11) also

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} f_2(\tau_j) \left(g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})\right) - K \int_a^b f_1 \, dg \right\| < \varepsilon$$

for any $A \in A(S^*)$. This completes the proof.

Proposition 2,3. *Let $g_l, g \in BV(a, b)$, $l = 1, 2, \ldots$ and $\lim_{l \to \infty} \operatorname{var}_a^b (g_l - g) = 0$. Further we assume that for $f : [a, b] \to R$ it is $|f(t)| \leqq M$ for all $t \in [a, b]$ and that $K \int_a^b f \, dg_l$ exists for all $l = 1, 2, \ldots$ Then also $K \int_a^b f \, dg$ and the limit $\lim_{l \to \infty} K \int_a^b f \, dg_l$ exist and the equality*

$$\lim_{l \to \infty} K \int_a^b f \, dg_l = K \int_a^b f \, dg$$

holds.

Proof. For every subdivision $A = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_k, \alpha_k\}$ we have evidently

$$(2,12) \qquad |K(A) - K_l(A)| \leqq M \,.\, \operatorname{var}_a^b (g - g_l)$$

where $K_l(A)$ is the Kurzweil sum for f and g_l.

Let $\varepsilon > 0$ be given. We choose l_0 such that $\operatorname{var}_a^b(g_l - g) < \varepsilon/4M$ for $l > l_{0_b}$. (If $M = 0$ then the proposition is evidently valid.) Since $K \int_a^b f \, dg_l$ exists for all l we can find for a given $l > l_0$ a set $S \in \mathscr{S}$ such that for any $A_1, A_2 \in A(S)$ we have $|K_l(A_1) - K_l(A_2)| < \varepsilon/2$ (cf. Prop. 3,1). Hence

$$|K(A_1) - K(A_2)| \leqq |K(A_1) - K_l(A_1)| + |K_l(A_1) - K_l(A_2)| + |K_l(A_2) - K(A_2)| \leqq$$
$$\leqq 2M \operatorname{var}_a^b(g_l - g) + \varepsilon/2 < \varepsilon$$

for any $A_1, A_2 \in A(S)$ and $K \int_a^b f \, dg$ exists by Prop. 2,1. The other part of the proposition is a consequence of the inequality (2,12).

Corollary 2,1. *If $g_b \in BV(a, b)$ is a pure break function and $f : [a, b] \to R$ is bounded then $K \int_a^b f \, dg_b$ exists and we have $K \int_a^b f \, dg_b = \sum_{t \in [a,b]} f(t) \, \Delta g_b(t)$.*

Proof. Similarly as in the proof of Corollary 1,2 it is sufficient to prove that $K \int_a^b f \, dg$ exists for any pure break function $g \in BV(a, b)$ which is discontinuous at the points of a finite set $\{t_1, t_2, \ldots, t_\nu\} \subset [a, b]$ and that $K \int_a^b f \, dg = \sum_{i=1}^{\nu} f(t_i) \, \Delta g(t_i)$. Let us suppose that $a \leqq t_1 < t_2 < \ldots t_\nu < b$ and let us define

$$\delta(\tau) = \tfrac{1}{4}\varrho(\tau, \{a, t_1, \ldots, t_\nu, b\})$$

for $\tau \in (a, b)$, $\tau \neq t_i$, $i = 1, \ldots, \nu$, where ϱ is the Euclidean distance; further we define

$$\Delta_j = \max_{\tau \in (t_j, t_{j+1})} \delta(\tau), \quad j = 1, \ldots, \nu - 1$$

and $\Delta_0 = \max_{\tau \in (a, t_1)} \delta(\tau)$, $\Delta_\nu = \max_{\tau \in (t_\nu, b)} \delta(\tau)$ if $a < t_1$, $t_\nu < b$, respectively and we set $\delta(a) = \delta(t_j) = \delta(b) = \Delta$, $j = 1, \ldots, \nu$, where $\Delta = \min_j (\Delta_j)$. In this way we have defined a function $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ which provides a set S defined by (2,1).

Let now $A = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_k, \alpha_k\} \in A(S)$. By definition we have $[\alpha_{j-1}, \alpha_j] \subset [\tau_j - \delta(\tau_j), \tau_j + \delta(\tau_j)]$ for any $j = 1, \ldots, k$ and the following assertions are valid:

1) if $\tau_j \in \{a, t_1, \ldots, t_\nu, b\}$ then $|\alpha_j - \alpha_{j-1}| \leqq 2\delta(\tau_j) = 2\Delta$ and $[\alpha_{j-1}, \alpha_j] \cap \{a, t_1, \ldots, t_\nu, b\} = \tau_j$,

2) if $\tau_j \notin \{a, t_1, \ldots, t_\nu, b\}$ then $|\alpha_j - \alpha_{j-1}| \leqq 2\delta(\tau_j) = \frac{1}{2}\varrho(\tau_j, \{a, t_1, \ldots, t_\nu, b\})$ and therefore $[\alpha_{j-1}, \alpha_j] \cap \{a, t_1, \ldots, t_\nu, b\} = \emptyset$.

Hence $\{a, t_1, \ldots, t_\nu, b\} \subset \{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$ and

$$K(A) = \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)\,(g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})) = f(a)\,(g(a+) - g(a)) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\nu} f(t_i)\,(g(t_i+) - g(t_i-)) + f(b)\,(g(b) - g(b-)) = \sum_{i=1}^{\nu} f(t_i)\,\Delta g(t_i)$$

for any $A \in A(S)$, i.e. $K \int_a^b f \, dg$ exists and equals $\sum_{i=1}^{v} f(t_i) \, \Delta g(t_i)$. This proves the corollary.

Proposition 2,4. *Let $T \subset (a, b)$ be given such that $[a, b] - T$ is dense in $[a, b]$ (i.e. $\overline{[a, b] - T} = [a, b]$) and let $g(t) = 0$ for $t \in [a, b] - T$. If $K \int_a^b f \, dg$ exists then necessarily $K \int_a^b f \, dg = 0$.*

Proof. For any $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ we choose from the system of intervals $(\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau))$, $\tau \in [a, b]$ a finite system $(\tau_j - \delta(\tau_j), \tau_j + \delta(\tau_j)) = J_j$, $j = 1, \ldots$ $\ldots, k$ such that $\tau_j < \tau_{j+1}$, $[a, b] \subset \bigcup_{j=1}^{k} J_j$ and $[a, b] - \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{k} J_j \neq \emptyset$ for any $r = 1, \ldots, k$. Hence $J_j \cap J_{j+1} \neq \emptyset$ is an interval for all $j = 1, \ldots, k - 1$ and the density of $[a, b] - T$ implies that there is an $\alpha_j \in (J_j \cap J_{j+1}) \cap ([a, b] - T)$ for $j = 1, \ldots, k - 1$. If we set $\alpha_0 = a$, $\alpha_k = b$, then we evidently obtain a subdivision $A = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_k, \alpha_k\} \in A(S)$, where S is determined by δ (cf. (2,1)) and $g(\alpha_i) = 0$ for $i = 0, 1, \ldots, k$. Hence we have $K(A) = 0$ for this subdivision A and our proposition follows immediately from Def. 2,1.

Example 2,1 (due to I. Vrkoč). Let $g(1/(l + 1)) = 2^{-l}$, $l = 1, 2, \ldots$, $g(t) = 0$ for $t \in [0, 1] - \{1/(l + 1)\}_{l=1}^{\infty}$. Evidently $g \in BV(a, b)$. Let us put $f(1/(l + 1)) = 2^l$, $f(t) = 0$ for $t \in [0, 1] - \{1/(l + 1)\}_{l=1}^{\infty}$. We show that the integral $K \int_0^1 f \, dg$ does not exist. For an arbitrary $\delta : [0, 1] \to (0, +\infty)$ we set $\alpha_0 = \tau_0 = 0$. Since $1/(l + 1) \to 0$ for $l \to \infty$, in $(0, \delta(0))$ there exists a point of the form $1/(l_0 + 1)$. We set further $\alpha_1 = \tau_1 = 1/(l_0 + 1)$ and choose points $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ and $\tau_2 \ldots, \tau_k$ such that $A = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_k, \alpha_k\} \in A(S)$ where S is the set given by δ (cf. (2,1)) and $g(\alpha_j) = 0$ for $j = 2, \ldots, k$.

This choice of $A \in A(S)$ yields

$$K(A) = \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j) \left(g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})\right) = f(\tau_1) \, g(\alpha_1) =$$

$$= f(1/(l_0 + 1)) \, g(1/(l_0 + 1)) = f(1/(l_0 + 1)) \, g(1/(l_0 + 1)) = 1$$

for any $\delta : [0, 1] \to (0, +\infty)$. Hence the integral $K \int_a^b f \, dg$ cannot exist. Indeed, if it existed, its value would be zero by Prop. 2,4 the set $T = \{1/(l + 1)\}_{l=1}^{\infty}$ having all properties required in Prop. 2,4. However, for any S we have constructed an $A \in A(S)$ such that $K(A) = 1$ and Definition 2,1 yields a contradiction with the existence of $K \int_a^b f \, dg$.

The set $T = \{1/(l + 1)\}_{l=1}^{\infty} = V_g$ is the set of all points of variability of g. The function g is evidently of bounded variation in $[0, 1]$ ($g \in BV(0, 1)$). By Prop. 2,2 the integral $K \int_a^b f \, dg$ does not exist for g given above and for any arbitrary function f satisfying $f(1/(l + 1)) = 2^{-1}$, $f : [0, 1] \in R$ (e.g. for the function from Example 1,1).

In this way functions $g \in BV(0, 1)$ are constructed such that the Young integral $Y \int_0^1 f \, dg$ exists but the Kurzweil integral $K \int_0^1 f \, dg$ does not.

3. COMPARISON OF $Y \int_a^b f \, dg$ AND $K \int_a^b f \, dg$ FOR $g \in BV(a, b)$

In this section we assume that $g \in BV(a, b)$, $f : [a, b] \to R$ and $Y \int_a^b f \, dg$ exists. The aim of our study is to find additional properties of f and g guaranteeing the existence of the integral $K \int_a^b f \, dg$.

For the function $g \in BV(a, b)$ let us denote by $N_S \subset (a, b)$ the set of all points $t \in (a, b)$ of discontinuity of the function g for which $g(t-) = g(t+)$, i.e.

$$N_S = \{t \in (a, b); g(t-) = g(t+), \; g(t) \neq g(t-)\}$$

and let us define $g_S(t) = g(t) - g(t-)$ for $t \in N_S$, $g_S(t) = 0$ for $t \in [a, b] - N_S$; we have evidently $g_S \in BV(a, b)$ because $\operatorname{var}_a^b g_S = 2 \sum_{t \in N_S} (g(t) - g(t-)) < \operatorname{var}_a^b g$. In Prop. 1,1 we have proved that $Y \int_a^b f \, dg_S$ exists for any function $f : [a, b] \to R$ and $Y \int_a^b f \, dg_S = 0$.

We denote further $g_R = g - g_S$; evidently $g_R \in BV(a, b)$ and if $g_R(t+) = g_R(t-)$ then $g_R(t) = g_R(t-)$, i.e. g_R is continuous at all points of continuity of g as well as for all $t \in N_S$.

Since $Y \int_a^b f \, dg_s$ exists by the assumption, the integral $Y \int_a^b f \, dg_R$ exists as well and equals $Y \int_a^b f \, dg - Y \int_a^b f \, dg_S = Y \int_a^b f \, dg$. Using the existence of $Y \int_a^b f \, dg_R$ we obtain from Theorem 1,2 that f is bounded on a finite number of closed intervals which are complementary to a finite number of open intervals on which the function g_R is constant. It is possible to assume that $|f(t)| \leqq M$ for all $t \in [a, b]$; in the opposite case we set $\tilde{f} = f$ on the set on which f is bounded and $\tilde{f} = 0$ otherwise. By Corollary 1,1 the existence of $Y \int_a^b f \, dg_R$ is equivalent to the existence of $Y \int_a^b \tilde{f} \, dg_R$ and we have $Y \int_a^b f \, dg_R = Y \int_a^b \tilde{f} \, dg_R$.

Now we uset the usual decomposition $g_R = g_c + g_{Rb}$ of $g_R \in BV(a, b)$ into the continuous part g_c and a pure break function g_{Rb}. Corollary 1,2 guarantees the existence of $Y \int_a^b f \, dg_{Rb}$ and so we obtain also the existence of $Y \int_a^b f \, dg_c$. Moreover, we have

$$Y \int_a^b f \, dg_{Rb} = \sum_{t \in [a,b]} f(t) \, \Delta g_{Rb}(t) = \sum_{t \in [a,b]} f(t) \, \Delta g(t) \, .$$

Since $g_c \in BV(a, b)$ is continuous the norm integral $NY \int_a^b f \, dg_c$ exists by Theorem 1,5 and by Theorem 1,4 also the Riemann-Stieltjes norm integral $NR \int_a^b f \, dg_c$ exists. From Remark 2,2 the existence of $K \int_a^b f \, dg_c$ and the equality $K \int_a^b f \, dg_c = Y \int_a^b f \, dg_c$ immediately follows. Further, Corollary 2,1 implies the existence of $K \int_a^b f \, dg_{Rb}$ since the function f is bounded, and also the equality $K \int_a^b f \, dg_{Rb} = Y \int_a^b f \, dg_{Rb}$.

Hence the integral $K \int_a^b f \, dg_R = K \int_a^b f \, dg_c + K \int_a^b f \, dg_{Rb}$ exists; this statement is an easy consequence of Prop. 2,2.

We can summarize the above results for the case $N_S = \emptyset$ in the following

Theorem 3,1. *If $f : [a, b] \to R$, $g \to BV(a, b$ is such that $g(t+) = g(t-)$ for some $t \in (a, b)$ implies $g(t) = g(t-)$ and if $Y \int_a^b f \, dg$ exists, then also $K \int_a^b f \, dg$ exists and both integrals are equal.*

In the general case, i.e. if $N_S \neq \emptyset$ the existence of $Y \int_a^b f \, dg$ implies not necessarily the existence of $K \int_a^b f \, dg$. This fact is shown in Example 2,1.

If we suppose that f is bounded on $N_S(|f(t)| \leqq M$ for $t \in N_S)$ then we define $\tilde{f}(t) = f(t)$ for $t \in N_S, \tilde{f}(t) = 0$ for $t \in [a, b] - N_S$. Hence $\tilde{f}$ is bounded and from Corollary 2,1 we obtain the existence of $K \int_a^b \tilde{f} \, dg_S$ while Prop. 2,2 guarantees the existence of $K \int_a^b f \, dg_S$. Corollary 2,1 gives moreover $K \int_a^b f \, dg_S = 0$ because $g_S(t) = g_S(t+) - g_S(t-) = 0$ for all $t \in [a, b]$. This yields the following

Theorem 3,2. *If $f : [a, b] \to R$, $|f(t)| \leqq M$ for $t \in N_S$, $g \in BV(a, b)$ and $Y \int_a^b f \, dg$ exists then $K \int_a^b f \, dg$ exists and both integrals are equal.*

Remark 3,1. Evidently, if the set N_S is finite, then the boundedness of f on N_S can be omitted.

Corollary 3,1. *If $f, g \in BV(a, b)$ then $K \int_a^b f \, dg$ exists and equals $Y \int_a^b f \, dg$.*

Proof. This statement follows from Corollary 1,3 which states the same result for the Young integral, from the boundedness of f and from Theorem 3,2.

Finally, we mention the known fact (see [1]), that if we set $[a, b] = [0, 1]$, $g(t) = t$, $f(t) = \sin(1/t) - (1/t) \cos(1/t)$, for $t \in (0, 1]$, $f(0) = 0$ then the Perron integral $P \int_0^1 f \, dg$ exists and by Theorem 2,1 also the integral $K \int_0^1 f \, dg$ exists. It is also known that for this choice of f and g the Riemann integral does not exist. Since $g(t) = t$ is continuous in $[0, 1]$ we obtain that $Y \int_0^1 f \, dg$ cannot exist (cf. Theorems 1,3, 1,4) and so we have an example of functions $g \in BV(a, b)$, $f : [a, b] \to R$ such that $K \int_a^b f \, dg$ exists but $Y \int_a^b f \, dg$ does not.

Literature

[1] *Aumann G.:* Reelle Funktionen. 2. Aufl. Springer-Verlag Berlin 1969.

[2] *Hildebrandt T. H.:* Introduction to the Theory of Integration. Academic Press, New York—London, 1963.

[3] *Kurzweil J.:* Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter, Czech. Math. J. 7 (*82*), (1957), 418—449.

[4] *Saks S.:* Theory of the Integral, Monografie Matematyczne, Warszawa—Lwow, 1937.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV v Praze).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

KONFIGURACE BODŮ ROVINNÉ KUBIKY II

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

(Došlo dne 24. listopadu 1971)

1. ÚVOD

Tato práce je pokračováním článku [1], jehož znalost předpokládáme a pokračujeme také v označování vět i poznámek. V příspěvku dokážeme existenci nekonečně mnoha dalších konfigurací bodů rovinné kubiky. Celá práce je založena na studiu grupy bodů rovinné kubiky. Hned připojujeme poznámku, že vzhledem ke stručnosti nerozlišujeme pojem grupa a její množina. Čtenář jistě snadno pozná, kdy se jedná o množinu (pole grupy) a kdy o strukturu. Všechny problémy řešíme v komplexně projektivní rovině a předpokládáme znalosti vět o rovinné kubice.

2. PODGRUPY GRUPY G

Věta 25. *Nechť G je komutativní grupa a pro každé $a \in G$ existuje takové $a_1 \in G$, pro které platí $a_1^2 = a$. (Operaci grupy označujeme jako násobení.) Potom platí: Jestliže v G existuje podgrupa G_n řádu n, kde n je přirozené číslo větší než 1, pak v G existuje také podgrupa G_{2n} řádu $2n$.*

Důkaz. Nejdříve dokážeme, že existuje takový prvek $y \in G$ a $y \notin G_n$, že současně platí $y^2 = g_i$, přičemž $g_i \in G_n$. Pro $a \neq 1$, $a \in G_n$ nemůže zřejmě být $a^2 = a$, proto v G_n existuje prvek x, pro který je $x^2 = g_j$, $x \neq g_j$ a $g_j \in G_n$.

Kdyby neexistoval prvek y (uvažovaných vlastností), potom musí v G_n existovat aspoň jeden (podle předpokladu) prvek $x_1 \neq x$, takový, že platí $x_1^2 = x$. Podobně v G_n musí existovat prvky $x_2, x_3, \ldots, x_n$, pro které platí, že jsou navzájem různé a dále $x_{j+1}^2 = x_j$, kde $j = 1, 2, \ldots, n$. To však nemůže nastat, neboť G_n je konečná podgrupa.

Nyní dokážeme, že $G_n \cup \{y\} \equiv G_{2n}$, kde $\{y\}$ je prvek grupy G/G_n určený uvažovaným prvkem y. G_{2n} je pologrupou, neboť je-li:

1. $y_i \in \{y\}$, $y_j \in \{y\}$, potom $y_i y_j = g_i \in G_n$;
2. $y_i \in \{y\}$, $g_i \in G_n$, potom $y_i g_i = y_j \in \{y\}$;
3. $g_i \in G_n$, $g_j \in G_n$, potom $g_i g_j = g_k \in G_n$.

Konečně dokážeme, že ke každému $y_i \in \{y\}$ existuje jediný prvek inverzní. Položíme $y_i = yg_i$, $y'_i = yg_j$, kde g_j je takové, že $g_ig_j = g_i^{-1}$ a g_i, y jsou prvky uvažované v prvé části důkazu této věty. Protože $g_i \in G_n$, existuje jediné g_j této vlastnosti. Dostáváme $y_iy'_i = 1$ a tedy existuje k danému y_i jediné $y'_i = y_i^{-1}$.

Uvažme nyní, zda grupa G bodů rovinné kubiky C rodu 1 splňuje větu 25. Nechť bod $A \in C$. Hledejme bod A_1, pro který platí $A_1 + A_1 = A$. Přímka OA protne kubiku ještě v bodě A'. Hledaný bod A_1 má za svůj tečnový bod bod A'. Zřejmě ke každému bodu A existují v tomto případě čtyři vesměs navzájem různé body A_1. Můžeme tedy aplikovat větu 25 na grupu G. Nechť J_0 je množina uvažovaná ve větě 10, D_0 z věty 12, E_1 z věty 14 a F_0 z věty 16. Potom zřejmě platí:

Věta 26. *Grupa G bodů rovinné kubiky rodu 1 má tyto podgrupy:*

1. $J_0, J'_1, J'_2, \ldots, J'_n$. *$J_0$ má devět bodů a J'_n má $9 \cdot 2^n$ prvků (bodů).*
2. $D_0, D'_1, D'_2, \ldots, D'_n$. *$D_0$ má právě dva prvky a D'_n má $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ prvků.*
3. $E_1, E'_2, E'_3, \ldots, E'_n$. *$E_1$ má právě čtyři prvky a E'_n má $4 \cdot 2^n = 2^{n+2}$ prvků.*
4. $F_0, F'_1, F'_2, \ldots, F'_n$. *$F_0$ má právě tři prvky a F'_n má $3 \cdot 2^n$ prvků.*

Poznámka 8. Grupa bodů kubiky s bodem uzlovým splňuje také větu 25, zde však další podgrupy nedostáváme. Později ukážeme, že nemusí být $J'_{2k} \equiv J_k$ a obdobně $D'_{2k} \equiv D_k$, $E'_{2k} \equiv E_k$ a $F'_{2k} \equiv F_k$.

3. KONFIGURACE BODŮ KUBIKY RODU 1

Aplikujeme-li nyní větu 2 na podgrupy J'_n, F'_n a D'_n, dostáváme:

Věta 27. *Existují rovinné konfigurace bodů rovinné kubiky rodu 1 typu:*

$$(27 \cdot 2^n_{9 \cdot 2^n}, 9^2 \cdot 2^{2n}_3), \quad (9 \cdot 2^n_{3 \cdot 2^n}, 9 \cdot 2^{2n}_3) \quad \text{a} \quad (3 \cdot 2^{n+1}_{2^{n+1}}, 2^{2n+2}_3),$$

kde n je přirozené číslo a u prvních dvou typů může být n také rovno nule.

K odvození dalších konfigurací, je třeba poznat strukturu podgrup grupy G. V dalším budeme studovat jenom ty podgrupy, které obsahují aspoň jeden inflexní bod a tedy splňují větu 4. Dále budeme uvažovat jenom podgrupy grupy G bodů kubiky rodu 1.

Věta 28. *Jestliže podgrupa $\bar{G} = \{X_1, \ldots, X_g\}$ grupy G obsahuje tři navzájem různé dotykové body tečen vedených z bodu M ke kubice, potom $\bar{G}$ je složena z $g/4$ čtveřic bodů se společným tečnovým bodem.*

Důkaz. Nechť X_1, X_2, X_3 splňují podmínky věty 28. Nechť X_4 je bod kubiky, který má s body X_1, X_2, X_3 společný tečnový bod. Přímka X_1X_2 protíná kubiku ještě v dalším bodě např. Z a podle věty 4 platí $Z \in \bar{G}$. Přímka X_3Z zřejmě protíná kubiku v bodě $X_4 \in \bar{G}$. Nechť $X_5 \in \bar{G}$ $(X_5 \neq X_1, X_2, X_3, X_4)$. Přímka X_1X_5 protíná kubiku ještě v bodě např. X_9. Přímka X_2X_9 protíná kubiku ještě v dalším bodě grupy $\bar{G}$, např. X_6. Podle známé věty X_5 a X_6 mají společný tečnový bod. Pomocí bodů X_3 a X_4 dostaneme body X_7 a X_8 a platí, že X_5, X_6, X_7, X_8 mají společný tečnový bod. X_5 jsme však zvolili libovolně a tedy s každým bodem leží v $\bar{G}$ celá čtveřice se společným tečnovým bodem. Těchto čtveřic je zřejmě $g/4$.

Věta 29. *Nechť podgrupa $\bar{G}$ grupy G nesplňuje tvrzení věty* 28 *a nechť má sudý počet prvků. Potom je tvořena dvojicemi bodů se společným tečnovým bodem. Těchto dvojic je zřejmě $g/2$.*

Důkaz. Bod X_i dané grupy lze spojit s každým bodem dané grupy a třetí průsečík této spojnice s kubikou leží také v dané grupě (věta 4). Nechť X_i je inflexní bod. Potom jeho tečnový bod je X_i. Protože g je sudé musíme rozdělit lichý počet bodů do dvojic jejichž spojnice prochází bodem X_i. Právě jedna z těchto spojnic musí být tečna vedená z X_i ke kubice. Bod dotyku této tečny označme X_j. Body X_i a X_j mají společný tečnový bod a sice bod X_i. Nechť X_i není inflexní bod. Tečnový bod bodu X_i označme $\bar{X}_i$. Tečnový bod $\bar{X}_i$ označme $\bar{\bar{X}}_i$. Zřejmě je $\bar{X}_i \neq \bar{\bar{X}}_i$. Bodem $\bar{X}_i$ lze vést spojnici s X_i a spojnici s $\bar{\bar{X}}_i$. Zbývajících $g - 3$ bodů dané grupy musíme rozdělit do disjuktních dvojic. Protože $g - 3$ je číslo liché, lze to jedině tak, že tečnový bod jednoho z těchto $g - 3$ bodů např. X_j je bod $\bar{X}_i$. Opět jsme našli k X_i bod X_j a platí, že mají společný tečnový bod.

Tím jsme rozdělili námi uvažované grupy v podstatě do dvou skupin. Z uvažovaných grup jsme nezařadili jedině grupu J_0 a F_0, jejichž strukturu však známe. V dalším budeme označovat ${}_1\bar{G}$ grupu splňující tvrzení věty 28 a ${}_2\bar{G}$ grupu splňující tvrzení věty 29.

Věta 30. a) *Prvek* (třída) $\{A\}$ *grupy* $G/{}_1\bar{G}$ *je tvořen* $g/4$ *čtveřicemi bodů se společným tečnovým bodem.*

b) *Prvek* (třída) $\{B\}$ *grupy* $G/{}_2\bar{G}$ *je tvořen* $g/2$ *dvojicemi bodů se společným tečnovým bodem.*

Důkaz. a) Nechť $A_i \in \{A\}$, $A_i \notin {}_1\bar{G}$. Nechť O je inflexním bodem grupy ${}_1\bar{G}$. Společně s bodem O leží v ${}_1\bar{G}$ i body G_1, G_2, G_3 o nichž platí, že mají společný tečnový bod a sice bod O. Další body třídy $\{A\}$ dostaneme takto: Spojíme A_i postupně s O, G_1, G_2 a G_3 a dostaneme ještě body kubiky A_i^1, A_i^2, A_i^3 a A_i^4. Tyto body mají podle známé věty společný tečnový bod a dále platí, že tyto body neleží v $\{A\}$. Nyní body A_i^i, $(i = 1, \ldots, 4)$ spojíme s O a dostaneme ještě další body kubiky A_i, A_j, A_k, A_m, které leží v $\{A\}$ a zřejmě tyto body, tak jako body A_i^i, mají společný tečnový bod. Bod A_i jsme volili libovolně a tedy platí, že s každým bodem prvku $\{A\}$ leží v $\{A\}$ celá čtveřice bodů se společným tečnovým bodem. Zřejmě těchto čtveřic je $g/4$.

b) Zcela obdobně dokážeme tvrzení b) věty 30. Tento důkaz přenecháme čtenáři.

Uvažujme nyní prvek (třídu) $\{A\}$ grupy $G/_2\bar{G}$. Nechť $\{2A\} \not\equiv \{T - A\}$. Potom $\{A\}$ a $\{T - 2A\}$ jsou dvě různé třídy a platí, že přímka $A_iA_j(A_i, A_j \in \{A\})$ protne kubiku ještě v bodě $M_i \in \{T - 2A\}$. Každým bodem $A_i \in \{A\}$ prochází $g - 1$ přímek takových, že na každé z nich leží právě dva různé body třídy $\{A\}$ a právě jeden bod M_i třídy $\{T - 2A\}$. Vzhledem k větě 30 jsou body M_i rozděleny do dvou disjunktních množin M a M' takových, že $g/2$ body M_i množiny M prochází právě $g - 2/2$ přímek výše uvažovaných a $g/2$ body M_i množiny M' prochází právě $g/2$ těchto přímek. Dokažme nyní existenci třídy např. $\{B\} \not\equiv \{A\}$ o které platí $\{T - 2A\} \equiv \{T - 2B\}$ a dále, že body M_i se dají rozdělit do uvažovaných množin M a M', přičemž platí, že body množiny M prochází právě $g/2$ přímek $B_iB_jM_i$ a body množiny M' prochází právě $g - 2/2$ přímek $B_iB_jM_i$ $(B_i \not\equiv B_j)$. Podle věty 6 existují ještě další tři třídy $\{B\}$, $\{C\}$, $\{D\}$ pro něž platí $\{T - 2A\} \equiv \{T - 2B\} \equiv \{T - 2C\} \equiv \{T - 2D\}$. Aspoň jedna z těchto tříd má uvažovanou vlastnost, neboť v opačném případě snadnou úvahu zjistíme, že v aspoň jednom bodě M_i existuje ke kubice více tečen než čtyři. Nechť tedy uvažovanou vlastnost má třída $\{B\}$, potom body tříd $\{A\}$, $\{B\}$ a $\{T - 2A\}$ prochází právě $g - 1$ přímek na nichž leží právě tři vesměs navzájem různé body daných tříd. Proto platí věta:

Věta 31. *Existuje konfigurace typu* $(3g_{g-1}, g(g - 1)_3)$ *bodů rovinné kubiky rodu* 1, *kde* g *je počet prvků grupy* $_2\bar{G}$, *která splňuje větu* 29.

Poznámka 8. Tyto konfigurace existují i na kubice s bodem uzlovým, neboť jak snadno zjistíme všechny podgrupy této kubiky jsou typu druhého. K důkazu věty 31 je ještě třeba dodat, že existuje vždy taková třída $\{A\}$, pro kterou platí $\{2A\} \not\equiv \{T - A\}$. Jistě existuje třída, která neobsahuje ani jediný inflexní bod.

Věta 32. *Existují konfigurace typu* $(3g_{(g-2/2)}, \frac{1}{2}g(g - 2)_3)$ a $(3g_{g/2}, \frac{1}{2}g_3^2)$ *bodů rovinné kubiky rodu* 1, *kde* g *je počet prvků grupy* $_2\bar{G}$, *která splňuje větu* 29.

Důkaz. Tato věta vyplývá bezprostředně z úvahy, která předcházela větě 31. V případě prvého typu konfigurace vynecháme v konfiguraci z věty 31 přímky $A_iA_jM_i$, přičemž $M_i \in M'$ a $B_iB_jM_i$, kde $M_i \in M$. V případě druhého typu vynecháme v dané konfiguraci přímky $A_iA_jM_i$, přičemž $M_i \in M$ a $B_iB_jM_i$, kde $M_i \in M'$.

Poznámka 9. Konfigurace z vět 31 a 32 mají právě $3g$-tice prvků, neplatí však jako v ostatních dosud odvozených konfigurací, že body každé g-tice jsou od sebe odděleny.

Dokažme nyní, že existují podgrupy $_1\bar{G}$ a $_2\bar{G}$ pro všechny podgrupy dosud námi odvozené. Uvažujme podgrupu D_0. Grupa D_0 obsahuje inflexní bod J_1 a bod dotyku např. J_{11} tečny vedené z bodu J_1 ke kubice. Hledejme D'_1. Z věty 25 vyplývá, že každý bod $X \notin D_0$ a o němž platí $2X \in D_0$ určuje prvek (třídu) grupy G/D_0 a $\{X\} \cup D_0 \equiv D'_1$. Těchto bodů je celkem šest a označme je $J_{12}, J_{13}, J_{111}, J_{112}, J_{113}, J_{114}$. Označili jsme J_{12} a J_{13} body dotyku tečen vedených bodem J_1 ke kubice a obdobně J_{11i}, kde $i = 1, 2, 3, 4$ jsou body dotyku tečen vedených bodem J_{11}

ke kubice. Zřejmě jenom pro tyto body platí, že $2X \in D_0$ a proto existují tři různé třídy (prvky) grupy G/D_0. Podle předcházejícího tedy tři různé grupy D'_1. Z věty 28 vyplývá, že body J_{12} a J_{13} patří stejné třídě a dostáváme grupu ${}_1\bar{G}_4 \equiv E_1$. Body J_{11i} tvoří dvě třídy a zřejmě spojnice dvou bodů stejné třídy musí procházet bodem J_{11}. Dostáváme další dvě grupy a ty jsou zřejmě typu ${}_2\bar{G}_4$.

Poznámka 10. Podle věty 7 tvoří D_0 spolu s uvažovanými třemi třídami grupu a to typu ${}_1\bar{G}_8$. Kromě toho k větě 7 chybí důkaz, že ke každému bodu existuje bod inverzní. Doplňujeme tímto tento důkaz s tím, že existence jediného inverzního prvku k danému okamžitě vyplývá z věty 25.

Pokračujme nyní v úvaze před poznámkou 10. Tímto jsme udělali první krok úplné indukce. Nechť ${}_2\bar{G}_{2^k}$ je podgrupa grupy G splňující větu 29. Grupa ${}_2\bar{G}_{2^k}$ je tedy složena z $2^k/2$ dvojic bodů se společným tečnovým bodem a tyto tečnové body leží v této grupě (uvažujeme stále grupy splňující větu 4). Množinu těchto tečnových bodů označme T. Existuje celkem $3 \,.\, 2^k$ bodů, které neleží v ${}_2\bar{G}_{2^k}$ a jejichž tečnové body leží v ${}_2\bar{G}_{2^k}$. Tyto body tvoří zřejmě tři prvky (třídy) grupy $G/{}_2\bar{G}_{2^k}$ a každý tento prvek spolu s danou grupou tvoří grupu $\bar{G}_{2^{k+1}}$. Jednu z těchto tříd zřejmě tvoří množina bodů jejichž tečnové body jsou body množiny T a dostáváme tak grupu ${}_1\bar{G}_{2^{k+1}}$. Zbývající body tj. body dotyku tečen vedených ke kubice z bodů množiny ${}_2\bar{G}_{2^k} - T$, mohou tvořit dané dvě třídy jedině tímto způsobem: Jednu třídu tvoří body, které dostaneme jako body dotyku dvou různých tečen vedených ze všech bodů množiny ${}_2\bar{G}_{2^k} - T$. Druhou třídu tvoří zbývající body. V každém jiném případě prochází některým z bodů množiny ${}_2\bar{G}_{2^k} - T$ např. A aspoň tři tečny a grupa $G = {}_2\bar{G}_{2^k} \cup \{A\}$ je typu jedna, ale body množiny T prochází jenom dvě tečny, jejichž dotykové body leží v dané grupě. Tím jsme ukázali, že existují jak ${}_1\bar{G}_{2^n}$, tak i ${}_2\bar{G}_{2^n}$, kde n je přirozené číslo (s výjimkou $D_0 = {}_2\bar{G}_2$). Grupy F'_i a J'_i můžeme dostat obdobnou úvahou. Pokračujme rychleji. Nechť je dána $\bar{G}_{2^n}$ a platí $J_1 \in \bar{G}_{2^n}$, J_2 a J_3 neleží v $\bar{G}_{2^n}$ (zde označujeme J_i inflexní body kubiky). J_2 a J_3 zřejmě určují dva různé prvky grupy $G/\bar{G}_{2^n}$. Zřejmě prvky $\{J_1\} \equiv \bar{G}_{2^n}$, $\{J_2\}$ a $\{J_3\}$ mají obdobné vlastnosti jako body J_1, J_2 a J_3. Platí tedy $\bar{G}_{2^n} \cup \{J_2\} \cup \{J_3\} \equiv \bar{G}_{3.2^n}$. Podobně platí $\{J_2\} \cup \{J_3\} \cup \{J_4\} \cup \{J_5\} \cup$ $\cup \{J_6\} \cup \{J_7\} \cup \{J_8\} \cup \{J_9\} \cup \bar{G}_{2^n} \equiv \bar{G}_{9.2^n}$. Tím jsme dostali podgrupy J'_i i F'_i. Dále jsme ukázali, že existují jak ${}_1\bar{G}_{3.2^n}$ a ${}_1\bar{G}_{9.2^n}$, tak i ${}_2\bar{G}_{3.2^n}$ a ${}_2\bar{G}_{9.2^n}$, kde n je přirozené číslo a v případě grup prvého typu nemůže být rovno 1. Platí tedy:

Věta 33. *V konfiguracích z vět* 31 *a* 32 *můžeme za g postupně dosadit*: 2^{n+1}, $3 \,.\, 2^n$ a $9 \,.\, 2^n$.

Úvaha, kterou jsme přešli od grupy $\bar{G}_{2^n}$ ke grupě $\bar{G}_{9.2^n}$ nám pomůže odvodit další typy zajímavých konfigurací. To co platí o inflexních bodech platí i o devíti třídách určených jednotlivými inflexními body.

Věta 34. *Existují konfigurace bodů rovinné kubiky rodu* 1 *typu*: $(9 \,.\, 2^n_{4.2^n}, 12 \,.\, 2^{2n}_3)$, *kde n je nezáporné celé číslo.*

Důkaz. Inflexní body kubiky rodu 1 tvoří známou konfiguraci $(9_4, 12_3)$. Zvolíme např. $J_1 \equiv 0$. Konstruujeme grupu $\bar{G}_{2^n}$, která má jediný inflexní bod a sice J_1. Každý další inflexní bod kubiky určuje prvek grupy $G/\bar{G}_{2^n}$. Dostaneme spolu s $\bar{G}_{2^n}$ celkem devět prvků, které tvoří uvažovanou konfiguraci. Každý tento prvek leží tedy na čtyřech „přímkách" dané konfigurace. Každou tuto „přímku" můžeme uvažovat jako konfiguraci $(3 \,.\, 2^n_{2^n}, 2^{2n}_3)$. V grupě $\bar{G}_{9.2^n}$, kterou tvoří uvažovaných devět prvků grupy $G/\bar{G}_{2^n}$, budeme uvažovat všechny přímky konfigurací $(3 \,.\, 2^n_{2^n}, 2^{2n}_3)$. Těchto přímek je zřejmě $9 \,.\, 2^n \,.\, 4 \,.\, 2^n/3 = 12 \,.\, 2^{2n}$ a každým bodem grupy $\bar{G}_{9.2^n}$ prochází právě $4 \,.\, 2^n$ těchto přímek.

Poznámka 11. V případě $n = 1$ dostáváme konfiguraci $(18_8, 48_3)$. Body této konfigurace jsou jednak inflexní body a jednak devět dotykových bodů tečen vedených ke kubice z inflexních bodů. Uvádíme tento případ hlavně proto, aby si čtenář uvědomil význam algebraického pohledu na kubiku, neboť tuto konfiguraci z vlastností kubiky bychom těžko odvodili.

Dvě disjunktní konfigurace např. $(3g_g, g^2_3)$ můžeme uvažovat jako konfiguraci $(6g_{2g}, 4g^2_3)$. Toto je zřejmé a v celém článku tohoto nepoužíváme, neboť tímto způsobem se nezmění počet přímek procházející daným bodem. Nyní provedeme úvahu v jistém smyslu obrácenou. Uvažujme podgrupy $\bar{G}_g$ a $\bar{G}_{4g}$ přičemž $\bar{G}_{4g} \supset \bar{G}_g$. Podle věty dvě tři navzájem různé třídy (prvky) $\{B\}, \{C\}$ a $\{T - (B + C)\}$ grupy $G/\bar{G}_{4g}$ tvoří konfiguraci $(12g_{4g}, 16g^2_3)$. Zřejmě existují prvky grupy $G/\bar{G}_g$ $\{E\} \subset \{B\}$, $\{F\} \subset \{C\}$ a $\{T - (E + F)\} \subset \{T - (B + C)\}$, které tvoří konfiguraci $(3g_g, g^2_3)$. Vynecháme nyní v předcházející konfiguraci všechny body, které patří prvkům $\{E\}$, $\{F\}$ a $\{T - (E + F)\}$. Tím se zmenší počet bodů v dané konfiguraci o $3g$ tj. zůstane $9g$. Každým z těchto $9g$ bodů prochází právě $2g$ přímek procházejících vynechanými body. Zmenší se tedy počet přímek procházejících danými body o $2g$ a dostáváme:

Věta 35. *Existují rovinné konfigurace bodů kubiky rodu 1 typu $(9g_{2g}, 6g^2_3)$, kde g je počet prvků podgrupy grupy G.*

Věta 36. *Existují rovinné konfigurace bodů kubiky rodu 1 typu $(3g \,.\, 4^k(4^m - 1)_{4^k g(4^m - 2)}, g^2 \,.\, 4^{2k}(4^m - 1)(4^m - 2)_3)$, kde g je počet prvků podgrupy grupy C a k, m jsou přirozená čísla.*

Důkaz. Uvažujme $\bar{G}_{g.4^n} \supset \bar{G}_{g.4^k}$, přičemž platí $k + m = n$ a k, m, n jsou přirozená čísla. Nyní opět v konfiguraci $(3g \,.\, 4^n_{g.4^n}, g^2 \,.\, 4^{2n}_3)$ vynecháme body konfigurace $(3g \,.\, 4^k_{g.4^k}, g^2 \,.\, 4^{2k}_3)$. Tím se nám zmenší počet bodů první konfigurace o $3g \,.\, 4^k$ a dostáváme $3g \,.\, 4^k(4^m - 1)$ bodů. Počet přímek procházejících uvažovanými body se zmenší o $2g \,.\, 4^k$ a dostáváme $g \,.\, 4^k(4^m - 2)$ přímek.

V další větě budeme aplikovat na větu 35 a 36 důkaz resp. větu 34.

Věta 37. *Existují rovinné konfigurace bodů kubiky rodu 1 typu $(27g_{8g}, 72g^2_3)$ a $(27g \,.\, 4^k(4^m - 1)_{4^{k+m}.g(4^m - 2)}, 9g^2 \,.\, 4^{2k+m}(4^m - 1)(4^m - 2)_3)$, kde g je počet prvků podgrupy, která má jediný inflexní bod tj. $g = 2^n$.*

Poznámka 12. Můžeme pokračovat v odvozování dalších konfigurací tak, že v případě kdy $n - k > 1$ vynecháme více než jednu konfiguraci uvažovaného typu. Tyto úvahy přenecháme čtenáři. Dále také nebudeme ve větách 35 a 36 dosazovat za g příslušná čísla.

Uvažujme nyní podgrupu ${}_1\bar{G}_{3.2^n}$ a ${}_1\bar{G}_{9.2^n}$. Podle věty 7, resp. podle poznámky 10, grupa ${}_1\bar{G}_{2^n}$ je rovna sjednocení $\bar{G}_{2^{n-2}}$ a tří tříd grupy $G/\bar{G}_{2^{n-2}}$. Tyto tři třídy zřejmě určují konfiguraci $(3 \,.\, 2^{n-2}_{2^{n-2}}, 2_3^{2(n-2)})$. Nyní v ${}_1\bar{G}_{2^n}$ vynecháme body grupy $\bar{G}_{2^{n-2}}$ a v třídách, které spolu s ${}_1\bar{G}_{2^n}$ určují postupně ${}_1\bar{G}_{3.2^n}$ a ${}_1\bar{G}_{9.2^n}$ vynecháme body třídy se stejnými vlastnostmi jako uvažovaná $\bar{G}_{2^{n-2}}$. Zbývající body tvoří podle vět 35 a 37 konfigurace z těchto vět. Přidáním přímek uvažované konfigurace $(3 \,.\, 2^{n-2}_{2^{n-2}}, 2_3^{2(n-2)})$ dostáváme konfigurace:

$$(9 \,.\, 2^{n-2}_{3.2^n-2}, 9 \,.\, 2_3^{2(n-2)}) \quad \text{a} \quad (27 \,.\, 2^{n-2}_{9.2^n-2}, 81 \,.\, 2_3^{2(n-2)}) \,.$$

Tyto konfigurace jsou podle počtu bodů a přímek stejné jako konfigurace z věty 27, mají však jinou strukturu.

Další typy konfigurací dostaneme, když budeme aplikovat konfigurace z věty 33 na grupy ${}_2\bar{G}_{3.2^n}$ a ${}_2\bar{G}_{9.2^n}$. Uvažujme ${}_2\bar{G}_{2^n}$. Uvědomíme-li si strukturu této grupy ihned dostáváme: ${}_2\bar{G}_{2^n} = {}_2\bar{G}_{2^{n-2}} \cup \{A\} \cup \{B\} \cup \{C\}$, kde $\{A\}, \{B\}$ a $\{C\}$ jsou prvky grupy $G/{}_2\bar{G}_{2^{n-2}}$ a dále platí ${}_2\bar{G}_{2^{n-2}} \cup \{A\} = {}_2\bar{G}_{2^{n-1}}$. ${}_2\bar{G}_{2^{n-2}} \cup B \neq {}_2\bar{G}_{2^{n-1}}$, neboť kdyby tomu tak nebylo a platilo předcházející, musela by být ${}_2\bar{G}_{2^n}$ prvého typu. Z toho vyplývá, že musí platit $\{T - 2B\} = \{A\}$ a $\{T - 2C\} = \{A\}$ a třídy $\{A\}, \{B\}$ a $\{C\}$ splňují podmínky 31 resp. 32 tj. určují konfigurace těchto vět. Nyní v ${}_2\bar{G}_{2^n}$ vynecháme body grupy ${}_2\bar{G}_{2^{n-2}}$ a v třídách, které spolu s ${}_2\bar{G}_{2^n}$ určují postupně ${}_2\bar{G}_{3.2^n}$ a ${}_2\bar{G}_{9.2^n}$ vynecháme třídy se stejnými vlastnostmi jako má uvažovaná grupa ${}_2\bar{G}_{2^{n-2}}$. Zbývající body tvoří konfigurace z vět 35 a 37 a navíc můžeme v každé třídě přidat přímky z konfigurací podle vět 31 a 32. Dostáváme:

Věta 38. *Existují rovinné konfigurace bodů rovinné kubiky rodu* 1 *typu*

$$(9g_{3g-1}, 3g(3g-1)_3), \quad \left(9g_{5g/2}, \binom{15g^2}{2}_3\right) \quad a \quad \left(9g_{(5g+2)/2}, 3g \,.\, \binom{5g+2}{2}_3\right)$$

přičemž za g můžeme dosadit jednak $3 \,.\, 2^{n-2}$ *a jednak* 2^{n-2}. *Číslo n je přirozené a větší než dvě.*

Uvažujme ${}_2\bar{G}_{2^k} \subset {}_2\bar{G}_{2^n}$. Zřejmě existuje ${}_2\bar{G}_{2^n}/{}_2\bar{G}_{2^k}$ a protože každý prvek této faktorové grupy se skládá z $2^k/2$ dvojic bodů se společným tečnovým bodem, lze tyto prvky rozdělit do disjunktních dvojic takových, že pro každou dvojici prvků $\{X\}$ a $\{Y\}$ existuje prvek $\{Z\}$ přičemž platí $\{Z\} = \{T - 2X\}$ a $\{Z\} = \{T - 2Y\}$. Zřejmě jedině v případě $\{X\} = {}_2\bar{G}_{2^k}$ tyto tři prvky nejsou vesměs různé. V ostatních případech splňují tedy uvažované tři prvky větu 31 resp. 32 (jinak by totiž daná grupa byla prvého typu). Nyní rozdělíme danou ${}_2\bar{G}_{2^n}$ do disjunktních trojic uvažovaných prvků tj. každý prvek bude patřit jediné trojici navzájem vesměs různých prvků. Zřejmě platí: je-li číslo $n - k$ sudé potom jedině ${}_2\bar{G}_{2^k}$ nepatří žádné uvažované trojici. Při $n - k$ lichém nebude žádné trojici náležet ${}_2\bar{G}_{2^k}$ a $\{A\}$, přičemž platí ${}_2\bar{G}_{2^k} \cup \{A\} = {}_2\bar{G}_{2^{k+1}}$. Nyní budeme postupovat jako v předcházející větě, s tím, že v obou případech vynecháváme podgrupu grupy ${}_2\bar{G}_{2^n}$ a tedy vynechané body jak v ${}_2\bar{G}_{3.2^n}$ tak i v ${}_2\bar{G}_{9.2^n}$ tvoří konfiguraci a tedy jsou splněny podmínky věty 35. Dostáváme:

Věta 39. *Existují rovinné konfigurace kubiky rodu* 1 *typu*:

$$(3(2^n - 2^k)_{2^n-2^k-1}, (2^n - 2^k)(2^n - 2^k - 1)_3),$$

$$(9(2^n - 2^k)_{4.2^n-7.2^k-1}, 3(2^n - 2^k)(4 . 2^n - 7 . 2^k - 1)_3)$$

$$(3(2^n - 2^{k+1})_{2^n-3.2^k-1}, (2^n - 2^{k+1})(2^n - 3 . 2^k - 1)_3)$$

$$(9(2^n - 2^{k+1})_{4.2^n-15.2^k-1}, 3(2^n - 2^{k+1})(4 . 2^n - 15 . 2^k - 1)_3)$$

kde n a k jsou přirozená čísla, $k \leqq n - 2$ a u prvních dvou typů je $n - k$ sudé a u zbývajících dvou typů je $n - k$ liché.

Poznámka 13. Čtenář si jistě uvědomil, že ve větě 39 jsme mohli uvést ještě dalších osm typů konfigurací. Dále by platilo, že věta 38 je speciální případ věty 39 a sice pro $k = n - 2$.

Nechť $k = 1$ a n je sudé. Konfigurace z předcházející věty v tomto případě dostáváme tak, že v grupě ${}_2\bar{G}_{2^n}$ vynecháme čtyři body a sice: $J_1, J_{11}, J_{111}, J_{112}$. Platí, že body J_1, J_{111}, J_{112} leží na přímce. Vynechme nyní v ${}_2\bar{G}_{3.2^n}$ jedině body J_{11}, J_{21}, J_{31}. Přímka $J_{i1}J_{j1}$ prochází bodem J_k, kde $i, j, k = 1, 2, 3$ a jsou navzájem vesměs různá. V bodech J_i $(i = 1, 2, 3)$ tím, že vynecháme uvažované body zmenší se počet přímek konfigurace $(3 . 2^n_{2^n}, 2_3^{2^n})$ o jednu a v ostatních bodech o dvě. Jestliže vynecháme v dané konfiguraci ještě přímku $J_1J_2J_3$ dostáváme:

Věta 40. *Existují rovinné konfigurace bodů kubiky rodu* 1 *typu*:

$$(3 . (2^n - 1)_{2^n-1}, (2^n - 1)_3^2) \quad \text{a} \quad (9 . (2^n - 1)_{4.2^n-7}, 3(2^n - 1)(4 . 2^n - 7)_3),$$

kde n je sudé přirozené číslo.

Důkaz. Druhou konfiguraci dostaneme tak, že v ${}_2\bar{G}_{9.2^n}$ vynecháme J_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, 9$ a tři přímky např. $J_1J_2J_3$, $J_4J_5J_6$ a $J_7J_8J_9$.

Závěrečná poznámka. Všechny úvahy, které jsme v tomto článku provedli se dají zdualisovat. Tedy platí:

Věta 41. *Nechť $(u_v, uv/3_3)$ je konfigurace odvozená v předcházejících větách. Potom existuje také konfigurace $(uv/3_3, u_v)$ tečen rovinné sextiky.*

Literatura

[1] *J. Krys:* Konfigurace bodů rovinné kubiky. Čas. pěst. mat. *94* (1969), 282—289.

Adresa autora: 500 00 Hradec Králové, Leninovo nám. 301 (Pedagogická fakulta).

Zusammenfassung

PUNKTKONFIGURATIONEN EINER EBENEN KUBIK, II

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung einer früheren Abhandlung des Verfassers [1]. Es wird die Existenz unendlich vieler weiterer Punktkonfigurationen einer ebenen Kubik bewiesen.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

K RIEŠITEĽNOSTI DIOFANTICKEJ ROVNICE $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = \frac{a}{b}$

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 10. decembra 1971)

V článku [1] je odvodená veta 3 o postačujúcich podmienkach rieštieľnosti rovnice

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = \frac{a}{b}, \quad (a, b) = 1, \quad n \geqq 2 \tag{1}$$

v prirodzených číslach $x_1, x_2, \ldots, x_n$ v prípade $n = 3$. V tomto článku túto vetu zovšeobecníme pre ľubovoľné $n \geqq 2$.

Veta 1. *Prirodzené čísla x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, ktoré možno vyjadriť vo forme*

$$x_1 = \frac{\gamma \prod_{j=2}^{n} u_j}{ab}, \quad x_k = \frac{\gamma b \prod_{j=2}^{n} u_j \sum_{j=2}^{n} u_j}{a u_k (\gamma \prod_{j=2}^{n} u_j - b^2)}, \quad k = 2, 3, \ldots, n \tag{2}$$

kde $a, b, \gamma, u_2, u_3, \ldots, u_n$ sú prirodzené čísla, tvoria riešenie rovnice (1).

Dôkaz sa vykoná dosadením (2) do (1).

Veta 2. *Pre čísla $\gamma, u_2, u_3, \ldots, u_n$ v* (2) *platí za predpokladu $x_1 = \min_j \{x_j\}$*

$$b^2 < \gamma \prod_{j=2}^{n} u_j \leqq n b^2 . \tag{3}$$

Dôkaz. Za učineného predpokladu platí $1/x_1 < a/b$, $n/x_1 \geqq a/b$, z čoho vyplýva (3).

Poznámka 1. Podmienky (2) vety 1 sú v prípade $n = 3$ aj nutné (pozri vetu 1 článku [1]). Tak je tomu aj v prípade $n = 2$, v ktorom znejú:

$$x_1 = \frac{\gamma u}{ab}, \quad x_2 = \frac{\gamma b u}{a(\gamma u - b^2)} . \tag{2'}$$

Ak vyjadríme triviálne $x_1 = (b + k)/a$, potom z (2') $\gamma u = b^2 + bk$, takže $x_2 = (b + b^2/k)/a$, čo sú nutné a postačujúce podmienky pre riešenia rovnice (1) pri $n = 2$ (pozri vetu 1 v článku [2]).

Pre $n > 3$ podmienky (2) nie sú nutné. Napr. rovnica $\sum_{j=1}^{4} (1/x_j) = 1$ má podľa tab. 1 v článku [3] 14 riešení. Pretože v tomto prípade podľa vety 2 $1 < \gamma \prod_{j=2}^{4} u_j \leqq 4$, ľahko sa presvedčíme že zo vzorcov (2) všetky tieto riešenia nedostaneme. Jednako možno vzorce (2) použiť na vypočítanie značného počtu riešení rovnice (1) pri ľubovoľnom $n \geqq 2$.

Veta 3. *Nech $b \equiv r \pmod{a}$, $0 < r < a$. Nech $b = b_1 b_2 \dots b_n$ je rozklad na prirodzené čísla. Číslo a/b je číslom A_n, čiže rovnica (1) má riešenie v prirodzených číslach, ak buď b, buď $\sum_{j=2}^{n} b_j$ má deliteľa tvaru $at - r$, $t \geqq 1$.*

Dôkaz. Voľme

$$\gamma = (b + at - r)\, b_1\,, \quad u_j = b_j\,, \quad j = 2, 3, \dots, n\,. \tag{4}$$

Podmienka (3) je zrejme splnená. Po dosadení (4) do (2) máme

$$x_1 = \frac{b + at - r}{a}\,, \quad x_k = \frac{(b + at - r)\, b_1 \prod_{j=2}^{n} b_j \sum_{j=2}^{n} b_j}{a b_k (at - r)}\,, \quad k = 2, 3, \dots, n\,. \tag{5}$$

Z $(a, b) = 1$ a $b \equiv r \pmod{a}$ ihneď vyplýva $(a, at - r) = 1$. Preto keď $(at - r) \mid b$, potom tiež $a(at - r) \mid (b + at - r)$. Ďalej $b_k \mid \prod_{j=2}^{n} b_j$, takže x_j sú prirodzené čísla, $j = 1, 2, \dots, n$. Obdobne keď $(at - r) \mid \sum_{j=2}^{n} b_j$. Tým je veta dokázaná.

Poznámka 2. Veta 3 v článku [1] je zvláštny prípad vety 3 tohoto článku pre $n = 3$, $b_1 = 1$, $b_2 = b$, $b_3 = 1$.

Dôsledok 1. *Ak $a \equiv n \pmod{2}$, potom číslo $a/[aq + \frac{1}{2}(a - n + 2)]$ je číslom A_n. O tom sa ľahko presvedčíme, ak v (5) volíme $b_2 = b$, $b_1 = b_3 = b_4 = \dots = b_n = 1$. Stačí na základe vety 3 dokázať, že $b + n - 2$ má deliteľa tvaru $at - r$.*

Avšak $r \equiv \frac{1}{2}(a - n + 2) \pmod{a}$ a teda $b + n - 2 = aq + \frac{1}{2}(a + 2 - n) + (n - 2) \equiv aq + \frac{1}{2}(a - 2 + n) = -r \pmod{a}$; čím je tvrdenie dokázané.

Veta 4. *Nech b má deliteľa tvaru $at - 1$, $t \geqq 1$. Potom rovnica (1) má riešenie v prirodzených číslach, čiže číslo a/b je číslom A_n, $n \geqq 2$.*

Důkaz. Podľa predpokladu $b = b'(at - 1)$. Stačí vetu dokázať pre rovnicu

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = \frac{a}{at - 1}.$$

Ak je totižto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jej riešením, je $(b'x_1, b'x_2, \ldots, b'x_n)$ riešením rovnice $\sum_{j=1}^{n} 1/x_j = a/b'(at - 1) = a/b$, čiže ak je číslo $a/(at - 1)$ číslom A_n, je ním aj číslo a/b.

Číslo $at - 1$ dáva modulo a najmenší kladný zvyšok $r = a - 1$ a má deliteľa $a - r = a - (a - 1) = 1$. Teda podľa vety 3 tohoto článku je $a/(at - 1)$ a potom aj a/b číslom A_n.

Dôsledok 2. *Čísla $1/b$, $2/b$ sú číslami A_n. V prvom prípade má b deliteľa $1 = 1 . 2 - 1$ a v druhom $1 = 2 . 1 - 1$, teda v oboch prípadoch deliteľa tvaru $at - 1$, $t = 1$.*

Veta 5. *Číslo a/b je číslom A_n pre*

$$n = a - r + 1 \tag{6}$$

(r má rovnaký význam ako vo vete 3).

Dôkaz. Voľme $b_1 = b$, $b_2 = b_3 = \ldots = b_n = 1$. Číslo $\sum_{j=2}^{n} b_j = n - 1$ má deliteľa tvaru $at - r$, čo je zrejmé zo (6). Preto podľa vety 3 je a/b číslom A_{a-r+1}. Tým je veta dokázaná.

Poznámka 3. Treba si uvedomiť, že ak je číslo a/b číslom A_n, je aj číslom $A_{n'}$ pre všetky $n' > n$.

Poznámka 4. Veta 5 dáva len v prípade $r = 1$ triviálny výsledok $n = a$. Je to práve ten prípad, ktorí robí ťažkosti v mnohých prípadoch (napr. pri dôkaze domnienky P. Erdösa, že $4/b$ je číslom A_3).

Literatúra

[1] *Bartoš P., Pehartzová-Bošanská K.:* K riešeniu diofantickej rovnice $1/x + 1/y + 1/z = a/b$. Čas. pro pěst. mat. *96* (1971), 294—299.

[2] *Bartoš P.:* Poznámka o počte riešení rovnice $1/x + 1/y = a/b$ v prirodzených číslach. Čas. pro pěst. mat. *95* (1970), 411—415.

[3] *Bartoš P.:* O riešení rovnice $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a rovnice $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = yx_1x_2 \ldots x_n$ v prirodzených číslach. Čas. pro pěst. mat. *96* (1971), 367—370.

Adresa autora: 801 00 Bratislava, Sibírska 9.

Zusammenfassung

ZUR LÖSBARKEIT DER DIOPHANTISCHEN GLEICHUNG $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = \frac{a}{b}$

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

Es werden die Formeln (2) abgeleitet, mit deren Hilfe man algorithmisch eine gewisse Anzahl von Lösungen der Gleichung (1) in natürlichen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestimmen kann. Weiter wird dann Satz 3 bewiesen, der Bedingungen angibt, die dazu hinreichend sind, dass die Zahl a/b die Zahl A_n ist. Aus diesem Satz werden gewisse Folgerungen hergeleitet, insbesondere Satz 5, laut dem a/b die Zahl A_{a-r-1} ist, falls $b \equiv r \pmod{a}$ ist, $0 < r < a$.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

K ZOBECNĚNÍ POJMU PROJEKTOR

JAN HAVRDA, Praha

(Došlo dne 17. ledna 1972)

Úkolem článku je jisté zobecnění známého pojmu projektor na lineárním prostoru se skalárním součinem, přičemž množinou, na kterou se promítá, je zde neprázdná konvexní uzavřená množina. V článku jsou též uvedeny některé základní vlastnosti tohoto zobecněného projektoru.

Symbolem L budeme značit lineární prostor se skalárním součinem $(.,.)$, symbol $\|.\|$ bude značit jím indukovanou normu. Velká písmena A, I, S apod. označují operátory definované na L s oborem hodnot v L; přitom I značí identický operátor. Symbolem L_A apod. budeme označovat obor hodnot operátoru A.

1. Lemma. 1. *Je-li A idempotentní operátor, pak množina L_A je rovna množině samodružných bodů operátoru A.*

2. *Je-li A spojitý idempotentní operátor, pak L_A je uzavřená množina.*

Důkaz je zřejmý.

2. Věta. *Buď A idempotentní operátor takový, že pro všechna $x_1, x_2 \in L$ platí*

$$\|Ax_1 - Ax_2\|^2 \leqq \operatorname{Re}(x_1 - x_2, Ax_1 - Ax_2) . \tag{1}$$

Potom L_A je neprázdná konvexní uzavřená množina a pro každé $x_0 \in L$ při všech $z \in L_A$ platí

$$\|x_0 - Ax_0\| \leqq \|x_0 - z\| . \tag{2}$$

Přitom Ax_0 je jediný bod množiny L_A, pro který při všech $z \in L_A$ platí nerovnost (2).

Důkaz. Z nerovnosti (1) vyplývá, že při všech $x_1, x_2 \in L$ platí $\|Ax_1 - Ax_2\| \leqq \leqq \|x_1 - x_2\|$, operátor A je tedy spojitý a podle 2) lemmatu 1 je L_A uzavřená množina. Okolnost, že $L_A \neq \emptyset$ je zřejmá.

Z nerovnosti (1) a 1) lemmatu 1 dále plyne, že pro všechna $x_1 \in L$ a $z \in L_A$ platí $\|Ax_1 - z\|^2 \leqq \operatorname{Re}(x_1 - z, Ax_1 - z)$ čili

$$\operatorname{Re}(z - Ax_1, x_1 - Ax_1) \leqq 0 . \tag{3}$$

Nyní dokážeme, že L_A je konvexní množina. Buď $z_1, z_2 \in L_A$, $\lambda_1 \geqq 0$, $\lambda_2 \geqq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Označme $y = A(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$, $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 - y = v$. Podle (3) platí $\operatorname{Re}(z_1, v) \leqq \operatorname{Re}(y, v)$, $\operatorname{Re}(z_2, v) \leqq \operatorname{Re}(y, v)$, tedy též $\operatorname{Re}(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, v) \leqq \operatorname{Re}(y, v)$ čili $\operatorname{Re}(y + v, v) \leqq \operatorname{Re}(y, v)$, takže $\|v\|^2 \leqq 0$. Odtud $v = 0$ a $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in L_A$.

Buď $x_0 \in L$, $z \in L_A$. Potom $\|z - x_0\|^2 - \|Ax_0 - x_0\|^2 = \|z - Ax_0\|^2 - 2 \operatorname{Re}(z - Ax_0, x_0 - Ax_0) \geqq 0$ v důsledku platnosti vztahu (3). Tedy platí (2). Jestliže pro $z_1 \in L_A$ platí $\|z_1 - x_0\| = \|Ax_0 - x_0\|$, pak $0 = \|z_1 - x_0\|^2 - \|Ax_0 - x_0\|^2 = \|z_1 - Ax_0\|^2 - 2 \operatorname{Re}(z_1 - Ax_0, x_0 - Ax_0) \geqq 0$ opět v důsledku platnosti vztahu (3), tedy $\|z_1 - Ax_0\| = 0$. Věta je dokázána.

3. Označení. Systém všech operátorů splňujících předpoklady věty 2 označme $\mathscr{A}_0$.

4. Důsledek. *Buď $A \in \mathscr{A}_0$. Potom každý bod $x \in L$ lze vyjádřit ve tvaru*

$$x = x_0 + y_0\,, \quad x_0 \in L_A\,, \quad y_0 \in L \tag{4}$$

tak, že pro všechna $z \in L_A$ platí

$$\operatorname{Re}(z - x_0, y_0) \leqq 0\,. \tag{5}$$

Vyjádření bodu x ve tvaru (4) s vlastností (5) je jediné, přičemž $x_0 = Ax$.

Důkaz. Položíme-li $x_0 = Ax$, $y_0 = x - Ax$, platí (4) a (5) v důsledku platnosti nerovnosti (3). Zbývá tedy dokázat jen jednoznačnost. Kdyby navíc platilo $x = x_1 + y_1$, $x_1 \in L_A$, $y_1 \in L$, a kdyby při všech $z \in L_A$ bylo $\operatorname{Re}(z - x_1, y_1) \leqq 0$, pak $x_1 - x_0 = y_0 - y_1$, $\operatorname{Re}(x_1 - x_0, y_0) \leqq 0$, $\operatorname{Re}(x_0 - x_1, y_1) \leqq 0$, tudíž $0 \geqq \operatorname{Re}(x_1 - x_0, y_0 - y_1) = \operatorname{Re}(x_1 - x_0, x_1 - x_0) = \|x_1 - x_0\|^2$. Proto $x_1 = x_0$ a tedy též $y_0 = y_1$.

5. Lemma. Buď $A \in \mathscr{A}_0$.

1) *Jestliže $x \in L$, $x = Ax + y$, $\lambda \geqq 0$, potom $A(Ax + \lambda y) = Ax$.*

2) *Jestliže $x_1, x_2 \in L$, $x_1 = Ax_1 + y_1$, $x_2 = Ax_2 + y_2$, $\lambda_1 \geqq 0$, $\lambda_2 \geqq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, pak existuje $x_3 \in L$ tak, že $Ax_3 = A(Ax_3 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$.*

Důkaz. 1) Jestliže $x = Ax + y$, podle nerovnosti (3) pro všechna $z \in L_A$ platí $\operatorname{Re}(z - Ax, y) \leqq 0$, tedy při $\lambda \geqq 0$ též $\operatorname{Re}(z - Ax, \lambda y) \leqq 0$. Označíme-li $v = Ax + \lambda y$, podle důsledku 4 dostáváme $Ax = Av = A(Ax + \lambda y)$.

2) Jestliže $x_1 = Ax_1 + y_1$, $x_2 = Ax_2 + y_2$, pak při všech $z \in L_A$ platí $\operatorname{Re}(z - Ax_1, y_1) \leqq 0$, $\operatorname{Re}(z - Ax_2, y_2) \leqq 0$. Násobením prvé z těchto nerovností λ_1^2 a druhé λ_2^2 a sečtením dostaneme, že pro všechna $z \in L_A$ je $\operatorname{Re}(z - \lambda_1 Ax_1 - \lambda_2 Ax_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \leqq 0$. Podle věty 2 je $z_3 = \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2 \in L_A$. Existuje tedy $x_3 \in L$ tak, že $z_3 = Ax_3$. Přitom při všech $z \in L_A$ platí $\operatorname{Re}(z - Ax_3, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \leqq 0$. Označíme-li $v = Ax_3 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, vidíme, že podle důsledku 4 je $Ax_3 = Av = A(Ax_3 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$.

6. Věta. *Buď $A \in \mathscr{A}_0$, $S = I - A$. Potom L_S je konvexní kužel.*

Důkaz. a) Buď $y \in L_S$, $\lambda \geqq 0$. Existuje $x \in L$ tak, že $y = Sx = x - Ax$. Podle 1) lemmatu 5 platí $\lambda y = Ax + \lambda y - Ax = Ax + \lambda y - A(Ax + \lambda y) = S(Ax + \lambda y)$, tedy $\lambda y \in L_S$.

b) Buďte $y_1, y_2 \in L_S$, $\lambda_1 \geqq 0$, $\lambda_2 \geqq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Existují $x_1, x_2 \in L$ tak, že $y_1 = Sx_1$, $y_2 = Sx_2$. Podle 2) lemmatu 5 existuje $x_3 \in L$ tak, že $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = Ax_3 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 - A(Ax_3 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = S(Ax_3 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$, tedy $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in L_S$. Odtud $y_1 + y_2 = 2(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2) \in L_S$.

7. Věta. *Buď $A \in \mathscr{A}_0$, $S = I - A$. Je-li množina L_A kompaktní, pak $L_S = L$.*

Důkaz. Buď $y \in L$, $x_0 \in L_A$ a označme $A(x_0 + ny) = x_n$, $S(x_0 + ny) = y_n$. $n = 1, 2, \ldots$ Na základě věty 2 při $n = 1, 2, \ldots$ tedy platí $x_0 + ny = x_n + y_n$ a při všech $z \in L_A$ je $\operatorname{Re}(z - x_n, y_n) \leqq 0$. Poněvadž $x_n \in L_A$ při $n = 1, 2, \ldots$, existuje vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}$, která má limitu $x^0 \in L_A$. Při $k = 1, 2, \ldots$ platí

$$\frac{y_{n_k}}{n_k} = \frac{x_0 - x_{n_k}}{n_k} + y\,,$$

takže $\lim_k y_{n_k}/n_k = y$. Navíc při všech $z \in L_A$ platí $\operatorname{Re}(z - x_{n_k}, y_{n_k}/n_k) \leqq 0$ a přechodem k limitě při $k \to \infty$ dostaneme $\operatorname{Re}(z - x^0, y) \leqq 0$. Označíme-li $v = x^0 + y$ podle důsledku 4 je $Sv = y$, tedy $y \in L_S$.

8. Označení. Symbolem $\mathscr{A}_1$ označíme systém všech operátorů $A \in \mathscr{A}_0$, pro něž platí, že při všech $x \in L$ a všech $\lambda \geqq 0$ je $A\lambda x = \lambda Ax$.

9. Věta. *Jestliže $A \in \mathscr{A}_1$, pak $S = I - A \in \mathscr{A}_1$.*

Důkaz. Buď $A \in \mathscr{A}_1$, $S = I - A$. Podle důsledku 4 při $x \in L$, $x = Ax + Sx$ a při všech $z \in L_A$ je $\operatorname{Re}(z - Ax, Sx) \leqq 0$, tedy při všech $\lambda \geqq 0$ platí $0 \geqq \operatorname{Re}(\lambda Ax - Ax, Sx) = (\lambda - 1)\operatorname{Re}(Ax, Sx)$, takže $\operatorname{Re}(Ax, Sx) = 0$. Tudíž pro všechna $z \in L_A$ a všechna $y \in L_s$ máme

$$\operatorname{Re}(z, y) \leqq 0\,. \tag{6}$$

a) Buď $x \in L$, $x = Ax + Sx$, tedy $x - Ax = 0 + Sx$ a při všech $z \in L_A$ platí $\operatorname{Re}(z - 0, Sx) \leqq 0$. Podle důsledku 4 tudíž $A(x - Ax) = 0$ čili $AS = 0$. Nyní $S^2x = Sx - ASx = Sx$ při všech $x \in L$.

b) Pro $x_1, x_2 \in L$ je $x_1 = Ax_1 + Sx_1$, $x_2 = Ax_2 + Sx_2$ a podle nerovnosti (1) platí $(Ax_1 - Ax_2, Ax_1 - Ax_2) \leqq \operatorname{Re}(x_1 - x_2, Ax_1 - Ax_2)$ čili $0 \leqq \operatorname{Re}(Sx_1 - Sx_2, Ax_1 - Ax_2)$ čili $\|Sx_1 - Sx_2\|^2 \leqq \operatorname{Re}(x_1 - x_2, Sx_1 - Sx_2)$.

c) Buď $x \in L$, $\lambda \geqq 0$. Pak $S\lambda x = \lambda x - A\lambda x = \lambda(x - Ax) = \lambda Sx$.

10. Důsledek. *Je-li $A \in \mathscr{A}_1$, $S = I - A$, pak L_A i L_S je uzavřený konvexní kužel.* Toto tvrzení ihned plyne z vět 9, 6 a 2.

11. Označení. Buď $\mathfrak{A} = \{L_A : A \in \mathscr{A}_1\}$. Dále při $L_A \in \mathfrak{A}$ klaďme $L_A^{\perp} = L_S$, kde $S = I - A$.

12. Věta. *Trojice $(\mathfrak{A}, \subset, \perp)$ je uspořádaná množina s ortogonalitou.*

Důkaz. a) Buď $L_A \in \mathfrak{A}$, $L_A^{\perp} = L_S$. Pak $L_S^{\perp} = L_A$ v důsledku platnosti věty 9.

b) Nechť $L_{A_1}, L_{A_2} \in \mathfrak{A}$, $L_{A_1} \subset L_{A_2}$. Buď $L_{A_1}^{\perp} = L_{S_1}$, $L_{A_2}^{\perp} = L_{S_2}$. Je-li $y \in L_{S_2}$, podle nerovnosti (6) pro všechna $z \in L_{A_2}$ platí $\operatorname{Re}(z - 0, y) \leqq 0$, což tedy platí též pro všechna $z \in L_{A_1}$. Jelikož navíc $y = 0 + y$ a $0 \in L_{A_1}$, podle důsledku 4 je $y \in L_{S_1}$. Tedy $L_{S_2} \subset L_{S_1}$.

c) Pro všechna $L_A \in \mathfrak{A}$ platí $L_A \subset L = L_I$, $L_A^{\perp} \subset L = L_I$. Nechť $L_A \subset L_B$, $L_A^{\perp} \subset L_B$, kde $L_B \in \mathfrak{A}$. Je-li $x \in L = L_I$, je $x = Ax + Sx$, kde $S = I - A$. Přitom $Ax \in L_A \subset L_B$ $Sx \in L_A^{\perp} \subset L_B$, tedy $x = Ax + Sx \in L_B$. Existuje proto $\sup(L_A, L_A^{\perp})$ a platí $\sup(L_A, L_A^{\perp}) = L = L_I$.

Adresa autora: 166 27 Praha 6 - Dejvice, Suchbátarova 2 (katedra matematiky FEL ČVUT).

Summary

GENERALIZATION OF THE NOTION OF THE PROJECTOR

JAN HAVRDA, Praha

In the paper, the notion of a projector on a linear space L with the scalar product $(.,.)$ (and the induced norm $\|.\|$) is generalized. The set which is projected upon is a nonvoid closed convex set.

If $A : L \to L$ is such an idempotent operator that for all $x_1, x_2 \in L$ the inequality (1) holds, then $L_A = \{Ax : x \in L\}$ is a nonvoid convex closed set and for all $x_0 \in L$ and $z \in L_A$ the inequality (2) holds. Ax_0 is the only point in L_A to satisfy the inequality (2) for every $z \in L_A$. Furthermore, every $x \in L$ can be expressed uniquely by (4) so that for all $z \in L_A$ the inequality (5) holds. If $S = I - A$, where I is the identity operator, then $L_S = \{Sx : x \in L\}$ is a convex cone. If L_A is a compact set then $L_S = L$.

Let $\mathscr{A}_1$ stand for the family of all idempotent operators $A : L \to L$ such that for all $x_1, x_2 \in L$ the inequality (1) holds and for all $x \in L$ and $\lambda \geqq 0$ the formula $A\lambda x = \lambda Ax$ is satisfied. Then the implication $A \in \mathscr{A}_1 \Rightarrow S \in \mathscr{A}_1$ holds. In this case, L_A and L_S are closed convex cones. Let $\mathfrak{A}$ be the set $\{L_A : A \in \mathscr{A}_1\}$ and let us denote $L_A^{\perp} = L_S$. Then $(\mathfrak{A}, \subset, \perp)$ is a poset with orthogonality.

O JEDNOM EXTREMÁLNÍM PROBLÉMU PRO GRAFY S $\alpha(G) \leqq 2$

Jaroslav Morávek, Praha

(Došlo dne 18. ledna 1972)

Známá Turánova věta, viz [1] str. 269, určuje minimální počet hran v neorientovaném grafu bez smyček a násobných hran, s daným počtem uzlů n a s číslem stability nepřesahujícím dané k. Dále udává tato věta všechny grafy s uvedenou extremální vlastností. Někteří autoři se zabývali jejími různými modifikacemi a zobecněními, viz např. [2] a [3]. V této poznámce vycházíme ze speciálního případu Turánovy věty pro $k = 2$ a ve tvaru domněnky formulujeme jeho jisté zobecnění pro grafy s kladně ohodnocenými uzly. Je získán jistý dolní odhad pro řešení příslušného extremálního problému. Použité definice a fakty z teorie grafů jsou převzaty z [1].

Nechť $n \geqq 2$ je dané, přirozené číslo a budiž K_n úplný, neorientovaný graf s n uzly, označenými $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, přičemž předpokládáme, že graf je bez smyček a násobných hran. Nechť dále jsou dána kladná reálná čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$, přiřazená uzlům $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ v uvedeném pořadí. Pro každý částečný graf G grafu K_n označme $\alpha(G)$ jeho číslo stability, tj.

$$\alpha(G) = \max \left\{ \operatorname{card}(S) \,\middle|\, \begin{array}{l} S \subset \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\};\ \text{žádné dva} \\ \text{uzly z } S \text{ nejsou sousední v } G \end{array} \right\}$$

a pomocí $d_1(G), d_2(G), \ldots, d_n(G)$ označme stupně uzlů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ v G. Nakonec označme symbolem $\mathcal{G}_n$ množinu všech částečných grafů G grafu K_n, pro něž $\alpha(G) \leqq 2$ a položme

$$(1) \qquad \tau_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \min_{G \in \mathcal{G}_n} \sum_{j=1}^{n} c_j \,.\, d_j(G)\,.$$

Problém, kterým se chceme zabývat, záleží v určení $\tau_n(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ a všech grafů $G \in \mathcal{G}_n$, pro něž platí

$$\tau_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \,.\, d_j(G)\,.$$

Ve speciálním případě $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = \frac{1}{2}$ je

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \,.\, d_j(G) = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} d_j(G)$$

rovno počtu hran G a odpověď na zformulovaný problém poskytuje speciální případ Turánovy věty, který lze vyslovit takto:

1. Platí

$$\tau_n(\tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{2}) = \left[\frac{(n-1)^2}{4}\right] = \left]\frac{n^2 - 2n}{4}\right[\text{ [1]},$$

2. Pro každý graf $G \in \mathscr{G}_n$ jsou následující dva výroky ekvivalentní

a) Počet hran G je $[(n-1)^2/4]$.

b) G se skládá ze dvou komponent, které jsou úplnými grafy, přičemž první obsahuje $[n/2]$ uzlů, druhá $]n/2[$ uzlů.

Zformulované tvrzení přivádí k následující domněnce; při její formulaci i v dalším textu předpokládáme, že $c_1 \geqq c_2 \geqq \ldots \geqq c_n > 0$, čehož lze bez újmy na obecnosti docílit přečíslováním uzlů K_n.

Domněnka. *Určeme* $a \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ *tak, aby výraz* $(a-1) . (c_1 + \ldots + c_a) + (n-a-1) . (c_{a+1} + \ldots + c_n)$ *byl minimální. Domníváme se, že graf sestávající ze dvou úplných komponent, kde první má uzly* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_a$ *a druhá uzly* $\mathbf{u}_{a+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$, *je řešením zformulovaného extremálního problému, tj. domníváme se, že platí*

$$\tau_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) =$$
$$= \min_{a=1,\ldots,n-1} ((a-1) . (c_1 + \ldots + c_a) + (n-a-1) . (c_{a+1} + \ldots + c_n)) .$$

Domněnku se nám nepodařilo dokázat ani vyvrátit a cíl této poznámky je skromnější: V následující větě je nalezen v jistém smyslu nezlepšitelný odhad pro $\tau_n(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Věta. *Pro* $\tau_n(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *platí*

$$\frac{3n-4}{4} \sum_{j=1}^{n} c_j - \frac{n\sqrt{n}}{4} . \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)} \leqq \tau_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) \leqq$$
$$\leqq \min_{a=1,\ldots,[n/2]} ((a-1) . (c_1 + \ldots + c_a) + (n-a-1) . (c_{a+1} + \ldots + c_n)) .$$

Důkaz. 1. Horní odhad. Graf zkonstruovaný při formulaci domněnky poskytuje horní odhad

$$\tau_n(c_1, \ldots, c_n) \leqq \min_{a=1,\ldots,n-1} ((a-1)(c_1 + \ldots + c_a) + (n-a-1)(c_{a+1} + \ldots + c_n)) .$$

---

[1]) $[\zeta] ::=$ největší celé číslo, $\leqq \zeta$; $]\zeta[::=$ nejmenší c. č., $\geqq \zeta$.

Z předpokladu $c_1 \geqq c_2 \geqq \ldots \geqq c_n > 0$ však vyplývá

$$\min_{a=1,\ldots,n-1} ((a-1)(c_1 + \ldots + c_a) + (n-a-1)(c_{a+1} + \ldots + c_n)) =$$

$$= \min_{a=1,\ldots,[n/2]} ((a-1)(c_1 + \ldots + c_a) + (n-a-1)(c_{a+1} + \ldots + c_n)).$$

2. Dolní odhad. Nechť $G \in \mathcal{G}_n$ a položme $\delta_j = d_j(G)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Dále označme E množinu všech hran grafu G. Řekneme, že $\mathbf{e} \in E$ *pokrývá* trojici uzlů $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k)$, kde $1 \leqq i < j < k \leqq n$, právě když $\mathbf{e}$ spojuje některé dva z uzlů $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k$. Symbolem $T(\mathbf{e})$ označme množinu všech takových trojic, pokrytých hranou $\mathbf{e}$ a položme

$$T = \bigcup_{\mathbf{e} \in E} T(\mathbf{e}). \tag{2}$$

Protože $\alpha(G) \leqq 2$, obsahuje T všechny trojice $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k)$, kde $1 \leqq i < j < k \leqq n$, a tedy

$$\operatorname{card}(T) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}. \tag{3}$$

Ze vztahu (2) dostáváme

$$\operatorname{card}(T) = \sum_{r=1}^{\operatorname{card}(E)} (-1)^{r-1} \sum\nolimits^{(r)} \operatorname{card}(T(\mathbf{e}_1) \cap \ldots \cap T(\mathbf{e}_r)),^{2}) \tag{4}$$

kde symbolem $\sum^{(r)} \operatorname{card}(T(\mathbf{e}_1) \cap \ldots \cap T(\mathbf{e}_r))$ je označen součet čísel $\operatorname{card}(T(\mathbf{e}_1) \cap \ldots \cap T(\mathbf{e}_r))$ pro všechny r-prvkové podmnožiny $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ množiny E. Ze (4) však vyplývá vztah

$$\operatorname{card}(T) = \sum\nolimits^{(1)} \operatorname{card}(T(\mathbf{e}_1)) - \tag{5}$$
$$- \sum\nolimits^{(2)} \operatorname{card}(T(\mathbf{e}_1) \cap T(\mathbf{e}_2)) + \sum\nolimits^{(3)} \operatorname{card}(T(\mathbf{e}_1) \cap T(\mathbf{e}_2) \cap T(\mathbf{e}_3)),$$

neboť všechny další členy na pravé straně (4) jsou nuly. (To vyplývá z faktu, že nejvýše tři různé hrany mohou pokrývat společnou trojici uzlů.)

Vyjádříme nyní první dva členy na pravé straně (5) a odhadneme člen třetí:

$$\sum\nolimits^{(1)} \operatorname{card}(T(\mathbf{e}_1)) = (n-2) \operatorname{card}(E) = \frac{n-2}{2} \cdot \sum_{j=1}^{n} \delta_j \tag{6}$$

(protože každá hrana pokrývá přesně $(n-2)$ různých trojic uzlů),

$$\sum\nolimits^{(2)} \operatorname{card}(T(\mathbf{e}_1) \cap T(\mathbf{e}_2)) = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \delta_j(\delta_j - 1) \tag{7}$$

[2]) Podle tzv. „principu inkluse a exkluse“.

(protože každé dvě hrany, pokrývající společnou trojici uzlů, incidují v jednom uzlu),

$$(8) \qquad \sum\nolimits^{(3)} \operatorname{card}\left(T(\mathbf{e}_1) \cap T(\mathbf{e}_2) \cap T(\mathbf{e}_3)\right) \leqq$$

$$\leqq \tfrac{1}{3} \sum\nolimits^{(2)} \operatorname{card}\left(T(\mathbf{e}_1) \cap T(\mathbf{e}_2)\right) = \tfrac{1}{6} \sum_{j=1}^{n} \delta_j \,.\, (\delta_j - 1)$$

(protože každým třem hranám, pokrývajícím společnou trojici uzlů, odpovídají tři dvouprvkové množiny hran, uvažované v $\sum^{(2)} \operatorname{card}\left(T(\mathbf{e}_1) \cap T(\mathbf{e}_2)\right)$.

Spojením (3), (5), (6), (7) a (8) dostáváme vztah

$$\frac{n-2}{2} \sum_{j=1}^{n} \delta_j - \tfrac{1}{3} \sum_{j=1}^{n} \delta_j(\delta_j - 1) \geqq \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

a po jednoduché úpravě s ním ekvivalentní vztah

$$(9) \qquad \sum_{j=1}^{n} \left(\delta_j - \frac{3n-4}{4}\right)^2 \leqq \frac{n^3}{16}.$$

Z (9) vyplývá použitím Cauchy-Lagrangeovy nerovnosti

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \delta_j = \frac{3n-4}{4} \sum_{j=1}^{n} c_j + \sum_{j=1}^{n} c_j \,.\left(\delta_j - \frac{3n-4}{4}\right) \geqq \frac{3n-4}{4} \sum_{j=1}^{n} c_j -$$

$$- \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)} \,.\, \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} \left(\delta_j - \frac{3n-4}{4}\right)^2\right)} \geqq \frac{3n-4}{4} \,.\sum_{j=1}^{n} c_j - \frac{n\sqrt{n}}{4} \,.\, \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)}$$

což dokončuje důkaz.

Poznámka 1. Získané odhady jsou těsné v tom smyslu, že v případě $c_1 = c_2 = \ldots \ldots = c_n = \frac{1}{2}$ z nich vyplývá vzhledem k celočíselnosti $\tau_n(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$, že $\tau_n(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots \ldots, \frac{1}{2}) = [(n-1)^2/4]$.

Poznámka 2. Z dokázané věty vyplývá, že nerovnost

$$\frac{3n-4}{4} \sum_{j=1}^{n} c_j - \frac{n\sqrt{n}}{4} \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)} \leqq$$

$$\leqq \min_{a=1,\ldots,[n/2]} \left((a-1)(c_1 + \ldots + c_a) + (n-a-1)(c_{a+1} + \ldots + c_n)\right)$$

platí jestliže $c_1 \geqq c_2 \geqq \ldots \geqq c_n \geqq 0$ a $n \geqq 2$.

Poznámka 3. Vztah (9) představuje nutnou podmínku pro to, aby celá nezáporná čísla $\delta_1, \ldots, \delta_n$ byla stupni nějakého grafu $G \in \mathcal{G}_n$. Bylo by zajímavé nalézt nějaké další nutné nebo postačující, resp. nutné a postačující podmínky.

Literatura

[1] *Berge C.:* Graphes et hypergraphes, DUNOD, Paris, 1970.

[2] *Motzkin T. S.* and *E. G. Straus:* Maxima of Graphs and a New Proof of a Theorem of Turán, Canadian Journal of Mathematics, Vol. *XVII*, p. 533—540.

[3] *Sauer N.:* A Generalization of a Theorem of Turán, Journal of Combinatorial Theory *10*, 109—112 (1971).

Adresa autora: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV v Praze).

Summary

ON AN EXTREMAL PROBLEM FOR GRAPHS WITH $\alpha(G) \leqq 2$

Jaroslav Morávek, Praha

Let $n \geqq 2$ be a given integer, and let K_n denote a complete, undirected graph with n nodes $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, where it is assumed the graph not to contain loops and multiple edges. Further, let be given positive real numbers $c_1, c_2, \ldots, c_n$ assigned respectively to $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$. For any partial graph G of K_n let us denote $\alpha(G)$ its number of stability (see [1]), and put $d_1(G), \ldots, d_n(G)$ for the degrees of $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ in G. At last, let $\mathscr{G}_n$ denote the family of all partial graphs G of K_n such that $\alpha(G) \leqq 2$, and put

$$\tau_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \min_{G \in \mathscr{G}_n} \sum_{j=1}^{n} c_j \, d_j(G) .$$

Certain bounds for $\tau_n(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ are obtained, and they are shown to be best possible. The author conjectures that

$$\tau_n(c_1, \ldots, c_n) = \min_{a=1,\ldots,[n/2]} \left((a-1)(c_1 + \ldots + c_a) + (n-a-1)(c_{a+1} + \ldots + c_n)\right)$$

if $c_1 \geqq c_2 \geqq \ldots \geqq c_n > 0$.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ON A MODIFIED SUM INTEGRAL OF STIELTJES TYPE

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha

(Received January 27, 1972)

Let $[a, b]$ be a bounded interval on the real line, $-\infty < a < b < +\infty$. Given a positive function $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$, we consider finite sequences of numbers $A = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_k, \alpha_k\}$ such that

(1) $$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k = b\,,$$

(2) $$\alpha_{j-1} \leqq \tau_j \leqq \alpha_j\,, \quad j = 1, 2, \ldots, k\,,$$

(3) $$|\alpha_j - \tau_j| \leqq \delta(\tau_j)\,, \quad |\alpha_{j-1} - \tau_j| \leqq \delta(\tau_j)\,, \quad j = 1, 2, \ldots, k\,.$$

The set of all subdivisions A of $[a, b]$ satisfying (1), (2) and (3) with a given $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ we denote by $\mathscr{A}(\delta)$.

Further, replacing (2) by the condition

(2*) $$\alpha_0 \leqq \tau_1 < \alpha_1\,, \quad \alpha_{j-1} < \tau_j < \alpha_j\,, \quad j = 2, 3, \ldots, k-1\,, \quad \alpha_{k-1} < \tau_k \leqq \alpha_k$$

we denote the set of all A satisfying (1), (2*) and (3) with a given $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ by $\mathscr{A}^*(\delta)$.

In [2] it was proved that $\mathscr{A}(\delta) \neq \emptyset$ for any $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ (cf. Lemma 1,1,1 in [2]). The proof is based on choosing a finite covering of $[a, b]$ by intervals of the form $(\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau))$ where $\tau \in [a, b]$. By the same argument we can prove that $\mathscr{A}^*(\delta) \neq \emptyset$ for any $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$.

Definition 1. *The function $f : [a, b] \to R$ is K-integrable (K*-integrable) on $[a, b]$ with respect to $g : [a, b] \to R$ if there exists a number I such that to every $\varepsilon > 0$ there is such a $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ that*

$$|K(A) - I| < \varepsilon$$

provided $A \in \mathscr{A}(\delta)$ $(A \in \mathscr{A}^*(\delta))$ where

$$K(A) = \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)\,(g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1}))$$

for $A = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_k, \alpha_k\}$.

The number I *(if it exists) will be denoted by* $K \int_a^b f \,\mathrm{d}g$ ($K^* \int_a^b f \,\mathrm{d}g$) *and will be called the Kurzweil integral (the modified Kurzweil integral) of* f *with respect to* g *on* $[a, b]$.

Remark. The concept of the K-integral was introduced and studied for the first time by J. Kurzweil in [2], it is used in [2] and in a number of other papers to study ordinary differential equations.

In [2] and [4] it is shown that if g is a function of bounded variation on $[a, b]$, i.e. $g \in BV(a, b)$, then the usual Perron-Stieltjes integral $P.S. \int_a^b f \,\mathrm{d}g$ (cf. [3]) is equivalent to the integral $K \int_a^b f \,\mathrm{d}g$.

In [4] we studied further the relation between $K \int_a^b f \,\mathrm{d}g$ and the Young σ-integral $Y \int_b^a f \,\mathrm{d}g$ for $g \in BV(a, b)$ (for the Young integral see also [1]). In this direction we have obtained that for $g \in BV(a, b)$ the existence of $Y \int_a^b f \,\mathrm{d}g$ does not in general imply the existence of $K \int_a^b f \,\mathrm{d}g$ (cf. Sec 3 in [4]). In this note we prove that the modified Kurzweil integral includes the Young σ-integral, i.e. the following theorem holds:

Theorem 1. *Let* $f : [a, b] \to R$, *let* $g : [a, b] \to R$ *be of bounded variation on* $[a, b]$ ($g \in BV(a, b)$). *Then if the Young σ-integral* $Y \int_a^b f \,\mathrm{d}g$ *exists then also the modified Kurzweil integral* $K^* \int_a^b f \,\mathrm{d}g$ *exists and both integrals are equal.*

Proposition 1. *If* $f : [a, b] \to R$, $g \in BV(a, b)$ *and* $K \int_a^b f \,\mathrm{d}g$ *exists then* $K^* \int_a^b f \,\mathrm{d}g$ *exists and both integrals are equal.*

Proof. It is easy to see that if $A \in \mathscr{A}^*(\delta)$ for some $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ then also $A \in \mathscr{A}(\delta)$ and the proposition is an easy consequence of Def. 1.

Proposition 2. *If* $f : [a, b] \to R$, $g \in BV(a, b)$ *such that* $g(a) = g(t+) = g(t-) = g(b)$ *for all* $t \in (a, b)$ *then* $K^* \int_a^b f \,\mathrm{d}g$ *exists and equals zero.*

Proof. Without any loss of generality we can suppose that $g(a) = 0$. Indeed our proposition evidently holds for $g(t) = \text{const.}$ by definition and therefore the additivity of the integral yields that in the case $g(a) \neq 0$ it is sufficient to consider the function $\tilde{g}(t) = g(t) - g(a)$ for which we have $\tilde{g}(a) = 0$.

Since g is a function of bounded variation there exists a countable set $N = \{t_1, \ldots \ldots, t_m, \ldots\} \subset (a, b)$ such that $g(t) = 0$ for $t \in [a, b] - N$ and $g(t) \neq 0$ for $t \in N$. Moreover, we have $\operatorname{var}_a^b g = 2 \sum_{t \in N} |g(t)| < +\infty$. Given now an arbitrary $\varepsilon > 0$, we define for f, g and ε a function $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ in the following way:

If $\tau \in N$, i.e. $\tau = t_m$ for some $m = 1, 2, \ldots$, then there is a $\delta(\tau) > 0$ such that

$$|g(t)| < \varepsilon \,.\, 2^{-m-1}[|f(\tau)| + 1]^{-1}$$

for $0 < |t - \tau| < \delta(\tau)$. This is a consequence of the existence of limits $g(\tau-)$, $g(\tau+)$ for all $\tau \in (a, b)$ and our assumption $g(\tau+) = g(\tau-) = 0$ for all $\tau \in (a, b)$. For $\tau \in N$ let $\delta(\tau)$ be the positive number given above.

If $\tau \in [a, b] - N$ then we define the set

$$H_l = \{t \in [a, b] - N\,;\ \ l \leqq |f(t)| < l + 1\}$$

for all $l = 0, 1, 2, \ldots$ Evidently $\bigcup_{l=0}^{\infty} H_l = [a, b] - N$ and $H_l \cap H_m = \emptyset$ for $l \neq m$.

Further we determine for all $l = 0, 1, \ldots$ a set $N_l \subset N$ such that

$$\sum_{t \in N - N_l} 2|g(t)| < \varepsilon(l + 1)^{-1} \,.\, 2^{-l}\,.$$

This is obviously possible since the series $\sum_{t \in N} |g(t)|$ converges. If $\tau \in [a, b] - N$ then there exists a uniquely determined integer $l \geqq 0$ such that $\tau \in H_l$ and we define

$$\delta(\tau) = \tfrac{1}{2}\varrho(\tau, N_l) > 0$$

where ϱ is the Euclidean distance on the real line. This $\delta(\tau)$ is positive since $\tau \notin N_l$. By definition we have $[\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau)] \cap N_l = \emptyset$ for all $\tau \in H_l$.

Now let $A = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_k, \alpha_k\}$ be arbitrary and let us consider the corresponding sum $K(A)$. We have

$$|K(A)| = \Big|\sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)\,(g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1}))\Big| \leqq \sum_{j=1}^{k} |f(\tau_j)\,(g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1}))|\,.$$

If $\tau_j \in N$, i.e., $\tau_j = t_m$ for some $m = 1, 2, \ldots$ then

$$\begin{aligned}|f(\tau_j)\,(g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1}))| &\leqq |f(t_m)|\,(|g(\alpha_j)| + |g(\alpha_{j-1})|) \leqq \\ &\leqq |f(t_m)| \,.\, 2\varepsilon(|f(t_m)| + 1)^{-1} \,.\, 2^{-m-1} < \varepsilon/2^m\,,\end{aligned}$$

since $A \in \mathscr{A}^*(\delta)$ implies $0 < |\alpha_j - t_m| < \delta(t_m)$ and $0 < |\alpha_{j-1} - t_m| < \delta(t_m)$. If $\tau_j \notin N$ then there is an integer $l \geqq 0$ such that $\tau_j \in H_l$ and we have $|f(\tau_j)| \leqq l + 1$. Hence

$$|f(\tau_j)\,(g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1}))| \leqq (l + 1)\,|g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})| \leqq (l + 1)\,\mathrm{var}_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j}\, g$$

and for the sum $S_l = \sum_{\tau_j \in H_l} |f(\tau_j)\,(g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1}))|$ of all absolute values of summands in $K(A)$ with $\tau_j \in H_l$ we can give the estimate

$$S_l \leqq (l + 1) \sum_{\tau_j \in H_l} \mathrm{var}_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j}\, g \leqq (l + 1) \sum_{t \in N \cap M_l} 2|g(t)|$$

where $M_l = \bigcup_{\tau_j \in H_l} [\alpha_{j-1}, \alpha_j]$. Let us mention that $M_l \cap N_l = \emptyset$ since $M_l \subset \bigcup_{\tau_j \in H_l} [\tau_j - \delta(\tau_j), \tau_j + \delta(\tau_j)]$ and $[\tau_j - \delta(\tau_j), \tau_j + \delta(\tau_j)] \cap N_l = \emptyset$ for any $\tau_j \in H_l$. Hence $N \cap M_l \subset N - N_l$ and we have

$$S_l \leqq (l + 1) \sum_{t \in N - N_l} 2|g(t)| < (l + 1)\, \varepsilon \,.\, (l + 1)^{-1} \,.\, 2^{-l} = \varepsilon \,.\, 2^{-l}$$

Therefore we have

$$|K(A)| < \varepsilon\left(\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} + \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l}\right) = 3\varepsilon$$

and the proposition follows immediately from Def. 1.

Proof of Theorem 1. Let us define the set

$$N_S = \{t \in (a, b);\, g(t+) = g(t-),\, g(t) \neq g(t-)\}$$

and the function $g_S(t) = 0$, $t \in [a, b] - N_S$, $g_S(t) = g(t)$ for $t \in N_S$. We put $g_R = g - g_S$.

Since $Y \int_a^b f \, dg$ exists by assumption and the existence of $Y \int_a^b f \, dg_S$ and also the equality $Y \int_a^b f \, dg_S = 0$ follows from Proposition 1,1 in [4] the integral $Y \int_a^b f \, dg_R$ exists. Using Theorem 3,1 form [4] we obtain that $K \int_a^b f \, dg_R$ exists and Proposition 1 yields the existence of $K^* \int_a^b f \, dg_R$ and the equality $K^* \int_a^b f \, dg_R = K \int_a^b f \, dg_R = Y \int_a^b f \, dg_R$. By Prop. 2 we obtain the existence of $K^* \int_a^b f \, dg_S$ and $K^* \int_a^b f \, dg_S = 0$. Thus the integral $K^* \int_a^b f \, dg$ exists and

$$K^* \int_a^b f \, dg = K^* \int_a^b f \, dg_S + K^* \int_a^b f \, dg_R = Y \int_a^b f \, dg_R = Y \int_a^b f \, dg \,.$$

References

[1] *Hildebrandt T. H.:* Introduction to the Theory of Integration. Academic Press, New York, London, 1963.

[2] *Kurzweil J.:* Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter. Czech. Math. J. *7 (82)*, (1957), 418–449.

[3] *Saks S.:* Theory of the Integral. Monografie Matematyczne, Warszawa, Lwow 1937.

[4] *Schwabik Š.:* On the relation between Young's and Kurzweil's concept of Stieltjes integral, Čas. pěst. mat. *98* (1973), 237–251.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

LJAPUNOVOVA METODA V TEORII OMEZENOSTI LINEÁRNÍCH REGULOVANÝCH TOKŮ

FRANTIŠEK TUMAJER, Liberec

(Došlo dne 16. února 1972)

1. Označení. Symbolem P označíme netriviální reálný lineární normovaný prostor, jehož nulový prvek je o a norma $\| \ \|$, R neprázdnou podmnožinu množiny reálných čísel, R^+ množinu kladných čísel, $m = \{(o, \vartheta) \in P \times R : \vartheta \in R\}$, U neprázdnou množinu, a t tok na P nad R s domain $t = \{(\vartheta, x, \alpha) \in R \times P \times R : \vartheta \geqq \alpha\} = D$, tj. zobrazení $t : D \to P$, jež má následující vlastnosti (přitom definujeme ${}_{\vartheta}t_{\alpha}x = t(\vartheta, x, \alpha)$):

(i) $(\alpha, x, \alpha) \in D \Rightarrow {}_{\alpha}t_{\alpha}x = x$,

(ii) ${}_{\gamma}t_{\beta} \circ {}_{\beta}t_{\alpha}x = {}_{\gamma}t_{\alpha}x$ pro všechna $\gamma \geqq \beta \geqq \alpha$ v R a každé $x \in P$.

Symbolem $\{t^u : u \in U\}$ označíme lineární regulovaný tok na P nad $R \times U$ (viz práce [1]), jenž je definován tímto způsobem:

(i) Pro každé $u \in U$ je t^u tok na P nad R a jsou-li $u \in U$, $v \in U$, pak domain $t^u =$ $=$ domain $t^v = D$,

(ii) $(\beta, x, \alpha) \in D$, $(\beta, y, \alpha) \in D$, $u \in U$, λ, μ reálná čísla $\Rightarrow {}_{\beta}t^u_{\alpha}(\lambda x + \mu y) = \lambda_{\beta}t^u_{\alpha}x +$ $+ \mu_{\beta}t^u_{\alpha}y$,

(iii) $(\beta, x, \alpha) \in D$, $u \in U$, ${}_{\beta}t^u_{\alpha}x = o \Rightarrow x = o$,

(iv) U je taková neprázdná množina, že pro každou posloupnost $u^k \in U$, $x_{k-1} \in P$, $k = 1, 2, \ldots$ a pro každé dělení $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots$ množiny R, pro které $x_k = {}_{\alpha_k}t^{u^k}_{\alpha_{k-1}}x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, existuje alespoň jeden prvek $u \in U$takový, že ${}_{\vartheta}t^u_{\alpha_{k-1}}x_{k-1}$ je definováno na $\langle \alpha_{k-1}, \alpha_k \rangle \cap R$ rovností ${}_{\vartheta}t^u_{\alpha_{k-1}}x_{k-1} = {}_{\vartheta}t^{u^k}_{\alpha_{k-1}}x_{k-1}$ pro $k = 1, 2, \ldots$

Říkáme, že $\{t^u : u \in U\}$ je *lokální*, případně *globální*, právě když množina R nemá maximum, případně je shora neomezená. Říkáme, že $\{t^u : u \in U\}$ je *stacionární*, právě když pro každé $(x, u) \in P \times U$, $\alpha \in R$, $\beta \in R$, $\alpha \leqq \beta$ a pro všechna $\vartheta \in R$ je ${}_{\beta-\vartheta}t^u_{\alpha-\vartheta}x = {}_{\beta}t^u_{\alpha}x = {}_{\beta+\vartheta}t^u_{\alpha+\vartheta}x$. Je-li dáno $\sigma \in R \cup \{-\infty\}$ takové, že $\langle \sigma, +\infty) \cap$ $\cap (R - \{\sigma\})$ je neprázdná množina, pak označíme $\mathscr{R} = \langle \sigma, +\infty) \cap R$ a $E = (P -$ $- \{o\}) \times \mathscr{R}$.

2. Definice. Říkáme, že parciální zobrazení $V : P \times R \to R^+$ je *ljapunovskou funkcí* lineárního regulovaného toku $\{t^u : u \in U\}$, právě když platí

$$y = {}_\beta t^u_\alpha x \,, \quad u \in U \,, \quad (x, \alpha) \in \text{domain}\, V \,, \quad (y, \beta) \in \text{domain}\, V \Rightarrow V(y, \beta) \leqq V(x, \alpha) \,.$$

3. Definice. Říkáme, že $\{t^u : u \in U\}$ je na E *omezený* vzhledem k množině m, právě když existuje zobrazení $\varphi : E \to R^+$ takové, že platí

$$(1) \qquad (\vartheta, x, \alpha) \in D \,, \quad (x, \alpha) \in E \,, \quad u \in U \Rightarrow \|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| \leqq \varphi(x, \alpha) \,.$$

Říkáme, že $\{t^u : u \in U\}$ je na E *stejně omezený* vzhledem k množině m, právě když existuje zobrazení $\zeta : \mathscr{R} \times R^+ \to R^+$ takové, že platí

$$(2) \qquad (\vartheta, x, \alpha) \in D \,, \quad (x, \alpha) \in E \,, \quad \|x\| \leqq \omega \,, \quad u \in U \Rightarrow \|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| \leqq \zeta(\alpha, \omega) \,.$$

Říkáme, že $\{t^u : u \in U\}$ je na E *stejnoměrně omezený* vzhledem k množině m, právě když existuje zobrazení $\zeta : R^+ \to R^+$ takové, že platí

$$(3) \qquad (\vartheta, x, \alpha) \in D \,, \quad (x, \alpha) \in E \,, \quad \|x\| \leqq \omega \,, \quad u \in U \Rightarrow \|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| \leqq \zeta(\omega) \,.$$

Říkáme, že $\{t^u : u \in U\}$ *je na E stejně asymptoticky omezený* vzhledem k množině m, právě když je na E stejně omezený k m a existují konstanta $\varkappa \in R^+$, zobrazení $\tau : \mathscr{R} \times \times R^+ \to R^+$ takové, že platí

$$(4) \qquad (\vartheta, x, \alpha) \in D \,, \quad (x, \alpha) \in E \,, \quad \|x\| \leqq \omega \,, \quad \vartheta \geqq \alpha + \tau(\alpha, \omega) \,,$$
$$u \in U \Rightarrow \|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| \leqq \varkappa \,.$$

Říkáme, že $\{t^u : u \in U\}$ je na E *stejnoměrně asymptoticky omezený* vzhledem k množině m, právě když je na E stejnoměrně omezený k m a existují konstanta $\varkappa \in R^+$, zobrazení $\tau : R^+ \to R^+$ takové, že platí

$$(5) \qquad (\vartheta, x, \alpha) \in D \,, \quad (x, \alpha) \in E \,, \quad \|x\| \leqq \omega \,, \quad \vartheta \geqq \alpha + \tau(\omega) \,,$$
$$u \in U \Rightarrow \|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| \leqq \varkappa \,.$$

Poznámka k definici 3. *Existuje-li konstanta $\varkappa$ a zobrazení τ tak, že platí* (4), *pak ke každému $\varkappa \in R^+$ existuje τ závislé na $\varkappa$ takové, že je splněno* (4).

Samozřejmě platí táž poznámka o konstantě $\varkappa$ a zobrazení τ ve vztahu (5).

4. Věta. *Lineární regulovaný tok $\{t^u : u \in U\}$ je na E omezený vzhledem k množině m, právě když existují*

(6) *konstanta $\delta \in R^+$, parciální zobrazení $V : E \to R^+$, parciální zobrazení $a : R^+ \to R^+$, a rostoucí, $a(v) \to +\infty$ pro $v \to +\infty$*

a mající následující vlastnosti:

(i) *V je ljapunovská funkce s* domain $V = \{(x, \alpha) \in E : \|x\| \geqq \delta\}$,

(ii) $(x, \alpha) \in \text{domain}\, V \Rightarrow a(\|x\|) \leqq V(x, \alpha)$.

Důkaz. Nechť $\{t^u : u \in U\}$ je na E omezený vzhledem k m. Zvolme $\delta \in R^+$ a definujme parciální zobrazení

(7) $V : E \to R^+ : V(x, \alpha) = \sup \{\|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| : u \in U\,, \quad \alpha \leqq \vartheta \in R\}$ pro $\|x\| \geqq \delta$,

(8) $$a : R^+ \to R^+ : a(v) = v$$

a ukažme, že mají vlastnosti (i), (ii).

Ad (i): Nechť je dáno $(x, \alpha) \in \operatorname{domain} V$. Pak podle (1) ze vztahů $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $u \in U$ plyne $\|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| \leqq \varphi(x, \alpha)$, takže je V předpisem (7) skutečně definováno. Dále pro $y = {}_\beta t^u_\alpha x$ a každé $z = {}_\vartheta t^v_\beta y$ existuje $w \in U$ takové, že platí $z = {}_\vartheta t^w_\alpha x$. Odtud plyne

$$V(y, \beta) = \sup \{\|{}_\vartheta t^u_\beta y\| : u \in U,\ \beta \leqq \vartheta \in R\} \leqq$$
$$\leqq \sup \{\|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| : u \in U,\ \alpha \leqq \vartheta \in R\} = V(x, \alpha)\,,$$

takže V je ljapunovskou funkcí.

Ad(ii): Zřejmě platí

$$\|x\| \in \{\|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| : u \in U,\ \alpha \leqq \vartheta \in R\}\,,$$

takže $\|x\| \leqq V(x, \alpha)$.

Nechť existují parciální zobrazení (6) s vlastnostmi (i) a (ii). Definujme zobrazení $\varphi : E \to R^+$ tak, aby byl splněn vztah

$$a\left(\frac{\delta}{\|x\|}\,\varphi(x, \alpha)\right) \geqq V\left(\frac{\delta}{\|x\|}\,x, \alpha\right)$$

a ukažme, že φ splňuje (1). Nechť jsou dány $(\vartheta. x, \alpha) \in D$, $(x, \alpha) \in E$, $u \in U$. Pak pro

$$\left({}_\vartheta t^u_\alpha \frac{\delta}{\|x\|}\,x, \vartheta\right) \in \operatorname{domain} V$$

platí

$$a\left(\left\|{}_\vartheta t^u_\alpha \frac{\delta}{\|x\|}\,x\right\|\right) \leqq V\left({}_\vartheta t^u_\alpha \frac{\delta}{\|x\|}\,x, \vartheta\right) \leqq V\left(\frac{\delta}{\|x\|}\,x, \alpha\right) \leqq a\left(\frac{\delta}{\|x\|}\,\varphi(x, \alpha)\right),$$

takže $\|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| \leqq \varphi(x, \alpha)$. Je-li

$$\left\|{}_\vartheta t^u_\alpha \frac{\delta}{\|x\|}\,x\right\| < \delta\,,$$

pak $\|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| < \|x\| \leqq \varphi(x, \alpha)$. Je tedy $\{t^u : u \in U\}$ na E omezený vzhledem k m.

5. Důsledek. *Nechť $\{t^u : u \in U\}$ je stacionární lineární regulovaný tok na P nad $R \times U$. Nechť pro každou trojici $u \in U$, $\alpha \in R$, $\beta \in R$, $\alpha \leqq \beta$ a libovolnou lineární invariantní množinu $A \subset P$ platí ${}_\beta t^u_\alpha A = A$. Nechť pro každé $u \in U$ je tok t^u na*

$(P - \{o\}) \times R$ *omezený vzhledem k množině m. Potom existují zobrazení* $V: (P - \{o\}) \times R \to R^+$, *zobrazení* $a: R^+ \to R^+$, a *rostoucí*, $a(v) \to +\infty$ *pro* $v \to +\infty$, *s následujícími vlastnostmi:*

(i) V *je ljapunovská funkce,*

(ii) $(x, \alpha) \in \operatorname{domain} V \Rightarrow a(\|x\|) \leqq V(x, \alpha)$.

Důkaz vyplývá z první části důkazu předcházející věty a z důkazu věty 2.2 práce [1].

6. Věta. *Lineární regulovaný tok* $\{t^u : u \in U\}$ *je na* E *stejně omezený vzhledem k množině* m, *právě když existují*

(9) *konstanta* $\delta \in R^+$, *parciální zobrazení* $V: E \to R^+$, *parciální zobrazení* $a: R^+ \to R^+$, a *rostoucí*, $a(\omega) \to +\infty$ *pro* $\omega \to +\infty$ *a parciální zobrazení* $\zeta_0 : \mathscr{R} \times R^+ \to R^+$

s následujícími vlastnostmi:

(i) V *je ljapunovská funkce s* $\operatorname{domain} V = \{(x, \alpha) \in E : \|x\| \geqq \delta\}$,

(ii) $(x, \alpha) \in \operatorname{domain} V \Rightarrow a(\|x\|) \leqq V(x, \alpha)$,

(iii) $(x, \alpha) \in \operatorname{domain} V$, $\|x\| \leqq \omega \Rightarrow V(x, \alpha) \leqq \zeta_0(\alpha, \omega)$.

Důkaz. Nechť $\{t^u : u \in U\}$ je na E stejně omezený vzhledem k m. Zvolme $\delta \in R^+$ a definujme parciální zobrazení $V: E \to R^+$ vztahem (7), parciální zobrazení $a: R^+ \to R^+$ předpisem (8) a

$$\zeta_0 : \mathscr{R} \times R^+ \to R^+ : \zeta_0(\alpha, \omega) = \zeta(\alpha, \omega)\,. \tag{10}$$

Nyní dokážeme, že V, a a (10) mají vlastnosti (i), (ii), (iii). Parciální zobrazení V a a mají zřejmě podle 4. Ad (i), 4. Ad (ii) vlastnosti (i) a (ii). Z (2) pak plyne, že V je předpisem (7) skutečně definováno a má vlastnost (iii).

Nechť existují parciální zobrazení (9) s vlastnostmi (i), (ii) a (iii). Definujme zobrazení $\zeta : \mathscr{R} \times R^+ \to R^+$ tak, aby byl splněn vztah

$$a\left(\frac{\delta}{\omega}\zeta(\alpha, \omega)\right) \geqq \zeta_0(\alpha, \delta)$$

a ukažme, že ζ splňuje (2). Nechť jsou dány $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $(x, \alpha) \in E$, $\|x\| \leqq \omega$, $u \in U$. Pak pro

$$\left({}_{\vartheta}t^u_\alpha \frac{\delta}{\omega} x, \vartheta\right) \in \operatorname{domain} V$$

platí

$$a\left(\left\|{}_{\vartheta}t^u_\alpha \frac{\delta}{\omega} x\right\|\right) \leqq a\left(\left\|{}_{\vartheta}t^u_\alpha \frac{\delta}{\|x\|} x\right\|\right) \leqq V\left({}_{\vartheta}t^u_\alpha \frac{\delta}{\|x\|} x, \vartheta\right) \leqq$$

$$\leqq V\left(\frac{\delta}{\|x\|} x, \alpha\right) \leqq \zeta_0(\alpha, \delta) \leqq a\left(\frac{\delta}{\omega}\zeta(\alpha, \omega)\right),$$

takže $\|_\vartheta t^u_\alpha x\| \leqq \zeta(\alpha, \omega)$. Je-li

$$\left\|_\vartheta t^u_\alpha \frac{\delta}{\omega} x\right\| < \delta ,$$

pak $\|_\vartheta t^u_\alpha x\| < \omega \leqq \zeta(\alpha, \omega)$. Je tedy $\{t^u : u \in U\}$ na E stejně omezený vzhledem k m.

7. Důsledek. *Nechť $\{t^u : u \in U\}$ je lokální lineární regulovaný tok na P^n nad $R \times U$, kde P^n je n-rozměrný lineární normovaný prostor. Nechť pro každé $u \in U$ je tok t^u na $(P^n - \{o\}) \times R$ omezený vzhledem k množině m. Potom existují konstanta $\sigma \in R$, ljapunovská funkce $V : (P^n - \{o\}) \times (\langle\sigma, +\infty) \cap R) \to R^+$ a zobrazení $a : R^+ \to R^+$, a rostoucí, $a(\omega) \to +\infty$ pro $\omega \to +\infty$, $\zeta_0 : (\langle\sigma, +\infty) \cap R) \times R^+ \to \to R^+$ takové, že platí* 6(ii), 6(iii).

Důkaz vyplývá z věty 2.7 práce [1] a z první části důkazu předcházející věty.

8. Věta. *Lineární regulovaný tok $\{t^u : u \in U\}$ je na E stejnoměrně omezený vzhledem k množině m, právě když existují*

(11) *konstanta $\delta \in R^+$, parciální zobrazení $V : E \to R^+$, parciální zobrazení $a : R^+ \to R^+$, a rostoucí, $a(\psi) \to +\infty$ pro $\psi \to +\infty$ a parciální zobrazení $\zeta_0 : R^+ \to R^+$*

s následujícími vlastnostmi:

(i) *V je ljapunovská funkce s* domain $V = \{(x, \alpha) \in E : \|x\| \geqq \delta\}$,

(ii) $(x, \alpha) \in$ domain $V \Rightarrow a(\|x\|) \leqq V(x, \alpha) \leqq \zeta_0(\|x\|)$.

Věta vyplývá z důkazu věty 6 a z toho, že zobrazení ζ v (3) a parciální zobrazení ζ_0 v (11) nezávisí na α.

9. Důsledek. *Nechť jsou splněny předpoklady důsledku 7 a nechť $\{t^u : u \in U\}$ je stacionární. Potom existují*

(12) *zobrazení $V : (P^n - \{o\}) \times R \to R^+$, zobrazení $a : R^+ \to R^+$, a rostoucí $a(\psi) \to +\infty$ pro $\psi \to +\infty$ a zobrazení $\zeta_0 : R^+ \to R^+$*

s následujícími vlastnostmi:

(i) *V je ljapunovská funkce,*

(ii) $(x, \alpha) \in$ domain $V \Rightarrow a(\|x\|) \leqq V(x, \alpha) \leqq \zeta_0(\|x\|)$.

Důkaz vyplývá z důsledku 2.8 práce [1], z první části důkazu věty 6 a z toho, že $\{t^u : u \in U\}$ je stacionární.

10. Věta. *Lineární regulovaný tok $\{t^u : u \in U\}$ je na E stejně asymptoticky omezený vzhledem k množině m, právě když existují parciální zobrazení* (9) *s vlastnostmi*

6(i), 6(ii), 6(iii), *konstanta* $\varkappa_0 \in R^+$ *a zobrazení* $\tau_0 : \mathscr{R} \times R^+ \to R^+$ *mající vlastnost*

(iv) $(x, \alpha) \in E$, $\|x\| \leqq \omega$, $\vartheta \geqq \alpha + \tau_0(\alpha, \omega)$, $u \in U$,
$({}_\vartheta t^u_\alpha x, \vartheta) \in \text{domain } V \Rightarrow V({}_\vartheta t^u_\alpha x, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Důkaz. Nechť $\{t^u : u \in U\}$ je na E stejně asymptoticky omezený vzhledem k m. Pak z věty 6 plyne, že existují parciální zobrazení (9) s vlastnostmi 6(i), 6(ii), 6(iii). Položme $\varkappa_0 = \varkappa$ a zobrazení $\tau_0 : \mathscr{R} \times R^+ \to R^+$ definujme předpisem $\tau_0(\alpha, \omega) = \tau(\alpha, \omega)$, kde $\varkappa$ a τ jsou z (4). Pak pro každé $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $(x, \alpha) \in E$, $\|x\| \leqq \omega$, $u \in U$, $\vartheta \geqq \alpha + \tau_0(\alpha, \omega)$ je $\|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| \leqq \varkappa_0$ a vzhledem k (7) také $V({}_\vartheta t^u_\alpha x, \vartheta) \leqq \varkappa_0$. Odtud plyne, že parciální zobrazení V má vlastnost (iv).

Nechť existují parciální zobrazení (9) s vlastnostmi 6(i), 6(ii), 6(iii), konstanta $\varkappa_0 \in R^+$ a zobrazení $\tau_0 : \mathscr{R} \times R^+ \to R^+$ mající vlastnost (iv). Z vlastností 6(i), 6(ii), 6(iii) vyplývá podle věty 6, že $\{t^u : u \in U\}$ je na E stejně omezený vzhledem k m. Definujme konstantu $\varkappa \geqq \delta$ tak, aby byl splněn vztah $a(\varkappa) \geqq \varkappa_0$ a za zobrazení τ zvolme τ_0. Ukažme nyní, že $\varkappa$ a τ splňují (4). Nechť jsou dány $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $(x, \alpha) \in E$, $\|x\| \leqq \omega$, $\vartheta \geqq \alpha + \tau(\alpha, \omega)$, $u \in U$. Pak pro $({}_\vartheta t^u_\alpha x, \vartheta) \in \text{domain } V$ platí

$$a(\|{}_\vartheta t^u_\alpha x\|) \leqq V({}_\vartheta t^u_\alpha x, \vartheta) \leqq \varkappa_0 \leqq a(\varkappa),$$

takže $\|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| \leqq \varkappa$. Je tedy $\{t^u : u \in U\}$ na E stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

11. Důsledek. *Nechť* $\{t^u : u \in U\}$ *je globální lineární regulovaný tok na* P^n *nad* $R \times U$, *kde* P^n *je* n*-rozměrný lineární normovaný prostor. Nechť* $\{t^u : u \in U\}$ *je na* $E = (P^n - \{o\}) \times R$ *stejnoměrně omezený vzhledem k* m *a nechť pro každou trojici* $u \in U$, $\alpha \in R$, $x \in P^n$ *je* $\lim\limits_{\vartheta \to +\infty} \|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| = 0$. *Potom existují ljapunovská funkce* $V : (P^n - \{o\}) \times R \to R^+$, *zobrazení* $a : R^+ \to R^+$, *a rostoucí*, $a(\psi) \to +\infty$ *pro* $\psi \to +\infty$ *a* $\zeta_0 : R^+ \to R^+$ *s vlastností* 8(ii), *konstanta* $\varkappa_0 \in R^+$ *a zobrazení* $\tau_0 : R \times R^+ \to R^+$ *mající vlastnost*:

$$(x, \alpha) \in \text{domain } V, \quad \|x\| \leqq \omega, \quad \vartheta \geqq \alpha + \tau_0(\alpha, \omega), \ \vartheta \in R,$$
$$u \in U \Rightarrow V({}_\vartheta t^u_\alpha x, \vartheta) \leqq \varkappa_0.$$

Důkaz vyplývá z věty 2.14 práce [1] a z prvních částí důkazů vět 8 a 10.

12. Věta. *Lineární regulovaný tok* $\{t^u : u \in U\}$ *je na* E *stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k množině* m, *právě když existují parciální zobrazení* (11) *s vlastnostmi* 8(i), 8(ii), *konstanta* $\varkappa_0 \in R^+$ *a zobrazení* $\tau_0 : R^+ \to R^+$ *mající vlastnost*

(iii) $(x, \alpha) \in E$, $\|x\| \leqq \psi$, $\vartheta \geqq \alpha + \tau_0(\psi)$, $u \in U$,
$({}_\vartheta t^u_\alpha x, \vartheta) \in \text{domain } V \Rightarrow V({}_\vartheta t^u_\alpha x, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Důkaz vyplývá z věty 8, důkazu věty 10 a z toho, že zobrazení τ a τ_0 nezávisí na α.

13. Důsledek. *Nechť jsou splněny předpoklady důsledku 11 a nechť* $\{t^u : u \in U\}$ *je stacionární. Potom existují zobrazení* (12) *s vlastnostmi* 9(i), 9(ii), *konstanta* $\varkappa_0 \in R^+$ *a zobrazení* $\tau_0 : R^+ \to R^+$ *mající vlastnost*

(iii) $(x, \alpha) \in \operatorname{domain} V,\ \|x\| \leqq \psi,\ \vartheta \geqq \alpha + \tau_0(\psi),\ \vartheta \in R,\ u \in U \Rightarrow V({}_\vartheta t^u_\alpha x, \vartheta) \leqq \varkappa_0.$

Důkaz vyplývá z důsledku 2.15 práce [1], z předcházející věty a z důsledku 9.

Literatura

[1] *F. Tumajer:* Vlastnosti stability a omezenosti lineárního regulovaného toku, Sborník VŠST v Liberci, 1972.

[2] *J. Kučera, I. Vrkoč:* Note on stability of a linear homogeneous control system, Čas. pro pěst. mat. *95*, 1970, 56—61

Adresa autora: 461 17 Liberec, Hálkova 5 (Vysoká škola strojní a textilní).

Summary

LIAPUNOV'S METHOD IN THE THEORY OF THE BOUNDEDNESS OF LINEAR CONTROL FLOWS

FRANTIŠEK TUMAJER, Liberec

The properties of the boundedness of the linear control flow which is an immediate generalization of the notion of the linear control system of differential equations which is studied in the paper by J. Kučera, I. Vrkoč: *Note on stability of a linear homogeneous control system* are studied. Various types of boundedness are characterized by means of Liapunov's functions. Furthermore, some sufficient conditions for certain types of the boundedness of the linear control flow with respect to a given set are given.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ON THE LINE GRAPH OF THE SQUARE AND THE SQUARE OF THE LINE GRAPH OF A CONNECTED GRAPH

LADISLAV NEBESKÝ, Praha

(Received April 4, 1972)

Let $G = (V, X)$ be a nontrivial connected graph with p points and q lines. The square of G is the graph (V, X') where $uv \in X'$ if and only if the distance between u and v in G is either 1 or 2. The line graph of G is the graph (X, Z) where $xy \in Z$ if and only if x and y are adjacent lines in G. The square of G and the line graph of G will be denoted by G^2 and $L(G)$, respectively. Consequently, the line graph of the square of G and the square of the line graph of G will be denoted by $L(G^2)$ and $(L(G))^2$, respectively. In the present paper we shall prove that if $p \geqq 3$, then $L(G^2)$ is hamiltonian, and that if $q \geqq 3$, then $(L(G))^2$ is hamiltonian. (For the terminology of graph theory, see HARARY [1]; for some results relative to the present paper, see [1], [2], and [3].)

Lemma 1. *Let G be a connected graph with $p \geqq 3$ points and such that it contains a point u of degree 1 and a point w of degree $p - 1$. If v is a point of G such that $u \neq v \neq w$, then there exists a spanning path in $L(G)$ joining the points uw and vw of $L(G)$.*

Proof. The case when $p = 3$ is obvious. Assume that $p = n \geqq 4$ and that for $p = n - 1$ the lemma is proved. The case when G is a star is simple. Assume that G is not a star. Then there is a point t of G such that t has degree at least 2 and $v \neq t \neq w$. By $v_1, \ldots, v_k$ we denote the points of G different from w and adjacent to t. Obviously, there is a spanning path S in $L(G - t)$ joining the points uw and vw. There is a point rs of $L(G - t)$ such that $(rs)(v_1w)$ is a line in S. It is evident that either $v_1 \in \{r, s\}$ or $w \in \{r, s\}$. If $v_1 \in \{r, s\}$, then by P we denote the path $(rs)(tv_1) \ldots \ldots (tv_k)(tw)(v_1w)$. If $w \in \{r, s\}$, then by P we denote the path $(rs)(tw)(tv_k) \ldots \ldots (tv_1)(v_1w)$. If in S we replace the line $(rs)(v_1w)$ by the path P, we obtain a spanning path in $L(G)$ joining the points uw and vw.

Theorem 1. *Let G be a connected graph with $p \geqq 3$ points. Then $L(G^2)$ is hamiltonian.*

Proof. The case when $p = 3$ is obvious. Assume that $p = n \geqq 4$ and that for $p = n - 1$ the theorem is proved. The case when $G = K_p$ is simple. Assume that $G \neq K_p$. Then there is a point w of G with degree not exceeding $p - 2$ and such that $G - w$ is connected. By d and d' we denote the distance in G and in $G - w$, respectively. By F we denote the graph with the points t of G such that $d(t, w) \leqq 2$, and with the lines $\bar{t}\bar{\bar{t}}$ such that either $w \in \{\bar{t}, \bar{\bar{t}}\}$ and $1 \leqq d(\bar{t}, \bar{\bar{t}}) \leqq 2$, or $\bar{t} \neq w \neq \bar{\bar{t}}$ and $d(\bar{t}, \bar{\bar{t}}) = 2 < d'(\bar{t}, \bar{\bar{t}})$. Notice that the graphs $(G - w)^2$ and F are line-disjoint and that x is a line in G^2 if and only if it is a line either in $(G - w)^2$ or in F. There are points u and v of G such that v is adjacent to w in G, u is adjacent to v in G and $d(u, w) = 2$. Obviously, u and v are points both in $(G - w)^2$ and in F, and u has degree 1 in F. By Lemma 1, there is a spanning path S_0 in $L(F)$ joining uw with vw. Similarly, there is a spanning path S_1 in $L(F)$ joining vw with uw. By the induction hypothesis, there exists a hamiltonian cycle H in $L((G - w)^2)$. Consider a point rs of $L((G - w)^2)$ such that $(rs)(uv)$ is a line in H. If $u \in \{r, s\}$, then by P we denote the path $(rs)\, S_0(uv)$; if $v \in \{r, s\}$, then by P we denote the path $(rs)\, S_1(uv)$. It is easy to see that if in H we replace the line $(rs)(uv)$ by P we obtain a hamiltonian cycle in $L(G^2)$.

Lemma 2. *Let T be any tree with $q \geqq 3$ lines. Then $(L(T))^2$ is hamiltonian.*

Proof. The case when $q = 3$ is obvious. Let $q = n \geqq 4$ and assume that for any q, $3 \leqq q < n$, the lemma is proved. The case when T is a path is simple. We shall assume that T is not a path. Then T contains distinct points $v_0, \ldots, v_k$ such that $1 \leqq k \leqq q - 2$, v_0 adj $v_1, \ldots, v_{k-1}$ adj v_k, v_0 has degree at least 3, v_k has degree 1, and if $0 < j < k$, then v_j has degree 2. By T_0 we denote the tree which we obtain from T by deleting the points $v_1, \ldots, v_k$. By $u_1, \ldots, u_i$ we denote the points which are adjacent to v_0 in T_0; obviously, $i \geqq 2$. There is a hamiltonian cycle H in $(L(T_0))^2$. It is easy to verify that H contains such a line xy of $(L(T_0))^2$ that x is incident with one of the points $u_1, \ldots, u_i$, and y is incident with v_0. By P we denote the path in $(L(T))^2$ such that if $k = 1$, then $P = x(v_0v_1)\, y$, and if $k \geqq 2$, then $P = x(v_0v_1)(v_2v_3) \ldots (v_{g-3}v_{g-2}) \cdot (v_{g-1}v_g)(v_hv_{h-1}) \ldots (v_2v_1)\, y$, where g is the greatest odd integer not exceeding k and h is the greatest even integer not exceeding k. If in H we replace xy by P, we obtain a hamiltonian cycle in $(L(T))^2$.

Theorem 2. *Let G be a connected graph with $q \geqq 3$ lines. Then $(L(G))^2$ is hamiltonian.*

Proof. Consider a spanning tree T_1 of G. Color the lines of T_1 in blue. Subdivide each uncolored line of G (if any) into two new lines and color one of them in blue and the other of them in yellow (the choice is arbitrary). By T_2 we denote the graph consisting of the blue lines. Obviously T_2 is a tree with at least 3 lines. It is easy to see that $L(T_2)$ is isomorphic to a spanning subgraph of $L(G)$. This implies that $(L(T_2))^2$ is isomorphic to a spanning subgraph of $(L(G))^2$. By Lemma 2, $(L(T_2))^2$ is hamiltonian. Hence the theorem follows.

References

[1] *F. Harary:* Graph Theory. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
[2] *W. S. Petroelje* and *C. E. Wall:* Graph-valued functions and hamiltonian graphs. Recent Trends in Graph Theory (M. Capobianco, J. B. Frechen, and M. Krolik, eds.), Lecture Notes in Mathematics 186. Springer-Verlag, Berlin 1971, pp. 211—213.
[3] *M. Sekanina:* On an ordering of the set of vertices of a connected graph. Spisy Přírod. fak. Univ. Brno, 1960/4, no. *412,* pp. 137—141.

Author's address: 116 38 Praha 1, nám. Krasnoarmějců 2 (Filosofická fakulta Karlovy university).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

AN APPLICATION OF HALLS' THEOREMS TO MATRICES

ANTONÍN VRBA, Praha

(Received July 10, 1972)

INTRODUCTION

It is the purpose of this paper to simplify proofs and to extend results of K. Čulík's paper [1] in which matrices which are singular (non-singular) together with all the matrices of the same combinatorial structure of zero elements are characterized. The well-known theorem of P. Hall concerning the existence of a system of distinct representatives of a system of sets and its quantitative refinement of M. Hall, Jr. are exploited.

PRELIMINARIES

Let $A = (a_{ik})$ be a matrix the elements of which belong to a given integral domain I of the characteristic h. Denote by $P(A)$ the class of all the matrices $B = (b_{ik})$ over I of the same size as A such that, for each pair of indices, $a_{ik} = 0$ if and only if $b_{ik} = 0$.

Let A be square. Then it is said to be absolutely singular if each matrix from $P(A)$ is singular. If $P(A)$ consists entirely of non-singular matrices then A is said to be absolutely non-singular. A is said to be pseudo-triangular if it arises from a triangular matrix with non-zero elements in the main diagonal by permutation of its rows and columns.

Let n be a positive integer. Denote $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Let A be an $n \times n$ matrix. Then for each permutation $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ of N the product $\prod_{i=1}^{n} a_{ip_i}$ is called a diagonal product of A. Let $r, c \in N$. Denote by A_{rc} the submatrix obtained from A by deleting the r-th row and the c-th column. Let $\emptyset \neq R \subseteq N$, $\emptyset \neq C \subseteq N$. Denote by A_{RC} the submatrix of A obtained from A by deleting the rows and columns with indices from $N - R$ and $N - C$ respectively. Thus $A = A_{NN}$, $A_{rc} = A_{N-\{r\},N-\{c\}}$.

Let $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ be a system of sets. An n-tuple $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ such that $s_i \in S_i$ for each $i \in N$ is usually called a system of distinct representatives of S. Denote the cardinality of a set Z by $|Z|$ and $t = \min_{i \in N} |S_i|$.

A system S possesses a system of distinct representatives if and only if $|\bigcup_{i\in K} S_i| \geqq$ $\geqq |K|$ *for each* $K \subseteqq N$. (P. Hall 1935.)

Assume a system S possessing a system of distinct representatives. If t is infinite then there exist at least t systems of distinct representatives of S. If t is finite and $t > n$ *then there exist at least* $t!/(t-n)!$ *systems of distinct representatives of S. For* $t \leqq n$ *there exist at least* $t!$ *systems of distinct representatives of S.* (M. Hall, Jr. 1948.)

Proofs of these well-known theorems are available e.g. in [2] or [3].

Given an $n \times n$ matrix A, denote by $S(A)$ the system $\{S_1(A), S_2(A), \ldots, S_n(A)$ where $S_i(A) = \{k \in N \mid a_{ik} \neq 0\}$. Evidently, systems of distinct representatives of $S(A)$ are in one-to-one correspondence with non-zero diagonal products of A Notice that $A_{RC} = 0$ if and only if $C \subseteqq N - \bigcup_{i\in R} S_i(A)$.

If $h = 2$ the concepts of absolute singularity (absolute non-singularity) and singularity (non-singularity) merge and so this case is not of considerable interest. Moreover, the considerations in what follows are not valid for $h = 2$. Thus assume henceforward $h \neq 2$.

COMBINATORIAL CHARACTERIZATIONS

The following properties of an $n \times n$ *matrix A are equivalent:*

1. *A is absolutely singular.*
2. *Each diagonal product of A is zero.*
3. *A contains a zero* $p \times q$ *submatrix such that* $p + q > n$.

Proof. $1 \to 2$. The case $n = 1$ being obvious, suppose that $n > 1$ and that the implication is true for $(n-1) \times (n-1)$ matrices. Let some diagonal product of A, say $\prod_{i=1}^{n} a_{ip_i}$, be non-zero. Then, according to the induction hypothesis, there exists $B \in P(A)$ such that $\det B_{np_n} \neq 0$. It is easy to see from the expansion of det B by the n-th row that non-zero elements of this row could have been chosen such that $\det B \neq 0$.

In the case $h = 0$ the following simpler proof is valid: If $\prod_{i=1}^{n} a_{ip_i} \neq 0$ then put $b_{ip_i} = 1$ for each $i \in N$ and $b_{ik} = 0$ or $b_{ik} = 2$ otherwise in such a way that $B =$ $= (b_{ik}) \in P(A)$. Evidently, det B is odd.

$2 \leftrightarrow 3$. (This equivalence is due to G. Frobenius or D. König.) Each diagonal product of A is zero if and only if the system $S(A)$ does not possess a system of distinct representatives. According to the theorem of P. Hall, this takes place if and only if $|\bigcup_{i\in K} S_i(A)| < |K|$ for some $K \subseteqq N$. Further, this is equivalent to the existence of

$\emptyset \neq K \subseteq N$ such that $N - \bigcup_{i \in K} S_i(A) \neq \emptyset$ and $|K| + |N - \bigcup_{i \in K} S_i(A)| > n$, the submatrix $A_{K, N - \bigcup_{i \in K} S_i(A)}$ being zero.

$2 \to 1$. If each diagonal product of A is zero then so is each diagonal product of each $B \in P(A)$, hence $\det B = 0$.

The following properties of a square matrix A are equivalent:

1. *A is absolutely non-singular.*
2. *Exactly one diagonal product of A is non-zero.*
3. *A is pseudo-triangular.*

Proof. Denote by n the order of A.

$1 \to 2$. The case $n = 1$ being obvious, suppose that $n > 1$ and that the implication is true for $(n-1) \times (n-1)$ matrices. If A is absolutely non-singular then there is a row of A containing exactly one non-zero element, say a_{ik}. (Otherwise it is easy to construct a matrix $B \in P(A)$ such that all its row sums are zero.) Then $\det A = \pm a_{ik} \det A_{ik}$, hence A_{ik} is absolutely non-singular and, by the induction hypothesis, exactly one diagonal product of A_{ik} is non-zero. It follows that A has exactly one diagonal product as well.

$2 \to 3$. The case $n = 1$ being obvious, suppose that $n > 1$ and that the implication is true for $(n-1) \times (n-1)$ matrices. Assertion 2 is equivalent to the fact that $S(A)$ possesses exactly one system of distinct representatives. According to the theorem of M. Hall, there exists $i \in N$ such that $S_i(A)$ consists of exactly one element, say k, i.e., a_{ik} is the only non-zero element of the i-th row of A. Exactly one diagonal product of A_{ik} being non-zero, A_{ik} is pseudo-triangular by the induction hypothesis. Accordingly, A is pseudo-triangular as well.

$3 \to 1$. Obvious.

ALGEBRAIC CHARACTERIZATIONS

Let $r < n$ be positive integers. Then the following properties of an $n \times n$ matrix are equivalent:

1. *A is absolutely non-singular.*
2. *For each $B \in P(A)$ there exist $\emptyset \neq R \subset N$, $\emptyset \neq C \subset N$, $|R| = |C|$ such that $\det B_{RC} \det B_{N-R,N-C} \neq 0$ and either $\det B_{RQ} \det B_{N-R,N-Q} = 0$ for each $Q \subset N$, $|Q| = |R|$, $Q \neq C$, or $\det B_{QC} \det B_{N-Q,N-C} = 0$ for each $Q \subset N$, $|Q| = |C|$, $Q \neq R$.*
3. *A arises by permutations of rows and columns from an A' such that for each matrix from $P(A')$ the product of its $r \times r$ minor by the complementary minor is non-zero if and only if these minors are principal.*

4. *A arises by permutations of rows and columns from an A' such that for each matrix from $P(A')$ the product of its proper minor by the complementary minor is non-zero if and only if these minors are principal.*

Proof. $1 \rightarrow 4$. A is pseudo-triangular according to the above combinatorial characterization. The triangular matrix A' with non-zero diagonal elements has the property 4.

$4 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 2$. Obvious.

$2 \rightarrow 1$. The Laplace expansion yields

$$\det B = \pm \det B_{RC} \det B_{N-R,N-C} \neq 0 \quad \text{for each} \quad B \in P(A) .$$

In [1], K. Čulík has conjectured that algebraic characterizations of the above type of absolutely non-singular matrices remain true even when the conditions concerning all the matrices from $P(A)$ $(P(A'))$ are restricted to the matrix $A(A')$ only. This is confirmed in the following special case.

Let $r < n$ be positive integers and A be a hermitian positive semi-definite (complex-valued) $n \times n$ matrix. Suppose that for each $R \subset N$, $C \subset N$, $|R| = |C| = r$ it holds $\det A_{RC} \det A_{N-R,N-C} \neq 0$ *if and only if $R = C$. Then A is diagonal.*

Proof. In the Hadamard inequality

$$\det A_{RR} \det A_{N-R,N-R} \geqq \det A ,$$

equality is attained for each $R \subset N$, $|R| = r$. Accordingly, the matrices $A_{R,N-R}$, $A_{N-R,R}$ are zero for each such R (v. [4]). Hence the off-diagonal elements of A are zero.

References

[1] *K. Čulík:* Абсолютный ранг квадратичной матрицы. Čas. pěst. mat. *85* (1960), 457–464.
[2] *M. Hall*, Jr.: Combinatorial theory (1967).
[3] *H. J. Ryser:* Combinatorial mathematics (1963).
[4] *Ф. Р. Гантмахер:* Теория матриц (1966).

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25, (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

AN INVERSION FORMULA, MATRIX FUNCTIONS, COMBINATORIAL IDENTITIES AND GRAPHS

ANTONÍN VRBA, Praha

(Received July 10, 1972)

INTRODUCTION

In the present paper an elementary proof is given of the combinatorial inversion formula (2.1) which can also be deduced from the Möbius inversion formula (cf. [1], [2]). The proof makes use of the properties of common matrix functions. Conversely, this formula is applied to obtain some expressions of these matrix functions in terms of each other; especially, the permanent is expressed in terms of the principal minors of the same matrix and vice versa. These formulae yield some combinatorial identities. Further, the close relationship between graphs and matrices makes it possible to express the number of hamiltonian circuits of a non-directed finite graph in terms of the principal minors of its incidence matrix.

I wish to thank Professor M. FIEDLER on whose suggestion these matters were dealt with.

1. PRELIMINARIES

Let M be a set. Denote by $M/M_1 \ldots M_k$ the partition of M into $M_1, \ldots, M_k$, i.e. the (non-ordered) k-tuple of non-void mutually disjoint sets $M_1, \ldots, M_k$ whose union is M. By $|M|$ denote the cardinality of M. Denote by $M//M_1 \ldots M_k$ the partition of M into $M_1, \ldots, M_k$ such that $|M_i| > 1$ for each $1 \leqq i \leqq k$. By $S(M)$ denote the family of all non-void subsets of M. Denote by $s(|M|, k)$ the number of partitions of M into k parts. This number is usually called the Stirling number of the second kind (v. [3]).

Let n be a positive integer. Denote $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Let $A = (a_{ik})$ be an $n \times n$ matrix. As usual, denote by det A the determinant of A and by per A the permanent $\sum \prod_{i=1}^{n} a_{ip_i}$ of A (summation is extended over all permutations $\{p_1, \ldots, p_n\}$ of N). Further, consider the matrix functions

$$\operatorname{cyd} A = (-1)^{n-1} \sum \prod_{i=1}^{n} a_{ip_i}$$

and

$$\operatorname{cyp} A = \sum \prod_{i=1}^{n} a_{ip_i},$$

where summations extend over all cyclic permutations $\{p_1, \ldots, p_n\}$ of N. Let $V \in S(N)$. Denote by $A(V)$ the principal submatrix obtained from A by deleting the rows and columns with indices from $N - V$. Thus, under this notation, $A = A(N)$, $a_{ii} = A(\{i\})$. Observe that there are the following connections between the above matrix functions:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} \sum_{N/M_1 \ldots M_k} \operatorname{cyd} A(M_1) \ldots \operatorname{cyd} A(M_k) \tag{1.1}$$

$$\operatorname{per} A = \sum_{k=1}^{n} \sum_{N/M_1 \ldots M_k} \operatorname{cyp} A(M_1) \ldots \operatorname{cyp} A(M_k) \tag{1.2}$$

They are based on the fact that each permutation is, roughly speaking, a composition of cycles.

Denote by I the $n \times n$ identity matrix and by J the $n \times n$ matrix each element of which is 1. The number of cyclic permutations of N being equal to $(n-1)!$, it holds $\operatorname{cyp} J = \operatorname{cyp} J - I = (n-1)!$ for $n > 1$. The number of permutations $\{p_1, \ldots, p_n\}$ of N such that $p_i \neq i$ for each $i \in N$ being $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k / k!$, it holds $\operatorname{per}(J - I) = d_n$. Obviously, $\det (J - I) = (-1)^{n-1}(n-1)$.

2. AN INVERSION FORMULA

(2.1) *Let N be a finite set. Let c, d be two function defined on $S(N)$ such that*

$$d(M) = \sum_{k=1}^{|M|} \sum_{M/M_1 \ldots M_k} c(M_1) \ldots c(M_k)$$

for each $M \in S(N)$. Then

$$c(M) = \sum_{k=1}^{|M|} (-1)^{k-1} (k-1)! \sum_{M/M_1 \ldots M_k} d(M_1) \ldots d(M_k)$$

for each $M \in S(N)$.

Proof. First of all, prove that

$$c(M) = \sum_{k=1}^{|M|} q_k \sum_{M/M_1 \ldots M_k} d(M_1) \ldots d(M_k) \tag{$*$}$$

for each $M \in S(N)$, the coefficients q_k satisfying the recurrence

$$q_1 = 1$$

$$q_k = -\sum_{s=2}^{k} \sum_{\{1\dots k\}/V_1\dots V_s} q_{|V_1|} \dots q_{|V_s|} \quad \text{for} \quad 1 < k \leqq |N| .$$

The case $|M| = 1$ being obvious, suppose that $1 < |M| \leqq |N|$ and that the last statement is true for each M' such that $|M'| < |M|$. It follows

$$c(M) = d(M) - \sum_{k=2}^{|M|} \sum_{M/M_1\dots M_k} c(M_1) \dots c(M_k) =$$

$$= d(M) - \sum_{k=2}^{|M|} \sum_{M/M_1\dots M_k} \Big(\sum_{s=1}^{|M_1|} q_s \sum_{M_1/V_1\dots V_s} d(V_1) \dots d(V_s)\Big) \dots$$

$$\dots \Big(\sum_{s=1}^{|M_k|} q_s \sum_{M_k/V_1\dots V_s} d(V_1) \dots d(V_s)\Big) .$$

Further,

$$c(M) = d(M) - \sum_{k=2}^{|M|} \sum_{s=2}^{k} \sum_{\{1\dots k\}/V_1\dots V_s} q_{|V_1|} \dots q_{|V_s|} \sum_{M/M_1\dots M_k} d(M_1) \dots d(M_k) ,$$

which completes the first part of the proof. Thus the coefficients q_i in $(*)$ are independent of M.

To compute them, notice that according to (1.1), the relation $(*)$ is true for the functions $c(V) = \operatorname{cyd} A(V)$ and $d(V) = \det A(V)$ for each $n \times n$ matrix A. The substitution $A = J$ yields $q_{|M|} = (-1)^{|M|-1}(|M| - 1)!$ for each $M \in S(N)$.

(2.2) *Let N be the a finite set. Let d, p be two functions defined on $S(N)$ such that*

$$\sum_{k=1}^{|M|}(-1)^{k-1}(k-1)! \sum_{M/M_1\dots M_k} d(M_1) \dots d(M_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{|M|}(-1)^{|M|-k}(k-1)! \sum_{M/M_1\dots M_k} p(M_1) \dots p(M_k)$$

for each $M \in S(N)$. Then

$$p(M) = \sum_{k=1}^{|M|}(-1)^{|M|-k} k! \sum_{M/M_1\dots M_k} d(M_1) \dots d(M_k)$$

for each $M \in S(N)$.

Proof. First of all, prove that

$$(**) \qquad p(M) = \sum_{k=1}^{|M|}(-1)^{|M|-k} r_k \sum_{M/M_1\dots M_k} d(M_1) \dots d(M_k)$$

for each $M \in S(N)$, the coefficients r_k satisfying the recurrence

$$r_1 = 1$$

$$r_k = (k-1)! + \sum_{s=2}^{k} (-1)^s (s-1)! \sum_{\{1\ldots k\}/V_1\ldots V_s} r_{|V_1|} \ldots r_{|V_s|} \quad \text{for} \quad 1 < k \leqq |N|.$$

The case $|M| = 1$ being obvious, suppose that $1 < |M| \leqq |N|$ and that the last statement is true for each M' such that $|M'| < |M|$. It follows

$$p(M) = \sum_{k=1}^{|M|} (-1)^{|M|-k} (k-1)! \sum_{M/M_1\ldots M_k} d(M_1) \ldots d(M_k) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{|M|} (-1)^k (k-1)! \sum_{M/M_1\ldots M_k} p(M_1) \ldots p(M_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{|M|} (-1)^{|M|-k} (k-1)! \sum_{M/M_1\ldots M_k} d(M_1) \ldots d(M_k) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{|M|} (-1)^k (k-1)! \sum_{M/M_1\ldots M_k} \Big(\sum_{s=1}^{|M_1|} (-1)^{|M_1|-s} r_s \sum_{M_1/V_1\ldots V_s} d(V_1) \ldots d(V_s)\Big) \ldots$$

$$\ldots \Big(\sum_{s=1}^{|M_k|} (-1)^{|M_k|-s} r_s \sum_{M_k/V_1\ldots V_s} d(V_1) \ldots d(V_s)\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{|M|} (-1)^{|M|-k} \Big((k-1)! + \sum_{s=2}^{k} (-1)^s (s-1)! \sum_{\{1\ldots k\}/V_1\ldots V_s} r_{|V_1|} \ldots$$

$$\ldots r_{|V_s|}\Big) \sum_{M/M_1\ldots M_k} d(M_1) \ldots d(M_k)$$

which completes the first part of the proof. Thus the coefficients r_i in (**) are independent of M.

To compute them, notice that according to (1.1) and (1.2), the relation (*) is true for the functions $c(V) = \operatorname{cyd} A(V)$, $d(V) = \det A(V)$ as well as for the functions $c(V) = \operatorname{cyp} A(V)$, $d(V) = \operatorname{per} A(V)$ for each $n \times n$ matrix A. Further, according to (2.1), the relation (**) is true for the functions $d(V) = \det A(V)$, $p(V) = \operatorname{per} A(V)$. The substitution $A = J$ yields $r_{|M|} = |M|!$ for each $M \in S(N)$.

3. MATRIX FUNCTIONS

Besides of and owing to (1.1) and (1.2), there are the following connections between the functions of an arbitrary $n \times n$ matrix A. They are an easy consequence of the results of the preceding section.

(3.1) $$\operatorname{cyd} A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (k-1)! \sum_{N/M_1\ldots M_k} \det A(M_1) \ldots \det A(M_k)$$

$$\text{(3.2)} \qquad \operatorname{cyp} A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (k-1)! \sum_{N/M_1 \dots M_k} \operatorname{per} A(M_1) \dots \operatorname{per} A(M_k)$$

$$\text{(3.3)} \qquad \det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k! \sum_{N/M_1 \dots M_k} \operatorname{per} A(M_1) \dots \operatorname{per} A(M_k)$$

$$\text{(3.4)} \qquad \operatorname{per} A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k! \sum_{N/M_1 \dots M_k} \det A(M_1) \dots \det A(M_k) .$$

4. COMBINATORIAL IDENTITIES

The substitution of the matrices I, J and $J - I$ into (1.1), (1.2), (3.1)–(3.4) yields the following combinatorial identities. Many of them can be, of course, rewritten and proved in a more natural way.

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{N/M_1 \dots M_k} (|M_1| - 1)! \dots (|M_k| - 1)! = 0 \quad (n > 1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{N/M_1 \dots M_k} (|M_1| - 1)! \dots (|M_k| - 1)! = n!$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{N//M_1 \dots M_k} (|M_1| - 1)! \dots (|M_k| - 1)! = n - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{N//M_1 \dots M_k} (|M_1| - 1)! \dots (|M_k| - 1)! = d_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k (k-1)!\, s(n, k) = 0 \quad (n > 1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (k-1)! \sum_{N/M_1 \dots M_k} |M_1|! \dots |M_k|! = (n-1)!$$

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)! \sum_{N/M_1 \dots M_k} (|M_1| - 1) \dots (|M_k| - 1) = (n-1)! \quad (n > 1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (k-1)! \sum_{N/M_1 \dots M_k} d_{|M_1|} \dots d_{|M_k|} = (n-1)! \quad (n > 1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k!\, s(n, k) = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k! \sum_{N/M_1 \dots M_k} |M_1|! \dots |M_k|! = 0 \quad (n > 1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k! \sum_{N/M_1 \dots M_k} (|M_1| - 1) \dots (|M_k| - 1) = d_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k! \sum_{N/M_1 \dots M_k} d_{|M_1|} \dots d_{|M_k|} = n - 1 .$$

5. GRAPHS

Let G be a finite non-directed graph of n vertices. Having chosen a fixed ordering of its vertices, assign to G an $n \times n$ matrix $A_G = (a_{ik})$ such that $a_{ik} = 1$ if G contains an edge between the i-th and the k-th vertices, $a_{ik} = 0$ otherwise. This matrix is usually called the incidence matrix of G.

(5.1) *Let G be a finite non-directed graph of n vertices and A_G its incidence matrix. Then the number of hamiltonian circuits of G is equal to*

$$\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}(k-1)! \sum_{N/M_1\ldots M_k} \det A_G(M_1)\ldots\det A_G(M_k)\,.$$

Proof. Let G' be a directed graph obtained from G by replacing each (non-directed) edge of G by a pair of oppositely directed edges. Evidently, cyp A_G coincides with the number of cycles of the length n in G'. Pairs of oppositely oriented cycles of G' are in one-to-one correspondence with hamiltonian circuits of G. The required expression is obtained by combining this with (3.1).

(5.2) *Let G be a finite non-directed graph of n vertices and A_G its incidence matrix. Let $i, j \in N$, $i \neq j$. Denote by A'_G the matrix obtained from A_G by deleting the i-th row and the j-th column. Then the number of hamiltonian paths between the i-th and the j-th vertices of G is equal to*

$$\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+i+j-k}(k-1)!\sum \det A'_G(M_1)\det A_G(M_2)\ldots\det A_G(M_k)$$

where summation extends over all the partitions $M_1, \ldots, M_k$ of N such that $i, j \in M_1$.

Proof. Differentiate (3.1) with respect to a_{ij}. The obtained formula implies the required result similarly as (3.1) implies (5.1).

References

[1] *G. C. Rota:* On the foundations of combinatorial theory I. Zeit. für Wahr. *2* (1964), 340—368.

[2] *C. Berge:* Principles de combinatoire (1968).

[3] *J. Riordan:* An introduction to combinatorial analysis (1958).

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25, (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ON POWERS OF NON-NEGATIVE MATRICES

ANTONÍN VRBA, Praha

(Received July 10, 1972)

1. INTRODUCTION

Denote by $p(A)$ the number of positive elements of a matrix A. Let A be square non-negative. Then, obviously, the behaviour of the sequence $\{p(A^r)\}$ is fully determined by the combinatorial structure of the positive elements of A. In the paper [1], Z. ŠIDÁK has noticed that this sequence is not necessarily non-decreasing even when A is primitive. Further, the following theorem was deduced there:

Let A be an irreducible non-negative matrix containing at most one zero element in its main diagonal. Then $p(B) \leqq p(AB)$ for each non-negative matrix B of the same size as A and, consequently, the sequence $\{p(A^r)\}$ is non-decreasing.

It is the purpose of this note to strengthen the quoted results.

2. PRELIMINARIES

Let $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$ be matrices of the same size. Write $A \subseteqq B$ if for each pair of indices $b_{ik} = 0$ implies $a_{ik} = 0$. Let A be square non-negative. If $A^r \subseteqq A^{r+1}$ for each positive integer r then the sequence of matrices $\{A^r\}$ is said to be non-decreasing, the sequence of integers $\{p(A^r)\}$ being obviously non-decreasing.

Let $A = (a_{ij})$ be an $n \times n$ matrix. For each permutation $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ of $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ the product $\prod_{i=1}^{n} a_{ip_i}$ is called a diagonal product of A. The well known Frobenius-König theorem states that all diagonal products of A are zero if and only if A contains an $p \times q$ zero submatrix such that $p + q > n$ (v. [2]).

Given an $n \times n$ matrix $A = (a_{ij})$, denote by $G(A)$ the directed graph consisting of vertices $\{1, 2, \ldots, n\}$ and edges $\{i, k\}$ for each $a_{ik} \neq 0$. This graph is frequently used to describe combinatorial properties of A. A sequence $\{v, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{l-1}, w\}$ of edges of $G(A)$ is called a connection from v to w of the length l. Denote $A^r = (a_{ik}^{(r)})$. Notice that if A is non-negative then there exists a connection from v to w of the length l in $G(A)$ if and only if $a_{vw}^{(l)} > 0$.

3.

Let A be a non-negative square matrix. If A contains at most one zero element in the main diagonal then the sequence $\{A^r\}$ is non-decreasing.

Proof. Denote by n the order of A. The case $n = 1$ being obvious, suppose $n > 1$. Let r be a positive integer. $AA^r = A^rA$ implies

$$a_{ik}^{(r+1)} = a_{ii}a_{ik}^{(r)} + \sum_{j \neq i} a_{ij}a_{jk}^{(r)} = a_{ik}^{(r)}a_{kk} + \sum_{j \neq k} a_{ij}^{(r)}a_{jk}$$

for each $i, k \in N$.

Suppose first either $i \neq k$ or $a_{ii} > 0$. Then the above equation yields that $a_{ik}^{(r)} > 0$ implies $a_{ik}^{(r+1)} > 0$.

Suppose now $a_{ii} = 0$, $a_{ii}^{(r)} > 0$. Then there is a connection c from i to i of length r in $G(A)$. $G(A)$ does not contain an edge $\{i, i\}$ and so in c there is a vertex $j \neq i$. According to the assumption, $\{j, j\}$ is in $G(A)$. Hence, there is a connection from i to i of length $r + 1$, thus $a_{ii}^{(r+1)} > 0$ which completes the proof.

Let A be a non-negative square matrix. Then $p(B) \leqq p(AB)$ for each non-negative matrix B of the same size as A if and only if A possesses a non-zero diagonal product.

Proof. Denote by n the order of A. Suppose $\prod_{i=1}^{n} a_{ip_i} > 0$. Then, obviously, the i-th row of AB contains at least as many positive elements as the p_i-th row of B does, for each $i \in N$.

Suppose that all the diagonal products of A are zero. According to the Frobenius-König theorem, there exist permutation matrices R, S such that RAS contains a $p \times q$ zero submatrix in the lower left corner and $p + q > n$. Choose an integer t, $1 \leqq t \leqq n$ and an $n \times n$ matrix C the elements of which are positive except the $(n - q) \times t$ zero submatrix in the lower left corner. Put $B = SC$. It holds $p(B) = p(C) = n^2 - (n - q)\,t$ and $p(AB) = p(RAB) \leqq n^2 - pt$, as $RAB = RASS^{-1}B = RASC$ contains the $p \times t$ zero submatrix in the left down corner. Accordingly, $p(B) - p(AB) \geqq t(p + q - n) > 0$ which completes the proof.

As an immediate consequence the following corollary is obtained.

Let A be a square non-negative matrix possessing a non-zero diagonal product. Then the sequence $\{p(A^r)\}$ is non-decreasing.

References

[1] *Z. Šidák:* O počtu kladných prvků v mocninách nezáporné matice. Čas. pěst. mat. *89* (1964), 28—30.

[2] *A. Vrba:* An application of Halls' theorems to matrices. Čas. pěst. mat. *98* (1973), 288—291.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25, (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ÜBER GEWISSE EIGENSCHAFTEN DER OPTISCHEN GLEICHUNG

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Eingegangen am 4. October 1972)

In diesem Artikel versteht man unter dem Begriff Zahl (wenn ausdrücklich nicht etwas anderes vorausgesetzt wird) immer natürliche Zahlen. Es werden für $n \geqq 2$ folgende Symbole benutzt:

$$P(x) = \prod_{j=1}^{n} x_j\,; \quad M(x) = [x_1, x_2, \ldots, x_n]\,; \quad D(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,;$$

$$S(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j\,.$$

Im Artikel [3] wurde die Formel $M(x) = D(x)\,M(M(x)/x)$ abgeleitet und bei Lösung der Gleichung $S(x) = y\,M(x)$ benutzt. Dazu hat Herr ANDRZEJ MĄKOWSKI (Warszawa) den Autor aufmerksam gemacht, dass diese Formel bekannt war (s. [1], [2]).

In dieser Abhandlung werden mittels ähnlicher Formeln, die ganz einfach und wahrscheinlich auch schon bekannt sind, Lösungen gewisser Gleichungen auf die Lösung der optischen Gleichung

(1) $$S\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

zurückgeführt.

Satz 1. *Für $n \geqq 2$ gelten die folgende Formeln:*

(2a) $$M\left(\frac{P(x)}{x}\right) = \frac{P(x)}{D(x)}\,;$$ (2b) $$D\left(\frac{P(x)}{x}\right) = \frac{P(x)}{M(x)}$$

(2c) $$M\left(\frac{M(x)}{x}\right) = \frac{M(x)}{D(x)}\,;$$ (2d) $$D\left(\frac{M(x)}{x}\right) = 1$$

(2e) $$M\left(\frac{x}{D(x)}\right) = \frac{M(x)}{D(x)}\,;$$ (2f) $$D\left(\frac{x}{D(x)}\right) = 1\,.$$

Beweis. Wir bestätigen die Formel (2a), der Beweis der übrigen ist analog.

Es sei $x_i = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha_{i,j}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, wo p_j untereinander verschiedene Primzahlen und $\alpha_{i,j}$ nichtnegative ganze Zahlen sind so, dass für jedes i wenigstens eine $\alpha_{i,j}$ positiv ist. Sodann ist

$$M\left(\frac{P(x)}{x}\right) = \prod_{j=1}^{k} \exp \{\operatorname{Max}_{i} [\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} - \alpha_{ij}] \ln p_j\} =$$
$$= \prod_{j=1}^{k} \exp \{[\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} - \operatorname{Min}_{i} \alpha_{ij}] \ln p_j\} = \frac{P(x)}{D(x)}.$$

Satz 2. *Wenn* (a) *eine beliebige Lösung der Gleichung* (1) *ist, so haben die Gleichungen in der Tab.* 1 *die dort angegebene Lösungen.*

Beweis. Wir bestätigen den Fall No 1, analog sind die Beweise aller übrigen und darum werden sie da nicht angeführt. Nach (1) ist $S(P(a)/a) = P(a)\, S(1/a) = P(a)$ und nach (2a) ist $D(a)\, M(P(a)/a) = D(a)\, (P(a)/D(a)) = P(a)$.

Hiemit ist bestätigt, dass die Zahlen

$$x_i = \frac{P(a)}{a_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,; \quad y = D(a)$$

eine Lösung der Gleichung $S(x) = y\, M(x)$ darstellen.

Satz 3. *Wenn* (a) *eine beliebige Lösung der Gleichung* (1) *ist, so bilden die Zahlen*

$$x_i = \frac{P(a)}{a_i^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

eine Lösung (*in natürlichen Zahlen*) *der Gleichung*

$$[S(\sqrt{x})]^{n-2} = P(\sqrt{x}).$$

Beweis. Die Zahlen x_i sind tatsächlich natürliche Zahlen. Wegen der Symmetrie genügt es den Beweis für $i = n$ anzugeben. Nach (1) ist

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{a_i} = a_1 a_2 \ldots a_n\,,$$

woraus sichtbar ist, dass $a_n \mid a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ gilt.

Weiter haben wir

$$\left[S\left(\frac{\sqrt{P(a)}}{a}\right)\right]^{n-2} = \left[\sqrt{(P(a))}\, S\left(\frac{1}{a}\right)\right]^{n-2} = [\sqrt{P(a)}]^{n-2}$$

Tab. 1

No	Gleichung	Lösung x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$	Lösung y	Lösung z
1	$S(x) = y\, M(x)$	$\frac{P(a)}{a_i}$	$D(a)$	—
2	$S(x) = y\, D(x)$	$\frac{P(a)}{a_i}$	$M(a)$	—
3	$S(x)\, D(x) = y\, M(x)$	$\frac{P(a)}{a_i}$	$\frac{P(a)\, D(a)}{M(a)}$	—
3	$S(x)\, D(x) = y\, M(x)$	$\frac{M(a)}{a_i}$	$D(a)$	—
4	$S(x)\, M(x) = y\, D(x)$	$\frac{P(a)}{a_i}$	$\frac{M(a)\, P(a)}{D(a)}$	—
4	$S(x)\, M(x) = y\, D(x)$	$\frac{M(a)}{a_i}$	$\frac{[M(a)]^2}{D(a)}$	—
5	$[S(x)]^{n-1} = P(x)$	$\frac{P(a)}{a_i}$	—	—
6	$z[S(x)]^{n-2}\, M(x) = P(x),\ n > 2$	$\frac{P(a)}{a_i}$	—	$D(a)$
7	$z[S(x)]^{n-2}\, D(x) = P(x),\ n > 2$	$\frac{P(a)}{a_i}$	—	$M(a)$
8	$z[S(x)]^{n-3}\, M(x)\, D(x) = P(x),\ n > 3$	$\frac{P(a)}{a_i}$	—	$M(a)\, D(a)$
9	$S(x) = y\, M(x)\, D(x)$	$\frac{P(a)}{a_i}$	$\frac{D(a)\, P(a)}{M(a)}$	—
9	$S(x) = y\, M(x)\, D(x)$	$\frac{M(a)}{a_i}$	$D(a)$	—
10	$z\, S(x) = y\, P(x)$	$\frac{M(a)}{a_i}$	$P(a)$	$[M(a)]^{n-1}$
11	$z\, S(x)\, M(x) = y\, P(x),\ n > 2$	$\frac{M(a)}{a_i}$	$P(a)$	$D(a)\, [M(a)]^{n-2}$

Tab. 1 *(Forsetzung)*

No	Gleichung	Lösung		
		x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$	y	z
12	$z\,S(x)\,P(x) = y\,M(x)$	$\dfrac{M(a)}{a_i}$	$D(a)\,[M(a)]^n$	$P(a)$
13	$z\,S(x)\,D(x) = y\,P(x)$	$\dfrac{M(a)}{a_i}$	$P(a)$	$[M(a)]^{n-1}$
14	$z\,S(x)\,P(x) = y\,D(x)$	$\dfrac{M(a)}{a_i}$	$[M(a)]^{n+1}$	$P(a)$
15	$z\,S\left(\dfrac{1}{x}\right) = y\,M(x)$	$\dfrac{a_i}{D(a)}$	$[D(a)]^2$	$M(a)$
16	$S\left(\dfrac{1}{x}\right) = y\,D(x)$	$\dfrac{a_i}{D(a)}$	$D(a)$	—
17	$S\left(\dfrac{1}{x}\right) M(x) = y\,D(x)$	$\dfrac{a_i}{D(a)}$	$M(a)$	—
18	$z\,S\left(\dfrac{1}{x}\right) D(x) = y\,M(x)$	$\dfrac{a_i}{D(a)}$	$[D(a)]^2$	$M(a)$
19	$z\,S\left(\dfrac{1}{x}\right) = y\,M(x)\,D(x)$	$\dfrac{a_i}{D(a)}$	$[D(a)]^2$	$M(a)$
20	$z\,S\left(\dfrac{1}{x}\right) = y\,P(x)$	$\dfrac{a_i}{D(a)}$	$[D(a)]^{n+1}$	$P(a)$
21	$z\,S\left(\dfrac{1}{x}\right) M(x) = y\,P(x)$	$\dfrac{a_i}{D(a)}$	$[D(a)]^n$	$\dfrac{P(a)}{M(a)}$
22	$z\,S\left(\dfrac{1}{x}\right) P(x) = y\,M(x), \quad n > 2$	$\dfrac{a_i}{D(a)}$	$P(a)$	$M(a)\,[D(a)]^{n-2}$
23	$z\,S\left(\dfrac{1}{x}\right) D(x) = y\,P(x)$	$\dfrac{a_i}{D(a)}$	$[D(a)]^{n+1}$	$P(a)$
24	$z\,S\left(\dfrac{1}{x}\right) P(x) = y\,D(x)$	$\dfrac{a_i}{D(a)}$	$P(a)$	$[D(a)]^{n-1}$

und ebenfalls auch

$$P\left(\frac{\sqrt{P(a)}}{a}\right) = \frac{[\sqrt{P(a)}]^n}{P(a)} = [\sqrt{P(a)}]^{n-2}.$$

Satz 4. *Wenn* (α) *die sogenannte extreme Lösung der Gleichung* (1) *ist, dann bilden die Zahlen*

$$x_i = \frac{\sqrt{P(\alpha)}}{\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

eine ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$[S(x)]^{n-2} = P(x).$$

Beweis. Es ist

$$\left[S\left(\frac{\sqrt{P(\alpha)}}{\alpha}\right)\right]^{n-2} = [\sqrt{P(\alpha)}]^{n-2}$$

und

$$P\left(\frac{\sqrt{P(\alpha)}}{\alpha}\right) = \frac{[\sqrt{P(\alpha)}]^n}{P(\alpha)} = [\sqrt{P(\alpha)}]^{n-2}$$

und somit ist die Gleichung befriedigt. Wie bekannt, hat die extreme Lösung der Gleichung (1) die Eigenschaft

$$\alpha_n = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$$

aus der hervorgeht, dass $\sqrt{P(\alpha)}/\alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ ganze Zahlen sind, weiter ist leicht zu erkennen, dass $x_n = 1$ ist. So ist der Beweis vollendet.

Mit den angegebenen Ergebnissen sind keinerfalls alle Möglichkeiten erschöpft. Die Lösungen der optischen Gleichung liefern in Verbindung mit den Formeln (2) sehr mannigfaltige Beziehungen.

Literatur

[1] *Stieltjes T. J.:* Sur la théorie des nombres. Annales de la fac. des Sciences de Toulouse, *4* (1890).

[2] *Kesaan Menon P.:* A generalization of the Relation $[m, n]\,(m, n) = mn$. The Mathematics Student 37 (1969), 194—195.

[3] *Bartoš P.:* O jednom zovšeobecnení číselnoteoretického vzťahu $[a_1, a_2] = a_1a_2/(a_1, a_2)$ a jeho použití. Časopis pro pěstování matematiky, Praha, *97* (1972), 96—98.

Anschrift des Verfassers: 801 00 Bratislava, Sibírska 9.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ON CONNECTED GRAPHS CONTAINING EXACTLY TWO POINTS OF THE SAME DEGREE

LADISLAV NEBESKÝ, Praha

(Received September 15, 1972)

Following BEHZAD and CHARTRAND [1], we shall say that a graph G with $p \geqq 2$ points is quasiperfect if it contains exactly two points v and w of the same degree. The points v and w will be called the exceptional points of G. (For basic notions of graph theory, see HARARY [2].)

By D_2 we shall denote a line. If p is an integer and $p \geqq 3$, then by D_p we shall denote the complement of a graph obtained from D_{p-1} by adding an isolated point. As it immediately follows from Theorem 2 (and from its proof) in [1], for any integer $p \geqq 2$ it holds that: (i) G is a connected quasiperfect graph with p points if and only if G is isomorphic to D_p; (ii) G is a disconnected quasiperfect graph with p points if and only if G is isomorphic to the complement $\bar{D}_p$ of the graph D_p; (iii) each exceptional point of D_p has degree $[p/2]$. (If x is a real number, then $[x]$ is the greatest integer n such that $n \leqq x$; similarly, $\{x\} = -[-x]$.)

Let p be any integer such that $p \geqq 2$. We shall investigate properties of the graph D_p.

Proposition. *D_p has $[p/2] . \{p/2\}$ lines.*

Theorem 1. *Let t and u be points of D_p having degree d and e, respectively. Then t and u are adjacent if and only if $d + e \geqq p$.*

Proof. The case $p = 2$ is obvious. Assume that $p = n \geqq 3$ and that for $p = n - 1$ the theorem is proved. Let $d \leqq e$.

The case when $e = p - 1$ is obvious. Assume that $e \leqq p - 2$; then t and u lie in D_{p-1}. The points t and u are adjacent in D_p if and only if they are not adjacent in D_{p-1}. The points t and u are not adjacent in D_{p-1} if and only if $(p - 1 - d) + (p - 1 - e) < p - 1$. Hence the theorem follows.

Corollary 1. *Let i be an integer, $1 \leqq i \leqq [p/2]$. By t_i and u_i we denote points of D_p*

with degree i and $p - i$, respectively, such that $t_{[p/2]} \neq u_{[p/2]}$. Then t_i and u_i are adjacent for any i and the set $\{t_1u_1, \ldots, t_{[p/2]}u_{[p/2]}\}$ is a maximum matching of D_p.

Theorem 2. *Let v be an exceptional point of D_p. If $p \geqq 3$, then $D_p - v$ is isomorphic to D_{p-1}.*

Proof. Let u be a point of D_p, $u \neq v$. By d and d' we denote the degree of u in D_p or in $D_p - v$, respectively. From Theorem 1 it follows that if $d < \{p/2\}$, then $d' = d$, and if $d \geqq \{p/2\}$, then $d' = d - 1$. This means that $D_p - v$ contains exactly two points of the same degree. As $\{p/2\} \geqq 2$, $D_p - v$ is connected.

Theorem 3. *Let $p \geqq 3$. The graph G obtained from D_p by identifying its exceptional points is isomorphic to D_{p-1}.*

Proof. Let v and w be the exceptional points of D_p and u be any point of D_p such that $v \neq u \neq w$. From Theorem 1 it follows that u is adjacent to v if and only if u is adjacent to w. This means that G is isomorphic to $D_p - v$. Hence the theorem follows.

Lemma. *Let m be a positive integer. Then D_p contains a subgraph isomorphic to K_m if and only if $m \leqq \{(p + 1)/2\}$.*

Proof. The cases when $p = 2, 3$ are obvious. Let $p = n \geqq 4$ and assume that for $p = n - 2$ the lemma is proved. If from D_p we delete simultaneously the point of degree 1 and the point of degree $p - 1$, we obtain D_{p-2}, which contains a subgraph isomorphic to K_m if and only if $m \leqq \{(p - 1)/2\}$. Obviously, $\{(p - 1)/2\} + 1 = \{(p + 1)/2\}$. Hence the lemma follows.

Corollary 2. *D_p is planar if and only if $p \leqq 7$.*

Theorem 4. *The chromatic number of D_p is $\{(p + 1)/2\}$.*

Proof. The case when $p = 2$ is obvious. Let $p = n > 3$ and assume that for $p = n - 1$ the theorem is proved. From the lemma it follows that $\{(p + 1)/2\} \leqq \chi(D_p)$. It is easy to see that $\chi(\bar{D}_p) = \chi(D_{p-1}) = \{p/2\}$. From one of the inequalities of NORDHAUS and GADDUM [3] it follows that $\chi(D_p) \leqq p + 1 - \chi(\bar{D}_p) = p + 1 - \{p/2\} = \{(p + 1)/2\}$. Hence the theorem follows.

References

[1] *M. Behzad* and *G. Chartrand:* No graph is perfect. Amer. Math. Monthly *74* (1967), 962—963.

[2] *F. Harary:* Graph Theory. Addison-Wesley, Reading 1969.

[3] *E. A. Nordhaus* and *J. W. Gaddum:* On the complementary graphs. Amer. Math. Monthly *63* (1956), 175—177.

Author's address: 116 38 Praha 1, nám. Krasnoarmějců 2 (Filosofická fakulta Karlovy university).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

EMBEDDING THE POLYTOMIC TREE INTO THE n-CUBE

IVAN HAVEL, PETR LIEBL, Praha

(Received October 13, 1972)

In the whole paper a "graph" is a nondirected, possibly infinite graph without loops and multiple edges, expressed as an ordered pair $\mathcal{G} = \langle V, E \rangle$, where V is the set of vertices and E is the set of edges, a subset of $V^{(2)}$, the set of all unordered pairs of elements of V. $\mathcal{G}' = \langle V', E' \rangle$ is said to be the subgraph of $\mathcal{G} = \langle V, E \rangle$ induced by V' iff $V' \subset V$, $E' = E \cap V'^{(2)}$. $\mathcal{G}' = \langle V', E' \rangle$ is said to be a partial subgraph of $\mathcal{G} = \langle V, E \rangle$ iff $V' \subset V$, $E' \subset E \cap V'^{(2)}$. (Cf [3].) By $]\,[$ we denote the post-office function.

Definition 1. Let S be a set, by 2^S denote as usual the set of all subsets of S. Put $E(S) = \{(A, B) \mid A \subset S, B \subset S, \text{card}\,(A \dot{-} B) = 1\}$. $(A \dot{-} B)$ denotes here the symmetric difference of A and B. By the S-cube we understand the graph $\mathcal{K}(S) = \langle 2^S, E(S) \rangle$.

Definition 2. By $\mathfrak{K}(S)$ denote the class of all graphs isomorphic to some partial subgraph of $\mathcal{K}(S)$. If $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, write $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{K}_n$. Put $\overline{\mathfrak{K}} = \{\mathcal{G} \mid \exists S, \mathcal{G} \in \mathfrak{K}(S)\}$. By $\mathfrak{K}$ denote the class of all graphs $\mathcal{G}$ such that for any finite partial subgraph $\mathcal{G}'$ of $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}' \in \overline{\mathfrak{K}}$.

Trivially, if $\mathcal{G} \in \mathfrak{K}(S)$ and $\mathcal{G}'$ is a partial subgraph of $\mathcal{G}$, then $\mathcal{G}' \in \mathfrak{K}(S)$.

Definition 3. Let $\mathcal{G} = \langle V, E \rangle$ be a graph, F a set. Assume there exists a mapping $\psi : E \to F$ such that

(i) if $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ is the sequence of edges of a finite open path in $\mathcal{G}$, then there is an element of F that appears an odd number of times in the sequence $(\psi(e_1), \psi(e_2), \ldots, \psi(e_r))$.

(ii) if $(f_1, f_2, \ldots, f_s)$ is the sequence of edges of a finite closed path in $\mathcal{G}$, then all the elements of F appear an even number (possibly null) of times in the sequence $(\psi(f_1), \psi(f_2), \ldots, \psi(f_s))$.

Then we call ψ a $\bar{C}$-valuation of $\mathscr{G}$. Let n be a natural number. If card $(\psi(E)) \leqq n$, we call ψ a C_n-valuation of $\mathscr{G}$.

Definition 4. By $\bar{\mathfrak{C}}$ denote the class of all graphs $\mathscr{G}$ such that there exists a $\bar{C}$-valuation of $\mathscr{G}$, by $\mathfrak{C}$ denote the class of all graphs $\mathscr{G}$ such that for any finite partial subgraph $\mathscr{G}'$ of $\mathscr{G}$, $\mathscr{G}' \in \bar{\mathfrak{C}}$. Let n be a natural number. By $\mathfrak{C}_n$ denote the class of all graphs $\mathscr{G}$ such that there exists a C_n-valuation of $\mathscr{G}$.

Remark 1. If $\mathscr{G} \in \bar{\mathfrak{C}}$ is finite, then for some n, $\mathscr{G} \in \mathfrak{C}_n$. Further, $\mathfrak{C}_n \subset \bar{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{C}$.

Theorem 1 in [2] asserts that

(a) $\mathfrak{K}_n \subset \mathfrak{C}_n$
(b) $\mathscr{G} \in \mathfrak{C}_n$ connected $\Rightarrow \mathscr{G} \in \mathfrak{K}_n$
(c) $\mathfrak{C} = \mathfrak{K}$.

Remark 2. Let $\mathscr{T}$ be an arbitrary tree. Then condition (ii) of Def. 3 is empty and moreover, putting $F = E$, ψ the identity map, we have $\mathscr{T} \in \bar{\mathfrak{C}}$ and hence $\mathscr{T} \in \mathfrak{K}$. Also, $\mathscr{T} \in \mathfrak{K}_n \Leftrightarrow \mathscr{T} \in \mathfrak{C}_n$.

In what remains, we shall be concerned with trees only, and with the problem to find to a tree $\mathscr{T}$ the smallest n such that $\mathscr{T} \in \mathfrak{K}_n$. We shall denote this n by dim $(\mathscr{T})$.

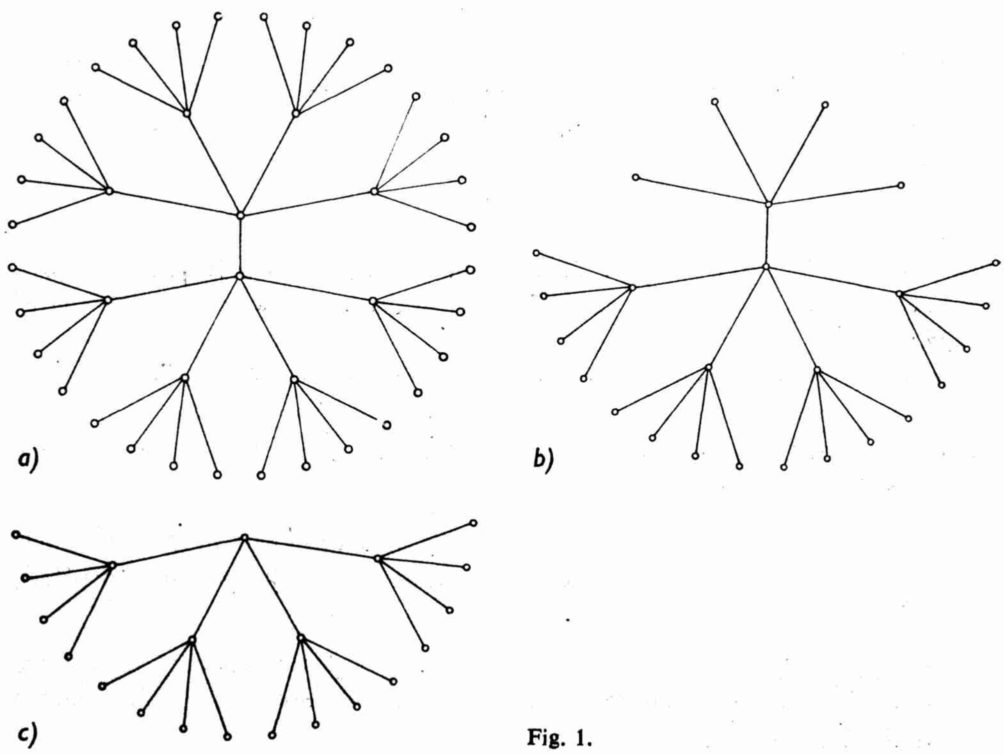

Fig. 1.

To study trees the vertices of which have their degree bounded from above by a given number, we introduce three infinite classes of trees, closely related to each other. $\mathscr{T}_l^{(k)}$, the "polytomic tree", is a straightforward generalization of the dichotomic tree $\mathscr{D}_l$ of [1]. $\mathscr{T}_l^{(k)}$ may be considered to be a star of k rays, each endpoint of a ray being again the center of a new k-star, and this procedure repeated l times. So, there are vertices of "level" 1 to $(l + 1)$, where the (single) vertex of level 1 has degree k, the vertices of the outermost level $(l + 1)$ have degree 1 and the remaining vertices have degree $(k + 1)$. ${}^\flat\mathscr{T}_l^{(k)}$ and ${}^\sharp\mathscr{T}_l^{(k)}$ arise from $\mathscr{T}_l^{(k)}$ if it is completed in such a way that all its vertices have either degree 1 or degree $(k + 1)$.

Definition 5. Let $k \geqq 2$ and $l \geqq 1$ be natural numbers. Define

$$\mathscr{T}_l^{(k)} = \langle V_l^{(k)}, E_l^{(k)} \rangle, \quad {}^\flat\mathscr{T}_l^{(k)} = \langle {}^\flat V_l^{(k)}, {}^\flat E_l^{(k)} \rangle, \quad {}^\sharp\mathscr{T}_l^{(k)} = \langle {}^\sharp V_l^{(k)}, {}^\sharp E_l^{(k)} \rangle$$

as follows:

Put

$$V_l^{(k)} = \{ v_j^{(i)} \mid 1 \leqq i \leqq l + 1,\ 1 \leqq j \leqq k^{i-1} \}$$
$${}^\flat V_l^{(k)} = \{ v_j^{(i)} \mid (1 \leqq i \leqq l + 1) \vee (-l \leqq i \leqq -1),\ 1 \leqq j \leqq k^{|i|-1} \}$$
$${}^\sharp V_l^{(k)} = \{ v_j^{(i)} \mid 1 \leqq |i| \leqq l + 1,\ 1 \leqq j \leqq k^{|i|-1} \}.$$

Further, for $v_j^{(i)} \in {}^\sharp V_l^{(k)}$, $v_{j'}^{(i')} \in {}^\sharp V_l^{(k)}$, $(v_j^{(i)}, v_{j'}^{(i')}) \in {}^\sharp E_l^{(k)} \Leftrightarrow (|i'| = |i| - 1) \,\&\, (j' =]j/k^2[\vee ((i = 1) \,\&\, (i' = -1))$. Denote $(v_1^{(1)}, v_1^{(-1)})$ by $e_1^{(0)}$ and further $(v_j^{(i)}, v_{j'}^{(i')}) \in E^{(k)}$ by $e_{j'}^{(i)}$, if $|i| < |i'|$. ${}^\flat\mathscr{T}_l^{(k)}$ resp. $\mathscr{T}_l^{(k)}$ are defined as the subgraphs of ${}^\sharp\mathscr{T}_l^{(k)}$ induced by ${}^\flat V_l^{(k)}$ resp. $V_l^{(k)}$.

Fig. 1a, b, c shows ${}^\sharp\mathscr{T}_2^{(4)}$, ${}^\flat\mathscr{T}_2^{(4)}$ and $\mathscr{T}_2^{(4)}$.

As is seen, ${}^\sharp\mathscr{T}_l^{(k)}$ consists of two trees $\mathscr{T}_l^{(k)}$ with their "roots" joined by a new edge whereas ${}^\flat\mathscr{T}_l^{(k)}$ arises in a similar manner from one $\mathscr{T}_l^{(k)}$ and one $\mathscr{T}_{l-1}^{(k)}$ (for $l \geqq 2$). As for the number of vertices, card ${}^\sharp V_l^{(k)} = 2(k^{l+1} - 1)/(k - 1)$, card ${}^\flat V_l^{(k)} = (k^{l+1} + k^l - 2)/(k - 1)$ and card $V_l^{(k)} = (k^{l+1} - 1)/(k - 1)$. In [1], $\mathscr{T}_l^{(2)}$ is denoted by $\mathscr{D}_l$. Theorem 3 of [1] asserts that for $l \geqq 2$, $\dim \mathscr{T}_l^{(2)} = l + 2$ ($\dim \mathscr{T}_1^{(2)} = 2$ being trivial). Another partial result of the general problem of $\dim \mathscr{T}_l^{(k)}$ is supplied by the following theorem. But first a

Remark 3. ${}^\sharp\mathscr{T}_l^{(k)} \in \mathfrak{K}_n \Rightarrow {}^\flat\mathscr{T}_l^{(k)} \in \mathfrak{K}_n \Rightarrow \mathscr{T}_l^{(k)} \in \mathfrak{K}_n \Rightarrow {}^\sharp\mathscr{T}_l^{(k)} \in \mathfrak{K}_{n+1}$. The first two implications being trivial, consider for the third the two constituent $\mathscr{T}_l^{(k)}$ of ${}^\sharp\mathscr{T}_l^{(k)}$ as having a C_n-valuation with the same F and the joining edge being assigned a new element f_{n+1}.

Theorem 1.

$$\dim ({}^\sharp\mathscr{T}_2^{(2p)}) = \dim ({}^\flat\mathscr{T}_2^{(2p)}) = \dim (\mathscr{T}_2^{(2p)}) = 3p + 1,$$
$$\dim ({}^\sharp\mathscr{T}_2^{(2p+1)}) = \dim ({}^\flat\mathscr{T}_2^{(2p+1)}) = 3p + 3,$$
$$\dim (\mathscr{T}_2^{(2p+1)}) = 3p + 2.$$

Proof. In view of Remark 3, it is sufficient to prove

$$^{\sharp}\mathcal{T}_2^{(2p)} \in \mathfrak{R}_{3p+1}\,, \quad \mathcal{T}_2^{(2p+1)} \in \mathfrak{R}_{3p+2}\,, \quad \mathcal{T}_2^{(2p)} \notin \mathfrak{R}_{3p}\,, \quad \mathcal{T}_2^{(2p+1)} \notin \mathfrak{R}_{3p+1}\,,$$
$$^{\flat}\mathcal{T}_2^{(2p+1)} \notin \mathfrak{R}_{3p+2}\,.$$

1. To construct a C_{3p+1}-valuation ψ of $^{\sharp}\mathcal{T}_2^{(2p)}$, put

$$F = \{a'_{p+1}, a'_{p+2}, \ldots, a'_{2p}, a_1, a_2, \ldots, a_{2p+1}\}\,.$$

Further define

$$(*) \qquad \begin{aligned} \psi(e_1^{(0)}) &= a_{2p+1}\,, \\ \psi(e_j^{(1)}) &= a_j \quad (1 \leqq j \leqq 2p)\,, \\ \psi(e_j^{(-1)}) &= a''_j \quad (1 \leqq j \leqq 2p)\,, \end{aligned}$$

where we write for short

$$a''_t = a_t\ (1 \leqq t \leqq p)\,, \quad a''_t = a'_t\ (p+1 \leqq t \leqq 2p)\,, \quad a''_{2p+1} = a_{2p+1}\,.$$

Instead of proceeding by defining explicitly $\psi(e_j^{(2)})$ and $\psi(e_j^{(-2)})$, observe that the edges $e_j^{(2)}$ and $e_j^{(-2)}$ are classified naturally into groups of $2p$ by the j of the $e_j^{(1)}$ they are adjacent to:

$$\begin{aligned} G_j^{(1)} &= \{e_t^{(2)} \mid 2p(j-1) + 1 \leqq t \leqq 2pj\}\,, \quad 1 \leqq j \leqq 2p\,, \\ G_j^{(-1)} &= \{e_t^{(-2)} \mid 2p(j-1) + 1 \leqq t \leqq 2pj\}\,, \quad 1 \leqq j \geqq 2p\,. \end{aligned}$$

Obviously a permutation of the valuation ψ inside one group is immaterial. So, we define merely a set of $2p$ values for each group putting

$$(**) \qquad \begin{aligned} \psi(G_j^{(1)}) &= \{a_t \mid j+1 \leqq t \leqq \min((j+p), (2p+1))\} \cup \\ &\cup \{a_t \mid 1 \leqq t \leqq j-p-1\} \cup \{a'_t \mid p+1 \leqq t \leqq 2p\}\,, \\ \psi(G_j^{(-1)}) &= \{a''_t \mid j+1 \leqq t \leqq \min((j+p), (2p+1))\} \cup \\ &\cup \{a''_t \mid 1 \leqq t \leqq j-p-1\} \cup \{a_t \mid p+1 \leqq t \leqq 2p\}\,. \end{aligned}$$

(One such valuation ψ is shown for $p = 2$ on Fig. 2, where for transparency we write 1 for a_1, 3′ for a'_3 etc.) (Observe that considering the valuation induced by ψ on $^{\flat}\mathcal{T}_2^{(2p)}$ and looking at $e_1^{(0)}$ as "$e_{2p+1}^{(1)}$" and at $\{e_j^{(-1)} \mid 1 \leqq j \leqq 2p\}$ as "$G_{2p+1}^{(1)}$", ψ on them meets the rules $(*)$ and $(**)$.)

Let us now show that ψ so defined is a C-valuation. For paths of odd length the condition (i) of Def. 3 holds trivially, so we concern ourselves only with paths of length 2 or 4 in $\mathcal{T}_2^{(2p)}$. The paths of length 2 being well valuated by inspection, assume there is a path $\boldsymbol{p}$ of length 4 such that two elements of F, say x and y, appear on it twice each. The center of any path of length 4 in $\mathcal{T}_2^{(2p)}$ is either in $\boldsymbol{v}_1^{(1)}$ or in $\boldsymbol{v}_1^{(-1)}$. Assume for $\boldsymbol{p}$ the former happens. Hence x and y must be both unprimed a's, say a_r and a_s.

So it must simultaneously be $a_r \in G_s^{(1)}$, $a_s \in G_r^{(1)}$, with possible $r = k + 1$ or $s = k + 1$. That however is impossible by definition of $\psi(G_j^{(1)})$. What concerns the case that the center of $\boldsymbol{p}$ is in $\mathfrak{v}_1^{(-1)}$, observe the symmetry in ψ which permits us to repeat the former argument with interchange of a_j and a'_j $(p + 1 \leqq j \leqq 2p)$. Q.E.D.

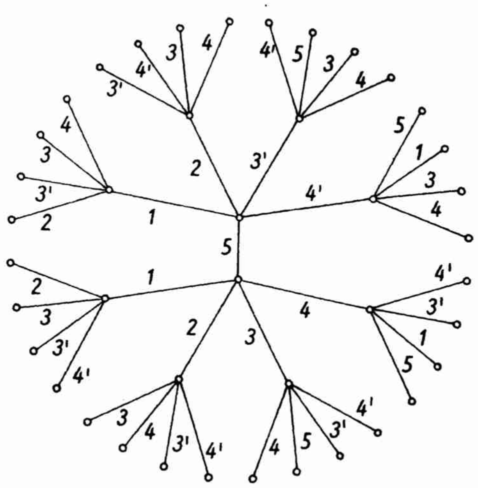

Fig. 2.

2. To construct a C_{3p+2}-valuation of $\mathscr{T}_2^{(2p+1)}$, consider the valuation used for ${}^{\#}\mathscr{T}_2^{(2p)}$, specifically that induced on ${}^{\flat}\mathscr{T}_2^{(2p)}$. $\mathscr{T}_2^{(2p+1)}$ arises from ${}^{\flat}\mathscr{T}_2^{(2p)}$ by adding one $e_j^{(2)}$ in each $G_j^{(1)}$. The desired C_{3p+2}-valuation is simply obtained by modifying ψ in the way that to each mentioned new $e_j^{(2)}$ the new value a'_{2p+1} is assigned. Obviously this does not spoil the property (i) of Def. 3. Q.E.D.

3. We proceed now to show that ${}^{\flat}\mathscr{T}_2^{(2p+1)} \notin \mathfrak{K}_{3p+2}$. Assume the contrary. Consider ${}^{\flat}\mathscr{T}_2^{(2p+1)}$ as a partial subgraph of $\mathscr{K}_{3p+2}$. Without loss of generality assume $\mathfrak{v}_1^{(1)}$ is in the vertex $\emptyset$ of $\mathscr{K}_{3p+2}$, and the $2p + 2$ neighbours of $\mathfrak{v}_1^{(1)}$ in ${}^{\flat}\mathscr{T}_2^{(2p+1)}$ are in the vertices $\{j\}$ for $1 \leqq j \leqq 2p + 2$ of $\mathscr{K}_{3p+2}$. It is now necessary to place the $(2p + 1)(2p + 2) = 4p^2 + 6p + 2$ vertices of degree 1 of the ${}^{\flat}\mathscr{T}_2^{(2p+1)}$ into the $\binom{3p+2}{2} - \binom{p}{2} = 4p^2 + 5p + 1$ vertices $\{i, j\}$ of $\mathscr{K}_{3p+2}$ with $1 \leqq i \leqq 3p + 2$, $1 \leqq j \leqq 3p + 2$, $i \neq j$, such that not both i and j are $> 2p + 2$. As this is not possible by reason of numbers, the proof is complete.

4. To complete the proof of the whole theorem, we have to show $\mathscr{T}_2^{(2p)} \notin \mathfrak{K}_{3p}$, $\mathscr{T}_2^{(2p+1)} \notin \mathfrak{K}_{3p+1}$. To that purpose we show that from $\mathscr{T}_2^{(k)} \in \mathfrak{K}_n$ follows $2n \geqq 3k + 1$. Indeed, if $\mathscr{T}_2^{(k)}$ is a partial subgraph of $\mathscr{K}_n$, there are certain k^2 vertices of $\mathscr{T}_2^{(k)}$ to be placed into $\binom{n}{2} - \binom{n-k}{2}$ vertices of $\mathscr{K}_n$, hence $k^2 \leqq \binom{n}{2} - \binom{n-k}{2}$ and the desired inequality follows.

To be able to derive statements about much wider classes of trees than $\mathcal{T}_l^{(k)}$, ${}^b\mathcal{T}_l^{(k)}$, ${}^\sharp\mathcal{T}_l^{(k)}$, we observe that ${}^b\mathcal{T}_l^{(k)}$ and ${}^\sharp\mathcal{T}_l^{(k)}$ are in a sense the most general trees with given diameter and given maximum degree of the vertices. Strictly speaking, the following holds:

Lemma 1. *Let the maximum degree of the vertices of the tree $\mathcal{T}$ be $k + 1$. If the diameter of $\mathcal{T}$ equals $2l$ resp. $(2l + 1)$, then $\mathcal{T}$ is a partial subgraph of ${}^b\mathcal{T}_l^{(k)}$ resp. ${}^\sharp\mathcal{T}_l^{(k)}$.*

Proof is obvious.

Corollary 1. *Suppose the maximum degree of the vertices of the tree $\mathcal{T}$ is $d \geqq 1$ and the diameter of $\mathcal{T}$ is $\leqq 5$. If $d = 2a$ then $\dim \mathcal{T} \leqq 3a$, if $d = 2a + 1$ then $\dim \mathcal{T} \leqq 3a + 1$. There is, on the other hand, to any $d \geqq 1$ a tree $\mathcal{T}$ with maximum degree of the vertices equal d and diameter $\leqq 4$ such that $\dim \mathcal{T} = 3a$ for $d = 2a$ resp. $\dim \mathcal{T} = 3a + 1$ for $d = 2a + 1$.*

Proof. The inequalities follow, for $d \geqq 3$, from L 1 and Th 1. On the other hand observe that $\mathcal{T}_2^{(k)}$ has diameter 4 and maximal degree of its vertices $(k + 1)$. The cases $d = 1$ and $d = 2$ are trivial.

For $\mathcal{T}_l^{(2)}$ and $\mathcal{T}_2^{(k)}$ the results obtained are exact. For $k > 2$, $l > 2$ we are only able to give bounds for $\dim \mathcal{T}_l^{(k)}$. From one side, we only succeeded in finding trivial bounds:

Remark 4. $\dim \mathcal{T}_l^{(k)} \leqq kl$. The proof of this rests on the following C_{kl}-valuation of $\mathcal{T}_l^{(k)}$. For the edges of each level of $\mathcal{T}_l^{(k)}$, k different elements of F are reserved and distributed in such a way that adjacent edges are assigned different values. In fact, an insubstantially better bound is obtained by using Th 1. for the first two levels, and applying a slightly finer reasoning to the remaining ones. For $k > 2$, $l > 2$ it holds that $\dim \mathcal{T}_l^{(k)} \leqq 3/2k + 1 + (l - 2)(k - 1)$.

Theorem 2. $\dim \mathcal{T}_l^{(k)} > kl/e$ *where* $e = 2,71 \ldots$

Proof. Assume $\mathcal{T}_l^{(k)}$ to be isomorphic to some partial subgraph of $\mathcal{K}_n$. Then comparing the number of vertices, $2^n \geqq \operatorname{card} V_l^{(k)} > k^l$ and hence

$$n > l \log_2 k \,. \tag{1}$$

Consider first $2 \leqq k \leqq 8$. Here we have $e \log_2 k > k$ and hence $n > l \log_2 k > kl/e$ and the desired inequality holds. Assume now $k > 8$. It follows from (1) that

$$n > 3l \,. \tag{2}$$

The isomorphism may be assumed such that to the vertex $v_1^{(1)}$ of $\mathcal{T}_l^{(k)}$ the vertex $\emptyset$ of $\mathcal{K}_n$ corresponds. Then to the k^l vertices of distance l from $v_1^{(1)}$ in $\mathcal{T}_l^{(k)}$ there must correspond vertices of $\mathscr{K}_n$ whose cardinalities are either l or less than l by an even number, hence

$$(3)\qquad k^l < \binom{n}{l} + \binom{n}{l+2} + \binom{n}{l-4} + \dots$$

where the sum at the right is finite, ending either with n or 1 depending on the parity of l. As

$$\binom{n}{p-2} \Big/ \binom{n}{p} \leqq \binom{n}{l-2} \Big/ \binom{n}{l} = q$$

for $p \leqq l$, we may write

$$(4)\quad \binom{n}{l} + \binom{n}{l-2} + \binom{n}{l-4} + \dots < \binom{n}{l}(1 + q + q^2 + \dots) = \binom{n}{l} \Big/ (1-q) .$$

Using (2) we have, however,

$$q = l(l-1)/((n-l+1)(n-l+2)) < l(l-1)/((2l+1)(2l+2)) < 1/4$$

and this yields together with (3) and (4)

$$(5)\qquad k^l < \frac{4}{3}\binom{n}{l}.$$

For estimating $\binom{n}{l}$ we use the trivial $n(n-1)\dots(n-l+1) < n^l$ and Stirling's formula

$$l! = \sqrt{(2\pi l)}\,(l/e)^l \exp(\theta_l)$$

where $|\theta_l| < 1/(12l)$ and get from (5)

$$k^l < \tfrac{4}{3}\exp(-\theta_l)\,(ne/l)^l\,(2\pi l)^{-1/2} .$$

Finally

$$\left(\frac{ne}{kl}\right)^l > \tfrac{3}{4}\sqrt{(2\pi l)}\exp(\theta_l) = \sqrt{[9/8\pi l \exp(2\theta_l)]} > \sqrt{[9/8\pi l \exp(-1/6)]} > 1 ,$$

Q.E.D.

Corollary 2. *Suppose the maximum degree of the vertices of the tree $\mathscr{T}$ is $d \geqq 3$ and the diameter of $\mathscr{T}$ is $D > 5$. Then* $\dim \mathscr{T} \leqq \frac{1}{2}(d-1)\,D$. *On the other hand, given $d \geqq 3$ and $D > 5$, there is a tree $\mathscr{T}$ with maximum degree of the vertices equal d and of diameter $\leqq D$ such that* $\dim \mathscr{T} >](D-1)/2[\,.\,(d-1)/e$.

Proof. The first inequality follows from Lemma 1, Remark 4 and Remark 3. The proof of the second statement follows by observing that for the tree $\mathscr{T}$ we may take $\mathscr{T}_l^{(k)}$ for $l =](D-1)/2[$ and $k = d - 1$.

Compared with Theorem 3 in [1] and Theorem 1 of this paper, the result of Remark 4 and Theorem 2 is much less satisfactory. It would be desirable to narrow the bounds, if not find an equality – which, however, seems difficult. It appears to us that while the lower bound is rather close to the actual value of dim $\mathscr{T}_l^{(k)}$ there is much space for improvement with the upper bound.

One remark more. It may be noted that we mention dim ${}^b\mathscr{T}_l^{(2)}$ or dim ${}^*\mathscr{T}_l^{(2)}$ nowhere. Trivially, there is an inequality following from Remark 3 and from Theorem 3 of [1], namely $l + 2 \leqq \dim {}^b\mathscr{T}_l^{(2)} \leqq \dim {}^*\mathscr{T}_l^{(2)} \leqq l + 3$. We have, however, a conjecture, which we were not able to prove and only succeeded in verifying for $l = 2, 3, 4$:

Conjecture. $\dim {}^*\mathscr{T}_l^{(2)} = l + 2$.

Added in proof. Meanwhile, L. NEBESKÝ in a paper to appear has proved the Conjecture. Also, F. OLLÉ in his M. Sc. thesis has substantially improved Remark 4, proving $\dim \mathscr{T}_l^{(k)} \leqq \frac{1}{2}(kl + 2l + k - 2)$.

References

[1] *Havel, I., Liebl, P.:* O vnoření dichotomického stromu do krychle (Czech, English summary), Čas. pěst. mat., *97* (1972), 201–205.

[2] *Havel, I., Morávek, J.:* B-valuations of graphs, Czech. Math. Journ., *22* (1972), 338–351.

[3] *Berge, C.:* Théorie des graphes et ses applications, Dunod, Paris 1958.

[4] *Hlavička, J.:* Race-free assignment in asynchronous switching circuits, Information Processing Machines No. 13, 1967.

Authors' address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV v Praze).

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

DRAGOŠ M. CVETKOVIČ, Beograd: *On a graph theory problem of M. Koman.* (O jednom problému M. Komana z teorie grafů.)

V článku autor nejprve zlepšuje své dřívější výsledky týkající se počtu cest v grafu. Obdržené výsledky aplikuje na řešení jedné zobecněné varianty problému M. Komana.

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha: *On the relation between Young's and Kurzweil's concept of Stieltjes integral.* (O vztahu mezi Youngovou a Kurzweilovou koncepcí Stieltjesova integrálu.)

Článek obsahuje popis integrálů uvedených v titulu. Je ukázáno, že z existence jednoho z nich obecně neplyne existence druhého. Jsou dány dodatečné podmínky, které spolu s existencí Youngova integrálu zaručují existenci Kurzweilova integrálu.

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha: *On a modified sum integral of Stieltjes type.* (O modifikovaném součtovém integrálu Stieltjesova typu.)

Je uvedena jistá modifikace Kurzweilovy součtové definice integrálu a je ukázáno, že modifikovaný součtový integrál je obecnější než původní Kurzweilův integrál a Youngův α-integrál.

LADISLAV NEBESKÝ, Praha: *On the line graph of the square and the square of the line graph of a connected graph.* (O hranovém grafu čtverce a čtverci hranového grafu souvislého grafu.)

Nechť $G = (V, X)$ je netriviální souvislý graf s p uzly a q hranami. Čtverec grafu G je graf (V, X'), kde $uv \in X'$, právě když vzdálenost mezi u a v v G je buď 1 nebo 2. Hranový graf grafu G je graf (X, Z), kde $xy \in Z$, právě když x a y mají v G jeden uzel společný. V článku je dokázáno, že když $p \geqq 3$, tak hranový graf čtverce grafu G je hamiltonovský a že když $q \geqq 3$, tak čtverec hranového grafu grafu G je hamiltonovský (graf se nazývá hamiltonovský, když obsahuje kružnici procházející všemi jeho uzly).

ANTONÍN VRBA, Praha: *An application of Halls' theorems to matrices.* (Jedna aplikace vět P. a M. Hallů na matice.)

V práci jsou vyšetřovány matice, jež jsou regulární (singulární) spolu se všemi maticemi mající mi stejné rozložení nulových prvků. Podstatně je využito známé věty P. Halla o existenci reprezentace systému množin a jejího M. Hallova kvantitativního rozšíření.

ANTONÍN VRBA, Praha: *An inversion formula, matrix functions, combinatorial identities and graphs.* (Jedna věta o inverzi, maticové funkce, kombinatorické identity a grafy.)

V práci je podán elementární důkaz jedné kombinatorické věty o inverzi. V důkaze je využito vlastností obvyklých maticových funkcí. Obráceně, věty je využito k odvození vzájemných vztahů mezi těmito funkcemi, zejména je permanent vyjádřen pomocí hlavních minorů téže matice a naopak. Z těchto vzorců plynou kombinatorické identity. Kromě toho úzká souvislost mezi maticemi a grafy umožňuje vyjádřit počet hamiltonovských kružnic v konečném neorientovaném grafu pomocí hlavních minorů jeho incidenční matice.

Antonín Vrba, Praha: *On powers of non-negative matrices.* (O mocninách nezáporných matic.)

V práci je vyšetřován počet kladných prvků v mocninách nezáporných matic.

Pavel Bartoš, Bratislava: *Über gewisse Eigenschaften der optischen Gleichung.* (O istých vlastnostiach optickej rovnice.)

V práci sú uvedené isté vzťahy medzi veličinami $P(x)$, $M(x)$, $D(x)$, ktoré prevádzajú riešenia niektorých diofantických rovníc na riešenie optickej rovnice.

Ladislav Nebeský, Praha: *On connected graphs containing exactly two points of the same degree.* (O souvislých grafech obsahujících právě dva uzly stejného stupně.)

Grafy G, které splňují podmínku, že právě dva uzly v G mají stejný stupeň, sestrojili Behzad a Chartrand. V článku autor vyšetřuje některé vlastnosti souvislých grafů splňujících uvedenou podmínku.

Ivan Havel, Petr Liebl, Praha: *Embedding the polytomic tree into the n-cube.* (Vnoření polytomického stromu do n-dimensionální krychle.)

Článek navazuje na předchozí článek autorů. Označme jako dim $\mathcal{G}$ nejmenší n takové, že $\mathcal{G}$ je částečný podgraf grafu n-dimensionální krychle. Označme dále jako $\mathcal{T}_l^{(k)}$ tzv. k-tomický strom o l úrovních. Pak platí $kl > \dim \mathcal{T}_l^{(k)} > kl/e$, kde $e = 2{,}71\ldots$ Hodnota $\dim \mathcal{T}_2^{(k)}$ je nalezena přesně, stejně jako $\dim {}^{\flat}\mathcal{T}_2^{(k)}$ a $\dim {}^{\sharp}\mathcal{T}_2^{(k)}$, jež jsou určitými modifikacemi $\mathcal{T}_2^{(k)}$. Tyto výsledky jsou použity pro odhad dim $\mathcal{T}$ v závislosti na průměru a maximálním uzlovém stupni libovolného stromu $\mathcal{T}$.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

RECENSE

Stefan Fenyö: MODERNE MATHEMATISCHE METHODEN IN DER TECHNIK, Band 2, Internationale Schriftenreihe zur Numerischen Mathematik, Vol. 11, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1971, stran 336, obrázků 79, cena neuvedena.

Toto je druhý díl trojsvazkového celku, který vydává nakladatelství Birkhäuser. Díl první vyšel jako osmý svazek téže ediční řady a napsal jej Stefan Fenyö spolu s Thomasem Freyem. Závěrečný třetí díl je zřejmě teprve ve stadiu příprav.

Druhý díl, kterého si chceme povšimnout v těchto řádcích a který je věnován finitním metodám aplikované matematiky, se dá studovat celkem nezávisle na dílu prvním. Povězme si stručně o jeho obsahu. První třetina je věnována lineární algebře a jsou v ní vyloženy jak pojmy teoretické (matice, násobení matic, charakteristický polynom, Cayleyho a Hamiltonova věta atd.), tak je naznačeno i užití praktické (lineární elektrické obvody). Ještě bližší praxi je druhá třetina knihy věnovaná teorii optimalizace. Bude zajímat čtenáře ekonomy a rozpadá se na dvě části, z nichž první pojednává o optimalizaci lineární (simplexová metoda, dopravní problém a jeho řešení maďarskou metodou, věta Königova a Egerváryho atd.) a druhá o optimalizaci konvexní. Závěrečná třetina podává stručný úvod do teorie grafů. Jsou uvedeny základní pojmy a věty o grafech neorientovaných a orientovaných a přihlíží se i k aplikacím (elektrické obvody, věta Fordova a Fulkersonova).

Pro matematika je tato kniha snadným čtením a odhaduji, že bude přístupná i inženýrům, ekonomům a dalším praktikům, kteří v ní budou hledat poučení. Základní pojmy jsou totiž dobře motivovány a ilustrační příklady jsou zjednodušeny tak, aby jim bylo dobře rozumět. Jednoduché věty jsou dokázány a několik složitějších výsledků se podává bez důkazu (např. věta o duálním grafu — str. 291). Mému vkusu trochu vadí, že tu nejsou cvičení pro čtenáře. Myslím, že je bude zvlášť postrádat čtenář technického zaměření a cvičení jsou ostatně dobrou pomůckou, jak si ověřit, že jsme učebnici porozuměli. Tiskových chyb je málo a čtenář si je snadno opraví. Myslím, že je to dobrá kniha a názorně ukazuje, jak se i aplikovaná matematika za posledních několik desetiletí zmodernizovala.

Jiří Sedláček, Praha

J. L. Lions: OPTIMAL CONTROL OF SYSTEMS GOVERNED BY PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1971, XI + 396 str., cena 78,— DM.

Původní francouzské vydání knihy, které vyšlo v roce 1968, recenzoval v tomto časopise A. Kufner (viz Čas. pěst. mat., *96* (1971), str. 110—111).

Tento anglický překlad (překladatelem je S. K. Mitter) se liší od originálu pouze v drobných detailech: je v něm rozšířena bibliografie a jsou připojeny některé nové poznámky.

Teorie optimální regulace byla při svém vzniku úzce svázána s obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Tato kniha obsahuje výsledky o optimální regulaci pro systémy, jejichž stav je popsán parciální diferenciální rovnicí. Je pozoruhodným dokladem úsilí odborníků, zabývajících se parciálními diferenciálními rovnicemi, v tomto směru. Je třeba zdůraznit, že hlavní výsledky pocházejí z poměrně krátkého časového úseku let 1964—1968 a že jsou v mnoha případech zhruba ve stejném stadiu jako výsledky známé pro případ obyčejných diferenciálních rovnic.

Štefan Schwabik, Praha

J. M. Souriau: STRUCTURE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES. Vydavatelství Dunod, Paris, 1970, 414 stran, 68 F.

Nechť $l(q, \dot{q})$ je Lagrangeova funkce jistého dynamického systému. Předpokládá se, že q je sloupcový vektor $[x_1, x_2, \ldots, x_n, t]$, kde x_i jsou prostorové souřadnice a t je časová souřadnice. $\dot{q}$ je derivace q podle jistého parametru s. Hamiltonův princip nejmenší akce lze vyjádřit

$$\int_{s_0}^{s_1} \left\{ \frac{\partial l}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left[\frac{\partial l}{\partial \dot{q}} \right] \right\} \delta q \, \mathrm{d}s = 0 .$$

Jestliže označíme $p = \partial l / \partial \dot{q}$, lze tento princip vyjádřit

$$\int_{s_0}^{s_1} \left\{ \delta p \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} \delta q \right\} \mathrm{d}s = 0 .$$

Výrazy δp, δq znamenají diferenciály veličin p, q podle pole (definovaného v R_{n+1}), které je označeno stejným písmenem δ. Nechť y označuje sloupcový vektor $[\dot{q}, q]$. V R_{2n+2} lze definovat lineární formu $\tilde{\omega}(\delta y)$ tímto způsobem: nechť je dán bod $y \in R_{2n+2}$ a nechť je v R_{2n+2} dáno pole δy. Toto pole generuje jisté pole δq v podprostoru R_{n+1} souřadnic q. Položme $\tilde{\omega}(\delta y) = p \,.\, \delta q$ (skalární součin). Hamiltonův princip nejmenší akce lze pak zapsat ve tvaru

$$(*) \qquad \int_{s_0}^{s_1} \nabla \tilde{\omega}(\delta y) \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \right) \mathrm{d}s = 0 ,$$

kde $\nabla \tilde{\omega}$ je vnější diferenciál lineární formy $\tilde{\omega}$. Výraz $\nabla \tilde{\omega}$ má tyto vlastnosti: 1) Je to bilineární antisymetrická forma definovaná v R_{2n+2}. 2) $\nabla(\nabla(\tilde{\omega})) \equiv 0$. 3) Jestliže funkce $q(s)$, $t(s)$ popisují pohyb daného dynamického systému, pak $y(s) = [\dot{q}(s), q(s)]$ splňuje $\mathrm{d}y/\mathrm{d}s \in \ker (\nabla \tilde{\omega})$, kde $\ker (\nabla \tilde{\omega})$ je jádro bilineární formy $\nabla \tilde{\omega}$. 4) Odpovídající výrazy lze definovat i pro variety. Zápis Hamiltonova principu ve tvaru (*) je invariantní při transformaci variet.

Tyto vlastnosti jsou podkladem pro vyšetřování symplektických variet. Varieta je symplektická (presymplektická), jestliže je na ní definována bilineární, antisymetrická forma σ (viz vlastnost 1)), taková, že $\nabla \sigma = 0$ (viz 2)), ker σ má dimensi 0 (konstantní dimensi $k > 0$).

Z matematického hlediska je nejzajímavější druhá kapitola nazvaná symplektická geometrie. Tato kapitola se týká vyšetřování symplektických a presymplektických variet. Jde zde o vyšetřování ortogonálnosti, kanonických souřadnic, kanonických zobrazení, symplektických Lieových grup, (tj. grupa zobrazení variety V do sebe, vůči níž je bilineární forma σ invariantní) a odpovídajících Lieových algeber. Nejzávažnější věty této kapitoly jsou věty o momentu a o symplektických varietách určených Lieovou grupou.

V dalších kapitolách se aplikuje (dosti netriviálně) tato metoda. Kapitola III se týká mechaniky. Nejprve se studuje soustava hmotných bodů v euklidovském prostoru v případě klasické mechaniky. Zde autor dochází k poznatku, že metody nelze použít např. v případě pohybu magnetických těles. Později však ukazuje, jak tuto obtíž překonat zavedením spinu. Rozvinutou metodu však může aplikovat i v případě teorie relativity. K uceleným výsledkům dochází při popisu chování jedné částice s nenulovou hmotou a spinem, s nenulovou hmotou a beze spinu, s nulovou hmotou a spinem a dále pro případ nabité částice v elektromagnetickém poli.

Vhodným polem aplikace je statistická mechanika, zvláště v okruhu problémů, kdy plyn lze chápat jako soustavu volně se pohybujících částic se zanedbáním vzájemných kolisí. Zde se však autor věnuje jen několika otázkám: Odvození Mariotteova—Gay-Lussacova—Avogadrova zákona a s tím souvisejících vztahů mezi teplem, prací a entropií, otázkám rovnováhy plynu v klasické i relativistické mechanice a statistické rovnováhy systému fotonů. V posledních kapitolách autor ukazuje možnosti aplikace této metody v kvantové mechanice.

Ivo Vrkoč, Praha

Murray Rosenblatt: MARKOV PROCESSES. Structure and asymptotic behavior. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1971. Str. XIII + 268.

Prakticky celá kniha je věnována Markovovým procesům v diskrétním čase s obecným systémem stavů; o případu spočetného systému stavů pojednává jen několik paragrafů a o procesech ve spojitém čase jen několik okrajových zmínek. Všimněme si stručně obsahu jednotlivých kapitol.

V úvodní kap. I jsou shrnuty některé základní pojmy a poznatky a několik jednoduchých ilustrativních příkladů.

V kap. II se popisují tři následující zajímavé modely z aplikací, které vedou k Markovovým procesům a které zde slouží jako motivace pro teoretické studium některých problémů v dalších kapitolách: model systému N molekul ve statistické mechanice, model učení se v psychologických experimentech a model toku zásob v ekonomii.

Vlastní jádro knihy pak začíná v kap. III, kde se studuje tvar procesů, které jsou funkcemi Markovových procesů, a otázka, kdy tyto funkce opět tvoří Markovův proces.

Kap. IV se zabývá problémy ergodicity a predikce, zejména se zde dokazuje Chaconova-Ornsteinova ergodická věta pro operátory v L_1 a studuje se asymptotické chování mocnin Markovova operátoru v L_2.

Kap. V pojednává o limitních větách pro náhodné procházky a konvoluce na grupách a semigrupách.

V kap. VI se studují nelineární representace Markovových procesů pomocí nezávislých náhodných veličin; tento problém vznikl v souvislosti s problémem lineární predikce a Woldovy lineární representace pro slabě stacionární posloupnosti.

Poslední kap. VII se zabývá silně promíchávajícími a stejnoměrně ergodickými Markovovými procesy, aproximací jejich limitních rozložení pomocí nekonečně dělitelných rozložení a centrální limitní větou pro tyto procesy.

Následuje pět dodatků, obsahujících přehled potřebných základních věcí o teorii pravděpodobnosti, o topologických prostorech, o Kolmogorovově větě o rozšiřování míry, o Banachových prostorech a operátorech, o topologických grupách, dále pak literatura, index autorů, předmětů a označení a postskriptum o několika novějších pracích.

Z podaného přehledu o obsahu knihy je tedy vidět, že výběr témat je dosti svérázný a netradiční a ne příliš souvislý; jde většinou o problémy, v nichž autor, význačný specialista v teorii pravděpodobnosti, sám pracoval, a z nichž mnohé nejsou doposud v žádné knize zpracovány. Kniha tedy není učebnicí či nějakou základní monografií o Markovových procesech; spíše by bylo možno ji charakterisovat jako sborník přehledných statí o některých speciálních otázkách z teorie Markovových procesů. Tím vším ovšem nepopíráme, že jde o otázky skutečně zajímavé, aktuální a zpracované v knize na vysoké úrovni.

Výklad v knize je značně abstraktní a užívá řady pojmů a metod z funkcionální analysy. Kniha se však asi mnohým čtenářům bude číst dost obtížně ještě z jiného důvodu — pro poněkud nepřehledný styl výkladu: např. definice jsou formulovány průběžně v textu, takže někdy je trochu nesnadné je vyhledat; důkazy jsou umístěny někdy za příslušnou vyslovenou větou, někdy před větou, a někdy dokonce část důkazu před větou a část za ní (viz např. Lemma 2 v § I.2, Theorem 2 v § I.3, atd.); někdy bývá i poněkud netriviální nalézt začátek či konec důkazu patřícího k určité větě a odlišit jej od ostatního textu.

Jinak ovšem kniha má vysokou vědeckou úroveň a bude zajisté velmi zajímavá pro specialisty v teorii pravděpodobnosti a zvláště v teorii Markovových procesů.

Zbyněk Šidák, Praha

S. Flügge, PRACTICAL QUANTUM MECHANICS, Vol. I, XII + 287, 1971, \$ 19,30, Vol. II, XIV + 341, 1971, \$ 16,50, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York. Vyšlo jako 177. a 178. svazek sbírky Die Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen.

Toto čtvrté vydání se podstatně liší od předcházejících třech (1947, 1953 a 1965) nejen tím, že bylo přeloženo do angličtiny, ale hlavně rozsahem, který se zvětšil na dvojnásobek. Přitom úlohy, které byly převzaty z předchozího vydání, byly podstatně přepracovány. Zato byl vynechán úvod, kde byly probírány základní rovnice kvantové mechaniky. Tím byl podtržen specifický charakter knihy; obrací se totiž na čtenáře obeznámeného s obecnou teorií, kterou mu ilustruje (a rozšiřuje) konkrétními úlohami. Každá taková úloha je formulována, pak následuje řešení (úplné) a případné poznámky a literární odkazy. Látka postupuje od obecných pojmů (první úloha je zákon zachování pravděpodobnosti) a úloh o částicích bez spinu v prvém dílu, přes úlohy o částicích se spinem, úlohy o několika částicích, nestacionární úlohy (poruchový počet), Diracovy relativistické rovnice a končí kvantovou teorií elmag. pole (ve druhém díle). Připojen je matematický dodatek, kde se probírají hlavně speciální funkce, které se vyskytují v předchozích úlohách při řešení Schrödingerovy rovnice.

To, že kniha vychází ve čtvrtém vydání, je nejlepším svědectvím úspěchu u čtenáře. Jistě i toto podstatně rozšířené vydání najde příznivé přijetí.

Václav Alda, Praha

R. Balescu et al., LECTURES IN STATISTICAL PHYSICS. Vyšlo ve sbírce Lecture Notes in Physics jako Vol. 7. Springer-Verlag 1971, IX + 462 str., \$ 7,70.

Jedná se o zápis pěti přednášek z kursů statistické mechaniky a thermodynamiky pořádaných universitou v Austin (Texas, USA) (čtyři přednášky jsou z r. 1969, jedna z r. 1970).

Statistická fysika je v současné době předmětem intensivního studia; stačí nahlédnouti do oborového indexu v Journal of Math. Physics. Jednak se zpřesňují metody a nalézají podmínky, za kterých platí tvrzení — přehled v tomto směru dává nedávno vyšlá kniha D. Ruella — jednak se aplikují metody statistické fysiky na nové obory. Recensovaný svazek podává přehled o obou tendencích.

Z matematického hlediska je nejzajímavější poslední lekce, která pojednává o integraci rovnic pro časový průběh s ohledem na odvození „master equation". Čtvrtá lekce je stručným přehledem rigorosních výsledků, kterých bylo dosaženo v oblasti fázových přechodů a existence thermodynamické limity. První tři lekce jsou více založeny na makroskopických veličinách a pojednávají

(1) o dissipativních strukturách (které se mohou udržovat jen výměnou energie s okolím),
(2) o fázových přechodech,
(3) o dynamických jevech u kritického bodu v kapalinách a ferromagnetikách.

Literární odkazy jsou dovedeny do r. 1969 (ve čtvrté lekci do r. 1970), takže přednesené lekce representují aktuální stav disciplíny a je zásluhou pořadatele kursů a nakladatelství, že umožnili jejich rychlou publikaci.

Václav Alda, Praha

N. Bourbaki: ELÉMENTS DE MATHÉMATIQUE. Algèbre I, Chap. 1 à 3. Hermann, Paris 1970, 635 str., cena 140 F.

Bourbakiho algebru (úvod do teorie algebraických struktur a lineární algebry) zná náš čtenář patrně nejlépe z ruského překladu z r. 1962. Recensovaná kniha se vyznačuje přepracováním původního textu.

První kapitola se opět nazývá Algebraické struktury, od starého textu se liší prakticky jen jiným uspořádáním materiálu a novým paragrafem o projektivních a induktivních limitách.

Paragraf o grupách je obsáhlejší a obsahuje teorii nilpotentních a řešitelných grup. Rovněž cvičení jsou přepracována.

Druhá kapitola je modernější a podrobnější versí starého textu; zabývá se opět lineární algebrou. První paragraf je věnován definici a základním vlastnostem modulů a podmodulů. Druhý paragraf se zabývá moduly lineárních zobrazení a dualitou, třetí tensorovými součiny. Čtvrtý paragraf navazuje výkladem o vztahu mezi tensorovými součiny a moduly homomorfismů, pátý je věnován rozšíření okruhu skalárů, šestý projektivním a induktivním limitám modulů. Následují tři paragrafy o afinních prostorech, zúžení tělesa skalárů a o prostorech projektivních. Desátý paragraf obsahuje teorii matic, konečně jedenáctý se zabývá graduovanými okruhy a moduly.

Třetí kapitola je věnována tensorovým, vnějším a symetrickým algebrám včetně teorie determinantů.

Bourbakiho texty je obtížné recensovati. Styl je dokonalý, vše je zcela přesné, ale přesto mě čtení knihy (rozhodně nejtlustší v mé knihovně) nechává chladným. Zajímavá jsou ovšem cvičení; jejich soustavné propočítávání může čtenáři přinésti místy docela dobrou zábavu.

Alois Švec, Praha

GROUP REPRESENTATIONS IN MATHEMATICS AND PHYSICS. Battelle Seattle 1969 Rencontres; edited by V. Bargmann. Lecture Notes in Physics, No 6. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1970. Stran 340, cena DM 24,—.

Svazek obsahuje následující příspěvky: C. C. Moore, *Restrictions of Unitary Representations to Subgroups and Ergodic Theory: Group Extensions and Group Cohomology*; L. Michel, *Applications of Group Theory to Quantum Physics — Algebraic Aspects*; L. O'Raifeartaigh, *Unitary Representations of Lie Groups in Quantum Mechanics*; B. Konstant, *On certain Unitary Representations Which Arise From a Quantization Theory*; I. T. Todorov, *Derivation and Solution of an Infinite-Component Wave Equation for the Relativistic Coulomb Problem*; W. Rühl, *Tensor Operators for the Group SL (2, C)*; G. A. Goldin - D. H. Sharp, *Lie Algebras of Local Currents and Their Representations*; R. Hermann, *Infinite Dimensional Lie Algebras and Current Algebra.*

Alois Švec, Praha

Jean-Pierre Ramis: SOUS-ENSEMBLES ANALYTIQUES D'UNE VARIÉTÉ BANACHIQUE COMPLEXE. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 53. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1970. Stran XI + 118, cena DM 36,—.

Teorie analytických podmnožin komplexní variety konečné dimense je dobře známa a knižně zpracována, viz např. u nás v ruském překladu běžně dostupnou knihu od Gunninga a Rossiho. Ramisova kniha se nyní prakticky zabývá případem nekonečné dimense.

První kapitola je přípravná; studuje se v ní okruh formálních a konvergentních řad (Weierstrassovy věty) a elementy banachovských analytických funkcí.

Nechť U je komplexní banachovská analytická varieta. Množina $X \subset U$ se nazývá analytická, jestliže pro každý bod $x \subset U$ existuje (V_x, f_x, F) tak, že $V_x \subset U$ je otevřené okolí bodu x, F_x komplexní Banachův prostor, $f_x : V_x \to F_x$ analytické zobrazení a $X \cap V_x = f_x^{-1}(0)$; X se nazývá konečně definovaná, jestliže $\dim F_x < \infty$ pro každé $x \in X$. Jinak řečeno, X je konečně definovaná, jestliže lokálně je dána konečným počtem skalárních analytických rovnic. Bod $x \in X$ se nazývá regulárním, jestliže existuje jeho okolí V v U tak, že $X \cap V$ je podvarieta ve V. Nejprve se dokáží elementární fakta o analytických podmnožinách a věty o prodloužení zhruba tohoto typu: Jestliže $X \subset U$ není možno v každém bodě $x \in X$ ani lokálně definovati jedinou rovnicí, pak každou analytickou funkci na $U - X$ s hodnotami v Banachově prostoru je možno jediným způsobem rozšířiti na U. Konečně definovatelné analytické podmnožiny mají ještě dosti dobré vlastnosti, naproti tomu libovolné podmnožiny mohou býti velmi divoké. Tak např. každý metrizovatelný kompakt je homeomorfní s analytickou podmnožinou nějakého Banachova prostoru; existují podmnožiny, které mají bod, v jehož okolí existují reulární body libovolné kodimense.

Technika zkoumání analytických podmnožin je v podstatě známá z konečně-dimensionálního případu, kdy každému germu ξ podmnožiny X se přiřadí ideál $J(\xi)$ germů analytických funkcí, které se anulují na ξ. Nalézá se struktura ideálů typu $J(\xi)$ a tzv. Nullstellensatz. Předchozích výsledků se užívá ke geometrickému studiu analytických a konečně definovaných podmnožin X. Tak např. platí: Jestliže $X \subset U$ je navíc i souvislá, pak každá skalární analytická funkce na X, jejíž absolutní hodnota má maximum na X, je konstantní. V dalším se studují ireducibilní složky konečné kodimense analytické podmnožiny. Uveďme ilustraci. Nechť E je komplexní Banachův prostor. Podmnožina $X \subset E$ se nazývá kuželem, jestliže pro každé $x \in X$ a každé komplexní číslo λ je $\lambda_x \in X$. Je známo, že analytický kužel v prostoru konečné dimense je algebraický. Dokáže se, že konečně definovaný analytický kužel je algebraický pro obecné E; libovolný analytický kužel však nemusí být algebraický. Nechť např. l^2 je komplexní Hilbertův prostor posloupností $(z_0, \ldots, z_n, \ldots)$, $\sum z_i^2 < \infty$, a $f : l^2 \to l^2$ budiž definováno takto: $f_0(z_0, \ldots) = 0$, $f_n(z_0, \ldots) = [(2n)!]^{-1} \,.\, (z_0^{2n-1} z_{2n+1} - z_{2n}^{2n})$; množina $X = f^{-1}(0)$ je nealgebraický analytický kužel.

Poslední část knihy se zabývá prodlužováním analytických podmnožin. Jako aplikace je dokázáno zobecnění Chowovy věty: Nechť E je komplexní Banachův prostor, $P(E)$ příslušný projektivní prostor. Potom každá analytická podmnožina v $P(E)$, jejíž kodimense je omezená na $P(E)$, je algebraická a konečně definovaná. V závěru se studují singulární body $S(X)$ analytické podmnožiny $X \subset U$. Jestliže X je konečně definovaná, pak $S(X)$ je analytická podmnožiny v U a $\operatorname{codim}_x X + 1 \leqq \operatorname{codim}_x S(X)$ pro $x \in S(X)$. Jestliže však X není konečně definovaná, nemusí $S(X)$ býti analytickou podmnožinou.

Knihu je možno doporučit jako cenný přehled vlastností analytických podmnožin banachovských variet. Zisk z ní bude mít ovšem jen ten, kdo ji bude chápati jako prohloubení studia konečně-dimensionálního případu.

Alois Švec, Praha

S. López de Medrano: INVOLUTIONS ON MANIFOLDS. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 59. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1971. Str. 103, 15 obr., cena DM 36,—.

Kniha obsahuje převážně autorovy výsledky z let 1967—70 o involucích bez pevných bodů na varietách (tedy zobrazeních $f: M \to M$ s $f^2 = \text{id.}$), dosažené pod vedením W. Browdera. Hlavním studovaným problémem je klasifikace involucí a existence invariantních podvariet s předepsanými vlastnostmi. Varietou se rozumí kompaktní varieta (s hranicí nebo bez hranice), která je buď kombinatorická a f je po částech lineární nebo je hladká a f je také hladká involuce. Klasifikovat involuce bez pevných bodů na homotopických sférách je totéž jako klasifikovati variety s týmž homotopickým typem jako má reálný projektivní prostor P^n; jestliže totiž $f: M \to M$ je involuce na homotopické sféře M, je M/f homotopicky ekvivalentní s P^n. Převážná část práce je věnována právě rozšíření tohoto problému. Kniha je určena výhradně specialistům.

Alois Švec, Praha

Vladimír Kohout: DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE. Matematický seminář SNTL, č. 2. SNTL, Praha 1971. Str. 165, 31 obr., cena Kčs 18,—.

Redakce tvrdí na str. 4, že „knížka je dobře promyšleným výkladem diferenciální geometrie rovinných i prostorových křivek a ploch v euklidovském prostoru i prostorech, které nejsou euklidovské“. A dále: „Výklad doplňují technické a fyzikální aplikace. Kniha je určena především posluchačům vysokých škol všech oborů, kde se diferenciální geometrie přednáší, technickým pracovníkům v praxi a ovšem také fyzikům“. Autor ve své předmluvě uvádí, že jeho kniha „je určena matematikům, kteří ovládají základy matematiky asi v rozsahu běžného kursu na našich technických vysokých školách".

Musím poznamenati, že znám ovšem také fyziky, kteří nejsou matematiky. Ale vážně. Výklad rozhodně nedoplňují technické a fyzikální aplikace, redakce to jen předstírá. Svým posluchačům bych knihu také příliš vřele nedoporučil. Rozbor dalších tvrzení si vyžádá více místa.

Knížka se skládá ze sedmi kapitol. Uveďme nejprve bez komentáře její obsah. I. *Geometrie euklidovského prostoru.* Rozsáhle se definuje pojem euklidovského prostoru. Pro rovinné a prostorové křivky se vypisují Frenetovy formule, pro plochy se zavádějí dvě základní formy a paralelní přenos. II. *Kleinovo pojetí geometrie.* Definují se grupy transformací na množině a tím Kleinovy prostory. Jako příklady se uvádějí projektivní prostory a neeukleidovské geometrie. III. *Diferencovatelné variety.* Definice topologických prostorů přechází v definici diferencovatelných variet pomocí atlasů, vektorových polí, diferenciálů zobrazení a vnořených podvariet. Probírají se integrabilní distribuce, z teorie vnějších forem je uvedeno vnější násobení a diferencování, kapitola končí úvodem do tenzorového počtu. IV. *Zakřivené prostory a tenzorový počet.* Definuje se Riemannův prostor a jeho tenzor křivosti. V. *Lieovy grupy.* Zavádí se pojem Lieovy grupy a její Lieovy algebry a vyloží se obecné schéma pro studium podvariety homogenního prostoru. VI. *Metoda pohyblivého repéru.* Vyloží se základní vlastnosti invariantních forem na Lieově grupě a mechanismus specialisace reperů podvariety homogenního prostoru. VII. *Lokální a globální diferenciální geometrie.* V jednostránkové kapitole je uvedena věta o tom, že ovál má nejméně čtyři vrcholy.

Obsah knihy vypadá mohutně. Chyb je velmi málo; nepříjemné nedopatření je na str. 12 při uvádění vlastností 1—3 vzdálenosti. Hlavně mi však není jasné, komu má kniha sloužit a kdo si ji má s potěšením přečísti. Konkrétních výsledků je v ní uvedeno velmi málo, prakticky celá je věnována definicím a početnímu aparátu. Neumím se vžít do myšlení onoho matematika (a ovšem také fyzika), ale čemu budou rozumět? Autor ukazuje, že sám zvládl moderní terminologii a moderní metody, ale výklad je velmi složitý a zamotaný. Již vůbec první definice (a to euklidovského prostoru) je přesná a zcela nezáživná. Třetí definici (vázaného vektoru) sám moc špatně rozumím, také dokonce nevím, co jsou to různé euklidovské prostory (str. 11). Třetí a čtvrtý paragraf třetí kapitoly je na mě rovněž příliš složitý hlavně v místech, kde je pro názornost opatřen obrázkem č. 27. Nebo citujme ze str. 107: „Představme si názorně obyčejnou kružnici, neustále objížděnou kolem dokola. Není-li udán nějaký význačný okamžik, od něhož počítáme oběhy, lze většinou těžko funkci na kružnici nějak rozumně zadat". Musím se přiznat, že do přečtení těchto vět jsem žil lépe, protože jsme uměl docela rozumně zadat funkci třebas i na jiných křivkách. Obdobných věcí — mnohdy ale zcela podstatnějších — je v knize velká řada. Vím dobře, co chtěl autor svými definicemi a poznámkami říci a musím uznati, že měl dobrý úmysl i koncepci. Pro znalce je však kniha zbytečná. Mám nejvážnější obavy, že onen matematik (a podle mínění redakce SNTL ovšem také fyzik) nepřejde přes několik prvních stránek o euklidovském prostoru.

Cítím však povinnost zastati se autora v následujícím. Obvykle se říká, že kritik popisuje, jak je kniha špatná a jak by ji napsal sám, kdyby to ovšem uměl. Chci totiž říci, že na probírané téma bych asi populární knížku o mnoho lépe také nenapsal. Přátelé topologové mi jistě odpustí, ale na hodinové přednášce o množinové, algebraické nebo diferenciální topologii je možno populárně (ale naprosto srozumitelně a přesně) vyložiti velmi hluboké a poutavé výsledky: pojmy i věty jsou totiž poměrně jednoduché a názorné, obvykle pouze důkazy jsou nesmírně komplikované a jejich aparát je technicky velice náročný. Diferenciální geometrie je při popularisování ve značné nevýhodě, neboť již samotné definice základních pojmů jsou značně složité. Co práce dá např. již definice plochy v euklidovském prostoru, zavedení jejích dvou základních forem a jejich podmínek integrability a důkaz toho, že plocha je oběma formami jednoznačně určena. A to ještě není žádná zajímavá věta; přitažlivé výsledky touto větou teprve začínají. Nechci tvrditi, že autor se nemohl vyjadřovati jasněji, ale omylem je patrně téma knihy. Nevím ovšem, jaká je koncepce celé sbírky matematického semináře SNTL. V knize se chce prostě mnoho vyložiti a ještě k tomu populárně.

Nejsem odborník na inženýrském poli, ovšem také fyzikům by však patrně lépe svědčila knížka třeba jen o diferencovatelných varietách nebo o Lieových grupách nebo o representacích grup nebo o mnoha speciálnějších partiích diferenciální geometrie.

Alois Švec, Praha

M. Constam: FORTRAN FÜR ANFÄNGER, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1971, 145 str., DM 16,—.

Tato kniha, resp. skripta, je určena, jak plyne již z názvu, čtenářům, kteří se s programovacím jazykem FORTRAN chtějí teprve seznámit. U čtenáře se předpokládají základní znalosti o číslicových počítačích a o sestavování blokových schémat.

Mezinárodní definice uvádějí tři úrovně jazyka FORTRAN: 1. základní FORTRAN (Basic FORTRAN) — nejnižší úroveň, odpovídá starší verzi jazyka FORTRAN II, 2. střední FOTRAN (Intermediate FORTRAN), 3. úplný FORTRAN (FORTRAN) — největší úroveň, odpovídá světové normě úplného jazyka FORTRAN IV. Nejjednodušší verse jazyka FORTRAN (bod 1) je vhodná pro menší počítače, programy v ní psané lze však překládat na většině překladačů z jazyka FORTRAN IV. Kniha obsahuje výklad této verse a to do té míry, aby čtenář byl schopen sestavit jednoduchý program s použitím podprogramů, se čtením děrných štítků a tiskem výsledků.

Kniha je rozdělena do pěti kapitol. První kapitola „*Základní prvky jazyka* FORTRAN" seznamuje čtenáře s používanými symboly, fortranským slovem, výrazem a operátorem, větou a se stavbou fortranského programu. Ve druhé kapitole „*Výkonné příkazy jazyka Basic* FORTRAN" jsou postupně popsány jednotlivé přiřazovací příkazy, řídící příkazy a příkazy pro vstupy a výstupy (čtení děrných štítků a tisk). Třetí kapitola „*Dva nevýkonné příkazy*" popisuje příkaz DIMENSION A EQUIVALENCE. Čtvrtá kapitola „*Příklady úplných programů*" je věnována ukázkám hotových programů. Pátá kapitola „*Podprogramy ve* FORTRANU" pojednává o formálních a aktuálních parametrech, o funkčních příkazech, o funkčních a obecných procedurách (FUNCTION, SUBROUTINE) a o některých dalších speciálních příkazech. Na konci knihy jsou v příloze zařazeny dvě tabulky: Syntaktické pořadí příkazů a Seznam příkazů v knize pobraných. Dále je vypracován „*Záznamník*" pro zaznamenávání odchylek a omezení jazyka pro jednotlivé konkrétní počítače. Knihu uzavírá podrobný rejstřík.

Výklad provází řada velmi názorných obrázků a konkrétních příkladů. To přispívá k lepší srozumitelnosti a současně k zkrácení výkladu. Ve shodě s tím je i velmi pěkná grafická úprava. Chyby, které se v knize vyskytly (např. na str. 72 u příkladu PRINT 2041 je překlep u návěstí) nenarušují srozumitelnost a čtenář si je snadno opraví sám. Chybné je také stránkování v obsahu.

Závěrem lze říci, že kniha je vhodnou pomůckou pro široký okruh zájemců o programování v jazyku FORTRAN.[1])

Irena Doležalová, Praha

J. Dörr, G. Hotz: AUTOMATENTHEORIE UND FORMALE SPRACHEN. Tagungsbericht, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach-Berichte 3, vydáno Bibliographisches Institut — Mannheim—Wien—Zürich, brož. 505 stran.

Kniha obsahuje přednášky (v některých případech pouze jejich resumé) přednesené na konferenci „Automatentheorie und formale Sprachen", konané ve dnech od 12. 10. do 18. 10. 1969 v západoněmeckém Oberwolfachu.

---

[1]) Upozorňujeme čtenáře, že v r. 1971 vyšla v SNTL kniha Jiřího Vogela „Programování v jazyku FORTRAN", která seznamuje čtenáře s nejvyšší úrovní jazyka FORTRAN a je určena i začínajícím programátorům.

Referáty v celkovém počtu 35 reprezentují téměř všechna v té době aktuální témata z teorie automatů, jejich aplikací i příbuzných oblastí a sborník dokumentuje vzrůstající zájem o tyto otázky v NSR. Obsahuje jednak práce, které zobecňují již známé výsledky, nebo zjednodušují jejich odvození, ale též mnoho prací pojednávajících o aktuálních otázkách s „obecně kybernetickým" významem (zde je nutno zejména upozornit na referáty z teorie algoritmické složitosti i na referáty týkající se stochastických automatů). Důležité je zmínit se i o širokém spektru aplikací a příbuzných otázek, jež byly v knize zahrnuty (např. referáty o programovacích jazycích, aplikace na teorii her, teorii čísel, algoritmus pro nalezení východu z labyrintu aj.).

Na tomto místě nelze uvádět názvy jednotlivých přednášek a tím spíše je nelze referovat, avšak pro podrobnější představu o sborníku, uvádíme jeho obsah podle tématického rozdělení:

1. Automatentheorie [a) Endliche Automaten, b) Lineare Darstellung von Automaten, c) Stochastische Automaten und Informationstheorie].
2. Formale Sprachen [a) Algebraische Theorie, b) Spezielle Sprachen, c) Analyse und Synthese, d) Programmiersprachen].
3. Komplexitätstheorie.
4. Logik und rekursive Funktionen.
5. Spezielle Algorithmen.
6. Informationssysteme.

Jaroslav Morávek, Praha

B. Budinský, B. Kepr: ZÁKLADY DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE S TECHNICKÝMI APLIKACEMI; Nakladatelství technické literatury, Praha 1970. Str. 342, obr. 118. Cena 41,— Kčs.

Nepočítáme-li Sobotkovy litografované přednášky, je Budinského a Keprova kniha třetí českou úvodní učebnicí lokální diferenciální geometrie křivek a ploch.*) První byla Hostinského „*Diferenciální geometrie křivek a ploch*" (1915, 1942, 1950), druhou Hlavatého „*Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet*" (1937). Budinského a Keprova učebnice se více přibližuje Hlavatého knize, avšak se zřetelným zaměřením na širší čtenářský okruh. Je psána velmi přístupně i podrobně a čtenář vystačí s malými předběžnými znalostmi. Proto bude jistě oblíbená. Rádi po ní sáhnou zájemci, kteří potřebují lehce srozumitelné poučení o úvodních oblastech diferenciální geometrie. Jistě mnohé z čtenářů podnítí k hlubšímu studiu.

Připojme názvy kapitol a hlavních oddílů. Úvod — základy vektorového počtu (str. 11—35). I. Základy teorie křivek (37—131): Vyjádření křivky, délka oblouku křivky; tečna a oskulační rovnice křivky; Frenetovy vzorce; styk křivek, oskulační kružnice; některé důležité druhy křivek; rovinné křivky. II. Základy teorie ploch (133—256): Vyjádření plochy; tečné vlastnosti ploch; vektory na ploše; první základní forma plochy; druhá základní forma plochy; soustavy křivek na ploše; pseudoparalelní přenos vektorů na ploše a geodetické křivky plochy. III. Aplikace (257 až 321): Mechanika hmotného bodu; plochy stavebně inženýrské praxe; kartografické sítě. B. Budinský napsal kapitolu II a první oddíl kapitoly III, ostatní pak B. Kepr.

Překvapuje, že kapitola II je jen o málo větší než kapitola I. Velmi účelná je kapitola III. Aplikace diferenciální geometrie ve fyzice a technice jsou matematikům málo povědomé. Je sympatické, že první oddíl kapitoly III (str. 257—275: Pohyb bodu volného a vázaného na křivku nebo plochu a jeho kinetická energie, diferenciální principy mechaniky — d'Alembertův, Gaussův a Lagrangeovy rovnice) souvisí s původními pracemi prvního autora, takže kniha je výrazně poznamenána jeho vědeckou činností. Oddíl o mechanice hmotného bodu je z aplikací nejvýznamnější a nejzdařilejší. Škoda, že geodetické aplikace jsou omezeny na velmi tradiční kartografická

---

*) Poznámka při korektuře v březnu 1973: Když jsem psal tuto recensi, nevyšla ještě kniha V. Kohouta: *Diferenciální geometrie*, Praha 1971.

zobrazení, ačkoliv uplatnění diferenciální geometrie ve vyšší geodézii je daleko větší. Třetí kapitolou se recensovaná kniha výrazně a k prospěchu odlišuje od Hlavatého díla; Hostinského učebnice je v tomto smyslu někde uprostřed.

Příbuznost mezi plochami, která zachovává obsah, se na str. 198 nazývá „rovnoploché zobrazení", na str. 308 však „plochojevná, správnoplochá, ekvivalentní projekce". Nestor českých kartografů F. Fiala v knize „*Matematická kartografie*" (ČSAV, Praha 1955) mluví o „stejnoplochém zobrazení". Začátečník bude mít co dělat, aby se vyznal v těchto synonymech. Nemyslím, že bylo nutné z francouzského „repère" vytvořit „repér" (str. 66). Čtenář se nedozví, co se na str. 71 a 72 myslí „Frenetovým trojhranem" a zda „průvodní trojhran" $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ na str. 73 je totéž. Až na str. 237 čteme: „V teorii křivek jsme přiřadili každému bodu křivky tři jednotkové navzájem kolmé vektory $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\upsilon}$, $\boldsymbol{\beta}$ a nazvali jsme je Frenetovým trojhranem."

Podle definice rotačních kanálových ploch na str. 305 není jasné, zda by se k nim počítal anuloid — ten totiž nelze celý vytvořit jako obálku kulových ploch se středy na přímce. (Jednoparametrová soustava kulových ploch, jejichž středy vyplní křivku, nemusí mít za obálku kanálovou plochu — to je v příkladu ze str. 305 situace při $(\mathrm{d}r/\mathrm{d}c)^2 \geqq 1$.) Podobné věci lze ovšem snadno odstranit.

Obrázky jsou velmi pěkné, výstižně doplňují a prostorově znázorňují text. Výjimkou je obr. 33 na str. 89, který podrobným popisem je nezřetelný. Autoři s oblibou užívají stejného písmene s indexy nebo značkami rozmanitě umístěnými, ačkoliv různými písmeny by byli usnadnili tisk i četbu začátečníkovi. Platí to zvláště o současném studiu dvojice křivek nebo ploch. Na str. 190 jsou plochy $\varkappa$ a λ s průvodiči $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$, na str. 191 již plochy $\underset{1}{\varkappa}$ a $\underset{2}{\varkappa}$ s průvodiči $\underset{1}{\mathbf{x}}$ a $\underset{2}{\mathbf{x}}$. Na str. 80 mají křivky k_1 a k_2 průvodiče ${}^1\mathbf{p}$ a ${}^2\mathbf{p}$ a pro křivosti křivky k s průvodičem $\mathbf{p}$ bylo důsledně užito ${}^1k$ a ${}^2k$.

V knize je mnoho úplně propočítaných příkladů a ještě přes dvě stě úloh s výsledky, případně i s návody. Jimi autoři významně podepřeli svůj metodický přístup a záměr, napsat úvodní učebnici pro různě připravené čtenáře.

V závěru je na str. 335 a 336 seznam knižní literatury a šest vybraných děl v pořadí podle obtížnosti, ve kterém je autoři doporučují pro další studium. První uvádějí Hostinského knihu — ale její druhá část už předpokládá jisté znalosti o diferenciálních rovnicích obyčejných i parciálních. Čtvrtá je Blaschkeho „*Differentialgeometrie I*" a šestá Hlavatého učebnice. Avšak na tu se s jistou vůlí a trpělivostí může odvážit i čtenář s menšími předběžnými znalostmi — na Blaschkeho knize by však úplně ztroskotal. Blaschke psal velice úsporně a hodně předpokládal, třeba z variačního počtu, analysy, konvexních útvarů**).

Budinského a Keprova kniha bude mít mnoho vděčných čtenářů i úspěch v širokých kruzích.

Zbyněk Nádeník, Praha

**) Srovnej recensi knihy J. J. Stokera: Differential Geometry (1969) v Apl. mat. *15* (1970), 465—469.

ZPRÁVY

ŠEDESÁT LET PROFESORA KARLA HAVLÍČKA

ALOIS ŠVEC, Praha

Prof. KAREL HAVLÍČEK se narodil 4. září 1913 v Praze v rodině železničního úředníka. Vyrostl v ideálním rodinném prostředí a stále vděčně vzpomíná na své rodiče. Po maturitě na reálce v Praze Vinohradech v r. 1932 vystudoval přírodovědeckou

fakultu Karlovy university, kterou ukončil v r. 1937 státními zkouškami pro učitelství matematiky a deskriptivní geometrie na středních školách; v březnu 1939 se stal doktorem přírodních věd. Během universitního studia na něho měli největší vliv profesoři B. BYDŽOVSKÝ, V. HLAVATÝ, V. JARNÍK a F. KADEŘÁVEK. V listopadu 1937 začal pracovat jako vědecký pomocník na fakultě speciálních nauk ČVUT, současně nepravidelně vyučoval jako výpomocný profesor na reálce na Žižkově a na reál. gymnasiu v Libni, později v Chrudimi. Od roku 1940 učil na měšťanských školách na

Letné a ve Strašnicích, kde nakonec působil jako učitel na obecné škole. V posledním roce války byl totálně nasazen na stavbě vinohradského tunelu. Po celou válku byl ve styku se svými bývalými profesory. V revoluci 1945 se zapojil do tzv. „Provozní a informační kanceláře vysokých škol", která pod vedením prof. Kadeřávka uvedla do chodu české vysoké školy, za okupace uzavřené. Dnem 15. května 1945 se stal Havlíček asistentem na přírodovědecké (dnešní matematicko-fyzikální) fakultě KU, kde působil jako docent v letech 1951–1967; od 1. 9. 1967 je mimořádným profesorem pro deskriptivní geometrii na téže fakultě.

Vedle normální činnosti na uvedené fakultě vypomáhal Havlíček v poválečných letech výukou na jiných fakultách, např. na elektrotechnické fakultě ČVUT a na Vysoké škole pedagogické. Nejvýznamnější z toho však byla jeho činnost na Vysoké škole strojní a textilní v Liberci v letech 1953–56, kde byl externím vedoucím katedry matematiky a fyziky. Je nesporně Havlíčkovou zásluhou, že nynější liberecká katedra matematiky patří mezi naše matematická pracoviště s velmi dobrou úrovní.

Vzhledem k válečným nesnázím a vzhledem k tomu, že v poválečné době byla Havlíčkovi nejpřednější učitelská i organisační činnost, jeho styk se zahraničím začal až v jeho padesáti letech. Byl na přednáškových pobytech v NDR, Maďarsku, Polsku a Rakousku, dvakrát se účastnil konference o základech geometrie v Oberwolfachu. Významné pro jeho další činnost bylo vyslání za hostujícího profesora v zimním semestru 1969–70 na techniku v Cáchách; po svém návratu založil v Praze seminář z kombinatorické geometrie, který dosud pravidelně pracuje.

Havlíčkova desetiletá činnost na základních a středních školách způsobila u něho trvalý zájem o vyučování vůbec a o vyučování matematice zvláště; sám říká, že se cítí více učitelem, než vědeckým pracovníkem. Napsal řadu pojednání s pedagogickou tématikou, za jednu takovou práci byl vyznamenán II. cenou v celostátní soutěži SPN a ministerstva školství v r. 1960. Havlíček se zajímal hlavně o vývojovou psychologii studentů a o úlohu osobnosti učitele ve vyučovacím i výchovném procesu.

Velká učitelská praxe a také potřeba poválečné doby vedla Havlíčka k proslovení velké řady populárních přednášek a k napsání popularisačních článků a knih. Sem patří i jeho každoroční exkurse Prahou, při nichž na konkrétních příkladech z bohaté zásoby našich kulturních památek demonstruje svým studentům různé geometrické zajímavosti a zákonitosti výtvarného umění, architektury a urbanistiky zvláště. Velké popularisační uplatnění nalezl v rámci bývalé Socialistické akademie a dnešní Socialistické společnosti pro vědu, kulturu a politiku; zde současně pracuje na katedře matematiky Lidové university v Praze, kterou vytvořil.

U osobnosti typu profesora Havlíčka je téměř samozřejmé, že mnoho energie věnoval i práci v JČSMF. Jejím členem je plných čtyřicet let. Za války byl náhradníkem výboru JČMF a podílel se s jinými kolegy pod vedením profesora F. Vyčichla na záchraně spolkové knihovny před okupačními úřady. Po válce pracoval jako redaktor Časopisu pro pěstování matematiky, od r. 1970 je velmi aktivním členem výboru pražské pobočky a od října 1972 členem ústředního výboru JČSMF. Profesor

Havlíček je rovněž členem komise pro odborné vzdělávání a zvyšování kvalifikace při Klubu školství a kultury ROH v Praze.

Havlíčkova práce byla mnohokrát oficiálně oceněna. V r. 1943 dostal cenu Národní rady badatelské, v r. 1951 cenu Královské české společnosti nauk, v r. 1960 zmíněnou už cenu SPN a ministerstva školství a v r. 1968 zvláštní odměnu ČSAV za publikační činnost v oblasti popularisace matematiky; dále obdržel celkem deset čestných uznání z Karlovy university, Lidové university, ČSTV a ROH. Konečně 5. 10. 1972 mu celostátní sjezd JČSMF udělil titul zasloužilého člena této Jednoty.

Vědecká práce profesora Havlíčka je zřejmá ze seznamu prací. Hlavních výsledků dosáhl v diferenciální geometrii přímkových a tzv. kanálových ploch, v poslední době pracuje intensivně v kombinatorické geometrii a v teorii tzv. konečných geometrií. Je pravidelným recensentem berlínského časopisu Zentralblatt, řadu recensí vypracoval také pro moskevský Реферативный журнал.

Havlíček se vždy neúnavně staral o to, aby mladí matematici měli optimální podmínky ke své práci (sám je vždy neměl). Hlavní devisou mu přitom bylo, podchytit zájem studentů a dát jim chuť do práce. Řada z nich mu vděčí za citlivé vedení v počátcích jejich vědecké činnosti. Kontakt s nimi mu umožňovala i rozsáhlá činnost přednášková, která ovšem není zařazena v připojeném seznamu jeho prací. Až dosud vykonal přes stodvacet veřejných odborných i propagačních přednášek (doma i v cizině).

Ve svých šedesáti letech je profesor Havlíček stále pln elánu, plánů, starostí i zájmů. Rozmluvy s ním jsou vždycky příjemné díky drobným postřehům, příznačným právě pro něho. Všichni mu upřímně přejeme, aby se nejen dožil mnoha let, ale aby byl vždy zdravý, svěží a typicky havlíčkovský.

SEZNAM PRACÍ PROF. K. HAVLÍČKA

Zkratky:

Časopis ... Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, resp. Časopis pro pěstování matematiky.
Pokroky ... Pokroky matematiky, fyziky a astronomie.
Rozhledy ... Rozhledy matematicko-přírodovědecké, resp. matematicko-fyzikální.

Vědecké práce

[1] O větách Pelcových. Časopis, *70* (1941), D6—D11.

[2] Rozvinutelné plochy v přímkové diferenciální geometrii. Rozpravy II. tř. České akademie, roč. *53*, č. 42 (1943), str. 24 a 3 strany německého výtahu.

[3] Klein's Representation of Ruled Surfaces. Spisy přírodovědecké fakulty KU č. *172* (1939 až 1946), 17—20.

[4] Contact des courbes et des hypersphères dans un espace euclidien à n dimensions. — Courbes sphériques. Časopis, *72* (1947), 137—146.

[5] Sur les surfaces enveloppes de sphères. Časopis, *74* (1949), 21—40.

[6] Surfaces réglées qui sont enveloppes de sphères. Czechoslovak Mathematical Journal, *1* (76) 1951, 187—197. Totéž rusky v ruském vydání téhož žurnálu 213—224.
[7] Kanálové *W*-plochy. Časopis, *78* (1953), 347—357.
[8] Poznámka k přímkové geometrii rozvinutelných ploch. Časopis, *81* (1956), 26—37.
[9] Příspěvek k projektivnímu významu derivování. Časopis, *81* (1956), 117.
[10] Přehled základních pojmů z geometrie zakřivených prostorů. Pokroky, *III* (1958), 639—659.
[11] Über eine Konfiguration der Punkte und Kegelschnitte in der projektiven Ebene. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden, *13* (1964), 725—726.
[12] Anamorfosa ve Štěpánského nomogramech s unárním polem. Acta Universitatis Carolinae, Mathematica et Physica, Praha 1968, č. 2, 67—75.
[13] Zur Konstruktion einer endlichen Ebene. Časopis, *95* (1970), 71—75.
[14] Zur Geometrie der endlichen Ebene der Ordnung $n = 4$. (Spoluautor J. Tietze.) Czechoslovak Mathematical Journal *21* (*96*), 1971, 157—164.
[15] Príspevok k teórii konečných projektívnych rovín. (Spoluautor C. Palaj.) Zborník vedeckých prác drevárskej fakulty Vysokej školy lesníckej a drevárskej vo Zvolene, 1971, 31—36.

Knižní publikace

[1] Kde žijeme? Geometrický podklad dnešního názoru na prostor. JČMF 1949.
[2] Technická geometrie v lékařství a strojní prothetice. (Spoluautor F. Kadeřávek.) Přírodovědecké vydavatelství 1952.
[3] Úvod do projektivní geometrie kuželoseček. SNTL 1956.
[4] Cesty moderní matematiky. (Spoluautoři K. Drbohlav, F. Fabian, L. Koubek, L. Nový a J. Sedláček.) Malá moderní encyklopedie, svazek 15, Orbis 1960.
[5] Diferenciální počet pro začátečníky. Polytechnická knižnice, řada II, svazek 19, SNTL. První vydání 1962, druhé nezměněné vydání 1965.
[6] Integrální počet pro začátečníky. Polytechnická knižnice, řada II, svazek 29, SNTL. První vydání 1963, druhé doplněné vydání 1969.
[7] Prostory o čtyřech a více rozměrech. Škola mladých matematiků, svazek 12, Mladá Fronta 1965.
[8] Analytická geometrie a nerovnosti. Škola mladých matematiků, svazek 18, Mladá Fronta 1967.

Odborné a metodické práce

[1] Několik příkladů nekonečných řad. Matematika ve škole, *III* (1953), 166—174.
[2] Geometrické zajímavosti v pražském stavitelství. Rozhledy, *34* (1955), 155—159 a 4 přílohy.
[3] Zhodnocení díla prof. J. Sobotky. Spolupráce velkého kolektivu pod vedením F. Vyčichla, rozmnoženo v Matematickém ústavu ČSAV v Praze 1958. Výtah uveřejněn ve Zprávách Komise pro dějiny přírodních, lékařských a technických věd ČSAV č. 13, Praha 1963, 29—34.
[4] Diskusní příspěvek k novému pojetí základní devítileté školy. Matematika ve škole, *X* (1960), 246—248.
[5] Zásady J. Á. Komenského a naše dnešní učebnice matematiky. Matematika ve škole, *XI* (1960), 53—63 a 107—115.
[6] K závěru diskuse o aplikaci zásad J. Á. Komenského ve vyučování matematice. Matematika ve škole, *XII* (1962), 464—465.
[7] Otázka názornosti ve vyučování matematice. Pokroky, *VIII* (1963), 15—18.
[8] Pořádek v myšlení. Matematika ve škole, *XIV* (1963), 115—117.
[9] O zacházení s matematikou. Pokroky, *IX* (1964), 299—301.
[10] O významu a budoucnosti deskriptivní geometrie. Pokroky, *XVI* (1971), 38—45.

Články příležitostné

[1] Akademik Bohumil Bydžovský pětasedmdesátníkem. Časopis, *80* (1955), 247—249.
[2] Šedesát pět let prof. Milana Mikana. Časopis, *82* (1957), 497—499.
[3] Památce prof. RNDr. Františka Vyčichla. (Spoluautoři I. Babuška a F. Nožička.) Časopis, *83* (1958), 374—387.
[4] Vědecká činnost prof. Dr. Františka Vyčichla. Pokroky, *IV* (1959), 497—501.
[5] Sté výročí smrti Jánose Bolyaie. Pokroky, *V* (1960), 345—357.
[6] Prof. Dr. Miloš Kössler zemřel. Matematika ve škole, *XI* (1961), 570—571.
[7] Prof. Dr. František Kadeřávek zemřel. Pokroky, *VI* (1961), 231—234.
[8] Prof. Dr. Milan Mikan sedmdesátníkem. Časopis, *87* (1962), 386—387.
[9] Osmdesát pět let akademika Bohumila Bydžovského. Pokroky, *X* (1965), 103—104.
[10] Pedagogická činnost akademika Bohumila Bydžovského. Matematika ve škole, *XVI* (1966), 314—318.
[11] Prof. Dr. Jan Bílek šedesátníkem. Pokroky, *XII* (1967), 165.
[12] Hrst vzpomínek na akademika Bohumila Bydžovského. Školství a věda, časopis odborového svazu pracovníků školství a vědy, č. 11 (květen 1969).

Články populární a propagační

[1] O Pelcových větách. Rozhledy, *19* (1940), 105—109.
[2] Geometrie a skutečnost. Rozhledy, *25* (1946), 14—18.
[3] Pojem nekonečna. Rozhledy, *27* (1948), 79—86.
[4] Provádíte zkoušku při řešení rovnic? Rozhledy, *32* (1953), 18—20.
[5] Vícerozměrné prostory v geometrii. Rozhledy, *32* (1953), 65—80.
[6] Z geometrie zakřivených prostorů. Rozhledy, *33* (1954), 10—19.
[7] Od počítání k matematice. (Spoluautor J. Šedý.) Věda a život, č. 9 z roku 1954, 136—138.
[8] Nevlastní elementy v geometrii. Rozhledy, *35* (1957), 19—23.
[9] O jedné úloze z geometrie kružnic. Rozhledy, *35* (1957), 152—157.
[10] Vypořádejme se se složenými zlomky. Rozhledy, *35* (1957), 289—291.
[11] O neeuklidovské geometrii. Význam N. I. Lobačevského. Věda a život, č. 10 z roku 1957, 553—555.
[12] Užití přímkových ploch ve stavitelství. Rozhledy, *36* (1958), 9—17.
[13] O tečnách a normálách křivek. Rozhledy, *36* (1958), 102—106.
[14] O křivosti čar. Rozhledy, *36* (1958), 158—161.
[15] Šroubovice. Rozhledy, *36* (1958), 257—264.
[16] Prostory o čtyřech a více rozměrech. Věda a život, č. 8 z roku 1958, 461—465.
[17] Jazykovědci a matematika. Rozhledy, *36* (1958), 322—325.
[18] Stereografické promítání. Rozhledy, *37* (1959), 160—165.
[19] Užití stereografického promítání v kartografii. Rozhledy, *37* (1959), 260—263.
[20] Jak počítají kybernetické stroje. Věda a technika mládeži, č. 22 z roku 1959, 696—697.
[21] O komplexních číslech. Rozhledy, *38* (1959), 145—147.
[22] Matematika všude užitečná. Věda a technika mládeži, č. 8 z roku 1960, 244—245.
[23] Nechuť k matematice. Osvětová práce, č. 8 z roku 1964, 129.
[24] O významu a budoucnosti deskriptivní geometrie. (Spoluautor O. Setzer.) Rozhledy, *49* (1971), 212—214 a 303—305.

V tomto seznamu nejsou uvedeny recenze odborných knih a prací, úlohy, zprávy, texty pro televizi a rozhlas a články v denním tisku.

OZNÁMENÍ

Mezinárodní matematické centrum S. Banacha ve Varšavě pořádá v době od ledna do června 1974 semestr o matematických základech informatiky. Na programu semestru je teorie výpočetních systémů, teorie programování výpočetních systémů a programovacích jazyků, teorie procesů, procesů v kooperaci a modelování, teorie automatů a formálních jazyků, matematické aspekty metodologie aplikací. Semestr je určen pro kandidáty věd a pracovníky, kteří se na vědeckou práci připravují. Vážní zájemci mohou poslat písemné přihlášky do 30. září 1973 na adresu: Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.

Redakce